

**GONZALO FELIPE AGUINAGA BARRAGÁN**

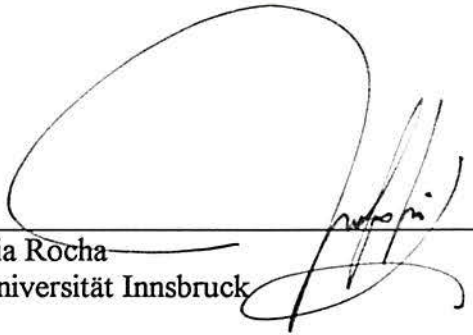
**UMA ABORDAGEM PROBABILÍSTICA PARA DEFINIÇÃO  
DE CRITÉRIOS DE COMBINAÇÃO DE CARGA EM  
NORMAS DE PROJETO ESTRUTURAL**

**Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.**

**Porto Alegre - Brasil  
março, 1995**

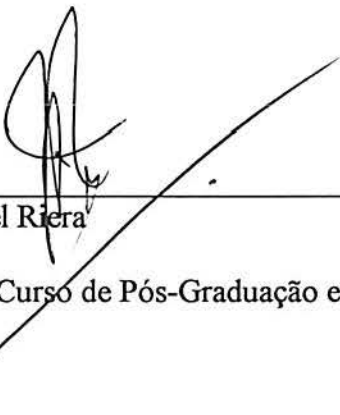
**ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação



---

Prof. Marcelo Maia Rocha  
Dr. Techn. pela Universität Innsbruck  
Orientador



---

Prof. Jorge Daniel Riera  
Co-orientador  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

#### BANCA EXAMINADORA

- Prof. Jorge Daniel Riera (Co-orientador)  
PhD. pela Princeton University
- Prof. Ruy Menezes  
Dr. Techn. pela Universität Innsbruck
- Prof<sup>ª</sup> Michèle S. Pfeil  
D.Sc. pela COPPE, Rio de Janeiro

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Marcelo Rocha pela orientação deste trabalho e em especial pelo seu apoio e constante estímulo, que me ajudou a superar momentos difíceis.

Ao Prof. Jorge Riera que com suas acertadas recomendações e conselhos ajudou-me a contornar os problemas e as dúvidas que se apresentaram ao longo da dissertação.

Aos meus colegas: Vanessa, Adair, Alexandre, João e Moacir, por terem me brindado com seu companheirismo e amizade em todos os momentos da minha permanência no Brasil.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*À Ligia*



## SUMARIO

|   |      |
|---|------|
| LISTA DE FIGURAS .....  | ix   |
| LISTA DE TABELAS .....  | xi   |
| LISTA DE SÍMBOLOS .....   | xii  |
| RESUMO .....  | xvi  |
| ABSTRACT .....  | xvii |
| <b>1. Introdução</b>  |      |
| 1.1 Princípios gerais .....   | 1    |
| 1.2 Conteúdo por capítulos .....  | 7    |
| <b>2. Análise de confiabilidade com dependência no tempo</b>                              |      |
| 2.1 Definição das variáveis da confiabilidade estrutural .....                            | 9    |
| 2.2 Abordagem clássica do problema da confiabilidade estrutural .....                     | 12   |
| 2.3 Abordagem dependente do tempo<br>(o problema da ultrapassagem de um dado nível) ..... | 15   |
| <b>3. Representação de ações sobre estruturas como processos aleatórios</b>               |      |
| 3.1 Definição de processos aleatórios .....   | 17   |
| 3.2 Características mais relevantes dos processos aleatórios .....                        | 18   |
| 3.2.1 No domínio da amplitude .....   | 18   |
| 3.2.1.1 Densidade de probabilidade .....  | 18   |
| 3.2.1.2 Probabilidade de valores extremos .....   | 19   |
| 3.2.1.3 Taxa de ultrapassagem de limites .....  | 21   |
| 3.2.2 No domínio do tempo .....   | 25   |

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| 3.2.2.1   | Função de autocorrelação .....  | 25 |
| 3.2.3     | No domínio da frequência .....  | 26 |
| 3.2.3.1   | Densidade espectral .....   | 26 |
| 3.3       | Tipos de processos aleatórios .....   | 27 |
| 3.3.1     | Processos aleatórios estacionários .....  | 27 |
| 3.3.2     | Processos aleatórios ergódicos .....  | 30 |
| 3.3.3     | Processos aleatórios de banda larga, banda estreita e ruído branco .....                          | 31 |
| 3.3.4     | Processos aleatórios gaussianos ou normais .....  | 32 |
| 3.3.5     | Processos aleatórios discretos .....  | 33 |
| 3.3.5.1   | Generalidades .....   | 33 |
| 3.3.5.2   | Processos aleatórios de Borges Castanheta (B-C processes) .....                                   | 34 |
| 3.3.5.3   | Processos aleatórios de onda quadrada com renovação<br>(renewal pulse processes) .....            | 36 |
| 3.3.5.4   | Processos aleatórios de Poisson filtrado<br>(filtered Poisson processes) .....                    | 37 |
| 3.4       | Representação de ações combinadas pela superposição de<br>processos aleatórios .....              | 38 |
| <b>4.</b> | <b>Ações sobre estruturas</b>   |    |
| 4.1       | Tipos de ações .....  | 42 |
| 4.1.1     | Modelos de ações .....  | 42 |
| 4.1.2     | Ações permanentes .....   | 43 |
| 4.1.3     | Ações vivas gravitacionais .....  | 44 |
| 4.1.3.1   | Ações vivas gravitacionais não-permanentes<br>(ações vivas prolongadas ou de longa duração) ..... | 44 |
| 4.1.3.2   | Ações vivas gravitacionais de curta duração<br>(ações vivas extraordinárias) .....                | 48 |

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| 4.1.3.3   | Ações vivas gravitacionais máximas .....   | 50  |
| 4.1.4     | Ações devidas ao vento .....   | 51  |
| 4.2       | Combinações usuais .....   | 53  |
| <b>5.</b> | <b>Dados disponíveis sobre ações em estruturas</b>   |     |
| 5.1       | Disponibilidade de dados dos vários tipos de ações .....   | 55  |
| 5.2       | Ações vivas gravitacionais prolongadas ou de longa duração .....                                 | 55  |
| 5.3       | Ações vivas gravitacionais extraordinárias .....   | 59  |
| <b>6.</b> | <b>Abordagem à combinação de ações segundo normas atuais</b>                                     |     |
| 6.1       | Introdução .....   | 64  |
| 6.2       | Valores característicos das ações .....  | 65  |
| 6.3       | Classes de segurança .....   | 67  |
| 6.4       | Coefficientes parciais de segurança .....  | 68  |
| 6.5       | Combinações mais desfavoráveis e verificação dos estados limites .....                           | 70  |
| 6.6       | Exemplo de aplicação .....   | 71  |
| 6.7       | Considerações sobre os formatos adotados pelas normas .....                                      | 78  |
| <b>7.</b> | <b>Proposta para superpor ações representadas como processos aleatórios</b>                      |     |
| 7.1       | Considerações preliminares .....   | 81  |
| 7.2       | Valor médio e desvio padrão do máximo de processos individuais .....                             | 83  |
| 7.3       | Superposição de processos de onda quadrada de Poisson com<br>amplitudes Gaussianas (POPAG) ..... | 85  |
| 7.4       | Superposição de POPAG com PPPAG.....   | 92  |
| 7.5       | Exemplo de aplicação .....   | 100 |

|  |  |     |
|--|--|-----|
| 7.6  | Proposta preliminar de norma para combinar ações ..... | 106 |
| 7.6.1  | Definições .....                                       | 106 |
| 7.6.2  | Combinação de ações .....                              | 107 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES .....                    |  | 111 |
| APÊNDICE A : Geração de números aleatórios .....           |  | 114 |
| APÊNDICE B : Resultados da superposição de processos ..... |  | 123 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                           |  | 133 |



## LISTA DE FIGURAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | - Realização de S(t) e R (variando no tempo e independente do tempo) ...  | 11 |
| 2.2 | - Realização de S(t): (a) cruzando variadas vezes $x_0$ e,<br>(b) ultrapassa por primeira vez o limite de segurança .....   | 16 |
| 3.1 | - Conjunto de funções amostrais de um processo aleatório .....  | 18 |
| 3.2 | - Representação de ultrapassagem do nível $x_0$ pelo processo<br>aleatório X(t).....  | 22 |
| 3.3 | - Realização de um processo “Ruído Branco” .....  | 32 |
| 3.4 | - Realização de um processo B-C de tipo misto .....   | 35 |
| 3.5 | - Realização de um processo misto de onda quadrada com renovação .....  | 36 |
| 3.6 | - Realização de um processo de Poisson filtrado .....   | 38 |
| 6.1 | - Características do pórtico e dimensões do pilar a projetasse .....  | 72 |
| 7.1 | - Estatísticas do valor máximo normalizado das eq. (3.42.a,b), (7.2.a,b)<br>e simulação : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão .....  | 84 |
| 7.2 | - Amostra da superposição de dois processos POPAG .....   | 87 |
| 7.3 | - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação<br>quando $\lambda_1 = \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão .....  | 90 |
| 7.4 | - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação<br>quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão .....   | 91 |
| 7.5 | - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para<br>a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando<br>$\lambda_1 = \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... | 94 |
| 7.6 | - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para<br>a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando<br>$\lambda_1 < \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... | 95 |
| 7.7 | - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para  |    |

- a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  
 $\lambda_1 > \lambda_2$  : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... 96
- 7.8 - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para  
a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  $\mu_2 \neq 0$   
e  $\lambda_1 = \lambda_2$  : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... 97
- 7.9 - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para  
a soma de dois processos [(1) e (2) POPAG] e outro [(3) PPPAG], quando  
 $\lambda_i$  iguais : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... 98
- 7.10 - Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulação para  
a soma de dois processos [(1) e (2) POPAG] e outro [(3) PPPAG], quando  
 $\lambda_3 > \lambda_1 = \lambda_2$  : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão ..... 99

## LISTA DE TABELAS

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 4.1   | Situações de combinações usuais em projetos de edificações .....   | 54  |
| 5.1   | Dados de medições de ações vivas gravitacionais prolongadas e<br>ações vivas de projeto agrupadas por tipo de ocupação .....                       | 58  |
| 5.2.a | Dados de ações vivas extraordinárias agrupadas por tipo de ocupação<br>para modelo simples (todo tipo de situação extraordinária) .....            | 61  |
| 5.2.b | Dados de ações vivas extraordinárias agrupadas por tipo de ocupação<br>para modelo múltiplo (distintas situações extraordinárias) .....            | 62  |
| 5.2.c | Dados de ações vivas extraordinárias agrupadas por tipo de ocupação<br>para modelo múltiplo modificado (distintas situações extraordinárias) ..... | 63  |
| 6.1   | Classes de Segurança .....   | 68  |
| 6.1.a | Coeficientes ação/efeito para peso próprio e ação viva gravitacional .....   | 75  |
| 6.1.b | Coeficientes ação/efeito para vento .....  | 75  |
| 6.2.a | Efeitos do peso próprio e ação viva gravitacional .....  | 75  |
| 6.2.b | Efeitos do vento .....   | 75  |
| 7.1.a | Dados da ação viva de longa duração .....  | 100 |
| 7.1.b | Dados da ação viva de curta duração .....  | 100 |
| 7.2   | Valores dos parâmetros das ações de projeto .....  | 101 |
| 7.3.a | Valores dos parâmetros dos efeitos das ações vivas (limite último) .....   | 102 |
| 7.3.b | Valores dos parâmetros dos efeitos da ação do vento .....  | 102 |
| 7.3.c | Valores dos efeitos da ação permanente .....   | 102 |
| 7.4   | Estatística do valor máximo combinado .....  | 103 |
| 7.5   | Valores de $\beta$ associados aos correspondentes fractis .....  | 108 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Maiúsculas

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $A_p$                 | - Área correspondente à área de piso na qual foi medida uma ação |
| $A_r$                 | - Área correspondente à superfície de influência                 |
| $C$                   | - Coeficiente aerodinâmico                                       |
| $C_{XX}(t_i, t_j)$    | - Função de autocovariância                                      |
| $C_{XY}(t_i, t_j)$    | - Função de autocovariância cruzada                              |
| $D$                   | - Domínio de integração  |
| $E[X(t_1)..X(t_n)]$   | - Momento estatístico de ordem $n$                               |
| $F_{RS}(r, s)$        | - Probabilidade que $S(t)$ exceda $R$ no tempo $t$               |
| $F_{RS}(x_0, s)$      | - Probabilidade instantânea de falha do nível $x_0$              |
| $F_{RS, máx}(x_0, s)$ | - Probabilidade de falha do nível $x_0$ , integrada no tempo     |
| $F'_S$                | - Função de distribuição marginal ou de primeira ordem           |
| $F_S(s)$              | - Função instantânea de distribuição de probabilidade            |
| $F_{S, máx}(s)$       | - Distribuição do máximo efeito da ação                          |
| $F_{T1}(t)$           | - Probabilidade da ocorrência de um evento em $T_1$              |
| $F_V(t)$              | - Força devida ao vento  |
| $G_E$                 | - Ação viva gravitacional extraordinária                         |
| $G_{Er}$              | - Ação viva extraordinária produzida por remodelação             |
| $G_S$                 | - Ação viva gravitacional prolongada                             |
| $H[ ]$                | - Função Salto de Heaviside                                      |
| $L_{i, máx}$          | - Valor extremo correspondente a um processo individual          |
| $L(t), L$             | - Ação   |
| $N_A$                 | - Número de <i>peessoas</i> agrupadas numa célula de carga       |
| $N_{CA}$              | - Número médio de células de carga em $A_r$                      |
| $N_E$                 | - Ação produzida pelo peso (extraordinário) da neve              |
| $N[x_0, T]$           | - Número de cruzamentos de nível $x_0$ , em $T$                  |
| $P_f(x_0, T)$         | - Probabilidade de falha do limite (nível) $x_0$                 |
| $P_G$                 | - Ação permanente  |
| $\text{Prob}[X]$      | - Probabilidade que $X \leq x$                                   |
| $Q$                   | - Peso de uma pessoa   |



|                      |   |
|----------------------|---|
| $Q_{NAr}$            | - Peso total de um conjunto de móveis agrupados |
| $R(t), R$            | - Resistência                                   |
| $R_{XX}(t_i, t_j)$   | - Função de autocorrelação                      |
| $R_{XY}(t_i, t_j)$   | - Função de autocorrelação cruzada              |
| $S_E$                | - Ação produzida pelo sismo                     |
| $S'_i$               | - Efeito da ação, pontual no tempo              |
| $S(t), S$            | - Efeito da ação                                |
| $S_{m\acute{a}x}(T)$ | - Máximo efeito da ação em $T$                  |
| $S_X(\omega)$        | - Função de densidade espectral de potência     |
| $T$                  | - Período de tempo de referência                |
| $T_1$                | - Tempo até a primeira ocorrência de um evento  |
| $U$                  | - Ação instantânea unitária                     |
| $V_0$                | - Velocidade básica do vento                    |
| $V_E$                | - Ação extraordinária ou acidental              |
| $V_Q$                | - Ação variável                                 |
| $V(t)$               | - Velocidade instantânea do vento               |
| $V_X$                | - Coeficiente de variação de $X$                |
| $W(t)$               | - Pressão dinâmica do vento                     |
| $X$                  | - Variável aleatória                            |
| $X(t)$               | - Processo Aleatório                            |
| $X(\omega)$          | - Transformada complexa de Fourier              |
| $Z(t)$               | - Margem de segurança                           |

### Letras Minúsculas

|                        |  |
|------------------------|--|
| $c$                    | - Coeficiente de influência ou acompanhamento                |
| $dc$                   | - Constante correspondente a dados medidos de ações vivas    |
| $d(x_0)$               | - Tempo de permanência da onda acima do nível $x_0$          |
| $f_R(x_0)$             | - Densidade de probabilidade de $R$                          |
| $f_{RS}(x_0, s)$       | - Função de densidade de probabilidade conjunta de $R$ e $S$ |
| $f_S(s)$               | - Densidade de probabilidade de $S$                          |
| $f_{S,m\acute{a}x}(s)$ | - Densidade do máximo efeito da ação                         |
| $f_X(x)$               | - Densidade de probabilidade da variável aleatória $X$       |
| $g(R, S)$              | - Função de estado limite                                    |

|             |  |
|-------------|--|
| $k$         | - Coeficiente dependente de $Ar$   |
| $n_i$       | - Número de aplicações de uma ação individual                            |
| $n_L$       | - Número ações a se superpor   |
| $n[x_0, T]$ | - Taxa de cruzamentos do nível $x_0$                                     |
| $p$         | - probabilidade que a amplitude da onda (pulso) de um processo seja zero |
| $t$         | - Tempo ( $0 \leq t \leq T$ )  |
| $x_0$       | - Realização da variável aleatória $R$                                   |
| $x$         | - Valor de $X$   |
| $\omega$    | - Frequência   |
| $z$         | - Constante associada a um fractil correspondente a $\beta$              |

### Letras Gregas

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $\beta, \beta_2$      | - Índice de segurança ou de confiabilidade                             |
| $\beta_m$             | - Índice médio de confiabilidade                                       |
| $\delta[ ]$           | - Função Delta de Dirac  |
| $\varepsilon(x, y)$   | - Campo aleatório com média zero representando variação espacial       |
| $\xi$                 | - Valor médio normalizado  |
| $\zeta$               | - Desvio padrão normalizado  |
| $\Phi$                | - Função de distribuição normal padrão                                 |
| $\psi_0$              | - Coeficiente de combinação da ação principal                          |
| $\psi_1$              | - Coeficiente de combinação freqüente                                  |
| $\psi_2$              | - Coeficiente de combinação quase-permanente                           |
| $\Psi^2_X$            | - Valor quadrático médio   |
| $\sigma^2_a$          | - Variância da ação viva prolongada, medida em grandes áreas           |
| $\sigma^2_s$          | - Variância medida da ação viva prolongada                             |
| $\sigma_{s, \max}(T)$ | - Desvio padrão do máximo do processo resultante                       |
| $\sigma_X$            | - Desvio padrão de $X$   |
| $\sigma^2_X$          | - Variância  |
| $\gamma_b, \gamma_f$  | - Variáveis aleatórias representando variação espacial das ações vivas |
| $\gamma_{\text{mod}}$ | - Coeficiente parcial de segurança por modelação                       |
| $\gamma_n$            | - Coeficiente parcial de segurança por conseqüências da falha          |

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $\gamma_S$               | - Coeficiente parcial de segurança associado a $S$                |
| $\lambda$                | - Taxa média de ocorrência de eventos de Poisson                  |
| $\rho$                   | - Densidade do ar   |
| $\rho_{XY}$              | - Coeficiente de correlação cruzada                               |
| $\mu_{S, \text{máx}}(T)$ | - Valor médio do máximo do processo resultante                    |
| $\mu_X$                  | - Valor médio de $X$  |
| $\tau$                   | - Diferença de tempo $t'_i - t_i$                                 |
| $\tau_c$                 | - Tempo de correlação do processo                                 |
| $\nu^+_S(\mu)$           | - Taxa de ultrapassagem do nível médio para o processo resultante |
| $\nu^+(x_0, T)$          | - Taxa de ultrapassagem do nível $x_0$                            |

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um método para avaliar o máximo efeito produzido por ações combinadas atuando sobre sistemas estruturais. Embora se faça uso da teoria de processos aleatórios, as expressões desenvolvidas são de uso direto e simples, representando uma forma atraente para aplicação prática em projetos estruturais.

Considerando que os dados disponíveis para muitas ações sobre estruturas são os dois primeiros momentos estatísticos (valor médio e desvio padrão) e a taxa de mudança das intensidades das ações individuais, o método proposto faz uso destes valores para obter o valor médio e o desvio padrão do valor máximo do efeito combinado. Usando os dois primeiros momentos obtidos para o valor máximo do efeito combinado, pode-se determinar o valor a ser usado no projeto estrutural como a média acrescida de um múltiplo do desvio padrão conforme a confiabilidade almejada.

As principais vantagens apresentadas pelo método proposto são: 1) a abordagem trata com as estatísticas das ações individuais, que são mais facilmente encontradas e menos afetadas por incertezas do que os valores característicos utilizados nas atuais normas estruturais, 2) os resultados obtidos possibilitam o uso da teoria da confiabilidade estrutural para calcular a propensão à falha associada a um estado limite e, 3) o procedimento proposto para combinar ações mantém a simplicidade necessária para ser usado em normas estruturais, não exigindo do projetista conhecimento da teoria de processos aleatórios.



## ABSTRACT

A method for assessing the maximum effect of combined actions on structural systems is developed. Although the Theory of Stochastic Processes is applied, the derived expressions are suitable for straightforward calculations and hence suitable for practical applications in structural design.

Considering that information on actions upon structures is often available as the two first statistical moments (mean and standard deviation) and the mean occurrence rate of changes in the intensity of individual actions, the proposed approach makes use of these parameters to arrive at the mean value and standard deviation of the maximum combined effect. By using these two first moments of the maximum combined effect, it is possible to determine the value to be used in the structural design as the mean increased by a multiple of the standard deviation, according to the aimed reliability.

The main advantages presented by the proposed method are: 1) the approach deals with statistics of individual actions, which can be more easily found and bear less uncertainty than the characteristic values commonly used in conventional design codes, 2) the obtained results make possible the use of the Theory of Reliability, which yields the probability of failure associated with a given limit state and, 3) the approach keeps the simplicity necessary to be used within some codified procedure, as required in structural design codes, without the need of knowledge of the Theory of Stochastic Processes.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Princípios gerais

Para a análise e projeto de estruturas deve-se quantificar: (1) as ações ou o carregamento aplicado à estrutura ou elemento estrutural e, (2) as resistências que dependem das propriedades mecânicas dos materiais e das dimensões dos componentes (características físicas e geométricas da estrutura).

Na engenharia estrutural prática, os princípios básicos para avaliar a resposta de um sistema estrutural, submetido a um carregamento, são definidos por normas estruturais. A resposta é considerada satisfatória quando não ultrapassa limites a partir dos quais a estrutura apresentará um desempenho inadequado às finalidades do projeto. Estes limites são conhecidos como os *estados limites da estrutura* e estão subdivididos em duas categorias: estados limites último e de utilização ou serviço. Os *estados limites últimos* são aqueles que, caso sejam atingidos, acarretam a paralisação total e definitiva do uso da estrutura. Os *estados limites de serviço* são aqueles que, caso sejam atingidos, acarretam a interrupção parcial ou temporária do uso normal da estrutura. Segundo a resposta estrutural esteja perto ou longe dos limites considerados, o desempenho do sistema estrutural pode ser qualificado como estável/instável, desejável/indesejável ou admissível/inadmissível.

Segundo Ellingwood et al, 1982, um projeto fundamentado nos conceitos de estados limites envolve: (1) identificar todos os caminhos através dos quais a estrutura pode falhar ou deixar de funcionar para seu uso proposto, (2) consideração pelo

projetista da significância de cada estado limite e, (3) determinar níveis aceitáveis de segurança.

Uma vez definidos pelo projetista os estados limites relevantes, ele deve calcular o nível de segurança da estrutura com respeito a estes. O primeiro passo é identificar as incertezas presentes no projeto.

Em geral, o desempenho de um sistema estrutural responde a leis complexas, então, vários tipos de incertezas podem estar presentes no projeto deste sistema, principalmente devido à incompleta ou não consolidada experiência, capacidade intelectual humana limitada e ao carácter naturalmente incerto do futuro. A definição de todas as incertezas envolvidas no projeto de estruturas é praticamente impossível. No projeto preliminar da Norma CLAES 1, 1993, são listadas algumas das incertezas mais importantes que devem ser consideradas, são:

- *Incertezas fenomenológicas*, associadas à ocorrência de eventos imprevisíveis por desconhecimento de aspectos físicos do problema.
- Juízo humano ou experiência subjetiva, são as chamadas *incertezas de avaliação*, associadas à definição e à quantificação do desempenho do sistema estrutural, bem como a caracterização dos estados de falha e não falha.
- *Incertezas de modelagem*, associadas ao uso de modelos matemáticos para representar o comportamento do sistema estrutural frente às ações externas ou estados iniciais que lhe são impostos.
- *Incertezas estatísticas*, associadas à precisão do número de amostras ou a quantidade de observações, onde a precisão para um número de amostras pode ser estimada em termos probabilísticos usando estatística convencional.
- *Fatores humanos*, associados a erros humanos e à intervenção humana para reduzir ou compensar os erros
- *Incertezas físicas*, associadas à aleatoriedade inerente às variáveis de projeto, cuja dispersão pode ser representada por meio de funções de distribuição de probabilidade.

Caso seja possível considerar todas as incertezas no projeto estrutural, o tratamento matemático para avaliar a resposta da estrutura ficaria demasiado complicado. A Norma CLAES 1, base para futuros desenvolvimentos de normas ou uma *norma para escritores de normas*, recomenda um tratamento diferenciado dos



diversos tipos de incerteza usando as ferramentas matemáticas disponíveis para cada tipo delas. Neste trabalho, são consideradas principalmente as *incertezas físicas*, para as quais está disponível a teoria de probabilidades, e no que segue se usa o termo *incertezas* para designá-las.

Define-se o *risco* como a propensão de que ocorra um evento adverso, ou seja a probabilidade que um estado limite seja alcançado. O evento adverso é chamado evento de falha ou simplesmente falha. Identificadas as incertezas a serem levadas em conta no projeto, calcula-se o risco devido a elas, ou seja, mede-se o nível de segurança da estrutura. O projetista deve decidir aceitar ou não o risco avaliado. A Norma CLAES 1, propõe que os critérios de aceitação do risco, para ajudar a tomar uma decisão ao projetista, devem estar relacionados com uma das seguintes categorias de consequências: 1) impacto ambiental, 2) perda de vidas humanas e, 3) perdas patrimoniais. Assim, a segurança da estrutura deve levar em conta não somente a magnitude do risco, mas também as consequências da falha. Os riscos envolvendo somente perdas patrimoniais podem ser avaliados por meio das relações custo/benefício, neste caso, a segurança deve responder a estas relações. Os riscos associados a danos ao meio ambiente devem ser considerados sob o ponto de vista do tempo necessário para que estes danos sejam reparados. Os riscos associados a perdas de vidas humanas devem ser comparados a outros tipos de riscos aos quais as pessoas estão expostas, voluntariamente ou não, seja por imposição social ou condições naturais de vida (Riera e Rocha, 1994<sup>b</sup>).

A confiabilidade estrutural é o complemento do risco estrutural, ou seja, também trata com a propensão que um estado limite seja alcançado, considerando as duas variáveis fundamentais do projeto estrutural: ações e resistências.

Para reduzir o potencial perigo que a incerteza representa no projeto estrutural, esta é considerada como um fator a ser incorporado nos critérios e metodologia de projeto propostos nas recomendações das normas estruturais. Sob esta consideração, o primeiro critério de segurança incluído no projeto de estruturas foi associado ao um *fator de segurança*. Este fator é aplicado ao esforço resistente último do componente estrutural para obter um esforço permissível, que comparado com o valor de referência da ação é um indicativo da falha ou não de um elemento estrutural. Este fator é em geral muito conservativo, pois não leva em conta redistribuição de esforços e mudanças nos esforços pelas condições de contorno ou por variação nas dimensões dos membros



estruturais.

Heyman, 1971, citado por Melchers, 1987, p. 20, usa de um *fator de carga* aplicado ao conjunto de ações que atuam na estrutura. Admite-se que, quando as ações fatoradas são maiores que a resistência de materiais com propriedades elásticas ideais, a estrutura colapsa. Grande semelhança existe entre os conceitos dos fatores de segurança e de carga, porém, deve ser notado que enquanto os fatores de carga trabalham em nível estrutural, os fatores de segurança trabalham em nível de elementos.

Na década de 1960, foi desenvolvido um formato aplicado nas normas de concreto reforçado (Melchers, 1987). Este formato considera o uso de *fatores parciais de segurança*, que aplicados em separado, procuram assegurar uma margem adequada de segurança tanto para resistências como para ações. Este formato é usado até o presente por muitas normas para o projeto estrutural por meio de estados limites.

As expressões baseadas nos fatores parciais de segurança, tem a seguinte forma geral:

$$\text{Resistência Fatorada} \geq \text{Efeitos das Ações Fatoradas} \quad (1.1)$$

onde, segundo Vrouwenvelder e Siemes, s.d., os fatores são concebidos como sendo proporcionais às incertezas e influência das quantidades relevantes e levam a estimativas de níveis de segurança que idealmente não dependem da definição das ações e resistências.

Um número de variações do formato da expressão (1.1) são possíveis. “*A seleção de um formato deve servir para suprir as necessidades de simplicidade e continuidade com formatos existentes, assim como considerações teóricas*” (Ellingwood et al, 1982, p. 978).

Nos formatos incorporados por muitas normas, fatores de carga separados são aplicados para cada uma das ações individuais. Estes formatos são:

- O formato adotado pela NBR-8681, 1988; EUROCODE I, 1992; e, ÖNORM, 1989, especifica uma ação permanente acompanhada por uma ação variável máxima, e adiciona ações pontuais no tempo multiplicadas por fatores de acompanhamento, projetados para refletir a pequena probabilidade que duas ou mais ações alcancem seus valores de projeto simultaneamente.

- O formato LRFD (Load and Resistance Factor Design), desenvolvido por Cornell, 1969, citado por Ravindra e Galambos, 1978, para estruturas de edifícios de aço nos Estados Unidos. Este critério não especifica um valor máximo das ações variáveis e as ações pontuais no tempo aparecem fatoradas diretamente na equação de projeto. Segundo Bennett, 1988, o LRFD é usado no ANSI A58.1-1982 (American National Standards Institute) e no AISC, 1986, (American Institute of Steel Construction).

É importante notar que re-arranjando os termos, os dois formatos são equivalentes.

A partir da década de 1960, considerável interesse foi desenvolvido na aplicação dos conceitos probabilísticos na combinação de ações em estruturas. Ações e resistências já não são mais supostas determinísticas, mas sim probabilísticas.

Segundo Shah, 1970, considerando que num início os fatores parciais de segurança não foram determinados de considerações racionais de segurança e do tipo de sistema estrutural, mas sim de medições empíricas, experiência ou critérios similares, sugere que ferramentas probabilísticas devem ser usadas para calibrar a magnitude dos fatores parciais. Ravindra e Galambos, 1978, e Vrouwenvelder e Siemes, s.d., propõem calibrar os fatores de segurança, através de um espectro completo de situações de projeto aplicadas a vários elementos estruturais, tendo em mente os estados limites último e de serviço, como por exemplo ações distintas atuando em diferentes áreas tributárias (áreas contribuindo com carga) para elementos do tipo viga ou coluna.

Estes formatos usados em normas atuais apresentam algumas desvantagens, entre as quais podem ser mencionadas:

- Segundo Vrouwenvelder e Siemes, s.d., na escolha dos coeficientes parciais de segurança está presente a experiência e/ou juízo pessoal do escritor de normas.
- Floris, 1994, da análise dos formatos similares ao utilizado pelo EUROCODE de 1991, e observa que os coeficientes de acompanhamento deveriam ser determinados usando métodos probabilísticos mas na realidade estes não são usados: *aqui, valores empíricos são sugeridos* (Floris, 1994, p. 1418).
- As ações tem diferentes coeficientes de variação, taxas de ocorrência e durações, mas esta informação, atualmente disponível para ações típicas em estruturas correntes (Riera e Rocha, 1994<sup>a</sup>), não é considerada (de maneira explícita) para levar em conta a



participação de cada ação na ação total.

- O efeito combinado obviamente depende dos coeficientes de conversão ação/efeito, que variam entre componentes estruturais e não são considerados na escolha dos coeficientes de combinação (Riera e Rocha, 1994<sup>a</sup>).

- Floris, 1994, compara resultados obtidos da combinação de ações segundo o EUROCODE com valores *exatos*, e observa que às vezes a combinação segundo esta norma é muito conservativa e em outras é não conservativa.

Paralelamente aos estudos que tentam relacionar probabilisticamente os fatores de segurança com alguma classe de segurança, especificada, medida ou quantificada sob considerações de experiências, na década de 1970 e inícios de 1980, são realizados estudos teóricos modelando as ações individuais como processos aleatórios e o efeito da ação combinado como uma função destes processos.

Trabalhos de Wen, 1977; Larrabee e Cornell, 1979; e, Grigoriu, 1984, apresentam equações (aproximadas e/ou exatas), que dependem das distribuições de probabilidade das ações individuais (que tem formas de integrais ou de séries), para calcular o efeito máximo combinado de processos aleatórios.

Der Kiureghian, 1978, considerando que as equações para combinar processos aleatórios derivando as distribuições de probabilidade requerem extensos cálculos numéricos, sugere que soluções não fechadas ao problema de combinação de ações devem ser esperadas. Ele propõe um formato um pouco mais simples, o qual consiste em avaliar os dois primeiros momentos das ações máximas combinadas (sem derivar a correspondente distribuição), usando funções auxiliares que o autor chama de *funções descritoras*, as quais são apresentadas em forma gráfica (gráficos diferentes para distintas distribuições e processos).

Os métodos antes mencionados, não foram incorporados às normas possivelmente pelo extenso trabalho numérico e analítico que deveria fazer o projetista para realizar os cálculos e a necessidade de um alto nível de conhecimento da teoria de processos aleatórios.

As desvantagens indicadas para os distintos formatos fazem com que renovados esforços tenham que ser encaminhados para estabelecer novos critérios simples de combinação de ações modeladas como processos aleatórios, que possam ser

incorporados em normas futuras. Este é o objetivo central do presente trabalho.

## 1.2 Conteúdo por capítulos

Definidas as incertezas físicas como as incertezas que serão consideradas no projeto estrutural usando estados limites, ações e resistências são as variáveis aleatórias que representam incertezas. A quantificação da confiabilidade estrutural (ou seu complemento, o risco) está relacionada com a probabilidade que pela aleatoriedade inerente às duas variáveis, se produza um evento desfavorável à estrutura. O estudo deste problema e os critérios aplicados para a solução do mesmo são o tema do Capítulo 2.

Sendo as ações as variáveis menos conhecidas, pela natureza física dos processos de carga, estas apresentam maior incerteza na análise estrutural que a resistência. Sob esta consideração, a resistência é tratada como uma simples variável aleatória, enquanto que as ações (que dependem do tempo), são tratadas como processos aleatórios. O estudo dos processos aleatórios é de fundamental importância para modelar as ações individuais e sua combinação. A teoria dos processos aleatórios, conjuntamente com os critérios de combinação de processos aleatórios, são os temas abordados no Capítulo 3.

Modelos perfeitos das ações de projeto não são possíveis pela insuficiência de dados e compreensão imperfeita dos processos de carga. Modelos aproximados, derivados de dados estatísticos são propostos para descrever as ações. O Capítulo 4, trata do estudo destes modelos, concentrando a atenção nas propriedades estatísticas dos processos e enfocando só limitada atenção à parte mecânica dos mesmos. Alguns tipos comuns de ações que atuam em edificações são apresentados.

No Capítulo 5, são apresentados os dados coletados sobre algumas das ações de projeto definidas no capítulo anterior. A coleta e atualização de dados de algumas ações, a partir da literatura existente, é um outro objetivo fundamental do presente trabalho. Esta informação, contendo as principais propriedades estatísticas das ações, pode ser usada em futuros trabalhos.

No Capítulo 6, se reporta a formulação para combinar ações de projeto estrutural usada por várias normas estruturais atuais. Definições de ações, segurança, classes de

segurança, coeficientes parciais, critérios para combinações mais desfavoráveis e, superposição das ações para verificação dos estados limites, são apresentados e analisados. Um exemplo de aplicação para visualizar como é realizada a combinação de ações segundo normas é apresentado.

Um critério aplicável em normas de edificações para combinação (superposição) de ações representadas como processos aleatórios é proposto no Capítulo 7. Os resultados de combinar ações segundo este critério são verificados usando simulação aleatória (Monte Carlo). Um exemplo de aplicação da proposta para combinar ações é realizado e os resultados são comparados com os obtidos no Capítulo 6. No final, apresenta-se um texto preliminar da aplicação da abordagem proposta para a combinação de ações em futuras normas.



## Capítulo 2

# Análise de confiabilidade com dependência no tempo

### 2.1 Definição das variáveis da confiabilidade estrutural

*"O estudo da confiabilidade estrutural está relacionado com o cálculo e previsão da propensão de violação do estado limite para estruturas, em algum instante durante sua vida. Em particular, o estudo da segurança estrutural está relacionado com a violação do estado limite último ou de serviço da estrutura"* (adotado de Melchers, 1987, p. 18).

A segurança de uma estrutura deve ser interpretada com respeito a algum estado limite predefinido (último ou de serviço). Segundo Ang e Cornell, 1974, a medição da segurança no sentido absoluto não existe, pois não é possível quantificar todas as incertezas que podem intervir no projeto estrutural. Portanto, esta análise deve ser feita no sentido relativo a algumas das incertezas. As incertezas consideradas na probabilidade de violação de algum estado limite são as *incertezas físicas*, as quais segundo a Norma CLAES 1, 1993, são as incertezas que resultam da aleatoriedade inerente a algumas das variáveis que descrevem o estado do sistema estrutural.

Na confiabilidade estrutural consideram-se duas variáveis fundamentais para medir a probabilidade de ocorrência da violação de um estado limite. Estas variáveis são as ações ou efeitos das ações que podem atuar na estrutura e a capacidade ou resistência da estrutura.

As ações que se usam são as do projeto estrutural, que devem incluir as seguintes considerações:

- As ações estão desacopladas das características estruturais (independentes da resistência) e dos efeitos da história dos carregamentos passados.
- Os parâmetros considerados para as ações são limitados para reduzir as dimensões do problema.
- Para prever os efeitos das ações se usa a *análise estrutural convencional*.

Para o posterior uso da teoria da confiabilidade estrutural é importante fazer a distinção entre ação e efeito da ação, o que indiretamente foi feito nas considerações apresentadas para as ações. Das definições das normas (NBR-8681 e EUROCODE I, 1992) e das Normas CLAES 1, 1993, pode-se resumir que:

- As *ações*,  $L$ , são as causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas e podem ocorrer de forma direta, por exemplo uma força aplicada na estrutura (uma ação concentrada ou distribuída), ou de forma indireta, por exemplo uma deformação imposta.
- Os *efeitos das ações*,  $S$ , são respostas da estrutura às aplicações das ações, por exemplo deslocamentos, esforços, deformações, forças internas e momentos. A ação pode ser convertida a um efeito da ação através de uma análise estrutural. Nas normas, geralmente se admite que os efeitos das ações estão linearmente relacionados às correspondentes ações.

Sob a hipótese que ação e efeito estão linearmente relacionados, um efeito da ação é igual a uma *ação ponderada* por um coeficiente determinístico, o qual pode ser expresso:

$$S = c \cdot L \tag{2.1}$$

onde  $c$  é o coeficiente de influência ou de acompanhamento, que transforma ação em efeito. Deve-se observar que este coeficiente a) não é uma função de transferência representando a resposta dinâmica do sistema e, b) pode tomar qualquer valor, assim, quando toma o valor unitário, ação é equivalente em valor ao efeito.

No que segue, nas expressões matemáticas se usa  $S$ , e quando for especificado o uso da ação se substitui por  $L$ . Para a *resistência* se usa  $R$ .

As duas variáveis,  $S$  e  $R$ , geralmente são funções do tempo. As ações (efeitos das

ações), variam com o tempo, ainda as chamadas quase estáticas (como por exemplo: ações permanentes de piso). A resistência também pode variar, por exemplo, porque as propriedades dos materiais vão se modificando com o tempo como resultado direto de uma ação aplicada previamente ou por algum mecanismo de deterioração. Geralmente a incerteza na previsão de  $S$  e  $R$  aumenta com o tempo, muitas ações tem a tendência a aumentar e as resistências a diminuir.

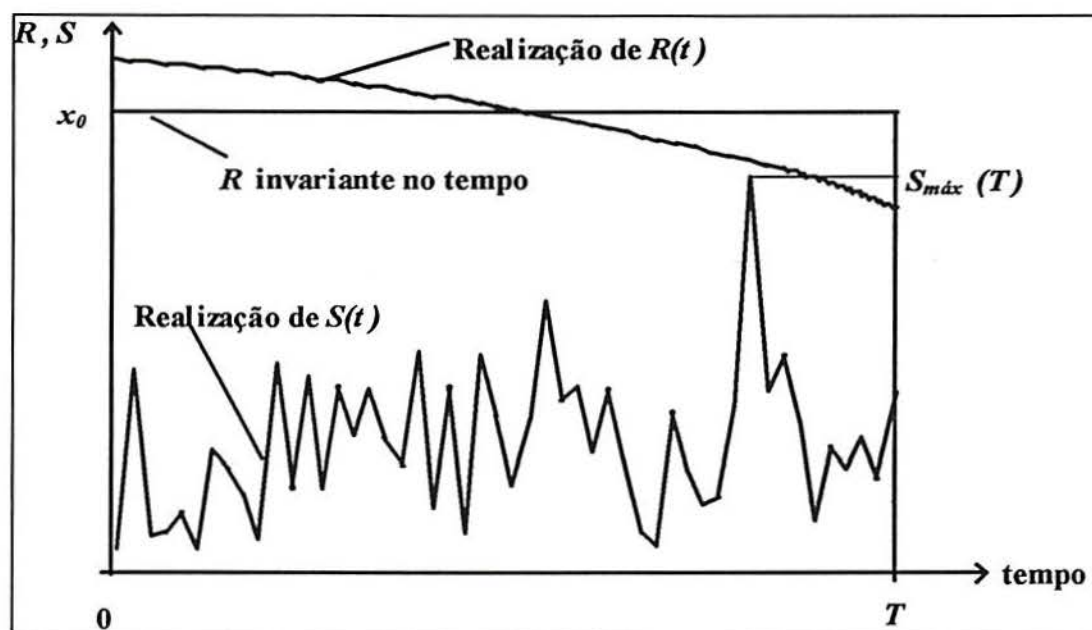


Fig. 2.1 Realização de  $S(t)$  e  $R$  (variando no tempo e independente do tempo).

A quantificação da confiabilidade estrutural, no caso simples de um efeito da ação e uma resistência, como se pode ver na figura 2.1, fica reduzida a determinar a probabilidade  $F_{RS}(r,s)$ , que num tempo  $t$ , ( $0 \leq t \leq T$ ), o efeito da ação exceda à resistência, o qual pode ser expresso:

$$F_{RS}(r,s) = \text{Prob} [ R(t) < S(t) ] \quad (2.2)$$

cuja avaliação é geralmente de grande complexidade e este é conhecido como o *problema básico da confiabilidade estrutural*.

Geralmente, a variabilidade das ações é consideravelmente maior que a da resistência, pelo que para efeitos da análise da confiabilidade com ações dependentes do tempo, a resistência é suposta essencialmente invariante no tempo, então  $R$  pode ser considerada uma variável aleatória governada por uma densidade de probabilidade  $f_R(x_0)$ .



A realização da variável aleatória  $R$  (cujo valor é  $x_0$ ) pode ser vista na figura 2.1 representada por uma horizontal.

Então, o problema da confiabilidade estrutural é resolver a equação (2.2), com  $R$  e  $S(t)$ . Existem duas abordagens principais para este problema, as quais são apresentadas a seguir.

## 2.2 Abordagem clássica do problema da confiabilidade estrutural

A abordagem clássica para resolver o problema da confiabilidade consiste em avaliar o efeito da ação *pico* ou *máximo*,  $S_{máx}(T)$ , do processo  $S(t)$ , no período de tempo  $T$ . A falha da estrutura, acontece no instante em que o valor máximo excede o limite de segurança. Neste caso,  $S_{máx}(T)$  e  $R$ , são duas variáveis aleatórias. A resistência é representada pela função de densidade de probabilidade  $f_R(x_0)$ , e o efeito da ação pela densidade do seu valor extremo  $f_{S,máx}(s)$ , no período total de tempo considerado.

Na avaliação da falha, sob as considerações mencionadas, não está explícito o número de aplicações da ação, pois este é absorvido na derivação da distribuição de  $S_{máx}(T)$ , pelo que o problema dependente do tempo, tem-se convertido em independente do tempo. Portanto esta abordagem é também denominada como confiabilidade integrada no tempo.

Para resolver o cálculo da probabilidade de falha segundo a abordagem integrada no tempo é importante revisar primeiro a análise feita por Ang e Cornell, 1974, para o caso ideal de só um efeito da ação oposta a uma resistência, num instante especificado de tempo  $t$ . Neste caso, a ocorrência de violação de algum estado limite da estrutura é considerada quando  $R$  é menor que  $S$  nesse instante de tempo. Em geral pode ser expresso por uma *função de estado limite*  $g(R,S)$ :

$$g(R,S) \leq 0 \quad (2.3)$$

e o domínio no qual se cumpre esta relação, se conhece como domínio de falha  $D$ .

A probabilidade de violação do estado limite de segurança é idêntica à *probabilidade instantânea de falha*  $F_{RS}(x_0,s)$ , no tempo  $t$ , e é expressa por:

$$F_{RS}(x_0, s) = \text{Prob} [g(R, S) \leq 0] \quad (2.4)$$

que geralmente toma um dos seguintes formatos:

$$F_{RS}(x_0, s) = \text{Prob} [R \leq S] = \text{Prob} [R - S \leq 0] \quad (2.5.1)$$

$$F_{RS}(x_0, s) = \text{Prob} \left[ \frac{R}{S} \leq 1 \right] \quad (2.5.2)$$

$$F_{RS}(x_0, s) = \text{Prob} \left[ \ln \left( \frac{R}{S} \right) \leq 0 \right] \quad (2.5.3)$$

e  $F_{RS}(x_0, s)$  pode ser calculada por:

$$F_{RS}(x_0, s) = \iint_D f_{RS}(x_0, s) dr ds \quad (2.6)$$

onde  $f_{RS}(x_0, s)$  é a função de densidade de probabilidade conjunta de  $R$  e  $S$ . A construção da densidade conjunta é muito difícil, especialmente (que é a maioria das vezes), quando se tem insuficiente informação de  $R$  e  $S$  disponível. Além disso, a integração da expressão (2.6) é em geral praticamente impossível de realizar analiticamente e muito difícil numericamente.

No caso comum quando  $R$  e  $S$  são estatisticamente independentes,  $f_{RS}(x_0, s) = f_R(x_0) \cdot f_S(s)$ , e a expressão (2.6) pode ser escrita na forma:

$$F_{RS}(x_0, s) = \text{Prob} [R - S \leq 0] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(x_0) \cdot f_S(s) dr ds \quad (2.7)$$

que pode ser também expressada:

$$F_{RS}(x_0, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) \cdot f_S(x) dx \quad (2.8)$$

ou integrando por partes:

$$F_{RS}(x_0, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_S(x)] \cdot f_R(x) dx \quad (2.9)$$

onde (2.8) e (2.9) são conhecidas como as *integrais de convolução*. A última expressão "é simplesmente a soma sobre todos os casos da resistência para os quais a ação

*excede a resistência*" (Melchers, 1987, p. 36).

Para umas poucas distribuições de  $R$  e  $S$  é possível integrar a integral de convolução (2.7) analiticamente. Um de estes casos é quando  $R$  e  $S$  são variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade normal, com valores médios  $\mu_R$ ,  $\mu_S$  e desvios padrões  $\sigma_R$ ,  $\sigma_S$ , respectivamente. A equação (2.7) se converte em:

$$F_{RS}(x_0, s) = \Phi \left( - \frac{\mu_R / \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) = \Phi (-\beta) \quad (2.10)$$

onde  $\Phi$  é a função de distribuição normal padrão e  $\beta$  é definido como o *índice de segurança ou confiabilidade*.

Outro caso de uso comum é quando  $R$  e  $S$ , as duas são variáveis aleatórias com distribuição lognormal e valores médios  $\mu_R$ ,  $\mu_S$  e coeficientes de variação (relações  $\sigma/\mu$ )  $V_R$ ,  $V_S$ , respectivamente. Então, (2.7) pode-se escrever:

$$F_{RS}(x_0, s) = \Phi \left( \frac{\ln(\mu_R / \mu_S)}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \right) = \Phi (-\beta_2) \quad (2.11)$$

onde  $V_R$  e  $V_S$  devem ser pequenos, geralmente se assume  $V \leq 0.1$  (Shinozuka, s.d., p. 59), e  $\beta_2$  é o índice de segurança quando as variáveis tem distribuição lognormal.

Deve-se observar, que as expressões (2.10) e (2.11) são válidas somente quando a função de estado limite tem a forma  $g(R,S) = R - S$ , segundo é expressado em (2.7).

No caso geral, para distintas distribuições de  $R$  e  $S$ , a solução de (2.6) é analiticamente impossível, pelo que se recorre a métodos aproximados como o FOSM (First Order, Second Moment Method), que permite calcular  $\beta$  (ou  $\beta_2$  dependendo do caso) a partir do primeiro e segundo momentos das variáveis aleatórias. Conhecido o índice de segurança, com (2.11) ou (2.12) pode-se calcular  $F_{RS}(x_0, s)$ .

Do anterior, o problema da confiabilidade expressado em (2.2) pode ser resolvido seguindo o mesmo procedimento apresentado para resolver (2.4), substituindo  $S$  por  $S_{m\acute{a}x}$  e a densidade de probabilidade  $f_S(s)$  pela densidade de valores extremos  $f_{S,m\acute{a}x(s)}$ , com o que a integral de convolução (2.8) fica:



$$F_{RS_{má\ x}}(x_0, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x) \cdot f_{S_{má\ x}}(x) dx \quad (2.12)$$

### 2.3 Abordagem dependente do tempo (O problema da ultrapassagem de um dado nível)

Newland, 1987, menciona três formas pelas quais uma estrutura submetida ao efeito de uma ação variando no tempo, pode falhar:

- Uma forma de falha, pode estar relacionada à falha por fadiga, causada pela propagação de trincas na região de altos esforços, que está governada pelo número de aplicações da ação, antes que por eventos extremos. Pela consideração feita anteriormente (Seção 2.1), admite-se que a resistência é invariante no tempo, pelo que este tipo de falha é desconsiderado.
- Outra forma de falha, pode ocorrer quando o efeito da ação excursa durante um tempo (mais que uma mínima fração do seu tempo de vida), fora do limite de segurança (ver figura 2.2.a). Esta falha é equivalente com a uma falha de tipo dúctil, não considerada neste trabalho.
- Uma terceira forma de falha, pode ocorrer quando o efeito da ação ultrapassa pela primeira vez o limite de segurança, com tangente positiva, o qual é equivalente a uma falha de tipo frágil (ver figura 2.2.b).

Uma abordagem diferente à clássica para resolver o problema da confiabilidade estrutural consiste em considerar uma margem de segurança,  $Z(t)$ , associada com (2.2) através de:

$$Z(t) = R - S(t) \quad (2.13)$$

e estabelecer a probabilidade que  $Z(t)$  seja zero ou menos no período de tempo  $T$ .

O problema associado com a equação (2.13) é equivalente com o tipo de falha frágil apresentado na figura 2.2.b. A probabilidade que  $Z(t)$  seja zero ou menos em  $T$  é conhecida como a probabilidade da primeira ultrapassagem (primeira ocorrência de um evento adverso), e a abordagem para resolver o problema da confiabilidade é conhecida como a solução ao problema de ultrapassagens (upcrossing). Considerando que

nenhuma restrição é feita na forma da função de estado limite, este conceito é mais geral que o da abordagem integrada no tempo, na que a falha acontece só para o valor máximo da ação, no tempo considerado. A solução ao problema de ultrapassagens é um limite superior à probabilidade de falha do estado limite calculada com a expressão (2.12), como é visto no tratamento dos processos aleatórios (Capítulo 3).

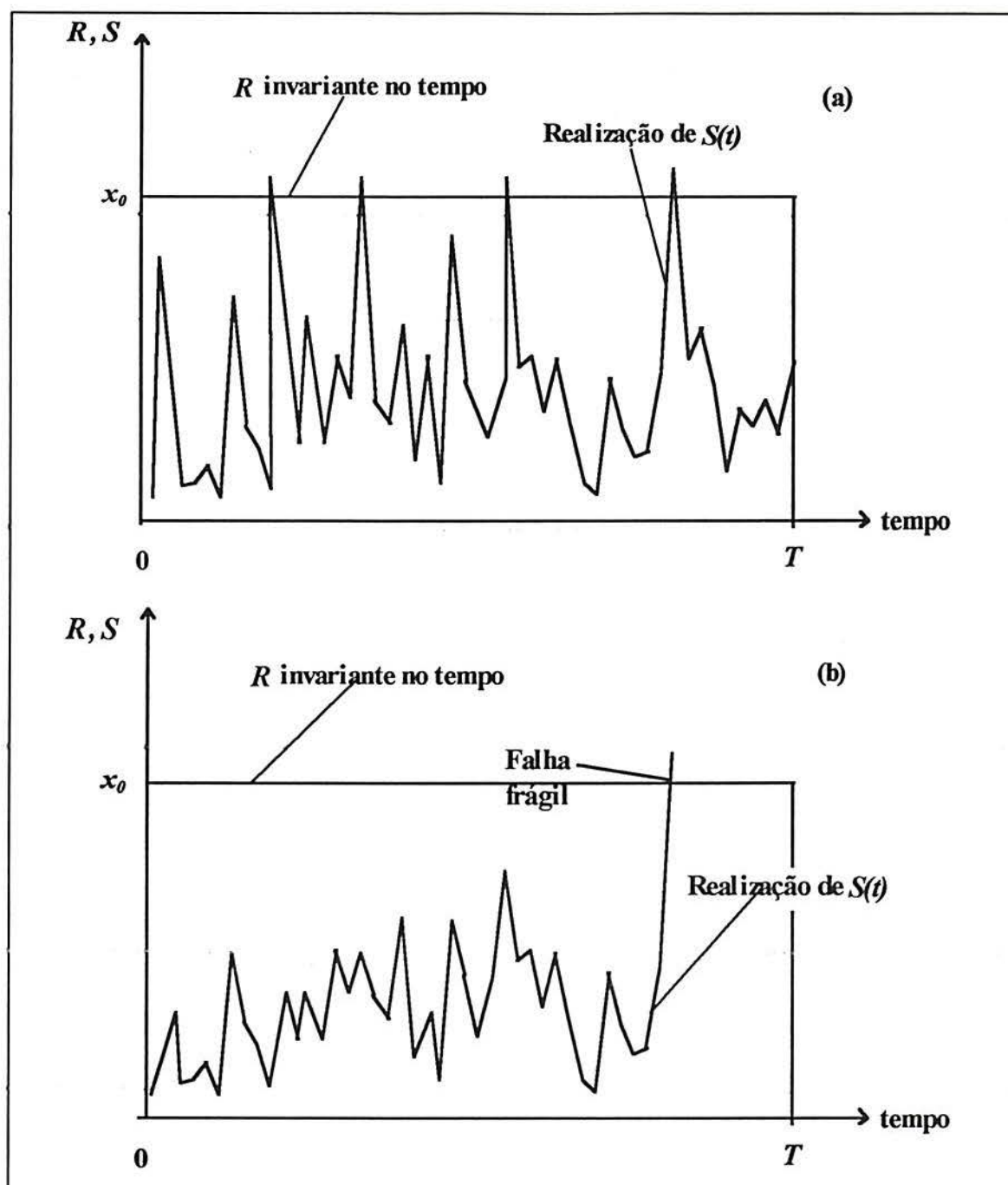


Fig. 2.2 Realização de  $S(t)$ : (a) atravessando variadas vezes  $x_0$ ; e, (b) ultrapassa por primeira vez o limite de segurança.

## Capítulo 3

# Representação de ações sobre estruturas como processos aleatórios

### 3.1 Definição de processos aleatórios

Funções cujos valores são variáveis aleatórias para valores fixados dos seus argumentos são denominadas funções aleatórias.

Um processo aleatório ou processo estocástico é uma função aleatória  $X$ , parametrizada, unívoca do tempo  $t$ . Então, para algum tempo fixado  $t_i$  o correspondente valor instantâneo  $X(t_i)$  é uma variável aleatória. Segundo esta definição, muitos tipos de ações atuantes em sistemas estruturais podem ser consideradas como processos aleatórios.

Um processo aleatório (figura 3.1) envolve um conjunto de funções (funções amostrais), durante um período de tempo  $T$ , chamadas realizações ou amostras do fenômeno e denotadas  $X_j(t)$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ). Exemplo de uma função amostral é o registro da ação do vento num período de tempo de referência. Em geral os processos aleatórios, dependendo se o processo  $X(t)$  e o tempo  $t$  pertencem a conjuntos discretos ou a conjuntos contínuos (segmentos do eixo real), podem ser classificados em quatro amplas categorias (Riera, 1989):

- Processos aleatórios contínuos continuamente parametrizados
- Processos aleatórios discretos continuamente parametrizados
- Processos aleatórios contínuos discretamente parametrizados ou séries do tempo

- Processos aleatórios discretos discretamente parametrizados ou séries discretas do tempo

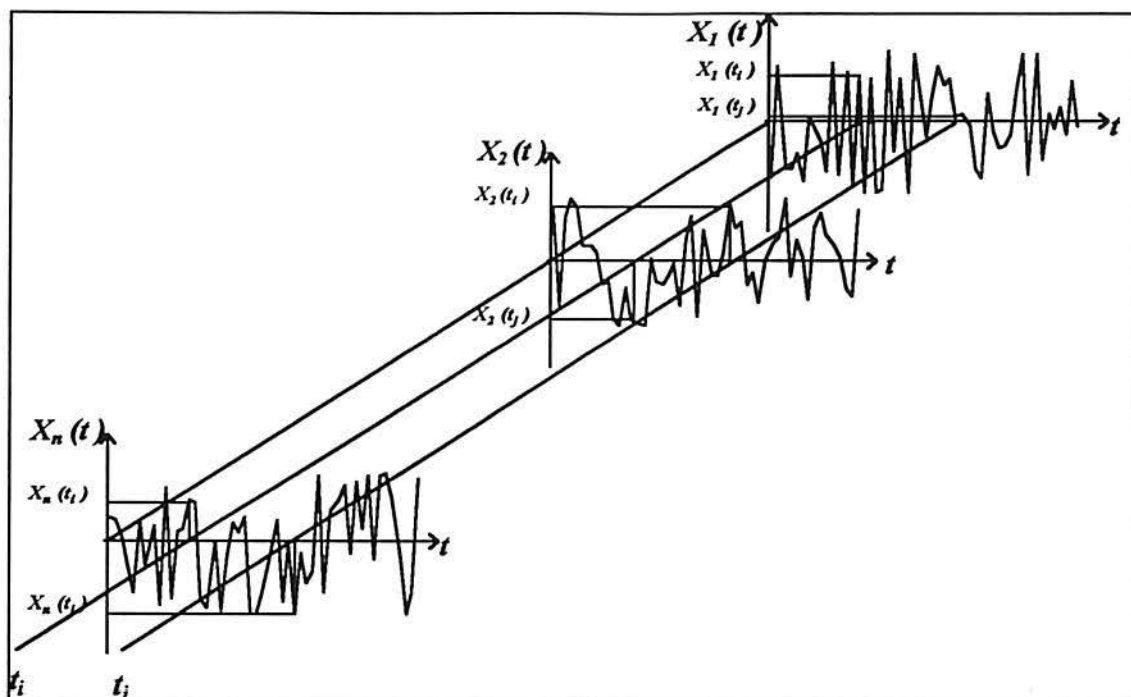


FIG. 3.1 Conjunto de funções amostrais de um processo aleatório.

Processos aleatórios caracterizados por dois ou mais parâmetros indexados são conhecidos como *campos aleatórios*, pelo que todo processo aleatório multi-paramétrico é um campo aleatório.

Já que o processo é um conjunto de variáveis aleatórias indexado no tempo (finito ou infinito), a sua estrutura probabilística (características relevantes), pode ser descrita similarmente à de um vetor aleatório.

## 3.2 Características mais relevantes dos processos aleatórios

### 3.2.1 No domínio da amplitude

#### 3.2.1.1 Densidade de probabilidade

Por definição, a função de densidade de probabilidade instantânea  $f_{X(t_i)}(x)$ , descreve a probabilidade de que os valores instantâneos  $X(t_i)$  (variáveis aleatórias), do



processo  $X(t)$ , assumam um dado valor  $x$  no instante de tempo  $t_i$ . Então, a densidade de probabilidade supre informação das propriedades (estatísticas) do processo aleatório no domínio da amplitude. Assim, a estrutura probabilística do processo fica completamente descrita se forem conhecidas todas as densidades de probabilidade conjunta  $n$ -dimensionais das amplitudes do processo, as quais podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1)}(x_1) \\ & f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \\ & \cdot \\ & f_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.1)$$

(onde:  $x_1, \dots, x_n \in R_n$  e  $t_1, \dots, t_n \in t$ )

incluindo todas as possíveis combinações para valores de  $t_i$  (que são infinitas para um processo aleatório contínuo). Para muitas aplicações é suficiente a especificação das distribuições até segunda ordem.

A caracterização de processos aleatórios no domínio da amplitude através da densidade de probabilidade pode ser simplificada para a solução de muitos problemas fundamentais na análise de confiabilidade, nos quais só é de interesse a densidade dos valores extremos dos processos.

Uma importante hipótese feita na densidade de probabilidade (descrição estatística do processo), é a sua independência da origem do tempo de medição do processo. O processo caracterizado sob esta hipótese se denomina *estacionário* (ver seção 3.3) e é o usado neste trabalho para representar ações.

### 3.2.1.2 Probabilidade de valores extremos

Quando uma ação aleatória é aplicada sobre uma estrutura a intervalos regulares de tempo, a probabilidade de falha pode ser considerada simplesmente como uma função de  $n$  aplicações de ações individuais  $S_i$ , ( $i=1, \dots, n$ ), que são caracterizadas por funções instantâneas de distribuição de probabilidade  $F_{S_i}(s)$ . O valor máximo  $S_{m\acute{a}x}(T)$  destes  $n$  valores e sua distribuição extrema máxima  $F_{S, m\acute{a}x}(s)$ , no período de tempo  $T$ , são definidas:

$$S_{m\acute{a}x}(T) = \text{m\acute{a}x}(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad (3.2.a)$$

$$F_{S, m\acute{a}x}(s) = \text{Prob}[S_{m\acute{a}x}(T) \leq s_1, \dots, S_{m\acute{a}x}(T) \leq s_n] \quad (3.2.b)$$



Considerando independência estatística entre duas aplicações quaisquer  $S_i$  e  $S_j$ ,  $i \neq j$ , a distribuição da ação máxima pode ser escrita:

$$F_{S, \text{máx}}(s) = \prod_{i=1}^n F_{S_i}(s) \quad (3.3)$$

Segundo Nanni e Riera, 1986, soluções analíticas fechadas só são possíveis quando as distribuições  $F_{S_i}(s)$  são do mesmo tipo e apresentam os mesmos parâmetros. Neste caso as distribuições são designadas como distribuição única de origem. Esta consideração (Seção 3.3) é válida para processos chamados estacionários. A distribuição do valor extremo máximo fica:

$$F_{S, \text{máx}}(s) = [F_{S_i}(s)]^n \quad (3.4)$$

com densidade de probabilidade:

$$f_{S, \text{máx}}(s) = n \cdot f_S(s) \cdot [F_{S_i}(s)]^{n-1} \quad (3.5)$$

Nas expressões (3.4) e (3.5) pode-se observar que a densidade de valores extremos máximos do processo aleatório, num período de tempo  $T$ , pode ser obtida da distribuição única de origem, arbitrária e pontual no tempo. Então, para problemas de confiabilidade envolvendo valores extremos, todo um processo aleatório pode ser representado por meio de uma variável aleatória, o que simplifica consideravelmente o tratamento analítico. Quando esta simplificação é possível diz-se que a análise de confiabilidade é *integrada no tempo*, contrapondo sua versão mais complexa *dependente do tempo*.

Para encontrar a função  $F_{S, \text{máx}}(s)$ , no caso em que sejam conhecidas as distribuições de origem, se necessita, em geral, de integração numérica. Critérios para simplificar este problema são aplicados para determinar o tipo de distribuição de extremo e avaliar seus parâmetros.

Uma das abordagens mais usadas, aplicável a processos de carga com um número de aplicações ou ocorrências  $n$  muito grande, é aproximar  $f_{S, \text{máx}}(s)$  por distribuições assintóticas de valores extremos, as quais dependem só do comportamento da *cauda* da função inicial na direção do extremo em questão. Um estudo completo destas distribuições e seus parâmetros pode ser encontrado em Nanni e Riera, 1986.

A solução geral da equação (3.4) para o cálculo da probabilidade do valor extremo máximo, com distribuição de origem Gaussiana, inexistente em forma fechada Nanni e Riera, 1986, com base em dados para algumas estatísticas de ordem existentes na literatura, apresentam equações aproximadas que permitem o cálculo direto do valor médio e desvio padrão, em função do número de eventos, de algumas das estatísticas de ordem *normalizadas*. Os parâmetros destas equações foram determinados por meio de regressão não linear. De interesse para este trabalho são os resultados correspondentes as estatísticas de primeira ordem ou ao *valor extremo máximo normalizado*. O valor médio e o desvio padrão, podem ser calculados usando as seguintes expressões:

$$\xi = [\ln (n_i - 0.918 \ln n_i)]^{0.604 (1-0.866/n_i^2)} \quad (3.6.a)$$

$$\zeta = \frac{1 + 0.0267 \ln n_i}{1 + 0.3486 \ln n_i} \quad (3.6.b)$$

onde  $n_i \geq 1$ , é o número de aplicações de uma ação individual.

### 3.2.1.3 Taxa de ultrapassagem de limites

Outra forma de se definir o problema de confiabilidade diz respeito ao evento de ultrapassagem de um dado nível crítico pelo processo aleatório representando uma ação sobre um sistema estrutural. Este evento está quantificado pela chamada *taxa de ultrapassagem*, que juntamente com o período T de atuação da ação, permite o cálculo da probabilidade de falha do sistema.

Para expressar a condição que um processo aleatório  $X(t)$  cruze um nível  $x_0$ , no período de tempo T, Lin, Y. K., 1976, citado por Schueller e Shinoshuka, 1987, e Thoft-Cristensen, 1982, usa um novo processo aleatório representado pela função salto de Heaviside,  $H[X(t) - x_0]$ . Este novo processo tem valor unitário em  $x(t) \geq x_0$  e o valor zero em  $x(t) < x_0$ . Derivando este processo obtém-se uma função descontínua de impulsos unitários alternados ( $\delta$  de Dirac), na qual, um impulso positivo corresponde a um cruzamento com pente positivo, chamado ultrapassagem (upcrossing), e um impulso negativo corresponde a um cruzamento com pente negativo (downcrossing). Estes processos podem ser observado na figura 3.2.

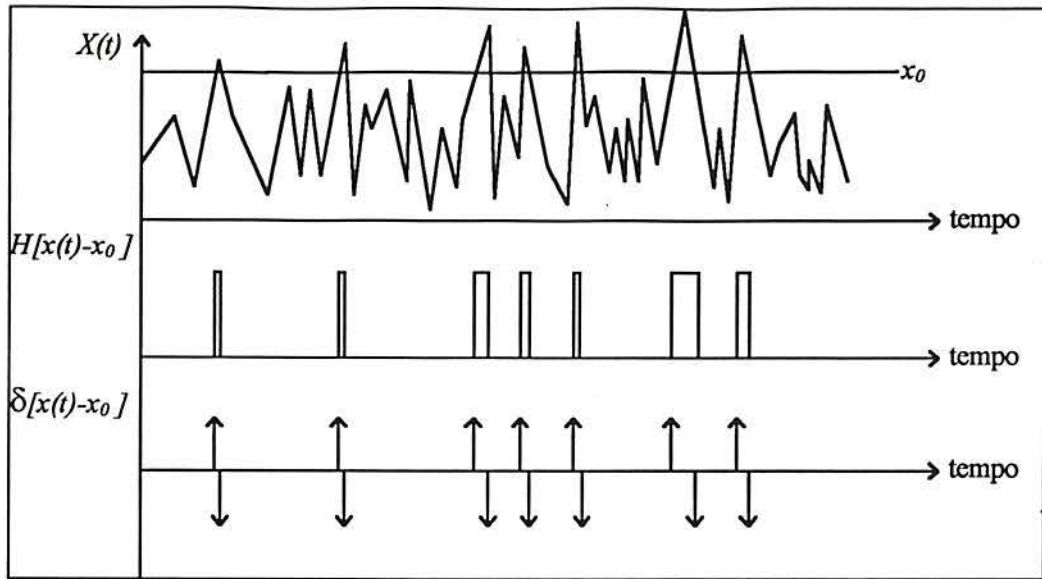


FIG. 3.2 Representação de ultrapassagens do nível  $x_0$  pelo processo aleatório  $X(t)$ .

O número de cruzamentos  $N[x_0, T]$ , do nível  $|x_0|$ , é obtido como a quantidade de impulsos unitários no intervalo de tempo  $T$ , sem considerar a direção dos impulsos, então:

$$N[x_0, T] = \int_0^T |\dot{x}(t)| \delta [X(t) - x_0] dt \quad (3.7)$$

que pode ser escrita como uma taxa de cruzamento  $n[x_0, T]$ , por unidade de tempo:

$$n[x_0, T] = \frac{d}{dt} N[x_0, T] = |\dot{x}(t)| \delta [X(t) - x_0] \quad (3.8)$$

O valor esperado de  $n[x_0, T]$ , para cruzamentos com pendente positiva (ultrapassagem) do nível  $x_0$ , é obtido como:

$$v^+(x_0, t) = E\{n^+[x_0, T]\} = \int_0^\infty \dot{x}(t) \cdot f_{X(t)\dot{X}(t)}(x_0, \dot{x}) d\dot{x} \quad (3.9)$$

onde  $v^+(x_0, t)$  é a taxa média de ultrapassagem,  $\dot{x}(t)$  é a derivada da variável  $x$ , a função de densidade conjunta de  $x_0$  e da derivada é  $f_{X(t)\dot{X}(t)}(x_0, \dot{x})$ , e a expressão (3.9) é conhecida como a fórmula de Rice.

Quando um processo é estacionário em sentido amplo (dois primeiros momentos estatísticos independentes do tempo), a densidade de probabilidade conjunta do processo



e sua derivada é independente do tempo, pelo que a taxa de ultrapassagem é constante. Já que é de nosso interesse a aplicação aos efeitos das ações, (3.9) pode ser expressa como:

$$v^+(x_0) = \int_0^{\infty} \dot{s} \cdot f_{s\dot{s}}(x_0, \dot{s}) d\dot{s} \quad (3.10)$$

A distribuição de Poisson é usada para modelar um número de eventos ocorrendo ao longo de um período de tempo  $T$ , assumindo que os eventos ocorrem independentemente e com uma taxa média de ocorrência constante  $\lambda$  (*arrival rate*).

Seja  $T_I$  o tempo até a primeira ocorrência de um evento, a probabilidade  $F_{T_I}(t)$ , que ocorra um evento para algum intervalo de tempo  $T$ , pode ser expressa por:

$$F_{T_I}(t) = 1 - \text{Prob}[\text{não ocorra em } t=0] \text{ Prob}[\text{não ocorra em } 0 \leq t \leq T] \quad (3.11)$$

A probabilidade de não ocorrência entre 0 e  $T$ , usando a distribuição de Poisson é:  $\exp[-\lambda \cdot t]$ . A probabilidade de não ocorrência em  $t = 0$  tende a um, considerando que a probabilidade de ocorrência em  $t = 0$  é muito pequena e pode ser desprezada. A expressão (3.11) pode ser então escrita:

$$F_{T_I}(t) = 1 - \exp[-\lambda \cdot t] \quad (3.12)$$

A expressão (3.12) é uma distribuição exponencial. Então, “*se o número de eventos ocorrendo num período de tempo fixado é Poisson distribuído com parâmetro  $\lambda \cdot T$ , o tempo entre eventos consecutivos segue uma distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$* ” (Hahn e Shapiro, 1967, p. 162).

Aplicando este resultado na análise de confiabilidade dependente do tempo e considerando que: (1) a probabilidade da primeira ocorrência de um evento é equivalente à probabilidade do primeiro evento de ultrapassagem no período de tempo  $T$ , (2) a taxa média de ocorrência de eventos é equivalente à taxa média de ultrapassagem e, (3) a probabilidade de falha quando  $t = 0$  é desprezível, a expressão (3.12) pode ser escrita:

$$P_f(x_0, T) \approx 1 - \exp[-v^+(x_0) \cdot T] \quad (3.13)$$

onde  $P_f(x_0, T)$  é a probabilidade de falha no período  $T$ .



Quando o valor esperado do número de ultrapassagem,  $v^+(x_0) \cdot T$ , é muito pequeno, como no caso de problemas práticos de confiabilidade, (3.13) pode ser expressa por:

$$P_f(x_0, T) \approx v^+(x_0) \cdot T \quad (3.14)$$

o qual é equivalente a escrever:

$$P_f(x_0, T) \approx \sum_1^n n \cdot \text{Prob}[\textit{exatamente } n \textit{ ultrapassagem}] \quad (3.15)$$

Desta última expressão pode-se concluir que a probabilidade do primeiro evento de ultrapassagem, termo por termo é superior à probabilidade das equações (2.10) e (2.13) :

$$P_f(x_0, T) \geq F_{RS, \textit{máx}}(x_0, s) \quad (3.16)$$

e as duas probabilidades são muito aproximadas (numericamente equivalentes) quando são desprezados termos de ordem superior ( $n > 2$ ), o qual é só possível quando o nível  $x_0$  é muito grande (Larrabee e Cornell, 1981). Então :

$$P_f(x_0, t) \approx F_{RS, \textit{máx}}(x_0, s) , \quad x_0 \gg E[X(t)] \quad (3.17)$$

A taxa de ultrapassagem pode ser relacionada à taxa de ocorrência de eventos de Poisson. Durante um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t \rightarrow 0$ , a probabilidade que uma ultrapassagem ocorra é:

$$v^+(x_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \text{Prob}[(X(t) < x_0 \cap X(t + \Delta t) \geq x_0) / 1 \textit{ evento em } \Delta t] \text{Prob}[1 \textit{ evento em } \Delta t]$$

(3.18)

trabalhando (3.18), resulta:

$$v^+(x_0) = F_S(x_0) \cdot [1 - F_S(x_0)] \cdot \lambda \quad (3.19)$$

a qual é uma expressão muito usada para calcular  $F_{RS, \textit{máx}}(x_0, s)$  em processos discretos, como pode ser visto na Seção 3.3.5 .

### 3.2.2 No domínio do tempo

#### 3.2.2.1 Função de autocorrelação

Tal qual na teoria de variáveis aleatórias, as quais são um caso particular dos processos aleatórios, os momentos estatísticos de diversas ordens podem ser usados para descrever por completo o processo aleatório. Conhecidas as funções de distribuição conjunta n-dimensional, todos os momentos de diversas ordens podem ser avaliados:

$$\begin{aligned}
 E[X(t_1)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{X(t_1)}(x_1) dx \\
 E[X(t_1) \cdot X(t_2)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx \\
 E[X(t_1) \cdot X(t_2) \cdot X(t_3)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f_{X(t_1)X(t_2)X(t_3)}(x_1, x_2, x_3) dx \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

.

.

(onde:  $x_1, \dots, x_n \in R_n$  e  $t_1, \dots, t_n \in t$ )

incluídas todas as possíveis combinações para  $t_i$ . De todos estes momentos, os mais importantes e mais amplamente utilizados são os momentos de primeira e segunda ordem, ou seja, valor médio (valor esperado, espectância)  $\mu_X(t_i) = E[X(t_i)]$  e função de autocorrelação  $R_{XX}(t_i, t_j) = E[X(t_i) \cdot X(t_j)]$ , respectivamente.

Define-se o valor médio num tempo  $t_i$ , como a soma linear da variável  $X(t_i)$ , pesada pela função de densidade  $f_{X_i}(t_i)$ , sobre todos os possíveis valores de  $x_i$ , os quais dão uma medida da tendência central de  $X(t_i)$ . A função de autocorrelação descreve o grau de dependência linear dos valores (aleatórios) do processo num tempo  $t_i$  e dos valores (aleatórios) do processo em outro tempo  $t_j$ .

Então, um sistema completo de valores médio e funções de autocorrelação até ordem n, descrevem por completo o processo aleatório no domínio do tempo. Funções que podem ser derivadas do valor médio e da autocorrelação, são: 1) o valor quadrático médio  $\Psi_{X(t_i)}^2$ , que dá uma medida da dispersão de  $X(t_i)$ , 2) a variância  $\sigma_{X(t_i)}^2$ , que dá uma medida da dispersão de  $X(t_i)$  ao redor do valor médio e, 3) a autocovariância  $C_{XX}(t_i, t_j)$ , que descreve a dependência relativa (à média) do processo em dois tempos

diferentes. Estas funções são:

$$\Psi_X^2(t_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 \cdot f_{X(t_i)}(x_i) dx \quad (3.21.a)$$

$$\sigma_{X(t_i)}^2 = \Psi_{X(t_i)}^2 - \mu_{X(t_i)}^2 \quad (3.21.b)$$

$$C_{XX}(t_i, t_j) = R_{XX}(t_i, t_j) - \mu_X(t_i) \cdot \mu_X(t_j) \quad (3.21.c)$$

As definições acima discutidas, podem ser estendidas para dois processos conjuntamente distribuídos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , pelo qual as funções de correlação cruzada e de covariância cruzada podem ser escritas:

$$R_{XY}(t_i, t_j) = E[X(t_i) \cdot Y(t_j)] \quad (3.22.a)$$

$$C_{XY}(t_i, t_j) = R_{XY}(t_i, t_j) - \mu_X(t_i) \cdot \mu_Y(t_j) \quad (3.22.b)$$

### 3.2.3 No domínio da frequência

#### 3.2.3.1 Densidade espectral

Seja  $X(t)$  um processo aleatório, a transformada complexa de Fourier aplicada a este processo  $X(t)$  resulta num novo processo  $X(\omega)$ , o qual pode ser expresso como:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt \quad (3.23.a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)| dt < \infty \quad (3.23.b)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega \quad (3.23.c)$$

onde (3.23.b) é a condição necessária para que a integral de (3.23.a) tenha solução e (3.23.c) indica a transformada inversa do processo  $X(\omega)$ . Destas equações  $X(t)$  pode ser considerado como a soma das componentes harmônicas com amplitudes  $X(\omega) \cdot d\omega$ . Como nos sistemas lineares dinâmicos, a vantagem do uso da transformada complexa de Fourier é obter um novo processo invariante no tempo.



A definição da transformada complexa de Fourier usada aqui é a mais comum na literatura. Outras definições contemplam variações na constante que acompanha a integral e/ou no sinal da parte complexa do núcleo da transformada.

A dificuldade no uso das equações (3.23.a,b,c), reside no fato de que ao tratar-se com *processos aleatórios* (a realização do processo não tem componentes periódicas), a condição necessária de convergência (3.23.b), não se cumpre.

Para contornar este problema, a idéia básica de usar a transformada de Fourier nos processos aleatórios, consiste em obter, indiretamente, alguma informação da composição da frequência do processo, aplicando a transformada às funções de autocorrelação do processo. Isto é possível já que o valor do processo num tempo tem menos dependência do valor do mesmo processo em outro tempo, a medida que o tempo entre os dois se incrementa, do que resulta que a função de autocorrelação diminui e pode-se cumprir com a condição necessária de convergência. Então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{XX}(t_1, t_2)| dx < \infty \quad (3.24)$$

A transformada complexa de Fourier da autocorrelação é denominada *função de densidade espectral* ou *espectro de potência*. Esta definição é aplicada na discussão que segue.

### 3.3 Tipos de processos aleatórios

#### 3.3.1 Processos aleatórios estacionários

Os processos aleatórios são chamados *fortemente estacionários* ou *estacionários no sentido estrito*, quando todas as funções de densidade de probabilidade conjunta, equações (3.1), permanecem inalteráveis se a escala de tempo é deslocada de um valor arbitrário  $\tau$ , ou seja, a descrição estatística do processo aleatório não depende do tempo  $t$ :

$$f_{X(t_1) \dots X(t_n)}(x_1 \dots x_n) = f_{X(t'_1) \dots X(t'_n)}(x_1 \dots x_n), \quad t'_i = t_i + \tau \quad (3.25)$$

Se a equação (3.25) é válida para  $n = 2$ , o processo é chamado *fracamente estacionário* ou *estacionário no sentido amplo*, então:



$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t'_1)X(t'_2)}(x_1, x_2) \quad (3.26)$$

Pela definição de estacionariedade, um processo é fracamente estacionário se a média e a autocorrelação são independentes do tempo absoluto, ou seja,  $\mu_x(t_i)$  é independente de  $t_i$  e  $R_X(t_1, t_2)$  depende só da diferença de tempo  $\tau = t_j - t_i$ . Então:

$$\mu_X(t_i) = \mu_X = \text{constante} \quad (3.27.a)$$

$$R_{XX}(t_i, t_j) = R_X(\tau) \quad (3.27.b)$$

Da mesma forma dois processos aleatórios estacionários parametrizados no tempo,  $X(t)$  e  $Y(t')$ , são chamados conjuntamente estacionários no sentido estrito se:

$$f_{X(t_1)\dots X(t_n) Y(t'_1)\dots Y(t'_n)}(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) = \\ f_{X(t_1+\tau)\dots X(t_n+\tau) Y(t'_1+\tau)\dots Y(t'_n+\tau)}(x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n) \quad (3.28)$$

Se a equação (3.28) é válida para  $n = 2$  o processo é chamado conjuntamente estacionário no sentido amplo:

$$E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] = R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau) \quad (3.29)$$

Algumas propriedades importantes associadas à estacionariedade das funções de autocorrelação (Melsa e Sage, 1973) são:

(1) As funções de correlação são funções pares de  $\tau$ , ou seja:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (3.30.a)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY}(-\tau) \quad (3.30.b)$$

(2) Pode-se verificar que:

$$R_{XY}(\tau) \leq \sqrt{R_X(0) \cdot R_Y(0)} \quad (3.31)$$

(3) A média da derivada de um processo aleatórios estacionário é sempre zero e a derivada da função de autocorrelação resulta:

$$R_X'(\tau) = - \frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2} \quad (3.32)$$

(3) A função de correlação cruzada normalizada ou coeficiente de correlação cruzada para dois processos conjuntamente estacionários  $X(t)$  e  $Y(t)$ , é:

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{R_{XY}(\tau) - \mu_X \cdot \mu_Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (3.33)$$

(4) Se  $X(t)$  e  $Y(t)$  tem média zero:

$$\rho_{XY}(\tau) = \frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{R_X(0) \cdot R_Y(0)}} \quad (3.34)$$

Foi visto na Seção 3.2.3, que a transformada de Fourier não existe para processos aleatórios, caso estes processos tenham duração infinita ( $-\infty \leq t \leq +\infty$ ) e não sejam absolutamente integráveis. No entanto, a transformada complexa de Fourier pode ser aplicada à função de autocorrelação  $R_X(\tau)$ , se tal transformada existe (por (3.24)), obtendo-se com isso a função de densidade espectral de potência do processo  $X(t)$ , que é uma função real não negativa da frequência  $\omega$ :

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \geq 0 \quad (3.35)$$

Se  $S_X(\omega)$  é conhecida, a função de autocorrelação pode ser obtida pela transformada inversa de Fourier:

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\omega \quad (3.36)$$

As equações (3.35) e (3.36) são denotadas como o *teorema de Wiener-Khintchine* (Bendat e Piersol, 1966) e permitem a transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa. A densidade espectral de potência pode ser interpretada como a distribuição de energia sobre a frequência e para processos aleatórios descreve a sua composição geral de frequência.

Introduzindo em (3.35) a relação  $\exp[-i\omega\tau] = \cos\omega\tau - i \cdot \text{sen}\omega\tau$  o produto  $R_X(\tau) \cdot \text{sen}\omega\tau$  é uma função ímpar e sua integral desaparece, então, a função de autocorrelação e de densidade espectral, que são funções reais par de  $\omega$ , podem ser escritas:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos\omega\tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cdot \cos\omega\tau d\tau \quad (3.37.a)$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \cos\omega\tau d\omega = 2 \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cdot \cos\omega\tau d\omega \quad (3.37.b)$$

as quais são um par de transformadas de Fourier, geralmente usadas para calcular numericamente a autocorrelação e espectro de potência dos processos.

Outra consequência de (3.35) e (3.36) é:

$$R_X(\tau = 0) = \Psi_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (3.38)$$

onde  $\Psi_X^2$  denota o valor quadrático médio, o qual no caso de processos estacionários, não varia com o tempo e é igual à ordenada da função de autocorrelação na origem e também é equivalente ao área sob a curva da densidade espectral.

A função de densidade também é simétrica, pela simetria da função de autocorrelação de processos estacionários:

$$S_X(\omega) = S_X(-\omega) \quad (3.39)$$

Integrando-se  $S_X(\omega)$  para um intervalo de frequência  $[\omega_1, \omega_2]$ , obtêm-se o valor quadrático médio associado a este intervalo.

A função de densidade espectral se usa nos processos aleatórios estacionários para detectar a presença de componentes periódicas que se destaquem por sua amplitude relativamente grande.

### 3.3.2 Processos aleatórios ergódicos

Um processo aleatório é ergódico se uma ou poucas realizações *suficientemente longas*, exibem todas as características estatísticas do processo. A aplicação desta propriedade está na consideração da duração dos registros disponíveis, sendo que uma maior duração implica numa melhor estimação das propriedades estatísticas do processo.

A propriedade de forte estacionariedade pode ser associada à propriedade de ergodicidade e se obtém um processo *fortemente ergódico*, no qual todos os momentos ou densidades de probabilidade conjunta de um único registro são idênticas para um conjunto de realizações.

Os processos fracamente estacionários com esta propriedade são *fracamente ergódicos*. As características estatísticas de uma realização, média, desvio padrão, valor quadrático médio e autocorrelação, podem ser escritas:



$$\mu_X(\tau) = \mu_{X_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_j(t) dt \quad (3.40.a)$$

$$\sigma_X(\tau) = \sigma_{X_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_j^2(t) dt \quad (3.40.b)$$

$$\Psi_X^2 = \Psi_{X_j}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (x(t) - \mu_X)^2 dt \quad (3.40.c)$$

$$R_X(\tau) = R_{X_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_j(t) \cdot x_{i,j}(t + \tau) dt \quad (3.40.d)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XY_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x_j(t) \cdot y_j(t + \tau) dt \quad (3.40.e)$$

No que segue, estacionariedade e ergodicidade são assumidas na análise dos processos aleatórios a menos que se mencione explicitamente o contrário.

### 3.3.3 Processos aleatórios de Banda Larga, Banda Estreita e Ruído Branco

Um processo é denominado de *banda estreita* se sua função de densidade espectral está concentrada ao redor de um valor particular de frequência  $\omega_0$ .

Um processo é de *banda larga* quando a densidade espectral cobre uma ampla faixa de frequências. Quando a faixa de frequências se estende ao infinito, com potência  $S_X(\omega) = \text{constante} = S_0$ , o processo é denominado *ruído branco*. O ruído branco ideal é um processo puramente matemático que é completamente aleatório e não correlacionado. O conteúdo de energia deste processo é uniformemente distribuído, em analogia à luz branca. É evidente que o ruído branco ideal é fisicamente irrealizável, pois seu valor quadrático médio é infinito, ou seja:

$$\Psi_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 d\omega = \infty \quad (3.41)$$

A função de autocorrelação deste processo pode ser obtida aplicando-se a transformada inversa de Fourier à densidade espectral  $S_0$ , do que resulta uma função *Delta de Dirac*:



$$R_X(\tau) = 2\pi \cdot S_0 \cdot \delta(\tau) \quad (3.42)$$

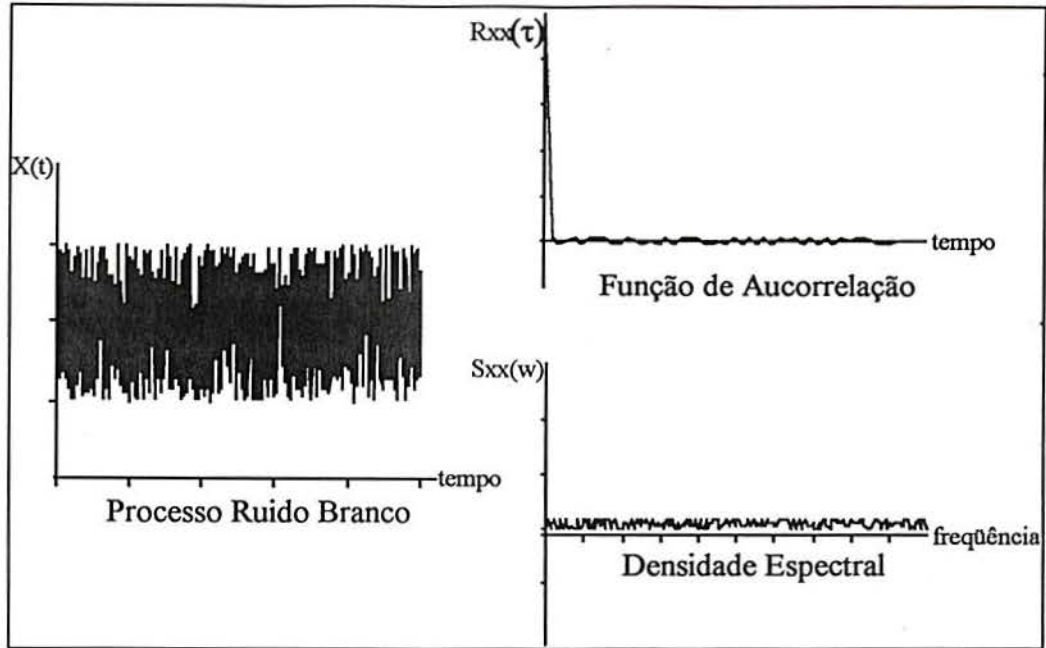


FIG. 3.3 Processo de Ruído Branco.

A equação (3.42) pode ser considerada uma ficção matemática, mas o conceito de ruído branco é muito usado pela sua simplicidade analítica para a verificação de processos que tenham sua densidade espectral sobre uma ampla faixa de frequências. A função de autocorrelação é igual ao valor quadrático médio em  $\tau = 0$  e têm valores quase desprezíveis para  $\tau \neq 0$ . Na figura 3.3, pode-se observar a função de autocorrelação e de densidade espectral típicas estimadas de uma amostra de um processo *ruído branco*.

### 3.3.4 Processos aleatórios Gaussianos ou Normais

Um processo aleatório é chamado Gaussiano ou normal, se todas as suas funções de densidade de probabilidade conjunta, equações (3.1) são *normalmente distribuídas*.

Observando que a distribuição Gaussiana é descrita unicamente pelos dois primeiros momentos, conclui-se que um processo normal fracamente estacionário, cujo valor médio é constante e sua função de autocorrelação depende só de  $\tau$ , é ao mesmo

tempo fortemente estacionário. Neste caso, a média e a função de autocorrelação definem por completo as propriedades estatísticas do processo.

As propriedades aplicáveis as variáveis aleatórias normais, também podem ser aplicadas aos processos Gaussianos. Uma operação linear aplicada sobre um processo Gaussiano, por exemplo diferenciação, dá como resultado outro processo Gaussiano.

Considerando-se a usual escassez de informação estatística sobre processos reais, os processos normais resultam ser muito importantes na análise de problemas práticos.

Na abordagem da confiabilidade dependente do tempo, a taxa de ultrapassagem pode ser obtida para um processo normal, usando a expressão (3.9) como:

$$v^+(x_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_S} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x_0 - \mu_S)^2}{\sigma_S^2}\right] \quad (3.43)$$

que também pode ser escrita como:

$$v^+(x_0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \cdot S_X(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega} \right]^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x_0 - \mu_S)^2}{\sigma_S^2}\right] \quad (3.44)$$

onde  $\mu_S$ ,  $\sigma_S$  são o valor médio e desvio padrão do processo Gaussiano,  $x_0$  é o nível de ultrapassagem,  $\omega$  é frequência,  $S_X(\omega)$  é a densidade espectral do processo.

### 3.3.5 Processos aleatórios discretos

#### 3.3.5.1 Generalidades

Nesta seção são mencionados alguns dos processos aleatórios discretos mais freqüentemente utilizados na representação de ações quase-estáticas sobre sistemas estruturais. Processos discretos apresentados a seguir consideram que a duração das ações tem muita mais importância que a representação completa de seu conteúdo de freqüências, e portanto as discontinuidades não representam um problema para a análise estrutural. Em outras palavras, se a resposta estrutural é linear, a relação entre a ação  $L(t)$  e seu efeito  $S(t)$  pode ser colocada na forma expressada pela equação (2.1).

Para estes processos, geralmente se define uma função de distribuição mista

acumulada  $F'_s(s)$  (chamada distribuição marginal ou de primeira ordem, tal que existe uma probabilidade finita  $p$ , que a *amplitude da onda (ou pulso) seja zero*, o que pode ser interpretado como períodos nos quais não existe atividade. Esta função pode ser expressa:

$$F'_s(s) = p + (1-p) \cdot F_s(s) \quad (3.45)$$

por diferenciação, a densidade de probabilidade é:

$$f'_s(s) = p \cdot \delta(s) + (1-p) \cdot f_s(s) \quad (3.46)$$

onde  $\delta(s)$  é a função Delta de Dirac e  $F_s(s)$ ,  $f_s(s)$ , são a distribuição e densidade de probabilidade das amplitudes das ondas não nulas.

A continuação são apresentados os processos estacionários discretos, geralmente usados para representar ações.

### 3.3.5.2 Processos aleatórios de Borges Castanheta (B-C Processes)

Um modelo básico e simples, proposto por Borges e Castanheta, 1972, citados por Turkstra e Madsen, 1980; e, Thoft Christensen e Baker, 1982, é o processo de B-C (Borges Castanheta). Este modelo assume que as ações mudam depois de intervalos elementares de tempo  $\tau$ , prescritos, determinísticos e iguais. As magnitudes das ações atuando durante estes intervalos elementares são variáveis aleatórias identicamente distribuídas e mutuamente independentes, com função de densidade de probabilidade  $f_s(s)$ .

Na figura 3.4, pode-se observar uma realização do processo B-C.  $T$  é o tempo total de duração do processo  $S(t)$ , e o número de ocorrência de eventos  $n_i = T/\tau$  é determinístico. As expressões apresentadas por Turkstra e Madsen, 1980, para calcular a distribuição de valor extremo máximo, a taxa média de ultrapassagem e o tempo de permanência acima do nível  $x_0$ ,  $d(x_0)$ , para ondas retangulares, são as seguintes:

- Quando a densidade de probabilidade das amplitudes é de tipo misto, o processo é dito de *B-C tipo misto*:

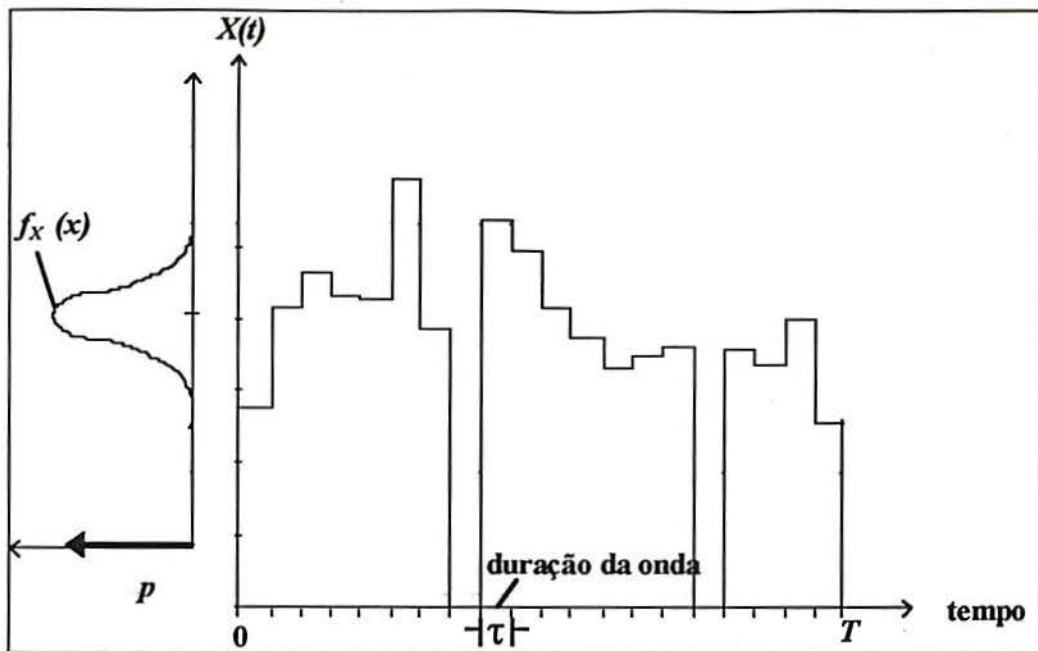


FIG. 3.4 Realização de um processo B-C de tipo misto.

$$F_{S, má x}(x_0, s) = [p + (1-p) \cdot (1 - f_S(x_0))]^{n_i} \quad (3.47.a)$$

$$v^+(x_0) = \frac{1}{t} [p + (1-p) \cdot (1 - F_S(x_0))] \cdot (1-p) \cdot F_S(x_0) \quad (3.47.b)$$

$$d(x_0) = \tau \quad (3.47.c)$$

- Quando a probabilidade de períodos de não atividade é zero ( $p = 0$ ), o processo é dito de *B-C tipo básico*:

$$F_{S, má x}(x_0, s) = [1 - f_S(x_0)]^{n_i} \quad (3.48.a)$$

$$v^+(x_0) = \frac{1}{\tau} [1 - F_S(x_0)] \cdot F_S(x_0) \quad (3.48.b)$$

$$d(x_0) = \tau \quad (3.48.c)$$

- Quando  $p$  tende a um, a onda do processo é aproximada a um pulso, e o processo é dito de *B-C tipo pulso*:

$$F_{S, má x}(x_0, s) = \exp[-\lambda \cdot T \cdot [1 - F_S(x_0)]] \quad (3.49.a)$$

$$v^+(x_0) = \lambda \cdot [1 - F_S(x_0)] \cdot F_S(x_0) \quad (3.49.b)$$



$$d(x_0) \rightarrow 0 \quad (3.49.c)$$

### 3.3.5.3 Processos aleatórios de Onda Quadrada com Renovação (Renewal Pulse Processes)

Um segundo modelo, mais completo que o anterior, é o processo de ondas quadradas com renovação. Neste processo é assumida a inexistência de superposição, de eventos (ondas quadradas) sucessivos, ou seja, uma onda acaba quando inicia a onda seguinte. As amplitudes das ondas são assumidas como variáveis aleatórias identicamente distribuídas e mutuamente independentes, com densidade de probabilidade  $f_S(s)$ , e a ocorrência de ações (ondas), é assumida como um processo de Poisson (tempo entre eventos exponencialmente distribuídos).

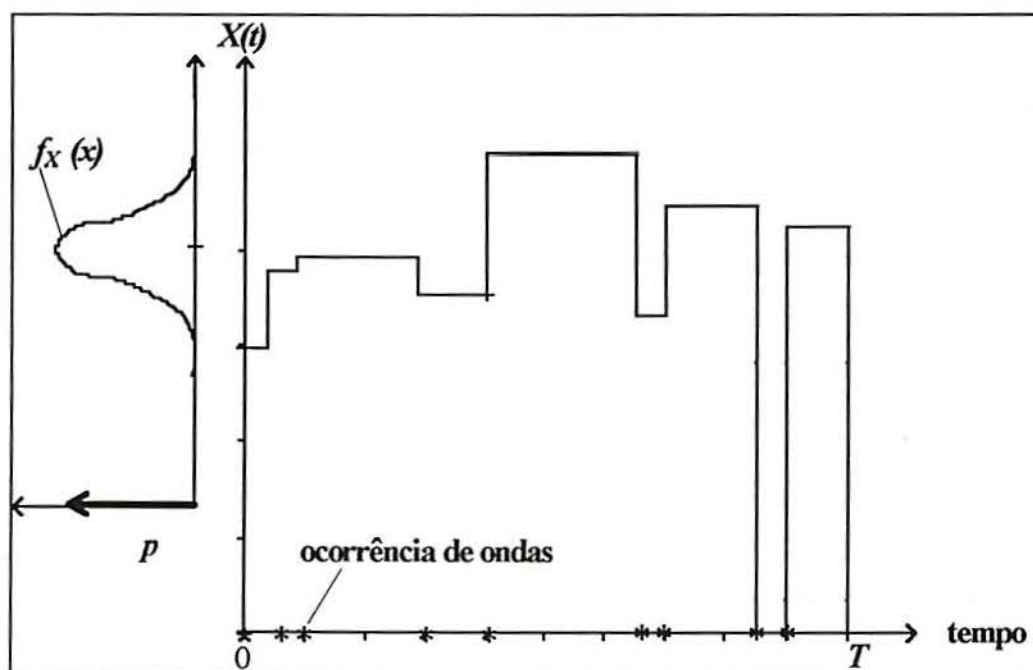


FIG. 3.5 Realização de um processo de onda quadrada tipo misto com renovação.

Na figura 3.5 pode-se observar uma realização do processo de onda quadrada com renovação.  $T$  é o período total de duração do processo  $S(t)$ , e o número médio de ocorrência de eventos é  $\lambda \cdot T$ , onde  $\lambda$  é a taxa média de ocorrência de eventos.

As expressões apresentadas por Turkstra e Madsen, 1980, para calcular a distribuição de valor extremo máximo, a taxa média de ultrapassagem e o tempo de duração de uma ultrapassagem, para ondas quadradas, são as seguintes:

- Quando a densidade de probabilidade das amplitudes é de tipo misto, o processo é dito processo de *tipo misto com renovação*:

$$F_{S,máx}(x_0, s) = \exp [ -\lambda \cdot T \cdot (1-p) \cdot F_S(x_0) ] \quad (3.50.a)$$

$$v^+(x_0) = \lambda \cdot [1 + (1-p) \cdot \{1 - F_S(x_0)\}] \cdot (1-p) \cdot F_S(x_0) \quad (3.50.b)$$

$$d(x_0) = 1 / [\lambda \cdot F_S(x_0)] \quad (3.50.c)$$

- Quando a probabilidade de períodos de não atividade é zero ( $p = 0$ ), o processo é dito simplesmente processo de *onda quadrada de Poisson* (Poisson Square Wave):

$$F_{S,máx}(x_0, s) = \exp [ -\lambda \cdot (1 - F_S(x_0)) ] \quad (3.51.a)$$

$$v^+(x_0) = \lambda \cdot F_S(x_0) \cdot [1 - F_S(x_0)] \quad (3.51.b)$$

$$d(x_0) = 1 / [\lambda \cdot F_S(x_0)] \quad (3.51.c)$$

- Quando  $p$  tende a um, a onda quadrada pode ser aproximada a um pulso, e o processo é dito processo *misto de pulsos* ou simplesmente processo de *pulsos*:

$$F_{S,máx}(x_0, s) = \exp [ -\lambda \cdot (1 - F_S(x_0)) ] \quad (3.52.a)$$

$$v^+(x_0) = \lambda \cdot [1 - F_S(x_0)] \quad (3.52.b)$$

$$d(x_0) \rightarrow 0 \quad (3.52.c)$$

#### 3.3.5.4 Processos de Poisson Filtrado (Filtered Poisson Processes)

Este é um processo mais completo que os anteriores, pois considera que a duração de cada onda não necessariamente é igual ao tempo entre chegadas de ondas e que as ondas podem-se superpor. Neste modelo se assume que a ocorrência de ações (eventos) segue um processo de Poisson, as intensidades das ações em varias ocorrências são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e identicamente distribuídas, e a

duração das ondas é uma outra variável aleatória também assumida a ser estatisticamente independente e identicamente distribuída, geralmente uniforme.

Uma função amostral deste processo pode ser vista na figura 3.6.  $T$  é o tempo de duração do processo, o número médio de ocorrência de eventos é  $\lambda \cdot T$  ( $\lambda$ : taxa média de ocorrência de eventos), e a duração média de cada pulso é  $\mu_d$ .

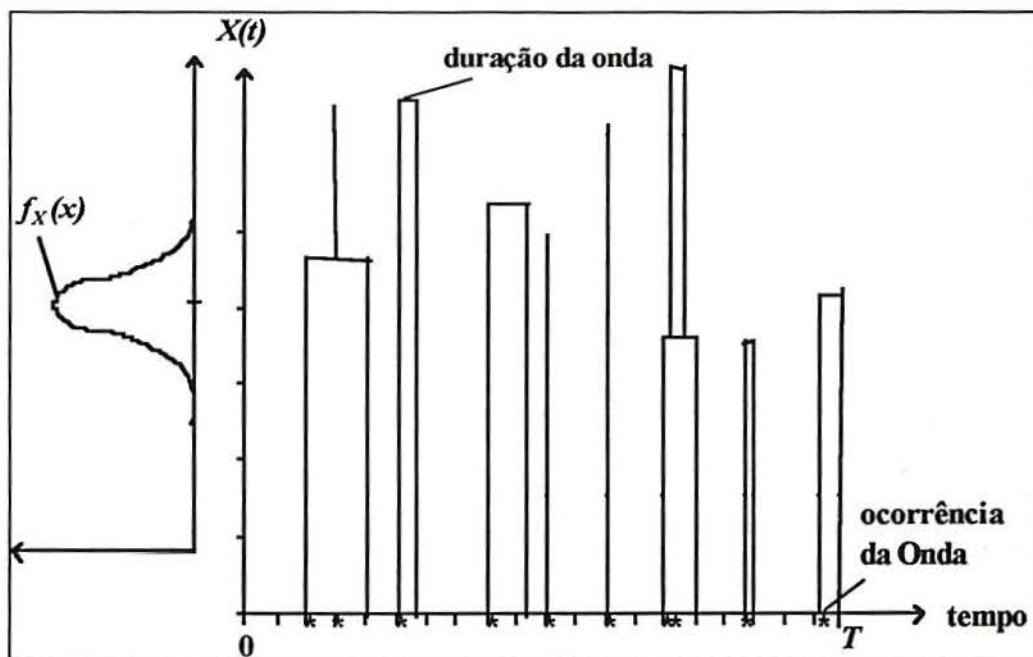


FIG. 3.6 Realização de um processo de Poisson Filtrado.

Larrabee e Cornell, 1979, analisando a taxa de ultrapassagem para combinação de ações, associa o processo de Poisson Filtrado com o misto de ondas, onde a probabilidade de períodos de não atividade pode ser escrita como:  $p = 1 - \lambda \cdot \mu_d$ .

### 3.4 Representação de ações combinadas pela superposição de processos aleatórios

Esta seção apresenta a formulação correspondente ao problema de combinação de ações (efeitos) sobre estruturas. Na Seção 2.1, foi assumido que: 1) um efeito é linear relativo a sua ação e, 2) as ações não dependem de carregamentos passados, ou seja, não importa a ordem de atuação das ações na estrutura. Sob estas considerações, pode-se concluir que a combinação de ações, que são individualmente processos aleatórios, pode ser tratada como uma superposição linear de processos aleatórios.



O processo aleatório do efeito total  $S(t)$ , segundo Larrabee e Cornell, 1981, pode ser expresso por uma equação da forma:

$$S(t) = c_1 \cdot L_1(t) + c_2 \cdot L_2(t) + c_3 \cdot L_3(t) + \dots \quad (3.53)$$

onde  $L_i(t)$  é um processo aleatório correspondente à ação  $i$ , e  $c_i$  é o coeficiente de influência estrutural que relaciona efeito e ação.

Deve-se notar que o máximo da soma de processos não coincide com a soma dos máximos dos processos individuais. Por tanto, considerar o máximo do processo combinado como a soma dos valores máximos instantâneos dos processos individuais resulta em valores conservadores.

Na expressão (3.53) pode ser observado que o processo resultante requer toda a informação no tempo dos processos individuais, ou seja, apenas o conhecimento dos valores máximos individuais não consiste em informação suficiente para avaliar o efeito total.

Considerando que a solução do problema dos valores extremos máximos pode ser conhecida para alguns processos (como os Gaussianos) ou pode ser mais facilmente encontrada que a solução através da abordagem dependente do tempo, soluções alternativas para o problema de superposição de processos tem sido propostas.

A solução mais usual, seguindo os resultados da abordagem clássica, é a combinação determinística de ações, derivada de considerações feitas dos processos de B-C e conhecida como a *regra de Turkstra* (Turkstra e Madsen, 1980). Esta regra para combinar duas ações diz: “*projetar para o maior do extremo máximo no tempo de vida da ação 1 somada ao valor da ação 2 quando o máximo da ação 1 ocorre ou do extremo máximo no tempo de vida da ação 2 somada ao valor da ação 1 quando o máximo da ação 2 ocorre*” (Melchers, 1987, p. 245).

A regra anterior, pode ser estendida para combinar  $n_i$  ações e pode ser escrita:

$$\text{má } xS = \text{má } x \left( \text{má } xS_i + \sum_{j=1}^{n_i} S'_j \right) \quad j \neq i; i = 1, \dots, n_i \quad (3.54)$$

o qual é um formato muito parecido ao usado pelas normas para combinar ações.

Segundo Larrabee e Cornell, 1981, a equação (3.54) é geralmente usada para trabalhos de calibração dos fatores parciais de segurança em normas. Considerando que os processos são estacionários,  $S_j$  é selecionado como o valor médio (segundo a regra de Turkstra, deveria ser um valor arbitrário pontual no tempo) e  $[máx S_i]$  é selecionado como o valor do 95 percentil da ação. Deve-se observar que apesar de ser uma regra simples, “na realidade não serve para cálculos precisos das probabilidades” (Melchers, 1987, p. 245). Também é importante notar que esta regra analisa a confiabilidade estrutural apenas naqueles pontos nos quais os processos individuais alcançam seus máximos.

Uma segunda alternativa para a superposição de processos é através da abordagem dependente do tempo (da primeira ultrapassagem). O problema a ser resolvido usando esta abordagem é o cálculo da taxa de ultrapassagem para o efeito combinado.

Soluções exatas e aproximadas para este problema tem sido apresentadas por alguns autores. Geralmente, as ações são consideradas como sendo um processo contínuo Gaussiano, um processo onda quadrada com renovação ou um processo de Poisson filtrado.

Madsen et al, 1978; Larrabee e Cornell 1979; e, Larrabee e Cornell, 1981, apresentam soluções aproximadas para o cálculo da taxa de ultrapassagem sem considerar a possibilidade de superposição de pulsos dentro de um mesmo processo. Wen, 1977; Wen, 1981; e, Winterstein e Cornell, 1984, apresentam soluções considerando superposição de pulso num mesmo processo (clustering effect).

O denominador comum das equações apresentadas seguindo este critério, é a grande complexidade das mesmas. Todas as equações dependem das distribuições dos processos individuais que geralmente são apresentadas na forma de integrais ou séries (ver equações (3.47) a (3.52)). Isto torna este tipo de solução como sendo pouco aproveitável no presente trabalho, o qual trata de encontrar formatos fáceis para serem usados em normas de projeto estrutural.

O trabalho de Der Kiureghian, 1978, é de particular interesse, pois consiste na mais simples abordagem para o cálculo dos dois primeiros momentos (média e desvio padrão) dos extremos máximos do processo resultante. Os dois primeiros momentos dos

máximos são obtidos em função dos dois primeiros momentos das ações individuais, e um conjunto de funções (descritoras), que caracterizam as flutuações aleatórias dos processos individuais. Uma vez obtidos os dois primeiros momentos do máximo do processo resultante, o cálculo da confiabilidade pode ser feito através do FOSM “*first order, second moment method*”, descrito na Seção 2.2.

A desvantagem do método proposto por Der Kiureghian é a excessiva complexidade para os cálculos pela necessidade de gráficos para cada tipo de processo, o que o torna inadequado para ser incluído em normas de projeto estrutural. Também, como é demonstrado no Capítulo 7, as vezes os resultados obtidos usando este método são não conservativos.



## **Capítulo 4**

### **Ações sobre estruturas**

#### **4.1 Tipos de ações**

##### **4.1.1 Modelos de ações**

De modo geral as ações que atuam sobre estruturas civis podem ser subdivididas em dois grupos: 1) ações devidas aos fenômenos naturais, tais como vento e sismo e, 2) ações impostas pelo homem, tais como ações “mortas” (peso próprio), e vivas gravitacionais (ações de piso). Embora hajam muitas formas de se classificar ações sobre estruturas, dá-se neste trabalho uma ênfase às formas de classificação baseadas na variabilidade temporal das ações, pois estas permitirão uma relação direta com os seus respectivos modelos matemáticos.

Foi visto anteriormente (capítulo 3), que as ações são variáveis aleatórias dependentes do tempo, de tal forma que podem ser consideradas como processos aleatórios. Modelos perfeitos das ações não são possíveis devido a três razões fundamentais: 1) compreensão imperfeita da forma de atuação das ações, 2) a impossibilidade de prever com exatidão valores futuros das ações e, 3) insuficiência de dados para a construção dos modelos. Do ponto de vista prático, modelos aproximados são utilizados para representar as ações como processos aleatórios.

Melchers, 1987, descreve o procedimento para construir um modelo aproximado de uma ação particular, como segue:

- Identificar e definir as variáveis aleatórias que podem ser usadas para representar as incertezas na descrição da ação, as quais dependem do grau de compreensão do processo de carga.
- Selecionar uma distribuição de probabilidades apropriada para cada variável aleatória envolvida.
- Selecionar os parâmetros da distribuição a partir de dados disponíveis e usando técnicas tradicionais para estimação de parâmetros.

A modelagem das ações pode ser um processo bastante complexo, desde que um grande número de parâmetros pode ser necessário. Simplificações são realizadas na modelagem, e o número de variáveis deve ser reduzido tanto para facilitar o tratamento matemático como para se adequar à disponibilidade de dados sobre a ação que se deseja modelar.

No que segue são apresentados modelos de ações geralmente utilizadas em projetos estruturais. As ações consideradas são: ação permanente, ação viva gravitacional não-permanente, ação viva gravitacional extraordinária, e ação devida ao vento. A ênfase dos modelos apresentados está dada principalmente nas propriedades estatísticas. A relação entre estas propriedades estatísticas e aspectos físicos das ações podem ser descritas em normas específicas, como é o caso da ação do vento (NBR 6123, 1987).

Ações como neve, sismo, entre outras, as quais não são tratadas neste trabalho, são também muito importantes em algumas localidades geográficas e para alguns tipos de estruturas e podem ser modeladas seguindo as mesmas regras que para as outras ações aqui consideradas.

#### **4.1.2 Ações permanentes**

As ações permanentes  $P_G$ , as vezes também chamadas quase-permanentes, são aquelas que não variam significativamente ao longo da vida útil da estrutura.

Ações permanentes típicas são as ações mortas resultantes do peso próprio dos materiais usados na construção, bem como de instalações permanentes. Segundo Melchers, 1987, ações permanentes geralmente seguem uma distribuição normal, tipicamente com média igual à ação nominal calculada dos pesos próprios, e com coeficiente de variação de 0.05 a 0.10. A variabilidade das ações mortas geralmente é devida aos pequenos erros de execução do projeto, que resultam em componentes com dimensões ligeiramente diferentes daquelas previstas (por exemplo espessura de lajes). Em geral, a variabilidade nas propriedades dos materiais é considerada uma causa desprezível da variabilidade de ações mortas.

### **4.1.3 Ações Vivas Gravitacionais**

#### **4.1.3.1 Ações Vivas Gravitacionais Não-Permanentes (Ações Vivas Prolongadas ou de Longa Duração)**

Ações vivas de longa duração  $G_S$ , podem ser definidas como as ações gravitacionais não-permanentes, sustentadas ou prolongadas, associadas com o uso normal da estrutura, que atuam numa área de piso durante sua vida útil. Estas ações são geralmente chamadas *ações vivas prolongadas*, ou *ações de piso prolongadas*. As ações vivas prolongadas, podem ser produzidas por moveis, livros, material armazenado, equipamento, outros objetos colocados pelos residentes depois da construção e por pessoas trabalhando normalmente. Não são incluídas neste conceito paredes, divisões, portas e janelas.

Na década de 1970, grande atenção foi dirigida à recompilação de medições de ações vivas e ao desenvolvimento de modelos aleatórios realísticos. Medições de ações vivas fornecem uma idéia (instantânea) da ação atuando numa área de piso de referência da estrutura, mas não são ainda as ações de projeto estrutural. A variabilidade espacial e temporal deve ser considerada.

Um modelo básico, para modelar a variabilidade espacial, foi desenvolvido por Pier e Cornell, 1973, que propõe uma expressão para a intensidade da ação de piso numa localização arbitrária, e depois a ação prolongada de piso é transformada numa ação



equivalente uniformemente distribuída de projeto  $G_S$ . Segundo este modelo a ação viva é uma função aleatória variando espacialmente, representada pela seguinte expressão:

$$w(x,y) = \mu_{GS} + \gamma_b + \gamma_f + \varepsilon(x,y) \quad (4.1)$$

onde  $w(x,y)$  é a intensidade da ação numa área infinitesimal  $\Delta A$  na localização  $(x,y)$ ,  $\mu_{GS}$  é o valor médio da intensidade da ação viva obtida das medições,  $\gamma_b$  e  $\gamma_f$  são variáveis aleatórias com média zero que representam a variação da média  $\mu_{GS}$  de um edifício a outro e de um piso a outro (de todo edifício), respectivamente, e  $\varepsilon(x,y)$  pode ser um campo aleatório com média zero e independente dos termos  $\gamma_b$  e  $\gamma_f$ , que reflete a variação espacial da intensidade da ação num piso definido.

A ação instantânea total, atuando numa área de referência  $Ap$  de piso, é a integral de  $w(x,y)$  sobre a área. A ação instantânea unitária  $U$ , assumindo independência da área de piso, tem média igual a  $\mu_{GS}$ . A variância da ação  $U$ , depende da área e da hipótese feita na correlação espacial da intensidade da ação. A separação das ações em diversas localizações  $(x,y)$ , é estatisticamente não-correlacionada quando se assume que  $\varepsilon(x,y)$  é um processo de ruído branco normalizado atuando numa área finita. A variância, segundo a última hipótese, pode ser expressa por:

$$\text{VAR}[U] = \sigma_a^2 + \frac{\sigma_s^2}{Ap} \quad (4.2)$$

onde  $\sigma_s^2$  é a variância da ação viva prolongada que pode ser estimada das medições, e  $\sigma_a^2$  é a variância da ação viva prolongada que pode ser estimada de medições para grandes áreas. Considerando que  $\sigma_s^2$  e  $\sigma_a^2$  são independentes da área, a expressão (4.2) descreve um processo espacialmente independente.

A ação  $U$  é uniforme sobre a área de referência  $Ap$ , da medição da ação, mas não é uniforme sobre a superfície de piso  $Ar$  (área de influência), que vai ser considerada na análise da estrutura para um efeito particular da ação. Sob esta consideração, a variância da

ação viva equivalente prolongada  $G_S$ , uniformemente distribuída, com média  $\mu_{GS}$  pode ser escrita:

$$\sigma_{GS}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_S^2 \frac{k}{Ap} \quad (4.3)$$

onde  $k$  é uma função de uma superfície de influência particular  $Ar$ .

Estudos complementares de Ellingwood e Culver, 1977, e Chalk e Corotis, 1980, recomendam usar  $k = 2.2$  (adimensional), resultado da análise de ações vivas aplicadas em áreas de influência de pilares.

A partir de dados de medições de ações vivas em escritórios, e considerando  $k = 2.2$ , Harris et al, 1981, ajusta a seguinte expressão para a variância:

$$\sigma_{GS}^2 = \left[ \frac{Ar + 51.1}{Ar + 23.2} \right] \sigma_S^2 \left( \frac{Ap}{Ar} \right)^{0.51} \quad (4.4)$$

onde as constantes foram convertidas em unidades de metros quadrados, de tal forma que,  $Ap$  e  $Ar$  devem estar nas mesmas unidades. Esta última expressão também é considerada válida para outros tipos de ocupações que *não sejam escritórios*.

Melchers, 1987, e Choi, 1990, estudam o efeito da correlação espacial entre as ações vivas, considerando que  $\varepsilon(x,y)$  já não é mais um processo de ruído branco, e propõem a seguinte expressão para o cálculo da variância:

$$\sigma_{GS}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_{SP}^2 \frac{\pi \cdot dc}{Ap} \left[ 1 - \sqrt{\frac{dc}{Ap}} \right]^2 \quad (4.5)$$

onde  $\sigma_a^2$  é a mesma da expressão (4.3),  $\sigma_{SP}^2$  é a variância do processo  $\varepsilon(x,y)$ , e  $dc$  é uma constante. Segundo Choi, 1991, os parâmetros  $\sigma_a^2$ ,  $\sigma_{SP}^2$  e  $dc$ , devem ser calculados a partir de medições de ações vivas.

Identificada a intensidade da ação viva como uma variável aleatória com valor médio e desvio padrão obtidos de medições e ajustados através das equações (4.4) ou (4.5), a

descrição desta variável é completada com a seleção de uma distribuição de probabilidade apropriada.

Corotis e Doshi, 1981, ajustam, pelo método dos momentos, três distribuições de probabilidade comuns aos dados de medições de ações vivas disponíveis. Testes estatísticos Chi-quadrado e K-S (Kolgomorov-Smirnov), acompanhados de inspeção visual, foram aplicados para verificar a qualidade dos ajustes, dos quais resultaram as seguintes recomendações:

- A *distribuição normal* pode ser usada pelas vantagens estatísticas que oferece. Esta distribuição leva a uma boa aproximação na região próxima à média. Porém, na região da cauda, importante em confiabilidade estrutural, apresenta deficiências.
- A *distribuição lognormal*, que define uma variável limitada a valores positivos e apresenta coeficiente de assimetria positivo.
- A *distribuição Gamma*, que também está limitada a variáveis positivas e apresenta coeficiente de assimetria positivo.

As distribuições lognormal e Gamma dão uma boa aproximação na região da cauda, porém a Gamma apresenta melhor comportamento na região próxima à média que a lognormal.

Ellingwood e Culver, 1977, Wen, 1979, Chalk e Corotis, 1980, e Harris et al, 1981, consideram que a distribuição Gamma descreve adequadamente a ação viva de longa duração para o cálculo da ação máxima. Choi, 1990, da análise de dados de medições obtidas em Sidney (Austrália), observa que a distribuição lognormal ajusta melhor os dados. Idota e Ono, 1994, da análise de dados de ações vivas obtidos em edifícios de escritórios, concluem que a distribuição da intensidade das ações depende da área de influência. Para áreas menores de 25 m<sup>2</sup> a distribuição Gamma deve ser usada, e para áreas maiores a 25 m<sup>2</sup>, a distribuição normal ajusta melhor que as outras.

Um estudo de mudanças de moradores realizado na Inglaterra por Mitchell e Woodgate, 1971, citado por Chalk e Corotis, 1980, p. 2021, é o suporte para usar um modelo de Poisson para a dependência temporal da ação viva. Deste estudo, as flutuações



da ação viva durante a ocupação de um piso são pequenas, quando comparadas com a mudança de ocupação, de tal forma que a ação viva durante a ocupação pode ser assumida constante.

As características mencionadas antes indicam que a ação viva prolongada pode ser modelada como um processo de onda quadrada de Poisson cujas amplitudes apresentam densidade de probabilidade normal, lognormal ou Gamma, com média igual ao valor médio obtido dos dados de medições e desvio padrão calculado usando as equações (4.4) ou (4.5).

#### 4.1.3.2 Ações Vivas Gravitacionais de Curta Duração (Ações Vivas Extraordinárias)

Ações vivas gravitacionais podem ser causadas por eventos extraordinários fora do uso normal da estrutura, tais como: agrupamento de pessoas por festas, assembléias, emergências, agrupamento de móveis por remodelação de quartos contíguos, etc. Estes eventos tem durações relativamente curtas e introduzem um carregamento maior quando comparados com eventos por uso normal dos recintos. As ações vivas causadas por estes eventos são conhecidas como *ações vivas extraordinárias* ou *ações de piso extraordinárias*.

Pier e Cornell, 1973, apresentam um modelo para ações vivas extraordinárias, o qual considera que um conjunto de pessoas (ou móveis) está concentrado *em grupos* atuando numa *célula de carga*. O número de pessoas, o peso de cada pessoa e a distribuição das células numa área especificada são assumidas aleatórias. Segundo este modelo, a ação viva extraordinária  $G_E$ , pode ser representada pela expressão seguinte:

$$G_E = Q \cdot N_A \cdot N_{CA} \quad (4.6)$$

onde  $Q$  é o peso de uma pessoa só,  $N_A$  é o número de pessoas agrupadas numa célula de carga, e  $N_{CA}$  é o número médio de células numa área especificada  $Ar$  (área de influência).

A média e a variância  $\mu_{GE}$  e  $\sigma_{GE}^2$ , de um evento extraordinário simples  $G_E$ , expressas em unidades de ação por unidade de área, são:

$$\mu_{GE} = \mu_Q \cdot \mu_{NA} \cdot \frac{N_{CA}}{Ar} \quad (4.7.a)$$

$$\sigma_{GE}^2 = (\mu_Q^2 \cdot \mu_{NA}^2 + \mu_Q^2 \cdot \sigma_{NA}^2 + \mu_{NA} \cdot \sigma_Q^2) \cdot k \cdot \frac{N_{CA}}{Ar^2} \quad (4.7.b)$$

onde  $k = 2.2$  é função de uma superfície de influência particular, definida na equação (4.3).

O número médio de células de carga  $N_{CA}$ , para uma área especificada pode ser calculada pela seguinte expressão proposta por Ellingwood e Culver, 1977:

$$N_{CA} = \sqrt{\frac{Ar - 14.4}{0.585}} \quad (4.8)$$

Harris et al, 1981, da análise da expressão (4.8), conclui que ela não deve ser usada para áreas menores a 37.2 m<sup>2</sup>, devido a que esta implica numa inversão da tendência do tamanho do grupo com a área, e sugere usar interpolação linear no cálculo de  $N_{CA}$  para áreas pequenas, assim por exemplo, para áreas usuais em edificações, menores a 37.2 m<sup>2</sup>, devem ser usados os valores:  $Ar = 27.9$  m<sup>2</sup> ( $N_{CA} = 4.90$ ),  $Ar = 18.6$  m<sup>2</sup> ( $N_{CA} = 3.44$ ). Além do anterior, os mesmos autores, também propõem o uso de um modelo múltiplo para as ações vivas extraordinárias, ou seja, considerar por separado as ações devidas a: agrupamento normal, agrupamento por emergência, e agrupamento por remodelação, e dados individuais devem ser usados para cada tipo indicado.

Choi, 1991, propõe um modelo alternativo para o cálculo do número médio de células de carga, usando como célula de carga um quarto ou parte de um quarto onde um evento extraordinário ocorre. Assim, quando um evento extraordinário ocupa mais de um recinto, este é tratado como várias células. Esta hipótese é diferente à anterior, de Pier e Cornell, na qual foi assumida que um evento num quarto pode ocupar varias células. Segundo esta nova proposta  $N_{CA}$  pode ser calculado usando a seguinte expressão:

$$N_{CA} = 0.0242 \cdot Ar \cdot e^{0.00168 \cdot Ar} \quad (4.9)$$

Além disso, Choi, 1991, propõe que quando a ação extraordinária é devida ao agrupamento de móveis, as expressões (4.7), para ações extraordinárias de remodelação, podem ser escritas:

$$\mu_{GEr} = \mu_{QNAr} \cdot \frac{N_{CA}}{Ar} \quad (4.10.a)$$

$$\sigma_{GEr}^2 = \sigma_{QNAr}^2 \cdot k \cdot \frac{N_{CA}}{Ar^2} \quad (4.10.b)$$

onde  $\mu_{QNAr}$  e  $\sigma_{QNAr}^2$ , são o valor médio e a variância do peso total do conjunto de móveis agrupados, respectivamente.

Chalk e Corotis, 1980, assumem que as amplitudes da ação viva extraordinária tem distribuição Gamma ou normal, e que a ocorrência de eventos segue um modelo de Poisson, com taxa média de ocorrência  $\lambda_{GE}$ .

Wen, 1977, modela as ações extraordinárias como processos de filtrado de Poisson e assume a duração das mesmas como uniformemente distribuídas.

Corotis e Tsay, 1983, dizem que a duração de uma ação extraordinária individual deve ter uma distribuição exponencial. Porém, no cálculo da máxima ação combinada, a duração desta ação pode ser considerada como instantânea ou pontual.

Larrabee e Cornell, 1978, modelam as ações extraordinárias como processos mistos de pulsos, excluindo a coincidência de eventos num simples processo de carga.

As características assinaladas antes indicam que a ação viva extraordinária pode ser modelada como um processo filtrado de Poisson ou um processo misto de pulsos, excluindo a superposição de eventos num simples processo de carga, com densidade de probabilidade para as amplitudes normal ou Gamma, com média calculada usando a equação (4.7.a) ou (4.10.a) e desvio padrão calculado usando as equações (4.7.b) ou (4.10.b).

#### 4.1.3.2 Ações Vivas Gravitacionais Máximas

Segundo Wen, 1979, as ações vivas previstas em muitas normas de edificações correspondem aproximadamente à média ou a um fractil da distribuição ao longo da vida útil da estrutura. Na Norma brasileira NBR-6120, 1980, as ações características gravitacionais máximas são simplesmente chamadas de *ações verticais acidentais*.

No trabalho de McGuire e Cornell, 1974, os seguintes três casos de combinação de ações vivas gravitacionais de longa e curta duração são sugeridos para o cálculo da máxima



ação viva:

- A máxima ação viva prolongada no tempo de referência, mais a máxima ação viva extraordinária atuante durante o período de atuação de uma ação viva prolongada arbitrária.
- Uma ação viva prolongada arbitrária e pontual no tempo, mais a máxima ação viva extraordinária no tempo de referência.
- As duas ações (prolongada e extraordinária), com seus valores máximos no tempo de referência.

Chalk e Corotis, 1980, verifica os resultados dos três casos sugeridos mediante simulação, usando os modelos apresentados nas seções 4.1.3.1 e 4.1.3.2, para ações vivas prolongadas e extraordinárias respectivamente, e encontram que: os dois primeiros casos tem grande probabilidade de ocorrência e produzem um valor similar da ação viva gravitacional máxima, e o terceiro caso tem pequena probabilidade de ocorrência, de tal forma que pode ser desprezado. A distribuição de probabilidade a ser usado para quaisquer dos dois primeiros casos, é a distribuição de valores extremos tipo I.

#### 4.1.4 Ações devidas ao vento

A força devida ao vento (ou uma de suas componentes) pode ser determinada usando a seguinte expressão:

$$F_V(t) = W(t) \cdot Ar \quad (4.11)$$

onde  $W(t)$  é a pressão do vento, instantânea, atuando num ponto particular da estrutura, e  $Ar$  é a área de uma superfície de influência.

A pressão instantânea do vento pode ser calculada da velocidade instantâneo do vento, usando a seguinte relação hidrodinâmica:

$$W(t) = 0.5 \cdot \rho \cdot C \cdot V(t)^2 \quad (4.12)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do ar,  $C$  é o coeficiente aerodinâmico, quantidade quase-estática que depende do tamanho e orientação da estrutura, e  $V(t)$  é a velocidade instantânea do

vento num ponto particular da estrutura.

O coeficiente aerodinâmico é um coeficiente obtido experimentalmente em laboratório (em túneis de vento) para diversos tipos de elementos, formas e direções do vento consideradas críticas. Valores deste coeficiente, para edificações, podem ser encontrados nas normas NBR-6123, 1987.

A massa específica do ar é um parâmetro que depende da temperatura ambiente e da pressão atmosférica, assim por exemplo, para uma temperatura de 15°C e uma pressão de uma atmosfera,  $\rho = 1.25 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$  (Blessmann, 1990).

A velocidade instantânea num ponto particular da estrutura é obtida multiplicando-se a velocidade instantânea medida numa estação de registro das velocidades do vento por fatores que adaptam a velocidade registrada à localidade em questão. Estes fatores levam em consideração as variações do relevo do terreno, da rugosidade do terreno, as dimensões do elemento submetido à ação do vento, a altura sobre o terreno, e o grau de segurança requerido e a vida útil do elemento.

O modelo da ação devida ao vento da equação (4.12) é diretamente aplicável a estruturas cuja resposta dinâmica não seja significativa. O caso de estruturas flexíveis, nos quais a resposta dinâmica é significativa, não é tratado aqui.

Estritamente, as ações do vento variam continuamente no tempo em função de sua velocidade, de tal forma que estas podem ser modeladas probabilisticamente por meio de um processo contínuo Gaussiano.

Wen, 1977, considera que a contribuição da ação do vento à ação máxima combinada pode ser atribuída a tormentas ou tempestades severas, independentes, ocorrendo pouco freqüentemente, separados por períodos de atividade e não atividade, e com durações relativamente muito curtas, e esta idealização pode ser usada para representar efeitos de ações estáticas ou a equivalentes estáticas para ações dinâmicas. O modelo sugerido para representar as ações do vento é usar um processo de Poisson filtrado com distribuição lognormal.

Turkstra e Madsen, 1980, sugerem o uso do processo misto de pulsos com distribuição

Gamma para modelar a amplitude da velocidade do vento na escala de tempo macroscópica.

As características mencionadas anteriormente indicam que a ação devida ao vento pode ser modelada como um processo de Poisson filtrado ou um processo misto de pulsos, com densidade de probabilidade para as amplitudes lognormal ou Gamma, com média e desvio padrão da velocidade iguais ao valor médio e desvio padrão obtido de dados de medições. A força decorrente é calculada usando as expressões (4.11) e (4.12).

Segundo Blessmann, 1990, as forças devidas ao vento previstas na norma brasileira NBR-6123, 1987, e outras normas, correspondem a uma velocidade do vento chamada *básica*. A velocidade básica do vento,  $V_o$ , é a velocidade de uma rajada de três segundos, excedida em média uma vez em 50 anos, a 10 metros acima do terreno, em campo aberto e plano. Para obter  $V_o$ , consideram-se os valores máximos anuais obtidos de registros de vento em estações meteorológicas, e aplica-se a estes a distribuição de valores extremos de Frechet no período de referência (50 anos). Nas normas NBR-6123, a velocidade  $V_o$ , encontra-se num gráfico com isopletras a intervalos de 5 m/s.

## 4.2 Combinações usuais

Como foi visto nas seções anteriores, ações variáveis prolongadas podem ser modeladas como processos de onda quadrada de Poisson, enquanto, ações variáveis extraordinárias podem ser modeladas como processos de Poisson filtrado ou, alternativamente, como processos misto de pulsos.

Para diversas situações de projeto diferentes combinações de ações são possíveis. Nestas situações, a ação permanente, sempre presente, pode ser combinada com a superposição de uma ou mais ações variáveis de longa e de curta duração.

Alguns tipos usuais de combinações, apresentados por Ravindra e Galambos, 1978; Ravindra et al, 1978; e, Wen, 1979, são apresentadas na tabela 4.1.



TABELA 4.1 Situações de combinação usuais em projetos de edificações

| Situação | Combinações Usuais      |
|----------|-------------------------|
| 1        | $P_G + G_S + G_E$       |
| 2        | $P_G + G_S + F_V$       |
| 3        | $P_G + G_S + G_E + S_E$ |
| 4        | $P_G + G_S + N_E$       |
| 5        | $F_V - P_G$             |

$P_G$  : Ação permanente devida ao peso próprio

$G_S$  : Ação gravitacional viva prolongada

$G_E$  : Ação gravitacional viva extraordinária

$F_V$  : Ação devida a vento extraordinário

$S_E$  : Ação devida a sismo

$N_E$  : Ação devida ao peso extraordinário da neve

## **Capítulo 5**

### **Dados de ações sobre estruturas**

#### **5.1 Disponibilidade de dados dos vários tipos de ações**

Quando observações de um fenômeno físico que ocorre ao longo de um período de tempo estão disponíveis, as propriedades estatísticas das ações podem ser estimadas diretamente dos registros de dados. Quando apenas registros instantâneos estão disponíveis, uma função de probabilidade instantânea pode ser suposta. Quando existe insuficiência de registros de longo tempo as propriedades estatísticas podem ser derivadas matematicamente, por meio de hipóteses apropriadas e plausíveis.

A busca e coleta de dados sobre ações é de grande importância para o desenvolvimento de métodos para combinação de ações em projetos de estruturas, bem como para a construção de modelos apropriados para representar as ações como processos ou variáveis aleatórias.

A seguir são apresentados dados encontrados em diversas referências bibliográficas, referentes a alguns tipos de ações tratadas no capítulo 4. Estes dados estão apresentados numa forma já compatível com os desenvolvimentos teóricos descritos no capítulo 7.

#### **5.2 Ações Vivas Gravitacionais Prolongadas ou de Longa Duração**

Os parâmetros que influenciam a magnitude das ações vivas são muitos e

variados. Culver, 1976, através da análise por regressão linear aplicada a dados referentes a ações vivas, estabelece a relação entre a magnitude da ação e vários parâmetros, que são:

- *O uso do recinto*: Este parâmetro tem o efeito mais significativo na composição e magnitude das ações.
- *A área do recinto*: Nas medições das ações, geralmente consideram-se quatro tipos de recintos arbitrariamente selecionados que representam tamanhos de recinto muito pequeno, pequeno, médio e grande. Da análise, foi encontrado que a ação decresce com o incremento da área. Este é o segundo parâmetro em importância que influencia o valor da ação.
- *As características dos edifícios*: Altura, idade e localização geográfica dos edifícios não afetam significativamente a magnitude das ações e são desprezados.
- Outros parâmetros adicionais têm efeitos desprezíveis: Diferenças sociais entre países nos quais são realizadas as medições, diferenças entre métodos de medição, características dos moradores, elementos de controle humano, orientação espacial dos recintos, tendência das ações a estarem concentradas no perímetro do recinto e o tempo ao longo do qual foi conduzida a medição.

Resultados de medições de ações vivas recompilados por diversos autores com data posterior a 1970, são encontrados na tabela 5.1. Nesta tabela são apresentados:

- Resultados de medições de ações vivas gravitacionais prolongadas, agrupados por tipo de uso de recinto e com a área de referência considerada na medição.
- Dados da taxa média de ocorrência de eventos são incluídos, quando encontrados.
- Valores característicos das ações vivas (ações verticais), da NBR-6120, 1988, e IRAM II-599, 1977 (normas brasileira e argentina, respectivamente), são incluídos.
- Também são incluídos resultados de ações que sendo considerados por autores em datas posteriores, fornecem informação suplementar não apresentada por tais autores.

Os trabalhos considerados para construir a tabela são os seguintes:

- Culver, 1976, apresenta valor médio e desvio padrão para diferentes usos de



| USO DO RECINTO   | Harris et al, 1981<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |                  |                                     | Culver, 1976<br>Ap = 9.3-27.9 m <sup>2</sup> |               |                   | Corotis e Doshi,<br>1977<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |               |                  | Chalk e Corotis,<br>1980<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |               |                  | NBR/6120,<br>1980 |               | IRAM-599,<br>1977 |              |
|--|--|------------------|-------------------------------------|--|---------------|-------------------|--|---------------|------------------|--|---------------|------------------|-------------------|---------------|-------------------|--------------|
|  | [1]  |                  |                                     | [2]  |               |                   |  |               |                  |  |               |                  |                   |               |                   |              |
|  | $\mu_{GS}$                                     | $\sigma_{GS}$    | $\lambda_{GS}$<br>ano <sup>-1</sup> | $\mu_{GS}$                                   | $\sigma_{GS}$ | $\lambda_{GS}$    | $\mu_{GS}$   | $\sigma_{GS}$ | $\lambda_{GS}$   | $\mu_{GS}$   | $\sigma_{GS}$ | $\lambda_{GS}$   | $\mu_{GS}$        | $\sigma_{GS}$ | $G_{Sj}$          | $G_{Sj}$     |
| Unidades:  |  |                  | N/m <sup>2</sup>                    |  |               | ano <sup>-1</sup> |  |               | N/m <sup>2</sup> |  |               | N/m <sup>2</sup> |                   |               | N/m <sup>2</sup>  |              |
| Escritórios  | 522  | 364              | 0.125                               | 484  | 340           | 450               | 273  |               | 609              | 346  |               | 522              | 283               | 2000          | 2500              |              |
| Sala de Espera do Escritório   |  |                  |                                     | 105  | 62            | 268               | 254  |               |                  |  |               | 220              | 158               |               |                   |              |
| Residências - Uso doméstico  | 287  | 163              | 0.100                               |  |               |                   |  |               | 544              | 193  |               | 287              | 125               | 1500          | 2000              |              |
| Quarto de Hotel  | 216  | 72               | 0.200                               |  |               |                   |  |               |                  |  |               | 216              | 57                |               |                   |              |
| Uso Geral (Banho - Lavanderia)   |  |                  |                                     | 479  | 263           | 378               | 192  |               |                  |  |               |                  |                   | 2000          | 2000              |              |
| Salas de Aula  | 575  | 144 <sup>a</sup> | 1.000                               |  |               |                   |  |               |                  |  |               | 575              | 129 <sup>a</sup>  | 3000          | 3500              |              |
| Restaurantes/ Salas de Conferências<br>- assentos móveis<br>- assentos fixos |  |                  |                                     |  |               |                   |  |               |                  |  |               |                  |                   |               |                   | 4000<br>3000 |
| Clinicas de Saúde e Hospitais  |  |                  |                                     |  |               |                   |  |               | 443              | 241  |               | 307              | 182               | 3000          |                   |              |
| Laboratórios, Hospitais/ Cirurgias   |  |                  |                                     |  |               |                   |  |               |                  |  |               | 680              | 388               | 3000          |                   |              |
| Quartos de Pacientes   |  |                  |                                     |  |               |                   |  |               |                  |  |               | 354              | 311               |               |                   |              |
| Bibliotecas e Arquivos   |  |                  |                                     | 1408   | 373           | 1058              | 393  |               |                  |  |               |                  |                   |               |                   | 4000         |
| Livrarias  |  |                  |                                     | 1643   | 134           | 1268              | 517  |               | 1002             | 800 <sup>b</sup>                                     |               | 1662             | 517               | 6000          | 6000              | min 5000     |
| Armazenagem e Depósito<br>- Ligeiro<br>- Pesado                              |  |                  |                                     | 527  | 388           | 738               | 670  |               | 1308             | 989 <sup>b</sup>                                     |               | 3424             | 2778 <sup>a</sup> |               |                   |              |
| CONTINUA .....   |  |                  |                                     |  |               |                   |  |               | 1571             | 2283 <sup>b</sup>                                    |               |                  |                   |               |                   |              |

| USO DO RECINTO                    | Harris et al, 1981<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |                  |                | Culver, 1976<br>Ap = 9.3-27.9 m <sup>2</sup> |               |       | Corotis e Doshi,<br>1977<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |               | Chalk e Corotis,<br>1980<br>Ap = 18.6 m <sup>2</sup> |                  | NBR/6120,<br>1980 | IRAM-599,<br>1977 |
|-----------------------------------|--|------------------|----------------|--|---------------|-------|--|---------------|--|------------------|-------------------|-------------------|
|                                   | $\mu_{GS}$                                     | $\sigma_{GS}$    | $\lambda_{GS}$ | $\mu_{GS}$                                   | $\sigma_{GS}$ | [2.2] | $\mu_{GS}$   | $\sigma_{GS}$ | $\mu_{GS}$   | $\sigma_{GS}$    | $G_{Sj}$          | $G_{Sj}$          |
| Unidades:                         | N/m <sup>2</sup>                               |                  | ano-1          | N/m <sup>2</sup>                             |               |       | N/m <sup>2</sup>                                     |               | N/m <sup>2</sup>                                     |                  | N/m <sup>2</sup>  | N/m <sup>2</sup>  |
| Comércios - Atacado e Varejo:     |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  |                   |                   |
| - Primeiro Andar                  | 857  | 268 <sup>a</sup> | 0.500          |  |               |       |  |               | 857  | 240              | 4000              |                   |
| - Andares Superiores              | 575  | 508 <sup>a</sup> | 0.500          |  |               |       |  |               | 575  | 455 <sup>a</sup> | 3000              |                   |
| Teatro - Sala de Baile - Ginásio  |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  | 5000              | 5000              |
| Indústria:                        |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  |                   |                   |
| - Ligeira                         |  |                  |                |  |               |       |  |               | 851  | 523              | 905               |                   |
| - Pesada                          |  |                  |                |  |               |       |  | 2775          | 1782   | 2883             | 7500              | 7500              |
| Estacionamento (max 25000 N/veic) |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  | 3000              | 5000              |
| Terraços - Corredores - Escadas   |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  |                   |                   |
| - Com ingresso de público         |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  |                   |                   |
| - Sem ingresso de público         |  |                  |                |  |               |       |  |               |  |                  | 3000              | 4000              |

a : Área = 93 m<sup>2</sup>

b : Todas as áreas

[1] : Edifícios Públicos

[2] : Edifícios Privados

$\mu_{GS}$  : Valor médio ação viva prolongada

$\sigma_S$  : Desvio padrão estimado das medições

$G_{Sj}$  : Valor característico da ação viva

Nota : Usar equações (4.4) ou (4.5)

$\sigma_{GS}$  : Desvio padrão ação viva prolongada

$\lambda_{GS}$  : Taxa média de ocorrência de eventos

Ap : Área de referência ou área de medição

TABELA 5.1 : Dados de medições de ações vivas gravitacionais prolongadas e ações vivas características agrupadas por tipo de ocupação

edifícios públicos e privados. Culver apresenta os dados de medições de ações vivas feitas em 27 edifícios. Estas medições são complementadas com dados recompilados por outros autores no período compreendido entre 1967 e 1974. Os autores citados são: Bryson e Gross, 1967; e, Mitchell e Woodgate, 1971.

- Corotis e Doshi, 1977, recompila informações apresentadas no período de 1952 a 1976, e são citados os seguintes autores dos quais foram tomadas as informações: Dunham, Brekke, e Thompson, 1952; Bryson e Gross, 1968; Karman, 1969; Mitchell e Woodgate, 1971; e, Culver, 1976.

- Chalk e Corotis, 1980, estendem sua busca a um período de mais de oitenta anos e recompilam dados que tenham a informação estatística necessária. Os trabalhos considerados são: Blackall, 1893; Enger, 1920; Coley, 1923; Stineman, 1923; Woolson, 1923; White, 1931; Dunham, 1947; Dunham, Brekke e Thompson, 1952; Bryson e Gross, 1968; Karman, 1969; Mitchell e Woodgate, 1971; Paloheimo e Ollila, 1973; Dayeh, 1974; Schwartz, 1974; Sentler, 1976; Culver, 1976; e, Chalk, 1979.

- Harris, Corotis e Bova, 1981, complementam as informações apresentadas no trabalho de Chalk e Corotis, 1980, com dados da taxa de ocorrência de mudanças de ocupação de recintos.

### **5.3 Ações Vivas Gravitacionais Extraordinárias**

Poucos dados de ações vivas extraordinárias têm sido encontrados na literatura, possivelmente devido a que na medição de ações vivas não são incluídas situações pouco usuais de carga. Os dados disponíveis são obtidos de experiência ou juízo pessoal dos autores, ou através de questionários feitos a pessoas sobre eventos passados. Por estas razões, grande incerteza deve ser esperada nos parâmetros das ações extraordinárias.

Nas tabelas 5.2, são apresentados os dados de ações vivas extraordinárias, agrupadas por tipo de uso de recinto. Os trabalhos consultados para construir a tabela são os seguintes:

- Chalk e Corotis, 1980, (tabela 5.2.1), considera as ações vivas extraordinárias como sendo de um só tipo, para qualquer evento não usual. Seus resultados estão



baseados, em grande parte, em juízo pessoal. Estes dados devem ser usados com as equações (4.7) e (4.8).

- Harris et al, 1981, (tabela 5.2.2), considera que pela variedade e complexidade das ações extraordinárias, estas devem ser consideradas em três grandes subgrupos:

- \* *Ações extraordinárias normais*, devidas a agrupamento de pessoas por eventos tais como assembleias ou festas.
- \* *Ações extraordinárias de emergência*, devidas a situações como por exemplo incêndios.
- \* *Ações extraordinárias por remodelação*, devidas a agrupamento de móveis por remodelação de recintos adjacentes.

Também se inclui informação da duração das ações, para os dados de Harris et al, apresentada por Corotis e Tsay, 1983. Estes dados devem ser usados com as equações (4.7) e (4.8).

- Choi, 1991, (tabela 5.2.3), também apresenta dados para os três subgrupos de ações extraordinárias. Deve-se porém lembrar que seus valores correspondem a outra consideração nas células de carga, de tal forma que devem ser usados com as equações (4.7), (4.9) e (4.10).

| Parâmetros Ações Vivas Extraordinárias<br>(Chalk e Corotis, 1980) |               |            |            |               |                   |
|---|---------------|------------|------------|---------------|-------------------|
| tipo de uso   | Toda Situação |            |            |               |                   |
|   | $\mu_Q$       | $\sigma_Q$ | $\mu_{NA}$ | $\sigma_{NA}$ | $\lambda_{GE}$    |
|   | N             |            |            |               | ano <sup>-1</sup> |
| Escritórios   | 668           | 112        | 4          | 2             | 1.00              |
| Quartos de Hotéis   | 668           | 112        | 3          | 1             | 20.00             |
| Residência :  |               |            |            |               |                   |
| Proprietário  | 668           | 112        | 3          | 2             | 1.00              |
| Alugado   | 668           | 112        | 3          | 2             | 1.00              |
| Comercial:  |               |            |            |               |                   |
| Primeiro Andar  | 668           | 112        | 6          | 3             | 4.00              |
| Andares Superiores  | 668           | 112        | 4          | 2             | 4.00              |
| Aula de classes   | 668           | 112        | 4          | 2             | 1.00              |

$\mu_Q$  : Valor médio do peso de uma pessoa

$\sigma_Q$  : Desvio padrão do peso de uma pessoa

$\mu_{NA}$  : Número médio de pessoas agrupadas numa situação extraordinária

$\sigma_{NA}$  : Desvio padrão do número de pessoas agrupadas numa situação extraordinária

$\lambda_{GE}$  : Taxa média de ocorrência de eventos extraordinários

Nota : Usar equações (4.7) e (4.8)

TABELA 5.2.a : Dados de ações vivas extraordinárias agrupadas por tipo de ocupação para modelo simples (todo tipo de situação extraordinária).

| Parâmetros Ações Vivas Extraordinárias (Harris, Corotis e Bova, 1981; e Corotis e Tsay, 1983) |            |               |             |                |                   |            |            |               |             |                   |                 |           |             |               |             |                   |                 |           |
|---|------------|---------------|-------------|----------------|-------------------|------------|------------|---------------|-------------|-------------------|-----------------|-----------|-------------|---------------|-------------|-------------------|-----------------|-----------|
| tipo de uso   | Normal     |               |             |                |                   |            | Emergência |               |             |                   |                 |           | Remodelação |               |             |                   |                 |           |
|   | $\mu_{Qn}$ | $\sigma_{Qn}$ | $\mu_{NAn}$ | $\sigma_{NAn}$ | $\lambda_{GEn}$   | $d_{CAAn}$ | $\mu_{Qe}$ | $\sigma_{Qe}$ | $\mu_{NAe}$ | $\sigma_{NAe}$    | $\lambda_{GEe}$ | $d_{CAe}$ | $\mu_{Qr}$  | $\sigma_{Qr}$ | $\mu_{NAr}$ | $\sigma_{NAr}$    | $\lambda_{GEr}$ | $d_{CAr}$ |
|   | N          |               |             |                | ano <sup>-1</sup> | horas      | N          |               |             | ano <sup>-1</sup> | min             | N         |             |               |             | ano <sup>-1</sup> | semana          |           |
| Escritórios   | 668        | 112           | 4           | 2              | 0.40              | 6          | 668        | 112           | 10          | 5                 | 0.02            | 15        | 2225        | 668           | 1           | 1                 | 0.25            | 2         |
| Quartos de Hotéis   | 668        | 112           | 3           | 1              | 10.0              | 6          | 668        | 112           | 10          | 5                 | 0.10            | 15        | 360         | 112           | 2           | 1                 | 0.50            | 2         |
| Residência :  |            |               |             |                |                   |            |            |               |             |                   |                 |           |             |               |             |                   |                 |           |
| Proprietário  | 668        | 112           | 3           | 2              | 1.00              | 4.6        | 668        | 112           | 10          | 5                 | .005            | 0         | 632         | 112           | 2           | 1                 | 0.10            | 0         |
| Alugado :   | 668        | 112           | 3           | 2              | 1.00              | 4.6        | 668        | 112           | 10          | 5                 | .005            | 0         | 000         | 000           | 0           | 0                 | 0.00            | 0         |
| Comercial:  |            |               |             |                |                   |            |            |               |             |                   |                 |           |             |               |             |                   |                 |           |
| Primeiro Andar  | 668        | 112           | 6           | 3              | 4.00              | 6          | 668        | 112           | 10          | 5                 | 0.10            | 15        | 779         | 112           | 8           | 4                 | 0.20            | 2         |
| Andares Superiores  | 668        | 112           | 4           | 2              | 4.00              | 6          | 668        | 112           | 10          | 5                 | 0.10            | 15        | 668         | 112           | 5           | 2                 | 0.20            | 2         |
| Aula de classes   | 668        | 112           | 4           | 2              | 1.00              |            | 668        | 112           | 10          | 5                 | 0.10            |           | 988         | 112           | 4           | 2                 | 0.50            |           |

- $\mu_{Qi}$  : Valor médio do peso de uma pessoa para distintas situações extraordinárias  
 $\sigma_{Qi}$  : Desvio padrão do peso de uma pessoa para distintas situações extraordinárias  
 $\mu_{NAi}$  : Número médio de pessoas agrupadas numa situação extraordinária particular  
 $\sigma_{NAi}$  : Desvio padrão do número de pessoas agrupadas numa situação extraordinária particular  
 $\lambda_{GEi}$  : Taxa média de ocorrência de eventos extraordinários para distintas situações extraordinárias  
 $d_{CAi}$  : Duração do evento extraordinário  
 Nota : Usar equações (4.7) e (4.8)

TABELA 5.2.b : Dados de ações vivas extraordinárias Agrupadas por tipo de ocupação para modelo múltiplo (distintas situações extraordinárias).



| Parâmetros Ações Vivas Extraordinárias (Choi, 1990) |            |               |              |                 |                  |            |               |              |                 |                  |               |                  |                  |
|---|------------|---------------|--------------|-----------------|------------------|------------|---------------|--------------|-----------------|------------------|---------------|------------------|------------------|
| tipo de uso   | Normal     |               |              |                 | Emergência       |            |               |              | Remodelação     |                  |               |                  |                  |
|   | $\mu_{Qn}$ | $\sigma_{Qn}$ | $\mu_{NA n}$ | $\sigma_{NA n}$ | $\lambda_{GE n}$ | $\mu_{Qe}$ | $\sigma_{Qe}$ | $\mu_{NA e}$ | $\sigma_{NA e}$ | $\lambda_{GE e}$ | $\mu_{QNA r}$ | $\sigma_{QNA r}$ | $\lambda_{GE r}$ |
| Qualquer uso  | 657        | 108           | 17.2         | 23.3            | 1.00             | 657        | 108           | 30.2         | 33.1            | 0.02             | 9230          | 9467             | 0.20             |

- $\mu_{Qi}$  : Valor médio do peso de uma pessoa para distintas situações extraordinárias  
 $\sigma_{Qi}$  : Desvio padrão do peso de uma pessoa para distintas situações extraordinárias  
 $\mu_{QNAr}$  : Valor médio do peso de uma pessoa numa célula de carga para situação de remodelação  
 $\sigma_{QNAr}$  : Desvio padrão do peso de uma pessoa numa célula de carga para situação de remodelação  
 $\mu_{NAi}$  : Número médio de pessoas agrupadas numa situação extraordinária particular  
 $\sigma_{NAi}$  : Desvio padrão do número de pessoas agrupadas numa situação extraordinária particular  
 $\lambda_{GEi}$  : Taxa média de ocorrência de eventos extraordinários para distintas situações extraordinárias  
 Nota : Usar equações (4.7), (4.9) e (4.10)

TABELA 5.2.c : Dados de ações vivas extraordinárias agrupadas por tipo de ocupação para Modelo Múltiplo Modificado (distintas situações extraordinárias).

## Capítulo 6

# Abordagem à combinação de ações segundo normas atuais

### 6.1 Introdução

Este capítulo descreve e discute de maneira geral a formulação para combinar ações de projeto estrutural usada nas normas, em particular pelas normas: EUROCODE 1: Bases de Projeto e Ações em Estruturas, 1992, NBR-8681: Ações e Segurança nas Estruturas, 1984, e ÖNORM B4040, Princípios Gerais da Confiabilidade de Estruturas, 1989. O formato equivalente do LRFD (Load and Resistance Factor Design), analisado por Ravindra e Galambos, 1978; Ravindra, Cornell e Galambos, 1978; e, Bennett, 1988, é também discutido e suas particularidades são mencionadas no desenvolvimento do assunto. O LRFD é usado em normas como a American Institute of Steel Construction (AISC), 1986; e American National Standards Institute (ANSI), 1982 (Bennett, 1988).

No projeto de estruturas segundo normas uma margem de segurança é introduzida entre o valor de projeto da resistência adotada nos cálculos, por um lado, e o valor de referência da ação, por outro lado. Este princípio tem sido absorvido por todas as normas de projeto estrutural citados, introduzindo fatores parciais de segurança que asseguram a existência da margem de segurança do lado da resistência e do lado da ação. Um número de diferentes formatos são possíveis considerando este princípio. Porém, *“a seleção de um formato específico deve se dar com base nas necessidades de simplicidade e continuidade com formatos já existentes, assim como considerações teóricas”* (Ellingwood et al, 1982, p. 980).

A continuidade entre formatos revisados é evidente pois as regras básicas são gerais a todos. Nas normas modernas, como o EUROCODE 1 e a ÖNORM B4040, a magnitude dos fatores parciais é referida a classes de segurança, e é estabelecida a partir de cálculos probabilísticos, representando um avanço com relação às normas anteriores.

Os formatos usuais de normas de projeto estrutural seguem as seguintes regras básicas:

- Cálculos de projeto devem satisfazer as condições de capacidade última e capacidade de serviço ou utilização, assim como outros critérios por uso especial ou pouco comum da estrutura. Todo projeto baseado em estados limites envolve: 1) a identificação de todos os caminhos através dos quais a estrutura pode falhar ou deixar de funcionar para seu uso proposto, 2) a determinação de níveis de segurança aceitáveis para cada estado limite e, 3) a consideração pelo projetista da significância de cada estado limite.
- Diferentes classes de segurança com grau de confiabilidade claramente definido devem ser introduzidas para diferentes situações de projeto.
- Os cálculos devem estar baseados em valores característicos e fatores parciais de segurança estatisticamente sustentados, tanto para as ações como para as resistências.
- Segundo o princípio de fatores parciais de segurança para ação e resistência, fatores dos materiais devem ser independentes dos fatores de ação, e vice-versa.
- Regras para combinação de ações devem estar estatisticamente sustentadas.

No que segue, alguns dos parâmetros mencionados nas regras básicas são tratados como parte do estudo da combinação de ações segundo normas.

## **6.2 Valores característicos das ações**

As ações podem ocorrer de forma direta (ações concentradas ou distribuídas), ou indireta (ações impostas ou restringidas), e devem ser caracterizadas pela sua probabilidade de ocorrência durante o intervalo de tempo de referência, onde uma correlação espacial ou temporal pode acontecer. O tempo de referência para a atuação das ações depende de uma das seguintes situações de projeto: 1) situação persistente ou de uso normal da estrutura, 2) situação transiente, de construção ou reparo da estrutura



e, 3) situação acidental ou por ocorrência de eventos especiais aos quais pode estar exposta a estrutura.

Para o estabelecimento das regras de combinação de ações, estas são classificadas segundo sua variabilidade no tempo em três categorias:

- *Ações Permanentes* ( $P_G$ ), por exemplo peso próprio das estruturas ou equipamento fixo.
- *Ações Variáveis* ( $V_Q$ ), por exemplo ações impostas, ação do vento, neve ou temperatura.
- *Ações Extraordinárias ou Acidentais* ( $V_E$ ), por exemplo ação sísmica, explosões em estruturas ou impacto de veículos.

As ações classificadas segundo sua variabilidade no tempo são quantificadas por seus valores representativos, chamados *de projeto* ou *característicos*. Os valores característicos são estabelecidos (a partir do valor médio) através de um múltiplo do desvio padrão, como valores  $z\sigma$  de uma população, para um tempo de referência previsto. Caso os dados estatísticos não sejam suficientes, podem ser introduzidos valores estimados, que correspondam aos fractis associados aos valores  $z$ , ou valores limites empíricos. Os valores característicos são usados para a verificação dos estados limites, que podem corresponder ao:

- *Valor característico médio*, que é o valor médio ou o valor médio dos valores extremos para o tempo de referência dado para ações com probabilidade prescrita.
- *Valor característico nominal*, que é um valor convenientemente escolhido para ações que não tenham sua variabilidade adequadamente expressa por distribuições de probabilidade.
- *Valor característico superior*, que é o valor que corresponde as ações que produzem efeitos desfavoráveis, este valor tem especificada probabilidade de não ser excedido durante o tempo de referência e é um  $p\%$  fractil dos valores extremos (por exemplo 95% fractil).
- *Valor característico inferior*, que é o valor que corresponde a ações que produzem efeitos favoráveis, este valor tem especificada probabilidade de não ser

alcançados durante o tempo de referência e também é um  $p\%$  fractil dos valores extremos (por exemplo 5% fractil).

- *Valor especificado*, que é um valor arbitrado ou estabelecido por consenso entre o proprietário e autoridades competentes, observando as especificações mínimas dadas pelas normas.

O formato LRFD para normas, usa o valor característico médio dos valores extremos ou o valor característico nominal.

Nas normas, os valores característicos são encontrados em tabelas ou como recomendações para procedimentos de cálculo.

### 6.3 Classes de segurança

Segundo as Normas ÖNORM B4040, 1989, e os formatos baseados no LRFD, os coeficientes parciais são escolhidos para a verificação da segurança tendo em vista uma medida de segurança. A medida de segurança é representada por  $\beta$  (índice de confiabilidade), índice que serve para quantificar a confiabilidade e que, conforme o método de primeira ordem (FOSM) (ver seção 2.2), está associado à probabilidade de falha  $P_f(x_0, T)$ .

A medida de segurança  $\beta$ , como medida para uma confiabilidade desejada, é estabelecida sob consideração da experiência em edificações já executadas, as quais também satisfizeram as exigências de segurança e as exigências de economicidade de até então. Ela deve, caso necessário, ser modificada em decorrência de novos conhecimentos, principalmente novas experiências. No caso de processo com dependência no tempo a medida de segurança também é dependente do tempo de referência.

Considerando-se as possíveis conseqüências de eventos adversos provenientes de construções dentro do âmbito normal da experiência é suficiente diferenciar-se três classes de segurança (ver tabela 6.1).

Tabela 6.1 Classes de Segurança (Normas CLAES 1, 1993, p. 28)

| Classe de Segurança | Possíveis conseqüências de falhas que afetem predominantemente a capacidade última                                    |
|---------------------|---|
| 1                   | Sem ameaça a vidas humanas; pequenas conseqüências econômicas.  |
| 2                   | Ameaça a vidas humanas e/ou consideráveis conseqüências econômicas.   |
| 3                   | Ameaça a muitas vidas humanas e/ou graves conseqüências econômicas, grande importância da construção para a sociedade |

A classe de segurança 2 é importante para a maioria das construções ou componentes. A especificação da classe de segurança 3, requer prescrição por parte de órgãos oficiais e é importante para construções muito especiais. A classe de segurança 1 é geralmente considerada para estruturas temporárias.

## 6.4 Coeficientes parciais de segurança

O valor total do efeito da ação é definido através da análise estrutural pelo conjunto das ações que têm probabilidade não desprezível de atuarem simultaneamente na estrutura, durante o período de tempo de referência, afetadas pelos respectivos coeficientes parciais de segurança expressos nas normas e que são escolhidos tendo em mente tipos de incerteza presentes. Assim, nas normas são usados os seguintes coeficientes:

- O *coeficiente parcial de segurança*  $\gamma_s$ , leva em consideração os desvios aleatórios dos valores característicos e imprecisões nos modelos aleatórios das ações. Nas normas, este coeficiente é escolhido tendo em vista um índice de confiabilidade  $\beta$ , e é aplicado tendo em conta a variabilidade no tempo das ações e o tempo de referência especificado para a estrutura, ou seja, ações permanentes (favoráveis ou desfavoráveis), variáveis e acidentais, tem seu respectivo coeficiente para diferentes situações de projeto (normais, especiais ou de construção e excepcionais). Da experiência prévia, este fator é proporcional à influência da quantidade relevante, assim, de acordo com esta concepção, o peso próprio têm menor fator de segurança que a ação do vento.

Segundo Thoft-Christensen e Baker, 1982, os coeficientes parciais de segurança



$\gamma_s$ , são determinados através de métodos de calibração e análise da confiabilidade usando o FOSM, aplicados a um número suficientemente grande de elementos estruturais relevantes e considerando alguns estados limites. A seleção dos fatores é feita através de um processo de otimização dos métodos de calibração, o qual permite relacionar estes coeficientes a um índice de confiabilidade médio  $\beta_m$ .

- O *coeficiente parcial de segurança*  $\gamma_{mod}$ , leva em consideração o grau de desvio de um modelo simplificado, conscientemente aceito, de um modelo para o cálculo das solicitações (esforços nas seções). Este fator deve ser aplicado ao efeito característico total da ação, calculado com a ação característica multiplicada por os outros coeficientes.

- O *coeficiente parcial de segurança*  $\gamma_n$ , leva em consideração a gravidade das conseqüências de falha. Este coeficiente é escolhido tendo em vista as classes de segurança definidas na seção anterior (Seção 6.3) e deve ser aplicado ao efeito total da ação.

- O *coeficiente parcial de segurança*  $\gamma_t$ , leva em consideração a baixa probabilidade da ocorrência simultânea dos valores característicos de duas ou mais *ações variáveis de naturezas diferentes*. Aplicando este coeficiente às ações variáveis, são definidos os seguintes valores representativos:

- \* O *valor característico* já foi definido anteriormente na seção 6.2, e não é afetado por nenhum coeficiente.
- \* O *valor de combinação*, é o valor da ação variável principal afetada pelo coeficiente parcial  $\psi_0$ . A ação principal é escolhida entre as ações variáveis que mais representatividade tem na combinação.
- \* O *valor freqüente*, é o valor da ação variável que pode aparecer com grande freqüência e com tempo de atuação não muito pequeno, afetado pelo coeficiente  $\psi_1$ .
- \* O *valor quase-permanente*, é o valor da ação variável com tempo de atuação muito pequeno, afetado pelo coeficiente  $\psi_2$ .

A combinação de ações considerando os coeficientes de combinação, segundo a

sua formulação mais geral pode ser expressa (ver ÖNORM B 4040,1989) :

$$S = \gamma_S \cdot \Sigma P_G + \gamma_Q \cdot \Sigma \psi_{2i} \cdot V_Q + \gamma_Q \cdot \Sigma \psi_{0i} \cdot V_E \quad (6.2)$$

onde os sub e superíndices que acompanham os coeficientes indicam o tipo de ação (permanente, variável ou acidental) à qual estão afetando e, os outros parâmetros já tem sido definidos anteriormente.

No formato LRFD, os coeficientes  $\gamma_S$  são aplicados diretamente às ações variáveis, sem necessidade de aplicar os fatores  $\psi$ .

## 6.5 Combinações mais desfavoráveis e verificação dos estados limites

A segurança das estruturas deve ser verificada em relação a todas as situações que são admitidas como possíveis para a estrutura considerada, em um tempo de referência especificado. Para verificação da segurança, deve-se comparar os valores totais dos efeitos das ações obtidos da análise estrutural, quantificados e combinados de acordo com as regras estabelecidas pelas normas, com os valores da resistência que a este se contrapõem.

Nas normas que não seguem o formato LRFD, as regras para a determinação das combinações mais desfavoráveis são as seguintes:

- *Ações permanentes* devem aparecer em todas as combinações, onde em geral se assume um valor uniforme e, somente no caso de serem conhecidos os valores máximos e mínimos, o valor mais desfavorável.
- *Ações variáveis* devem em geral aparecer em todas as combinações essenciais, com seus respectivos valores característicos. Para simplificar-se o cálculo é conveniente tratar como uma única as ações que, ao ocorrerem conjuntamente, são fortemente dependentes e atingem seus valores máximos de forma simultânea. Da mesma forma, ações com fraca correlação podem ser tratadas como independentes entre si.
- *Ações extraordinárias* não precisam ser consideradas em todas as combinações.

Para a verificação dos estados limites, faz-se em geral, uma diferenciação entre os seguinte tipos de combinações:

- *Combinação básica*, combinação de ações permanentes e variáveis.
- *Combinação extraordinária*, combinação de ações permanentes, variáveis e extraordinárias.

Para verificar-se os estados limites de utilização deve-se usar a combinação básica. As duas combinações devem ser usadas para verificar o estado limite último.

Para as normas que seguem o formato LRFD, deve-se realizar um conjunto de combinações nas quais são consideradas todas as ações que podem atuar na estrutura e escolher aquela combinação que resulta no valor mais desfavorável. Assim por exemplo, quando atuam vento, peso próprio e ações vivas gravitacionais, o resultado da combinação de vento com peso próprio, calculado com coeficientes parciais, deve ser comparado com o resultado da combinação do vento com peso próprio e a ação viva gravitacional, calculada com outros coeficientes parciais, e deve ser escolhido o maior dos dois resultados.

Segundo os dois formatos das normas, para o estado de equilíbrio estático, da capacidade última e de utilização, deve-se empregar, para a combinação de ações de projeto, a seguinte relação:

$$S_j = \sum c_i \cdot \psi_i \cdot L_{ji} \quad (6.1)$$

onde, o efeito característico  $S_j$ , é obtido pela soma dos valores característicos das ações relevantes  $L_{ji}$ , definidas em 6.2, multiplicadas por coeficientes  $c_i$ , para conversão efeito/ação (avaliados na análise) e coeficientes parciais de combinação  $\psi_i$ , definidos em 6.4.

## 6.6 Exemplo de aplicação

### 1) Problema de estudo

- Apresentação do problema

Com o propósito de exemplificar o procedimento que deve ser seguido para combinar ações segundo normas, propõe-se projetar o pilar de concreto armado, que está no nível inferior do pórtico indicado na figura 6.1. Observa-se que a simplicidade



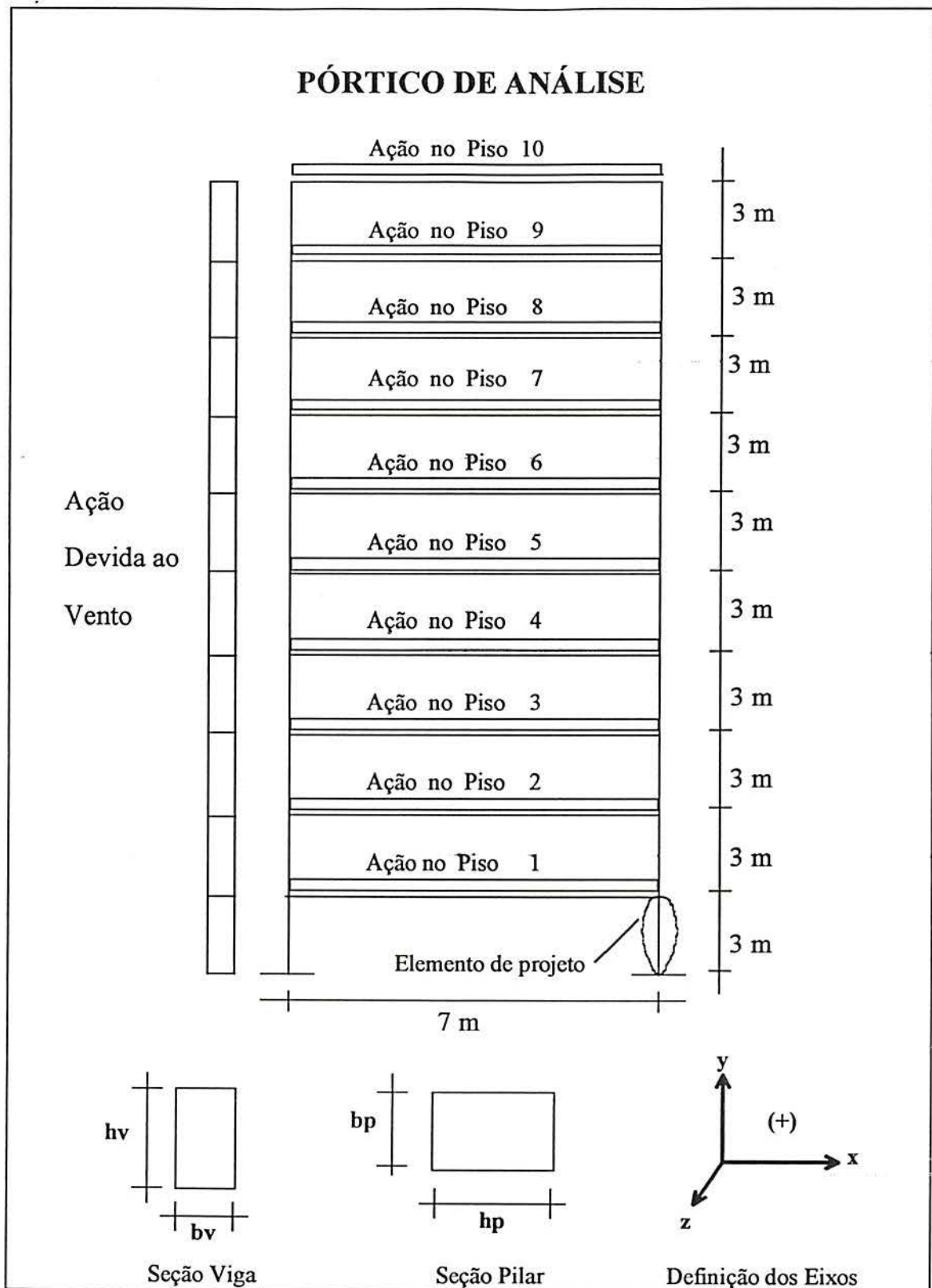


Fig. 6.1 Características do pórtico e dimensões do pilar a ser projetado.

do sistema estrutural é intencional e têm por objetivo concentrar as atenções no aspecto de combinação de ações.

- Hipóteses para o problema

- \* O pórtico é considerado como parte de uma estrutura. A área de influência, através das quais se transmitem as ações às vigas e pilares, é de 3.5 m perpendicular ao eixo do pórtico.
- \* A estrutura se encontra na zona urbana da cidade de Porto Alegre, com dimensão vertical maior que vinte metros.

- Ações consideradas

No pórtico, considera-se que estão atuando as seguintes ações:

- \* A ação permanente gravitacional, devida ao peso próprio dos materiais e às instalações permanentes da estrutura.
- \* A ação viva gravitacional devida ao uso da estrutura. O uso proposto é o comercial.
- \* A ação devida ao vento, *suposta* atuando uniformemente sobre toda a altura do pórtico. A direção de atuação do vento é a barlavento do elemento a projetar-se.

- Normas Utilizadas

- \* NBR-6118: "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado", 1980.
- \* NBR-6120: "Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações", 1980.
- \* NBR 6123: "Forças Devidas ao Vento em Edificações", 1987.
- \* NBR 8681: "Ações e Segurança nas Estruturas", 1984.

2) **Dimensões tentativas dos elementos**

- |                                   |                       |
|-----------------------------------|-----------------------|
| * Comprimento dos pilares         | $l_p = 3.0 \text{ m}$ |
| * Largura da seção dos pilares    | $b_p = 0.4 \text{ m}$ |
| * Altura da seção dos pilares     | $h_p = 0.6 \text{ m}$ |
| * Comprimento das vigas           | $l_v = 7.0 \text{ m}$ |
| * Largura da seção das vigas      | $b_v = 0.3 \text{ m}$ |
| * Altura da seção das vigas       | $h_v = 0.5 \text{ m}$ |
| * Cobrimento da armadura no pilar | $d' = 0.04 \text{ m}$ |

### 3) Propriedades dos materiais

|   |   |
|---|---|
| * Peso específico do concreto armado                  | $\rho_{ca} = 25 \cdot 10^3 \text{ N/m}^3$ |
| * Resistência característica do concreto à compressão | $f_{ck} = 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$    |
| * Módulo de elasticidade do concreto                  | $E_c = 21 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$       |
| * Resistência característica do aço à tração          | $f_{yk} = 50 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$    |

### 4) Calculo de ações

- Ação permanente uniformemente distribuída / nível

Peso próprio:

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| * Peso laje de 0.20 m de espessura    | 17500 N/m |
| * Peso viga 0.30· 0.50 m <sup>2</sup> | 3750 N/m  |

Carga morta de instalações permanentes + pilares (assumida) 3500 N/m

total / nível = 24750 N/m

- Ação viva gravitacional uniformemente distribuída / nível

Ação característica para comercio (nível 1) 14000 N/m

Ação característica para comercio (níveis 2-10) 10500 N/m

- Ação devida ao vento, uniformemente distribuída na altura

Velocidade básica do vento para Porto Alegre  $V_0 = 45 \text{ m/s}$

Fator topográfico para terreno plano ou fracamente acidentado  $S_1 = 1.0$

Fator  $S_2$ , que corresponde a:  $S_2 = 0.96$

\* Rugosidade do terreno Categoria IV

\* Dimensões da edificação Classe B

\* Altura sobre o terreno (do topo da edificação) 30 m

Fator estatístico para grupo II de edificações  $S_3 = 1.0$

Coefficiente Aerodinâmico:

\* Barlavento  $C = 0.8$

\* Sotavento  $C = -0.6$

Ação devida ao vento uniformemente distribuída na altura:

\* Barlavento 3204 N/m

\* Sotavento 2403 N/m



### 5) Coeficientes ação/efeito e efeito das ações

Os seguintes coeficientes ação/efeito, são tomados dos resultados da análise do pórtico da figura 6.1, submetido a ações unitárias, usando o programa para análise GAELI. Os efeitos das ações são calculados multiplicando seus valores calculados anteriormente, pelos seus respectivos coeficientes.

#### - Estado limite último

As direções são positivas, segundo os eixos definidos na figura 6.1. Os coeficientes  $c_i(Fy)$ ,  $c_i(Mz)$ , e  $c_i(dx)$ , correspondem aos coeficientes de transformação ação/efeito para a força axial  $Fy$  e momento flexor  $Mz$  respectivamente.

Tabela 6.2.a Coeficientes ação/efeito para peso próprio e ação viva gravitacional

| Nível de aplicação das ações | Aplicação no Elemento | Coef. ação/efeito |                |
|------------------------------|-----------------------|-------------------|----------------|
|                              |                       | $c_i(Fy)$         | $c_i(Mz)$      |
|                              |                       | m                 | m <sup>2</sup> |
| 1                            | base                  | +3.5              | 1.03           |
|                              | topo                  | -3.5              | 2.10           |
| 2                            | base                  | +3.5              | -0.16          |
|                              | topo                  | -3.5              | -0.44          |
| 3-10                         | base                  | +3.5              | → 0            |
|                              | topo                  | -3.5              | → 0            |

Tabela 6.2.b Coeficientes ação/efeito para vento

| Direção do Vento | Aplicação no Elemento | Coef. ação/efeito |                |
|------------------|-----------------------|-------------------|----------------|
|                  |                       | $c_i(Fy)$         | $c_i(Mz)$      |
|                  |                       | m                 | m <sup>2</sup> |
| barlavento       | base                  | +51.77            | +43.31         |
|                  | topo                  | -51.77            | -0.75          |
| sotavento        | base                  | +51.77            | +44.29         |
|                  | topo                  | -51.77            | -1.35          |

Tabela 6.3.a Efeitos do peso próprio e ação viva gravitacional

| Nível de aplicação das ações | Aplicação no Elemento | Efeito peso próprio |        | Efeito ação viva |        |
|------------------------------|-----------------------|---------------------|--------|------------------|--------|
|                              |                       | $Fy$                | $Mz$   | $Fy$             | $Mz$   |
|                              |                       | N                   | N.m    | N                | N.m    |
| 1                            | base                  | +86625              | +25493 | +49000           | +14420 |
|                              | topo                  | -86625              | +51975 | -49000           | +29400 |
| 2                            | base                  | +86625              | -3960  | +36750           | -1680  |
|                              | topo                  | -86625              | -10890 | -36750           | -4620  |
| 3-10                         | base                  | +86625              | → 0    | +36750           | → 0    |
|                              | topo                  | -86625              | → 0    | -36750           | → 0    |
| total:                       | base                  | +866250             | +21533 | +379750          | +12720 |
|                              | topo                  | -866250             | +41085 | -379750          | +24780 |

Tabela 6.3.b Efeitos do vento

| Direção do Vento | Aplicação no Elemento | Efeito ação do vento |         |
|------------------|-----------------------|----------------------|---------|
|                  |                       | $F_y$                | $M_z$   |
|                  |                       | N                    | N.m     |
| barlavento       | base                  | + 165871             | +138765 |
|                  | topo                  | - 165871             | -2400   |
| sotavento        | base                  | + 124403             | +106429 |
|                  | topo                  | - 124403             | -3244   |
| total            | base                  | +290274              | +245194 |
|                  | topo                  | -290274              | -5644   |

### 6) Coeficientes de segurança

- Coeficiente parcial de segurança  $\gamma_s$

\* Ação permanente que produz efeitos desfavoráveis  $\gamma_s^G = 1.40$

\* Ação variável  $\gamma_Q^G = 1.40$

- Coeficientes parciais de segurança de modelo, de segurança e de combinação

\* Coeficiente de combinação  $\psi_0 = 0.7$

$$\psi_1 = 0.6$$

$$\psi_2 = 0.4$$

\* Coeficiente parcial de segurança para teoria elástica linear  $\gamma_{mod} = 1.0$

\* Coeficiente por classe de segurança  $\gamma_n = 1.0$

- Coeficientes de minoração da resistência

\* Coeficiente de minoração da resistência do concreto  $\gamma_c = 1.4$

\* Coeficiente de minoração da resistência do aço  $\gamma_a = 1.15$

### 7) Verificação de estados limites últimos

A verificação do estado limite último se faz na base do pilar, onde se encontram as maiores solicitações de flexo-compressão.

- Combinação básica de ações para este problema

$$L = \gamma_s^G \cdot P_G + \gamma_Q^G \cdot V_Q + \gamma_Q^G \cdot \psi_0 \cdot V_E$$

A combinação mais desfavorável é quando a ação do vento é considerada como a mais representativa das ações variáveis. Segundo as recomendação das Normas NBR 6120, 1980, no cálculo de pilares sobre os quais atuarem mais de 6 ou mais pisos, deve-se reduzir 60 % do valor da ação viva gravitacional (ação vertical acidental). A força axial última  $Nu$ , e o momento fletor últimos  $Mu$ , no pilar são:

$$Na = 1.4 \cdot 1170250 + 1.4 \cdot 290274 + 1.4 \cdot 0.70 \cdot 0.4 \cdot 379750 = 1991289 \text{ N}$$

$$Nu = \gamma_n \cdot \gamma_{mod} \cdot Na = 1991289 \text{ N}$$

$$Ma = 1.4 \cdot 29145 + 1.4 \cdot 245194 + 1.4 \cdot 0.70 \cdot 0.4 \cdot 12720 = 378404 \text{ N.m}$$

$$Mu = \gamma_n \cdot \gamma_{mod} \cdot Ma = 378404 \text{ N.m}$$

- Resistência última

O cálculo da resistência última se faz segundo o método dos ábacos, para pilares, o qual pode ser encontrado nos livros de concreto armado (ver Montoya, Meseguer e Cabre, 1973).

- \* Área de concreto :  $A_c = 0.24 \text{ m}^2$
- \* Resistência de cálculo do concreto :  $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$
- \* Resistência de cálculo do aço:  $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_a$
- \* Devido a que:  $3.46 \cdot l_p / h_p = 17.3 \leq 40$ , o pilar é de tipo curto e o efeito da esbelteza pode ser desprezado
- \* Excentricidade por flexocompressão:  $\epsilon_m = Mu/Nu = 0.19 \text{ m}$
- \* Excentricidade acidental adicional :  $\epsilon_a = h / 30$  ou  $2\text{cm}$ , então,  $\epsilon_a = 0.02 \text{ m}$
- \* Excentricidade de cálculo :  $\epsilon_{ma} = \epsilon_m + \epsilon_a = 0.21 \text{ m}$
- \*  $\nu_h = \frac{Nu}{A_c \cdot f_{cd}} = 0.77$  (fator para o cálculo da armadura)
- \*  $\mu_h = \frac{Nu \cdot \epsilon_{ma}}{A_c \cdot h_p \cdot f_{cd}} = 0.27$  (fator para o cálculo da armadura)
- \* Dos ábacos de flexo-compressão oblíqua, com  $\nu_h$  e  $\mu_h$  e  $d'$ , obtêm-se o fator de porcentagem de armadura :  $w_a = 0.76$
- \* Área de aço:  $A_a = w_a \cdot A_c \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 0.0037 \text{ m}^2$



- \* A área de aço se distribui a metade para cada lado (flexo-comprimido) do pilar:  $19 \text{ cm}^2$ , correspondente a 4 barras de 25 mm de diâmetro.

O estado limite último à flexocompressão do pilar fica verificado quando este é armado com 4 barras de 25 mm de diâmetro a cada lado (flexo-comprimido).

## 6.7 Considerações sobre os formatos adotados pelas Normas

Da teoria e do exemplo de aplicação apresentados, algumas observações podem ser mencionadas sobre o método de combinação de ações por coeficientes parciais de segurança:

- 1) Segundo as normas revisadas, os coeficientes parciais de segurança são um conjunto de parâmetros de controle proporcionais às incertezas e à influência das quantidades relevantes, selecionados com métodos probabilísticos de calibração, para serem usados numa norma particular. Os métodos de calibração usam a análise de confiabilidade FOSM, para determinar o nível de segurança correspondente, e os coeficientes são determinados através de um processo de otimização tal que a dispersão do nível médio de segurança seja mínima. Segundo este critério, o risco associado com o formato da equação (6.1) é constante.
- 2) Já que os coeficientes parciais são assumidos como sendo proporcionais às incertezas associadas a eles, o autor de normas está livre de escolher ou adicionar a quantidade de coeficientes que considere apropriado para uma norma particular. Porém, para propósitos práticos e de simplicidade, como no caso das normas analisadas, um número consideravelmente menor que o de variáveis aleatórias básicas são considerados, mas esta redução no número de coeficientes está desconsiderando a proporcionalidade às incertezas associadas, ou seja, os coeficientes parciais de segurança não estão diretamente ligados com suas correspondentes fontes de incertezas e não pode ser feita uma distinção explícita dos tipos de incertezas envolvidas em cada passo da análise.
- 3) Vrouwenvelder e Siemes, s.d., consideram que um processo de otimização puramente matemática na calibração dos coeficientes parciais  $\gamma_S$ , ignora a proporcionalidade às incertezas e influencia de parâmetros relevantes como o coeficiente

de variação, de tal forma que correções independentes *são feitas* aos valores destes coeficientes para serem usados nas normas. Então, na escolha dos coeficientes deve estar presente a experiência e/ou o juízo pessoal do autor de normas.

4) Na literatura revisada, incluindo as normas aqui analisadas, não tem sido encontrado um procedimento para estimar os valores dos coeficientes  $\psi_i$ , usados nas equações de combinação, o que, segundo Floris, 1994, sugere que estes coeficientes são determinados empiricamente, ao invés de serem produto de considerações probabilísticas. Já que estes coeficientes multiplicam os coeficientes parciais de segurança, os coeficientes de segurança resultantes destes dois, implicitamente também são determinados de considerações não probabilísticas.

5) Nos formatos LRFD, os coeficientes  $\gamma_S$  são aplicados para cada uma das ações individuais, não sendo necessário especificar uma ação variável principal ou fatores de combinação separados  $\psi_i$ . A desvantagem desta formulação é um acréscimo no número de coeficientes  $\gamma_S$  necessários para realizar a combinação, ou seja, para uma mesma ação são necessários tantos coeficientes  $\gamma_S$  a serem aplicados sobre esta ação quantas sejam as diferentes combinações nas quais atue.

6) As ações tem diferentes coeficientes de variação, taxas de ocorrência e durações, mas esta informação, atualmente disponível para ações típicas em estruturas correntes, não é considerada (de maneira explícita) para levar em conta a frequência de participação de cada ação na ação total. As ações combinadas de projeto, considerando estes parâmetros, apresentam diferentes probabilidades de excedência. Vrouwenvelder e Siemes, s.d., encontram considerável dispersão nos valores do índice de confiabilidade (e da probabilidade de excedência) ao calibrar os índices de segurança, considerando coeficientes de variação das ações e resistências.

7) Riera e Rocha, 1994<sup>a</sup>, mencionam que o efeito combinado depende dos coeficientes de conversão efeito/ação, que variam entre componentes estruturais e não são considerados na escolha dos coeficientes de combinação.

8) Floris, 1994, compara os resultados obtidos da combinação de ações seguindo a formulação do EUROCODE, com resultados obtidos de procedimentos descritos por Wen, 1977, e conclui que a combinação de acordo com o EUROCODE não apresenta



um nível constante de confiabilidade, e que as vezes a combinação segundo esta norma é muito conservativa e em outras pode ser não conservativa. A situação de combinação não conservativa foi encontrada quando uma das ações atuantes corresponde a sismo.

9) Segundo observações feitas anteriormente, podem existir grandes mudanças no índice de segurança e implicitamente no nível de segurança, de tal forma que o risco associado com a equação (6.1) já não é mais constante. Grandes mudanças no nível de segurança pode produzir grandes mudanças no projeto. Por exemplo, as dimensões dos elementos estruturais poderiam ser alteradas notavelmente, o que não pode ser aceito na prática.

10) Observações adicionais às normas revisadas são:

- A otimização no projeto estrutural implica na variação de dimensões e pelo tanto das ações e resistências, para que a margem de segurança entre ações fatoradas e resistências fatoradas tendam a um mínimo. O conjunto de fatores parciais de segurança e as propriedades dos materiais não são alterados neste processo de otimização. Este conceito não deve ser confundido com o conceito de otimização dos fatores parciais de segurança através da calibração.

- Nas normas revisadas, não é apresentada a informação disponível sobre os parâmetros estatísticos de ações ou propriedades dos materiais, para que possam ser usados por projetistas com conhecimentos de teoria de confiabilidade.



## Capítulo 7

# Proposta para superpor ações representadas como processos aleatórios

### 7.1 Considerações preliminares

As normas de projeto estrutural procuram abranger todos os requerimentos necessários para assegurar que o comportamento da estrutura não venha a atingir algum estado limite quando a mesma for submetida aos efeitos de várias ações simultâneas. Estes requerimentos incluem coeficientes de segurança para ações, para resistência, bem como definições de limites de serviço e limites últimos. A abordagem usual das normas que determinam como combinar ações consiste em assumir que o máximo da ação combinada ocorrerá quando uma das ações variáveis, a mais representativa dentre elas, atua com seu valor máximo, enquanto as outras assumem seus valores instantâneos ou valores arbitrários pontuais no tempo. A regra de Turkstra (ver seção 3.4) para combinar intuitivamente ações consideradas como variáveis aleatórias é adotada pelas normas estruturais no cálculo da combinação mais desfavorável, quando não se conhece a ação variável mais representativa.

Algumas desvantagens na combinação de ações, tal como apresentadas pelas atuais abordagens das normas, são apresentadas na seção 6.7, onde, a que merece maior atenção é a de ser não conservativa para alguns tipos de ações.

Já que a maioria das ações sobre estruturas varia com o tempo, conceitualmente se deve considerar tanto a natureza aleatória quanto a variação das ações no tempo; ou seja, o efeito resultante considerando um comportamento estrutural linear é um processo aleatório obtido como a soma das ações relevantes (processos aleatórios),

multiplicadas pelos seus respectivos coeficientes que transformam ações em efeitos, como expresso na equação (3.53).

Então, conhecidas as características das ações individuais, o seguinte problema deve ser resolvido:

Determinar, para um tempo dado de referência  $T$  e uma dada probabilidade de falha, qual é o máximo efeito combinado,  $S_{m\acute{a}x}(T)$ , a ser adotado no projeto (Riera e Rocha, 1994).

Onde  $S_{m\acute{a}x}(T)$ , é uma variável aleatória, cujo valor médio e desvio padrão são necessários para serem usados juntamente com métodos de cálculo da confiabilidade estrutural, tais como o FOSM (First Order, Second Moment). O FOSM é o método mais usado no cálculo da confiabilidade estrutural, pois a incerteza é introduzida através de um único parâmetro: a variância ou, alternativamente, o coeficiente de variação.

Das considerações anteriores, um método simples de compreender, prático para seu uso, que leve em conta a variação das ações no tempo, e que supra algumas das desvantagens apresentadas pelos métodos para superpor ações como usados nas normas atuais, é necessário para ser incorporado em futuras normas de projeto estrutural.

Um procedimento geral para combinar ações representadas por quaisquer tipo de processo e de distribuição é muito difícil de ser obtido, de tal forma que as seguintes limitações práticas são feitas aos processos no tempo para simplificar o tratamento da sua superposição:

- A ocorrência de ações variáveis de longa duração ou prolongadas é descrita por um processo de onda quadrada de Poisson.
- A ocorrência de ações variáveis de muito curta duração ou extraordinárias é descrita por um processo de pulsos de Poisson.
- A estimativa das estatísticas do valor máximo, e por conseguinte o cálculo da confiabilidade usando o FOSM, é grandemente simplificada quando todos os processos podem ser assumidos Gaussianos. Nesta seção e em todas as seções deste capítulo assume-se que todas as ações variáveis tem distribuição Gaussiana. Deve-se observar que segundo esta hipótese, somente o valor médio e o desvio padrão são necessários para caracterizar as amplitudes das ações. Os processos para representar ações são

portanto chamados: processo de onda quadrada de Poisson com amplitudes Gaussianas (POPAG); e, processo de pulsos de Poisson com amplitude Gaussiana (PPPAG), respectivamente.

- Mantém-se a hipótese de que os processos aleatórios são não correlacionados e que a transformação de ação em efeito é linear, conforme a equação (2.1).

## 7.2 Valor médio e desvio padrão do máximo de processos individuais

O valor médio e o desvio padrão,  $\mu_{i,máx}(T)$  e  $\sigma_{i,máx}(T)$  respectivamente, do valor extremo  $L_{i,máx}$ , de um processo individual  $i$  do tipo POPAG ou PPPAG, para um período de referência  $T = n_i / \lambda_i$ , podem ser calculadas usando as expressões seguintes:

$$\mu_{i,máx}(T) = \mu_i + \xi_i \cdot \sigma_i \quad (7.1.a)$$

$$\sigma_{i,máx}(T) = \zeta_i \cdot \sigma_i \quad (7.1.b)$$

onde  $\lambda_i$  é a taxa de mudança na amplitude da onda (POPAG) ou o número médio de pulsos na unidade de tempo (PPPAG),  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são o valor médio e desvio padrão do processo, e  $\xi_i$  e  $\zeta_i$ , são coeficientes obtidos conforme as equações (3.42.a, b), propostas por Nanni e Riera, 1986. Deve-se observar que o subíndice  $i$ , usado nos termos das equações, faz referência a um processo individual, POPAG ou PPPAG, não combinado.

Como o valor  $n_i$ , necessário para o uso das equações (3.42.a,b), não é aqui um parâmetro determinístico mas sim uma variável aleatória, é necessário verificar a validade da aproximação  $n_i = \lambda_i \cdot T$ . São portanto realizadas simulações de Monte Carlo de processos POPAG para verificar a precisão dos valores de  $\xi_i$  e  $\zeta_i$ , calculados com as equações de Nanni e Riera, para diferentes tamanhos de amostras. Nos gráficos 7.1.a,b, são apresentados os resultados obtidos com simulações e das equações, onde se pode observar que:

- No gráfico 7.1.b, os valores de  $\zeta_i$ , obtidos com a equação (3.42.b), coincidem com os obtidos nas simulações exceto para uma pequena faixa ( $2 < n_i < 6$ ), na qual são



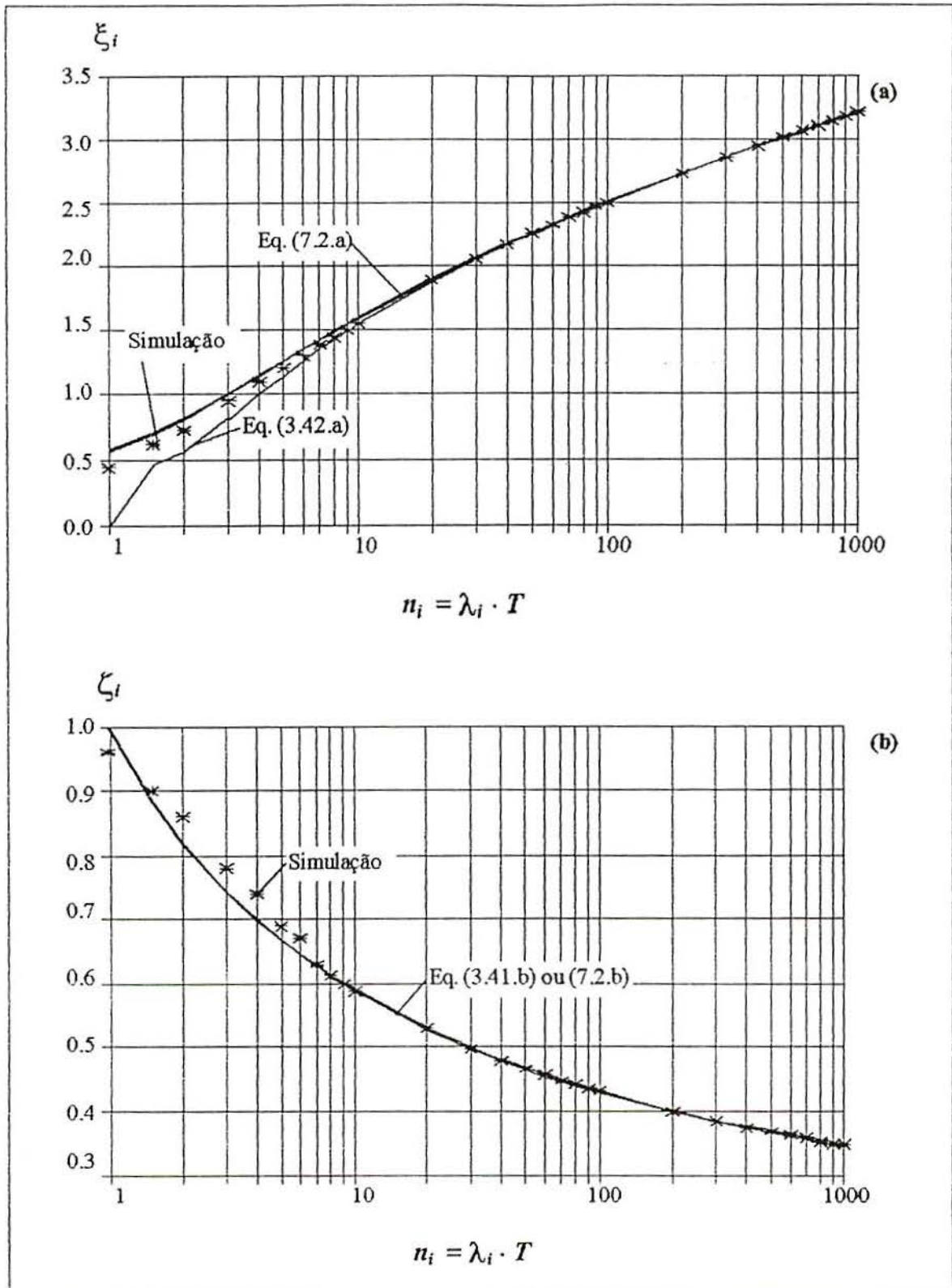


FIG. 7.1 Estatísticas do valor máximo normalizado das eq. (3.42.a,b), (7.2.a,b) e simulações: (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.

inferiores em até 7 %, o que para propósitos do presente trabalho pode ser considerado como um erro aceitável.

- No gráfico 7.1.a, o valor de  $\xi_i$  obtido com a equação (3.42.a), é menor quando comparado com as simulações, para um número de pulsos ou onda (eventos) menor do que vinte. Para compreender o motivo da diferença entre simulação e equação, pode se considerar o seguinte caso: para  $T \approx 1/\lambda_i$  se têm que o número de trocas de amplitude no processo POPAG ou de chegadas de pulso no processo PPPAG pode, com probabilidade não desprezível, superar o valor  $n_i = \lambda_i \cdot 1/\lambda_i = 1$  dado pela aproximação, pois  $n_i$  é aqui uma variável aleatória. A equação para o cálculo do valor médio normalizado deve ser então corrigida incrementando em um o número de eventos, pois este incremento foi observado nas simulações. No gráfico 7.1.a, pode-se observar que os valores de  $\xi_i$  obtidos com a equação corrigida são maiores que os valores obtidos com simulação (máximo 20 % para  $n_i = 1$ ), sendo que a diferença desaparece para um número de eventos maiores do que vinte.

Para o cálculo de  $\xi_i$  e  $\zeta_i$ , neste trabalho, são portanto utilizadas as seguintes expressões:

$$\xi_i = \left( \ln \left[ (n_i + 1) - 0.918 \cdot \ln (n_i + 1) \right] \right)^{0.604} \left[ 1 - 0.866 / (n_i + 1) \right] \quad (7.2.a)$$

$$\zeta_i = \frac{1 + 0.0267 \cdot \ln n_i}{1 + 0.3486 \cdot \ln n_i} \quad (7.2.b)$$

onde,  $n_i$  é o número de eventos de carga aproximado por  $\lambda_i \cdot T$ .

### 7.3 Superposição de processos de Onda Quadrada de Poisson com amplitudes Gaussianas (POPAG)

Um processo POPAG, fica completamente caracterizado através de três parâmetros:

- Valor médio das amplitudes  $\mu_i$ .
- Desvio padrão das amplitudes  $\sigma_i$ .

- Taxa média de mudança de amplitude  $\lambda_i$ , igual à inversa do tempo médio de duração de cada onda quadrada.

onde,  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ ,  $\lambda_i$ , correspondem, como pode ser visto no capítulo 4, com os dados disponíveis das ações de longa duração.

Analogamente ao que foi visto para processos POPAG individuais, o valor extremo combinado  $S_{máx}(T)$ , também com distribuição Gaussiana, pode ser calculado para um período de referência  $T$  usando as mesmas equações anteriores, substituindo-se o subíndice  $i$ , que representa o processo individual, pelo subíndice  $S$ , que representa o processo resultante. Então,  $\xi_S$  e  $\zeta_S$ , são obtidos das equações (7.2.a,b) para o número de eventos de processo resultante  $n_S$ . As estatísticas para o cálculo do extremo combinado  $\mu_{S,máx}(T)$  e  $\sigma_{S,máx}(T)$ , são obtidas das equações (7.1.a,b), onde  $\mu_S$  e  $\sigma_S$ , pode ser calculados usando as seguintes expressões:

$$\mu_S = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mu_i \quad (7.3.a)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma_i)^2} \quad (7.3.b)$$

Ainda que as mudanças de amplitude no processo individual possam ser assumidas independentes, esta hipótese não pode ser aplicada aos valores de sucessivas amplitudes do processo combinado (ver figura 7.2), devido a que a consideração de independência entre eventos deste último, implica que os eventos individuais simplesmente se somam. Isto, como foi mencionado anteriormente, leva geralmente a um resultado muito conservativo. Sob esta última consideração e observando as equações propostas, o problema para o cálculo do valor médio e desvio padrão do máximo combinado se reduz a um problema de cálculo do número de eventos de carga,  $n_S$ , ou da taxa de ocorrência de eventos do processo resultante,  $\lambda_S$ .



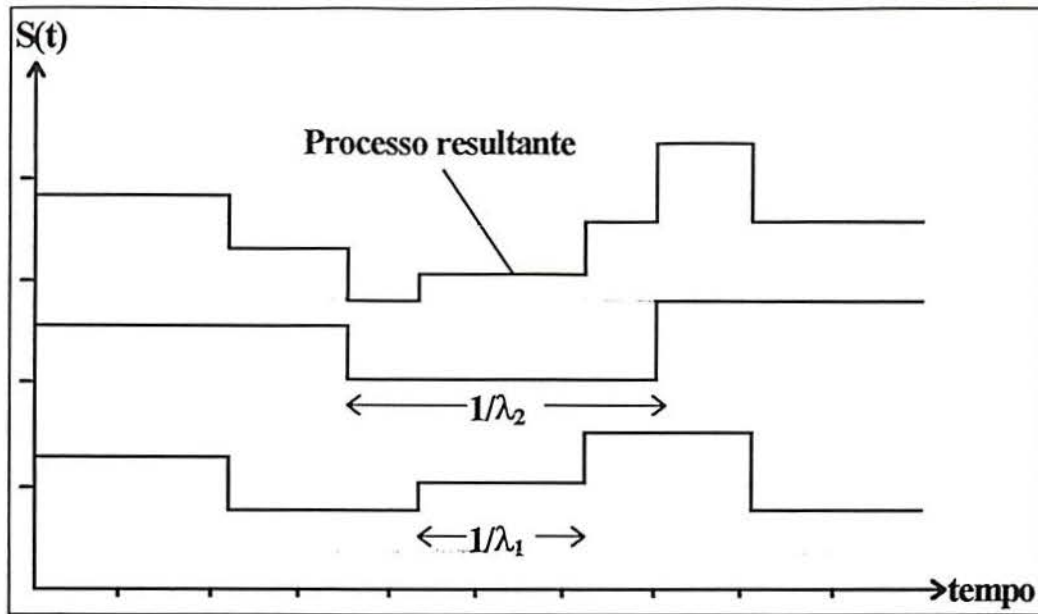


FIG. 7.2 Amostra da superposição de dois processos POPAG

Três soluções analíticas para o cálculo de  $n_S$  (ou  $\lambda_S$ ), da superposição de ações representadas por processos POPAG, são apresentadas nesta seção. Considerando que da simulação de Monte Carlo se obtém a solução *exata* da superposição de processos (ver Apêndice A), a influência dos três parâmetros estatísticos que caracterizam os processos é estudada, comparando os resultados das propostas com os resultados da simulação. No apêndice B, são tabelados os resultados das simulações e das propostas, para diversas situações envolvendo dois processos:  $\mu_i = 0$  e  $\mu_i \neq 0$ ; várias relações de  $\sigma_1/\sigma_2$ ; e, várias relações de  $\lambda_1/\lambda_2$ . Nos gráficos (7.2.a,b) e (7.3.a,b) são apresentadas algumas das situações mencionadas, os quais permitem comparar visualmente os resultados obtidos das simulações e das equações propostas.

Os critérios para superpor POPAG, são os seguintes:

- a) Der Kiureghian, 1978, obtém o valor médio e desvio padrão normalizados do máximo, através de integração numérica dos dois primeiros momentos do valor extremo com distribuição Gaussiana. Estas estatísticas são chamadas funções descritoras (apresentadas graficamente), e são equivalentes aos parâmetros  $\xi_i$  e  $\zeta_i$ , obtidos com as expressões (7.2.a,b) e apresentados nos gráficos (7.1.a,b). Usando a expressão (3.43) para o cálculo da taxa de ultrapassagem para processos aleatórios Gaussianos, e a derivada do desvio padrão calculado com a expressão (7.3.b), o autor, deduz a

expressão que segue:

$$v_S(\mu) = \left[ \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_L} v_j^2(\mu) \cdot [c_j \cdot \sigma_j]^2 \right)^{0.5}}{\sigma_S} \right] \quad (7.4)$$

onde  $v_S(\mu)$  é a taxa de ultrapassagem do nível médio do processo resultante,  $v_i(\mu)$  é a taxa de ultrapassagem do nível médio dos processos individuais,  $\sigma_i$  é o desvio padrão dos processos individuais,  $\sigma_S$  é o desvio padrão do processo resultante, e  $n_L$  é o número de processos a se superpor. Deve-se notar que na expressão (7.4), ainda que conceitualmente diferentes,  $v_S(\mu)$  é usado como sendo numericamente igual a  $\lambda_S$ , para o cálculo do respectivo  $n_S$ .

Na figura 7.2.a,b, observa-se que a equação (7.4), para o cálculo do valor médio, em alguns casos é um limite superior, e em outros, como quando os  $\lambda_i$  dos processos individuais são iguais, é conservativo. A equação (7.4), quando usada para o cálculo do desvio padrão, fornece os mesmos resultados que a simulação para  $\lambda_i$  iguais, sendo conservativo para  $\lambda_i$  diferentes (ver figura 7.3.a,b).

b) Riera e Rocha, 1994, apresentam uma proposta preliminar para superpor ações (sujeita a posterior verificação), baseada nos conceitos de função de autocorrelação e tempo de correlação. Considerando que a função de autocorrelação pode ser expressa como uma função exponencial (ver Riera, 1989, p. 12), o tempo de correlação associado  $\tau_{ci}$  pode ser escrito:

$$\tau_{ci} = \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \quad (7.5)$$

O qual, segundo Riera e Rocha, 1994, sugere que o processo  $Li(t)$  pode ser aproximado por um processo onde as ondas quadradas tem amplitudes independentes e largura constante  $\tau_{ci}$ . Com esta hipótese se pode calcular o tempo de correlação do processo combinado  $\tau_{cS}$ , usando as equações (7.3.b) e (7.5), e uma taxa equivalente de ocorrência de eventos do processo com largura de onda constante como segue:

$$\tau_{cS} = \sum_{i=1}^{nL} \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \cdot \left[ \frac{c_i \cdot \sigma_i}{\sigma_S} \right]^2 \quad (7.6.a)$$

$$\lambda_S = \frac{1}{2 \cdot \tau_{cS}} \quad (7.6.b)$$

expressão usada para calcular  $n_S$ .

O valor médio do máximo calculado com as expressões (7.6.a,b) é não conservativo, quando comparado com resultados das simulações de Monte Carlo. O desvio padrão do máximo é compatível com os resultados das simulações, para todos os casos de  $\lambda_i$  (iguais ou diferentes), dos processos individuais.

c) Considerando que a avaliação do valor médio do máximo usando os dois métodos mencionados, pelo lado da segurança, não é possível com exceção de poucos casos, a seguinte relação empírica é sugerida:

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^{nL} \frac{\lambda_i \cdot c_i \cdot \sigma_i}{\sigma_S} \quad (7.7)$$

Deve-se observar que a expressão (7.7) é um limite superior da equação (7.4) (considerando  $\lambda_i$  ao invés de  $v_i$  ( $\mu$ )). Esta última expressão, quando comparada com resultados das simulações de Monte Carlo, apresenta resultados sempre conservadores, porém inferiores à soma direta dos máximos dos processos individuais. Quando os  $\lambda_i$  dos processos individuais são iguais, os resultados da equação (7.7) são muito próximos com os das simulações, e quando os  $\lambda_i$  são diferentes, (7.7) leva a resultados sempre conservadores.

Da análise dos três métodos apresentados anteriormente, pode-se mencionar que:

- Dos resultados obtidos com simulação (ver tabelas B1 e B2 do apêndice B), verifica-se que um incremento no valor médio dos processos individuais produz quantitativamente o mesmo incremento no valor médio máximo do processo resultante. Este resultado é consistente com a equação (7.3), usada pelas três abordagens apresentadas.
- Para o processo combinado, dois valores diferentes para  $\lambda_S$  ou  $n_S$ , são necessários: um para o cálculo do valor médio do máximo e outro para o cálculo do



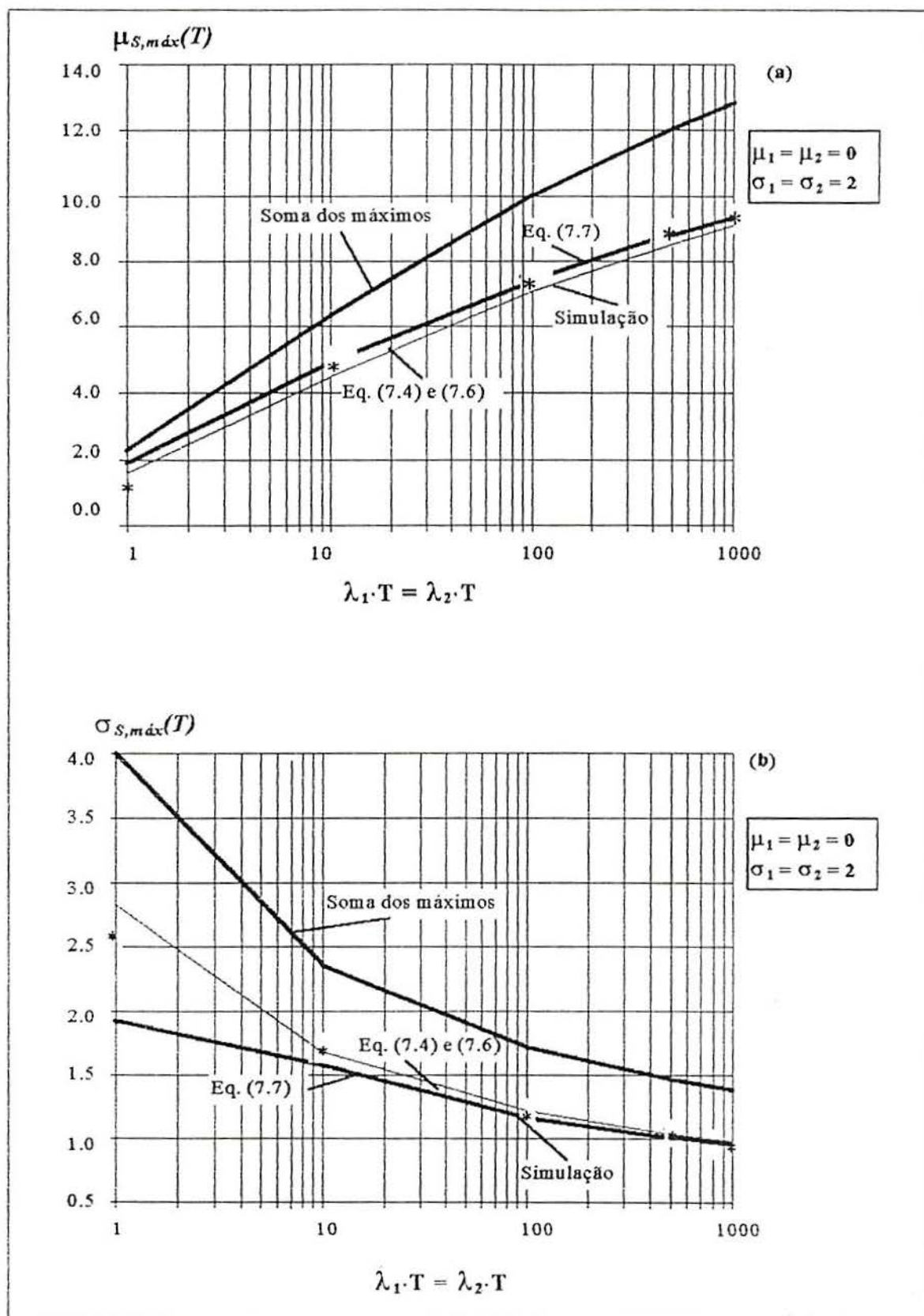


FIG. 7.3 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações quando  $\lambda_1 = \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio Padrão.

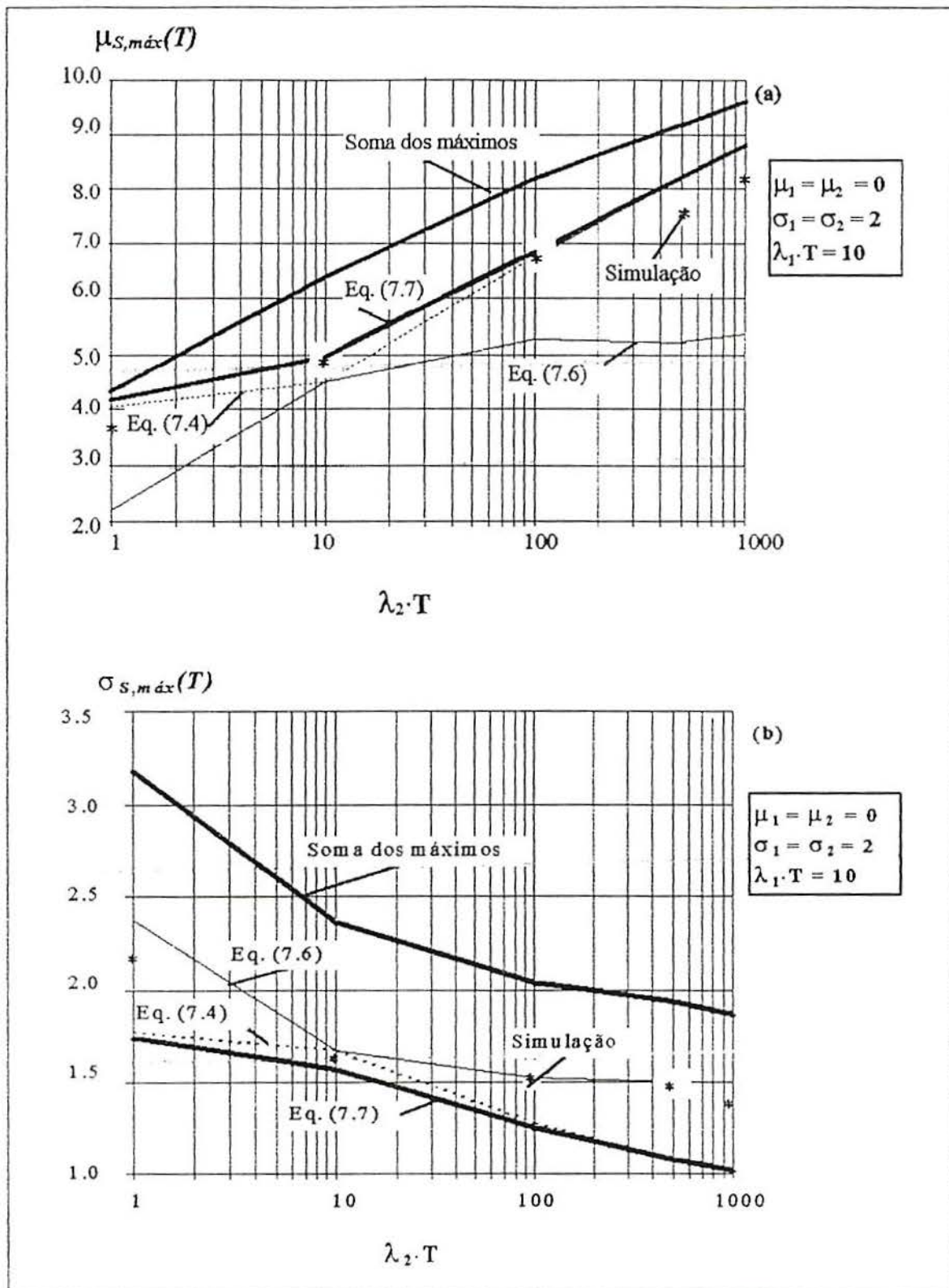


FIG. 7.4 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações quando  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ : (a) Valor médio e, (b) Desvio Padrão.

desvio padrão do máximo. A equação (7.7) para o cálculo de  $\lambda_S$  correspondente a  $\mu_{S,máx}(T)$  e as equações (7.6.a,b) para o cálculo do  $\lambda_S$  correspondente a  $\sigma_{S,máx}(T)$ .

- Para verificar que os resultados obtidos da aplicação dos métodos mencionados são válidos para a superposição de mais dois processos, simulação de Monte Carlo e as equações anteriores foram usadas para diversas situações na superposição de três processos POPAG. Estes resultados são apresentados na tabela B3 (ver apêndice B).

Sob as considerações anteriores, o cálculo de  $\mu_{S,máx}(T)$  e  $\sigma_{S,máx}(T)$  da superposição de processos POPAG, considerando conhecidos os parâmetros que caracterizam os processos individuais, é realizado como segue:

- Usando a equação (7.7) se calcula  $\lambda_S$  correspondente ao valor médio. Com as equações (7.6.a,b) se calcula  $\lambda_S$  correspondente ao desvio padrão. O valor de  $n_S$  é calculado do produto  $\lambda_S \cdot T$ , para cada caso.

- Usando os resultados de  $n_S$ , nas equações (7.2.a) e (7.2.b), calcula-se  $\xi_S$  e  $\zeta_S$ , respectivamente.

- Finalmente, usando as estatísticas normalizadas  $\xi_S$  e  $\zeta_S$  nas equações (7.1.a) e (7.1.b) se obtém  $\mu_{S,máx}(T)$  e  $\sigma_{S,máx}(T)$ , respectivamente.

## 7.4 Superposição de processos POPAG com PPPAG

Da mesma forma que um processo POPAG, um processo PPPAG fica completamente caracterizado através dos parâmetros  $\mu_i$ ,  $\sigma_i$ , e  $\lambda_i$ , obtidos a partir de dados disponíveis de ações de curta duração.

Considerando que os eventos dos processos PPPAG são pulsos (pontuais no tempo), a probabilidade da superposição de dois ou mais pulsos destes processos é teoricamente desprezível. Portanto, o problema de superpor processos de onda quadrada com processos de pulso fica reduzido à superposição do conjunto de processos de onda quadrada com cada um dos processos de pulso envolvidos, escolhendo-se o valor máximo dentre estas combinações.



Mantendo o objetivo de simplicidade na combinação de ações, as mesmas equações usadas na combinação de processos de onda quadrada são propostas para serem usadas na combinação de processos POPAG com um único processo PPPAG. Simulações de Monte Carlo foram realizadas para verificar esta proposta. No Apêndice B estão tabelados os resultados das simulações e os obtidos das equações (7.4), (7.6.a,b) e (7.7) (ver tabelas B4 a B8). Alguns resultados relevantes são apresentados nos gráficos 7.5 a 7.10, dos quais se pode mencionar:

- Nos gráficos 7.5 a 7.7 se pode observar que os resultados das equações propostas correspondem a valores maiores do que os obtidos das simulações, onde foram consideradas várias relações  $\lambda_1 / \lambda_2$ . Como era de se esperar, pelo que foi observado na combinação de processos de onda quadrada, os resultados das equações correspondem sempre a valores menores que a soma dos máximos individuais.
- No gráfico 7.8, verifica-se a validade das equações quando o valor médio do processo PPPAG é diferente de zero.
- Nos gráficos 7.9 e 7.10, pode-se observar que as equações propostas são igualmente válidas quando se superpõem mais de um processo de onda quadrada com um processo de pulso. Este resultado é muito importante pois justifica a possibilidade de combinar várias ações de longa duração com uma ação de curta duração.

Considerando os resultados apresentados, as equações (7.7) para o cálculo de  $\mu_{Smáx}(T)$ , e (7.6) para o cálculo de  $\sigma_{Smáx}(T)$  podem ser usadas para combinar tanto processos de onda quadrada, quanto processos de onda quadrada com *um único* processo pulso. Na combinação de processos onda quadrada com processos pulso é de se esperar, como pode ser visto nas tabelas do apêndice B, que os resultados obtidos com as equações propostas excedam os resultados *exatos* em até 40%, mas sempre correspondam a valores menores que a soma dos máximos.

Um exemplo é apresentado na seção que segue, o qual permite visualizar o procedimento completo que deve ser seguido para combinar ações com as equações propostas. Os resultados são finalmente comparados com os obtidos da combinação de ações segundo normas, apresentados na seção 6.6.

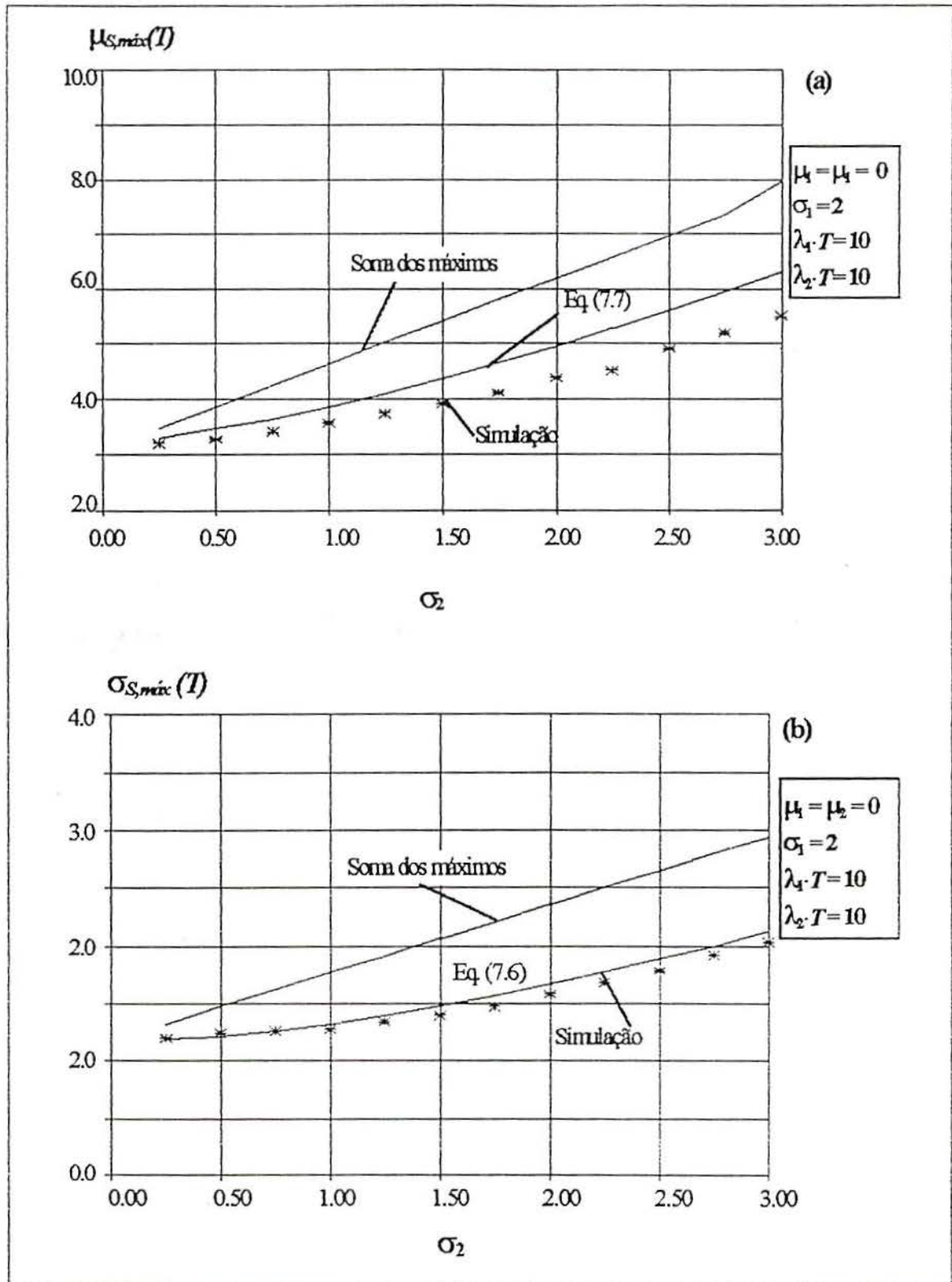


FIG. 7.5 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  $\lambda_1 = \lambda_2$  :  
(a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.

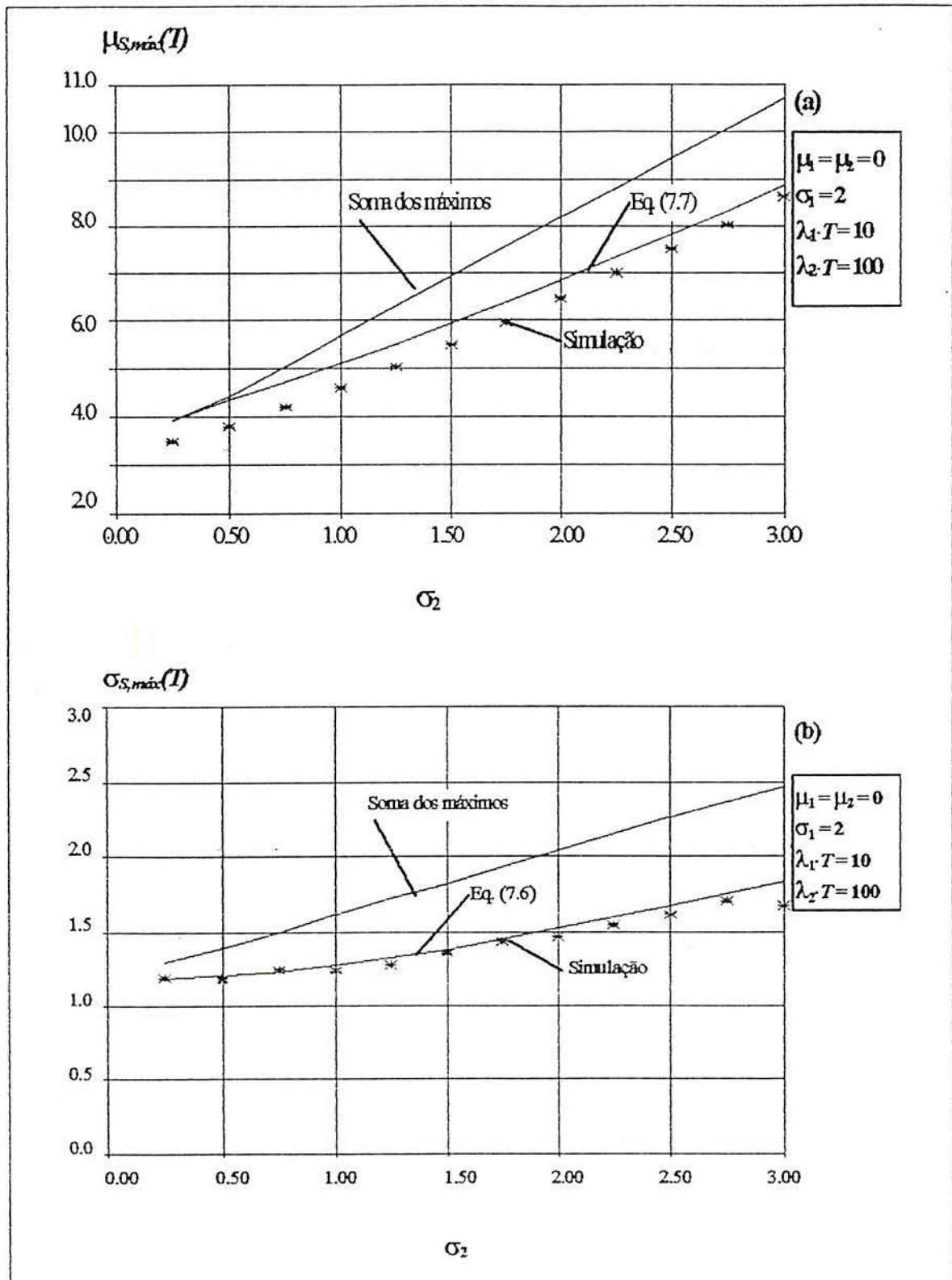


FIG. 7.6 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  $\lambda_1 < \lambda_2$ :  
 (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.



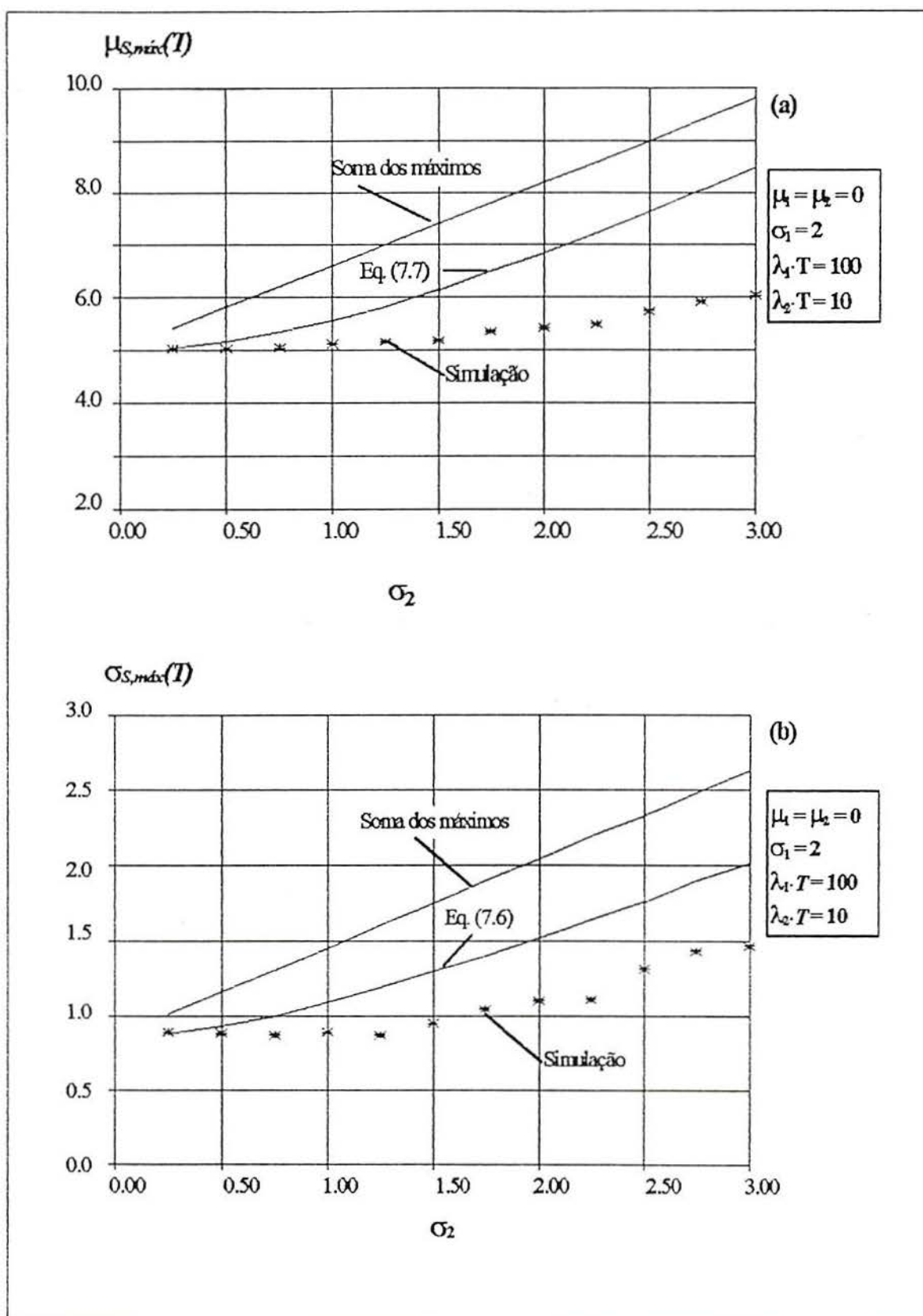


FIG. 7.7 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  $\lambda_1 > \lambda_2$  :  
 (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.

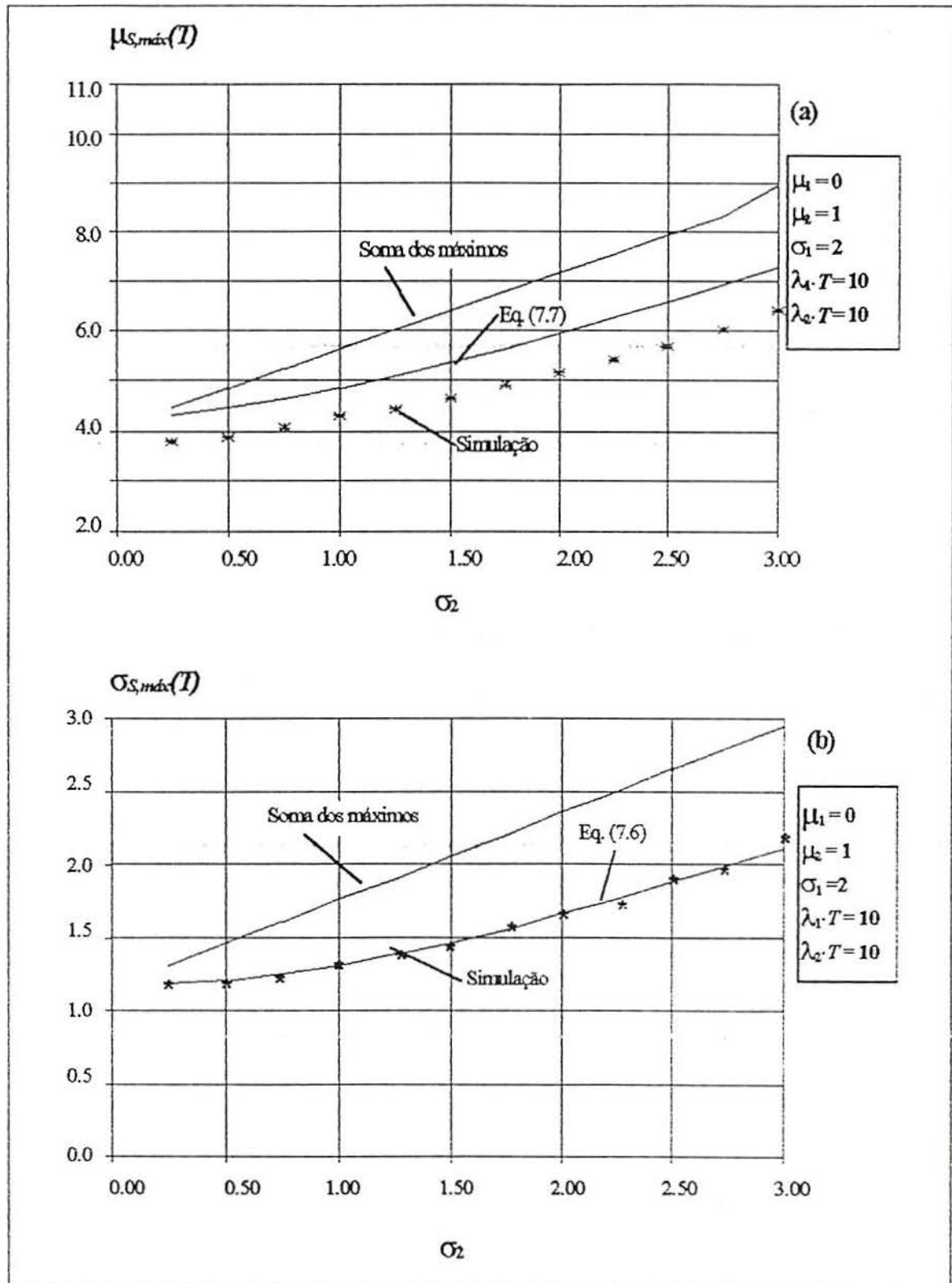


FIG. 7.8 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de um processo [(1) POPAG] e outro [(2) PPPAG], quando  $\mu_2 \neq 0$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$   
(a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.

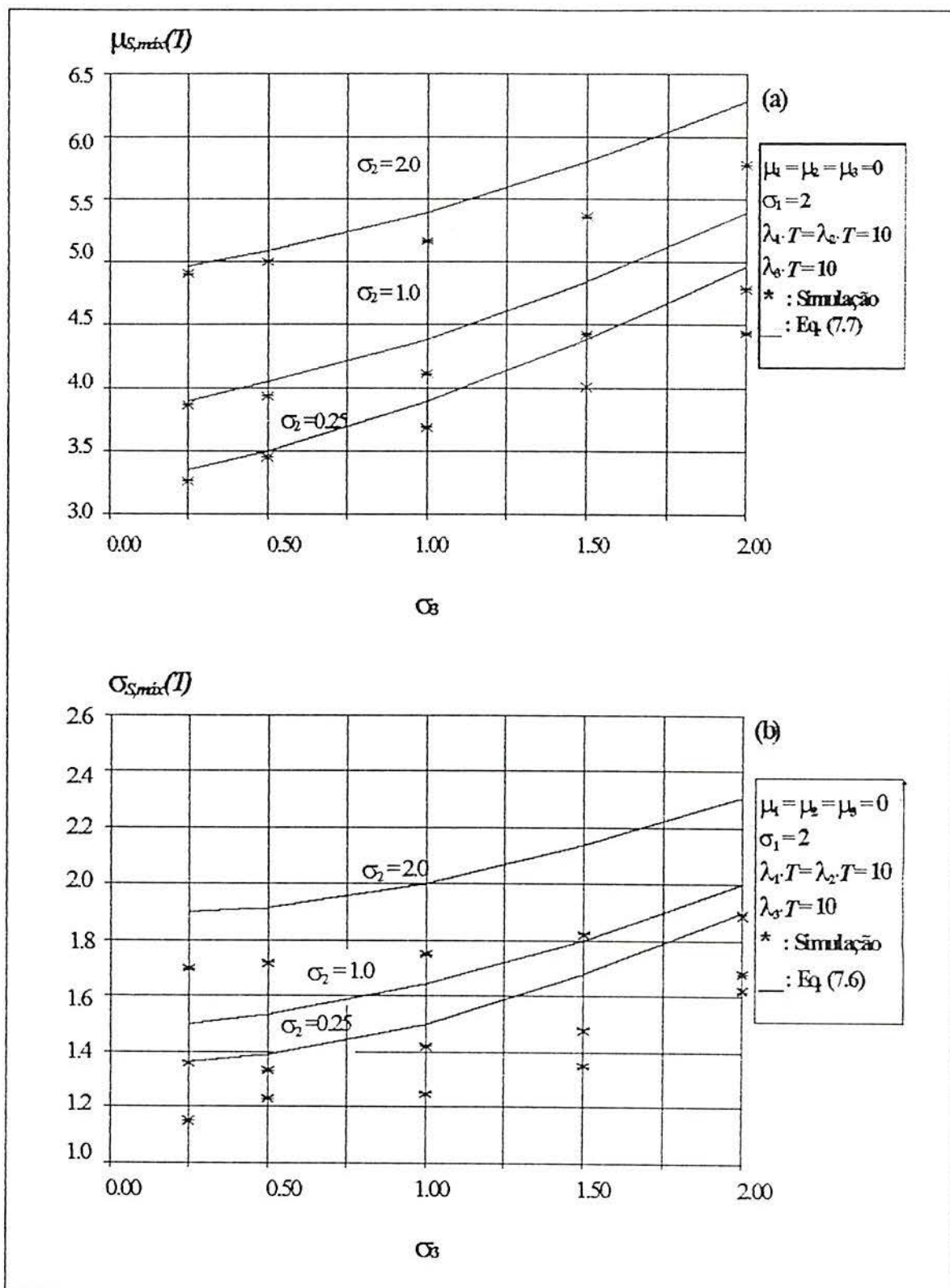


FIG. 7.9 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de dois processos [(1) e (2) POPAG] e outro [(3) PPPAG], quando  $\lambda_i$  iguais : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.



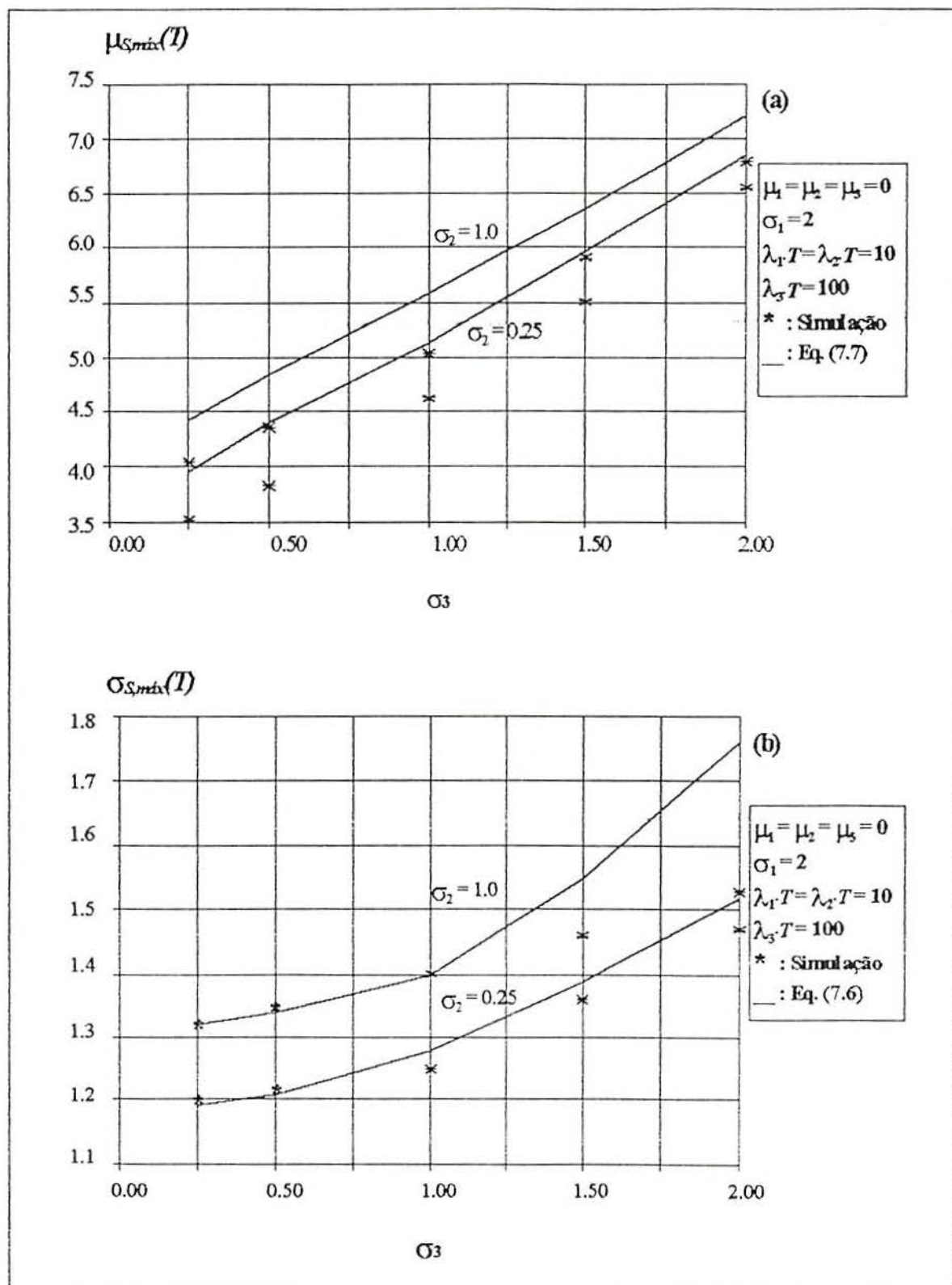


FIG. 7.10 Estatísticas do valor máximo das equações propostas e simulações para a soma de dois processos [(1) e (2) POPAG] e outro [(3) PPPAG], quando  $\lambda_3 > \lambda_1 = \lambda_2$  : (a) Valor médio e, (b) Desvio padrão.

## 7.5 Exemplo de aplicação

### 1) Considerações preliminares

Nesta seção são utilizados os mesmos dados (hipóteses, dimensões dos elementos estruturais e propriedades dos materiais) definidos para o pórtico analisado no exemplo da seção 6.6. O objetivo deste exemplo é mostrar o **procedimento** geral que deve ser seguido para combinar ações segundo a abordagem proposta. O elemento a ser projetado é o pilar de concreto armado do nível inferior do pórtico, como indicado na figura 6.1.

Os mesmos coeficientes de conversão de ação em efeito, obtidos da análise estrutural pelo sistema GAELI e apresentados nas tabelas 6.1 e 6.2, são usados para o elemento a ser projetado.

### 2) Dados para o cálculo das ações

#### - Ação viva

Os dados para ações vivas de longa duração são tomados da tabela 5.1, e para ações vivas de curta duração são tomados da tabela 5.2 (situação extraordinária por remodelação). Nas tabelas citadas, os dados correspondem aos fornecidos por Harris et al, 1980.

Tabela 7.1.a Dados da ação viva de longa duração.

| Ação Viva Sustentada<br>ou de Longa duração | $\mu$<br>N/m <sup>2</sup> | $\sigma$<br>N/m <sup>2</sup> | $A_p$<br>m <sup>2</sup> | $\lambda$<br>ano <sup>-1</sup> |
|---|---------------------------|------------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| Primeiro Andar                              | 857                       | 268                          | 93                      | 0.50                           |
| Andares superiores                          | 575                       | 508                          | 93                      | 0.50                           |

Tabela 7.1.b Dados da ação viva de curta duração.

| Ação Viva Extraordinária<br>ou de Curta duração | $\mu_{Qr}$<br>N | $\sigma_{Qr}$<br>N | $\mu_{NAr}$ | $\sigma_{NAr}$ | $\lambda_{GEr}$<br>ano <sup>-1</sup> |
|---|-----------------|--------------------|-------------|----------------|--------------------------------------|
| Primeiro Andar                                  | 779             | 112                | 8           | 4              | 0.20                                 |
| Andares superiores                              | 668             | 112                | 5           | 2              | 0.20                                 |

- Ação do vento

Os dados da velocidade do vento, são tomados do trabalho de dos Santos, 1989, tabela 3.1, correspondente à velocidade de ventos tipo EPS (tormentas extratropicais).

|   |           |
|---|-----------|
| * Valor médio da velocidade máxima anual            | 25.03 m/s |
| * Desvio padrão da velocidade do vento máxima anual | 4.71 m/s  |

Deve-se observar que os dados a serem usados neste exemplo correspondem a velocidade máxima anual, e portanto a taxa de ocorrência de eventos é considerada como tendo o valor de  $1.0 \text{ ano}^{-1}$ . Informações sobre medições com dados suficientes para serem usados com o método proposto não tem sido encontradas, pois seria também necessário o conhecimento do número de ocorrências de tormentas causando os ventos com a velocidade considerada. Este ponto sugere a necessidade de um pequeno aprimoramento da norma brasileira de vento.

### 3) Cálculo de ações e efeitos

Usando a informação disponível sobre as ações no pórtico, seus valores de projeto podem ser calculados como segue. Para o cálculo dos valores de projeto das ações se usam: a equação (4.4) para as ações vivas de longa duração, as equações (4.7.a,b) para as ações vivas de curta duração e, a equação (4.12) e os coeficientes definidos na seção 6.6 para a ação do vento.

$$(\text{Área de influência} \quad A_r = 24.5 \text{ m}^2)$$

Tabela 7.2 Valores dos parâmetros das ações de projeto.

| Tipo de Ação             | Tipo de Processo Associado | Localização        | Ação de Projeto |          |                   |
|--------------------------|----------------------------|--------------------|-----------------|----------|-------------------|
|                          |                            |                    | $\mu$           | $\sigma$ | $\lambda$         |
|                          |                            |                    | N/m             | N/m      | ano <sup>-1</sup> |
| Ação viva sustentada     | POPAG                      | Primeiro andar     | 3000            | 1659     | 0.50              |
|                          |                            | Andares superiores | 2013            | 3147     | 0.50              |
| Ação viva Extraordinária | PPPAG                      | Primeiro Andar     | 3892            | 3091     | 0.20              |
|                          |                            | Andares superiores | 2086            | 1596     | 0.20              |
| Vento                    | PPPAG                      | Barlavento         | 991             | 35       | 1.00              |
|                          |                            | Sotavento          | 742             | 28       |                   |

Os valores dos parâmetros dos efeitos das ações de projeto são obtidos utilizando



os coeficientes de conversão ação/efeito das tabelas 6.2.a,b. O valor é positivo, segundo os eixos definidos na figura 6.1.

Tabela 7.3.a Valores dos parâmetros dos efeitos das ações vivas (estado limite último).

| Nível | Aplicação | Efeito Ação Viva de Longa Duração |               |            |               | Efeito Ação Viva de Curta Duração |               |            |               |
|-------|-----------|-----------------------------------|---------------|------------|---------------|-----------------------------------|---------------|------------|---------------|
|       |           | $\mu_{Fy}$                        | $\sigma_{Fy}$ | $\mu_{Mz}$ | $\sigma_{Mz}$ | $\mu_{Fy}$                        | $\sigma_{Fy}$ | $\mu_{Mz}$ | $\sigma_{Mz}$ |
|       |           | N                                 | N             | N·m        | N·m           | N                                 | N             | N·m        | N·m           |
| 1     | base      | +10500                            | +5807         | +3090      | +1709         | +13622                            | +10819        | +4009      | +3184         |
|       |           | -10500                            | -5807         | +6300      | +6609         | -13622                            | +10819        | +8173      | +6491         |
| 2     | base      | +7046                             | +11014        | -480       | + 265         | +7301                             | +5586         | -334       | +255          |
|       |           | -7046                             | -11014        | -1320      | +1385         | -7301                             | +5586         | -917       | +702          |
| 3-10  | base      | +7046                             | +11014        | → 0        | → 0           | +7301                             | +5586         | → 0        | → 0           |
|       |           | -7046                             | -11014        | → 0        | → 0           | -7301                             | +5586         | → 0        | → 0           |

Tabela 7.3.b Valores dos parâmetros dos efeitos da ação do vento.

| Nível      | Aplicação | Efeito Ação do Vento |               |            |               |
|------------|-----------|----------------------|---------------|------------|---------------|
|            |           | Limite Último        |               |            |               |
|            |           | $\mu_{Fy}$           | $\sigma_{Fy}$ | $\mu_{Mz}$ | $\sigma_{Mz}$ |
|            |           | N                    | N             | N·m        | N·m           |
| Barlavento | base      | +51304               | +1812         | +42920     | 1516          |
|            | topo      | - 51304              | + 1812        | - 743      | + 26          |
| Sotavento  | base      | +38413               | +1450         | +32863     | +1240         |
|            | topo      | - 38413              | + 1450        | - 1002     | + 38          |
| Total      | base      | +89717               | + 2321        | +75783     | +1959         |
|            | topo      | - 89717              | + 2321        | - 1745     | + 46          |

Da tabela 6.3, os seguinte valores dos efeitos do peso próprio são necessários:

Tabela 7.3.c Valores dos efeitos da ação permanente.

| Aplicação | Efeito Peso Próprio |        |
|-----------|---------------------|--------|
|           | Fy                  | Mz     |
|           | N                   | N·m    |
| Base      | +866250             | +21533 |
| Topo      | - 866250            | +41085 |

#### 4) Considerações sobre a velocidade e a ação do vento

Em relação aos valores dos parâmetros para a velocidade do vento usados para a combinação de ações segundo a abordagem proposta e ao valor da velocidade básica do vento definida em normas para a cidade de Porto Alegre, pode-se observar que:

- A velocidade do vento dada pela NBR 6123, 1987 (45 m/s) corresponde à

máxima velocidade do vento para um período de 50 anos.

- A partir dos parâmetros fornecidos por Dos Santos, 1989, a velocidade máxima do vento para um período de 50 anos é caracterizada por: a) valor médio  $\approx 34$  m/s e, b) desvio padrão  $\approx 2$  m/s.
- O desvio padrão calculado para a velocidade máxima do vento é pequeno quando comparado com o valor médio. Como a velocidade é elevada ao quadrado para o cálculo da pressão o desvio padrão desta resulta ser desprezível.
- A diferença entre o valor médio da velocidade máxima em 50 anos e o valor dado em normas é de aproximadamente 36 %. Esta diferença aumenta para quase 85 % quando se considera os valores das velocidades ao quadrado.
- Na abordagem proposta, as ações são combinadas em termos dos seus efeitos. Assim, a ação do vento é representada como um processo aleatório, cuja distribuição de origem tem média inferior à media do máximo em 50 anos. Quando agora calcula-se o máximo em termos de pressão, onde a velocidade é elevada ao quadrado, as diferenças se acentuam ainda mais. Ou seja, a pressão causada pela velocidade máxima em 50 anos é sensivelmente superior à máxima pressão decorrente do processo “velocidade do vento” em 500 anos. No exemplo, a relação chega a ser de três para um, sem a consideração do coeficiente de segurança.
- Considerando que o propósito do exemplo é o de mostrar o procedimento geral para combinar ações segundo a abordagem proposta e que não existe suficiente informação sobre as velocidades do vento, trabalhos complementares são recomendados para verificar a validade dos dados aqui utilizados ou para atualizar a informação da velocidade do vento que possa ser usada aqui utilizada.

## 5) Combinação das ações

- Combinação segundo a abordagem proposta

Sob as considerações feitas nas seções anteriores para combinar ações segundo a abordagem proposta, cada ação variável de curta duração deve ser considerada individualmente. Comparando os valores dos parâmetros da ação viva de curta duração e da ação do vento, uma nítida predominância do efeito da ação do vento pode ser

observada.

Neste ponto, três observações muito importantes devem ser feitas com relação ao exemplo: a) usando a combinação de ações segundo normas estruturais atuais, a ação do vento é considerada de grande importância para o efeito momento fletor no elemento considerado, enquanto as ações vivas, já superpostas quando apresentadas nas tabelas das normas, são relevantes para o efeito de carga vertical no mesmo elemento, b) para a abordagem proposta, as ações vivas são de dois tipos, uma das quais, a de longa duração atua como um processo de onda quadrada, e a outra, de curta duração, atua como um processo de pulso e, c) a ação viva de curta duração é um processo que pode acontecer simultaneamente em vários níveis do pórtico, por exemplo agrupamento simultâneo de pessoas num determinado momento, fato que indica a necessidade de considerar a correlação no tempo para este tipo de ação. Neste exemplo, a ação viva de curta duração é assumida como não correlacionada, e estudos posteriores sobre o efeito da correlação na combinação, são recomendados.

Sob a hipótese das ações terem distribuição Gaussiana, as equações (7.3), (7.6), (7.7), (7.2) e (7.1), neste ordem, são usadas para o cálculo do valor médio e desvio padrão do máximo combinado para o cálculo da força vertical  $F_y$  e do momento fletor  $M_z$ , atuantes no elemento em consideração:

Tabela 7.4 Estatísticas do valor máximo combinado

|             | $(\sum \mu_{L_i})$ | $\mu_S$ | $\sigma_S$ | $\lambda_\xi$ | $\lambda_\zeta$ | $\xi$ | $\zeta$ | $\mu_{S,máx}(T)$ | $\sigma_{S,máx}(T)$ |
|-------------|--------------------|---------|------------|---------------|-----------------|-------|---------|------------------|---------------------|
| $F_y$ [N]   | 1029887            | 163631  | 33629      | 1.629         | 0.501           | 2.434 | 0.512   | 1111740          | 17218               |
| $M_z$ [N.m] | 99926              | 78393   | 2613       | 1.127         | 0.695           | 2.303 | 0.489   | 105944           | 1278                |

#### - Simulação de Monte Carlo

Usando os dados tabelados dos efeitos das ações, os seguintes resultados do valor médio e desvio padrão do máximo da carga vertical e momento fletor, são obtidos com simulações de Monte Carlo :

Para  $F_y$ :

$$\mu_{S,máx}(T) = 1097590.95 \text{ N}$$

$$\sigma_{S,máx}(T) = 17194.18 \text{ N}$$

Para  $M_z$ :



$$\mu_{S,máx}(T) = 76880.04 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{S,máx}(T) = 1269.72 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Destes resultados pode-se verificar que os valores das estatísticas, obtidos com o uso das equações propostas, são maiores que os valores *exatos* das estatísticas obtidos por simulação. As estatísticas da carga vertical apresentam um erro menor que 1%, o que pode ser explicado pela influência do peso próprio nesta carga. O desvio padrão do momento fletor também apresenta um erro menor que 1%. O valor médio do momento fletor apresenta um erro de 37 % a favor da segurança, resultado esperado pela influência que têm a ação do vento (processo pulso) na flexão do elemento.

- Valores máximos combinados

Os valores máximos combinados devem estar associados a fractis correspondentes a algum estado limite especificado conforme o nível de confiabilidade estrutural exigido. Aqui são apresentados os valores (ver tabela 7.4) correspondentes aos fractis 0.90, 0.95 e 0.99, obtidos da hipótese de distribuição Gaussiana:

|              |                |                 |
|--------------|----------------|-----------------|
| Fractil 0.90 | Fy = 1133951 N | Mz = 107593 N·m |
| Fractil 0.95 | Fy = 1139978 N | Mz = 108040 N·m |
| Fractil 0.99 | Fy = 1151858 N | Mz = 108922 N·m |

Comparando estes valores máximos com os valores máximos obtidos conforme os critérios das normas atuais (ver Seção 6.6), pode-se verificar, apesar das limitações mencionadas no desenvolvimento do exemplo, que o uso da abordagem proposta para combinar ações é econômica quando comparada com a abordagem das normas atuais. Neste ponto é importante mencionar que na abordagem segundo normas a ação viva gravitacional, usada no cálculo dos efeitos últimos, é a máxima da combinação entre a ação viva prolongada e a ação viva de curta duração, assim, o efeito da ação viva de curta duração é aplicado em cada nível, o que explica a grande diferença entre os efeitos últimos verticais calculados com esta abordagem e o maior dos fractis calculado com a abordagem proposta.

## 7.6 Proposta preliminar de norma para combinar ações

Considerando que os resultados obtidos com simulações de Monte Carlo são precisos tanto para o modelo teórico apresentado para a combinação de ações quanto para o exemplo demonstrativo realizado, esta nova abordagem, sujeita a trabalhos posteriores de verificação, é proposta para ser incorporada nas normas de projeto estrutural.

O texto a seguir deve ser compreendido dentro do mais amplo contexto das bases de projeto segundo normas. Assim, aspectos tais como as classes de segurança, requerimentos de projeto, estados limites e definições básicas permanecem sem nenhuma modificação.

Para a melhor compreensão da proposta, são apresentadas, em primeiro lugar, algumas definições importantes e necessárias.

### 7.6.1 Definições

- *Período de Referência*: tempo previsto para o uso da estrutura, por exemplo, o tempo de construção ou o tempo correspondente à vida útil esperada para a estrutura.
- *Ação Permanente*: são as ações que ocorrem com valores constantes, ou de pequena variação em torno do seu valor médio, durante praticamente todo o tempo de referência da estrutura.
- *Ação Variável de Longa Duração*: são as ações que variam significativamente em torno do seu valor médio, mas que têm uma duração longa quando comparadas com o tempo de referência.
- *Ação Variável de Curta Duração*: são as ações que variam significativamente em torno de seu valor médio, e que tem uma duração considerada pontual ou quase instantânea, quando comparadas com o tempo de referência.
- *Taxa Média de Ocorrência*: é um parâmetro estatístico, obtido de medições ou assumido com base em conhecimentos prévios, que indica o número de vezes que ocorre um evento de carga por unidade de tempo.
- *Valor Máximo Combinado*: Valor de projeto dos efeitos das ações superpostas.
- *Índice de Confiabilidade  $\beta$* : é uma medida de uma confiabilidade desejada,

estabelecida sob considerações de experiências em edificações já executadas, as quais também satisfizeram as exigências de segurança e economicidade, e depende do tempo de referência considerado para a estrutura. Este índice determina qual o fractil do valor máximo combinado deve ser adotado em projeto.

### 7.6.2 Combinação de ações

Para estabelecer as regras de combinação referidas à vida útil de uma estrutura, devem ser considerados os seguintes tipos de ações de projeto: ações permanentes; ações variáveis de longa duração ou sustentadas; e/ou, ações variáveis de curta duração ou extraordinárias.

Os valores de projeto das ações são caracterizados através de três parâmetros estatísticos: valor médio, desvio padrão e taxa de ocorrência da ação considerada. Os parâmetros estatísticos das ações são obtidos de medições, ou assumidos de conhecimento ou experiência previa.

Os coeficientes de conversão ação/ efeito  $c_i$ , devem ser calculados pelo projetista e multiplicados pelo valor médio e desvio padrão de cada ação de projeto, para a obtenção do respectivo efeito.

Para verificar a segurança em relação aos possíveis estados limites, devem ser consideradas as ações permanentes e variáveis que possam acarretar os efeitos mais desfavoráveis nas seções críticas da estrutura. Devem ser verificadas tantas combinações, quantas sejam as ações variáveis de curta duração consideradas. Em cada combinação, devem ser superpostas a totalidade das ações permanentes e variáveis de longa duração, com somente uma ação de curta duração.

A partir dos parâmetros que caracterizam as ações individuais, e considerando distribuição Gaussiana das mesmas, o cálculo das estatísticas (valor médio e desvio padrão) do valor máximo da sua combinação é realizado com as seguintes equações:

$$\mu_S = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mu_i \quad (7.8)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i \cdot \sigma_i)^2} \quad (7.9)$$



$$\lambda_{\xi} = \sum_{i=1}^{n_L} \frac{\lambda_i \cdot c_i \cdot \sigma_i}{\sigma_S} \quad (7.10)$$

$$\lambda_{\zeta} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_L} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \left[ \frac{c_i \cdot \sigma_i}{\sigma_S} \right]^2} \quad (7.11)$$

$$n_{\xi} = \lambda_{\xi} \cdot T \quad (7.12)$$

$$n_{\zeta} = \lambda_{\zeta} \cdot T \quad (7.13)$$

usando os valores de  $n_{\xi}$  e  $n_{\zeta}$  calculados, os valores de  $\xi_S$  e  $\zeta_S$  podem ser obtidos dos gráficos anexos ou através das seguintes equações:

$$\xi_S = \left( \ln \left[ (n_{\xi} + 1) - 0.918 \cdot \ln (n_{\xi} + 1) \right] \right)^{0.604} \left[ 1 - 0.866 / (n_{\xi} + 1) \right] \quad (7.14)$$

$$\zeta_S = \frac{1 + 0.0267 \cdot \ln n_{\zeta}}{1 + 0.3486 \cdot \ln n_{\zeta}} \quad (7.15)$$

$$\mu_{S,máx}(T) = \mu_S + \xi_S \cdot \sigma_S \quad (7.16)$$

$$\sigma_{S,máx}(T) = \zeta_S \cdot \sigma_S \quad (7.17)$$

Para verificar todos os possíveis estados limites que devam ser considerados no tempo de referência previsto, o valor máximo correspondente ao estado limite especificado deve ser calculado como o valor médio mais um múltiplo do desvio padrão (um valor  $\beta$ , associado a um fractil), ou seja:

$$S_{máx}(T) = \mu_{S,máx}(T) + \beta \cdot \sigma_{S,máx}(T) \quad (7.18)$$

onde os valores de  $\beta$ , podem ser obtidos da tabela seguinte:

Tabela 7.5 Valores de  $\beta$  associados aos correspondentes fractis

| Fractil | $\beta$ |
|---------|---------|
| 0.900   | 1.29    |
| 0.950   | 1.64    |
| 0.990   | 2.33    |
| 0.995   | 2.58    |
| 0.999   | 3.08    |

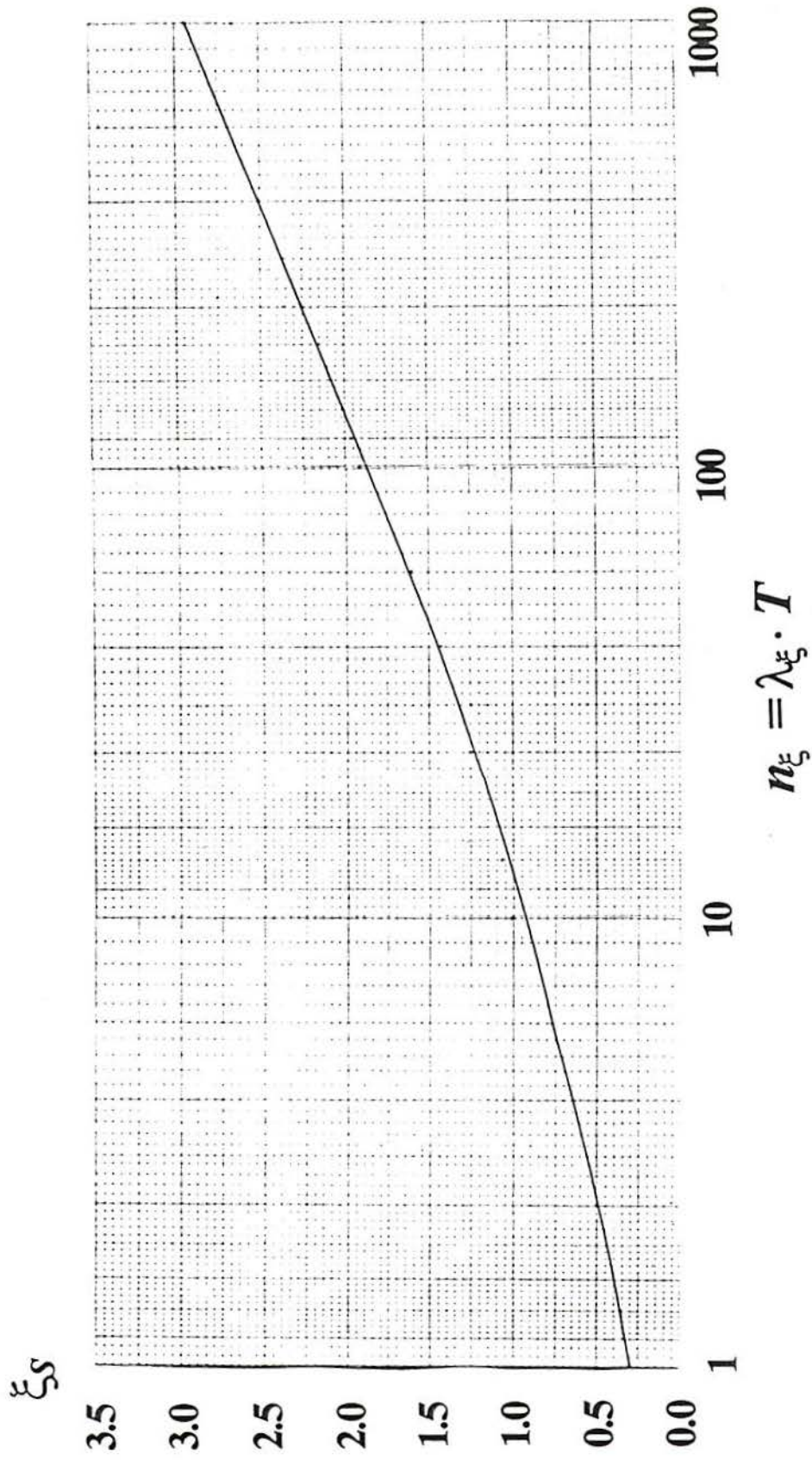


FIG. 7.11 Valor médio do máximo normalizado

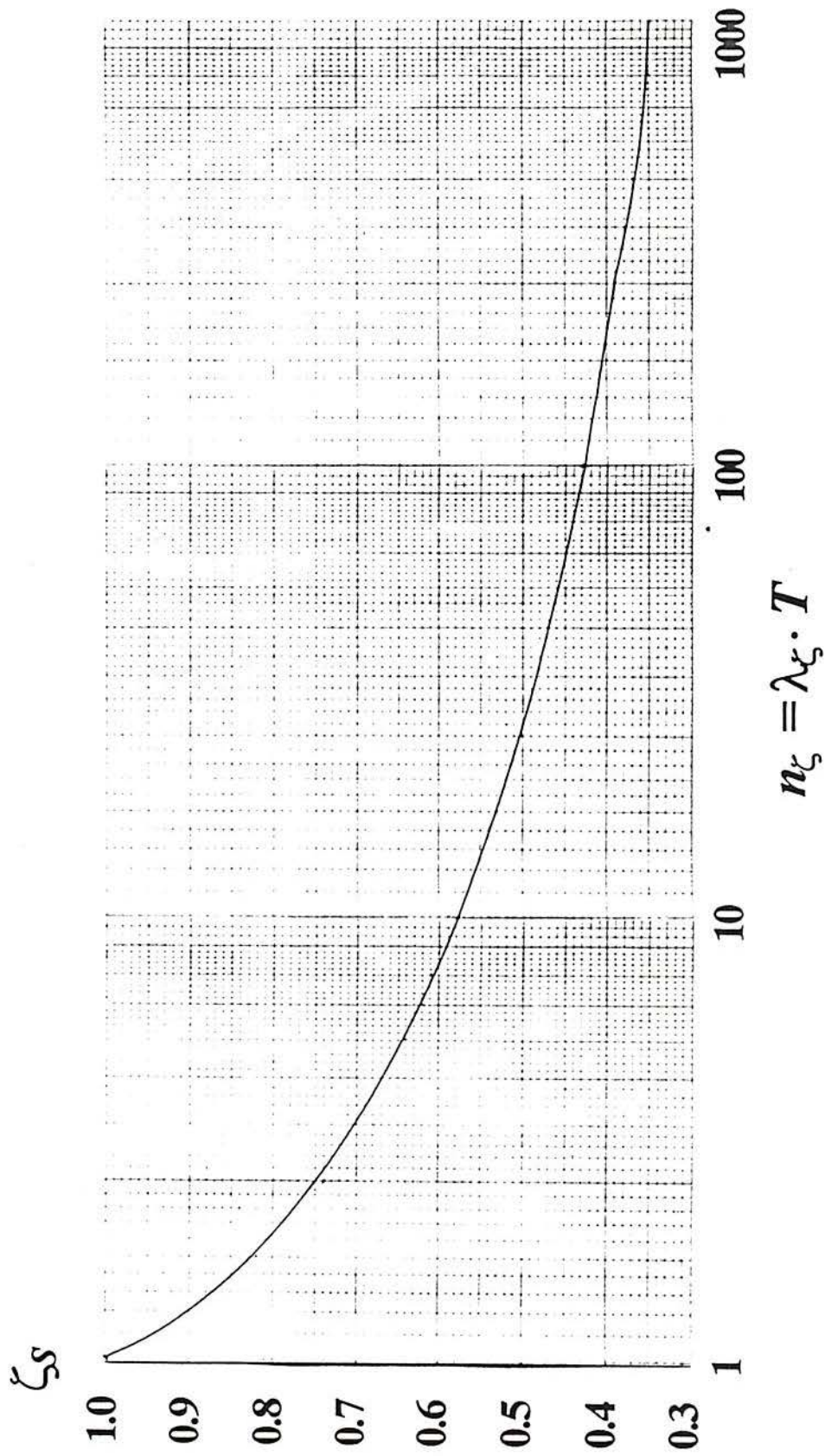


FIG. 7.12 Desvio padrão do valor máximo normalizado



## CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Para a combinação de ações, pela variação no tempo das ações, estas são divididas em três classes: ações permanentes, ações variáveis de longa duração e ações variáveis de curta duração:

Dois tipos de processos são usados para representar analiticamente as ações como processos aleatórios. O processo de onda quadrada de Poisson é usado para representar ações variáveis de longa duração e o processo de pulsos de Poisson é usado para representar ações de curta duração (relativa as outras ações) ou extraordinárias. Sob a hipótese que as amplitudes das ações (ocorrência de eventos dos processos) tem distribuição das amplitudes Gaussianas e que é conhecida a classe da ação em estudo (permanente, curta duração ou longa duração), os seguintes parâmetros estatísticos são necessários para representar ações como processos:

- *Valor médio das amplitudes*, que é o valor médio obtido de medições, ou selecionado de hipóteses feitas nos modelos analíticos para representar ações e/ou da experiência pessoal.
- *Desvio padrão das amplitudes*, parâmetro obtido da mesma forma que o valor médio.
- *Taxa média de ocorrência* das ações, que é o número de aplicações da ação, sob consideração, na unidade de tempo. Este valor é obtido de registros de ocorrências de ações, questionários ou mais geralmente, selecionados da experiência pessoal.

Informação preliminar das estatísticas das ações gravitacionais vivas, obtidas segundo as formas indicadas, foram apresentadas. Esta informação, quando usada com modelos analíticos propostos para cada ação, permite obter o valor médio e desvio padrão das amplitudes das ações que estão atuando na estrutura. Então, a recompilação de informação de diversos tipos de ações, que possa ser usada com modelos apropriados (para representar cada tipo de ação), é de grande importância para obter os parâmetros estatísticos antes mencionados. Estudos posteriores são necessários, para alcançar este objetivo.

Da análise da combinação de ações segundo códigos estruturais atuais, encontrou-se algumas desvantagens, o que sugere o estudo de uma abordagem que tente suprir as desvantagens mencionadas sem perder a simplicidade para sua aplicação na análise e projetos estruturais.

Considerando disponível a informação das ações individuais, uma abordagem que usa esta informação, para superpor linearmente ações, é apresentada. Segundo esta abordagem, o valor máximo combinado a ser adotado no projeto, para um tempo de referência especificado, é obtido como a soma do valor médio mais um múltiplo (fractil associado a algum estado limite) do desvio padrão.

Segundo esta abordagem, a ação combinada resultante de ações de longa duração ou processos de onda quadrada é idealizada como um processo aleatório com largura de onda quadrada constante equivalente. Desta idealização, encontrou-se necessário o uso de duas taxas de ocorrências das ondas equivalentes, uma para o cálculo do valor médio do máximo, e outra para o cálculo do desvio padrão do máximo. As equações propostas para o cálculo das estatísticas da combinação de ações de longa duração são também propostas para o cálculo da combinação de ações de longa duração com uma ação de curta duração.

As estatísticas do valor máximo combinado, obtidas com a abordagem proposta, foram comparadas com as estatísticas *exatas* do valor máximo obtidas de simulações. Desta comparação, verificou-se que as estatísticas calculadas são maiores que as *exatas* e no mesmo tempo são menores que a soma dos *máximos das ações individuais*. Para o exemplo realizado, pode-se visualizar que os resultados obtidos com esta *nova abordagem*, neste caso, são não conservativos com respeito aos resultados exatos e ao mesmo tempo econômicos quando comparados com a abordagem atualmente usada nos códigos estruturais e supre algumas das desvantagens apresentadas por estes.

Do estudo das duas abordagens apresentadas, assim como do exemplo de aplicação realizado, pode-se concluir e recomendar o seguinte:

- A principal vantagem da abordagem proposta é que esta trata com as estatísticas das ações individuais, que são mais facilmente encontradas e menos afetadas pelas incertezas que os valores conhecidos como *valores característicos*.

- Fatores de segurança para ponderar as ações não são mais necessários, ou seja, elimina-se a incerteza inerente no cálculo destes fatores.
- As estatísticas obtidas através desta abordagem podem ser usadas conjuntamente com o FOSM para a análise da confiabilidade estrutural.
- Foi demonstrado que a abordagem proposta para a combinação de ações é simples e fácil de usar e não exige do projetista conhecimento prévio da teoria de processos aleatórios.
- Fatores devidos as incertezas na idealização matemática do cálculo do efeito da ação (análise estrutural), e o fator usado para diferentes classes de segurança são os propostos pelos códigos.
- Dificuldade para combinar ações de longa duração com ações de curta duração de uma mesma natureza, correlacionadas no tempo, por exemplo ações vivas extraordinárias, foi encontrada. Este problema merece especial atenção, pois pode provocar resultados menores que os exatos, pelo qual é recomendável o estudo da influência da atuação simultânea deste tipo de ações.
- Deve-se verificar a aplicabilidade desta abordagem na análise e projeto de estruturas com diversas situações de combinação de ações.
- O texto apresentado para combinar ações em normas estruturais futuras é um *texto preliminar*.



# APÊNDICE A

## A.1 Introdução

O estudo dos números aleatórios para o uso nos métodos de simulação e Monte Carlo na solução numérica de modelos é de fundamental importância. Uma aplicação de especial interesse é na geração de variáveis aleatórias para diferentes distribuições de probabilidade.

Sob as considerações anteriores, neste trabalho, os números aleatórios são usados para a simulação de processos aleatórios (POPAG e PPPAG). Os processos simulados, são superpostos para obter o valor médio e desvio padrão do valor máximo combinado. Já que os resultados obtidos são considerados *exatos*, estes são usados para verificar a validade dos resultados das equações analíticas propostas para a superposição de ações.

Ao se falar de números aleatórios, esta-se referindo essencialmente a variáveis aleatórias estatisticamente independentes e uniformemente distribuídas sobre o intervalo entre 0 e 1. Os termos "número aleatório", "pseudo aleatório" ou "quase aleatório" são usados indistintamente pois na realidade os métodos para gerar números repetem, sob as mesmas condições, a seqüência gerada.

Do anterior, os números aleatórios gerados são "bons" se são uniformemente distribuídos, estatisticamente independentes e reproduzíveis. Os métodos congruenciais para geração de números são métodos projetados para satisfazer no possível os requerimentos de "bons" números aleatórios e são os mais usados atualmente. Estes métodos geram seqüências totalmente determinísticas, tentando que o período das seqüências seja o máximo possível e que as mesmas tenham boas propriedades estatísticas.

No que segue faz-se uma breve revisão dos métodos congruenciais e uma aplicação específica para gerar números aleatórios com o Gerador de Números Aleatórios Uniformes IBM SYSTEM/360. Além disso, são apresentados alguns dos mais comuns testes estatísticos que são utilizados para analisar a qualidade dos números gerados, revistando a independência e a uniformidade da seqüência.

Os testes estatísticos de qualidade não são provas rigorosas pelo que é necessário que ao serem aplicados estes testes, se tenha sempre em mente estas questões: *Quantos*

*testes são necessários para revisar o gerador de números aleatórios?. Qual de eles deve ser escolhido?. Que deve ser feito com a seqüência de números se esta passa alguns dos testes mas falha num de eles? (Rubinstein, 1981, p. 33).*

## A.2 Geradores congruenciais

Este método produz uma série de números aleatórios que eventualmente se repetem, mas, projetados corretamente, só depois um muito longo ciclo.

**O Método Congruencial Misto** está baseado na seguinte relação fundamental:

$$X_{i+1} = (a X_i + c) \pmod{m} \quad (\text{A.1})$$

onde  $a$  o multiplicador,  $c$  o incremento, e  $m$  o módulo, são inteiros positivos.

A expressão  $\pmod{m}$  significa que:

$$X_{i+1} = a X_i + c - m k_i \quad (\text{A.2})$$

onde  $k_i$  o máximo inteiro positivo de  $(a X_i + c)/m$ . O valor inicial da seqüência (seed) é  $X_0$ .

Da ultima expressão se deduz que  $X_i < m$  para todo  $i$  (para  $X_{i+1} > 0$ ), então, a seqüência contem ao máximo  $m$  números distinto e a mesma pode-se repetir depois  $m$  passos. O período máximo da seqüência é  $m$ . O objetivo é então buscar um  $m$  tão grande como possível. Este gerador teria um período total ou máximo  $m$  sem e só sem cumpre:

- $c$  é primo relativo a  $m$
- $a \equiv 1 \pmod{g}$  para todo fator primo  $g$  de  $m$ , então,  $\{a = 1 + g [a/g]\}$
- $a \equiv 1 \pmod{4}$  sem  $m$  é um múltiplo de 4, então,  $\{a = 1 + g [a/g]\}$  sem  $m/4$  é inteiro

Para um computador que use um sistema digital binário garantir um período total se escolhe  $m = 2^\beta$  onde  $\beta$  é o comprimento da palavra no computador particular. Da equação (A.2), o parâmetro  $c$  tem que ser ímpar, o período total  $a \equiv 1 \pmod{4}$  pode ser alcançado fazendo  $a = 2^r + 1$ , com  $r \geq 2$ .

**O Gerador Congruencial Multiplicativo ou puro** é um caso particular do gerador misto com  $c = 0$  e que pode ser expressado:

$$X_{i+1} = a X_i \pmod{m} \quad (\text{A.3})$$



Geralmente um período total não pode ser alcançado, mas um período máximo pode ser conseguido quando  $X_0$  é um primo relativo a  $m$ , e  $a$ , reúne certas condições de congruência.

Para um computador binário se escolhe outra vez  $m = 2^\beta$  e o máximo período possível pode ser alcançado quando  $a = 8^r \pm 3$ , com  $r \geq 1$  ( $\beta = 35$ ,  $a = 2^{17} + 3$  é recomendado).

**O Gerador Congruencial Aditivo** é um gerador no qual  $X_{i+1}$  depende de mais de um dos valores precedentes e pode ser expressado:

$$X_{i+1} = X_i + X_{i-k} \pmod{m} \quad k = 1, 2, \dots, i-1 \quad (\text{A.4})$$

Se obtém uma seqüência de **Fibonacci** no caso de  $k=1$  que se comporta como uma seqüência de um gerador congruencial multiplicador quando  $a = (1+5^{1/2})/2$ . Desafortunadamente quando  $k=1$  não é satisfatoriamente aleatório, mas as propriedades estatísticas melhoram quando  $k$  aumenta.

Resumindo, para quaisquer método congruencial obter resultados estatísticos satisfatórios, os números  $X_0$ ,  $a$ ,  $c$ , e  $m$  tem que seguir os seguintes princípios:

- a)  $X_0$  deve ser arbitrário, geralmente se escolhe a data e tempo no qual roda o programa e depois pode escolher-se  $X_0$  como o último valor da rodada anterior.
- b)  $m$  deve ser grande quanto possível. É conveniente tomar o comprimento da palavra do computador pois é mais eficiente o cálculo de  $(aX + c) \pmod{m}$ , cujo cálculo deve ser exato sem erros de arredondamento.
- c) Se o computador é binário, escolher  $a$  tal que  $a \pmod{8} = 5$ . A escolha de  $a$  (e de  $c$ ), faz com que o gerador de números aleatórios produza dados com  $m$  possíveis valores diferentes de  $X$  antes de este repetir.
- d)  $a$  deve ser maior que  $m^{1/2}$ , preferível maior que  $m/100$ , pêro menor que  $m - m^{1/2}$ . O melhor é escolher uma constante ao acaso.
- e)  $c$  deve ser uma número ímpar se  $m$  é potência de 2, e não ser múltiplo de 5 se  $m$  é potência de 10.
- f) Os dígitos menos significativos (os direitos) de  $X$  não são muito aleatórios, decisões baseadas no número  $X$  deve ser sempre influenciadas pelos dígitos mais significativos.

Encontrados os números aleatórios  $X_i$ , os números aleatórios no intervalo unitário  $U_i$ , podem ser obtidos de:  $U_i = X_i / m$ .



### A.3 Gerador IBM SYSTEM/360

Este é um gerador congruencial multiplicador ( $c = 0$ ) que utiliza o tamanho total de palavra (32 bits com 1 bit reservado ao sinal algébrico). Do anterior, a escolha óbvia de  $m$  é  $2^{31}$ . Quando  $m$  é primo o máximo período possível é  $m - 1$ . O mais grande primo deste  $m$  é  $2^{31}-1$  com um período máximo de  $2^{31}-2$ .

O máximo período possível depende da escolha do multiplicador  $a$ . Deve-se lembrar assegurar uma longitude máxima do período não garante necessariamente as boas propriedades estatísticas do gerador. O gerador SYSTEM/360 utiliza  $a = 7^5$  que não cumpre com o princípio d) dos geradores, mas que segundo a Rubinstein, 1981, satisfaz o desempenho estatístico da seqüência gerada.

Escolhendo  $X_0 > 0$  o gerador pode ser expressado:

$$X_i = 7^5 X_{i-1} \pmod{2^{31} - 1} = 16807 X_{i-1} \pmod{2^{31} - 1} \quad (\text{A.5})$$

Os números aleatórios são  $U_n = X_n / (2^{31} - 1)$ .

### A.4 Exemplo de aplicação e testes de qualidade

Os seguinte exemplo tem como objetivo testar a bondade dos números aleatórios gerados com o gerador proposto:

- Ao acaso, se escolhe um valor para a semente inicial  $X_0$ , com esta semente se gera duas seqüências de números de 100 (cem) e 10000 (dez mil) números aleatórios entre 0 e 1.

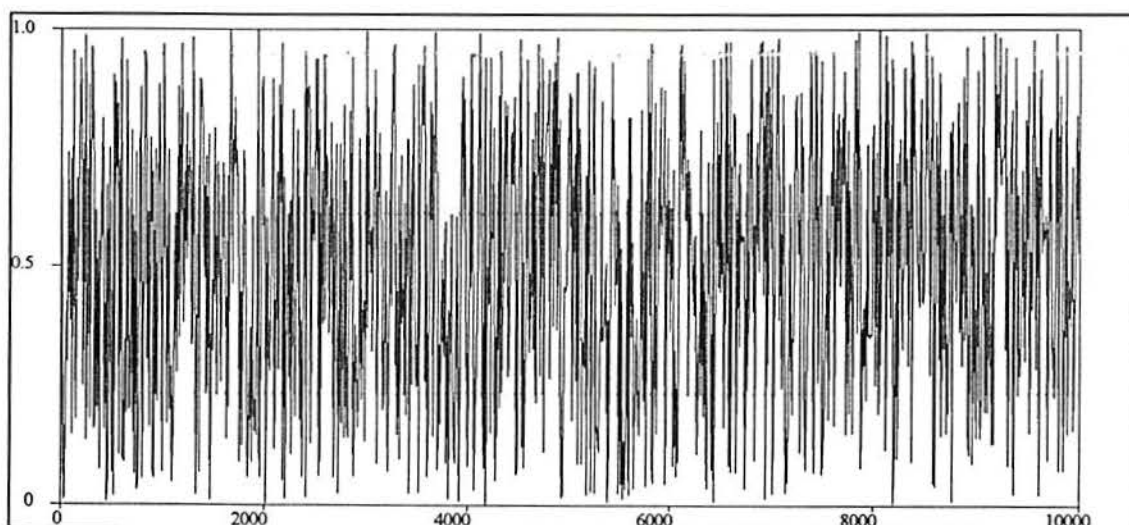


FIG. A.1 Seqüência de números aleatórios gerados

- Aos vetores de números gerados se aplica os testes Kolgomorov-Smirnov e Chi-Quadrado, para comprovar se é válida a distribuição assumida para os números gerados.
- Para verificar se os números gerados são aleatórios, ou seja não tem componentes periódicas, se aplica o teste visual à função de autocorrelação da seqüência de 10000 numeros aleatórios.

Na figura A.1, pode-se observar o vetor de números aleatórios para 10000 amostras geradas.

#### A.4.1 Teste de qualidade Chi-Quadrado ( Chi-Square Ou $\chi^2$ )

Proposto por Pearson (1900) é o mais usado dos testes estatísticos. A estatística usada esta relacionada a desviações do histograma dos valores medidos.

Para testar a uniformidade da seqüência de números gerados, se divide o intervalo de amostragem (0 a 1) em k subintervalos não superpostos (de comprimento 1/k). O critério sugere, para distribuição especificada uniforme, usar a seguinte estatística:

$$Y = \frac{k}{N} \sum_{i=1}^k (Ni - \frac{N}{k})^2 \quad (A.6)$$

Para assegurar as propriedades assintóticas de Y se recomenda buscar  $N > 5k$  e  $k > 1000$ , e pode tomar-se  $k = 2^\beta$  para computadores binário.

Quando N é grande, Y tem aproximadamente uma distribuição  $\chi^2$  com k-1 graus de liberdade e que tende a ser pequena quando a distribuição de probabilidade desconhecida é igual à distribuição de probabilidade especificada.

Do quantil  $\chi^2_{\alpha, k-1}$  que pode ser obtido de tabelas, pode-se determinar valores críticos tal que:

$$\text{Prob} [ Y \geq \chi^2_{\alpha, k-1} ] = \alpha \quad (A.7)$$

onde  $\alpha$  é o nível de significancia.

| Quantidade de números aleatórios gerados | Número de Intervalos k | Valor Crítico $\chi^2_{\alpha, k-1}$ | Y calculado |
|--|------------------------|--------------------------------------|-------------|
| N = 10000                                | 2000                   | 2052                                 | 1958        |
|  | 30                     | 35                                   | 25          |
| N = 100                                  | 20                     | 23.5                                 | 16.4        |

Tabela A.1 Resultado Teste  $\chi^2$  com  $\alpha = 0.20$ .



O resultado de aplicar este teste às duas seqüências geradas é comparado com o 0.20 nível de significancia, na tabela A.1.

Os valores críticos de  $\chi^2_{\alpha, k-1}$  para valores de  $k \geq 30$  tem sido calculados usando a expressão apresentada por Hald, 1952, citado por Benjamin e Cornell, 1970, p. 661, que assume que para altos valores de  $k$ , a distribuição  $\chi^2$  é aproximadamente normal com média  $k$  e variança  $2k$  :

$$\chi^2_{\alpha, k-1} = 0.5 ((2k - 1)^{0.5} + \mu_p)^2 \quad (\text{A.8})$$

onde,  $\mu_p$  é o valor da normal padrão, tal que  $\Phi(\mu_p) = \alpha$ . Para  $\alpha = 0.20$ ,  $\mu_p = 0.84$ .

Observando os resultados da tabela, e da expressão (A.7), pode-se comprovar que as seqüências passa o teste para um nível de significancia de 0.20, pelo que do teste  $\chi^2$  pode concluir-se que a seqüência é uniformemente distribuída entre 0 e 1.

Deve-se lembrar que para distintos números de intervalos escolhidos pode-se ter distintos níveis de significancia e obter resultados contraditórios. Esta limitação deve ser considerada ao revisar os resultados do teste  $\chi^2$ .

#### A.4.2 Teste de qualidade Kolmogorov-Smirnov (K-S)

Proposto por Kolmogorov e desenvolvido por Smirnov, é similar ao teste  $\chi^2$  em quanto compara a distribuição das amostras com a distribuição especificada, mas, tem a vantagem que não *agrupa dados e compara categorias* discretas e sem compara todos os dados em forma inalterada. A sua desvantagem está em ser válido estritamente só para distribuições contínuas e se o modelo suposto é totalmente independente dos dados. Apesar disso, é muitas vezes usado para testar distribuições discretas e quando este é conservativo só pode dizer que o valor crítico deve ser reduzido em magnitude.

A estatística que mede a maior diferença do valor absoluto de  $N$  diferenças entre a função de distribuição uniforme acumulada suposta e o histograma acumulado observado avaliando dos valores amostrados, é a quantidade aleatória (conhecida como estatística uma amostra de Kolmogorov-Smirnov):

$$D_N = \max_{i=1}^N \left[ \left| \frac{D_i}{N} - X_i \right| \right] \quad (\text{A.8})$$

onde,  $N$  é o número de amostras,  $D_i$  é a quantidade de amostras de  $X_i$ , com valores menores ou iguais a  $x_i$ .

O algoritmo para números aleatórios com este teste pode-se resumir : para cada número aleatório calcular a quantidade de números aleatórios,  $D_i$ , com valor menor a



igual a ele, dividir para o número total de amostras, obter o valor absoluto da diferença  $[D_i/N - x_i]$ , verificar qual é o resultado maior e comparar com o respetivo valor para o nível de significancia.

Um teste de qualidade K-S com nível de significancia  $\alpha$  rejeita a qualidade dos números aleatórios quando  $D_N \leq c$ , onde  $c$  é um quantil obtido da tabela B.7 de Benjamin e Cornell, 1970, p. 667, e que para  $N$  grande pode ser calculada de:

$$\alpha = 0.20, c = 1.07 / N^{1/2}$$

$$\alpha = 0.10, c = 1.22 / N^{1/2}$$

Também é possível realizar o teste K-S graficamente, desenhando a curva dos dados amostrados e as curvas dos dados com distribuição suposta para um certo nível de significancia, e em caso os dados amostrados cruzem as curvas com o nível de significancia deve-se rejeitar  $H_0$ . Esta verificação visual não é realizada pela obvia dificuldade de visualizar toda a quantidade de amostras.

O resultado de aplicar este teste é comparado para o nível de significancia 0.20, na tabela A.2.

| Quantidade de números aleatórios gerados | DN calculado | Nível de significancia $\alpha$ | $c$    |
|--|--------------|---------------------------------|--------|
| 10.000                                   | 0.004494     | 0.20                            | 0.0107 |
| 100                                      | 0.047919     | 0.20                            | 0.107  |

Tabela A.2 Resultado Teste  $\chi^2$ .

Observando os resultados da tabela e da expressão (A.7), pode-se comprovar que a seqüência passa o teste K-S até um nível de significancia de 0.20 pelo que a hipótese de distribuição uniformemente distribuída é aceita.

### A.4.3 Teste para aleatoriedade

Os números aleatórios gerados tem sido assumidos completamente aleatórios e estacionários, então o teste de aleatoriedade se reduz a encontrar a presença de sinusóides devido a componentes periódicas ou quase-periódicas nos números. As vezes com inspeção visual pode ser obvia a presença de componentes sinusoidais, quando estas são intensas, outras vezes pode não ser tão obvia.

Especificamente, a presença de componentes sinusoidais pode ser detectada por inspeção visual de um gráfico da densidade espectral, da função de densidade de probabilidade da amplitude, e/ou uma função de autocorrelação medidas dos dados. O

método mais poderoso para detectar as componentes sinusoidais é apresentado pelo uso do autocorrelograma. Para números aleatórios puros, a função de autocorrelação deve-se aproximar ao valor médio quadrado quando a quantidade de números é grande. De outro lado, a função de autocorrelação continua oscilando durante um tempo, com amplitudes diminuindo lentamente.

A continuação são apresentados resultados obtidos para verificação de seqüências de números aleatórios normalizados:

|   |           |           |
|---|-----------|-----------|
| Quantidade de números gerados                         | 10000     | 100       |
| Número Semente para o Gerador :                       | 135837253 | 995465771 |
| Maior pico observado                                  | 1.0000    | 0.9921    |
| Menor pico observado                                  | 0.0000    | 0.0007    |
| Valor médio do processo                               | 0.5000    | 0.5018    |
| Desvio padrão do processo                             | 0.2887    | 0.2904    |
| Núm. médio observado de ultrap. na unidade de tempo   | 0.2473    | 0.2525    |
| Tempo de correlação                                   | 35.8373   | 4.1780    |
| Momento espectral de segunda ordem                    | 3.2396    | 3.2932    |
| Momento espectral de quarta ordem                     | 19.1021   | 19.4120   |
| Número estimado de ultrap. da média na unid. de tempo | 0.2865    | 0.2904    |
| Número estimado de máximos na unidade de tempo        | 0.3865    | 0.3864    |
| Coefficiente de correlação                            | 0.0039    | 0.0273    |

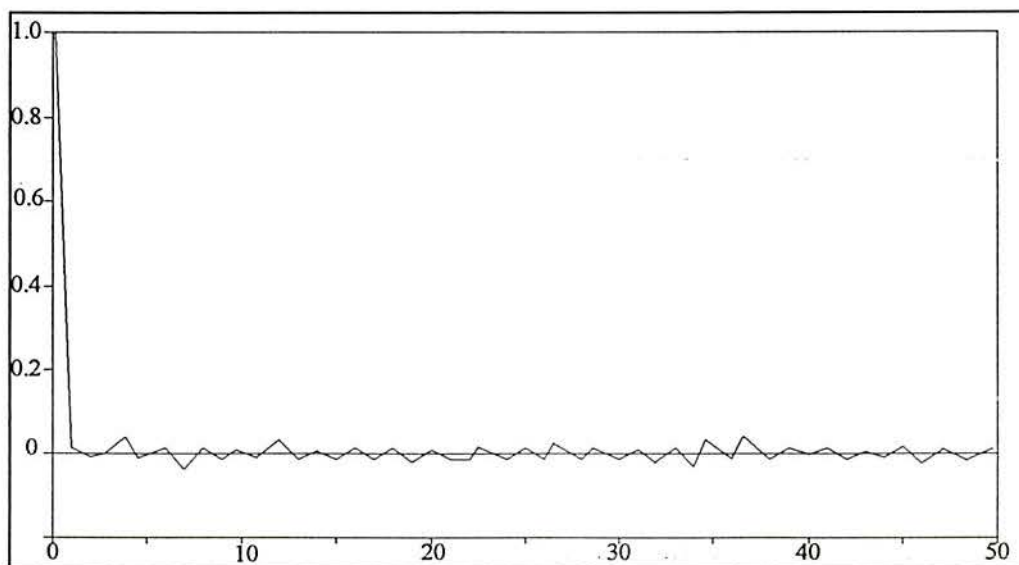


FIG. A.2 Pontos iniciais da Função de Autocorrelação para 10000 números aleatórios

Os resultados são obtidos usando subrotinas disponíveis na biblioteca de programas do LDEC (Laboratório de Dinâmica das Estruturas e Confiabilidade da UFRGS). As subrotinas são: SPR010, SPR400, RAN000 e a livreria FOURIER.LIB.

Dos resultados, o valor médio e o desvio padrão corresponde aos valores esperados para uma distribuição uniforme entre 0 e 1, 0.5 e 0.2886 respectivamente. O

coeficiente de correlação  $\rho$ , confirma a qualidade do gerador sugerido, ao ser comparado com os limites teóricos  $-0.009783 < \rho < 0.01868$  (para 10000 números gerados), apresentados no ISPUD, 1986.

Na figura A.2 pode-se observar a função de autocorrelação para os primeiros cinquenta pontos da seqüência de 10000 números aleatórios; devido a que a seqüência foi normalizada, o primeiro valor corresponde à valor médio quadrado igual a um.

## A.5 Simulação de processos aleatórios

A simulação de um processo aleatório de onda quadrada ou pulso é feita como segue:

- Gerar intervalos de tempo com distribuição exponencial, onde o tempo inicial do intervalo coincide com o tempo final do intervalo anterior.
- Para cada tempo do inicio do intervalo se gera amplitudes para as ondas ou pulsos com distribuição Gaussiana ou Normal.
- No caso de processos de onda quadrada, cada intervalo é dividido em subintervalos constantes de tempo de pelo menos  $\lambda/10$  de largura. Em todos os subintervalos a amplitude da onda é constante, correspondendo à amplitude da onda do tempo inicial do intervalo. No caso dos processos pulso os subintervalos tem amplitude com valor zero.
- A superposição dos processos é feita como a simples soma dos valores das amplitudes nos subintervalos coincidentes.
- Para evitar que os processos de pulso, em  $T=0$  tenham sempre um valor inicial, o inicio do processo é feito a partir de um tempo de menos  $T/4$ .



# APÊNDICE B

## Resultados da superposição de processos

### B.1 Introdução

Neste apêndice estão tabelados os resultados da superposição de processos aleatórios. Estes resultados correspondem à solução exata dada pela simulação e à solução obtida com o uso das equações analíticas.

A superposição dos processos correspondem às seguintes situações:

- Dois processo POPAG.
- Três processos POPAG.
- Um processo POPAG com outro PPPAG.
- Dois processos POPAG com outro PPPAG.

A verificação dos resultados com simulação de Monte Carlo é realizada para diversas relações da taxa de mudança da amplitude,  $\lambda$ , dos distintos processos.

| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T   | Simulação          |          | Eq. (7.6)          |          |             | Eq. (7.4)          |          |             | Eq. (7.7)          |          |             |
|------------|------------|-------------|-------------|-----|--------------------|----------|--------------------|----------|-------------|--------------------|----------|-------------|--------------------|----------|-------------|
|            |            |             |             |     | $Sm \acute{a}x(T)$ |          | $Sm \acute{a}x(T)$ |          |             | $Sm \acute{a}x(T)$ |          |             | $Sm \acute{a}x(T)$ |          |             |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |             |             |     | $\mu$              | $\sigma$ | $\mu$              | $\sigma$ | $\lambda_S$ | $\mu$              | $\sigma$ | $\lambda_S$ | $\mu$              | $\sigma$ | $\lambda_S$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 10  | 0.93               | 1.90     | 1.15               | 2.02     | 0.10        | 1.15               | 2.02     | 0.10        | 1.22               | 1.95     | 0.11        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 1.04               | 1.93     | 1.18               | 2.06     | 0.10        | 1.18               | 2.06     | 0.10        | 1.30               | 1.94     | 0.12        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 1.14               | 1.98     | 1.23               | 2.13     | 0.10        | 1.23               | 2.13     | 0.10        | 1.39               | 1.98     | 0.13        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 1.25               | 2.08     | 1.29               | 2.23     | 0.10        | 1.29               | 2.23     | 0.10        | 1.48               | 2.04     | 0.13        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 1.31               | 2.20     | 1.36               | 2.36     | 0.10        | 1.36               | 2.36     | 0.10        | 1.58               | 2.14     | 0.14        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 1.41               | 2.31     | 1.44               | 2.50     | 0.10        | 1.44               | 2.50     | 0.10        | 1.69               | 2.26     | 0.14        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 1.51               | 2.48     | 1.53               | 2.68     | 0.10        | 1.53               | 2.68     | 0.10        | 1.81               | 2.39     | 0.14        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 1.61               | 2.64     | 1.63               | 2.83     | 0.10        | 1.63               | 2.83     | 0.10        | 1.93               | 2.55     | 0.14        |
| 2.00       | 0.25       | 0.5         | 0.1         | 10  | 2.44               | 1.34     | 2.47               | 1.36     | 0.47        | 2.52               | 1.35     | 0.50        | 2.55               | 1.34     | 0.51        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 2.50               | 1.44     | 2.37               | 1.44     | 0.40        | 2.56               | 1.39     | 0.49        | 2.61               | 1.37     | 0.51        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 2.56               | 1.54     | 2.25               | 1.55     | 0.33        | 2.61               | 1.45     | 0.47        | 2.69               | 1.43     | 0.50        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 2.64               | 1.66     | 2.16               | 1.69     | 0.28        | 2.69               | 1.53     | 0.45        | 2.79               | 1.50     | 0.49        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 2.68               | 1.81     | 2.09               | 1.86     | 0.24        | 2.78               | 1.63     | 0.43        | 2.91               | 1.59     | 0.48        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 2.78               | 1.96     | 2.07               | 2.04     | 0.20        | 2.87               | 1.74     | 0.40        | 3.03               | 1.70     | 0.46        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 2.86               | 2.14     | 2.08               | 2.23     | 0.18        | 2.98               | 1.88     | 0.38        | 3.17               | 1.82     | 0.44        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 2.93               | 2.32     | 2.10               | 2.43     | 0.17        | 3.09               | 2.02     | 0.36        | 3.32               | 1.95     | 0.42        |
| 2.00       | 0.25       | 1.0         | 0.1         | 10  | 3.13               | 1.22     | 3.09               | 1.21     | 0.88        | 3.20               | 1.19     | 0.99        | 3.22               | 1.19     | 1.00        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 3.16               | 1.26     | 2.86               | 1.31     | 0.65        | 3.26               | 1.22     | 0.97        | 3.28               | 1.22     | 0.99        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 3.21               | 1.41     | 2.62               | 1.44     | 0.47        | 3.34               | 1.27     | 0.94        | 3.37               | 1.26     | 0.97        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 3.28               | 1.52     | 2.43               | 1.60     | 0.36        | 3.45               | 1.24     | 0.90        | 3.50               | 1.33     | 0.94        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 3.38               | 1.66     | 2.30               | 1.78     | 0.28        | 3.58               | 1.43     | 0.85        | 3.64               | 1.41     | 0.90        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 3.40               | 1.82     | 2.22               | 1.97     | 0.24        | 3.72               | 1.53     | 0.80        | 3.80               | 1.51     | 0.86        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 3.44               | 1.98     | 2.19               | 2.17     | 0.20        | 3.88               | 1.64     | 0.76        | 3.98               | 1.62     | 0.82        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 3.57               | 2.16     | 2.20               | 2.38     | 0.18        | 4.04               | 1.77     | 0.71        | 4.17               | 1.74     | 0.78        |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 100 | 3.24               | 1.19     | 3.21               | 1.19     | 0.10        | 3.21               | 1.19     | 0.10        | 3.31               | 1.17     | 0.11        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 3.37               | 1.23     | 3.28               | 1.21     | 0.10        | 3.28               | 1.21     | 0.10        | 3.47               | 1.18     | 0.12        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 3.58               | 1.26     | 3.40               | 1.26     | 0.10        | 3.40               | 1.26     | 0.10        | 3.65               | 1.21     | 0.13        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 3.80               | 1.32     | 3.56               | 1.32     | 0.10        | 3.56               | 1.32     | 0.10        | 3.86               | 1.26     | 0.13        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 4.04               | 1.38     | 3.76               | 1.39     | 0.10        | 3.76               | 1.39     | 0.10        | 4.10               | 1.32     | 0.14        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 4.31               | 1.46     | 3.98               | 1.47     | 0.10        | 3.98               | 1.47     | 0.10        | 4.37               | 1.39     | 0.14        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 4.58               | 1.55     | 4.23               | 1.56     | 0.10        | 4.23               | 1.56     | 0.10        | 4.65               | 1.48     | 0.14        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 4.84               | 1.66     | 4.51               | 1.67     | 0.10        | 4.51               | 1.67     | 0.10        | 4.95               | 1.57     | 0.14        |
| 2.00       | 0.25       | 0.5         | 0.1         | 100 | 4.56               | 0.96     | 4.51               | 0.95     | 0.47        | 4.55               | 0.94     | 0.50        | 4.57               | 0.94     | 0.51        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 4.66               | 0.98     | 4.50               | 0.99     | 0.40        | 4.64               | 0.97     | 0.49        | 4.67               | 0.96     | 0.51        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 4.82               | 1.04     | 4.50               | 1.05     | 0.33        | 4.78               | 1.00     | 0.47        | 4.83               | 1.00     | 0.50        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 5.02               | 1.11     | 4.55               | 1.13     | 0.28        | 4.96               | 1.06     | 0.45        | 5.04               | 1.05     | 0.49        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 5.22               | 1.22     | 4.64               | 1.22     | 0.24        | 5.19               | 1.12     | 0.43        | 5.29               | 1.11     | 0.48        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 5.51               | 1.29     | 4.78               | 1.32     | 0.20        | 5.45               | 1.20     | 0.40        | 5.57               | 1.18     | 0.46        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 5.77               | 1.42     | 4.95               | 1.42     | 0.18        | 5.74               | 1.28     | 0.38        | 5.88               | 1.26     | 0.44        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 6.07               | 1.53     | 5.16               | 1.54     | 0.17        | 6.04               | 1.38     | 0.36        | 6.22               | 1.35     | 0.42        |
| 2.00       | 0.25       | 1.0         | 0.1         | 100 | 5.04               | 0.88     | 4.96               | 0.88     | 0.88        | 5.04               | 0.87     | 0.99        | 5.05               | 0.87     | 1.00        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 5.15               | 0.91     | 4.86               | 0.93     | 0.65        | 5.14               | 0.89     | 0.97        | 5.16               | 0.89     | 0.99        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 5.30               | 0.97     | 4.78               | 1.00     | 0.47        | 5.30               | 0.93     | 0.94        | 5.33               | 0.92     | 0.97        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 5.53               | 1.04     | 4.77               | 1.09     | 0.36        | 5.52               | 0.98     | 0.90        | 5.55               | 0.97     | 0.94        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 5.75               | 1.12     | 4.82               | 1.19     | 0.28        | 5.77               | 1.04     | 0.85        | 5.82               | 1.03     | 0.90        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 6.04               | 1.25     | 4.92               | 1.29     | 0.24        | 6.07               | 1.10     | 0.80        | 6.13               | 1.10     | 0.86        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 6.29               | 1.34     | 5.07               | 1.40     | 0.20        | 6.40               | 1.18     | 0.76        | 6.47               | 1.17     | 0.82        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 6.61               | 1.48     | 5.26               | 1.52     | 0.18        | 6.75               | 1.27     | 0.71        | 6.84               | 1.25     | 0.78        |

CONTINUA .....

| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  |             |             |      | Simulação              |          | Eq. (7.6)              |          |             | Eq. (7.4)              |          |             | Eq. (7.7)              |          |             |
|------------|------------|-------------|-------------|------|------------------------|----------|------------------------|----------|-------------|------------------------|----------|-------------|------------------------|----------|-------------|
|            |            |             |             |      | $Sm \hat{\alpha}_x(T)$ |          | $Sm \hat{\alpha}_x(T)$ |          |             | $Sm \hat{\alpha}_x(T)$ |          |             | $Sm \hat{\alpha}_x(T)$ |          |             |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T    | $\mu$                  | $\sigma$ | $\mu$                  | $\sigma$ | $\lambda_S$ | $\mu$                  | $\sigma$ | $\lambda_S$ | $\mu$                  | $\sigma$ | $\lambda_S$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 1000 | 5.13                   | 0.87     | 5.05                   | 0.87     | 0.10        | 5.05                   | 0.87     | 0.10        | 5.12                   | 0.86     | 0.11        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      | 5.29                   | 0.88     | 5.16                   | 0.89     | 0.10        | 5.16                   | 0.89     | 0.10        | 5.29                   | 0.87     | 0.12        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |      | 5.52                   | 0.92     | 5.35                   | 0.92     | 0.10        | 5.35                   | 0.92     | 0.10        | 5.53                   | 0.90     | 0.13        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |      | 5.82                   | 0.95     | 5.60                   | 0.96     | 0.10        | 5.60                   | 0.96     | 0.10        | 5.82                   | 0.93     | 0.13        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |      | 6.17                   | 1.00     | 5.91                   | 1.02     | 0.10        | 5.91                   | 1.02     | 0.10        | 6.16                   | 0.98     | 0.14        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |      | 6.52                   | 1.09     | 6.26                   | 1.08     | 0.10        | 6.26                   | 1.08     | 0.10        | 6.54                   | 1.04     | 0.14        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |      | 6.96                   | 1.14     | 6.66                   | 1.15     | 0.10        | 6.66                   | 1.15     | 0.10        | 6.96                   | 1.10     | 0.14        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |      | 7.40                   | 1.21     | 7.08                   | 1.22     | 0.10        | 7.08                   | 1.22     | 0.10        | 7.41                   | 1.17     | 0.14        |
| 2.00       | 0.25       | 0.5         | 0.1         | 1000 | 6.09                   | 0.75     | 6.03                   | 0.75     | 0.47        | 6.07                   | 0.74     | 0.50        | 6.08                   | 0.74     | 0.51        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      | 6.22                   | 0.76     | 6.08                   | 0.77     | 0.40        | 6.19                   | 0.76     | 0.49        | 6.22                   | 0.76     | 0.51        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |      | 6.44                   | 0.81     | 6.18                   | 0.82     | 0.33        | 6.39                   | 0.79     | 0.47        | 6.44                   | 0.79     | 0.50        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |      | 6.72                   | 0.86     | 6.34                   | 0.87     | 0.28        | 6.66                   | 0.83     | 0.45        | 6.72                   | 0.82     | 0.49        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |      | 7.05                   | 0.90     | 6.56                   | 0.93     | 0.24        | 6.99                   | 0.88     | 0.43        | 7.07                   | 0.87     | 0.48        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |      | 7.47                   | 0.97     | 6.85                   | 1.00     | 0.20        | 7.37                   | 0.94     | 0.40        | 7.47                   | 0.93     | 0.46        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |      | 7.92                   | 1.04     | 7.18                   | 1.08     | 0.18        | 7.79                   | 1.00     | 0.38        | 7.91                   | 0.99     | 0.44        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |      | 8.38                   | 1.14     | 7.56                   | 1.15     | 0.17        | 8.24                   | 1.07     | 0.36        | 8.38                   | 1.06     | 0.42        |
| 2.00       | 0.25       | 1.0         | 0.1         | 1000 | 6.39                   | 0.72     | 6.40                   | 0.71     | 0.88        | 6.47                   | 0.70     | 0.99        | 6.48                   | 0.70     | 1.00        |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      | 6.55                   | 0.72     | 6.37                   | 0.74     | 0.65        | 6.60                   | 0.72     | 0.97        | 6.62                   | 0.72     | 0.99        |
| 2.00       | 0.75       |             |             |      | 6.80                   | 0.78     | 6.40                   | 0.79     | 0.47        | 6.82                   | 0.75     | 0.94        | 6.84                   | 0.74     | 0.97        |
| 2.00       | 1.00       |             |             |      | 7.12                   | 0.82     | 6.51                   | 0.85     | 0.36        | 7.11                   | 0.78     | 0.90        | 7.14                   | 0.78     | 0.94        |
| 2.00       | 1.25       |             |             |      | 7.42                   | 0.87     | 6.70                   | 0.91     | 0.28        | 7.47                   | 0.83     | 0.85        | 7.51                   | 0.83     | 0.90        |
| 2.00       | 1.50       |             |             |      | 7.86                   | 0.96     | 6.96                   | 0.99     | 0.24        | 7.87                   | 0.88     | 0.80        | 7.92                   | 0.88     | 0.86        |
| 2.00       | 1.75       |             |             |      | 8.32                   | 1.02     | 7.28                   | 1.06     | 0.20        | 8.32                   | 0.94     | 0.76        | 8.38                   | 0.94     | 0.82        |
| 2.00       | 2.00       |             |             |      | 8.82                   | 1.06     | 7.64                   | 1.14     | 0.18        | 8.81                   | 1.01     | 0.71        | 8.88                   | 1.00     | 0.78        |
| 2.00       | 2.00       | 1.0         | .01         | 1000 | 8.15                   | 1.40     | 5.36                   | 1.50     | 0.02        | 8.80                   | 1.01     | 0.71        | 8.81                   | 1.01     | 0.71        |
| 2.00       | 2.00       | 0.5         | .01         |      | 7.80                   | 1.46     | 5.21                   | 1.50     | 0.02        | 8.20                   | 1.07     | 0.35        | 8.22                   | 1.07     | 0.36        |
| 2.00       | 2.00       | 0.5         | 0.5         |      | 8.81                   | 1.04     | 8.52                   | 1.04     | 0.50        | 8.52                   | 1.04     | 0.50        | 8.80                   | 1.01     | 0.71        |
| 2.00       | 2.00       | 1.0         | 1.0         |      | 9.36                   | 0.98     | 9.08                   | 0.98     | 1.00        | 9.08                   | 0.98     | 1.00        | 9.36                   | 0.96     | 1.41        |

Tabela B.1 Estatísticas do valor máximo para superposição de processos POPAG, quando o valor médio é zero.



| $\mu_1=2$  | $\mu_2=1$  |             |             |     | Simulação |            | Eq. (7.6) |            |                  | Eq. (7.4) |            |                  | Eq. (7.7) |            |                  |
|------------|------------|-------------|-------------|-----|-----------|------------|-----------|------------|------------------|-----------|------------|------------------|-----------|------------|------------------|
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T   | $\mu_S$   | $\sigma_S$ | $\mu_S$   | $\sigma_S$ | $\lambda_{S,eq}$ | $\mu_S$   | $\sigma_S$ | $\lambda_{S,eq}$ | $\mu_S$   | $\sigma_S$ | $\lambda_{S,eq}$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 100 | 6.21      | 1.19       | 6.21      | 1.19       | 0.10             | 6.21      | 1.19       | 0.10             | 6.31      | 1.17       | 0.11             |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 6.38      | 1.20       | 6.28      | 1.21       | 0.10             | 6.28      | 1.21       | 0.10             | 6.47      | 1.18       | 0.12             |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 6.55      | 1.30       | 6.40      | 1.26       | 0.10             | 6.40      | 1.26       | 0.10             | 6.65      | 1.21       | 0.13             |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 6.79      | 1.34       | 6.56      | 1.32       | 0.10             | 6.56      | 1.32       | 0.10             | 6.86      | 1.26       | 0.13             |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 7.04      | 1.41       | 6.76      | 1.39       | 0.10             | 6.76      | 1.39       | 0.10             | 7.10      | 1.32       | 0.14             |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 7.30      | 1.48       | 6.98      | 1.47       | 0.10             | 6.98      | 1.47       | 0.10             | 7.37      | 1.39       | 0.14             |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 7.60      | 1.57       | 7.23      | 1.56       | 0.10             | 7.23      | 1.56       | 0.10             | 7.65      | 1.48       | 0.14             |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 7.82      | 1.67       | 7.51      | 1.67       | 0.10             | 7.51      | 1.67       | 0.10             | 7.95      | 1.57       | 0.14             |
| 2.00       | 0.25       | 0.5         | 0.1         | 100 | 7.56      | 0.95       | 7.51      | 0.95       | 0.47             | 7.55      | 0.94       | 0.50             | 7.57      | 0.94       | 0.51             |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 7.65      | 0.98       | 7.50      | 0.99       | 0.40             | 7.64      | 0.97       | 0.49             | 7.67      | 0.96       | 0.51             |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 7.82      | 1.05       | 7.50      | 1.05       | 0.33             | 7.78      | 1.00       | 0.47             | 7.83      | 1.00       | 0.50             |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 8.03      | 1.11       | 7.55      | 1.13       | 0.28             | 7.96      | 1.06       | 0.45             | 8.04      | 1.05       | 0.49             |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 8.23      | 1.22       | 7.64      | 1.22       | 0.24             | 8.19      | 1.12       | 0.43             | 8.29      | 1.11       | 0.48             |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 8.51      | 1.30       | 7.78      | 1.32       | 0.20             | 8.45      | 1.20       | 0.40             | 8.57      | 1.18       | 0.46             |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 8.77      | 1.42       | 7.95      | 1.42       | 0.18             | 8.74      | 1.28       | 0.38             | 8.88      | 1.26       | 0.44             |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 9.07      | 1.54       | 8.16      | 1.54       | 0.17             | 9.04      | 1.38       | 0.36             | 9.22      | 1.35       | 0.42             |
| 2.00       | 0.25       | 1.0         | 0.1         | 100 | 8.04      | 0.88       | 7.96      | 0.88       | 0.88             | 8.04      | 0.87       | 0.99             | 8.05      | 0.87       | 1.00             |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 8.12      | 0.92       | 7.86      | 0.93       | 0.65             | 8.14      | 0.89       | 0.97             | 8.16      | 0.89       | 0.99             |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 8.29      | 0.96       | 7.78      | 1.00       | 0.47             | 8.30      | 0.93       | 0.94             | 8.33      | 0.92       | 0.97             |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 8.53      | 1.03       | 7.77      | 1.09       | 0.36             | 8.52      | 0.98       | 0.90             | 8.55      | 0.97       | 0.94             |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 8.74      | 1.12       | 7.82      | 1.19       | 0.28             | 8.77      | 1.04       | 0.85             | 8.82      | 1.03       | 0.90             |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 9.04      | 1.25       | 7.92      | 1.29       | 0.24             | 9.07      | 1.10       | 0.80             | 9.13      | 1.10       | 0.86             |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 9.29      | 1.34       | 8.07      | 1.40       | 0.20             | 9.40      | 1.18       | 0.76             | 9.47      | 1.17       | 0.82             |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 9.63      | 1.50       | 8.26      | 1.52       | 0.18             | 9.75      | 1.27       | 0.71             | 9.84      | 1.25       | 0.78             |

Tabela B.2 Estatísticas do valor máximo para superposição de processos POPAG, quando o valor médio não é zero.

| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  | $\mu_3=0$  |             |             |             |    | Simulação          |          | $Sm \acute{a}x(T)$ |             | $\Sigma$ máximos             |          |
|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|----|--------------------|----------|--------------------|-------------|------------------------------|----------|
|            |            |            |             |             |             |    | $Sm \acute{a}x(T)$ |          | Eq<br>(7.7)        | Eq<br>(7.6) | $\Sigma Si, m \acute{a}x(T)$ |          |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | T  | $\mu$              | $\sigma$ | $\mu$              | $\sigma$    | $\mu$                        | $\sigma$ |
| 2.00       | 2.00       | 0.10       | 0.1         | 0.1         | 0.1         | 50 | 3.89               | 1.69     | 4.07               | 1.67        | 5.15                         | 1.89     |
| 2.00       | 2.00       | 0.50       |             |             |             |    | 4.07               | 1.69     | 4.24               | 1.69        | 5.65                         | 1.92     |
| 2.00       | 2.00       | 1.00       |             |             |             |    | 4.29               | 1.74     | 4.52               | 1.76        | 6.28                         | 2.00     |
| 2.00       | 2.00       | 1.50       |             |             |             |    | 4.66               | 1.86     | 4.87               | 1.89        | 6.91                         | 2.14     |
| 2.00       | 2.00       | 2.00       |             |             |             |    | 5.02               | 2.03     | 5.28               | 2.04        | 7.53                         | 2.31     |
| 2.00       | 0.10       | 0.10       | 0.1         | 0.1         | 0.1         |    | 2.50               | 1.17     | 2.61               | 1.18        | 2.76                         | 1.34     |
| 2.00       | 0.50       | 0.10       |             |             |             |    | 2.71               | 1.22     | 2.83               | 1.22        | 3.26                         | 1.38     |
| 2.00       | 1.00       | 0.10       |             |             |             |    | 3.03               | 1.30     | 3.17               | 1.32        | 3.89                         | 1.50     |
| 2.00       | 1.50       | 0.10       |             |             |             |    | 3.45               | 1.45     | 3.59               | 1.47        | 4.52                         | 1.67     |
| 2.00       | 0.50       | 0.50       |             |             |             |    | 2.86               | 1.25     | 3.03               | 1.25        | 3.77                         | 1.42     |
| 2.00       | 1.00       | 0.50       |             |             |             |    | 3.19               | 1.36     | 3.36               | 1.35        | 4.39                         | 1.53     |
| 0.50       | 0.10       | 0.10       | 0.1         | 0.1         | 0.1         |    | 0.69               | 0.30     | 0.73               | 0.31        | 0.88                         | 0.35     |
| 0.50       | 0.50       | 0.10       |             |             |             |    | 1.00               | 0.40     | 1.05               | 0.42        | 1.38                         | 0.48     |
| 1.50       | 0.50       | 0.10       |             |             |             |    | 2.10               | 0.89     | 2.21               | 0.93        | 2.64                         | 1.06     |
| 0.577      | 0.577      | 0.577      |             |             |             |    | 1.46               | 0.58     | 1.52               | 0.59        | 2.17                         | 0.67     |
| 2.00       | 2.00       | 0.10       | 0.5         | 0.1         | .05         |    | 5.15               | 1.55     | 5.45               | 1.54        | 6.58                         | 1.68     |
| 2.00       | 2.00       | 0.50       |             |             |             |    | 5.24               | 1.55     | 5.54               | 1.58        | 6.95                         | 1.73     |
| 2.00       | 2.00       | 1.00       |             |             |             |    | 5.37               | 1.67     | 5.75               | 1.69        | 7.41                         | 1.85     |
| 2.00       | 2.00       | 1.50       |             |             |             |    | 5.54               | 1.85     | 6.08               | 1.85        | 7.87                         | 2.05     |
| 2.00       | 2.00       | 2.00       |             |             |             |    | 5.82               | 2.05     | 6.49               | 2.06        | 8.33                         | 2.29     |
| 2.00       | 0.10       | 0.10       | 0.5         | 0.1         | .05         |    | 3.96               | 0.96     | 4.00               | 0.94        | 4.20                         | 1.03     |
| 2.00       | 0.50       | 0.10       |             |             |             |    | 4.07               | 0.99     | 4.13               | 0.99        | 4.70                         | 1.08     |
| 2.00       | 1.00       | 0.10       |             |             |             |    | 4.37               | 1.10     | 4.45               | 1.13        | 5.33                         | 1.22     |
| 2.00       | 1.50       | 0.10       |             |             |             |    | 4.71               | 1.30     | 4.90               | 1.32        | 5.96                         | 1.43     |
| 2.00       | 0.50       | 0.50       |             |             |             |    | 4.15               | 1.06     | 4.24               | 1.06        | 5.07                         | 1.14     |
| 2.00       | 1.00       | 0.50       |             |             |             |    | 4.40               | 1.20     | 4.55               | 1.19        | 5.70                         | 1.28     |
| 0.10       | 0.10       | 2.00       | 0.5         | 0.1         | .05         |    | 1.84               | 1.35     | 2.29               | 1.34        | 2.16                         | 1.56     |
| 0.10       | 0.50       | 2.00       |             |             |             |    | 2.12               | 1.35     | 2.56               | 1.37        | 2.66                         | 1.59     |
| 0.10       | 1.00       | 2.00       |             |             |             |    | 2.52               | 1.45     | 2.93               | 1.46        | 3.29                         | 1.69     |
| 0.50       | 0.50       | 2.00       |             |             |             |    | 2.57               | 1.41     | 3.32               | 1.40        | 3.46                         | 1.61     |
| 0.50       | 1.00       | 2.00       |             |             |             |    | 2.92               | 1.48     | 3.63               | 1.49        | 4.08                         | 1.71     |

Tabela B.3 Estatísticas do valor máximo para superposição de três processos POPAG para diversas situações de  $\lambda_i$ , usando equações propostas.

| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  |             |             |      | Simulação            |          | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | $\Sigma$ m\acute{a}ximos    |          |      |      |      |
|------------|------------|-------------|-------------|------|----------------------|----------|----------------------|----------|-----------------------------|----------|------|------|------|
|            |            |             |             |      | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | Eq (7.7)             | Eq (7.6) | $\Sigma S_{m\acute{a}x}(T)$ |          |      |      |      |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T    | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                       | $\sigma$ |      |      |      |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 100  | 3.20                 | 1.19     | 3.31                 | 1.19     | 3.47                        | 1.32     |      |      |      |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      | 3.28                 | 1.24     | 3.47                 | 1.24     | 3.86                        | 1.47     |      |      |      |
| 2.00       | 0.75       |             |             |      | 3.42                 | 1.26     | 3.65                 | 1.26     | 4.25                        | 1.62     |      |      |      |
| 2.00       | 1.00       |             |             |      | 3.57                 | 1.27     | 3.86                 | 1.27     | 4.63                        | 1.77     |      |      |      |
| 2.00       | 1.25       |             |             |      | 3.75                 | 1.34     | 4.10                 | 1.34     | 5.02                        | 1.91     |      |      |      |
| 2.00       | 1.50       |             |             |      | 3.92                 | 1.40     | 4.37                 | 1.40     | 5.40                        | 2.06     |      |      |      |
| 2.00       | 1.75       |             |             |      | 4.12                 | 1.47     | 4.65                 | 1.47     | 5.79                        | 2.21     |      |      |      |
| 2.00       | 2.00       |             |             |      | 4.39                 | 1.58     | 4.95                 | 1.58     | 6.18                        | 2.36     |      |      |      |
| 2.00       | 2.25       |             |             |      | 4.52                 | 1.68     | 5.27                 | 1.68     | 6.56                        | 2.50     |      |      |      |
| 2.00       | 2.50       |             |             |      | 4.91                 | 1.78     | 5.60                 | 1.78     | 6.95                        | 2.65     |      |      |      |
| 2.00       | 2.75       |             |             |      | 5.19                 | 1.92     | 5.94                 | 1.92     | 7.33                        | 2.80     |      |      |      |
| 2.00       | 3.00       |             |             |      | 5.51                 | 2.03     | 6.28                 | 2.03     | 7.97                        | 2.94     |      |      |      |
| 2.00       | 0.25       |             |             |      | 0.5                  | 0.1      | 100                  | 4.54     | 0.95                        | 4.57     | 0.95 | 4.92 | 1.08 |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      |                      |          |                      | 4.58     | 0.93                        | 4.67     | 0.99 | 5.32 | 1.23 |
| 2.00       | 0.75       | 4.60        | 0.95        | 4.83 |                      |          |                      | 1.05     | 5.71                        | 1.38     |      |      |      |
| 2.00       | 1.00       | 4.67        | 0.96        | 5.04 |                      |          |                      | 1.13     | 6.11                        | 1.52     |      |      |      |
| 2.00       | 1.25       | 4.73        | 0.99        | 5.29 |                      |          |                      | 1.22     | 6.51                        | 1.67     |      |      |      |
| 2.00       | 1.50       | 4.80        | 1.04        | 5.57 |                      |          |                      | 1.32     | 6.91                        | 1.82     |      |      |      |
| 2.00       | 1.75       | 4.96        | 1.10        | 5.88 |                      |          |                      | 1.42     | 7.31                        | 1.96     |      |      |      |
| 2.00       | 2.00       | 5.13        | 1.26        | 6.22 |                      |          |                      | 1.54     | 7.71                        | 2.11     |      |      |      |
| 2.00       | 2.25       | 5.29        | 1.30        | 6.57 |                      |          |                      | 1.65     | 8.10                        | 2.26     |      |      |      |
| 2.00       | 2.50       | 5.50        | 1.40        | 6.94 |                      |          |                      | 1.77     | 8.50                        | 2.41     |      |      |      |
| 2.00       | 2.75       | 5.63        | 1.50        | 7.32 |                      |          |                      | 1.90     | 8.90                        | 2.55     |      |      |      |
| 2.00       | 3.00       | 5.92        | 1.72        | 7.71 |                      |          |                      | 2.03     | 9.30                        | 2.70     |      |      |      |
| 2.00       | 0.25       | 1.0         | 0.1         | 100  |                      |          |                      | 5.03     | 0.89                        | 5.05     | 0.89 | 5.41 | 1.01 |
| 2.00       | 0.50       |             |             |      |                      |          |                      | 5.03     | 0.88                        | 5.16     | 0.93 | 5.81 | 1.16 |
| 2.00       | 0.75       |             |             |      | 5.04                 | 0.87     | 5.33                 | 1.00     | 6.20                        | 1.30     |      |      |      |
| 2.00       | 1.00       |             |             |      | 5.12                 | 0.89     | 5.55                 | 1.09     | 6.60                        | 1.45     |      |      |      |
| 2.00       | 1.25       |             |             |      | 5.16                 | 0.87     | 5.82                 | 1.19     | 7.00                        | 1.60     |      |      |      |
| 2.00       | 1.50       |             |             |      | 5.18                 | 0.95     | 6.13                 | 1.29     | 7.40                        | 1.75     |      |      |      |
| 2.00       | 1.75       |             |             |      | 5.33                 | 1.04     | 6.47                 | 1.40     | 7.80                        | 1.89     |      |      |      |
| 2.00       | 2.00       |             |             |      | 5.42                 | 1.10     | 6.84                 | 1.52     | 8.20                        | 2.04     |      |      |      |
| 2.00       | 2.25       |             |             |      | 5.48                 | 1.11     | 7.23                 | 1.64     | 8.59                        | 2.19     |      |      |      |
| 2.00       | 2.50       |             |             |      | 5.73                 | 1.31     | 7.63                 | 1.76     | 8.99                        | 2.33     |      |      |      |
| 2.00       | 2.75       |             |             |      | 5.90                 | 1.43     | 8.04                 | 1.89     | 9.39                        | 2.48     |      |      |      |
| 2.00       | 3.00       |             |             |      | 6.02                 | 1.47     | 8.47                 | 2.01     | 9.79                        | 2.63     |      |      |      |

Tabela B.4 Estatísticas do valor máximo para superposição de um processo POPAG e um processo PPPAG, quando  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ .



| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  |             |             |     | Simulação            |          | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | $\Sigma$ máximos              |          |
|------------|------------|-------------|-------------|-----|----------------------|----------|----------------------|----------|-------------------------------|----------|
|            |            |             |             |     | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | Eq (7.7)             | Eq (7.6) | $\Sigma S_{i,m\acute{a}x}(T)$ |          |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T   | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                         | $\sigma$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.5         | 100 | 3.35                 | 1.18     | 3.65                 | 1.18     | 3.75                          | 1.29     |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 3.62                 | 1.21     | 3.99                 | 1.20     | 4.32                          | 1.41     |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 3.95                 | 1.24     | 4.32                 | 1.24     | 4.88                          | 1.53     |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 4.30                 | 1.24     | 4.66                 | 1.28     | 5.45                          | 1.64     |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 4.63                 | 1.30     | 5.01                 | 1.33     | 6.01                          | 1.76     |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 5.11                 | 1.38     | 5.39                 | 1.39     | 6.58                          | 1.88     |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 5.42                 | 1.47     | 5.80                 | 1.46     | 7.14                          | 2.00     |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 5.91                 | 1.53     | 6.22                 | 1.54     | 7.71                          | 2.11     |
| 2.00       | 2.25       |             |             |     | 6.30                 | 1.64     | 6.66                 | 1.61     | 8.08                          | 2.23     |
| 2.00       | 2.50       |             |             |     | 6.85                 | 1.75     | 7.12                 | 1.70     | 8.84                          | 2.35     |
| 2.00       | 2.75       |             |             |     | 7.30                 | 1.77     | 7.59                 | 1.78     | 9.40                          | 2.46     |
| 2.00       | 3.00       |             |             |     | 7.72                 | 1.86     | 8.07                 | 1.87     | 9.97                          | 2.58     |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.5         | 100 | 3.49                 | 1.18     | 3.92                 | 1.18     | 3.99                          | 1.29     |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 3.80                 | 1.26     | 4.36                 | 1.20     | 4.44                          | 1.39     |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 4.21                 | 1.24     | 4.73                 | 1.23     | 5.06                          | 1.50     |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 4.61                 | 1.23     | 5.11                 | 1.27     | 5.69                          | 1.61     |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 5.06                 | 1.27     | 5.51                 | 1.32     | 6.32                          | 1.72     |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 5.50                 | 1.35     | 5.93                 | 1.38     | 6.94                          | 1.82     |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 5.98                 | 1.43     | 6.37                 | 1.45     | 7.57                          | 1.93     |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 6.46                 | 1.46     | 6.84                 | 1.52     | 8.20                          | 2.04     |
| 2.00       | 2.25       |             |             |     | 7.00                 | 1.54     | 7.33                 | 1.59     | 8.82                          | 2.15     |
| 2.00       | 2.50       |             |             |     | 7.53                 | 1.61     | 7.83                 | 1.67     | 9.45                          | 2.26     |
| 2.00       | 2.75       |             |             |     | 8.03                 | 1.70     | 8.35                 | 1.75     | 10.07                         | 2.36     |
| 2.00       | 3.00       |             |             |     | 8.63                 | 1.67     | 8.88                 | 1.83     | 10.70                         | 2.47     |

Tabela B.5 Estatísticas do valor máximo para superposição de um processo POPAG(1) e um processo PPPAG(2), quando  $\lambda_2 \geq \lambda_1$ .

| $\mu_1=1$  | $\mu_2=0$  |             |             |     | Simulação            |          | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | $\Sigma$ máximos              |          |
|------------|------------|-------------|-------------|-----|----------------------|----------|----------------------|----------|-------------------------------|----------|
|            |            |             |             |     | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | Eq (7.7)             | Eq (7.6) | $\Sigma S_{i,m\acute{a}x}(T)$ |          |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | T   | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                         | $\sigma$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 100 | 4.19                 | 1.20     | 4.31                 | 1.19     | 4.47                          | 1.32     |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 4.38                 | 1.21     | 4.47                 | 1.24     | 4.86                          | 1.47     |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 4.44                 | 1.24     | 4.65                 | 1.26     | 5.25                          | 1.62     |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 4.55                 | 1.24     | 4.86                 | 1.27     | 5.63                          | 1.77     |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 4.75                 | 1.30     | 5.10                 | 1.34     | 6.02                          | 1.91     |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 4.93                 | 1.40     | 5.37                 | 1.40     | 6.40                          | 2.06     |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 5.16                 | 1.48     | 5.65                 | 1.47     | 6.79                          | 2.21     |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 5.39                 | 1.57     | 5.95                 | 1.58     | 7.18                          | 2.36     |
| 2.00       | 2.25       |             |             |     | 5.62                 | 1.69     | 6.27                 | 1.68     | 7.56                          | 2.50     |
| 2.00       | 2.50       |             |             |     | 5.95                 | 1.74     | 6.60                 | 1.78     | 7.95                          | 2.65     |
| 2.00       | 2.75       |             |             |     | 6.15                 | 1.90     | 6.94                 | 1.92     | 8.33                          | 2.80     |
| 2.00       | 3.00       |             |             |     | 6.48                 | 2.04     | 7.28                 | 2.03     | 8.97                          | 2.94     |
| $\mu_1=0$  | $\mu_2=1$  |             |             |     |                      |          |                      |          |                               |          |
| 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 100 | 3.79                 | 1.20     | 4.31                 | 1.19     | 4.47                          | 1.32     |
| 2.00       | 0.50       |             |             |     | 3.87                 | 1.22     | 4.47                 | 1.24     | 4.86                          | 1.47     |
| 2.00       | 0.75       |             |             |     | 4.06                 | 1.26     | 4.65                 | 1.26     | 5.25                          | 1.62     |
| 2.00       | 1.00       |             |             |     | 4.30                 | 1.26     | 4.86                 | 1.27     | 5.63                          | 1.77     |
| 2.00       | 1.25       |             |             |     | 4.44                 | 1.36     | 5.10                 | 1.34     | 6.02                          | 1.91     |
| 2.00       | 1.50       |             |             |     | 4.65                 | 1.40     | 5.37                 | 1.40     | 6.40                          | 2.06     |
| 2.00       | 1.75       |             |             |     | 4.93                 | 1.48     | 5.65                 | 1.47     | 6.79                          | 2.21     |
| 2.00       | 2.00       |             |             |     | 5.16                 | 1.57     | 5.95                 | 1.58     | 7.18                          | 2.36     |
| 2.00       | 2.25       |             |             |     | 5.43                 | 1.66     | 6.27                 | 1.68     | 7.56                          | 2.50     |
| 2.00       | 2.50       |             |             |     | 5.70                 | 1.77     | 6.60                 | 1.78     | 7.95                          | 2.65     |
| 2.00       | 2.75       |             |             |     | 6.00                 | 1.91     | 6.94                 | 1.92     | 8.33                          | 2.80     |
| 2.00       | 3.00       |             |             |     | 6.42                 | 2.06     | 7.28                 | 2.03     | 8.97                          | 2.94     |

Tabela B.6 Estatísticas do valor máximo para superposição de um processo POPAG(1) e um processo PPPAG(2), quando  $\lambda_2 = \lambda_1$  e  $\mu_i \neq 0$ .

| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  | $\mu_3=0$  |             |             |             |     | Simulação    |          | $S_{máx}(T)$ |          |
|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-----|--------------|----------|--------------|----------|
|            |            |            |             |             |             |     | $S_{máx}(T)$ |          | Eq (7.7)     | Eq (7.6) |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | T   | $\mu$        | $\sigma$ | $\mu$        | $\sigma$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 0.1         | 100 | 3.26         | 1.15     | 3.35         | 1.36     |
| 2.00       | 0.25       | 0.50       |             |             |             |     | 3.45         | 1.27     | 3.50         | 1.39     |
| 2.00       | 0.25       | 1.00       |             |             |             |     | 3.68         | 1.25     | 3.89         | 1.50     |
| 2.00       | 0.25       | 1.50       |             |             |             |     | 4.00         | 1.35     | 4.38         | 1.68     |
| 2.00       | 0.25       | 2.00       |             |             |             |     | 4.43         | 1.62     | 4.96         | 1.90     |
| 2.00       | 0.50       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 0.1         | 100 | 3.44         | 1.23     | 3.50         | 1.39     |
| 2.00       | 0.50       | 0.50       |             |             |             |     | 3.60         | 1.26     | 3.65         | 1.42     |
| 2.00       | 0.50       | 1.00       |             |             |             |     | 3.75         | 1.29     | 4.02         | 1.53     |
| 2.00       | 0.50       | 1.50       |             |             |             |     | 4.09         | 1.35     | 4.51         | 1.70     |
| 2.00       | 0.50       | 2.00       |             |             |             |     | 4.55         | 1.60     | 5.08         | 1.92     |
| 2.00       | 1.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 0.1         | 100 | 3.86         | 1.36     | 3.89         | 1.50     |
| 2.00       | 1.00       | 0.50       |             |             |             |     | 3.93         | 1.33     | 4.02         | 1.53     |
| 2.00       | 1.00       | 1.00       |             |             |             |     | 4.10         | 1.42     | 4.38         | 1.64     |
| 2.00       | 1.00       | 1.50       |             |             |             |     | 4.42         | 1.48     | 4.84         | 1.80     |
| 2.00       | 1.00       | 2.00       |             |             |             |     | 4.78         | 1.68     | 5.39         | 2.00     |
| 2.00       | 2.00       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 0.1         | 100 | 4.90         | 1.70     | 4.96         | 1.90     |
| 2.00       | 2.00       | 0.50       |             |             |             |     | 5.00         | 1.72     | 5.08         | 1.92     |
| 2.00       | 2.00       | 1.00       |             |             |             |     | 5.16         | 1.75     | 5.39         | 2.00     |
| 2.00       | 2.00       | 1.50       |             |             |             |     | 5.36         | 1.82     | 5.80         | 2.14     |
| 2.00       | 2.00       | 2.00       |             |             |             |     | 5.78         | 1.89     | 6.28         | 2.31     |

Tabela B.7 Estatísticas do valor máximo para superposição de dois processos POPAG(1 e 2) e um processo PPPAG(3), quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ .



| $\mu_1=0$  | $\mu_2=0$  | $\mu_3=0$  |             |             |             |     | Simulação            |          | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          |
|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-----|----------------------|----------|----------------------|----------|
|            |            |            |             |             |             |     | $S_{m\acute{a}x}(T)$ |          | Eq (7.7)             | Eq (7.6) |
| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | T   | $\mu$                | $\sigma$ | $\mu$                | $\sigma$ |
| 2.00       | 0.25       | 0.25       | 1.0         | 0.5         | 0.1         | 100 | 5.11                 | 0.87     | 5.12                 | 0.89     |
| 2.00       | 0.25       | 0.50       |             |             |             |     | 5.12                 | 0.88     | 5.23                 | 0.94     |
| 2.00       | 0.25       | 1.00       |             |             |             |     | 5.18                 | 0.92     | 5.62                 | 1.09     |
| 2.00       | 0.25       | 1.50       |             |             |             |     | 5.33                 | 0.94     | 6.20                 | 1.30     |
| 2.00       | 0.25       | 2.00       |             |             |             |     | 5.46                 | 1.08     | 6.90                 | 1.52     |
| 2.00       | 1.00       | 0.25       | 1.0         | 0.5         | 0.1         | 100 | 5.77                 | 0.95     | 5.72                 | 1.00     |
| 2.00       | 1.00       | 0.50       |             |             |             |     | 5.77                 | 0.97     | 5.81                 | 1.04     |
| 2.00       | 1.00       | 1.00       |             |             |             |     | 5.83                 | 1.02     | 6.18                 | 1.19     |
| 2.00       | 1.00       | 1.50       |             |             |             |     | 5.92                 | 1.02     | 6.72                 | 1.37     |
| 2.00       | 1.00       | 2.00       |             |             |             |     | 6.09                 | 1.13     | 7.39                 | 1.59     |
| 2.00       | 0.25       | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 1.0         | 100 | 3.52                 | 1.20     | 3.96                 | 1.19     |
| 2.00       | 0.25       | 0.50       |             |             |             |     | 3.83                 | 1.22     | 4.39                 | 1.21     |
| 2.00       | 0.25       | 1.00       |             |             |             |     | 4.63                 | 1.25     | 5.14                 | 1.28     |
| 2.00       | 0.25       | 1.50       |             |             |             |     | 5.51                 | 1.36     | 5.95                 | 1.39     |
| 2.00       | 0.25       | 2.00       |             |             |             |     | 6.55                 | 1.47     | 6.86                 | 1.52     |
| 2.00       | 1.0        | 0.25       | 0.1         | 0.1         | 1.0         | 100 | 4.04                 | 1.32     | 4.42                 | 1.32     |
| 2.00       | 1.0        | 0.50       |             |             |             |     | 4.36                 | 1.35     | 4.84                 | 1.34     |
| 2.00       | 1.0        | 1.00       |             |             |             |     | 5.03                 | 1.40     | 5.57                 | 1.40     |
| 2.00       | 1.0        | 1.50       |             |             |             |     | 5.90                 | 1.46     | 6.35                 | 1.55     |
| 2.00       | 1.0        | 2.00       |             |             |             |     |                      |          | 7.22                 | 1.76     |

Tabela B.8 Estatísticas do valor máximo para superposição de dois processos POPAG(1 e 2) e um processo PPPAG(3), quando  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANG, A. H-S., CORNELL, C.A., "Reliability Bases of Structural Safety and Design", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 100, No. ST9, Proc. Paper 10777, p. 1755-1769, september 1974
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **ABNT NB-1, NBR-6118**: "Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado", Rio de Janeiro, novembro 1980
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **ABNT NB-5, NBR-6120**: "Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações", 6 p., Rio de Janeiro, novembro 1980
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **ABNT NB-599, NBR-6123**: "Forças devidas ao Vento em Edificações", Rio de Janeiro, 88 p., dezembro 1987
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, **ABNT, NBR-8681**: "Ações e Segurança nas Estruturas", Rio de Janeiro, 21 p., dezembro 1984
- BENDAT, J.S., PIERSOL, A.G., "**Measurement and Analysis of Random Data**", John Wiley & Sons INC., New York, USA, p. 1-70, 1966
- BENJAMIN, J.R., CORNELL, C.A., "**Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers**", McGraw-Hill Book Company, USA, 684 p., 1970
- BENNETT, R.M., "Snow Load Factors for LRFD", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 114, No. ST10, Proc. Paper 22870, p. 2371-2383, october 1988
- BLESSMANN, J., "Tópicos de Normas de Vento", Série Engenharia Estrutural/6, Ed. da UFRGS, Porto Alegre, 96 p., 1990
- CHALK, P.L., COROTIS, R.B., "Probability Model for Design Live Loads", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 106 No. ST6, Proc. Paper 12997, p. 1257-1274, october 1980

- CHOI, E.C., "Extraordinary Live Load in Office Buildings", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 117, No. ST11, Proc. Paper 26327, p. 3216-3227, november 1991
- CHOI, E.C., "Live Load for Office Buildings: Effect of Occupancy and Code Comparison", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 116, No. ST11, Proc. Paper 25243, p. 3162-3174, november 1990
- COROTIS, R.B., DOSHI, V.A., "Probability Models for Live-Load Survey Results", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 103, No. ST6, Proc. Paper 12997, p. 1223-239, june 1977
- COROTIS, R.B., TSAY, W-Y., "Probabilistic Load Duration Model for Live Loads", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 109, No. ST4, Proc. Paper 17899, p. 859-874, april 1983
- CULVER, C.G., "Live-Load Survey Results for Office Buildings", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 103, No. ST8, Proc. Paper 12615, p. 2269-2284, december 1976
- DER KIUREGHIAN, A., "Second-Moment Combination of Stochastic Loads", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 104, No. ST10, Proc. Paper 14056, p. 1551-1567, october 1978
- DOS SANTOS, M.L., "Regionalização das Velocidades Extremas e Temperaturas do Vento no Centro-Sul do Brasil", Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, 97 p., março 1989
- ELLINGWOOD, B.M., MACGREGOR, J.G., GALAMBOS, T.V., CORNELL, C.A., "Probability Based Load Criteria: Load Factor and Load Combinations", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 108, No. ST5, Proc. Paper 17068, p. 978-997, may 1982
- ELLINGWOOD, B.M., CULVER, C.G., "Analisis of Live Loads In Office Buildings", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 103, No. ST8, Proc. Paper 13109, p. 1551-1560, august 1977
- EUROCODE 1**: "Basis of Design and Actions on Structures (Fourth Draft)", CEN/TC250/N80 Coordination Group, HG/CRH, 23 p., july 1992



- FLORIS, C., "Multiple Load Combination Analysis", **Proceedings of ICOSSAR '93 - The 6TH International Conference on Structural Safety and Reliability**, Published by A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, p. 1417-1423, 1994
- HAHN, G.J., SHAPIRO, S.S., "**Statistical Models in Engineering**", John Wiley & Sons INC, New York, USA, s.n.p, 1967
- HARRIS, M.E., COROTIS, R.B., BOVA C.J., "Area Dependent Processes for Structural Live Loads", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 107, No. ST5, Proc. Paper 16266, p. 857-872, may 1981
- IDOTA, H., ONO, T., "Stochastic Live Load Model for Multiple Story Columns", **Proceedings of ICOSSAR '93 - The 6TH International Conference on Structural Safety and Reliability**, Published by A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, p. 1425-1432, 1994
- INSTITUTO ARGENTINO DE RACIONALIZACION DE MATERIALES, **IRAM II-599**: "Cargas y Sobrecargas Gravitatorias a Utilizar en el Cálculo de las Estructuras de Edificios", Junio 1977
- LARRABEE, R.D., CORNELL C.A., "A Combination for a Wide Class of Loading Processes", **Proceedings of the Specialty Conference on Probability Mechanics and Structural Reliability, ASCE**, p. 76-80, october 1978
- LARRABEE, R.D., CORNELL, C.A., "Upcrossing Rate Solution For Load Combinations", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 105, No. ST1, Proc. Paper 14329, p. 125-132, january 1979
- LARRABEE, R.D., CORNELL, C.A., "Combination of Various Load Processes", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 107, No. ST1, Proc. Paper 15999, p. 223-239, january 1981
- MACGUIRE, R.K., CORNELL, C.A., "Live Load Effects in Office Buildings", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 100, No. ST7, Proc. Paper 10660, p. 1351-1366, july 1974
- MADSEN, H., KILCUP, R., CORNELL C.A., "Mean Upcrossing Rate for Sum of Pulse-Type Stochastic Load Processes", **Proceedings of the Specialty**

- Conference on Probability Mechanics and Structural Reliability, ASCE, p. 54-58, october 1978
- MELCHERS, R.E., "Structural Reliability: Analysis and Prediction", John Wiley & Sons, Chichester, England, p. 254-278, 1987
- MELSA, J.L., SAGE, A.P., "An Introduction to Probability and Stochastic Processes", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, USA, 403 p., 1973
- MONTOYA, P.J., MESEGUER, A.G., CABRE, F.M., "Hormigón Armado: Abacos para el Cálculo de secciones en el Estado Ultimo de Agotamiento", Tomo II, Gustavo Gili S.A., España, 409 p., 1973
- NANNI, L.F., RIERA, J.D., "Sobre as Distribuições de Valores Extremos", Caderno Técnico CT-83, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 22 p., julho 1986
- NEWLAND, D.E., "An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis", Second Edition, Longman Scientific & Technical, Hong Kong, 377 p., 1984
- NORMA CLAES 1: "Principios para Projetos de Estruturas (first Preliminary Draft)", Latin-American Committee for Estructural Engineering, Montevideo, Uruguay, 1993
- ÖNORM B 4040: "Principios Gerais da Confiabilidade de Estruturas", -base para a preparação de normas técnicas em engenharia civil- tradução preliminar do alemão por: Rocha M. M. e Riera J.D., Pré-Norma de 1 de março de 1989.
- PEIR, J.C., CORNELL, C.A., "Spatial and Temporal Variability of Live Loads", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 99, No. ST5, Proc. Paper 9747, p. 903-922, may 1973
- RAVINDRA, M.K., GALAMBOS, T.V., "Load and Resistance Factor Design for Steel", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 104, No. ST9, Proc. Paper 14008, p. 1337-1353, september 1978
- RAVINDRA, M.K., CORNELL, C.A., GALAMBOS, T.V., "Wind and Snow Load Factors for use in LRFD", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 104, No. ST9, Proc. Paper 14006, p. 1443-1457, september 1978



- RIERA, J.D., "Análise de Sistemas Submetidos a Excitações Aleatórias"; Relatório Técnico RT-09, Parte I: Conceitos Fundamentais, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, p. 1-30, novembro 1989
- RIERA, J.D., ROCHA M.M., "Load Combination Criteria for Structural Design Codes", UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 11 p., october 1994<sup>a</sup>
- RIERA, J.D., ROCHA M.M., "The Development of Design Codes by the Latin-American Committee for Structural Engineering - NORMA CLAES 1: Principles for Structural Design -", IAEA Seminar, Tucumán, Argentina, p. 1-8, april 1994<sup>b</sup>
- RUBINSTEIN, R.Y., "Simulation and the Monte Carlo Method", John Wiley & Sons INC, New York, USA, p. 1-113, 1981
- SCHUELLER, G.I., SHINOZUKA, M., "Stochastic Methods in Structural Dynamics", Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, p. 1-80, 1987
- SHAH, H.C., "Statistical Evaluation of Load Factors in Structural Design", Structural Reliability and Codified Design, Studies Series, University of Waterloo, Canada, p. 129-153, 1970
- SHINOZUKA, M.R., "Stochastic Characterization of Loads and Load Combinations", 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability, Columbia University, USA, p. 57-76, s.d.
- THOFT-CHRISTENSEN, P., BAKER, M.J., "Structural Reliability Theory and its Applications", Heidelberg Inc., New York, EEUU, p. 161-175, 1982
- TURKSTRA, C.J., MADSEN, H.O., "Load combinations in codified structural design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST12, Proc. Paper 15938, p. 2527-2543, december 1980
- VROUWENVELDER, A.C., SIEMES, A.J., "Probabilistic Calibration Procedure for the Derivation of Partial Safety Factors for the Netherlands Building Codes", TNO-IBBC Report, p. 9-29, s.d.
- WEN, YI-KWEI, "Statistical Combination of Extreme Loads", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 103, No. ST5, Proc. Paper 12930, p. 1070-1093, may 1977



WEN, YI-KWEI, "Statistics of Extreme of Live Load on Buildings", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 105, No. ST10, Proc. Paper 14886, p. 1893-1900, october 1979

WINTERSTEIN, S.R., CORNELL C.A., "Load Combinations and Clustering Effects", **Journal of the Structural Division, ASCE**, Vol. 110, No. ST11, Proc. Paper 19294, p. 2690-2708, november 1984