UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARCIANE LINHARES CARLOS

PARÂMETROS NO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio

Porto Alegre

2017

MARCIANE LINHARES CARLOS

PARÂMETROS NO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre

2017

MARCIANE LINHARES CARLOS

PARÂMETROS NO GEOGEBRA NA CONSTRUÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS: Um Estudo Sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3º Ano do Ensino Médio

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

BANCA EXAMINADORA

Dra. Débora da Silva Soares
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Rodrigo Dalla Vecchia
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

À Deus, sempre!

Aos meus pais, Elvidio Justo Carlos e Iria Maria Linhares Carlos, pelo amor incondicional e pela compreensão que sempre tiveram comigo.

Ao meu querido e amado Carlos Veríssimo de Moura Martins, com quem compartilho minha vida, pelo amor, carinho, incentivo e apoio em todos os momentos.

À minha amada Marina Carlos Martins, filha querida que entendeu minhas ausências durante a realização deste trabalho.

À querida professora Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, orientadora deste trabalho, pelo apoio, incentivo, colaboração intelectual e atenção dispensada ao longo desta caminhada.

Aos queridos alunos que participaram desta pesquisa.

À equipe diretiva da escola, que oportunizou a realização desta pesquisa.

A todos vocês, meus sinceros agradecimentos!

RESUMO

Este trabalho traz uma pesquisa feita com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada da região metropolitana de Porto Alegre, na qual o objetivo foi analisar as contribuições do *software* GeoGebra no estudo da circunferência, transitando entre diferentes registros de representações semióticas, algébrica e geométrica, e utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados. Para a realização desta pesquisa, foi utilizado o estudo de caso como metodologia. A coleta de dados se deu por meio de observações da professora/pesquisadora, questionamentos sobre as atividades trabalhadas no GeoGebra, registros escritos feitos pelos alunos e dos arquivos com extensão .ggb. Foi criado um *website* com a sequência das atividades aplicadas em sala de aula e os trabalhos finais produzidos pelos alunos, nos quais o uso de parâmetros foi utilizado no GeoGebra, com o intuito de levar os alunos a compreenderem os elementos da equação da circunferência, generalizar o raciocínio e reconhecer as representações gráfica e algébrica do mesmo objeto matemático. A análise dos dados coletados aponta a importância desta ferramenta ao ter instigado reflexões nos alunos que os levaram à compreensão da circunferência e das relações existentes entre os registros geométrico e algébrico, desencadeando o processo de conversão entre estes registros, e assim, proporcionando aos alunos o conhecimento global do objeto de estudo.

Palavras-chave: Circunferência. GeoGebra. Registros de Representação Semiótica. Raciocínio Generalizador. Parâmetros.

ABSTRACT

This work presents a survey carried out with 3rd year high school students from a private school in the metropolitan area of Porto Alegre, in which the objective was to analyze the contributions of GeoGebra software in the study of circumference, passing between different registers of semiotic representations, Algebraic and geometric, and using parameters to arrive at generalized reasoning. In order to carry out this research, the case study was used as methodology. Data collection was done through teacher/researcher observations, questions about the activities worked on GeoGebra, written records made by the students and the files with extension .ggb. A website was created with the sequence of activities applied in the classroom and the final works produced by the students, in which the use of parameters was used in GeoGebra, in order to get students to understand the elements of the circumference equation, generalize the reasoning and recognize the graphical and algebraic representations of the same mathematical object. The analysis of the collected data points out the importance of this tool in having instigated reflections in the students that led them to understand the circumference and the existing relations between the geometric and algebraic registers, triggering the process of conversion between these registers, and thus, knowledge of the object of study.

Keywords: Circumference. GeoGebra. Semiotic Representation Records. Generalizing Reasoning. Parameters.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tela inicial do *software* GeoGebra.. 31
Figura 2 - Interação entre duas representações semióticas....................................32
Figura 3 - Sintaxe do comando sequência 34
Figura 4 - Sintaxe do comando sequência com os seus respectivos valores 34
Figura 5 - Representações algébrica e geométrica a partir do comando *sequência*.35
Figura 6 - Criação dos controles deslizantes...35
Figura 7 - Criação de dois pontos aleatórios A e B 36
Figura 8 - Comando sequência 36
Figura 9 - Comando *sequência*, expressão: *girar*..36
Figura 10 - Comando *sequência* pronto para receber os valores e variáveis 37
Figura 11 - Comando *sequência* com todos os signos digitados 37
Figura 12 - Lista1 criada a partir do comando sequência...38
Figura 13 - Controle deslizante *k* determinando o número de circunferências..........39
Figura 14 - Circunferências formadas a partir do primeiro controle deslizante..........41
Figura 15 - Circunferências em torno de um ponto 41
Figura 16 - Centros das circunferências formando um polígono. 42
Figura 17 - Novo polígono formado pelos centros dos polígonos (a) 42
Figura 18 - Centros dos polígonos (b) formando o polígono (c). 43
Figura 19 - Página inicial do *website*...47
Figura 20 - Aba: Estudo da Circunferência 48
Figura 21 - Atividade 1 disponível no *website* 49
Figura 22 - Atividade 2 50
Figura 23 - Atividade 3 51
Figura 24 - Atividade 4 52
Figura 25 - Atividade 5 53
Figura 26 - Atividade 6 54
Figura 27 - Atividade 7 55
Figura 28 - *Semente da vida* com o controle deslizante variando de 0 a 6 56
Figura 29 - Atividade 8 57
Figura 30 - Atividade 9 58
Figura 31 - Atividade 10 59
Figura 32 - Circunferência construída pelo grupo C...64
Figura 33 - Construção da dupla H com controle deslizante $a = -3$.........................65
Figura 34 - Grupo H explicando o item 2 da atividade 2 65

Figura 35 - Circunferências criadas pelo grupo H variando o raio............................66
Figura 36 - Grupo C explicando o item 2 da atividade 2 66
Figura 37 - Movimento da circunferência, com o rastro habilitado, com o mesmo controle deslizante para o par ordenado do centro 67
Figura 38 - Resposta do grupo E ao item 3 da atividade 2 68
Figura 39 - Circunferências criadas pelo grupo E a partir do movimento dos parâmetros das coordenadas do centro..68
Figura 40 - Item 4 da atividade 2 respondida pelo grupo H.......................................69
Figura 41 - Descrição feita pelo grupo A do item 1 da atividade 3 71
Figura 42 - Circunferências criadas pelo grupo A sobre o item 1 da atividade 3 72
Figura 43 - Circunferências criadas pelo grupo C para o item 1 da atividade 3 73
Figura 44 - Descrição feita pelo grupo C sobre o item 1 da atividade 3 73
Figura 45 - Grupo E descrevendo o item 1 da atividade 3 74
Figura 46 - Circunferências criadas pelo grupo E para o item 1 da atividade 3 75
Figura 47 - Item 1 da atividade 3 feita pelo grupo H...76
Figura 48 - Descrição do item 1 da atividade 3 feita pelo grupo H 76
Figura 49 - Construção feita pelo grupo A para o item 2 da atividade 3....................77
Figura 50 - Construção feita pelo grupo C para o item 2 da atividade 3 78
Figura 51 - Construção feita pelo aluno do grupo H para o item 2 da atividade 3.....79
Figura 52 - Circunferências secantes feitas pelo grupo A 80
Figura 53 - Descrição do item 3 da atividade 3 feita pelo grupo A 80
Figura 54 - Família de circunferências 81
Figura 55 - Construção feita pelo grupo H 82
Figura 56 - Resposta do grupo A ao item 1..83
Figura 57 - Passo a passo do comando *sequência*..83
Figura 58 - Explicação do grupo A sobre como construíram a família de circunferências 84
Figura 59 - Atividade 5, item 1, feita pelo grupo A..85
Figura 60 - Item 1 respondido pelo grupo C. 86
Figura 61 - Circunferências construídas pelo grupo C a partir da solicitação do item 1. 86
Figura 62 - Item 2 desenvolvido pelo grupo A 87
Figura 63 - Coleção de circunferências na vertical...88
Figura 64 - Descrição do item 3 feita pelo grupo A 89
Figura 65 - Expressão criada pelo grupo C 89
Figura 66 - Expressão criada pelo grupo E 89
Figura 67 - Circunferências girando em torno de um ponto feita pelo grupo A 90
Figura 68 - Construção feita pelo grupo H 91
Figura 69 - Construção feita pelo grupo C com o ponto errado................................92
Figura 70 - *Semente da vida* 93
Figura 71 - Alunos assistindo ao vídeo sobre a *semente da vida*. 94

Figura 72 - Construção feita pelo grupo E com centro de giro diferente do solicitado. 95
Figura 73 - Sintaxe da *Semente da vida* 95
Figura 74 - *Semente da vida* a partir do movimento do controle deslizante *k*. 96
Figura 75 - Relações estabelecidas entre as circunferências do grupo A.................96
Figura 76 - Construção feita pelo grupo A...97
Figura 77 - Relações estabelecidas entre as circunferências do grupo H.................97
Figura 78 - Sintaxe da Lista2..98
Figura 79 - Efeito gerado a partir da movimentação do controle deslizante *m*..........98
Figura 80 - Início da flor da vida a ser construída pelos alunos 98
Figura 81 - Construção do início da flor da vida feita pelo grupo C...........................99
Figura 82 - Relações estabelecidas feitas pelo grupo A 100
Figura 83 - Relações estabelecidas feitas pelo grupo H 100
Figura 84 - Construção da atividade 9 no GeoGebra...101
Figura 85 - Sintaxes das listas criadas...101
Figura 86 - Ponto C oposto ao ponto B..102
Figura 87 - Efeito gerado a partir da movimentação do controle deslizante *m*........102
Figura 88 - Alunos envolvidos na construção da *flor da vida*. 103
Figura 89 - Imagem escolhida pelo trio A...104
Figura 90 - Imagem da reprodução feita pelo trio A 105
Figura 91 - Sintaxe da única relação utilizada pelo grupo A. 105
Figura 92 - Construção do grupo A com o controle deslizante igual a 1 e a 8 106
Figura 93 - Descrição do trio A da construção da Figura 92 106
Figura 94 - Imagem escolhida pela dupla C...107
Figura 95 - Imagem da reprodução feita pela dupla C 107
Figura 96 - Descrição da dupla C sobre a construção da Figura 95 108
Figura 97 - Sintaxe da única relação utilizada pelo grupo C 108
Figura 98 - Imagem escolhida pela dupla E 108
Figura 99 - Imagem da reprodução feita pela dupla E 109
Figura 100 - Descrição da dupla E sobre a construção da Figura 99......................109
Figura 101 - Sintaxe das listas criadas pelo grupo E 109
Figura 102 - Etapas da construção do grupo E..110
Figura 103 - Imagem escolhida pelo trio H...111
Figura 104 - Imagem da reprodução feita pelo trio H...111
Figura 105 - Descrição do trio H sobre a construção da Figura 104 112
Figura 106 - Sintaxe das listas criadas pelo grupo H 112

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.....19
Quadro 2 - Cronograma das atividades planejadas.....60
Quadro 3 - Cronograma alterado das atividades planejadas.....61
Quadro 4 - Controle das atividades realizadas pelos grupos analisados.....62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 18

2.1 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS...........18
2.2 RACIOCÍNIO GENERALIZADOR 22
2.3 TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 24

3 FERRAMENTA PARA PENSAR COM: GEOGEBRA 30

3.1 UTILIZANDO PARÂMETROS NO GEOGEBRA 32
3.2 A INSPIRAÇÃO PARA ESTA PESQUISA 39

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS...44

4.1 ATIVIDADES PLANEJADAS...47
4.1.1 Atividade 1 49
4.1.2 Atividade 2 50
4.1.3 Atividade 3 51
4.1.4 Atividade 4 52
4.1.5 Atividade 5 53
4.1.6 Atividade 6 54
4.1.7 Atividade 7 55
4.1.8 Atividade 8 56
4.1.9 Atividade 9 57
4.1.10 Atividade 10 59

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 61

5.1 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS...61
5.1.1 Atividade 1 63
5.1.2 Atividade 2 63
5.1.3 Atividade 3 70
5.1.4 Atividade 4 81
5.1.5 Atividade 5 84
5.1.6 Atividade 6 89
5.1.7 Atividade 7 92
5.1.8 Atividade 8 97
5.1.9 Atividade 9 101
5.1.10 Atividade 10 104
5.1.11 Análise do Processo de cada Grupo nas Atividades 113

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 117

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 120

APÊNDICES 124

APÊNDICE 1 125
APÊNDICE 2 135
APÊNDICE 3 144

1 INTRODUÇÃO

Ao trabalhar durante alguns anos, como professora de Matemática, com alunos do Ensino Médio, reparei que eles sentem dificuldades para trabalhar simultaneamente a Álgebra e a Geometria. Logo, notei que o conteúdo de Geometria Analítica acaba por se tornar de difícil compreensão por parte dos alunos. Após trabalhar com o Estudo da Circunferência em sala de aula, utilizando o recurso quadro e giz, senti a necessidade de trabalhar este conteúdo de forma dinâmica, utilizando o *software* GeoGebra para estimular o desenvolvimento de um raciocínio generalizador a partir do estudo de parâmetros, para proporcionar a possibilidade de compreensão global do objeto de estudo por parte dos alunos. Desta forma, essa pesquisa foi desenvolvida para investigar as contribuições do *software* GeoGebra para desencadear a compreensão da circunferência em suas diferentes representações.

Como a Geometria Analítica é um dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio que exige dos alunos a transição entre pelo menos dois tipos de registros de representação: a algébrica e a geométrica, nesta pesquisa, o propósito é trabalhar com estas duas representações, de forma que a conversão entre estes dois tipos de registros seja enfatizada, para que o aluno desenvolva uma compreensão global dos conceitos abordados e sinta-se seguro para expressar seus conhecimentos tanto de forma algébrica, quanto de forma geométrica e entendendo que se trata do mesmo objeto.

Para auxiliar neste processo, para proporcionar a compreensão dos conceitos trabalhados, bem como para desenvolver um raciocínio generalizador, foi feito uso de recursos digitais, neste caso um *software* de geometria dinâmica que provoca nos alunos reflexões que podem conduzir à compreensão dos diferentes registros de representações de um mesmo objeto. O recurso digital escolhido para este trabalho foi o *software* GeoGebra, porque “Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros *softwares* de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar funções, tanto via botões na Barra de Ferramentas, quanto pelo Campo de Entrada” (ARAÚJO, 2010, p.1). Pelo Campo de Entrada, o aluno é forçado a pensar nos parâmetros da equação da circunferência, para então digitar a equação no Campo de Entrada e ter como retorno a representação geométrica da circunferência. Pensando nisso, foi solicitado aos alunos que utilizassem sempre o Campo de Entrada para criar as circunferências solicitadas nas atividades.

Existem estudos no meio acadêmico sobre Geometria Analítica e o uso do GeoGebra, que abordam a introdução do conteúdo, os conceitos e as representações algébricas e geométricas, como é o caso das dissertações de Fialho (2010) com o título “Uma proposta de utilização do *software* GeoGebra para o ensino de geometria analítica”, Paula (2013) “O ensino de Geometria Analítica com o uso do GeoGebra” e Sousa (2014) “Atividades interativas com o GeoGebra: uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica”.

Outros trabalhos foram feitos sobre o estudo da circunferência no GeoGebra. São os casos de: Werneck (2013) no seu trabalho “Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática com Atividades de Aplicação em Geometria Analítica: A circunferência”, que traz uma série de atividades propostas sobre a circunferência na qual o objetivo é trabalhar a circunferência de forma a facilitar a compreensão dos conceitos; Oliveira (2013), com o título “O Uso do GeoGebra no Ensino da Geometria Analítica: Estudo da Circunferência”, no qual apresenta um estudo cujo objetivo é refletir sobre como o uso do GeoGebra pode tornar-se um instrumento eficaz no ensino da circunferência, indicando construções no *software* sobre a circunferência e as suas posições relativas referentes a ponto, reta e circunferência; Bastos (2014), cujo trabalho é “Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do *Software* GeoGebra”, que propõe atividades sobre o estudo da circunferência usando o GeoGebra como ferramenta de aprendizagem ao abordar as equações da circunferência, equação do 2º grau a duas variáveis, método de completar quadrados para chegar à equação reduzida e posições relativas.

Todos estes trabalhos mencionados enfatizam como trabalhar o objeto de estudo utilizando o *software* matemático, mas nenhum deles trabalha com a parametrização e o raciocínio generalizador, como foi trabalhado nesta pesquisa.

Silva (2013), em seu trabalho “Variação de Parâmetros em Funções Elementares Utilizando o GeoGebra”, explora o estudo de várias funções por meio da variação de parâmetros, cujo objetivo é fazer com que os alunos aprendam a identificar e descrever os efeitos da variação de parâmetros nas funções elementares, compreendendo assim o comportamento gráfico das funções e o papel desempenhado por cada um dos coeficientes das funções. Diferente da pesquisa aqui apresentada, a utilização de parâmetros no trabalho de Silva (2013) não tem como objetivo estudar a generalização criando família de funções e sim o comportamento gráfico das funções ao serem modificados os parâmetros.

A parametrização e ao raciocínio generalizador são utilizados nas pesquisas de Notare e Gravina (2013, 2015) ao abordarem o assunto de Geometria Analítica por meio da réplica de obras de arte e da ilusão de óptica, porém em outro *software*, o GrafEq.

O trabalho aqui apresentado consiste no desenvolvimento de uma pesquisa sobre a utilização de parâmetros e o raciocínio generalizador no GeoGebra com uma turma do 3º ano do Ensino Médio ao estudarem a Geometria Analítica, em específico o estudo da circunferência. A questão norteadora da pesquisa foi: **Quais são as contribuições do GeoGebra no estudo da Geometria Analítica, em específico da circunferência, utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio?**

A pesquisa consiste na realização de uma experiência de ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, em específico o estudo da circunferência, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio, cujo foco foi a utilização de parâmetros em um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra, para provocar nos alunos o processo de generalização de raciocínios a partir de atividades que desencadeiem este processo. Investigou-se como os alunos compreendem as equações da circunferência, a partir da análise de suas produções, observando as transformações que ocorrem entre os registros gráficos e algébricos e o entendimento que os alunos têm deste processo.

Os objetivos da pesquisa são:

✓ Analisar o processo de aprendizagem da circunferência utilizando o *software* GeoGebra, onde serão disponibilizadas atividades referentes ao conteúdo e, a partir da compreensão deste, partir para o raciocínio generalizador por meio de atividades com a utilização de parâmetros.

✓ Observar como os alunos mobilizam os registros das representações semióticas, em especial, os registros algébricos e geométricos, segundo a Teoria dos

Registros de Representação Semiótica de Duval (2009, 2011), durante o processo de ensino e aprendizagem proposta por este trabalho.

✓ Elaborar, implementar e analisar uma sequência de atividades disponibilizada em um *website* para atender aos objetivos anteriores.

✓ Identificar as contribuições do *software* GeoGebra para a compreensão do raciocínio generalizador ao utilizar parâmetros para a construção de figuras geométricas.

O produto relacionado com a dissertação consiste em um *website* interativo, disponível em http://marcianecarlos.wixsite.com/matematica, com a sequência das atividades propostas na pesquisa.

Este trabalho está organizado em capítulos, conforme descrito a seguir:

O capítulo 1 apresenta a justificativa da pesquisa, os trabalhos acadêmicos que versam sobre o tema aqui abordado e a pesquisa com a questão norteadora.

O capítulo 2 aborda o referencial teórico, que teve como principais referenciais: Duval (2009, 2011) e a sua Teoria dos Registros de Representações Semióticas, no qual aborda a importância do aluno transitar em diferentes registros de representações semióticas para assim ter uma compreensão mais global acerca do objeto de estudo; Tall (2004) com a sua teoria dos Três Mundos da Matemática, transitando do conceitual ao formal, no qual apresenta o desenvolvimento cognitivo inter-relacionado ao pensamento matemático, do elementar ao avançado, e no avançado temos a generalização e a abstração na visão de Dreyfus (1991); referente às Tecnologias Digitais, traz-se a teoria de Pea (1987), em que as tecnologias ajudam a pensar na Matemática e a teoria de Shaffer e Clinton (2006) que utilizam a expressão *ferramentaparapensamentos* ao fazerem uma ligação entre pensamento e ferramentas tecnológicas.

O capítulo 3 mostra uma visão geral sobre o *software* GeoGebra, com estudos sobre o potencial semiótico dos *softwares* e, em especial, o uso de parâmetros (NOTARE e GRAVINA, 2013; NOTARE et al., 2015). Este capítulo ainda traz uma descrição de como utilizar o comando *sequência* para generalizar as circunferências e o material de John Golden (2012), que serviu de inspiração para a pesquisa.

O capítulo 4 traz os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, que fez uso do Estudo de Caso baseado nos estudos de Ponte (2006). Também neste capítulo é contextualizada a escola e caraterizada a turma em que foram aplicadas as atividades desenvolvidas nesta pesquisa. E por fim, são apresentadas as atividades propostas no *website*.

O capítulo 5 descreve e analisa o desenvolvimento dos grupos nas atividades propostas, baseados nos referenciais teóricos estudados neste trabalho.

O capítulo 6 trata das considerações finais deste trabalho, em que são analisadas e feitas reflexões sobre as respostas encontradas para a questão norteadora, tendo como base os referenciais teóricos.

O capítulo 7 apresenta as referências bibliográficas utilizadas nesta pesquisa.

E, por fim, os apêndices trazem o produto técnico dessa dissertação, as folhas das atividades que foram entregues para os alunos fazerem os registros escritos, assim como o modelo do Termo de Consentimento Informado, que os pais dos alunos assinaram, autorizando os filhos a participarem desta pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para entender como ocorre o processo de aprendizagem da equação da circunferência, utilizando parâmetros que buscam generalizar coleções de circunferências na exploração semiótica de tecnologias digitais na Educação Matemática, apresentamos neste capítulo a fundamentação teórica, na qual estudamos: a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2005); o raciocínio generalizador a partir dos estudos de Dreyfus (1991) e da Teoria dos Três Mundos de Tall (2004), no qual a generalização faz parte do terceiro mundo chamado de “Mundo formal axiomático”; as tecnologias digitais na Educação Matemática, cujo principal referencial será Shaffer e Clinton (2006) e o uso da expressão criada por eles *ferramentaparapensamentos* (toolforthoughts).

2.1 Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que norteiam o trabalho do professor da educação básica em sala de aula, recomendam trabalhar diferentes representações de um mesmo objeto matemático para aumentar o campo de visão e compreensão do aluno sobre o objeto. Segundo os PCNEM (2002, p.42), deve-se “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”.

Para compreender como se dá este processo de reconhecimento de diferentes registros de representações de um mesmo objeto e, mais do que isso, compreender as complexidades inerentes ao processo de conversão entre os registros, buscamos suporte teórico na teoria de Duval (2005, 2009, 2011 e 2012).

Para Duval (2005, 2009), o desenvolvimento dos sistemas de representação semiótica foi primordial para o desenvolvimento do pensamento matemático e considerado importante para o processo de aprendizagem de Matemática por dois principais motivos: o tratamento matemático depende do sistema de representação utilizado; e os objetos matemáticos não são palpáveis, como no caso dos números, que precisam de um sistema de representação para serem caracterizados. Na Matemática, os sistemas de representações semióticas podem se dar por meio de representações discursivas ou não-discursivas, conforme Quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perspectiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL (2005, p. 14)

O Quadro 1 mostra quatro tipos diferentes de registros, classificados em registros multifuncionais e registros monofuncionais. Nos registros multifuncionais, as representações são expressas em língua natural ou figuras geométricas e podem ser utilizadas em todas as áreas do conhecimento. Nos registros monofuncionais, o principal tipo de representação é o algoritmo, representado por meio de sistemas de escritas e de gráficos e é utilizado em Matemática.

Nesta pesquisa, na qual o objeto de estudo foi a circunferência e suas diferentes representações, os alunos tiveram a oportunidade de transitar entre dois registros monofuncionais de representações semióticas: a algébrica e a geométrica.

Duval (2009), em sua teoria, define um conceito importante para o funcionamento cognitivo da compreensão, que é o de transformações de registros. Estas transformações podem ser de dois tipos: tratamento e conversão, em que o tratamento é uma transformação dentro de um mesmo registro e a conversão é uma transformação entre, no mínimo, dois registros distintos de um mesmo objeto. Conforme o autor:

> • Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números;

> resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2005, p. 16)

No caso específico do estudo das circunferências, um tratamento pode ser exemplificado com a transformação de uma equação geral da circunferência em uma equação reduzida da circunferência, mudando apenas a maneira como escrevemos a equação, ou seja, o tratamento ocorre em um mesmo registro algébrico de representação; e a conversão pode ser exemplificada com a transformação da representação geométrica para a representação algébrica. Como é na conversão que se apresentam as maiores dificuldades de compreensão dos alunos, pois não é trivial para os alunos reconhecerem um objeto matemático nas suas diferentes representações semióticas, vamos nos aprofundar no estudo da conversão na teoria dos registros de representações semióticas.

Segundo Duval (2005), do ponto de vista matemático, a conversão não tem papel importante porque serve apenas como suporte para tratamentos feitos em outro registro e não pode ser usada como uma prova ou justificação, mas do ponto de vista cognitivo, é na conversão que se identifica se houve compreensão ou não do objeto estudado, e para analisar os processos de compreensão e de aprendizagem dentro de um sistema de representações semióticas, é importante levar em consideração que a conversão das representações é irredutível a um tratamento, independente dos registros utilizados, pois

> Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento. (DUVAL, 2005, p. 17)

Para Duval (2005), existem dois tipos de fenômenos que caracterizam uma conversão das representações, são elas: a) as variações de congruência e de não-congruência; b) a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Nas variações de congruência e de não-congruência, Duval (2009, 2012) classifica como congruentes quando existe a conversão entre duas representações de um mesmo objeto, ou seja, quando a passagem de uma representação a outra acontece espontaneamente e preenchem as seguintes condições:

> [...] correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada. (DUVAL, 2009. p.18).

Quando não há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, Duval (2012) observa um isolamento de registros de representação, ou seja, os alunos não reconhecem o mesmo objeto representado em sistemas semióticos diferentes. Isso quer dizer que não houve uma total compreensão do objeto estudado. Esta compreensão parcial, apenas de um registro de representação, faz com que o aluno fique limitado em seus conhecimentos referentes ao objeto de estudo, dificultando assim a aplicação destes conhecimentos em outras situações.

No outro fenômeno de conversão das representações, Duval (2005) aponta para a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão que acontece quando não existe conversão na inversão dos registros de partida e de chegada, ou seja, em um sentido existe a conversão de registros de representações semióticas e quando o processo contrário é invertido, a conversão não acontece. Segundo Duval (2005, p. 20), isso se dá porque “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido.”.

Duval (2005) também aponta para o aumento expressivo dos fracassos ou dos bloqueios dos alunos quando é preciso que aconteça uma mudança de registro ou uma mobilização simultânea de dois registros de representações, pois a compreensão matemática do objeto estudado acontece quando se tem a capacidade de reconhecer o objeto em suas diferentes representações, ou seja, quando se consegue mudar de registro. O autor ainda alerta para o cuidado de não confundir o objeto com as suas representações, pois "o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torne acessível" (DUVAL, 2005, p.21), porque para haver a compreensão do objeto estudado é necessário que haja mudança de registros e a mudança de registros não se restringe a somente mudar de modo de tratamento, mas de explicar as propriedades ou diferenças de um mesmo objeto, o que acaba por denotar-se que duas representações em dois registros diferentes de um mesmo objeto não têm o mesmo conteúdo. Logo, se o aluno consegue transitar entre dois registros de representação diferentes, nota-se que este aluno não confunde o conteúdo de uma representação com o objeto estudado e, portanto, houve compreensão matemática do objeto em questão.

Reconhecer um objeto matemático em suas múltiplas representações em diferentes registros de representação é, para Duval (2005, p. 23):

> [...] a condição fundamental para que um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema. Essa condição supõe que ele não identifica mais os objetos matemáticos com os conteúdos de certas representações.

Com base na teoria de Duval (2009), a tecnologia foi utilizada para desencadear o processo de conversão dos registros de representações semióticas (algébrica e geométrica) da circunferência no *software* GeoGebra.

2.2 Raciocínio generalizador

Em seus estudos, Tall (2004) apresenta três tipos distintos de desenvolvimento cognitivo relacionado ao pensamento matemático, os quais fazem parte da sua teoria dos Três Mundos da Matemática: "mundo conceitual corporificado", "mundo operacional simbólico" e "mundo formal axiomático".

Segundo Tall (2004), o primeiro mundo, chamado de “mundo conceitual corporificado”, está relacionado com as percepções e as ações que estão ligadas a objetos físicos que possam ser manipulados e depois representados como objetos mentais. Nesta etapa de desenvolvimento, a percepção, a visualização, a observação e a descrição demonstram o entendimento de propriedades dos objetos estudados relacionados aos conceitos matemáticos.

No segundo mundo, denominado “mundo operacional simbólico”, Tall (2004) descreve o mundo dos símbolos usados para o cálculo, em manipulações na aritmética e na álgebra e que representam as percepções e ações do mundo corporificado.

O último mundo, que Tall (2004) chamou de “mundo formal axiomático”, faz uso das corporificações e dos símbolos do segundo mundo, no qual é necessário formalizar o entendimento do objeto estudado. Ao formalizar, busca-se a especificação de suas propriedades bem como de suas relações, que exige um nível mais elevado de abstração e dos subprocessos da abstração: representação, generalização e síntese.

Para Tall (2004), o desenvolvimento do pensamento matemático vai do mundo conceitual ao mundo formal, ou seja, transita do pensamento matemático elementar ao pensamento matemático avançado, no qual cada indivíduo tem a sua trajetória e desenvolvimento individual ao percorrer os Três Mundos da Matemática, sendo o terceiro mundo o que mais exige dos alunos, pois é nele que se busca a formalização, a abstração e os processos que servem de base para a abstração: generalização, síntese e representação.

A abstração, segundo Dreyfus (1991), é acima de tudo um processo construtivo, que implica na construção de estruturas mentais de estruturas matemáticas, ou ainda, que implica na relação entre objetos matemáticos e suas respectivas propriedades.

Dreyfus (1991) entende que o processo de abstração está ligado ao processo de generalização, embora a natureza do processo mental de abstração seja diferente da natureza do processo mental da generalização, pois a “generalização geralmente envolve uma expansão da estrutura de conhecimento do indivíduo enquanto abstração é suscetível de acarretar uma reconstrução mental” (DREYFUS, 1991, p.

36, tradução nossa). O autor ainda comenta que, embora as exigências cognitivas no processo de generalização tenham aumentado bastante ao longo das décadas, o processo de abstração ainda requer uma demanda cognitiva maior por parte do aluno.

Tall (1991), ao usar os termos *generalização* e *abstração* na matemática, justifica que é para "denotar os processos em que os conceitos são vistos em um contexto mais amplo e também os produtos desses processos". (TALL, 1991. p. 11, tradução nossa). É preciso notar que estes dois termos são, na verdade, dois objetos mentais produzidos de acordo com os processos cognitivos envolvidos.

Quanto à generalização, Dreyfus (1991) define como uma derivação de um caso particular, na qual o objetivo é identificar pontos em comum para então expandir os domínios de validação e assim passar de casos particulares para um caso geral.

Existem tipos diferentes de generalizações que são diretamente proporcionais às atividades cognitivas envolvidas e classificadas, conforme Tall (1991), em:

- Generalização expansiva: é aquela na qual a estrutura cognitiva que já existe no aluno se estende, sem que se tenha uma mudança nas ideias atuais; recomenda-se este tipo de generalização quando se trabalha com uma classe mais ampla de aplicações sem grandes mudanças cognitivas.
- Generalização reconstrutiva: consiste em reconstruir a estrutura cognitiva existente.
- Generalização disjuntiva: nesta, não há associação das novas ideias com as velhas ideias, as novas ideias são vistas como uma coleção de informações somadas ao conhecimento atual, que não tem longa duração e, portanto, estas informações não são guardadas na mente do aluno.

Neste trabalho, foi explorado o processo de generalização a partir do uso de parâmetros na equação da circunferência, com o auxílio do dinamismo do *software* GeoGebra.

2.3 Tecnologias digitais na Educação Matemática

As tecnologias digitais estão cada vez mais inseridas em nosso dia a dia e nas pesquisas relacionadas com Educação Matemática no que se refere aos processos de ensino e de aprendizagem. Segundo um levantamento feito por Basso e Notare (2015) sobre os recursos digitais que possibilitam manipular objetos matemáticos, nota-se um crescimento considerável nos últimos anos de publicações em revistas e trabalhos apresentados sobre este tema, o que caracteriza o interesse por parte de pesquisadores e de professores na utilização das tecnologias digitais para pensar Matemática.

O Ministério da Educação e Cultura (MEC) sugere o uso das tecnologias digitais no documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (2006), em que aponta para o uso da tecnologia em sala de aula como um instrumento para subsidiar o processo de aprendizagem Matemática. Ainda neste documento, a tecnologia é apontada como uma ferramenta para entender a Matemática e a Matemática é uma ferramenta utilizada para entender a tecnologia, e ambas contemplam a formação escolar.

Para Basso e Notare (2015), a tecnologia deve ser utilizada em sala de aula para auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de pensar matematicamente sobre um problema, uma ideia ou um conceito, tornando-o assim um sujeito capaz de criar e pensar em Matemática. Desta forma, a tecnologia não substitui uma capacidade que o aluno pode desenvolver para pensar sobre um problema, analisar um processo, gerar uma prova ou uma experimentação.

Goldenberg (2000) também analisa a tecnologia como uma ferramenta para auxiliar a pensar em Matemática, independente da tecnologia que está sendo usada, e não para resolver um problema. Segundo o autor, ao proporcionar aos alunos o uso de tecnologias em sala de aula, proporciona-se também a possibilidade de o aluno ter novas visões sobre um problema, de desenvolver o raciocínio generalizador, de flexibilizar o pensamento e de construir modelos mentais. Ao desenvolver estas habilidades, os alunos terão condições de manipular mentalmente um objeto quando não tiverem acesso a uma tecnologia digital.

Pea (1987), em seus estudos, fala sobre as tecnologias cognitivas que auxiliam a pensar matematicamente, e define as tecnologias cognitivas como um meio que ajuda a ultrapassar os limites da mente em pensar, aprender e resolver problemas, sendo útil à investigação em Educação Matemática. Os computadores são classificados como forte tecnologia cognitiva para aprender a pensar matemática, mas quando usados para dar mais praticidade a uma atividade, para se chegar simplesmente à resposta de um problema ou na aplicação de algoritmos para serem feitos com mais agilidade, não são vistos como uma tecnologia cognitiva, ou seja, a tecnologia cognitiva desenvolve o pensamento matemático e o utiliza para resolver um problema e não como um fim em si.

A teoria de Pea (1987) leva em consideração que os computadores afetam as pessoas e as pessoas também afetam os computadores e procura responder questionamentos, como: o que se pode fazer hoje usando as tecnologias que antes não podia ser feito, ou não era prático fazer? O que de totalmente novo se pode fazer usando a tecnologia? Pea (1987) responde estas perguntas argumentando que antes das tecnologias, o que o aluno podia fazer em matemática era limitado ao meio estático do pensamento matemático com lápis e papel, e hoje com as tecnologias cognitivas, tem-se dinamismo e interação por meio de *softwares* que apresentam uma compreensão intuitiva das inter-relações entre representações geométricas e equacionais, possibilitando, assim, o desenvolvimento do pensamento matemático.

Indo ao encontro da teoria de Pea (1987), em seus estudos, Gravina e Basso (2012) pensam que a tecnologia digital dispõe de ferramentas que possibilitam exteriorizar, diversificar e ampliar os pensamentos, podendo assim os alunos criar “experimentos de pensamento”, como os autores intitulam. Estes “experimentos de pensamento” são feitos a partir das *ferramentasparapensamentos (toolforthoughts)* (SHAFFER e CLINTON, 2006) definida como uma expressão:

> [...] cunhada com o propósito de registrar uma visão que considera que sujeitos e artefatos tecnológicos podem se colocar em situação de simbiose, em processo mútuo de ação e reação. Ou seja, o artefato também tem o poder de agir sobre o sujeito, daí a expressão que funde as duas palavras. (GRAVINA e BASSO, 2012, p. 13)

Kaput (2004) também utilizou a expressão *ferramentaparapensamentos* para explicar a sua teoria, que aponta a tecnologia como uma “infraestrutura” no ensino de Matemática, em que, para o autor, a tecnologia torna-se uma infraestrutura de outras infraestruturas sob duas perspectivas: fenomenológica (a experiência das pessoas com a tecnologia) e externa (a mudança tecnológica ao longo do tempo). Kaput (2004) definiu *ferramentaparapensamentos* como um cruzamento entre um ciborgue, um ser humano e uma ferramenta.

Shaffer e Clinton (2006), que criaram a expressão *ferramentaparapensamentos*, fazem um apanhado geral sobre as culturas ao longo do tempo até chegarem à cultura atual e explicarem o significado da expressão *ferramentaparapensamentos*. Os autores mencionam uma cultura ecológica cognitiva que se dá por meio de um processo interativo ao longo do tempo e subdividido em ciclos, nesta ordem: cultura mimética, cultura mítica, cultura teórica e cultura do virtual. Cada cultura surgiu a partir de avanços cognitivos e do pensamento paradigmático em cada uma dessas fases, levando assim à criação de uma nova cultura cognitiva, ou seja, houve ciclos de desenvolvimento em que era preciso criar uma nova cultura conforme as necessidades e os desenvolvimentos atuais.

Cada ciclo tem características próprias e distintas. Segundo os mesmos autores, a primeira cultura foi a cultura mimética, que se deu por conta da representação em gestos físicos, criando a comunicação e interação social por meio de gestos. Na sequência, com os gestos sendo padronizados e tornando-se a base de símbolos, surgem as palavras, e desenvolve-se a linguagem, criando assim a cultura mítica. Com o desenvolvimento da escrita de símbolos, com as notações matemáticas, com os sistemas de representação estáticos, cria-se a cultura teórica. A última cultura citada, a cultura atual que ainda está em desenvolvimento, é a cultura virtual, que foi criada a partir da possibilidade de exteriorizar o processamento simbólico utilizando meios computacionais.

Conforme os autores, “[...] a mídia computacional está criando novas formas de atividade cognitiva e com ela uma nova cultura cognitiva”. (SHAFFER; CLINTON, 2006, p. 284, tradução nossa). Nesta nova cultura cognitiva, a cultura virtual, deixa-se de estudar o indivíduo, e apenas o indivíduo, para estudar o indivíduo interagindo com ferramentas. Na visão dos autores, a cultura virtual é epistemologicamente mais inclusiva que a cultura teórica, porque dispõe de ambientes interativos que possibilitam, por meio de ferramentas de representação, inúmeras maneiras de se chegar à compreensão e, portanto, resolução de um problema matemático, diferente da cultura teórica, na qual as ferramentas utilizadas são estáticas, como lápis e papel, e não permitem manipulação sem o processo de escrever/apagar/reescrever.

Nas atividades que foram propostas nesta pesquisa, um dos objetivos foi explorar as generalizações de sequências de circunferências que podem ser feitas por meio do GeoGebra, utilizando-o como uma *ferramentaparapensamentos*. Na cultura teórica, os alunos não teriam esta possibilidade de pensar Matemática utilizando ferramentas estáticas, como lápis e papel.

No ponto de vista ontológico dos autores, existe uma ligação entre pensamento e ferramentas, de forma que as ferramentas são externalizadores da concepção humana e os pensamentos são internalizadores das ações dos indivíduos com as ferramentas. Em outras palavras,

> Todos os pensamentos estão conectados às ferramentas, e todas as ferramentas estão ligadas aos pensamentos: toda vez que consideramos um pensamento (porque é uma internalização da ação com uma ferramenta) está indissoluvelmente ligado a uma ferramenta, e cada vez que consideramos uma ferramenta (porque é uma exteriorização de um pensamento) está indissociavelmente ligado com um pensamento. Neste ponto de vista, ferramentas não são distintas dos pensamentos; pelo contrário, a relação recíproca entre a ferramenta e o pensamento existe em ambos. Cada ferramenta contém pensamentos, e cada pensamento contém ferramentas. Também não existe um sem o outro. (SHAFFER; CLINTON, 2006, p. 290, tradução nossa)

Assim, os autores concluem que não há pensamento sem ferramentas e criam a expressão *ferramentaparapensamentos* (toolforthougths) para representar a relação recíproca entre ferramentas e pensamentos e diferenciam a expressão *ferramentaparapensamentos* (escrita junta) da expressão *ferramenta para pensamentos* (escrita separada) quando dizem que

> [...] algo é uma ferramenta para o pensamento (com palavras separadas), isto pode sugerir que o pensamento é a categoria mais ampla e que ferramentas são algo que ajudam as pessoas a pensar. Ou isso pode implicar que a ferramenta é o quadro mais amplo e as pessoas são agentes que usam ambos os pensamentos e artefatos físicos como ferramentas. Para evitar estas dificuldades, podemos conectar a ferramenta substantivos e pensamos em sugerir que *ferramentaparapensamentos* é o resultado de um processo de ferramentas existentes em uma relação recíproca com os pensamentos. (SHAFFER; CLINTON, 2006, p.291, tradução nossa)

Levando em consideração as recomendações dos documentos do MEC, dos pesquisadores citados acima, que afirmam que as tecnologias digitais auxiliam os alunos a pensar em Matemática, é que se faz uso do *software* matemático GeoGebra como uma *ferramentaparapensamentos* para analisar quais as contribuições deste recurso digital no estudo da circunferência utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados.

3 FERRAMENTA PARA PENSAR COM: GEOGEBRA

Segundo o documento do MEC (2006), *Orientações Curriculares para o Ensino Médio,* a escolha do programa é crucial para determinar a qualidade do aprendizado, pois é preciso conhecer as funcionalidades do programa e explorá-lo de modo a tirar o melhor proveito. O documento ainda deixa claro que o melhor programa é o que oferece a exploração de conceitos e ideias matemáticas.

Indo ao encontro deste documento do MEC (2006), Notare e Gravina (2013) em seus estudos, apontam que para ser fazer um bom uso de um *software* é necessário conhecê-lo e explorar o seu potencial semiótico, a fim de proporcionar ao aluno um entendimento global do objeto de estudo.

Neste sentido, foi escolhido o GeoGebra, que é um *software* de matemática dinâmica voltado para o ensino e a aprendizagem de Matemática. É um aplicativo de linguagem acessível e recomendado para todos os níveis de ensino. Também é um *software* gratuito e encontra-se para ser utilizado de duas maneiras: online e offline.

O Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro[1], que faz parte do IGI (International GeoGebra Institutes), cujo objetivo é interagir com profissionais interessados em utilizar o *software* como ferramenta de ensino aprendizagem, apresenta a seguinte definição para o GeoGebra:

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS. (2016).

[1] Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Acesso em 09 mai 2016.

Este *software* de matemática dinâmica tem uma interface fácil de ser compreendida pois, ao selecionar uma de suas ferramentas, aparece a descrição ao lado da sua funcionalidade, como mostra a Figura 1.

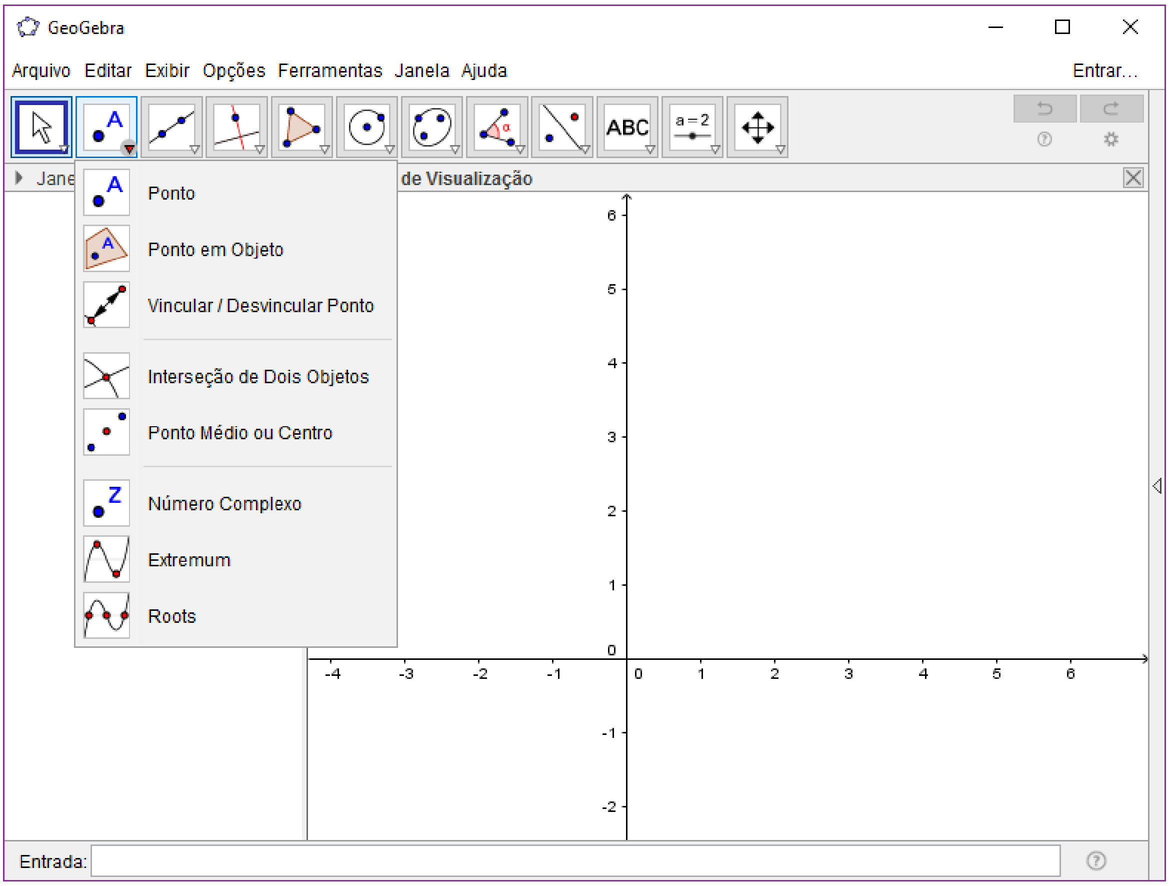


Figura 1 - Tela inicial do *software* GeoGebra. Fonte: Acervo pessoal.

Neste *software*, é possível interagir simultaneamente com duas representações semióticas de um objeto, como exemplificado na Figura 2, em que aparece na janela de álgebra a representação algébrica da equação da circunferência e na janela de visualização aparece a representação geométrica da circunferência, que corresponde a equação da janela ao lado.

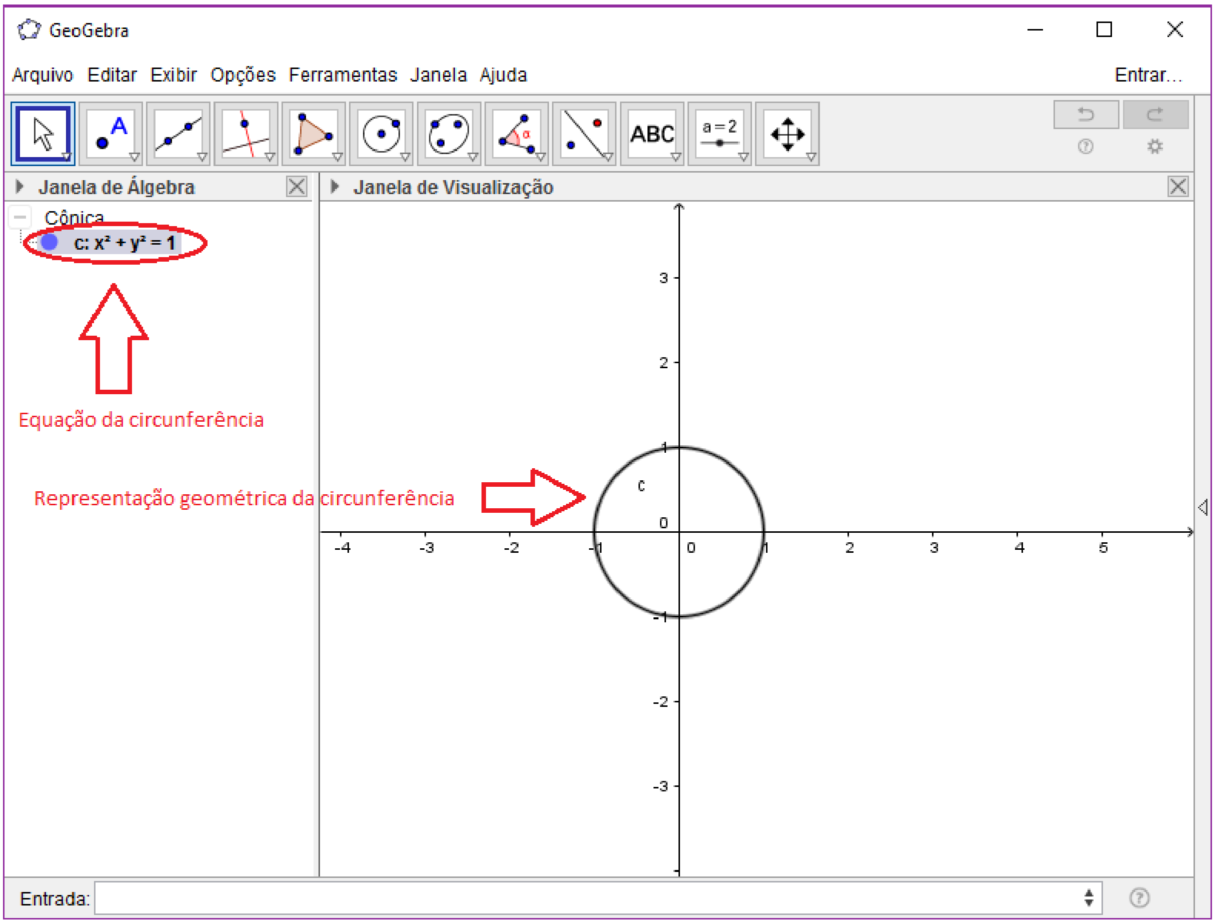


Figura 2 - Interação entre duas representações semióticas. Fonte: Acervo pessoal.

Com o intuito de explorar o potencial semiótico do comando sequência do *software* é que será explicado como se deu o uso dos parâmetros para provocar nos alunos raciocínios generalizadores.

3.1 Utilizando Parâmetros no GeoGebra

A utilização de parâmetros nos *softwares* matemáticos vem sendo estudado por Notare e Gravina (2013) e Notare et al. (2015), ao explorarem o potencial semiótico de um *software* matemático.

Segundo Notare e Gravina (2013, p. 13), “a utilização do potencial de um *software* depende muito do entendimento que se tem das representações semióticas que nele se tem a disposição”, ou seja, quanto mais se conhece as ferramentas disponíveis no *software* e suas funcionalidades, mais tem-se a oportunidade de explorar seus potenciais semióticos em suas diferentes representações.

O objetivo de utilizar parâmetros na representação de um objeto matemático é poder generalizar um padrão que se repete, podendo assim, estimular a compreensão de maneira global do objeto estudado, pois

> O trabalho com parâmetros exige dos alunos uma compreensão mais global das relações matemáticas e seus coeficientes, uma vez que os alunos precisam trabalhar, simultaneamente, com os registros algébrico e gráfico e controlar estes parâmetros no registro algébrico para obter o efeito gráfico desejado no registro gráfico. (NOTARE et al., 2015, p.12)

Neste sentido, foi explorado o potencial semiótico do GeoGebra com o comando *sequência*, no qual se utilizou parâmetros da equação da circunferência para, a partir de uma equação, criar a representação geométrica de uma família de circunferências, provocando nos alunos o desenvolvimento de um raciocínio generalizador.

Para compreender o funcionamento do comando *sequência*, faz-se necessário o entendimento dos significados matemáticos através do conjunto de relações entre signos e seus significados que serão utilizados.

Na equação da circunferência, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, tem-se o conjunto de signos {a, b, r^2, x, y, - , =}, as letras a, b e r (são os parâmetros da equação), x e y (são as variáveis), nas relações entre signos e significados, neste caso temos (x, y) sendo um par ordenado como um ponto qualquer na circunferência; (a, b) o par ordenado que representa o centro da circunferência e *r* a medida do raio da circunferência, na qual a representação algébrica $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ apresenta uma circunferência que pode ser mostrada geometricamente no plano cartesiano. Para exemplificar o uso do comando *sequência*, criar-se-á uma família de quatro circunferências tangentes externas, na horizontal, de mesmo raio. Para tanto, estipular-se-á que todas as ordenadas do centro das circunferências (representadas pelo signo b) serão iguais e será atribuído o valor 1, assim como os raios de todas as circunferências (representados pelo signo r) serão iguais e será atribuído o valor 2.

Para construir a família de circunferências, no campo de entrada do GeoGebra, digita-se sequência e escolhe-se a opção ilustrada na Figura 3.

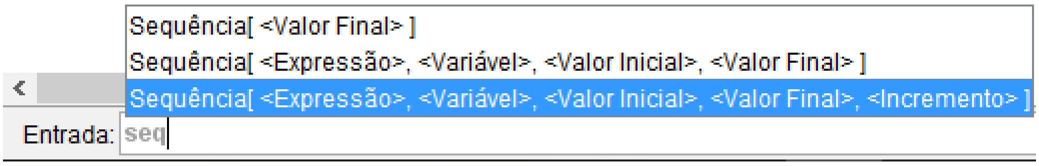


Figura 3 - Sintaxe do comando sequência. Fonte: Acervo pessoal.

Em *Expressão*, digita-se a equação da circunferência que será criada;

Em *Variável*, digita-se a variável que deve mudar seu valor para gerar a sequência de circunferências;

Em *Valor Inicial*, digita-se o valor inicial que a *Variável* deve assumir;

Em *Valor Final*, digita-se o valor final que a *Variável* deve assumir;

Em *Incremento*, digita-se o valor que a *Variável* deve propagar.

Logo, aplicando os valores do exemplo, o campo entrada ficará como o ilustrado na Figura 4.

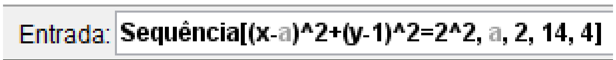


Figura 4 - Sintaxe do comando sequência com os seus respectivos valores. Fonte: Acervo pessoal.

Nesse caso, tem-se primeiramente a equação da circunferência com a ordenada do centro e o raio definidos, e a abscissa do centro sendo a variável *a*; na sequência estipular-se-á quem será a variável, no caso *a*; vindo seguido dos valores inicial e final que esta variável irá assumir, ou seja, a primeira circunferência terá abscissa do centro igual a 2 e a última circunferência terá abscissa do centro igual a 14. Para garantir que estas circunferências sejam tangentes externas, as abcissas dos centros das circunferências formarão uma progressão aritmética de razão 4, pois sendo o raio das circunferências igual a 2, logo o diâmetro será 4 e, portanto, tem-se o incremento igual a 4, garantindo assim que todas as circunferências sejam tangentes externas.

Depois de digitada a sequência da Figura 4, o GeoGebra gera, na janela de álgebra, uma lista com todas as equações das circunferências criadas a partir da generalização do comando *sequência* e, simultaneamente, na janela de visualização, a representação geométrica desta família de circunferências, como mostra a Figura 5.

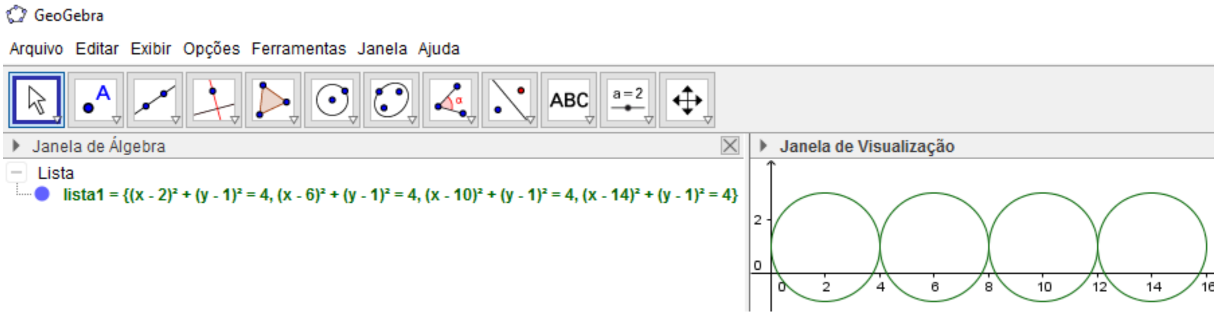


Figura 5 - Representações algébrica e geométrica a partir do comando *sequência*. Fonte: Acervo pessoal.

Com o comando *sequência,* pode-se criar uma família de circunferências girando em torno de um ponto. Como exemplo, será construída uma família de seis circunferências equidistantes em torno de um ponto, de modo que poderá escolher-se quantas ficarão visíveis através do controle deslizante.

Para iniciar, criar-se-ão os controles deslizantes i e k, conforme Figura 6.

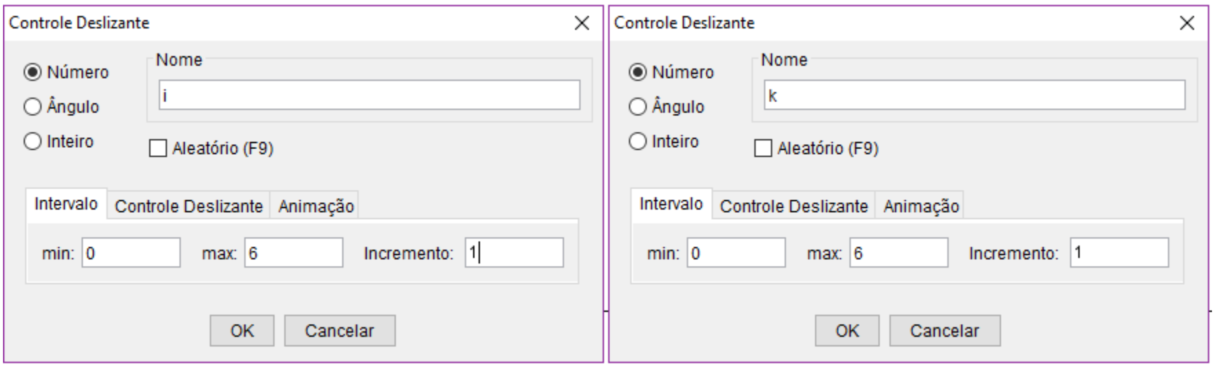


Figura 6 - Criação dos controles deslizantes. Fonte: Acervo pessoal.

O controle deslizante i tem a função de manter as circunferências equidistantes. O controle deslizante k, por sua vez, tem a função de determinar o número de circunferências. Assim, conforme o intervalo especificado na Figura 6, tem-se o número de circunferências variando entre o mínimo (zero) e o máximo (seis).

Precisar-se-á criar dois pontos aleatórios, A e B, conforme Figura 7.

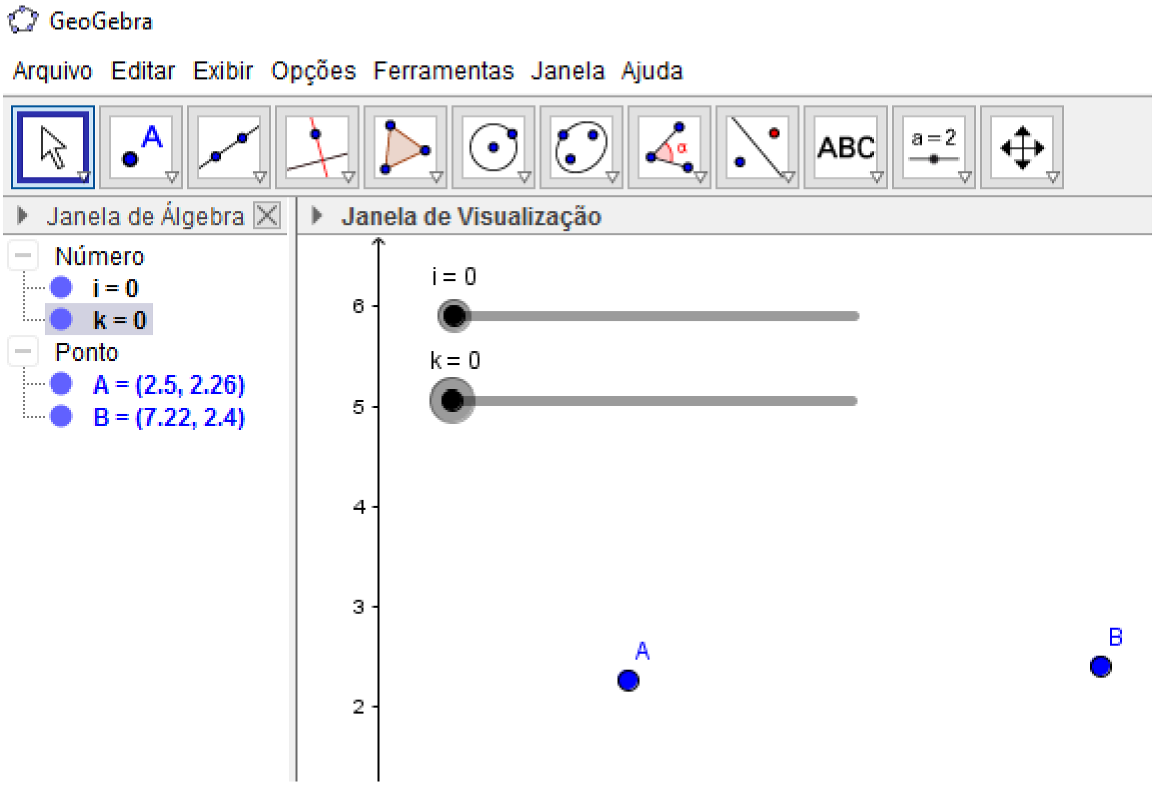


Figura 7 - Criação de dois pontos aleatórios A e B. Fonte: Acervo pessoal.

O ponto *A* será o ponto no qual as circunferências irão girar em torno. O ponto *B* será o centro de uma das circunferências.

Para criar a família de circunferências em torno do ponto *A*, digitar no campo de entrada o comando *sequência*, conforme Figura 8.

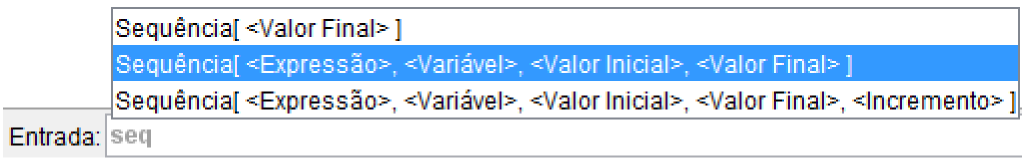


Figura 8 - Comando sequência. Fonte: Acervo pessoal.

Em *Expressão*, digitar *Girar* e escolher a opção conforme Figura 9.

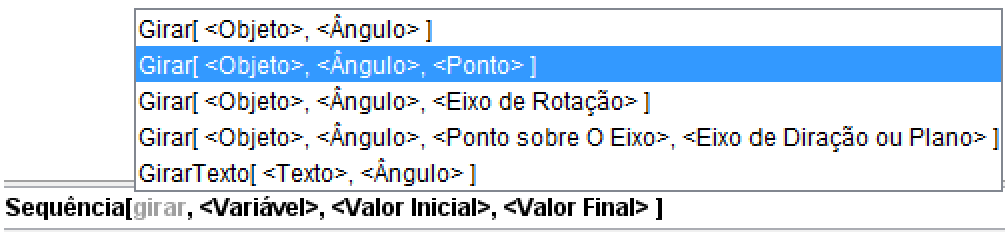


Figura 9 - Comando *sequência*, expressão: *girar*. Fonte: Acervo pessoal.

Desta forma, ficar-se-á com a seguinte entrada para digitar os valores e variáveis (Figura 10).

Entrada: **Sequência[Girar[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>], <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]**

Figura 10 - Comando *sequência* pronto para receber os valores e variáveis. Fonte: Acervo pessoal.

Assim, em *Objeto*, digitar a equação da circunferência com centro no ponto *B* que dará origem à família de circunferências, ou seja, $\left(x - x(B)\right)^2 + \left(y - y(B)\right)^2 = 1$.

Em *Ângulo*, digitar i *360º / k*, ou seja, o controle deslizante i faz com que todas as circunferências permaneçam equidistantes, independente de quantas sejam, já o controle deslizante k determina o número de circunferências em torno de ponto *A*.

Em *Ponto*, digitar *A*, pois é o ponto de base para a criação das circunferências.

Em *Variável*, digitar i, o controle deslizante.

Em *Valor Inicial*, digitar *0* (zero), ou seja, representará nenhuma circunferência.

Em *Valor Final*, digitar k, o controle deslizante, que representa o número máximo de circunferências que serão criadas em torno do ponto *A.*

Teremos a seguinte tela, conforme Figura 11.

Entrada: **Sequência[Girar[(x-x(B))^2+(y-y(B))^2=1, i 360° /k, A], i, 0, k]**

Figura 11 - Comando *sequência* com todos os signos digitados. Fonte: Acervo pessoal.

Ao dar-se *enter*, o GeoGebra retorna com uma lista de circunferências na janela de álgebra, como mostra a Figura 12.

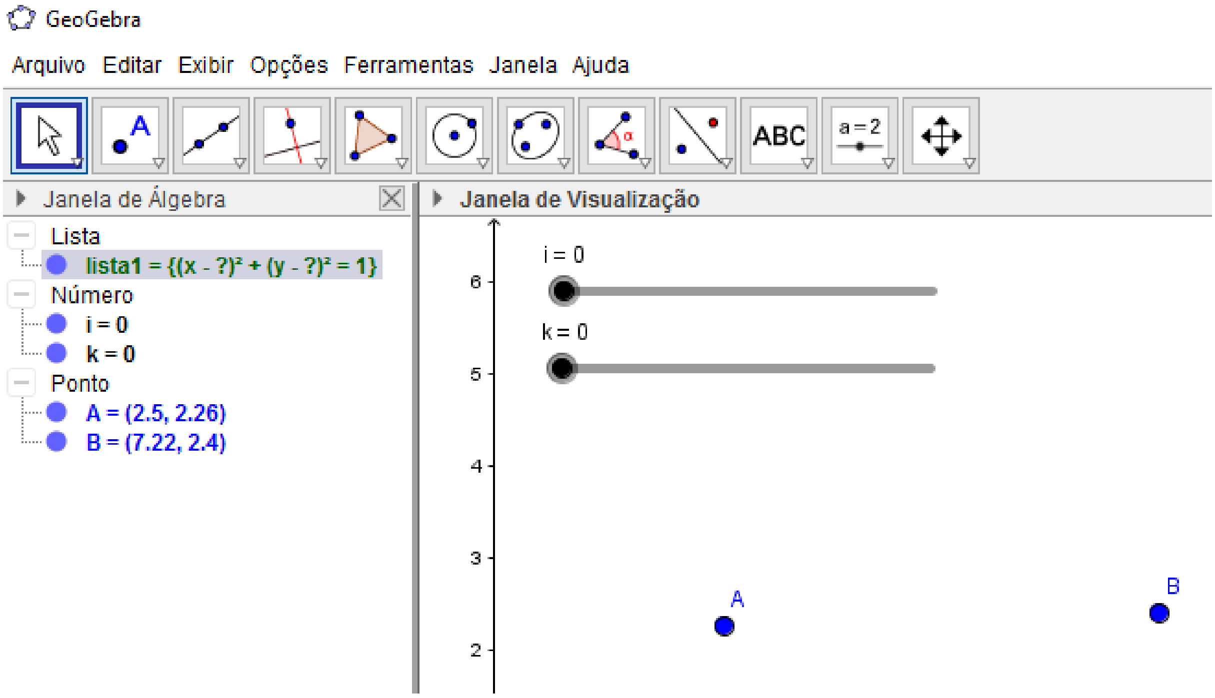


Figura 12 - Lista1 criada a partir do comando sequência. Fonte: Acervo pessoal.

Na Figura 12, o centro da circunferência da lista1 não está definido porque o controle deslizante k está igual a zero, e a função do controle deslizante k é determinar o número de circunferências criadas, logo, com $k = 0$, não se tem nenhuma circunferência.

Quando se movimenta o controle deslizante k, altera-se o número de circunferências em torno do ponto *A*, conforme ilustra a Figura 13.

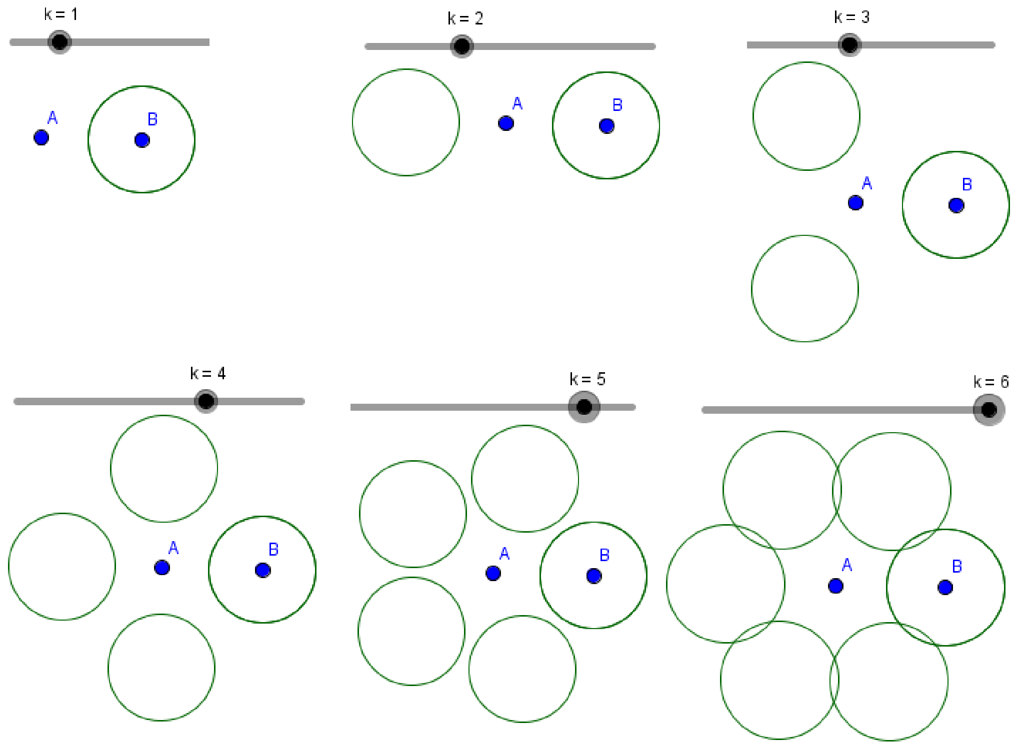


Figura 13 - Controle deslizante *k* determinando o número de circunferências. Fonte: Acervo pessoal.

Com os exemplos dados, podem-se criar famílias de circunferências conforme a posição relativa que irão assumir ou em torno de um ponto ou até mesmo de uma circunferência.

3.2 A Inspiração para esta pesquisa

Para trabalhar a ideia de generalização no GeoGebra, foi necessário ir em busca de materiais que abordassem esse tema.

No *website* oficial do GeoGebra[2], existem inúmeros materiais, de vários segmentos da Matemática. Porém, o que veio ao encontro ao que estava sendo procurado foi o trabalho publicado por John Golden (2012).

[2] Disponível em: https://www.geogebra.org.

John Golden[3] é PhD em Matemática pela Universidade Estadual da Pensilvânia e atualmente é membro do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Grand Valley, em Michigan.

Golden tem um blog, Math Hombre[4], onde compartilha jogos sobre matemática, construções feitas no GeoGebra, ideias para aulas e para a formação de professores.

Os trabalhos feitos por Golden no GeoGebra, além de compartilhados no seu blog, também estão disponíveis no GeoGebraTube[5], *website* do GeoGebra destinado à publicação de materiais construídos no GeoGebra.

O material de Golden, que serviu de inspiração para esta pesquisa, chamado de Multiplying 3 Factors[6] (Multiplicando 3 Fatores), tem como objetivo visualizar a multiplicação de três números naturais compreendidos entre os números 1 (um) e 30 (trinta). A construção no GeoGebra proposta por Golden explora a visualização, de forma geométrica, da multiplicação de três números naturais. Para tanto, o autor utilizou a generalização para reproduzir famílias de circunferências e de polígonos. Foi esta possibilidade de generalização proporcionada pelo *software* que se buscou aprofundar nesta pesquisa.

No trabalho de Golden, os três números que são multiplicados são representados no GeoGebra pelos controles deslizantes. Aqui, dar-se-á o nome dos controles deslizantes para um melhor entendimento da descrição de cada um, assim o controle deslizante localizado à esquerda será o (1), o controle deslizante central será o (2) e o controle deslizante à direita será o (3).

O controle deslizante (1) representa o número de circunferências que serão criadas girando em torno de um ponto, conforme Figura 14.

---

[3] Informações sobre John Golden foram retiradas dos *websites*: http://faculty.gvsu.edu/goldenj/, https://about.me/goldenj e http://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/Blog/Sadie_s-Circles/.

[4] Disponível em: http://mathhombre.blogspot.com.br/.

[5] Os trabalhos de Golden, feitos no GeoGebra, estão disponíveis em: https://www.geogebra.org/goldenj.

[6] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/mng3fSTb.

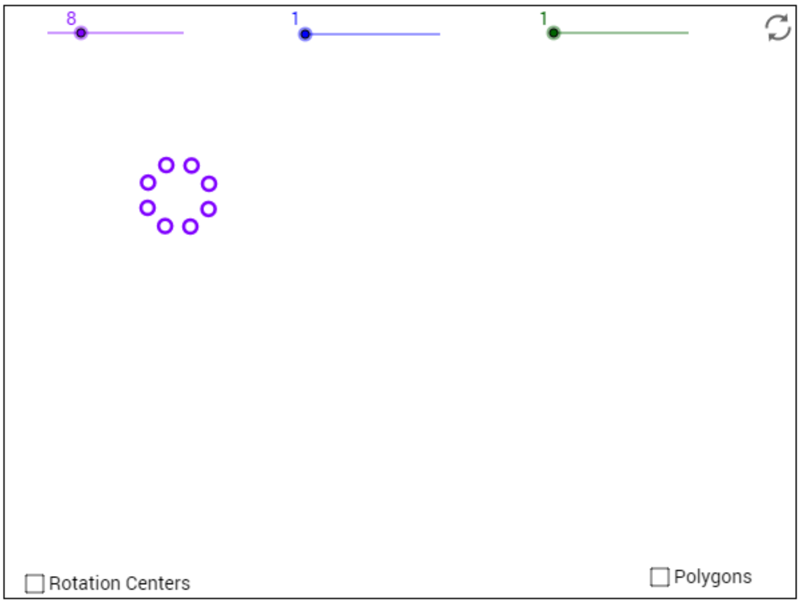


Figura 14 - Circunferências formadas a partir do primeiro controle deslizante. Fonte: Golden, 2012.

No caso da Figura 14, tem-se o controle deslizante (1) igual ao número oito, logo se tem oito circunferências. Quando se seleciona a opção *Rotation Centers*, disponível na tela do GeoGebra, consegue-se visualizar o ponto no qual as circunferências estão girando em torno (Figura 15).

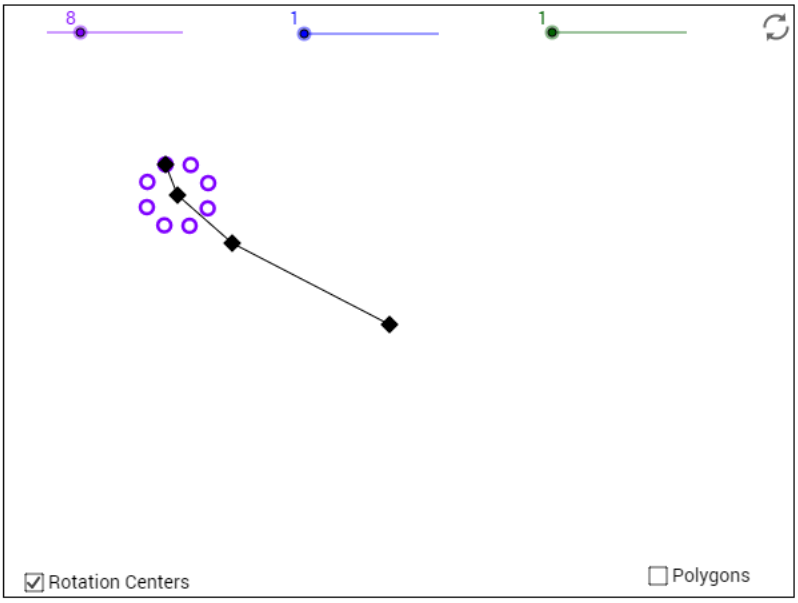


Figura 15 - Circunferências em torno de um ponto. Fonte: Golden, 2012.

Quando se seleciona a opção *Polygons,* na tela do GeoGebra, aparece um polígono (a) cujos vértices são os centros das circunferências, como ilustra a Figura 16.

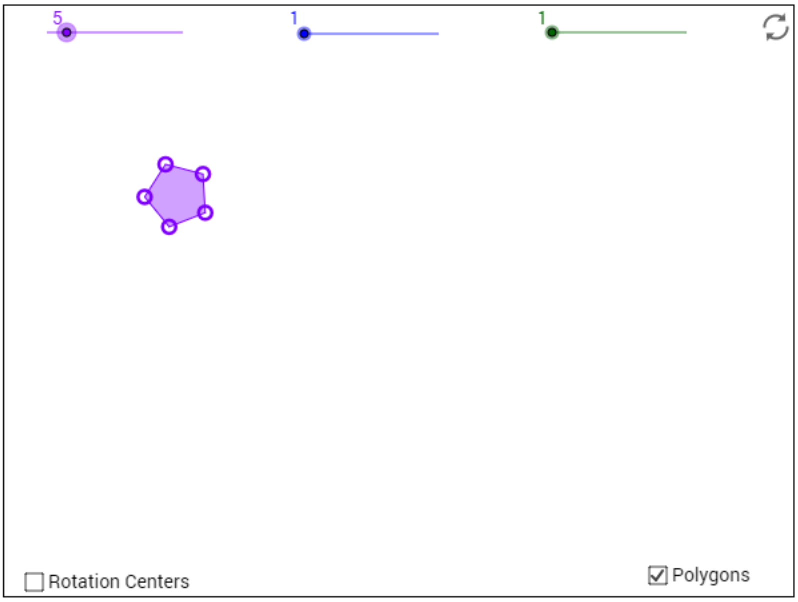


Figura 16 - Centros das circunferências formando um polígono. Fonte: Golden, 2012.

Ao movimentar o controle deslizante (2), o polígono (a) se repete e a quantidade é determinada pelo controle deslizante (2). Os centros destes polígonos que foram repetidos passam a ser os vértices de um novo polígono (b), como na Figura 17.

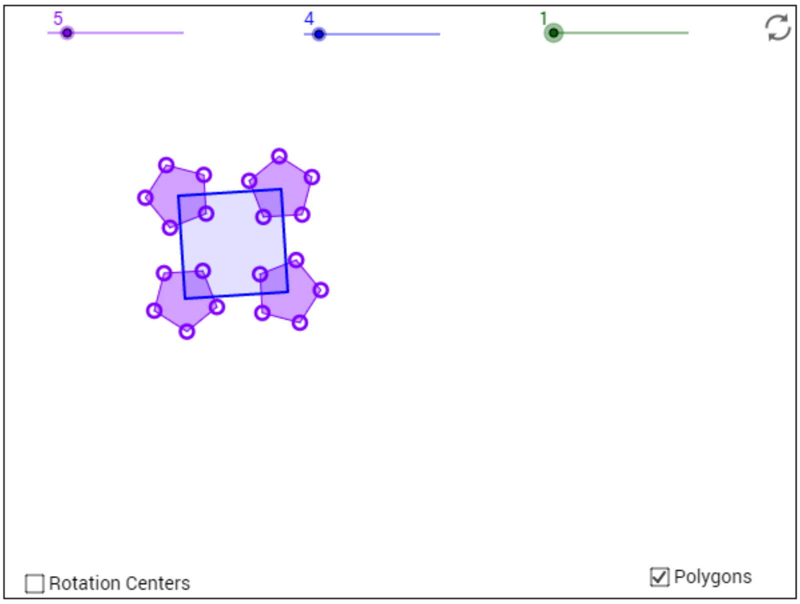


Figura 17 - Novo polígono formado pelos centros dos polígonos (a). Fonte: Golden, 2012.

Ao se movimentar o controle deslizante (3), a imagem formada pelos polígonos (a) e (b) são geradas conforme o número que for escolhido para o controle deslizante (3), formando um novo polígono (c) cujos vértices são os centros dos polígonos (b), como mostra a Figura 18.

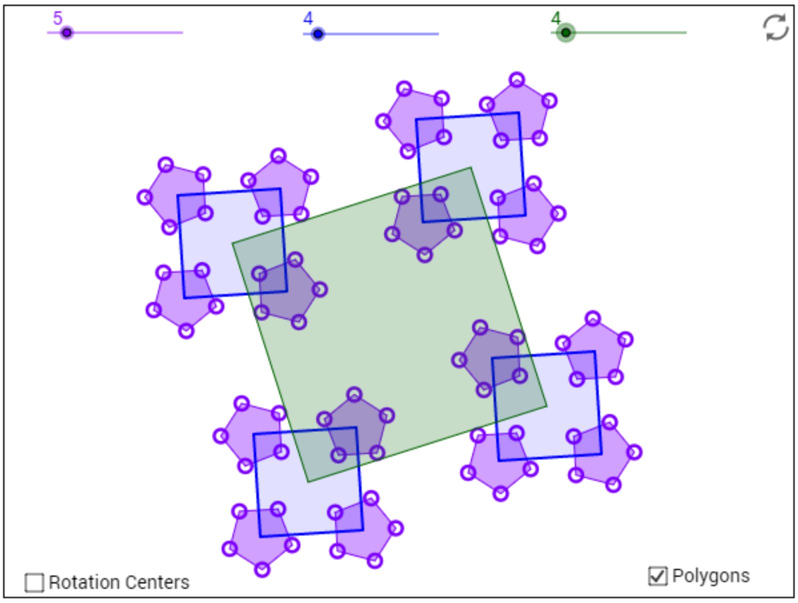


Figura 18 - Centros dos polígonos (b) formando o polígono (c). Fonte: Golden, 2012.

Desta forma, quando multiplica-se os números que foram definidos para os controles deslizantes, tem-se como resultado desta multiplicação o número de circunferências que aparecem na janela de visualização do GeoGebra, ou seja, $5x4x4 = 80$, conforme a Figura 18.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa consistiu em uma investigação sobre a utilização do GeoGebra e suas contribuições no estudo da Geometria Analítica, em específico, no estudo da circunferência, fazendo uso de parâmetros para provocar nos alunos raciocínio generalizador, no qual procurou-se responder: **Quais são as contribuições do GeoGebra no estudo da Geometria Analítica, em específico da circunferência, utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio?**

As atividades práticas deste trabalho foram aplicadas no Colégio Luterano Concórdia, uma escola particular da região metropolitana de Porto Alegre, do município de São Leopoldo, em que a pesquisadora deste trabalho é professora de Matemática do Ensino Médio desde 2011.

O colégio está situado no bairro São João Batista, próximo a BR-116, o que o torna de fácil acesso para os alunos moradores do município e para os que veem dos municípios vizinhos. O colégio possui espaços interno e externo amplos e suas instalações estão no mesmo campus do Seminário e juntos recebem o nome de Centro Educacional Concórdia. Ambas as instituições são mantidas pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil (IELB).

A filosofia do colégio fundamenta-se nos princípios cristãos e atende a Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e oferece cursos técnicos em Informática, Administração e Logística. Para os níveis da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, o colégio adota a coleção de livros didáticos da Editora Positivo como livro base.

A turma em que se desenvolveu a pesquisa é a única turma do 3º ano do Ensino Médio da escola e foi escolhida para o desenvolvimento deste trabalho por já ter estudado o conteúdo de Geometria Analítica, pois o estudo da circunferência era pré-requisito para a aplicação das atividades que foram propostas. No início da pesquisa, a turma contava com dezessete alunos e, no decorrer da pesquisa, chegaram mais dois alunos novos nesta turma. Apesar de serem poucos alunos, a turma era agitada e conversava bastante durante as aulas. Os alunos da turma eram de classe média e classe média alta, tinham acesso à informação e a recursos tecnológicos e gostavam de atividades propostas em aula que envolvessem tecnologia.

A coleta de dados se deu por meio de questionamentos sobre as atividades que estavam sendo trabalhadas no GeoGebra, registros escritos feitos pelos alunos, observações da professora/pesquisadora e arquivos do GeoGebra produzidos pelos alunos.

A metodologia utilizada para esta pesquisa foi o Estudo de Caso e teve como referência os estudos de Ponte (2006). Foi escolhida por se tratar de uma investigação em Educação Matemática que tem como propósito estudar uma situação específica e que, segundo Ponte (2006), o objetivo da investigação num estudo de caso é entender e compreender o "como" e os "porquês" de uma entidade que pode ser uma pessoa, instituição, disciplina na área da educação ou de outra área de conhecimento.

> [...] os estudos de caso *não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população*. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias. *O seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa.* (PONTE, 2006, p.16)

Segundo Ponte (2006), um estudo de caso pode ser classificado de acordo com a sua história e seu contexto e pode funcionar como:

- um exemplo pela "positiva", exibindo e compreendendo um caso exemplar;

- um exemplo pela "negativa", como um contraexemplo que nega o que era dado como certo;

- um caso "raro", no qual o objetivo a ser estudado é raro e pode-se explorá-lo e conhecê-lo melhor;

- um caso "neutro", que não é positivo nem negativo e que se escolhe para uma análise mais detalhada;

- um estudo de casos múltiplos, em que são feitos diversos estudos de casos e são comparados para conhecer melhor a diversidade das realidades.

Ponte (2006) acredita que os estudos de casos podem ter alguns propósitos bem específicos, como: ser exploratório e servir para obter informações preliminares; ser descritivo e relatar como é o caso estudado; e ser analítico construindo ou desenvolvendo uma nova teoria ou então confrontar com uma que já existe. O estudo de caso tem algumas características, como: ser uma investigação de natureza empírica, basear-se em trabalho de campo ou em análise documental, ter cunho descritivo e não ser experimental e os resultados podem ser feitos através de textos escritos, comunicações orais ou registro em vídeos.

Para Ponte (2006), o estudo de caso pode seguir uma perspectiva interpretativa, em que se observa o mundo do ponto de vista dos participantes; ou seguir uma perspectiva pragmática, na qual se proporciona uma perspectiva global do objeto de estudo do ponto de vista do investigador. Em ambas, o conhecimento produzido é do tipo particularístico, ou seja, se procura encontrar algo universal no mais particular.

Ponte (2006) afirma que o estudo de caso pode ter uma orientação teórica que serve de suporte à formulação das questões e da seleção dos instrumentos de coleta de dados e, ainda, auxilia na análise dos resultados. Alguns exemplos de tipos de estudos de casos em Educação Matemática referentes à sua orientação teórica, são: etnográficos, históricos, psicológicos e sociólogos.

Ponte (2006) aponta em seus estudos que a perspectiva interpretativa é, sobretudo, uma orientação teórica que se apoia em duas correntes: na fenomenologia, cujo objetivo é compreender o sentido dos acontecimentos e interações das pessoas, e no interacionismo simbólico, no qual a experiência humana é medida pela interpretação, os sentidos são produzidos da interação social entre os seres humanos e são modificados conforme os símbolos que vão encontrando no seu cotidiano.

Desta forma, levando em consideração as informações relevantes que compõem a metodologia do Estudo de Caso descrita por Ponte (2006), e que esta pesquisa é classificada como um caso pela “positiva” em que se busca experimentar, explorar e compreender um comando novo para os alunos, do *software* GeoGebra, foram aplicadas as atividades a seguir apresentadas.

4.1 Atividades Planejadas

Para o desenvolvimento destas atividades, foi criado um *website*[7]. A tela inicial do *website* está ilustrada na Figura 19.

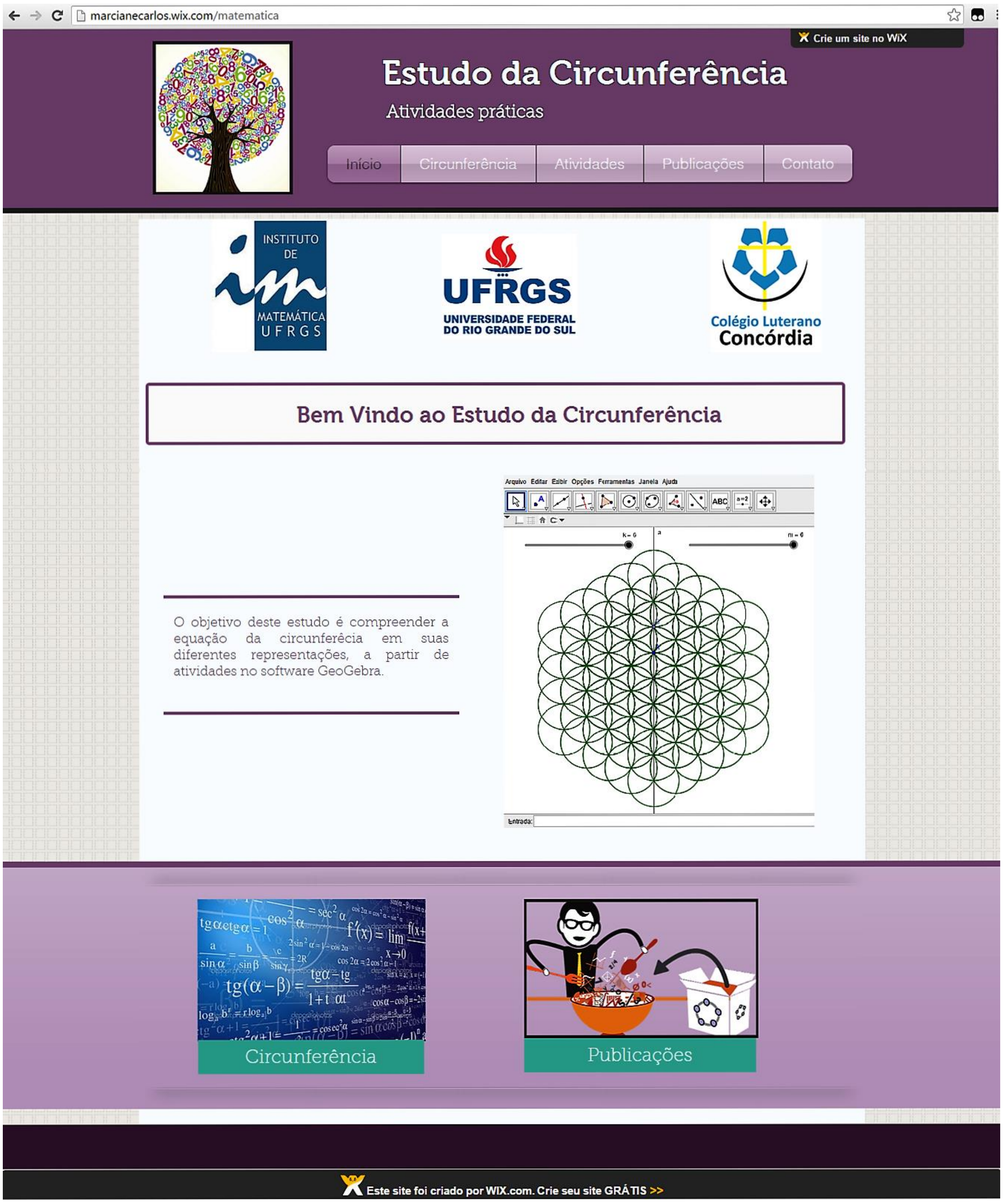


Figura 19 - Página inicial do *website*. Fonte: Acervo pessoal.

[7] *Website* disponível em: http://marcianecarlos.wix.com/matematica.

Este *website* contém uma breve explicação sobre o estudo da circunferência, uma sequência das atividades propostas e a publicação dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos.

Na tela inicial, temos uma pequena descrição do objetivo geral do *website*. Na parte superior do *website*, temos cinco abas:

- Início – retorna para a página inicial, ilustrada na Figura 19;
- Circunferência – explica brevemente alguns conceitos sobre o estudo da circunferência, ilustrada na Figura 20;
- Atividades – apresenta um submenu com as dez atividades que serão descritas na sequência;
- Publicações – apresenta o produto final produzido pelos alunos;
- Contato – formulário disponível para fazer contato com a professora pesquisadora.

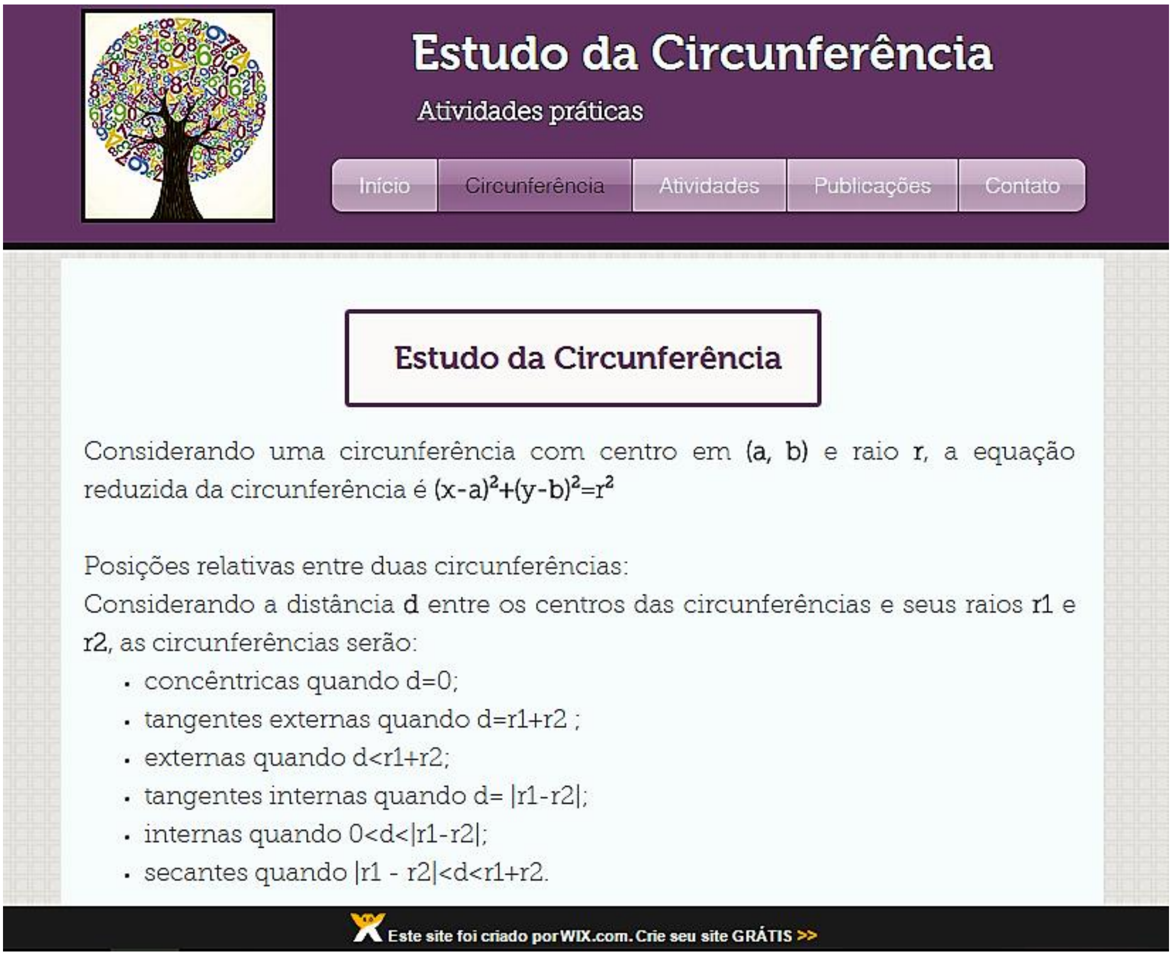


Figura 20 - Aba: Estudo da Circunferência. Fonte: Acervo pessoal.

Na sequência, serão apresentadas as dez atividades propostas no *website*.

4.1.1 Atividade 1

A atividade 1, subdividida em três itens, tinha por objetivo recordar noções básicas do GeoGebra, como inserir ponto, criar uma circunferência pelo Campo de Entrada e utilizar o controle deslizante, conforme ilustra a Figura 21.

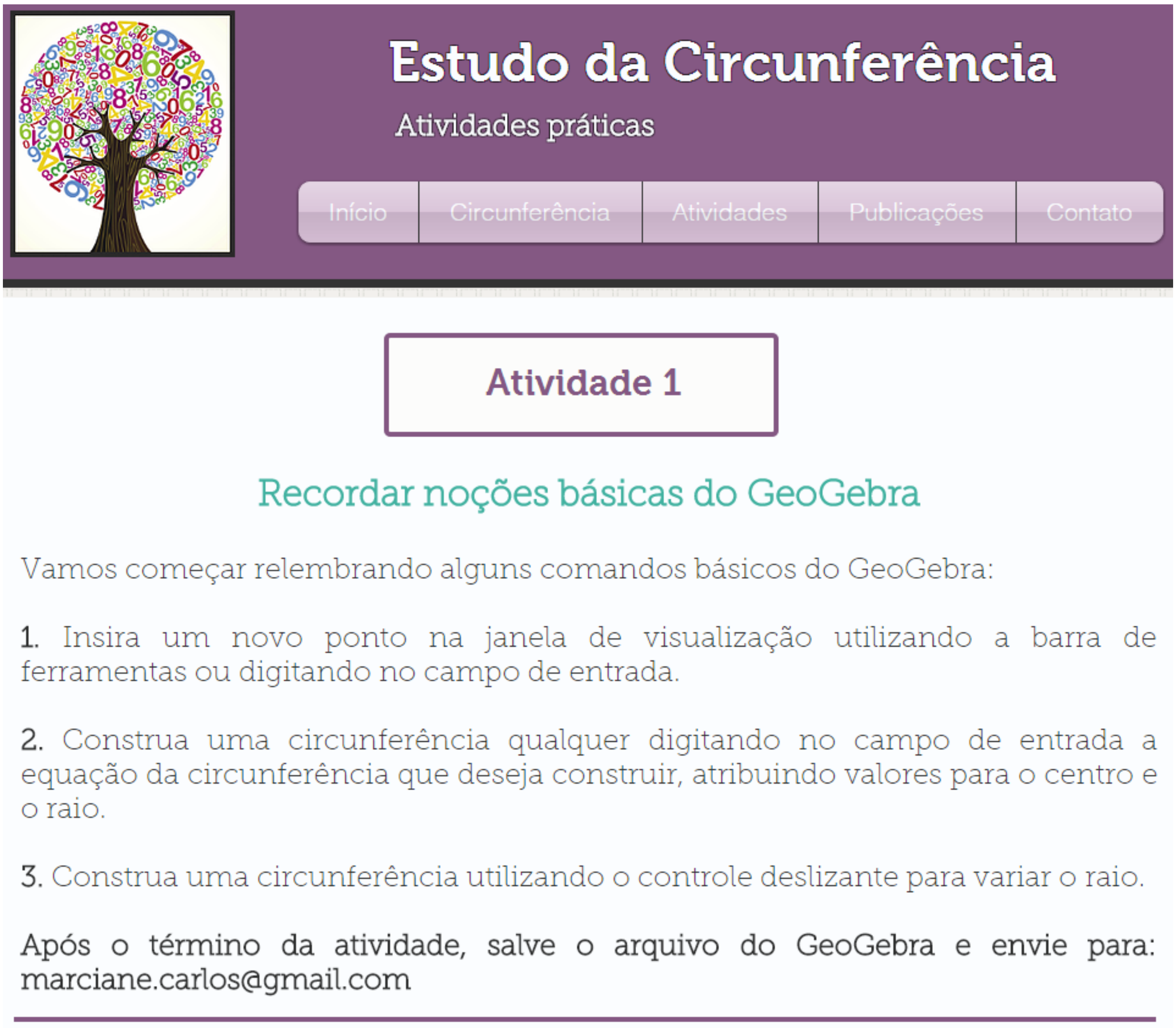
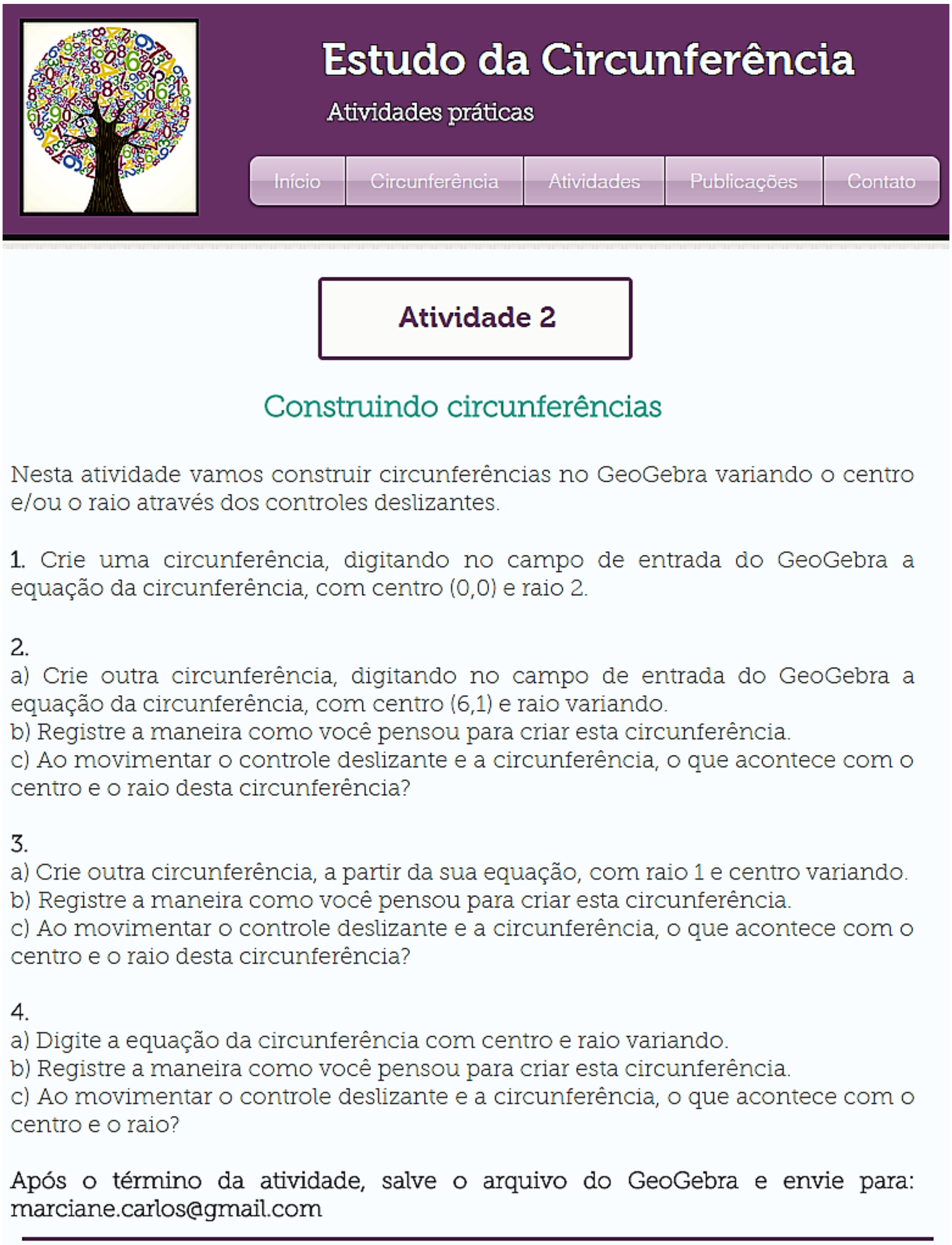


Figura 21 - Atividade 1 disponível no *website*. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.2 Atividade 2

A atividade 2 tratava da construção de circunferências variando o centro e/ou o raio por meio dos controles deslizantes (Figura 22).



Estudo da Circunferência

Atividades práticas

Início | Circunferência | Atividades | Publicações | Contato

Atividade 2

Construindo circunferências

Nesta atividade vamos construir circunferências no GeoGebra variando o centro e/ou o raio através dos controles deslizantes.

1. Crie uma circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (0,0) e raio 2.

2.
a) Crie outra circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (6,1) e raio variando.
b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.
c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

3.
a) Crie outra circunferência, a partir da sua equação, com raio 1 e centro variando.
b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.
c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

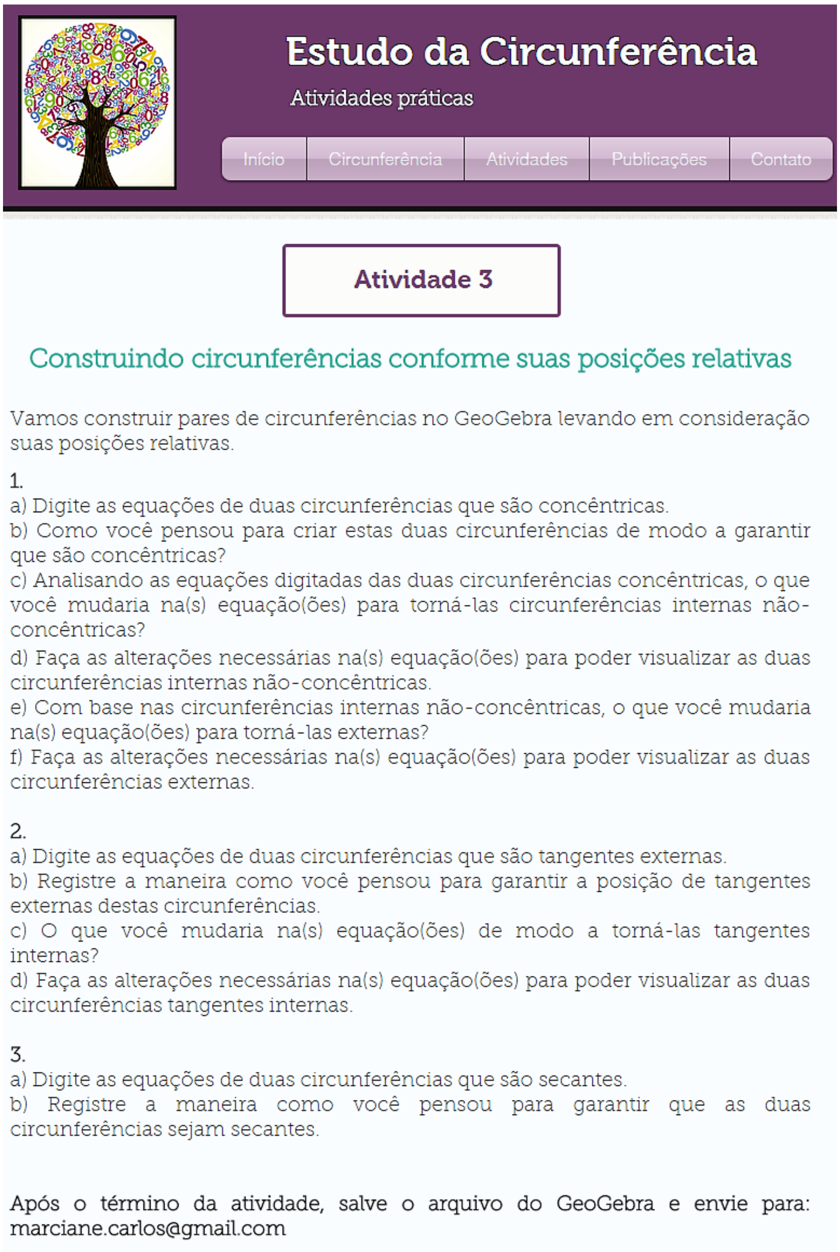
4.
a) Digite a equação da circunferência com centro e raio variando.
b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.
c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio?

Após o término da atividade, salve o arquivo do GeoGebra e envie para: marciane.carlos@gmail.com

Figura 22 - Atividade 2. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.3 Atividade 3

A atividade 3 (Figura 23) teve como objetivo construir circunferências a partir de suas posições relativas (concêntricas, internas não-concêntricas, externas, tangentes externas), com o intuito de provocar a compreensão sobre os papéis das coordenadas do centro e da medida do raio na equação e suas relações com o registro gráfico.


Estudo da Circunferência

Atividades práticas

Início | Circunferência | Atividades | Publicações | Contato

Atividade 3

Construindo circunferências conforme suas posições relativas

Vamos construir pares de circunferências no GeoGebra levando em consideração suas posições relativas.

1.
a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.
b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?
c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?
d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.
e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?
f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

2.
a) Digite as equações de duas circunferências que são tangentes externas.
b) Registre a maneira como você pensou para garantir a posição de tangentes externas destas circunferências.
c) O que você mudaria na(s) equação(ões) de modo a torná-las tangentes internas?
d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências tangentes internas.

3.
a) Digite as equações de duas circunferências que são secantes.
b) Registre a maneira como você pensou para garantir que as duas circunferências sejam secantes.

Após o término da atividade, salve o arquivo do GeoGebra e envie para: marciane.carlos@gmail.com

Figura 23 - Atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.4 Atividade 4

As atividades 4 e 5 foram realizadas pelos alunos no mesmo dia.

A atividade 4 (Figura 24) consistia em criar uma família de circunferências secantes com centros equidistantes na horizontal utilizando o comando sequência, dando início ao trabalho com o raciocínio generalizador.

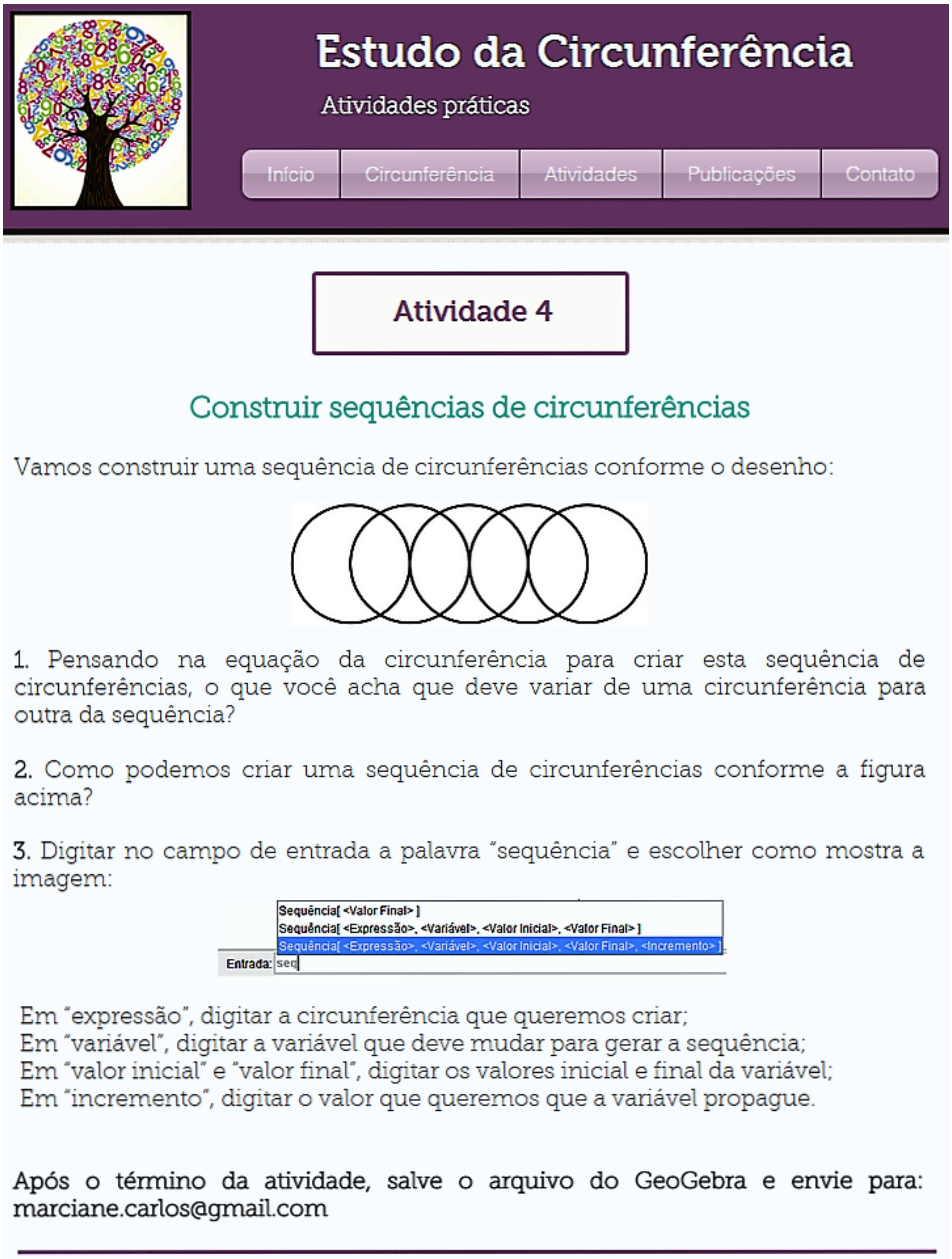
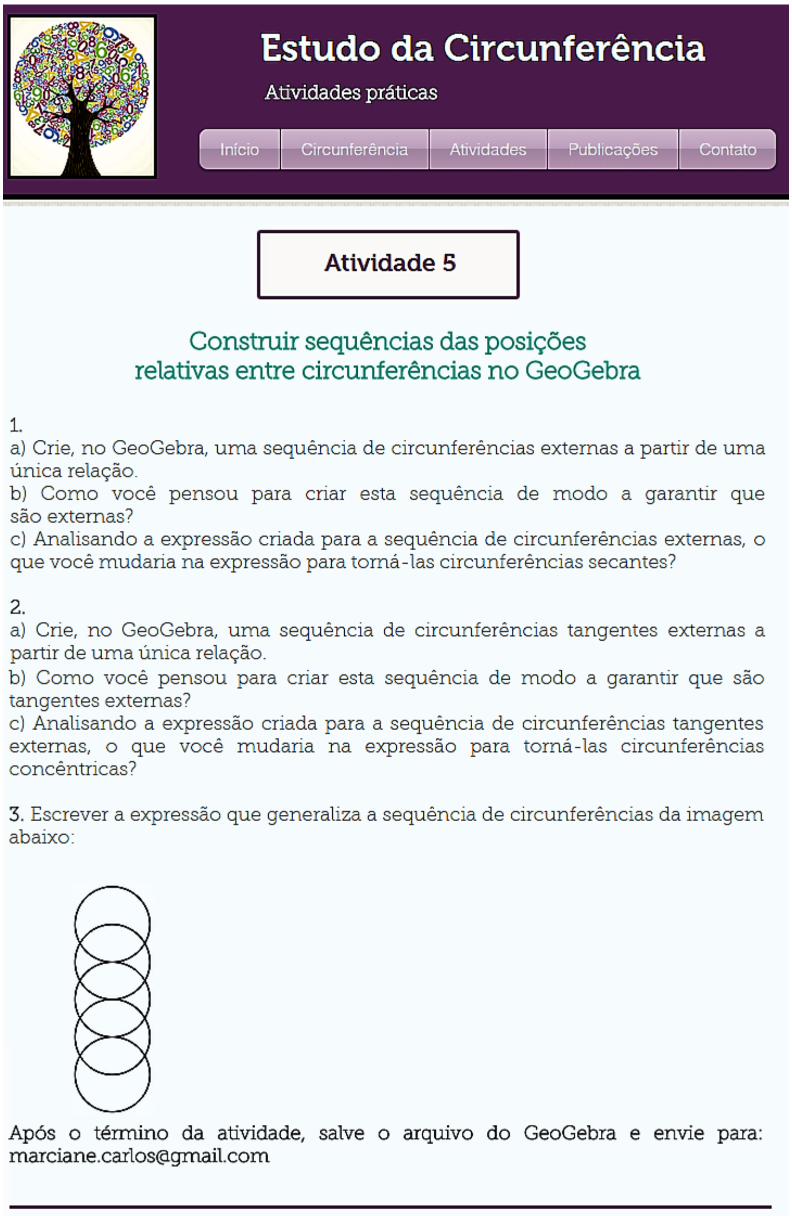


Figura 24 - Atividade 4. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.5 Atividade 5

Nesta atividade (Figura 25), os alunos primeiramente deveriam criar uma sequência de circunferências externas a partir de uma única relação e, em seguida, transformar esta sequência de circunferências externas em secantes. Depois, deveriam criar uma sequência de circunferências tangentes externas e logo transformá-las em circunferências concêntricas. No final da atividade, os alunos deveriam reproduzir a imagem dada com uma única relação.


Estudo da Circunferência

Atividades práticas

Início | Circunferência | Atividades | Publicações | Contato

Atividade 5

Construir sequências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra

1.
a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências externas a partir de uma única relação.
b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são externas?
c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências secantes?

2.
a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências tangentes externas a partir de uma única relação.
b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são tangentes externas?
c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências tangentes externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências concêntricas?

3. Escrever a expressão que generaliza a sequência de circunferências da imagem abaixo:

Após o término da atividade, salve o arquivo do GeoGebra e envie para: marciane.carlos@gmail.com

Figura 25 - Atividade 5. Fonte: Acervo pessoal.

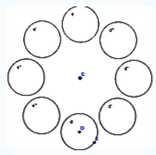
4.1.6 Atividade 6

Na atividade 6, foi solicitado aos alunos que construíssem circunferências que giravam em torno de um ponto (Figura 26), depois em torno de uma circunferência, primeiro uma a uma para entender o processo de criação, depois generalizando.

Atividade 6

Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência

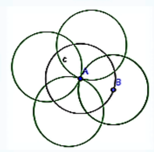
Vamos criar uma sequência de circunferências que giram primeiramente em torno de um ponto e depois em torno de uma circunferência. Em um primeiro momento criaremos as circunferências uma a uma e, em um segundo momento, criaremos várias através de uma expressão.



1.
a) Construir um ponto qualquer e uma circunferência qualquer. Queremos que esta circunferência rotacione/gire em torno do ponto por um ângulo de 45°. Para tanto, selecionamos o comando "rotação em torno de um ponto" localizado na barra de ferramentas no nono ícone e depois selecionamos o ponto, a circunferência e o ângulo que queremos que a circunferência rotacione/gire em torno do ponto.

b) Continuar rotacionando circunferências em torno do ponto até chegar na circunferência onde começou a rotação.

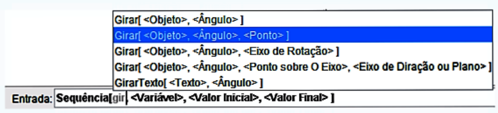
2. Vamos construir sequências de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência, para tanto:



a) Determinar uma circunferência de centro definido e marcar um ponto sobre a circunferência.

b) Criar controles deslizantes para duas variáveis: "i", que representa a distribuição equidistante das circunferências em torno de um ponto e "k", que presenta a quantidade de circunferências que serão criadas.

c) Usar o comando "girar". Após digitar sequência no campo de entrada, em "expressão", digite "girar" e selecione: "[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]", como mostra a imagem:



O objeto a ser girado será uma circunferência criada com base no ponto sobre a circunferência. Exemplo: Ponto B sobre a circunferência de centro A. Em "ângulo", digitar "i 360°/k".

Figura 26 - Atividade 6. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.7 Atividade 7

Na atividade 7 (Figura 27), o objetivo era reproduzir a *semente da vida*, mostrada a partir de um vídeo disponível no *website* e em um arquivo do GeoGebra. Os alunos precisavam utilizar as ideias exploradas no item 2 da atividade 6, ou seja, a construção de uma sequência de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência. Ao movimentar o controle deslizante *k* (Figura 27), que determina a quantidade de circunferências criadas em torno do centro de uma circunferência, teremos a sequência mostrada na Figura 28.

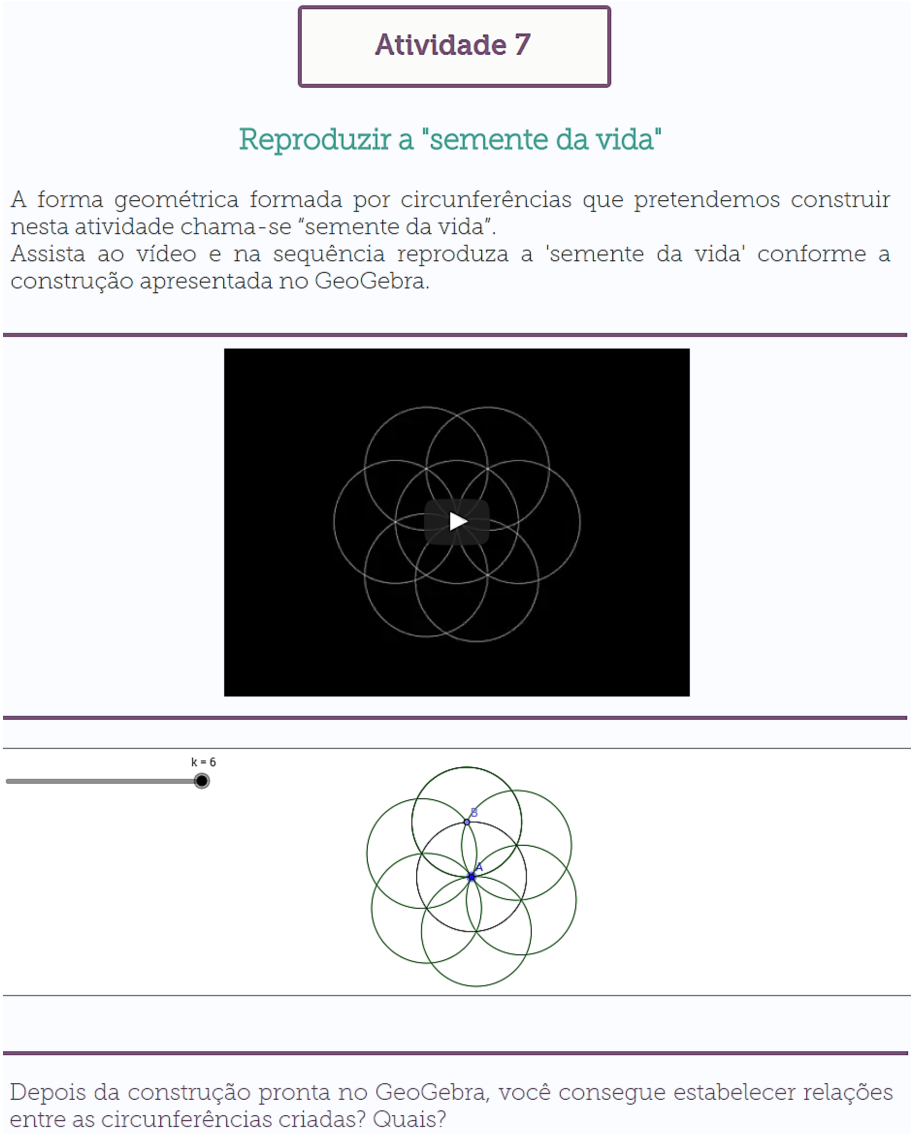


Figura 27 - Atividade 7. Fonte: Acervo pessoal.

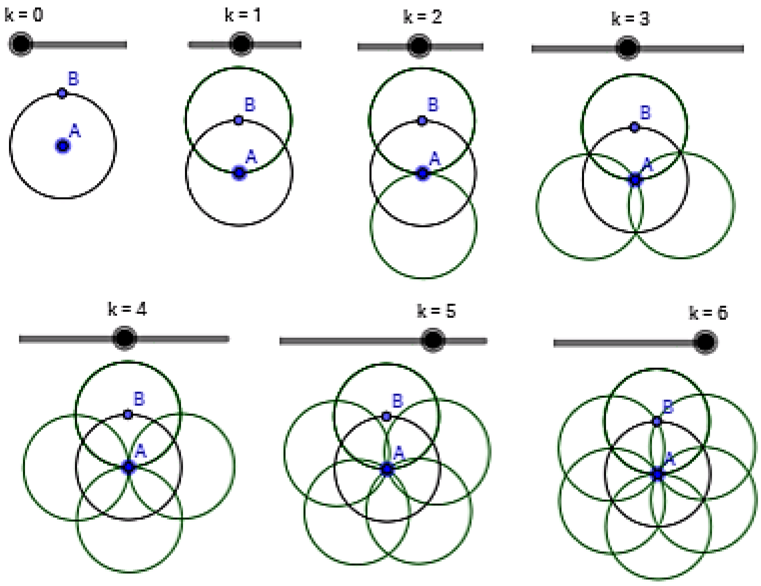


Figura 28 - *Semente da vida* com o controle deslizante variando de 0 a 6. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.8 Atividade 8

As atividades 8 e 9 foram trabalhadas na mesma aula e consistiam em produzir mais uma etapa da *flor da vida*. Para replicar o início da *flor da vida* na atividade 8 (Figura 29), foi disponibilizada uma construção no GeoGebra e solicitado aos alunos a construção e o estabelecimento de relações entre as circunferências criadas.

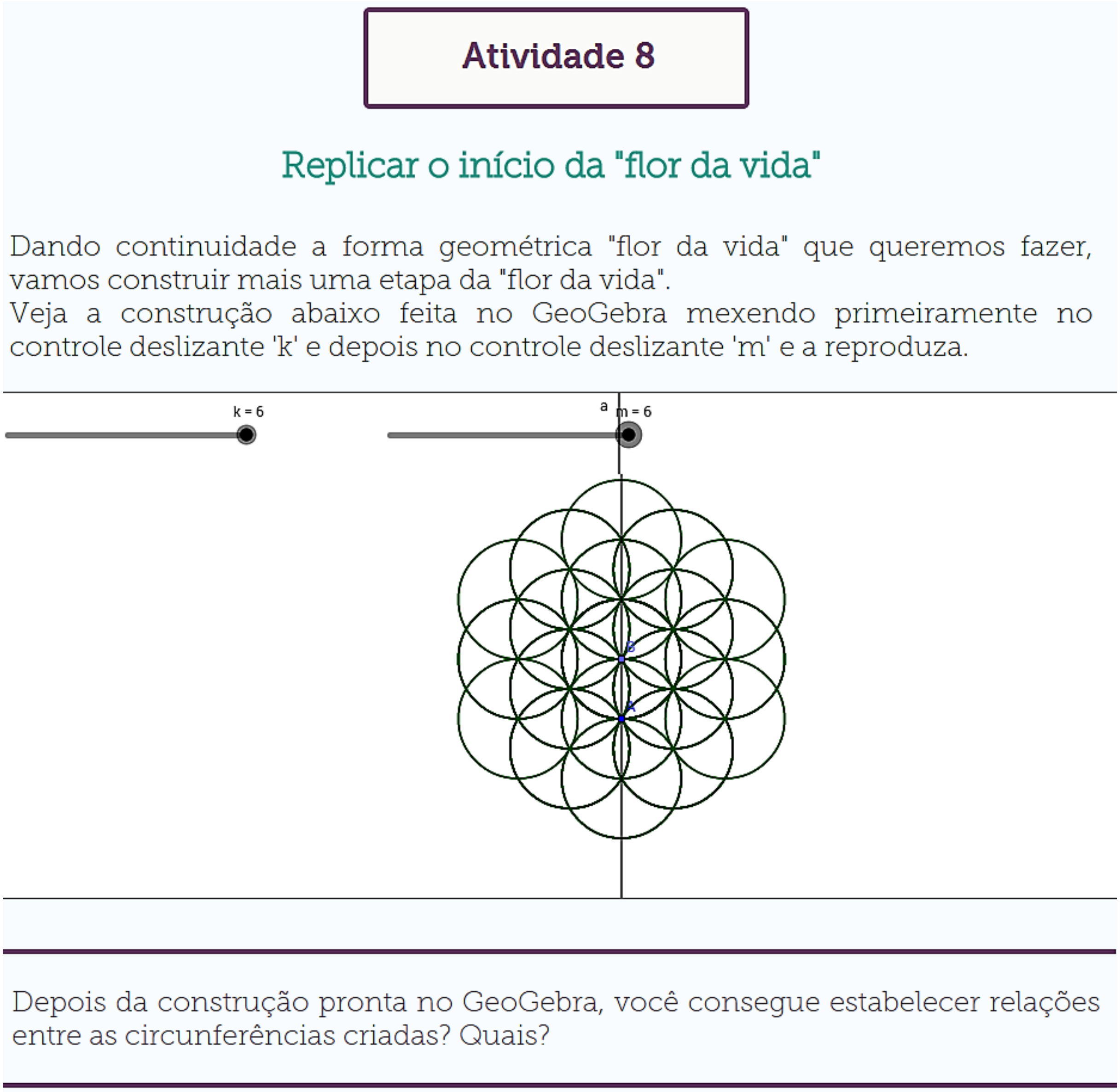


Figura 29 - Atividade 8. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.9 Atividade 9

A atividade 9 consistia na finalização da construção da *flor da vida*. Para tanto, foi solicitado que os alunos observassem a construção feita no GeoGebra, movimentando primeiramente o controle deslizante *k* que cria circunferências em torno do centro de uma circunferência (como na Figura 27), depois o controle deslizante *m* que cria outra camada de circunferências em torno das circunferências já criadas (Figura 29), e por fim o controle deslizante *n* que cria mais uma e última camada de circunferências (Figura 30), e assim reproduzissem a sequência de circunferências e estabelecessem relações entre as circunferências criadas.

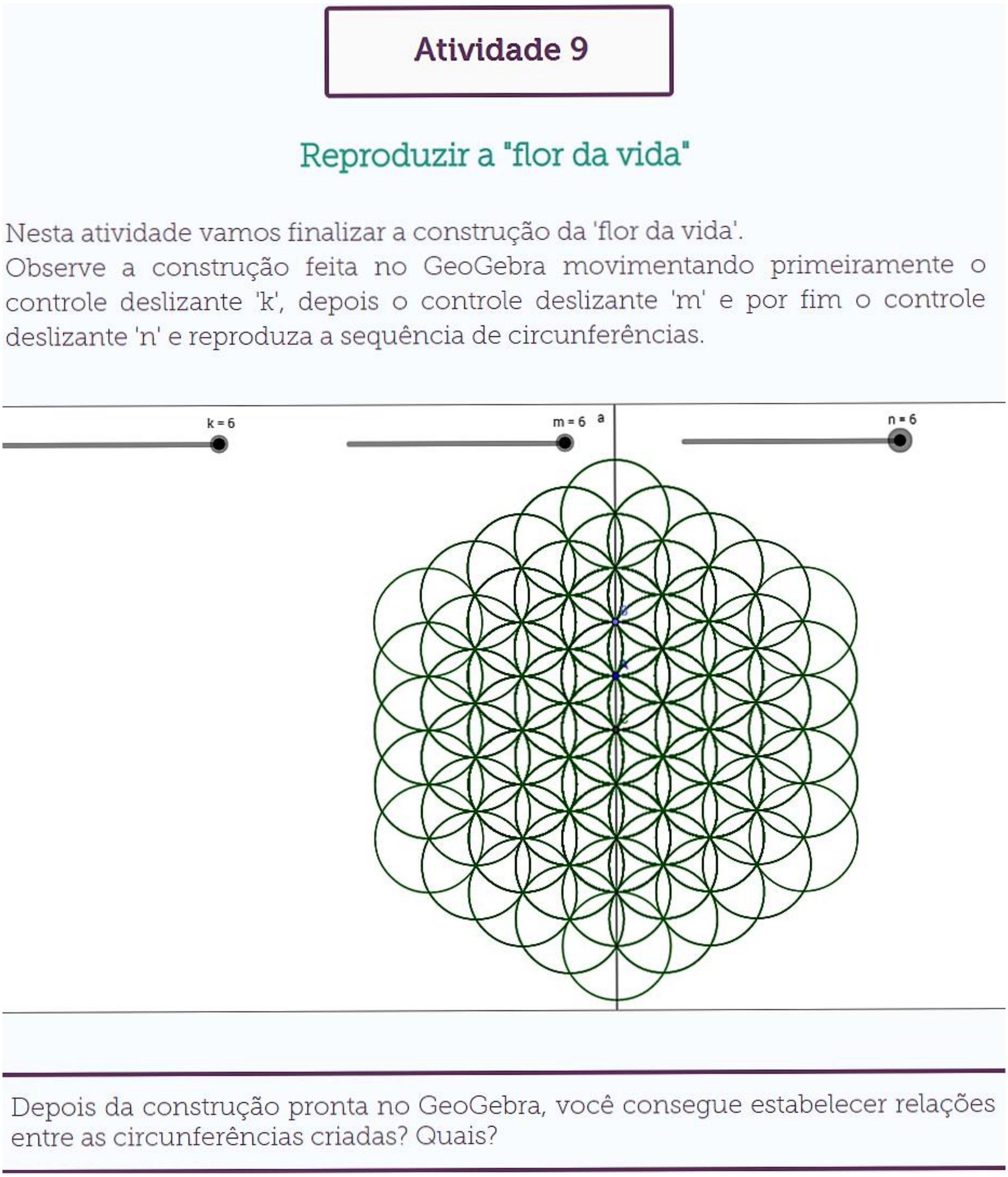


Figura 30 - Atividade 9. Fonte: Acervo pessoal.

4.1.10 Atividade 10

A atividade 10 (Figura 31) tinha como objetivo escolher uma imagem com várias circunferências e construí-la utilizando o menor número possível de comandos e o comando *sequência* para generalizar. Os alunos ainda deveriam criar um roteiro dos passos utilizados para reproduzir a imagem escolhida.

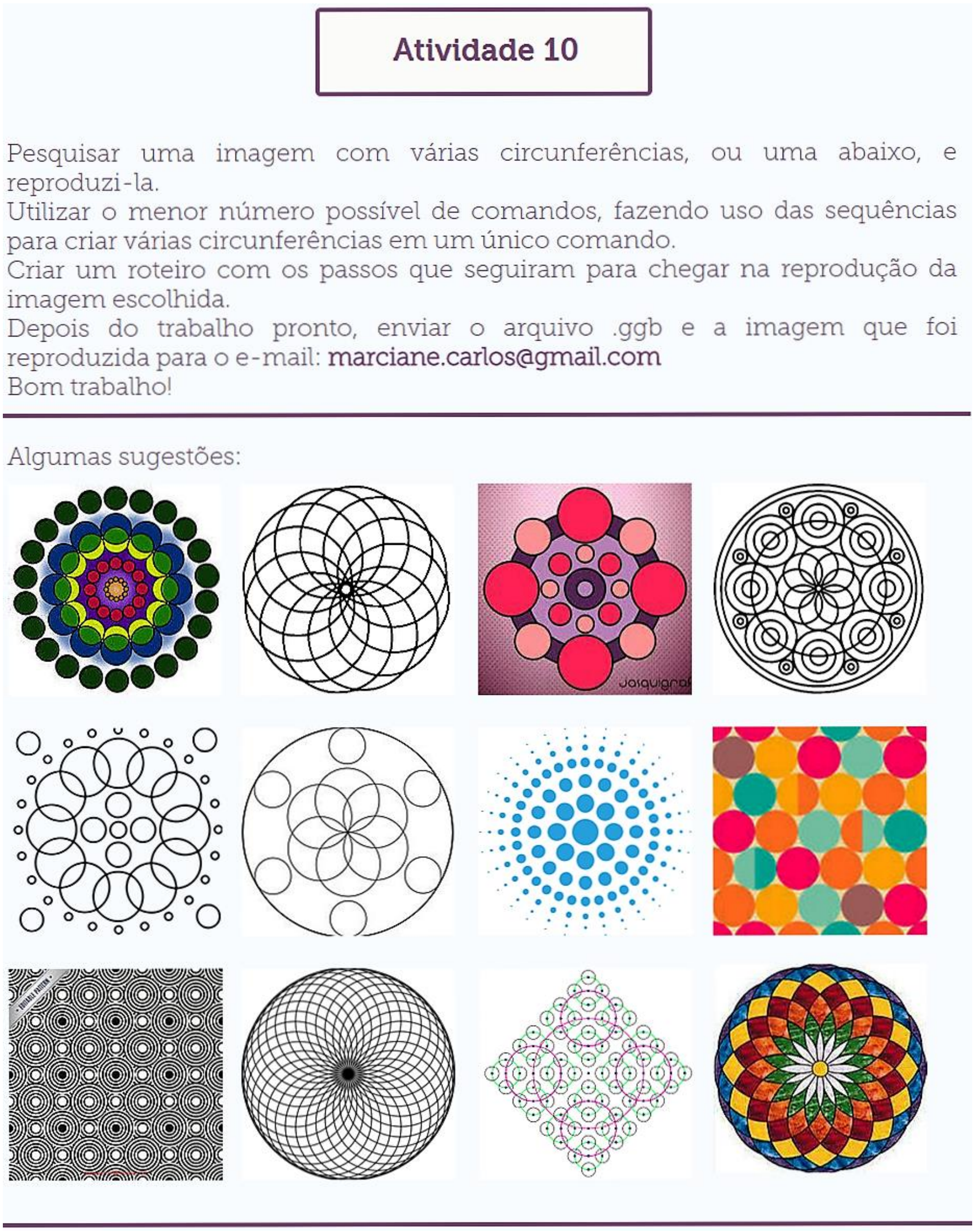


Figura 31 - Atividade 10. Fonte: Acervo pessoal.

As atividades aqui apresentadas foram planejadas para serem aplicadas de acordo com o cronograma apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 - Cronograma das atividades planejadas

Aulas[8]	**Datas**	**Atividades**	**Breve descrição das atividades**
1ª Aula	09/10/2015	Atividade 1	Relembrar noções básicas envolvendo a circunferência no GeoGebra.
		Atividade 2	Construir circunferências com o centro e/ou raio variando.
		Atividade 3	Construir circunferências levando em consideração suas posições relativas no GeoGebra.
2ª Aula	15/10/2015	Atividade 4	Construir sequências de circunferências utilizando o raciocínio generalizador no GeoGebra.
3ª Aula	16/10/2015	Atividade 5	Construir sequências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra.
4ª Aula	23/10/2015	Atividade 6	Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência no GeoGebra.
5ª Aula	05/11/2015	Atividade 7	Reproduzir a “semente da vida”.
6ª Aula	06/11/2015	Atividade 8	Replicar o início da “flor da vida”.
7ª Aula	12/11/2015	Atividade 9	Reproduzir a “flor da vida”.
8ª Aula	13/11/2015	Atividade 10	Pesquisar uma imagem com várias circunferências e reproduzi-la. Criar um roteiro do passo a passo da construção.
9ª Aula	26/11/2015		

Fonte: Acervo pessoal.

[8] Cada aula de 2 períodos com a duração de 45 minutos cada período.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, serão descritas como ocorreram as atividades planejadas e, a partir dos dados coletados, serão feitas as análises sobre a utilização de parâmetros no estudo da circunferência no GeoGebra com os alunos pesquisados.

5.1 Atividades Desenvolvidas

Ao aplicar as atividades, sentiu-se a necessidade de fazer adaptações quanto ao cronograma previamente planejado, pois os alunos estavam acompanhando bem o desenvolvimento das atividades. Logo, o planejamento que seria aplicado inicialmente em dezoito períodos, foi aplicado em catorze períodos, conforme o Quadro 3.

Quadro 3 - Cronograma alterado das atividades planejadas

Aulas[9]	**Datas**	**Atividades**	**Breve descrição das atividades**
1ª Aula	09/10/2015	Atividade 1	Relembrar noções básicas envolvendo a circunferência no GeoGebra.
		Atividade 2	Construir circunferências com o centro e/ou raio variando.
2ª Aula	15/10/2015	Atividade 3	Construir circunferências levando em consideração suas posições relativas no GeoGebra.
3ª Aula	16/10/2015	Atividade 4	Construir sequências de circunferências utilizando o raciocínio generalizador no GeoGebra.

[9] Cada aula de 2 períodos com a duração de 45 minutos cada período.

		Atividade 5	Construir sequências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra.
4ª Aula	23/10/2015	Atividade 6	Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência no GeoGebra.
5ª Aula	05/11/2015	Atividade 7	Reproduzir a "semente da vida".
6ª Aula	06/11/2015	Atividade 8	Replicar o início da "flor da vida".
		Atividade 9	Reproduzir a "flor da vida".
7ª Aula	12/11/2015	Atividade 10	Pesquisar uma imagem com várias circunferências e reproduzi-la. Criar um roteiro do passo a passo da construção.

Fonte: Acervo pessoal.

Para desenvolver as atividades propostas, a turma foi dividida em oito grupos, que foram nomeados por A, B, C, D, E, F, G, e H. Os grupos C, D, E, F e G eram formados por duplas, o grupo A era composto por um trio, já os grupos B e H inicialmente eram formados por duplas, mas com a vinda de mais dois alunos para a escola, passaram a ser compostos por trios. Neste trabalho, foram analisados quatro grupos de alunos (A, C, E e H), pois estes grupos estavam presentes em todas as aulas e desenvolveram e entregaram todas as atividades, conforme o Quadro 4, no qual constam as anotações da professora sobre as atividades desenvolvidas pelos grupos.

Quadro 4 - Controle das atividades realizadas pelos grupos analisados

Grupos	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6	Atividade 7	Atividade 8	Atividade 9	Atividade 10
A	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
C	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
E	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
H	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

Fonte: Acervo pessoal.

Nas seções a seguir, serão apresentadas as descrições e análise dos dados coletados durante as atividades desenvolvidas.

5.1.1 Atividade 1

Na primeira aula, após ser apresentado o *website* para os alunos, foi acordado que todas as circunferências deveriam ser construídas pelo Campo de Entrada do GeoGebra, para provocar a elaboração da equação da circunferência.

A atividade 1, subdividida em três itens, tinha por objetivo recordar noções básicas do GeoGebra.

No primeiro item, os alunos mostraram facilidade em criar um novo ponto, fizeram de forma intuitiva. No segundo item, os grupos analisados não tiveram dificuldades em criar a circunferência digitando a equação no Campo de Entrada. No terceiro item, embora os alunos tivessem trabalhado com o GeoGebra em outras oportunidades, estes não lembravam do recurso controle deslizante e da sua utilização. Conversamos sobre a função do controle deslizante e, em seguida, os alunos conseguiram realizar o terceiro item.

Ao planejar a atividade 1, esperava-se que os alunos explorassem os itens sem grandes dificuldades, com exceção do item 3, no qual já se presumia que os alunos não iriam recordar como é utilizado o controle deslizante, pois este é um recurso pouco usual para eles e, portanto, precisava ser relembrado.

5.1.2 Atividade 2

A atividade 2 tinha por objetivo a construção de circunferências variando o centro e/ou o raio através dos controles deslizantes. A dupla C, ao digitar a equação da circunferência do primeiro item da atividade 2, achou que a equação estava errada, pois não tinham valores sendo somados ao x e ao y da equação. Porém, logo notaram que, deste fato, decorria que as coordenadas do centro da circunferência eram (0,0) e que, da forma como fizeram, estava correto, como mostra a construção feita pelo grupo C, representado pela equação da circunferência *c*, em vermelho, na Figura 32.

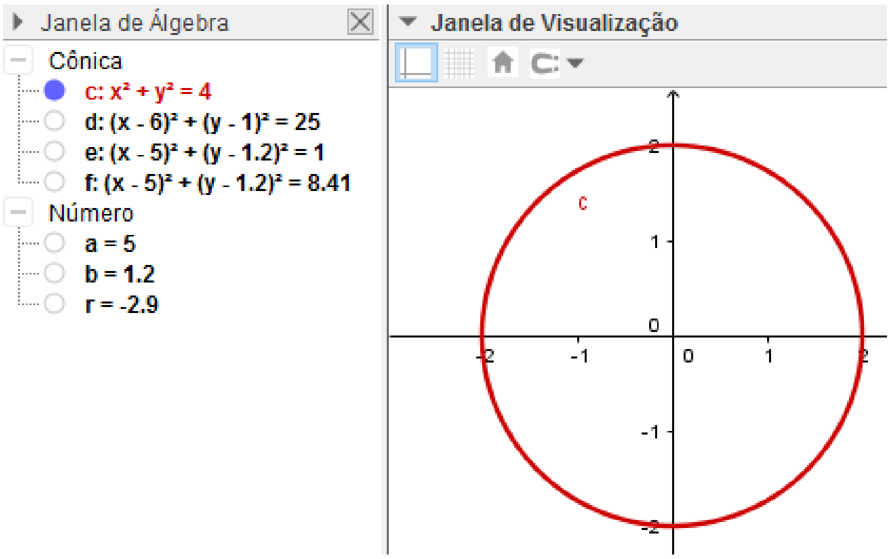


Figura 32 - Circunferência construída pelo grupo C. Fonte: Acervo pessoal.

A dupla H criou o controle deslizante *a* e o utilizou em todas as circunferências criadas (do item 2 ao item 4), conforme a Figura 33. Ao movimentar o controle deslizante *a*, todas as equações alteravam, pois o controle deslizante estava sendo usado em todas as equações (na equação *d* como raio, na equação *e* como o par ordenado do centro, e na equação *g* como a abscissa do centro). Os alunos foram orientados para que ocultassem as circunferências dos itens anteriores para que visualizassem melhor a movimentação de cada circunferência (centro/raio) conforme era solicitado em cada item. Desta forma, eles teriam uma visão melhor de cada equação da circunferência com a sua respectiva representação geométrica e, assim, teriam melhores condições para observar e então descrever os parâmetros que estão fixos e os que estão variando em cada circunferência. Ao conseguirem desenvolver estas habilidades de percepção, observação e descrição, os alunos enquadram-se no “mundo conceitual corporificado” de Tall (2004).

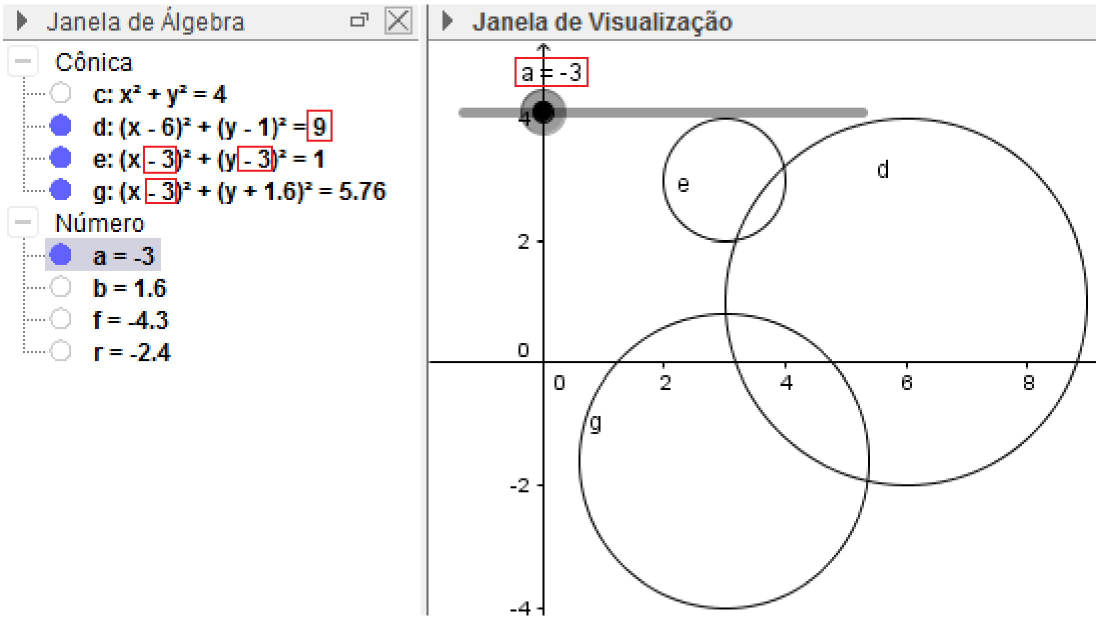
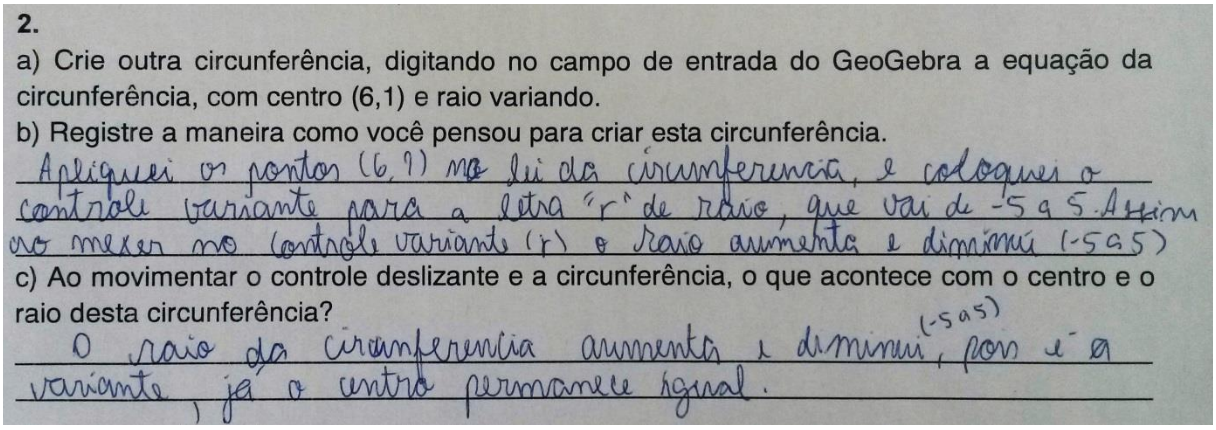


Figura 33 - Construção da dupla H com controle deslizante $a = -3$. Fonte: Acervo pessoal.

Os alunos do grupo H mudaram o raio da circunferência *d* para o parâmetro *r*, e responderam a maneira como pensaram para criar essa circunferência e o que acontece ao movimentar o controle deslizante, conforme Figura 34.



2.
a) Crie outra circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (6,1) e raio variando.
b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.
Apliquei os pontos (6,1) na lei da circunferência, e coloquei o controle variante para a letra "r" de raio, que vai de -5 a 5. Assim ao mexer no controle variante (r) o raio aumenta e diminui (-5 a 5)
c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?
O raio da circunferencia aumenta e diminui (-5 a 5), pois é a variante, já o centro permanece igual.

Figura 34 - Grupo H explicando o item 2 da atividade 2. Fonte: Acervo pessoal.

Observa-se, no registro escrito dos alunos, que eles utilizaram os valores padrões para o controle deslizante que o GeoGebra indica, de -5 a 5, e não notaram que, ao movimentar o controle deslizante, além das circunferências criadas, formou-se um ponto no centro das circunferências que se deve ao fato do raio ser igual a zero, como mostra a Figura 35 com o recurso do rastro habilitado. Ainda não identificaram que tomar valores de *r* menores ou igual a zero não faz sentido nesta situação, pois trata-se da medida do raio da circunferência. Esta característica da circunferência referente aos valores do raio não está clara, neste momento, para os alunos, mostrando que estes ainda não têm uma compreensão global da circunferência, o que é normal no âmbito do processo de aprendizagem. Espera-se que, utilizando o GeoGebra para auxiliar na visualização das construções, esta característica fique mais evidente. Assim, pode-se afirmar que, nesta etapa do processo de aprendizagem, estes alunos fazem parte do “mundo conceitual corporificado” de Tall (2004), em que estão na etapa inicial de percepção, observação e descrição do objeto de estudo.

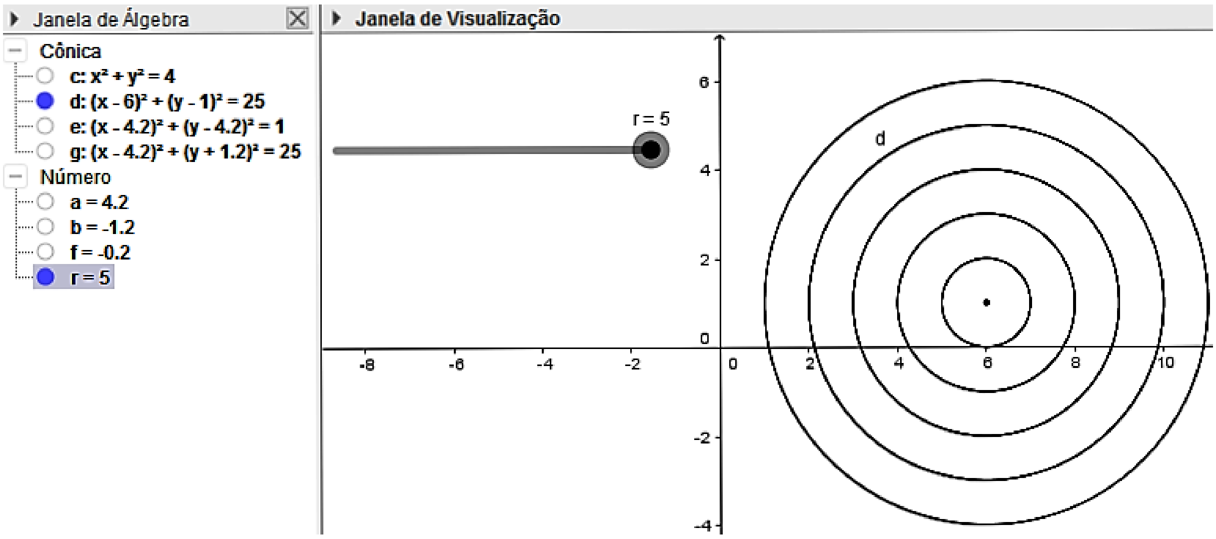
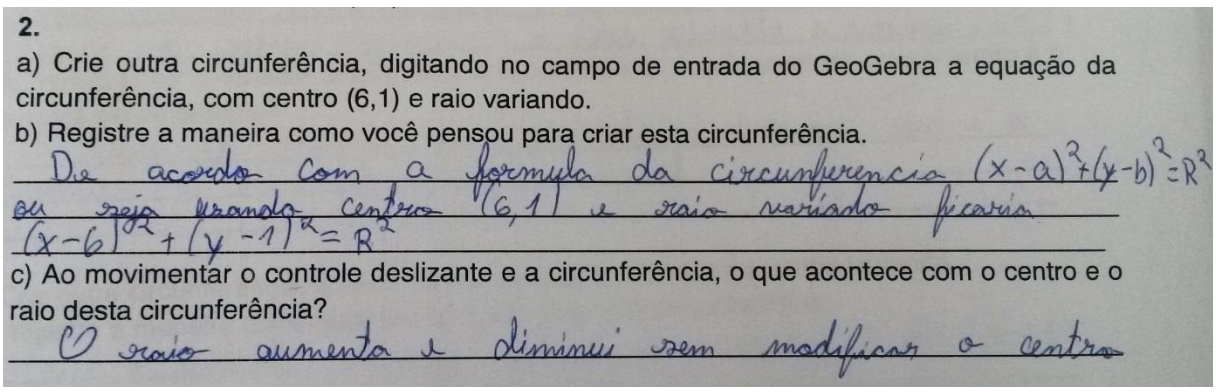


Figura 35 - Circunferências criadas pelo grupo H variando o raio. Fonte: Acervo pessoal.

Todas as duplas analisadas deixaram o controle deslizante do raio variando de -5 a 5, mas a forma de pensar na criação da circunferência e do raio variando está correta, como ilustra a Figura 36 com a resposta da dupla C.



2.

a) Crie outra circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (6,1) e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

De acordo com a formula da circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ou seja usando centro (6,1) e raio variando ficaria $(x-6)^2+(y-1)^2=R^2$

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

O raio aumenta e diminui sem modificar o centro

Figura 36 - Grupo C explicando o item 2 da atividade 2. Fonte: Acervo pessoal.

O trio A, no item 3, no qual pedia para variar o centro, criou somente um controle deslizante a para as duas coordenadas do centro. Quando questionados sobre porque, ao movimentar o controle deslizante, a circunferência deslocava-se na diagonal, ou seja, com centros nos pontos da reta $y = x$ (Figura 37), em um primeiro momento não souberam responder, porque não estavam conseguindo converter a relação algébrica que criaram para o registro geométrico correspondente. Na sequência, um dos alunos tomou a iniciativa de criar um controle deslizante para cada coordenada e notou que assim poderia movimentar o par de coordenadas de forma independente. Foi a versatilidade e o dinamismo do GeoGebra que permitiram ao aluno testar, experimentar, observar e tirar suas conclusões sobre o movimento da circunferência quando alterados os valores das coordenadas do centro, ou seja, a tecnologia está sendo utilizada, conforme aponta Goldenberg (2000) em seus estudos, como uma ferramenta para ajudar os alunos a desenvolverem a capacidade de pensar matematicamente.

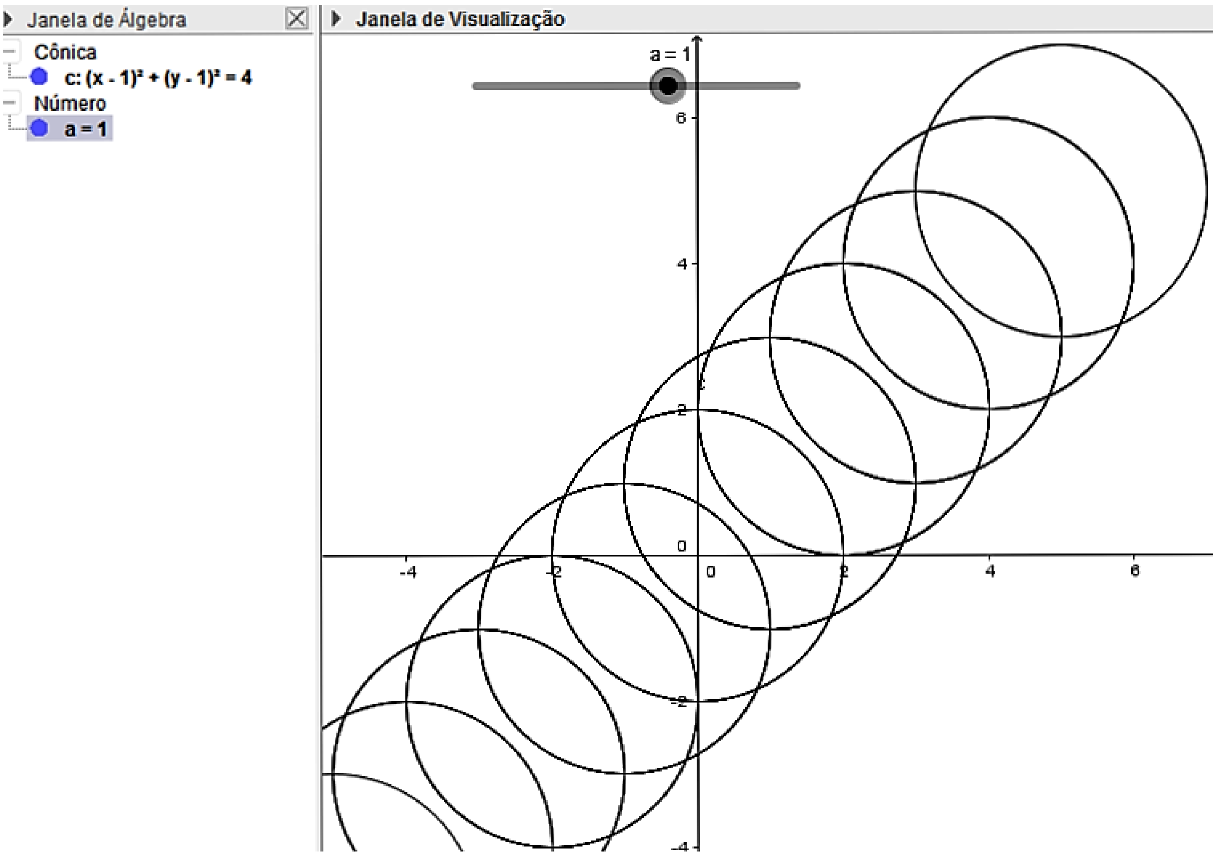
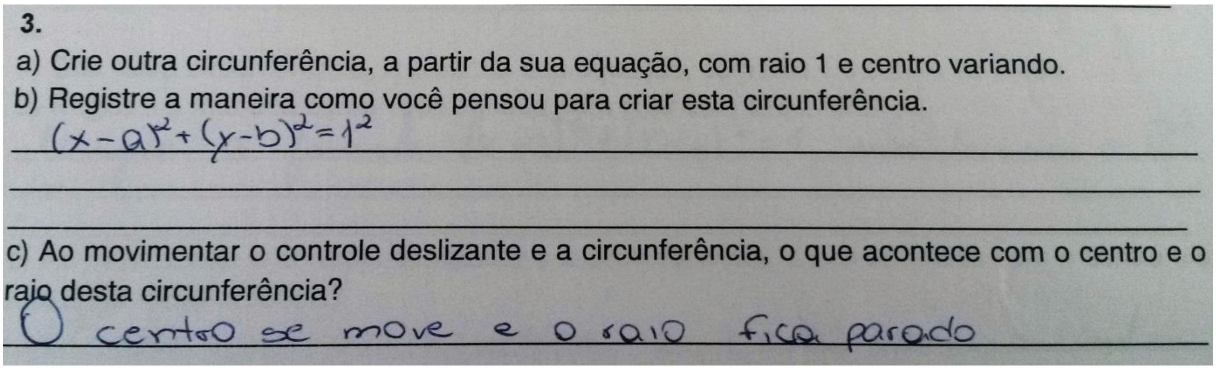


Figura 37 - Movimento da circunferência, com o rastro habilitado, com o mesmo controle deslizante para o par ordenado do centro. Fonte: Acervo pessoal.

A dupla E foi objetiva nas suas respostas quanto ao item 3 (Figura 38). Os alunos criaram dois controles deslizantes, um para cada parâmetro das coordenadas do centro, vendo assim que seria o centro da circunferência que iria ficar variando, já o raio não sofreria alterações, pois foi atribuído a ele um valor numérico.



3.

a) Crie outra circunferência, a partir da sua equação, com raio 1 e centro variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

$(x-a)^2+(y-b)^2=1^2$

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

O centro se move e o raio fica parado

Figura 38 - Resposta do grupo E ao item 3 da atividade 2. Fonte: Acervo pessoal.

Ao movimentar os controles deslizantes das coordenadas do centro, nota-se no trabalho do grupo E, a circunferência movimentando-se como sugere a Figura 39, na qual o rastro foi habilitado para podermos visualizar este movimento.

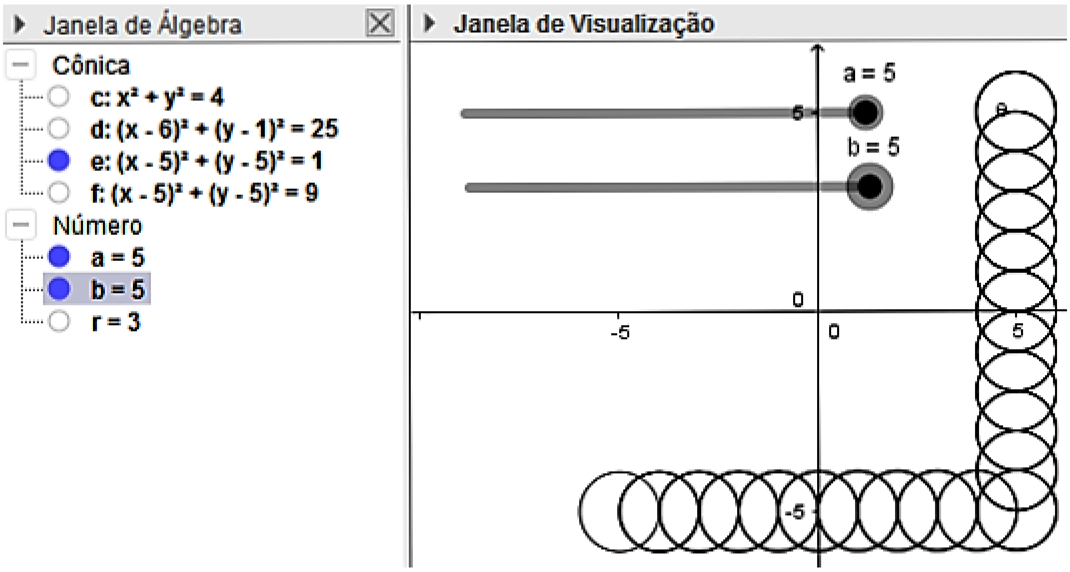
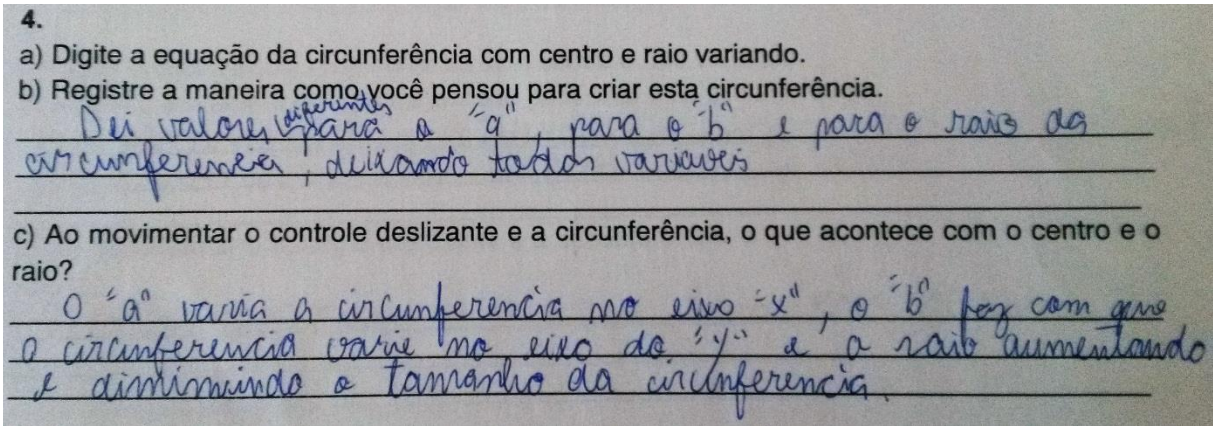


Figura 39 - Circunferências criadas pelo grupo E a partir do movimento dos parâmetros das coordenadas do centro. Fonte: Acervo pessoal.

Os valores dos parâmetros do centro da circunferência da Figura 39 foram criados variando de -5 a 5. Para gerar a imagem da figura, primeiramente foi movimentado o controle deslizante *a*, que corresponde a abscissa do centro da circunferência variando de -5 a 5, depois foi movimentado o controle deslizante *b*, que corresponde a ordenada do centro da circunferência.

Com estas atividades, os alunos foram conhecendo melhor sobre a função dos parâmetros na equação reduzida da circunferência e as correspondentes representações geométricas, e tiveram facilidade em concluir o item 4 da atividade 2, que consistia em criar uma circunferência com centro e raio variando, como exemplificado na Figura 40, no qual o grupo H explica como construíram a circunferência solicitada.


4.

a) Digite a equação da circunferência com centro e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

Dei valores diferentes para a "a", para o "b" e para o raio da circunferencia, deixando todos variaveis

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio?

O "a" varia a circunferencia no eixo "x", o "b" faz com que a circunferencia varie no eixo do "y" e o raio aumentando e diminuindo o tamanho da circunferencia.

Figura 40 - Item 4 da atividade 2 respondida pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

Na Figura 40, o grupo H, assim como os outros grupos analisados, teve mais clareza sobre os parâmetros da equação da circunferência, ao transitarem de forma espontânea entre os registros gráficos e algébricos da circunferência.

Nesta atividade, o *software* GeoGebra possibilitou aos alunos, de forma dinâmica, a visualização das alterações geométricas conforme eram manipulados os parâmetros da equação da circunferência. Os alunos puderam observar de forma simultânea as alterações algébricas, através dos parâmetros, e geométricas, podendo pensar na matemática que estava sendo usada nestas alterações.

Para Dreyfus (1991), generalizar é partir de casos particulares, identificando pontos em comum, para expandir os domínios de validação e assim generalizar o objeto de estudo por meio de uma única expressão. Nota-se que os alunos já estavam conseguindo generalizar, ao reconhecer a equação da circunferência e suas propriedades, como fizeram no item 4, generalizando através de parâmetros a equação por meio de uma única relação com o centro da equação definido e o raio variando, podendo assim fazer conjecturas e estabelecer o domínio da validade, concluindo que todas as circunferências terão o mesmo par ordenado de centro, variando somente o raio.

5.1.3 Atividade 3

A atividade 3 tinha como objetivo construir circunferências a partir de suas posições relativas (concêntricas, internas não-concêntricas, externas, tangentes externas, tangentes internas e secantes) com o intuito de levar à compreensão sobre os papéis das coordenadas do centro e da medida do raio na equação e suas relações com o registro geométrico. Os alunos precisavam lembrar as posições relativas entre duas circunferências para que pudessem representar graficamente no GeoGebra estas circunferências. A dupla C não lembrava as posições e, antes de iniciar a atividade, pesquisou na internet as posições entre duas circunferências. A dupla E não estava compreendendo a relação entre a distância entre os dois centros e as circunferências concêntricas, e uma colega do grupo ao lado comentou que a distância era zero porque os centros de ambas possuíam as mesmas coordenadas. As demais duplas apresentaram dúvidas iniciais sobre a ideia de posição relativa, mas ao entenderem o significado de cada uma das posições, conseguiram representar graficamente as respectivas circunferências, evidenciando uma situação de transição da representação geométrica (observada no enunciado da atividade) para a algébrica (inserida no Campo de Entrada). Consequentemente, verifica-se que estes alunos mostram controle e compreensão das variáveis da equação da circunferência, uma vez que precisavam pensar geometricamente nas posições relativas para então criar as equações que as representavam, mostrando assim que operam no “mundo operacional simbólico” de Tall (2004) ao manipularem símbolos algébricos com exatidão e precisão. Os alunos também demonstraram um nível mais abstrato do pensamento matemático, quando conseguiram construir relações entre os objetos matemáticos e as suas propriedades (DREYFUS, 1991).

No item 1 da atividade 3, era solicitado aos grupos que criassem circunferências concêntricas e descrevessem como fizeram este processo. Na sequência, questionava-se sobre o que mudariam na(s) equação(ões) para tornar as circunferências internas não-concêntricas e depois o que mudariam na(s) equação(ões) para torná-las circunferências externas. Para efeitos de registros no GeoGebra, a professora/pesquisadora solicitou aos alunos que não apagassem ou alterassem nenhuma circunferência criada, por exemplo, ao fazer o item *d* desta atividade, ao invés de fazer as transformações na equação, foi pedido para os alunos criarem uma nova circunferência mantendo a original.

O grupo A criou duas circunferências concêntricas mantendo as mesmas coordenadas do centro, conforme relatam na Figura 41, o que resultou nas circunferências *c* e *d* da Figura 42. Ao ser questionado sobre como transformariam as circunferências concêntricas em não-concêntricas, o grupo A mencionou alterar somente as coordenadas dos centros das equações (Figura 41), mas ao analisarmos a construção feita no GeoGebra (Figura 42), nota-se que os alunos, além de alterarem os valores do centro, alteraram também o valor do raio (circunferência *k* da Figura 42), ou seja, a circunferência *d* transformou-se na circunferência *k*.

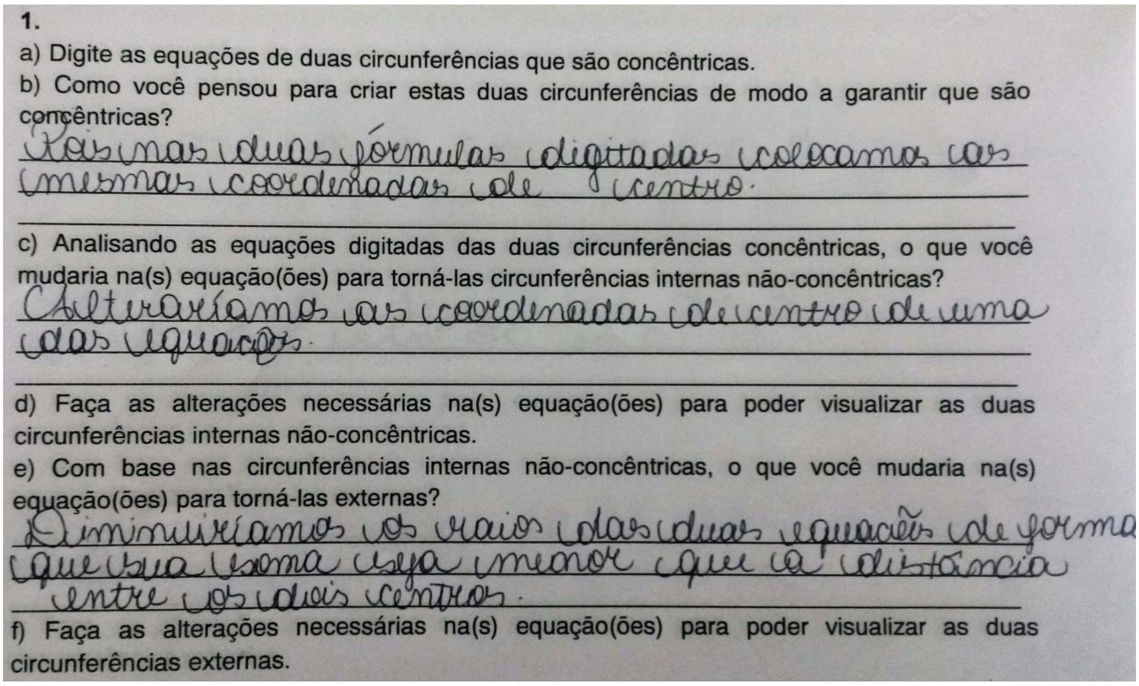

1.
a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.
b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?
Nas duas fórmulas digitadas colocamos as mesmas coordenadas de centro.
c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?
Alteraríamos as coordenadas de centro de uma das equações.
d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.
e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?
Diminuiríamos os raios das duas equações de forma que sua soma seja menor que a distância entre os dois centros.
f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

Figura 41 - Descrição feita pelo grupo A do item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Para transformar as circunferências não-concêntricas em circunferências externas, o grupo A descreveu que mudaria os raios de ambas. Porém, analisando a construção, observou-se que, ao fazer as alterações necessárias para ter as duas circunferências externas, somente foi alterado o valor do centro e do raio da circunferência *k,* transformando-se assim na circunferência *f* e, portanto, externa à circunferência *c* (Figura 42).

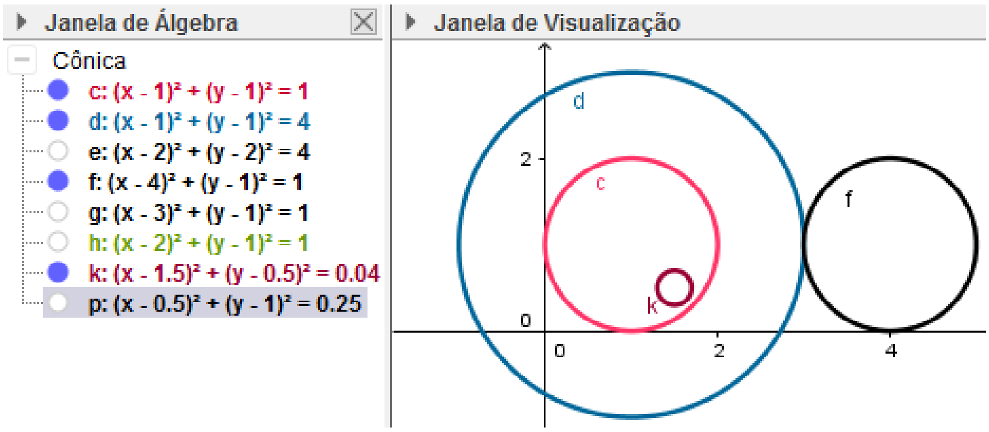


Figura 42 - Circunferências criadas pelo grupo A sobre o item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Nota-se que os alunos fizeram o registro escrito (Figura 41) para depois construírem as circunferências e observaram que, para garantir as posições relativas solicitadas, não era necessário fazer todas as alterações nas circunferências que haviam planejado, ou seja, o registro geométrico auxiliou-os a visualizarem quais os parâmetros, de fato, deveriam ser modificados. Constata-se que, nesse trio, a relação entre registros algébrico e geométrico está em processo de construção. As antecipações no registro algébrico ainda não refletem os efeitos geométricos esperados, necessitando de ajustes algébricos para finalizar a atividade. Nesse processo, o GeoGebra torna-se um aliado, ao auxiliar os alunos a desenvolverem a capacidade de pensar em Matemática (BASSO e NOTARE, 2015) sendo, desta forma, o *software* utilizado como uma *ferramentaparapensamentos*, como definem Shaffer e Clinton (2006)

O grupo C mostrou organização ao representar geometricamente as circunferências, colocou-as aos pares das posições relativas na mesma cor, o que facilita a visualização em relação as suas posições relativas, como mostrado na Figura 43.

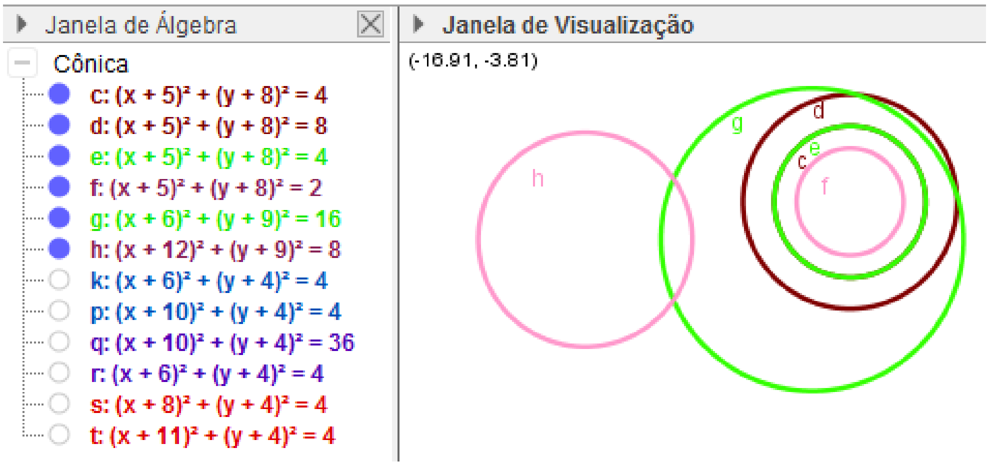
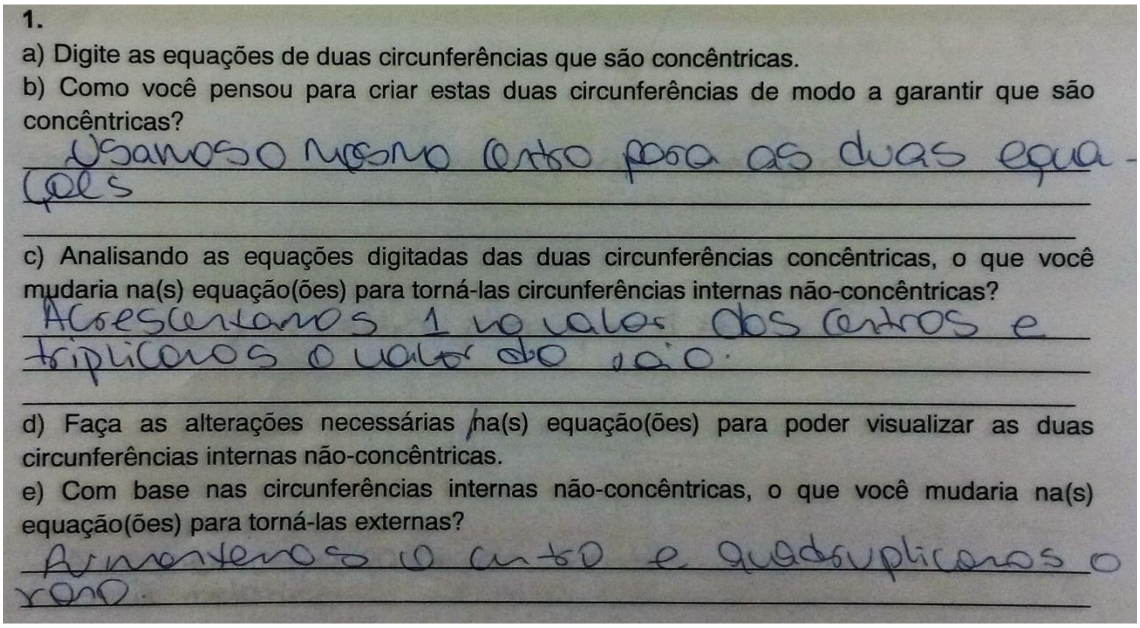


Figura 43 - Circunferências criadas pelo grupo C para o item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo C criou duas circunferências iguais que ficaram sobrepostas, a circunferência *c* e a circunferência *e*. Para criarem duas circunferências concêntricas, este grupo usou o mesmo centro para as duas circunferências com raios diferentes, como descrevem na Figura 44 e estão representadas geometricamente na Figura 43 pelas circunferências *c* e *d*.



1.

a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.

b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?

Usamos o mesmo centro para as duas equa-ções

c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?

Acrescentamos 1 no valor dos centros e triplicamos o valor do raio.

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.

e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?

Aumentamos o centro e quadruplicamos o raio.

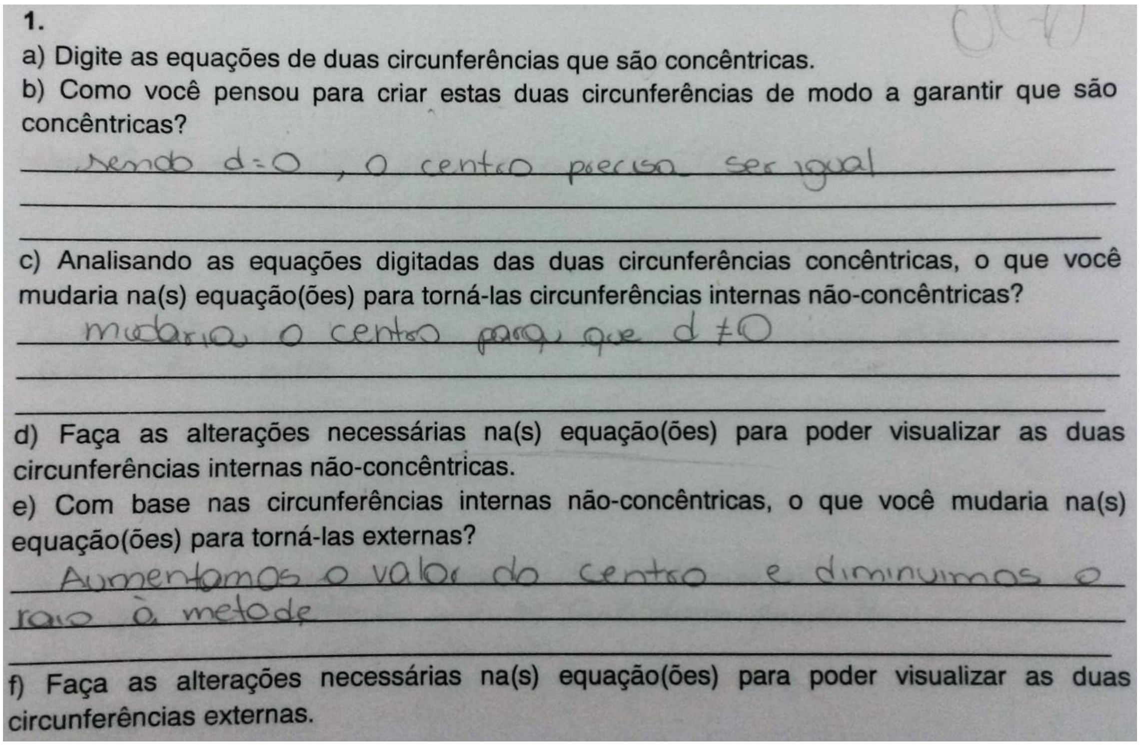
Figura 44 - Descrição feita pelo grupo C sobre o item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Para transformar estas circunferências concêntricas em não-concêntricas, o grupo C manteve uma das circunferências com os mesmos valores e alterou a outra circunferência aumentando-a com um valor maior para o raio (não triplicando como mencionaram na Figura 44) e deslocando em uma unidade o par ordenado do centro, o que garante que as circunferências deixem de ser concêntricas, como mostra na Figura 43 as circunferências não-concêntricas *e* e *g*.

No último item, o grupo C deslocou uma das circunferências, aumentando os valores do centro, e diminuiu o raio da outra circunferência, garantido assim que as circunferências que eram não-concêntricas se tornassem circunferências externas (circunferências *f* e *h*). Ao se referirem ao fato de aumentarem o centro (Figura 44), o grupo estava se referindo aos valores das coordenadas do centro que foram trocados por valores maiores e, por consequência, deslocou a circunferência para baixo e para esquerda. A circunferência *h* ficou com o raio maior do que circunferência *f*, mas não quatros vezes maior como colocou o grupo C.

Identifica-se aqui que, ao conseguirem se organizar de forma clara ao representar as circunferências na forma geométrica no GeoGebra, os alunos demonstraram terem compreendido o que a atividade propôs, transitando de forma espontânea entre os diferentes registros de representação do objeto de estudo, caracterizando o que Duval (2005) chama de conversão.

O grupo E associou as posições relativas que deveriam construir com as condições algébricas pertinentes para as posições concêntricas e não-concêntricas, como mostra a Figura 45.



1.

a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.

b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?

sendo d=0, o centro precisa ser igual

c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?

mudaria o centro para que d≠0

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.

e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?

Aumentamos o valor do centro e diminuimos o raio à metade

f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

Figura 45 - Grupo E descrevendo o item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Na Figura 46 temos as representações algébrica e geométrica das posições relativas das circunferências. Para tanto, o grupo E construiu duas circunferências concêntricas (*d* e *e*). Para torná-las não-concêntricas, o grupo ocultou a circunferência *e* e criou a circunferência *f* e, para tornar as circunferências não-concêntricas (*d* e *f*) em externas, o grupo criou a circunferência *c*. Assim as circunferências *d* e *c* são externas.

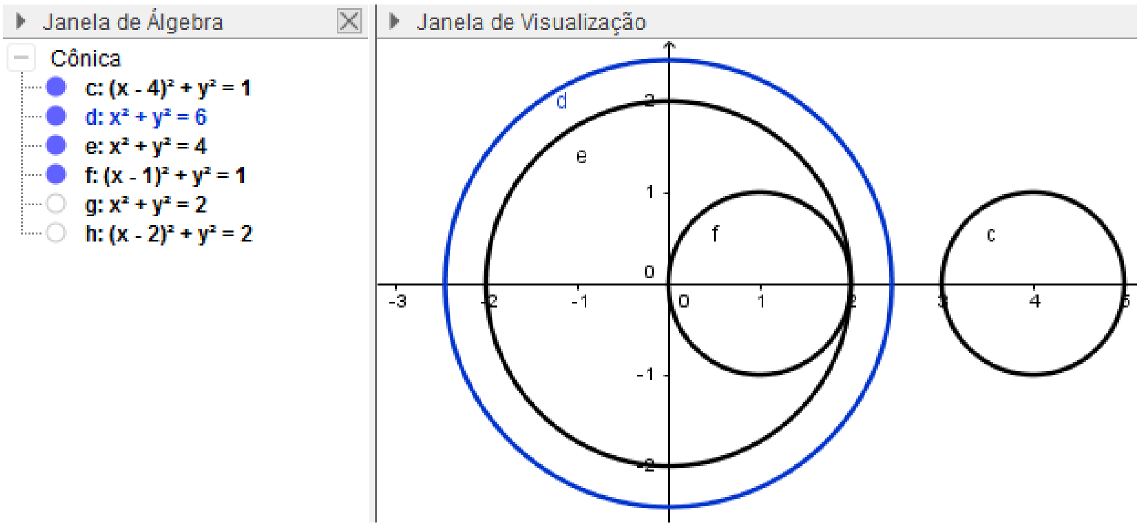


Figura 46 - Circunferências criadas pelo grupo E para o item 1 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Estes alunos levaram em consideração o tamanho dos raios comparado com a distância entre os centros das circunferências para atender as construções solicitadas.

O grupo H, que era composto por dois alunos, estava sem um de seus integrantes, pois ele havia faltado esta aula. Portanto, todas as resoluções aqui apresentadas deste grupo foram feitas por um aluno que, embora tenha feito todas as atividades, inclusive esta do item 1 da atividade 3, no arquivo do GeoGebra ficou registrado somente a primeira parte desta atividade, como consta na Figura 47, na qual estão representadas as circunferências concêntricas *c* e *d*.

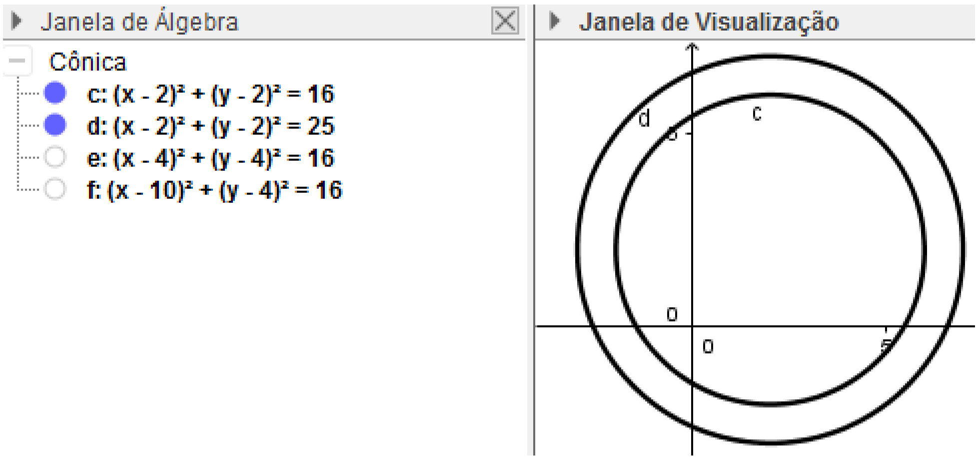
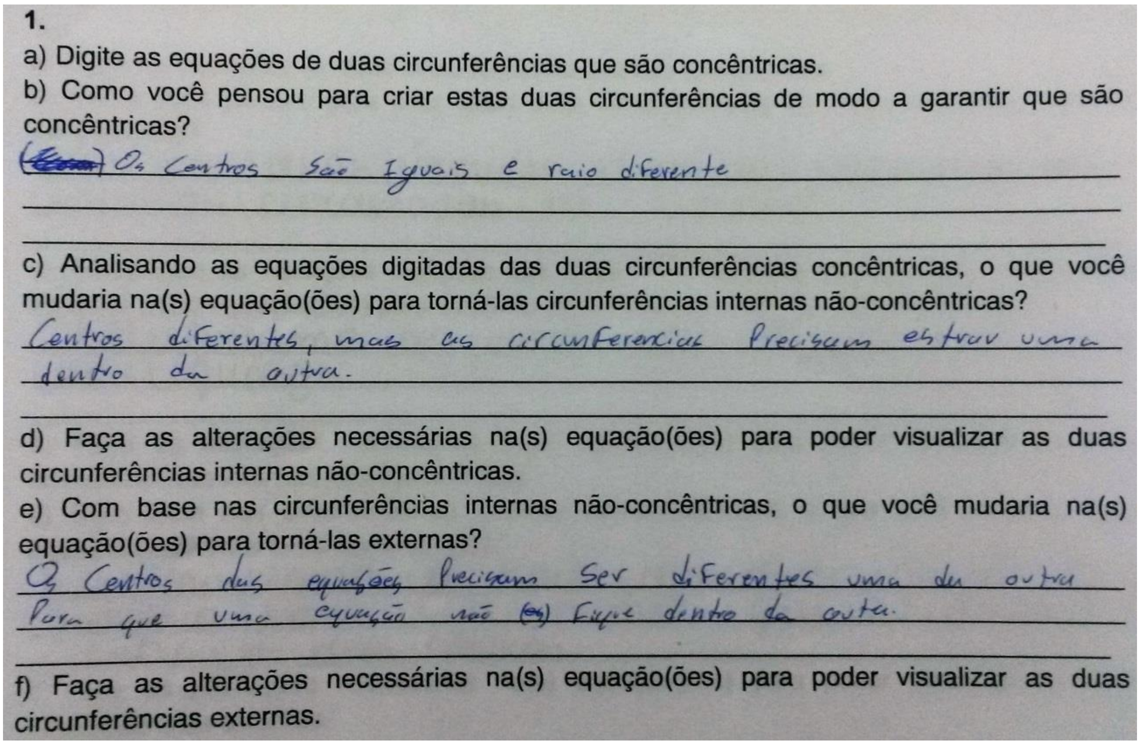


Figura 47 - Item 1 da atividade 3 feita pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

Ao responder as atividades, o aluno teve dificuldades em pensar sozinho sobre como resolver. Constata-se essa dificuldade nos itens c) e d), nos quais perguntava-se o que seria necessário mudar nas equações para alterar as posições relativas das circunferências, e o aluno restringiu-se a responder que os centros deveriam ser diferentes. Para as circunferências serem concêntricas, o aluno afirmou que precisavam estar uma dentro da outra, e para serem externas deveriam não ficar uma dentro da outra, conforme mostra a Figura 48.



1.

a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.

b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?

Os Centros São Iguais e raio diferente

c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?

Centros diferentes, mas as circunferencias Precisam estar uma dentro da outra.

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.

e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?

Os Centros das equações Precisam ser diferentes uma da outra Para que uma equação não fique dentro da outra.

f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

Figura 48 - Descrição do item 1 da atividade 3 feita pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

Nota-se que este aluno, sozinho, não conseguiu avançar no seu raciocínio. Ele sabia o que deveria acontecer com as circunferências, mas não conseguiu responder o que mudaria na representação algébrica para atender as solicitações da atividade proposta. Isso revela que a compreensão da circunferência ainda é restrita e local para esse aluno.

No item 2, era solicitado aos alunos que criassem duas circunferências tangentes externas e registrassem por escrito como pensaram para garantir as tangências das circunferências. Na sequência, era pedido para os alunos pensarem no que deveriam mudar na representação algébrica para tornar as circunferências tangentes internas. Novamente, foi solicitado para que, ao transformarem as circunferências em posições relativas diferentes, criassem novas circunferências e não apagassem as criadas anteriormente, a título de análise para esta pesquisa.

O grupo A, de forma clara, criou duas circunferências tangentes externas (*c* e *g,* Figura 49) e tornou-as depois tangentes internas (*c* e *p*, Figura 49).

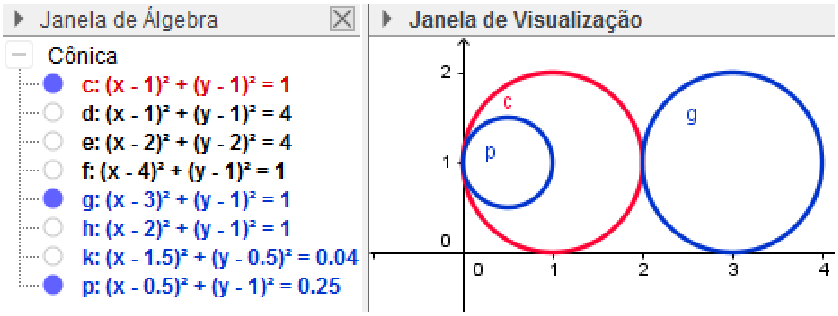


Figura 49 - Construção feita pelo grupo A para o item 2 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo C, de forma organizada, construiu duas circunferências tangentes externas (*k* e *p,* Figura 50) depois, na sequência, construiu duas circunferências tangentes internas (*q* e *r,* Figura 50).

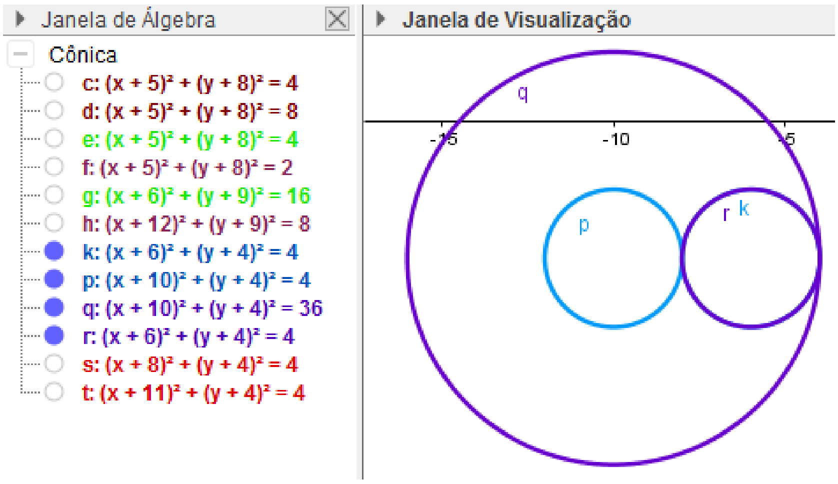


Figura 50 - Construção feita pelo grupo C para o item 2 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Duas circunferências ficaram sobrepostas na Figura 50, as circunferências *k* e *r*.

Ainda no item 2, uma menina da dupla C, ao ver os colegas da dupla E não conseguindo transformar as circunferências tangentes externas em tangentes internas, orientou para que estes colegas fossem testando valores para o raio e para as coordenadas do centro das circunferências, e observassem se os valores atribuídos eram coerentes. A seguir, por meio de observação da professora/pesquisadora, trazemos a fala dessa aluna:

- *Vocês não estão parando para pensar nos valores e sim chutando. Pensem nos valores do centro e o raio das equações e nas circunferências que estão vendo!*. – Aluna da dupla C.

Assim, a dupla E passou a alterar os valores do centro de uma das circunferências até conseguir chegar ao objetivo da atividade, que era tornar as circunferências tangentes internas. Constata-se que, a visualização das circunferências criadas no GeoGebra foi importante para estes alunos atingirem o objetivo desta atividade. A possibilidade de manipular os valores nas equações e terem o retorno desta manipulação na janela gráfica auxiliou para chegarem nas equações desejadas. Porém, é fácil ver que a compreensão global do objeto circunferência em suas diferentes representações ainda está em construção. Os alunos ainda não controlam o registro algébrico para obter o efeito gráfico desejado.

Um aluno de uma dupla que não foi analisada neste trabalho, que já tinha terminado a atividade, passou a ajudar o colega da dupla H que estava sozinho, pois seu parceiro de dupla faltou neste dia. Este aluno orientou o colega da dupla H para criar as circunferências tangentes externas por tentativa, ora mudando o centro, ora mudando o raio. Mesmo assim, o aluno não estava conseguindo compreender as mudanças que estavam ocorrendo e solucionar a atividade, pois as circunferências estavam distantes uma da outra e, por consequência, não eram tangentes externas, conforme ilustra a Figura 51.

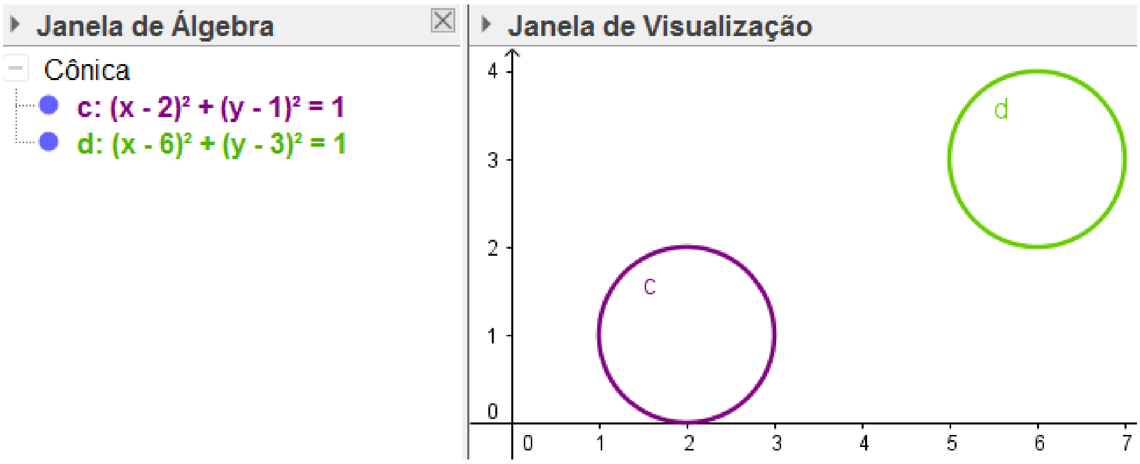


Figura 51 - Construção feita pelo aluno do grupo H para o item 2 da atividade 3. Fonte: Acervo pessoal.

Ao ver o aluno com dificuldades para criar as circunferências tangentes externas, deu-se o seguinte diálogo observado pela professora/pesquisadora:

- *De que maneira tu pode fazer as circunferências se tocarem?* – professora/pesquisadora.

- *Colocando lado a lado.* – aluno do grupo H.

- *E no que tu precisa mexer?* – professora/pesquisadora.

- *No centro!* – aluno do grupo H.

E assim, o aluno do grupo H colocou as circunferências lado a lado na horizontal, alterando os valores das coordenadas do centro da circunferência até conseguir as duas tangentes externas. O aluno conseguiu realizar a atividade que no início não estava fazendo por estar sozinho e por não compreender como fazer. Mais uma vez o GeoGebra, com o seu dinamismo, proporcionou ao aluno chegar ao resultado esperado, manipulando valores algébricos na equação e tendo como retorno a representação geométrica para conferir se os valores atribuídos eram os desejados, estimulando o pensamento matemático por meio da interatividade que o *software* oportuniza. Esta constitui-se uma primeira etapa no processo de compreensão do objeto circunferência, na qual o aluno ainda se apoia em manipulações, tentativas e erros, agindo sobre o objeto de estudo, o que caracteriza o “mundo conceitual corporificado” de Tall (2004).

No item 3 desta atividade, era solicitada a construção de duas circunferências secantes e como pensaram para garantir esta posição relativa entre elas, como mostra a Figura 52.

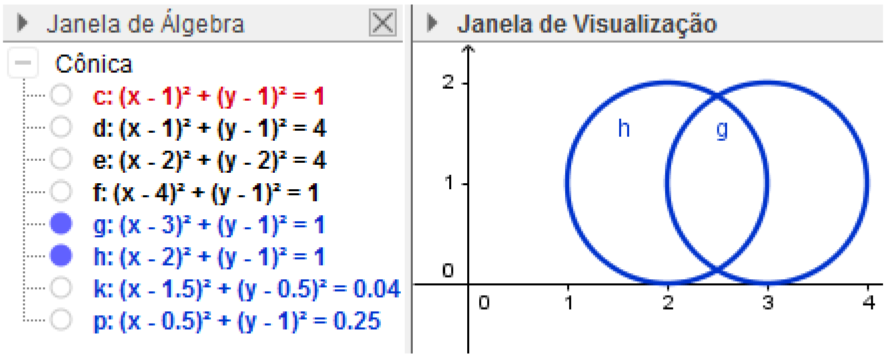
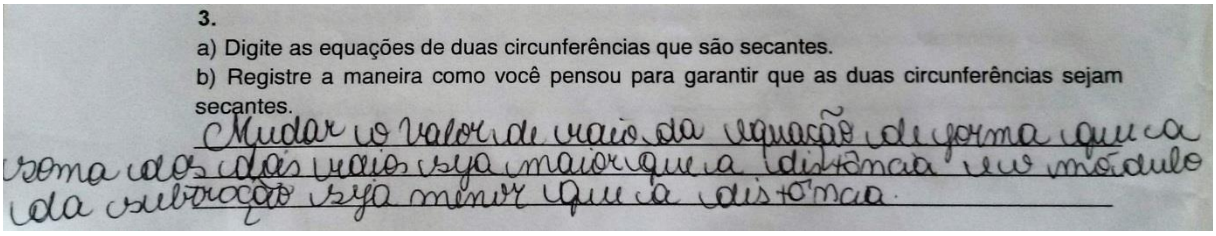


Figura 52 - Circunferências secantes feitas pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo A usou como argumento, para garantir circunferências secantes, a condição algébrica para a posição relativa entre duas circunferências secantes (Figura 53).



3.

a) Digite as equações de duas circunferências que são secantes.

b) Registre a maneira como você pensou para garantir que as duas circunferências sejam secantes.

Mudar o valor de raio da equação de forma que a soma dos dois raios seja maior que a distância e o módulo da subtração seja menor que a distância.

Figura 53 - Descrição do item 3 da atividade 3 feita pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

Os alunos se apoiaram na teoria para justificar como criaram as circunferências secantes, estabelecendo relações entre o conceito, a representação algébrica e a representação geométrica destas circunferências, caracterizando um primeiro passo para o “mundo formal axiomático” de Tall (2004), em que fizeram uso das corporificações e dos símbolos, para assim formalizar o entendimento do objeto estudado.

Os demais grupos não apresentaram dificuldades para desenvolver este item, e registraram que as duas circunferências secantes foram construídas a partir das circunferências tangentes internas e foi preciso somente alterar o valor da abscissa do centro para terem as circunferências secantes.

Nesta atividade, o GeoGebra contribuiu para que os alunos compreendessem a função do par ordenado do centro e da medida do raio na equação da circunferência e o efeito que estes valores retornam no registro geométrico, desenvolvendo a capacidade do aluno em pensar em Matemática. Esta manipulação dos objetos, de forma dinâmica, proporcionada pelo GeoGebra, seria penosa com outros recursos como papel e lápis.

5.1.4 Atividade 4

Nesta atividade o objetivo foi explorar o comando *sequência*, no qual se utilizou parâmetros da equação da circunferência para, a partir de uma única equação, criar a representação geométrica de uma família de circunferências, conforme Figura 54.

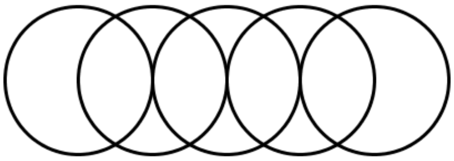


Figura 54 - Família de circunferências. Fonte: Acervo pessoal.

Para tanto, os alunos precisavam reconhecer quais parâmetros da equação da circunferência deveriam variar para resultar na construção da Figura 54. Esse processo inicia na análise da representação geométrica da família de circunferências, para identificar os elementos da representação algébrica que precisam se manter constantes e os elementos que precisam variar e como eles devem variar. Antes dos alunos partirem para a construção da família de circunferências, deveriam responder duas perguntas sobre parâmetros com base na Figura 54.

Para responderem aos itens 1 e 2 da atividade 4, os grupos C e H não conseguiram, de imediato, distinguir quais parâmetros da equação permanecem iguais e quais devem variar, o que revela, neste momento, ainda uma falta de compreensão da circunferência e as relações existentes entre os registros gráfico e algébrico. Para solucionar o problema, os alunos construíram cinco circunferências na janela de visualização, semelhantes às circunferências propostas pela atividade e, a partir da observação de suas equações na janela algébrica, constataram que o parâmetro variável na equação era a abscissa do centro, conforme ilustra a Figura 55.

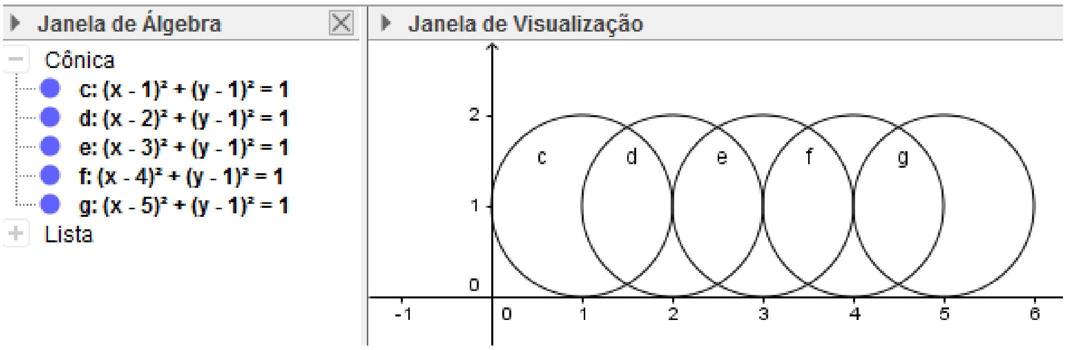
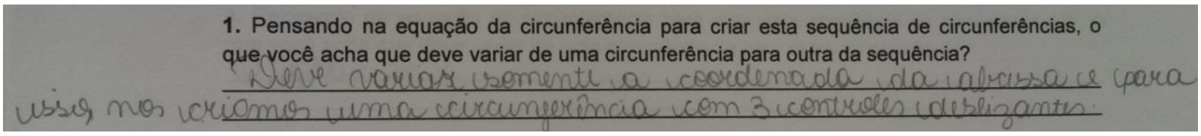


Figura 55 - Construção feita pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

Observa-se, neste caso, a necessidade dos alunos em apoiarem-se nos recursos do *software* para solucionarem a questão, mostravam-se ainda incapazes de antecipar e estabelecer os valores para centro e raio da equação a partir da análise da representação geométrica, caracterizando que estes alunos ainda estavam operando no “mundo conceitual corporificado” de Tall (2004).

A dupla E também utilizou a mesma estratégia de construir cinco circunferências para solucionar o problema, mas com dificuldades para determinar os valores para centros e raios. Dessa forma, estes alunos tentaram encontrar os valores por tentativa e erro, até chegarem ao resultado esperado. Isso revelou que estes alunos se encontravam em processo de exploração e descoberta sobre a equação da circunferência e sua representação geométrica e não conseguiam mobilizar os dois registros de forma espontânea, o que é fundamental, segundo Duval (2009), para o funcionamento cognitivo da compreensão.

Os alunos do grupo A criaram controles deslizantes para o centro e o raio, com o intuito de explorarem e visualizarem o que estava variando e, a partir desta exploração, concluíram que a abscissa do centro deveria ser variável, como mostra a Figura 56.



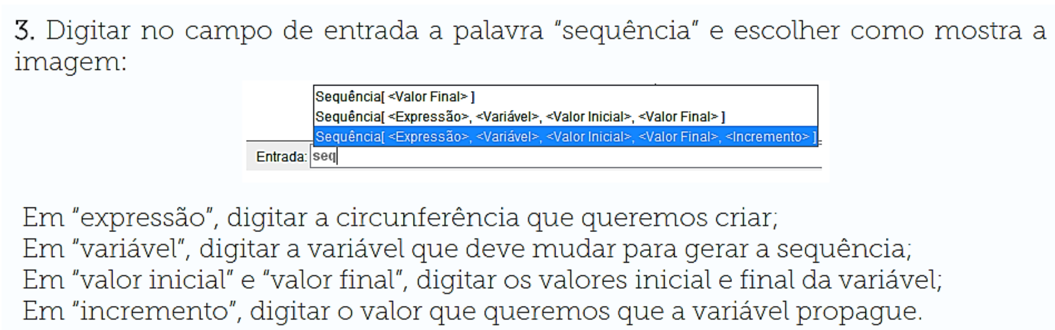
1. Pensando na equação da circunferência para criar esta sequência de circunferências, o que você acha que deve variar de uma circunferência para outra da sequência?

Deve variar somente a coordenada da abscissa e para isso nos criamos uma circunferência com 3 controles deslizantes.

Figura 56 - Resposta do grupo A ao item 1. Fonte: Acervo pessoal.

Nota-se que estes alunos estão utilizando o GeoGebra como uma *ferramentaparapensamentos*, segundo Shaffer e Clinton (2006), ao estabelecerem uma relação recíproca entre *software* e pensamentos, auxiliando no processo de reconhecimento e generalização da equação da circunferência.

Para finalizar esta atividade, todos os grupos deveriam construir a família de circunferências utilizando o comando *sequência*, que era novidade para os alunos. Como nunca haviam trabalhado com este comando, foi dado um passo a passo no item 3 desta atividade (Figura 57) para dar subsídios para os alunos construírem a família de circunferências da Figura 54.



3. Digitar no campo de entrada a palavra "sequência" e escolher como mostra a imagem:

Em "expressão", digitar a circunferência que queremos criar;
Em "variável", digitar a variável que deve mudar para gerar a sequência;
Em "valor inicial" e "valor final", digitar os valores inicial e final da variável;
Em "incremento", digitar o valor que queremos que a variável propague.

Figura 57 - Passo a passo do comando *sequência.* Fonte: Acervo pessoal.

Todos os grupos conseguiram construir a sequência de circunferências propostas (Figura 54) a partir do comando *sequência*, com exceção do grupo A, que digitou um valor específico para a abscissa do centro, ao invés de utilizar um parâmetro. Embora soubessem, quando questionados, que era a abscissa do centro que estava variando, pensaram que não poderiam digitar uma variável, conforme explicação em seus registros (Figura 58).

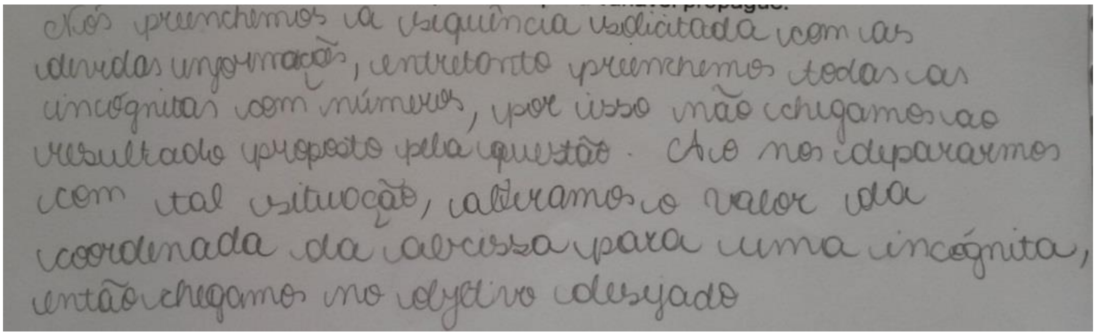

Nós preenchemos a sequência solicitada com as devidas informações, entretanto preenchemos todas as incógnitas com números, por isso não chegamos ao resultado proposto pela questão. Ao nos depararmos com tal situação, alteramos o valor da coordenada da abcissa para uma incógnita, então chegamos no objetivo desejado

Figura 58 - Explicação do grupo A sobre como construíram a família de circunferências. Fonte: Acervo pessoal.

Denota-se, na escrita do grupo A, que a ideia de generalizar criando uma variável que represente um parâmetro ainda não havia sido consolidada. Ao preencher "*todas as incógnitas com números*", os alunos referem-se ao Campo de Entrada do GeoGebra, na qual deveriam completar a sintaxe do comando *sequência* com os seus respectivos valores.

Quanto aos demais grupos, conseguiram criar uma expressão algébrica para uma família de circunferências a partir da representação geométrica, processo contrário ao que estavam fazendo na atividade anterior, quando tinham que criar a representação geométrica de uma família de circunferências a partir das posições relativas, caracterizando o que Duval (2005) chama de heterogeneidade dos dois sentidos de conversão, ao explorarem o potencial semiótico do GeoGebra com o comando *sequência*.

5.1.5 Atividade 5

A atividade 5 foi realizada pelos alunos no mesmo dia da atividade 4 e tinha como objetivo construir sequências de posições relativas entre circunferências a partir das suas equações e utilizando o raciocínio generalizador. Também, a partir de uma representação geométrica de sequências de circunferências, foi preciso encontrar uma expressão algébrica que a generalizasse, levando ao entendimento mais global da circunferência.

No item 1, o grupo A criou circunferências tangentes externas ao invés de circunferências externas, mas notaram que, mudando o incremento, poderiam torná-las externas, conforme registro feito pelo grupo: “*Digitamos incógnitas na fórmula da circunferência de maneira que as mesmas pudessem ser alteradas mas na primeira vez deu errado pois a distância entre os centros eram iguais a soma dos dois raios, por isso alteramos o incremento para dar certo. A primeira vez que deu errado ficou uma tangente externa*.” Observa-se que os alunos conseguiram compreender as relações relativas das circunferências quando visualizaram a representação geométrica da sequência de circunferências criada, mostrando a importância da manipulação do objeto estudado em diferentes representações, contribuindo para o funcionamento cognitivo da compreensão que o *software* proporciona. Verifica-se também que o grupo conseguiu generalizar em uma única expressão algébrica a sequência de circunferências e que fizeram uso da manipulação dos parâmetros para chegarem ao resultado desejado, conforme mostra a lista 1 da Figura 59.

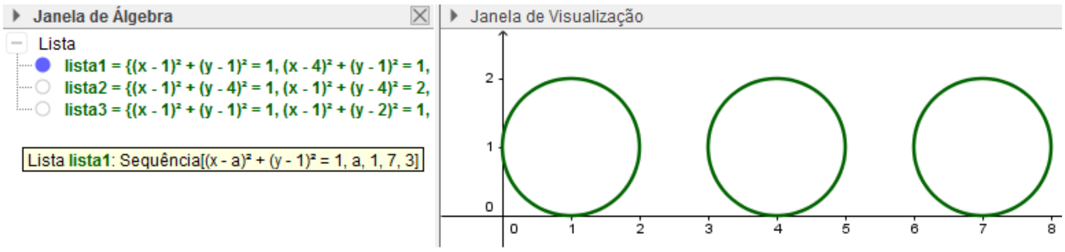


Figura 59 - Atividade 5, item 1, feita pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo C, ao responder o item 1.b), perguntou se deveria usar o comando *sequência* como na atividade anterior. Foi pedido para lerem novamente o enunciado e, a partir de então, concluíram sozinhos que deveriam utilizar o comando *sequência* para a construção das circunferências. Assim, o grupo colocou a expressão generalizada que criou as circunferências externas, conforme Figura 60. A Figura 61 ilustra as circunferências construídas no GeoGebra.

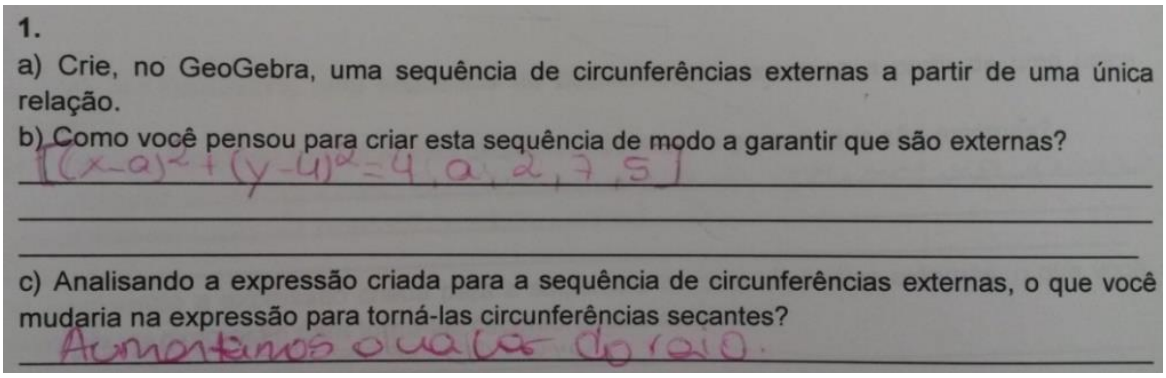

1.
a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências externas a partir de uma única relação.
b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são externas?
[(x-a)² + (y-4)² = 4, a, 2, 7, 5]
c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências externas, o que você mudaria na expressão para torná-las secantes?
Aumentamos o valor do raio.

Figura 60 - Item 1 respondido pelo grupo C. Fonte: Acervo pessoal.

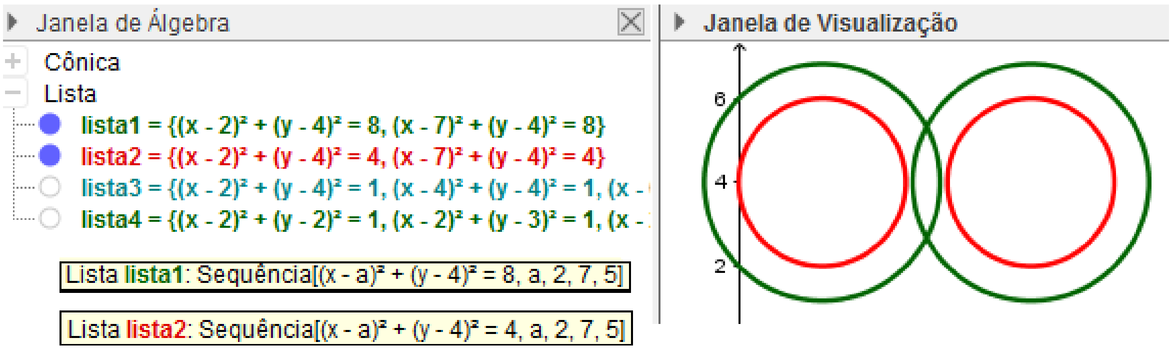


Figura 61 - Circunferências construídas pelo grupo C a partir da solicitação do item 1. Fonte: Acervo pessoal.

Nota-se que, embora sem saber como começar a atividade, os alunos transformaram as circunferências externas (na Figura 61 na cor vermelha) em circunferências secantes (na Figura 61 na cor verde) mudando apenas o valor do raio, optando assim por não alterar o parâmetro *a*, conforme mostram as listas 1 e 2 da Figura 61.

A dupla H construiu várias circunferências a partir das equações via Campo de Entrada, mas não sabia como determinar uma única relação para as várias circunferências. Ao serem lembrados do comando *sequência*, construíram as circunferências, porém secantes, ao invés de externas, como pedia a atividade. Foi preciso manipular os parâmetros para obter as circunferências secantes, pois o grupo não conseguiu, neste momento, antecipar a expressão correta que deveria digitar para obter as circunferências externas. Os alunos precisaram, primeiramente, visualizar a representação geométrica na janela de visualização do GeoGebra, para enxergarem que necessitavam voltar à representação algébrica que haviam criado anteriormente e desenvolverem a questão como tinha sido solicitada.

No item 2, que solicitava a construção de uma sequência de circunferências tangentes externas para depois torná-las concêntricas, o grupo A teve dificuldades em tornar a sequência de circunferências tangentes externas em concêntricas, como ilustrado na Figura 62.

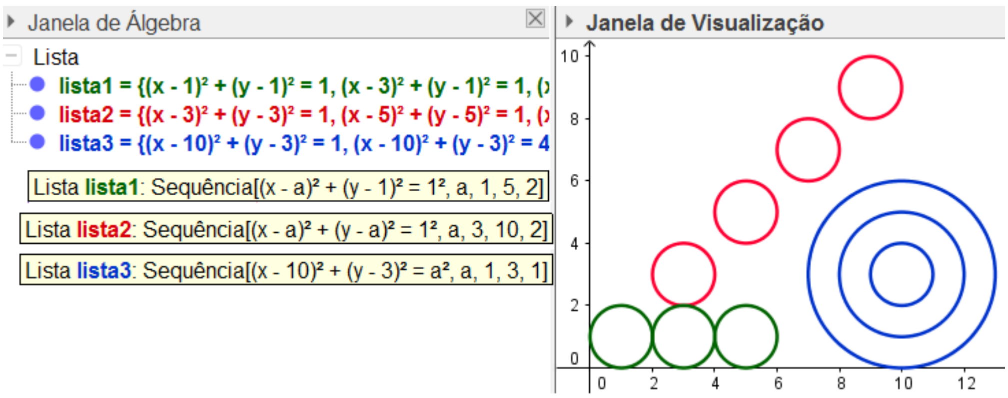


Figura 62 - Item 2 desenvolvido pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo A inicialmente utilizou o parâmetro *a* para determinar os valores para a abscissa dos centros das circunferências ao criar a lista 1, que gerou a coleção de circunferências tangentes externas ilustradas na Figura 62 na cor verde. No momento de transformar esta coleção de circunferências tangentes externas em circunferências concêntricas, os alunos deste grupo geraram uma sequência de circunferências distribuídas em diagonal, como mostra a Figura 62 na cor vermelha. Isso ocorreu porque utilizaram os parâmetros para determinar as coordenadas do centro da circunferência (Figura 62, lista 2). Ao visualizarem a representação geométrica da sequência que criaram, entenderam que o centro das circunferências deveria ter um valor fixo. Ao alterarem apenas o valor das coordenadas dos centros, os alunos geraram circunferências sobrepostas, pois todos os raios estavam com medidas iguais. Ao serem questionados sobre como visualizar todas as circunferências sobrepostas, compreenderam que o parâmetro deveria ser usado para variar as medidas de raio, e assim, avançaram para a expressão apresentada na lista 3 (Figura 62), que gerou a coleção de circunferências concêntricas ilustradas na Figura 62 na cor azul. O grupo A precisou apoiar-se na representação geométrica da coleção de circunferências para compreender o papel de cada elemento da representação algébrica e, assim, utilizar os parâmetros de forma a gerar a sequência desejada. Esse processo auxilia os alunos na compreensão do objeto circunferência de forma mais global, pois exige raciocínio sobre diferentes representações.

A dupla H não estava conseguindo construir as circunferências concêntricas, pois estava com a abscissa do centro variando. Estes alunos conseguiram visualizar o parâmetro que deveriam alterar quando questionados, conforme diálogo observado pela professora/pesquisadora:

- *O que vocês querem que fique variando? – professora/pesquisadora.*

- *O raio. – aluno da dupla H.*

- *Mas o que está variando? – professora/pesquisadora.*

- *Ah, a gente deve alterar a variável para o raio. – aluno da dupla H.*

Esperava-se que, ao lerem o enunciado da atividade, os alunos identificassem que deveriam utilizar a generalização (embora em nenhum momento foi falado no pensamento generalizador), já utilizada na atividade 4. Porém, alguns alunos estavam inseguros e questionaram a maneira de fazer; outros, só utilizaram o comando *sequência* quando foi reparado que estavam criando uma a uma as circunferências. Nota-se que os alunos conseguiram compreender as relações relativas das circunferências quando questionados conseguiram visualizar a representação geométrica da sequência de circunferências criadas, mostrando a importância da manipulação do objeto estudado em suas diferentes representações, e a importância de entender o significado dos parâmetros na expressão algébrica generalizada.

O item 3 pedia para escrever a expressão que generalizava a coleção ilustrada na Figura 63.

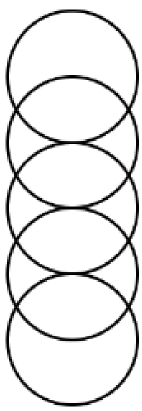


Figura 63 - Coleção de circunferências na vertical. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo A descreveu o que fez (Figura 64) e enviou o arquivo do GeoGebra com a expressão e a família de circunferências adequadamente.

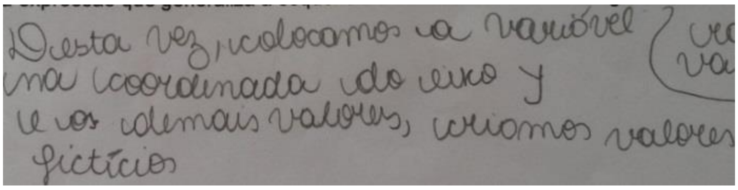

Desta vez, colocamos a variável na coordenada do eixo y e os demais valores, criamos valores fictícios

Figura 64 - Descrição do item 3 feita pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

Os grupos C e E escreveram a expressão conforme as Figuras 65 e 66.

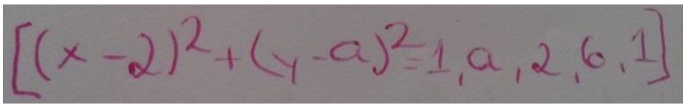

[(x-2)^2+(y-a)^2=1,a,2,6,1]

Figura 65 - Expressão criada pelo grupo C. Fonte: Acervo pessoal.

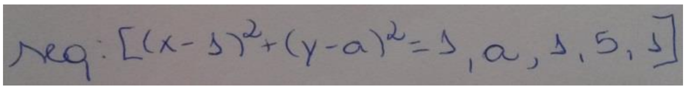

seq:[(x-1)^2+(y-a)^2=1,a,1,5,1]

Figura 66 - Expressão criada pelo grupo E. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo H fez o item 3 no GeoGebra, mas não escreveu a expressão como solicitado.

Neste item, os grupos não apresentaram questionamentos ao criarem a expressão que gerava a Figura 63, mostrando avanço na compreensão do objeto estudado.

5.1.6 Atividade 6

Na atividade 6, foi solicitado aos alunos que construíssem circunferências que giravam em torno de um ponto, depois em torno de uma circunferência, primeiro uma a uma para entender o processo de criação, depois generalizando.

No item 1, os grupos precisaram construir circunferências girando em torno de um ponto por um ângulo de 45º usando o comando “rotação em torno de um ponto” localizado na barra de ferramentas do GeoGebra. Deveriam construir quantas circunferências fossem necessárias para que essas rotacionassem por completo em torno do ponto criado, como ilustra a construção feita pelo grupo A, na Figura 67.

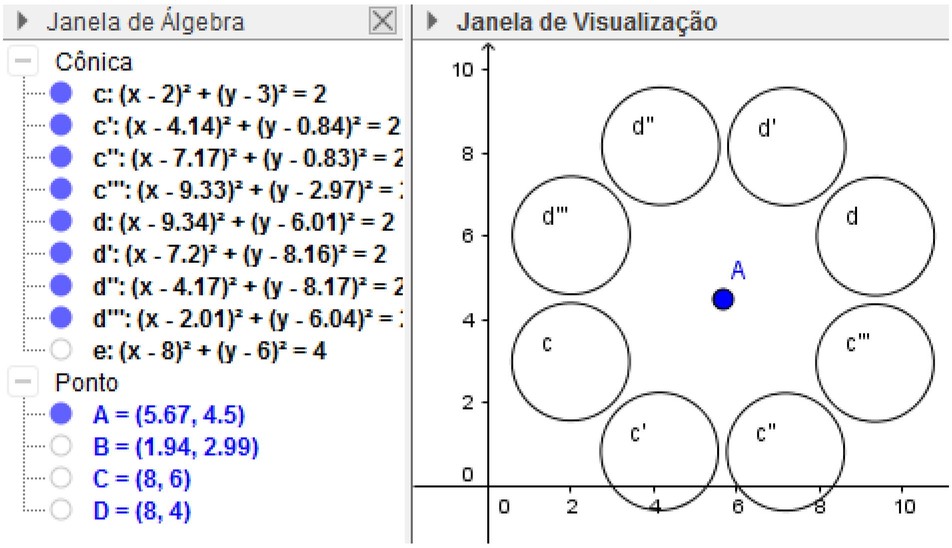


Figura 67 - Circunferências girando em torno de um ponto feita pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

Os grupos não encontraram dificuldades em construir as circunferências, somente o grupo E que construiu uma circunferência e um ponto no centro desta circunferência e não sabia como continuar a atividade. Pediu-se para que, com o que haviam construído, tentassem reproduzir a imagem que foi dada na folha. Os alunos mexeram no ponto, tirando-o do centro da circunferência e conseguiram visualizar que deveriam criar outras circunferências em torno daquele ponto com o comando dado.

No item 2, os grupos deveriam criar quatro circunferências girando em torno do centro de uma circunferência. Para tanto, deveriam utilizar, no Campo de Entrada, o comando *sequência* para criar a família de circunferências e, dentro do comando *sequência,* usar o comando chamado *Girar,* fazendo com que esta família de circunferências criadas girasse em torno do centro da primeira circunferência criada, ou seja, o ponto B, assim como fez o grupo H (Figura 68).

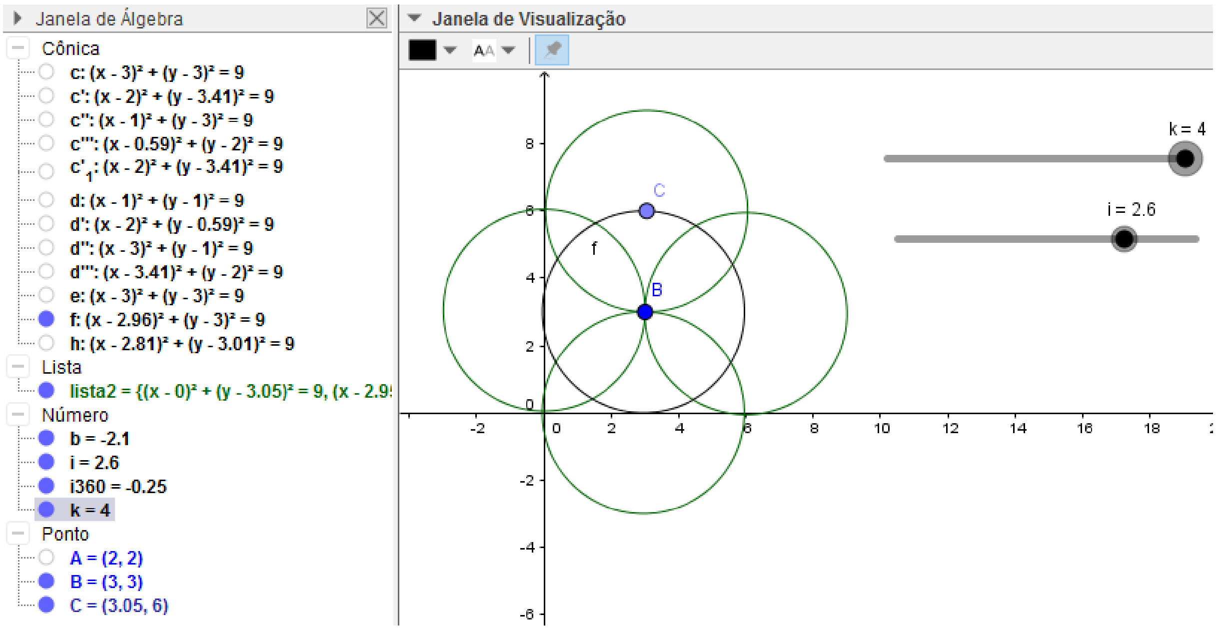


Figura 68 - Construção feita pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

A dupla E não sabia qual era o objeto que deveria escrever no item 2.c) e foi necessário explicar que o centro da circunferência deveria estar em função das coordenadas de um ponto, conforme a equação $\left(x - x(B)\right)^2 + (y - y(B))^2 = r^2$.

A dupla C teve a mesma dificuldade que a dupla E em entender qual era o objeto do item 2.c). Então foi pedido para a dupla ler e tentar entender o que estava escrito. Feita a leitura com atenção, os integrantes da dupla digitaram a equação $\left(x + x(A)\right)^2 + (y + y(A))^2 = r^2$. Ao movimentarem o controle deslizante, viram que o centro do objeto a ser girado ficou diferente, pois as circunferências giraram em torno de outro ponto (ponto A e não o ponto C como deveria), Figura 69, então modificaram as coordenadas do centro corretamente e conseguiram fazer a circunferência girar como o esperado.

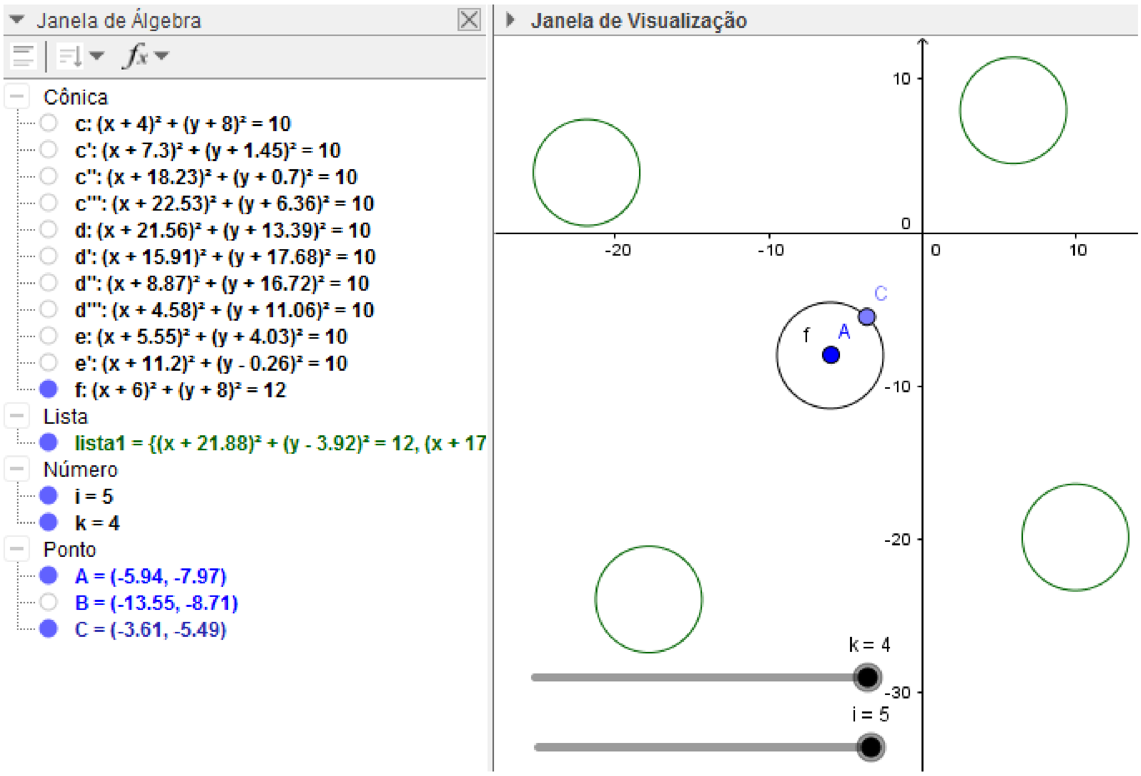


Figura 69 - Construção feita pelo grupo C com o ponto errado. Fonte: Acervo pessoal.

Novamente, o GeoGebra proporcionou transitar simultaneamente entre os dois registros, possibilitou encontrar o erro e compreender as estratégias para solucionar o problema.

Os demais grupos tiveram dificuldade para dar início à construção, faltando iniciativa por parte dos alunos para experimentarem e explorarem as possibilidades sobre o que fazer. Foram necessárias orientações como: Qual objeto vai girar? Olhando para a figura, em torno de qual ponto gira? A partir destas provocações, conseguiram avançar na atividade.

5.1.7 Atividade 7

Na atividade 7, o objetivo era reproduzir, por meio de raciocínio generalizador, a imagem da *semente da vida* (Figura 70), que é a etapa inicial da construção da *flor da vida*.

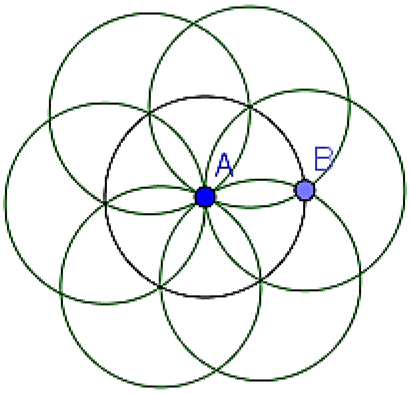


Figura 70 - *Semente da vida.* Fonte: Acervo pessoal.

A *flor da vida*[10] é um símbolo exotérico que tem origem no Egito, simboliza a geometria sagrada no exato momento que Deus deu origem ao Universo e também representa os processos como a mitose celular e os movimentos dos sóis e os planetas. Foi escolhida para ser construída nesta pesquisa por ser uma forma geométrica que apresenta várias famílias de circunferências.

A primeira família de circunferências criada na *flor da vida,* chamada de *semente da vida*, foi mostrada para os alunos a partir de um vídeo disponível no *website* que os alunos assistiram (Figura 71) e em um arquivo do GeoGebra. Os alunos precisavam utilizar as ideias exploradas no item 2 da atividade 6, ou seja, a construção de uma sequência de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência para reproduzir a *semente da vida* no *software*. Depois de observarem a construção pronta no GeoGebra, os alunos foram questionados sobre quais seriam as relações entre as circunferências criadas.

---

[10] Informações sobre a *flor da vida* disponível no *website*: http://rdbr2009.blogspot.com.br/2010/02/flor-da-vida-o-vescica-piscis.html. Acesso em 12 dez 2016.

Figura 71 - Alunos assistindo ao vídeo sobre a *semente da vida*. Fonte: Acervo pessoal.

Como a forma geométrica constituída por circunferências deveria ser criada a partir de uma única relação, logo todas as circunferências teriam as mesmas características. Esperava-se dos alunos a observação e percepção destas características em comum e suas descrições, estimulando assim o raciocínio generalizador desta atividade.

A dupla E perguntou por que as circunferências construídas por eles não tangenciavam o centro de giro, o ponto A da Figura 70. Para provocar a reflexão da dupla, foi questionado sobre o que a construção que os alunos fizeram (Figura 72) tinha de diferente das circunferências criadas e a da construção disponível no GeoGebra.

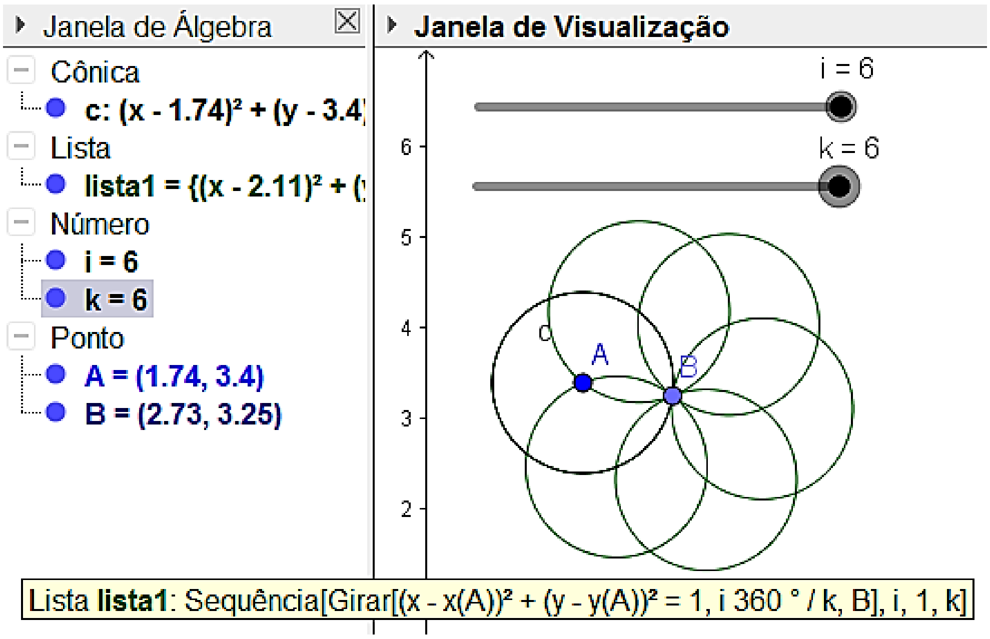


Figura 72 - Construção feita pelo grupo E com centro de giro diferente do solicitado. Fonte: Acervo pessoal.

Assim, identificaram que o problema estava relacionado ao centro da circunferência que deveria girar em torno do ponto A, mas estava em torno do ponto B. Foi criado um ponto C e o colocaram como par ordenado do centro da circunferência que deveria ser gerada a família de circunferências e que, por sua vez, girariam em torno do ponto A e não do B, como mostra a sintaxe da *semente da vida* na Figura 73.

Lista **lista1**: Sequência[Girar[(x - x(B))² + (y - y(B))² = 1, i 360 ° / k, A], i, 0, k]

Figura 73 - Sintaxe da *Semente da vida.* Fonte: Acervo pessoal.

Depois da lista1 criada, ao movimentar o controle deslizante *k*, temos a composição da família de circunferências mostrada na Figura 74.

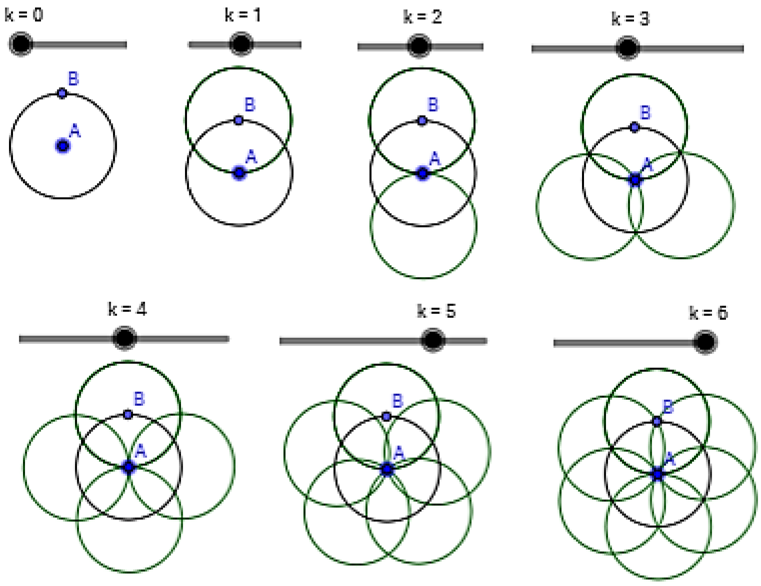
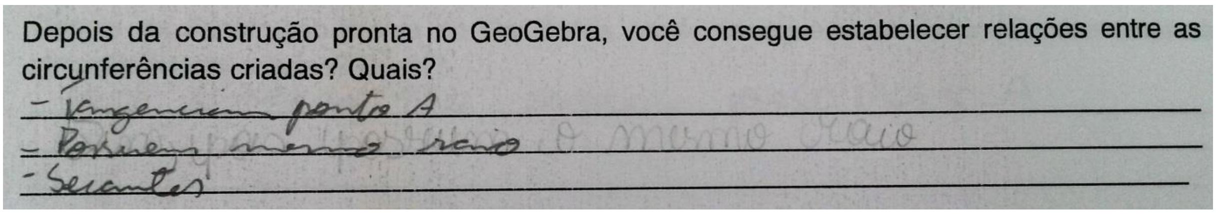


Figura 74 - *Semente da vida* a partir do movimento do controle deslizante *k.* Fonte: Acervo pessoal.

Quanto às relações que os alunos estabeleceram entre as circunferências, os grupos C e E apontaram para os mesmos itens: mesmo raio e passam pelo centro da circunferência central. O grupo A fez os seguintes apontamentos, ilustrados na Figura 75.


Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

- Tangenciam ponto A
- Possuem o mesmo raio
- Secantes

Figura 75 - Relações estabelecidas entre as circunferências do grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

"Tangenciam o ponto A", o ponto A ao qual o grupo A se refere (Figura 75) é o centro da circunferência no qual todas as demais circunferências estão girando em torno. Outra relação interessante feita pelo grupo A foi em relação às posições relativas das circunferências criadas "secantes" (Figura 75). Segue a construção no GeoGebra do grupo A (Figura 76).

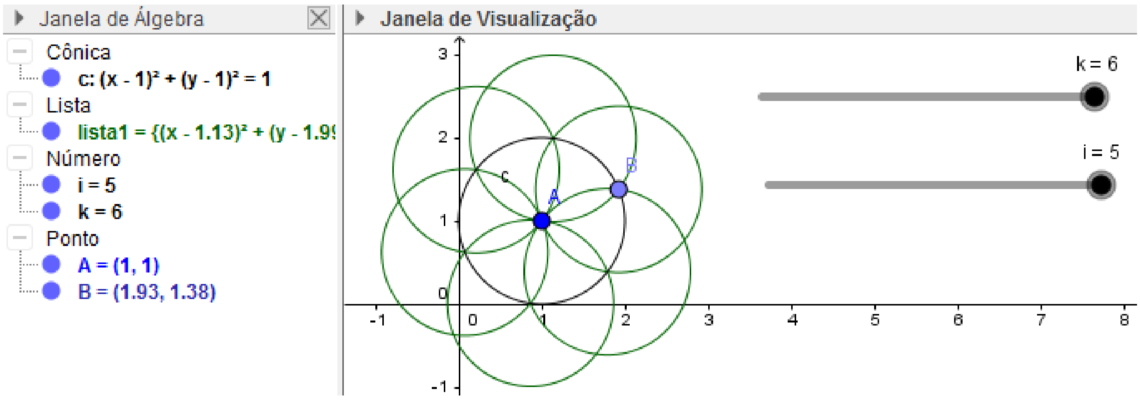
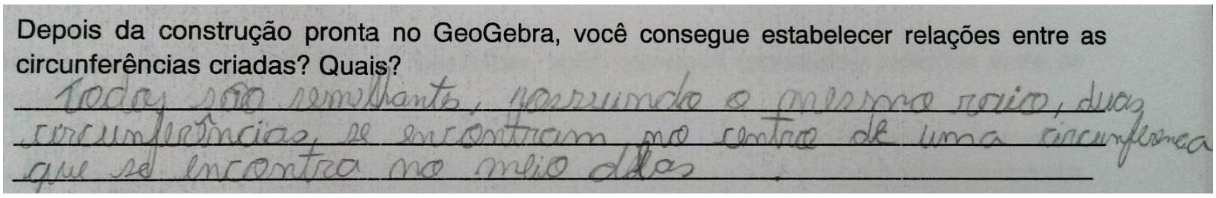


Figura 76 - Construção feita pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

Na Figura 77, pode-se observar que o grupo H constatou que "duas circunferências se encontram no centro de uma circunferência que se encontra no meio delas" corresponde à mesma característica descrita pelo grupo A, ao afirmarem que as circunferências "tangenciam o ponto A", somente com outras palavras. Assim, observa-se que o GeoGebra proporcionou aos alunos percepções semelhantes sobre o objeto de estudo, embora tenham se expressado de formas diferentes.



Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

toda são semelhantes, possuindo o mesmo raio, duas circunferências se encontram no centro de uma circunferência que se encontra no meio delas.

Figura 77 - Relações estabelecidas entre as circunferências do grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

5.1.8 Atividade 8

A atividade 8 consistia em produzir mais uma etapa da *flor da vida* com o objetivo de construir famílias de circunferências a partir de relações que generalizavam as circunferências criadas, estimulando assim o processo de generalização. Para replicar o início da *flor da vida* na atividade 8, foi disponibilizada uma construção no GeoGebra, na qual a novidade para esta atividade era criar mais uma lista (lista2 da Figura 78) e esta nova lista deveria girar em torno da lista existente ao movimentar o controle deslizante *m*, formando assim uma família de circunferências em torno do ponto *B*, como ilustrado na Figura 79.

Lista **lista2**: Sequência[Girar[lista1, i 360 ° / m, B], i, 0, m]

Figura 78 - Sintaxe da Lista2. Fonte: Acervo pessoal.

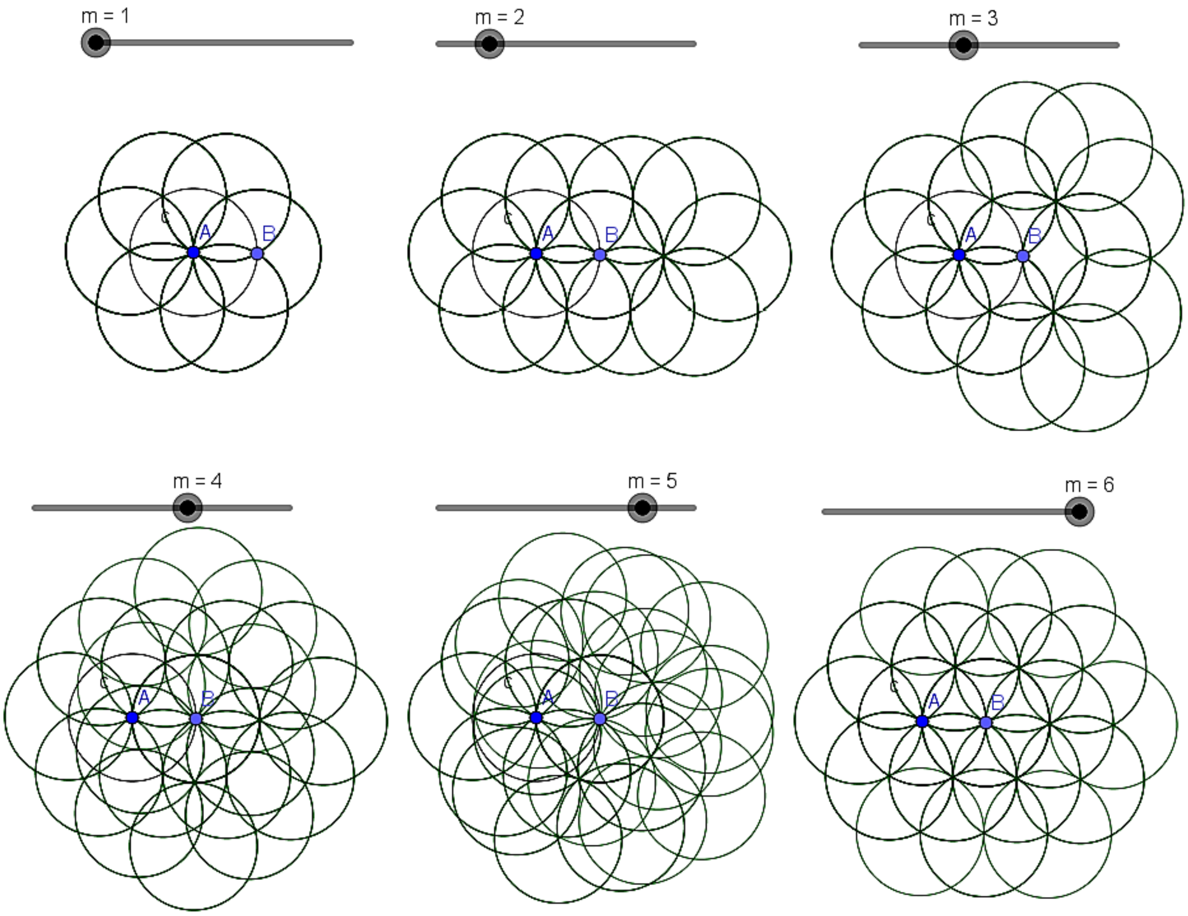


Figura 79 - Efeito gerado a partir da movimentação do controle deslizante *m.* Fonte: Acervo pessoal.

Assim, na construção final, os alunos deveriam gerar a imagem da Figura 80.

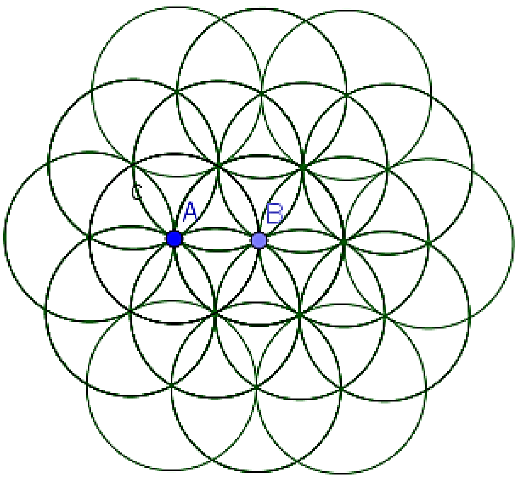


Figura 80 - Início da flor da vida a ser construída pelos alunos. Fonte: Acervo pessoal.

A partir da visualização desta etapa da *flor da vida* no GeoGebra, foi solicitado aos alunos a construção e o estabelecimento de relações entre as circunferências criadas.

Os grupos se ajudaram, uns perguntavam aos outros a ordem que deveriam fazer as construções. Foi preciso ajudar alguns grupos, explicando que o que girava na última sequência de circunferências (lista 2 da Figura 81) era a lista 1 criada a partir do comando *sequência*, como construiu o grupo C.

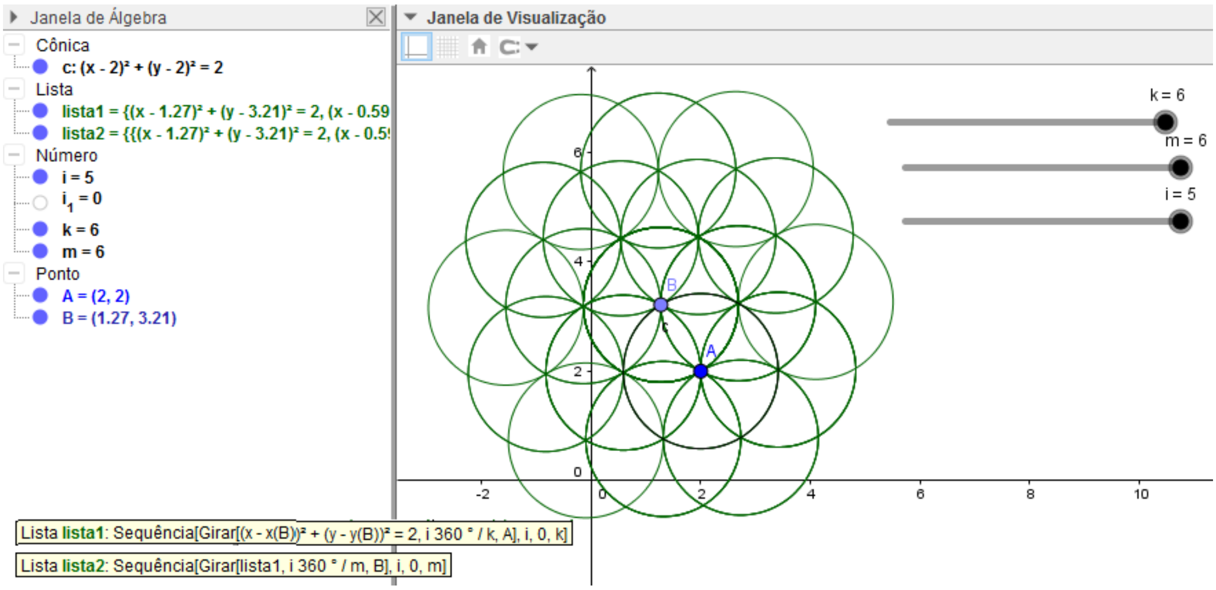
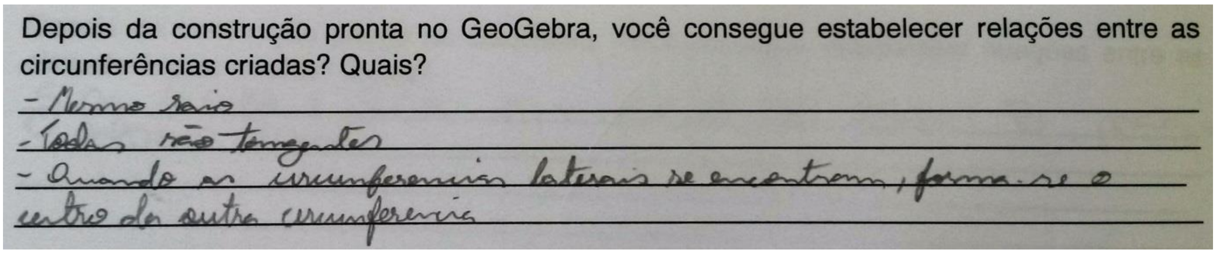


Figura 81 - Construção do início da flor da vida feita pelo grupo C. Fonte: Acervo pessoal.

Nesta atividade, têm-se duas listas criadas com famílias de circunferências, ou seja, por duas vezes os alunos tiveram que generalizar. Primeiramente, generalizaram uma família de circunferências em torno do centro de uma circunferência, criando assim a lista1. Depois, a ideia era replicar o que haviam construído e, para isso, deveriam generalizar novamente, agora a lista1, ou seja, houve uma composição de generalizações que os alunos conseguiram realizar ao visualizarem no GeoGebra que a imagem que queriam replicar estava sendo representada algebricamente pela lista1.

Ao estabelecer as relações entre as circunferências, os grupos C e E fizeram as mesmas anotações: "*lista 1 gira em torno do ponto B, possuem o mesmo raio". O* grupo A, que na atividade anterior visualizou todas as circunferências sendo secantes, nesta atividade, que é uma complementação da atividade anterior, fez uma constatação diferente em relação às circunferências: "*todas são tangentes"* (Figura

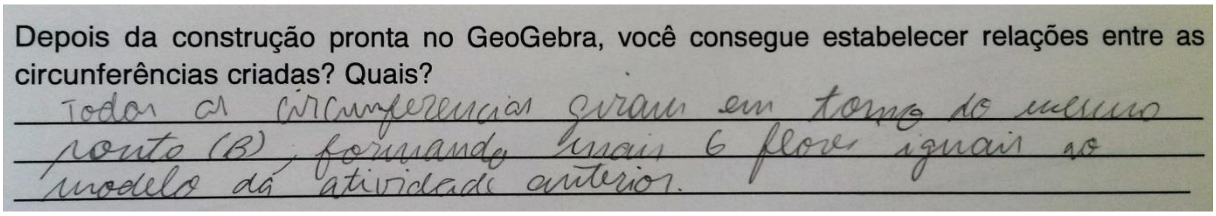
82), o que demonstra como o GeoGebra é útil para a percepção dos alunos em relação às posições relativas das circunferências e que foi possível construir, a partir de um único comando, uma família de circunferências porque essas foram generalizadas.


Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

- Mesmo raio
- Todas são tangentes
- Quando as circunferencias laterais se encontram, forma-se o centro da outra circunferencia

Figura 82 - Relações estabelecidas feitas pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

A mesma ideia de generalização encontra-se no comentário do grupo H, na Figura 83.


Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

Todas as circunferencias giram em torno do mesmo ponto (B), formando mais 6 flores iguais ao modelo da atividade anterior.

Figura 83 - Relações estabelecidas feitas pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

Estes alunos, ao conseguirem formalizar as relações entre as circunferências já conhecidas por eles e generalizá-las, se encaixam no que Dreyfus (1991) chama de generalização expansiva, em que a estrutura cognitiva existente no aluno se expande.

Ao generalizar, estabelecer relações entre as propriedades do objeto circunferência, identificar e utilizar os parâmetros de forma coerente com os objetivos pensados, representar o objeto de estudo na forma algébrica e geométrica, os alunos estão claramente operando no “mundo formal axiomático” de Tall (2004), pois estão desenvolvendo um pensamento matemático mais avançado.

Este pensamento mais avançado que os alunos estão desenvolvendo foi potencializado pelo uso do GeoGebra como uma *ferramentaparapensamento* (SHAFFER e CLINTON, 2006), permitindo pensar em Matemática ao manipular o objeto na forma algébrica e ter o retorno imediato na forma geométrica.

5.1.9 Atividade 9

A atividade 9 foi feita no mesmo dia que a atividade 8 e consistia na finalização da construção da *flor da vida*. Para tanto foi solicitado que os alunos observassem a construção feita no GeoGebra, movimentando primeiramente o controle deslizante *k*, que cria circunferências em torno do centro de uma circunferência, depois o controle deslizante *m* que cria outra camada de circunferências em torno das circunferências já criadas, e por fim o controle deslizante *n* que cria mais uma e última camada de circunferências, e assim reproduzissem a sequência de circunferências como na construção da Figura 84 e estabelecessem relações entre as circunferências criadas.

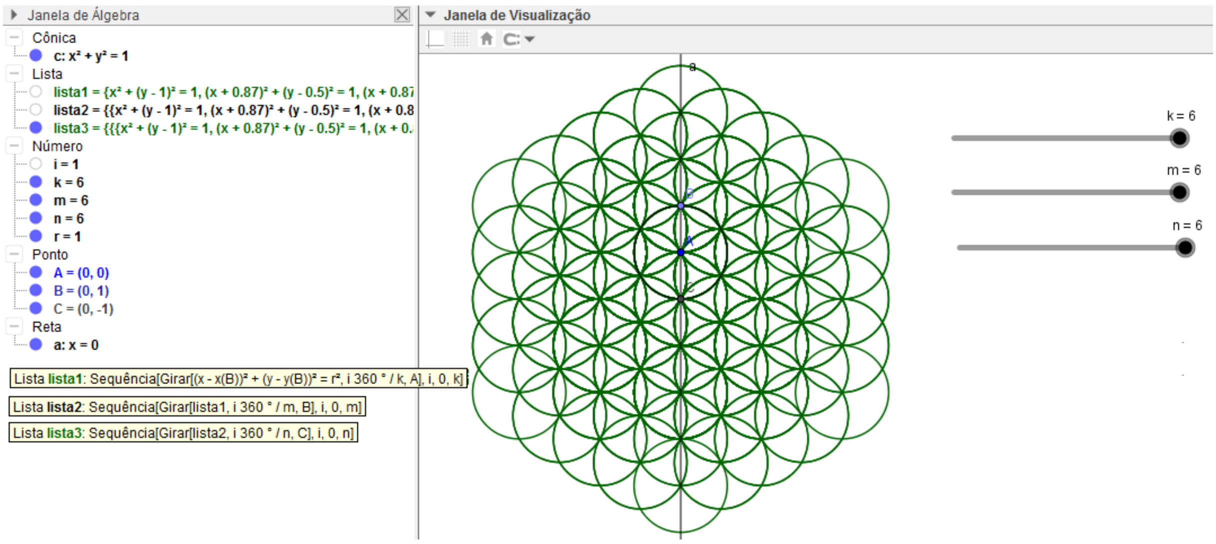


Figura 84 - Construção da atividade 9 no GeoGebra. Fonte: Acervo pessoal.

Os alunos, para começar, apoiaram-se na atividade 8 e entenderam que deveriam criar mais uma lista a partir do comando *sequência* e que a lista 1 girava em torno do ponto B, a lista 2 replicava a lista 1 e a lista 3 replicava a lista 2, como mostra a sintaxe das listas na Figura 85.

Lista **lista1**: Sequência[Girar[(x - x(B))² + (y - y(B))² = 1, i 360 ° / k, A], i, 0, k]

Lista **lista2**: Sequência[Girar[lista1, i 360 ° / m, B], i, 0, m]

Lista **lista3**: Sequência[Girar[lista2, i 360 ° / n, C], i, 0, n]

Figura 85 - Sintaxes das listas criadas. Fonte: Acervo pessoal.

Para replicar a lista2, novidade nesta atividade, os alunos, ao visualizarem a construção no GeoGebra, notaram que necessitavam criar um ponto na circunferência de centro A oposto ao ponto B, porque a lista2 gira em torno do ponto B (Figura 86).

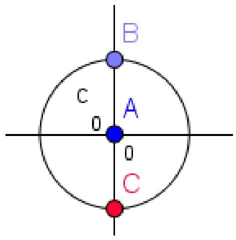


Figura 86 - Ponto C oposto ao ponto B. Fonte: Acervo pessoal.

Após terem criado este ponto, as etapas seguintes feitas pelos alunos foram: a criação de um novo controle deslizante, *n*, e do comando *sequência* para gerar a lista3. As circunferências geradas com o controle deslizante *n* na lista3 estão representadas na Figura 87.

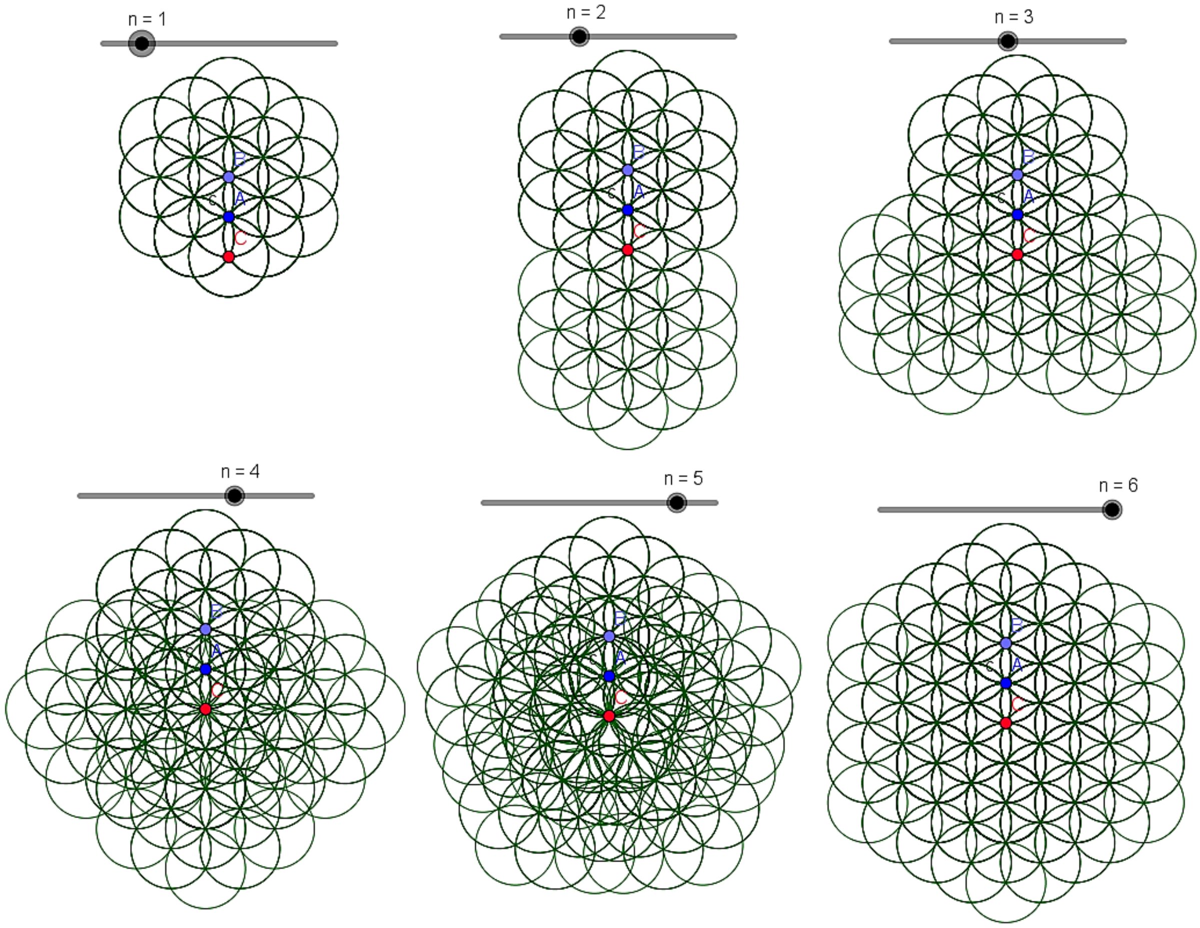


Figura 87 - Efeito gerado a partir da movimentação do controle deslizante *m.* Fonte: Acervo pessoal.

Nesta atividade, os alunos superaram as expectativas ao se ajudarem e estabelecerem relações entre as circunferências criadas, como: *“Todas possuem o mesmo raio; são secantes”* (observações escritas do grupo A).

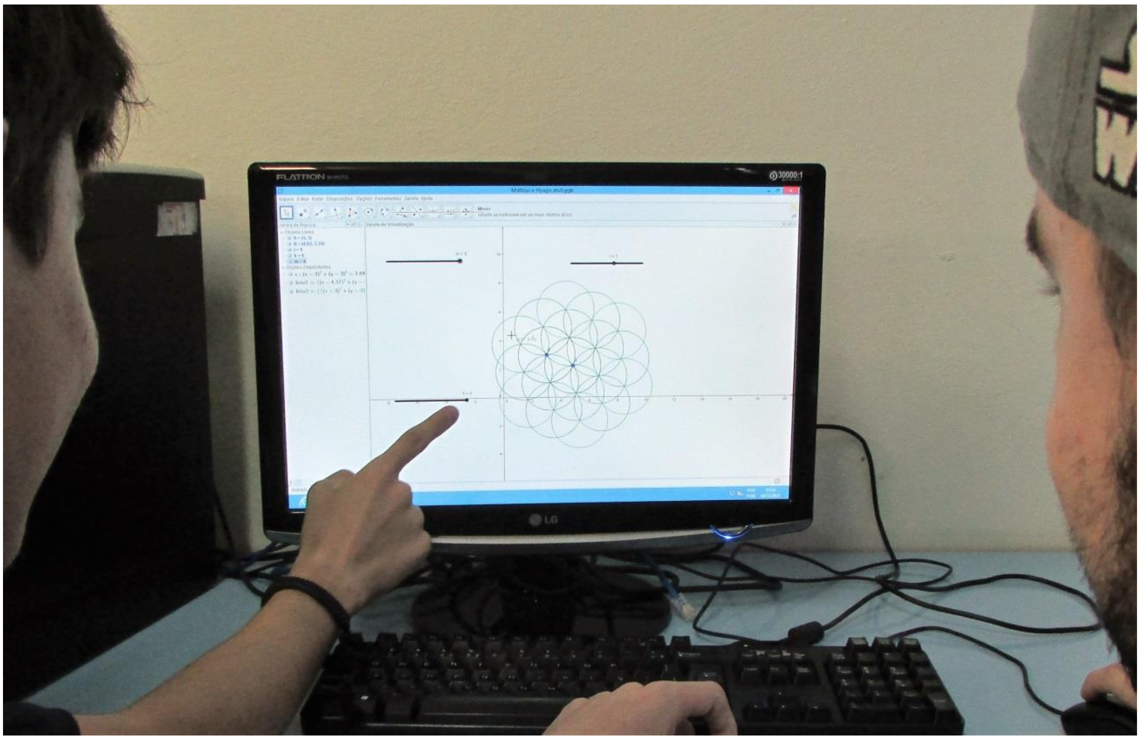


Figura 88 - Alunos envolvidos na construção da *flor da vida.* Fonte: Acervo pessoal.

É fácil ver o envolvimento dos alunos nesta atividade, ao desenvolverem-na com maior facilidade do que nas atividades anteriores, pois conseguiram generalizar ao criar listas com famílias de circunferências, mostrando compreensão referente aos parâmetros da circunferência, demonstrando desta forma um entendimento global do objeto circunferência. Concluíram que precisavam generalizar as circunferências a serem criadas e sabiam qual comando usar para que esta generalização acontecesse. Ao conseguirem generalizar, estes alunos especificaram as propriedades das circunferências e das relações entre elas, formalizando em uma única relação, passando de um caso específico para um caso geral, o que caracteriza a generalização, segundo Dreyfus (1991).

Estes alunos apresentaram características de desenvolvimento cognitivo pertencentes ao “mundo formal axiomático” ou terceiro mundo de Tall (2004), ao formalizarem a compreensão de uma maneira global da circunferência, fazendo uso das corporificações do primeiro mundo e dos símbolos do segundo mundo. Nesta formalização, os alunos demonstraram compreender as peculiaridades dos parâmetros da circunferência e transitaram de forma natural entre as diferentes representações do objeto de estudo, demonstrando que houve um processo de abstração nesta atividade, bem como dos seus subprocessos de representação, generalização e síntese.

5.1.10 Atividade 10

A atividade 10 tinha como objetivo escolher uma imagem formada por várias circunferências e construí-la no GeoGebra utilizando o menor número possível de comandos e o comando *sequência* para generalizar. Os alunos ainda deveriam organizar um roteiro dos passos utilizados para reproduzir a imagem escolhida.

As Figuras 89 à 106 mostram a imagem original escolhida para ser reproduzida no GeoGebra, a construção feita pelos alunos no GeoGebra da imagem escolhida, as relações algébricas utilizadas para realizar as construções e a descrição de como as construíram de todos os quatro grupos analisados nesta pesquisa.

Grupo A

O grupo A escolheu a imagem da Figura 89 para reproduzir no GeoGebra e o resultado está na Figura 90.

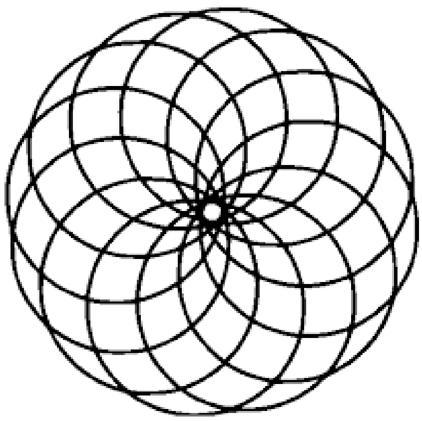


Figura 89 - Imagem escolhida pelo trio A. Fonte: Acervo pessoal.

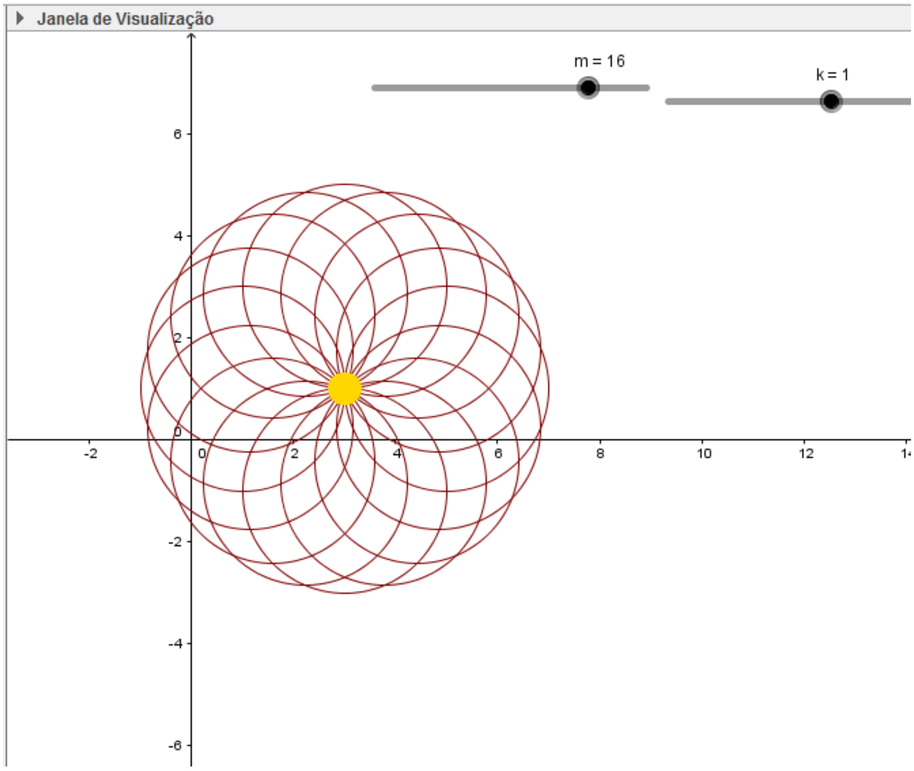


Figura 90 - Imagem da reprodução feita pelo trio A. Fonte: Acervo pessoal.

Para construir esta figura geométrica, o grupo A criou uma única relação algébrica, expressa na Figura 91.

Lista **lista1**: Sequência[Girar[(x - x(A))² + (y - y(A))² = 4, ((i 360)°) / m, B], i, 1, m]

Figura 91 - Sintaxe da única relação utilizada pelo grupo A. Fonte: Acervo pessoal.

Nesta sintaxe, fica claro que o grupo A girou uma circunferência de centro *A* em torno do ponto *B* e criou um controle deslizante *m* para generalizar as circunferências, como ilustrado na Figura 92, na qual está exemplificado o uso do controle deslizante *m* igual a 1 e depois igual a 8.

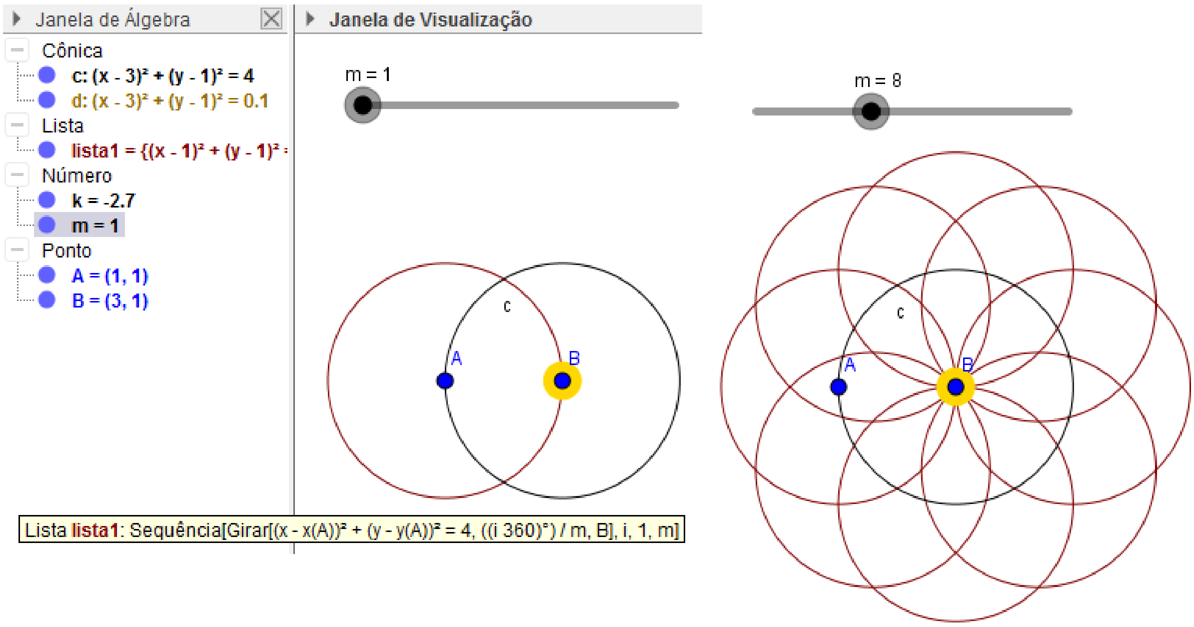


Figura 92 - Construção do grupo A com o controle deslizante igual a 1 e a 8. Fonte: Acervo pessoal.

Conforme relatado pelo grupo A (Figura 93), ao construírem a forma geométrica escolhida, esta não ficou como desejavam e, ao visualizarem a construção como havia ficado, conseguiram observar o problema na representação geométrica e corrigi-lo na representação algébrica, o que mostra o quanto esses alunos progrediram em seus conhecimentos sobre o estudo da circunferência e o quanto trabalhar nestes dois registros foi importante para a construção do conhecimento destes alunos acerca do objeto estudado. Segundo Pea (1987), esta inter-relação entre representações geométrica e algébrica oportuniza a expansão do pensamento matemático.

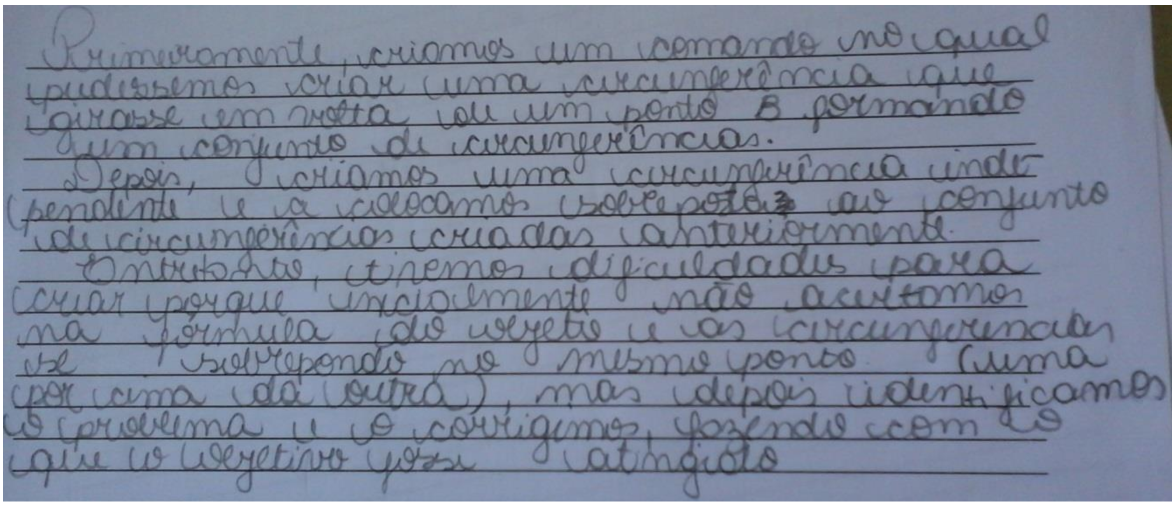

Primeiramente, criamos um comando no qual pudéssemos criar uma circunferência que girasse em volta de um ponto B formando um conjunto de circunferências.
Depois, criamos uma circunferência independente e a colocamos sobreposta ao conjunto de circunferências criadas anteriormente.
Entretanto, tivemos dificuldades para criar porque inicialmente não acertamos na fórmula do objeto e as circunferências se sobrepondo no mesmo ponto (uma por cima da outra), mas depois identificamos o problema e o corrigimos, fazendo com que o objetivo fosse atingido

Figura 93 - Descrição do trio A da construção da Figura 92. Fonte: Acervo pessoal.

Grupo C

O grupo C escolheu a imagem da Figura 94 para reproduzir e o resultado da reprodução está na Figura 95.

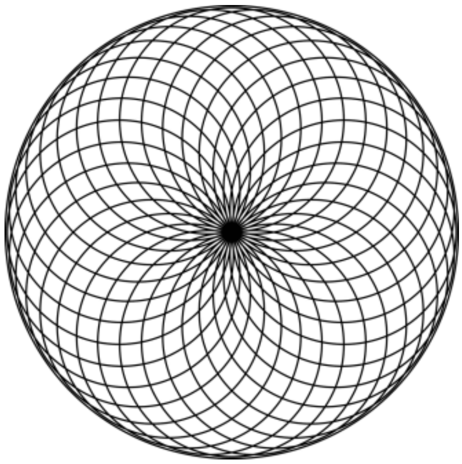


Figura 94 - Imagem escolhida pela dupla C. Fonte: Acervo pessoal.

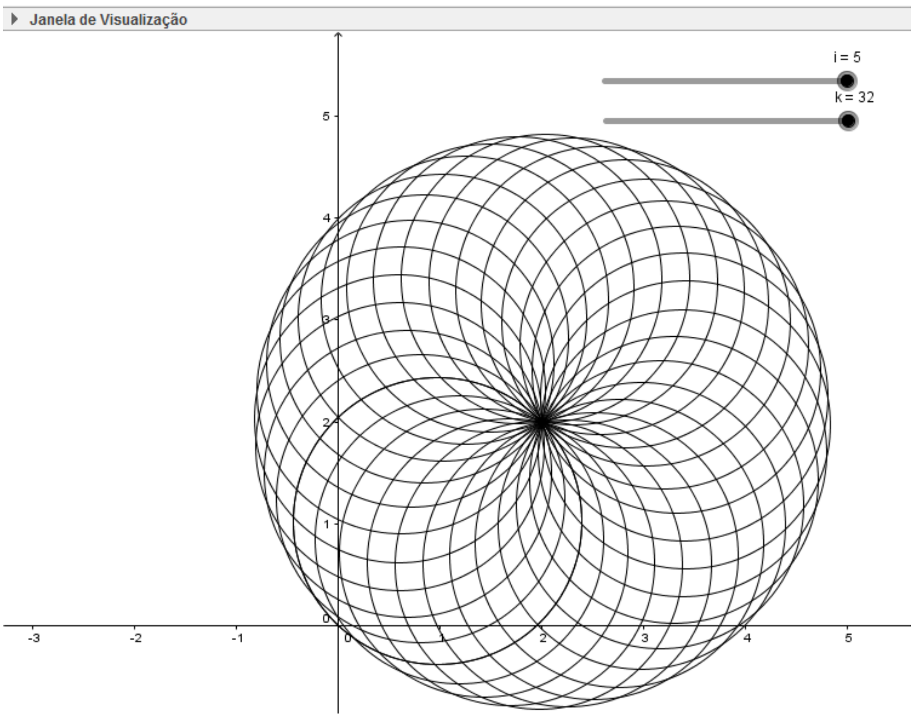


Figura 95 - Imagem da reprodução feita pela dupla C. Fonte: Acervo pessoal.

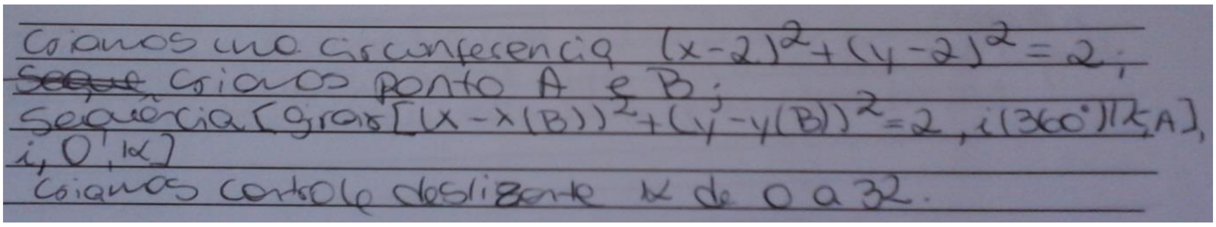

Criamos uma circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=2$;
~~Segue~~ criamos ponto A e B;
Sequência[Girar[$(x-x(B))^2+(y-y(B))^2=2$, i(360°)/k, A],
i, 0, k]
Criamos controle deslizante k de 0 a 32.

Figura 96 - Descrição da dupla C sobre a construção da Figura 95. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo C descreveu, por meio dos comandos, como reproduziram a imagem da Figura 94 e não encontraram dificuldades em reproduzi-la. Nota-se que os alunos generalizaram as circunferências criadas em torno de uma circunferência por meio de uma única relação (Figura 97).

Lista **lista1**: Sequência[Girar[(x - x(B))² + (y - y(B))² = 2, i (360°) / k, A], i, 0, k]

Figura 97 - Sintaxe da única relação utilizada pelo grupo C. Fonte: Acervo pessoal.

Grupo E

O grupo E escolheu uma imagem (Figura 98) com várias famílias de circunferências (Figura 99).

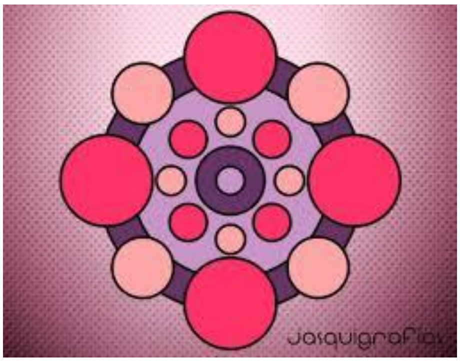


Figura 98 - Imagem escolhida pela dupla E. Fonte: Acervo pessoal.

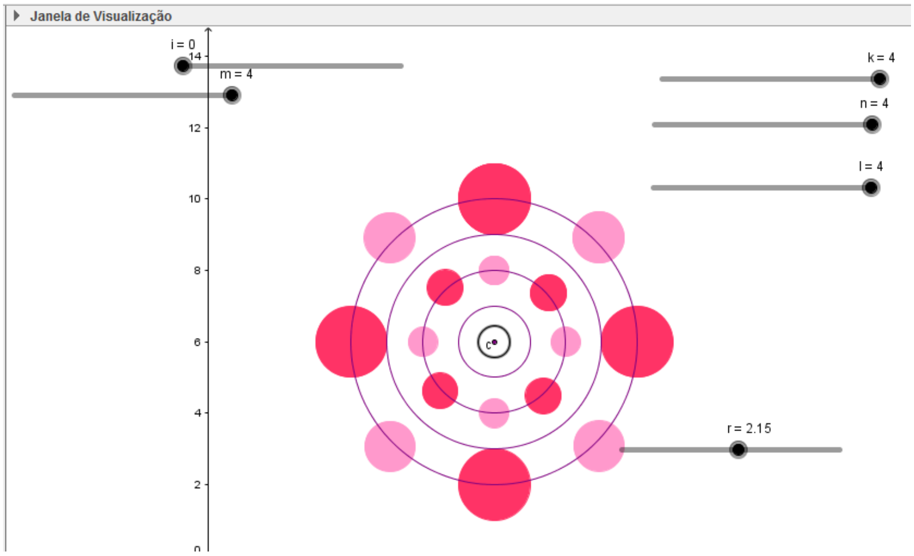


Figura 99 - Imagem da reprodução feita pela dupla E. Fonte: Acervo pessoal.

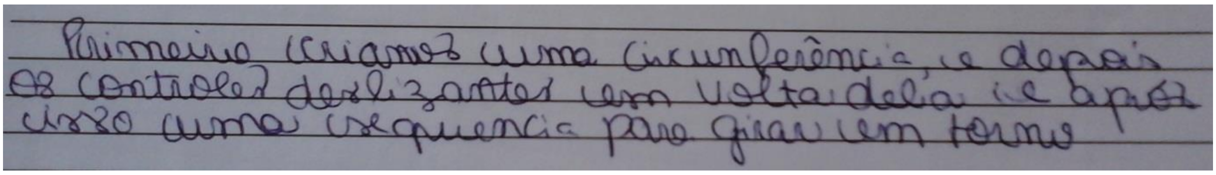

Primeiro criamos uma circunferência, e depois os controles deslizantes em volta dela e após isso uma sequencia para girar em torno

Figura 100 - Descrição da dupla E sobre a construção da Figura 99. Fonte: Acervo pessoal.

Para criar a imagem da Figura 99, os alunos do grupo E utilizaram mais de uma sequência de circunferências, como descrito na Figura 100, usaram cinco relações algébricas com o uso dos comandos *sequência* e *girar*, que estão representadas na Figura 101.

Lista lista1: Sequência[Girar[(x - x(C))² + (y - y(C))² = 1 / 6, i (360°) / k, B], i, 0, k]

Lista lista2: Sequência[Girar[(x - x(D))² + (y - y(D))² = 1 / 4, ((i 360)°) / m, B], i, 0, m]

Lista lista3: Sequência[Girar[(x - x(E))² + (y - y(E))² = 1 / 2, i 360 ° / n, B], i, 0, n]

Lista lista4: Sequência[Girar[(x - x(F))² + (y - y(F))² = 1, i 360 ° / l, B], i, 0, l]

Lista lista5: Sequência[(x - x(B))² + (y - y(B))² = r², r, 0, 4]

Figura 101 - Sintaxe das listas criadas pelo grupo E. Fonte: Acervo pessoal.

Cada uma das listas criadas gerou uma família de circunferências que estão na Figura 102.

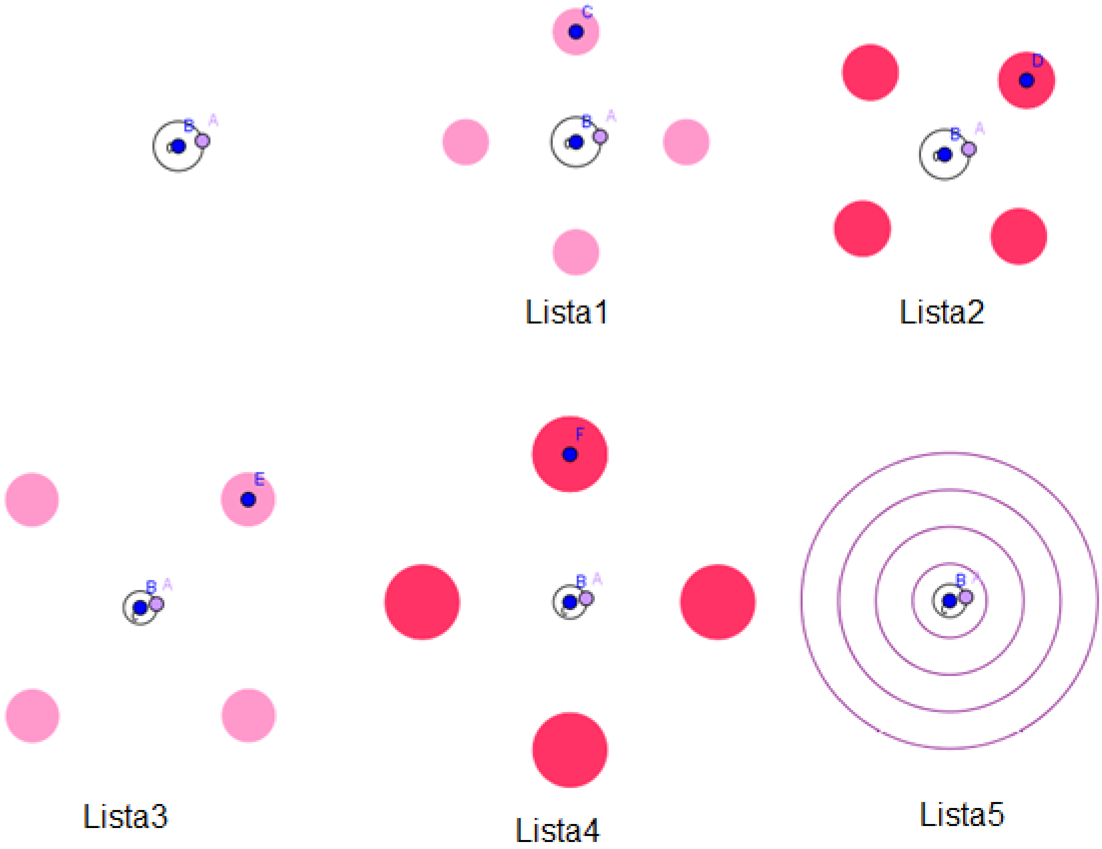


Figura 102 - Etapas da construção do grupo E. Fonte: Acervo pessoal.

A primeira circunferência de centro B da Figura 102 serve de base para a criação de todas as listas. Todas as listas criadas com as famílias de circunferências têm como centro de giro o ponto B, variando apenas o centro da circunferência que serve de base para gerar as demais da mesma família. Para criar as circunferências da família da lista5, não foi utilizado o comando *girar*, pois a ideia do grupo era formar circunferências concêntricas de raios diferentes. Por este motivo, o grupo E criou uma sequência de circunferências com centro no ponto B e com parâmetro raio variando, como se pode ver na expressão algébrica da lista5 na Figura 101 e a representação geométrica desta lista na Figura 102.

Além de criarem as circunferências por meio de generalizações, demonstrando que houve uma expansão da estrutura de conhecimento (DREYFUS, 1991), os alunos deste grupo exploraram os recursos do GeoGebra e descobriram como colorir a área da circunferência, ficando a imagem reproduzida mais semelhante à imagem escolhida.

Grupo H

O grupo H escolheu a imagem da Figura 103 para reproduzir e também quis colorir as circunferências criadas como se pode verificar na Figura 104.

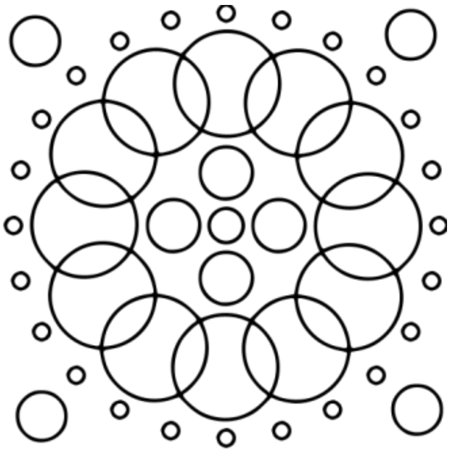


Figura 103 - Imagem escolhida pelo trio H. Fonte: Acervo pessoal.

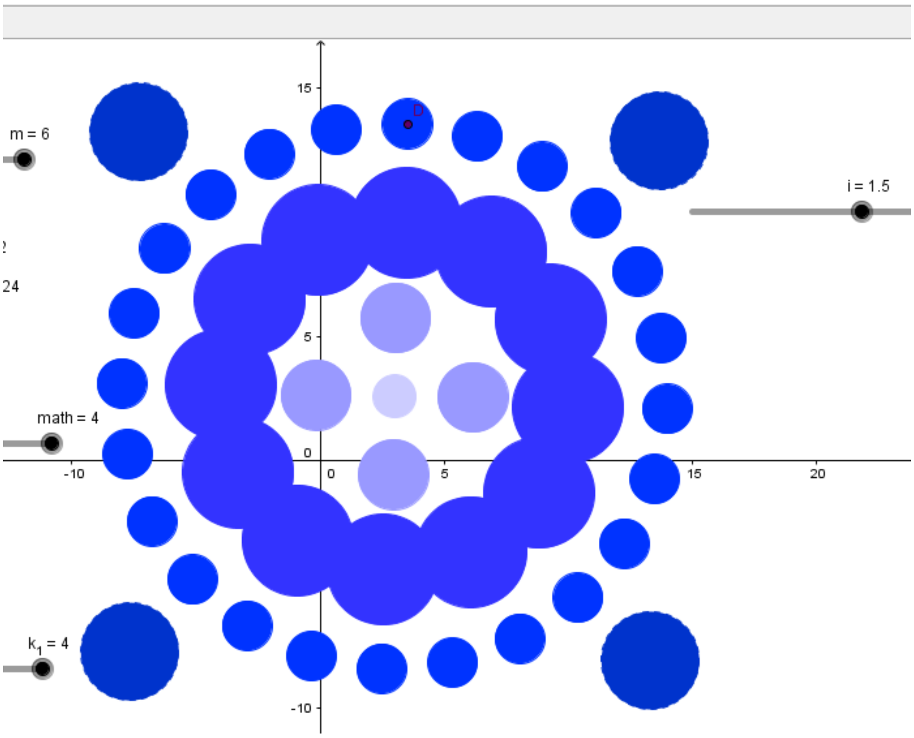


Figura 104 - Imagem da reprodução feita pelo trio H. Fonte: Acervo pessoal.

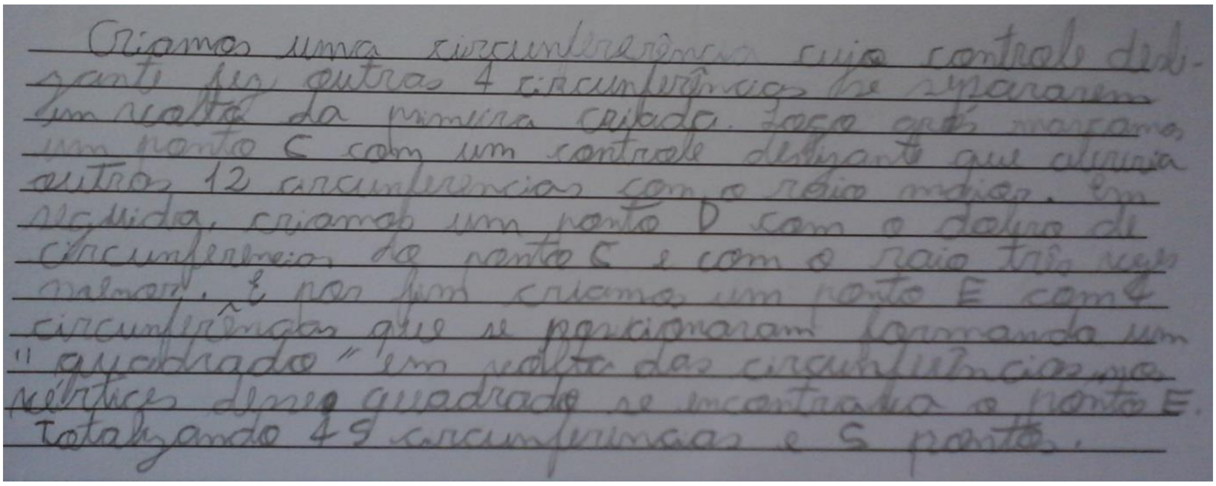

Criamos uma circunferência cujo controle deslizante fez outras 4 circunferências se espalharem em volta da primeira criada. Logo após marcamos um ponto C com um controle deslizante que criaria outras 12 circunferências com o raio maior. Em seguida, criamos um ponto D com o dobro de circunferências do ponto C e com o raio três vezes maior. E por fim criamos um ponto E com 4 circunferências que se posicionaram formando um "quadrado" em volta das circunferências, no vértices desse quadrado se encontrava o ponto E. Totalizando 45 circunferências e 5 pontos.

Figura 105 - Descrição do trio H sobre a construção da Figura 104. Fonte: Acervo pessoal.

O grupo H também explorou o GeoGebra de forma a encontrar como colorir a área das circunferências criadas por meio de generalização. Das 45 circunferências contabilizadas pelo grupo e descritas como geradas (Figura 105), necessitaram apenas de quatro relações algébricas para criá-las (Figura 106), mostrando o quão consolidado está o processo de generalizar ao buscarem comportamentos em comum nas circunferências que podem ser generalizados, expandindo os domínios de validação e passando de casos particulares para um caso geral, o que Dreyfus (1991) define como generalização.

Lista **lista1**: Sequência[Girar[(x - x(C))² + (y - y(C))² = 5, i (360°) / k, A], i, 1, k]

Lista **lista2**: Sequência[Girar[(x - x(D))² + (y - y(D))² = 1, i (360°) / p, A], i, 1, p]

Lista **lista3**: Sequência[Girar[(x - x(E))² + (y - y(E))² = 3.89, i (360°) / math, A], i, 1, math]

Lista **lista4**: Sequência[Girar[(x - x(B))² + (y - y(B))² = 2, i (360°) / k_1, A], i, 1, k_1]

Figura 106 - Sintaxe das listas criadas pelo grupo H. Fonte: Acervo pessoal.

De um modo geral, os alunos superaram as expectativas ao realizarem esta atividade com autonomia e utilizando os conhecimentos desenvolvidos nas atividades anteriores.

5.1.11 Análise do Processo de cada Grupo nas Atividades

Ao acompanhar e analisar cada grupo ao longo das dez atividades que foram propostas e desenvolvidas, constata-se a aprendizagem que estes grupos tiveram acerca do objeto de estudo circunferência.

Grupo A

O grupo A, logo nas primeiras atividades propostas, estava operando no “mundo conceitual corporificado”, ao utilizar o GeoGebra para observar, testar e fazer suas conclusões. Também utilizaram o GeoGebra para desenvolver a capacidade de pensar em Matemática, usando-o como uma *ferramentaparapensamentos*. Embora, para estes alunos, a relação entre os registros geométrico e algébrico estivessem em fase de construção no início da atividade 3, ao longo dela, passaram a estabelecer relações importantes entre o conceito, as representações algébrica e geométrica da circunferência, operando assim no “mundo operacional simbólico”.

Na atividade 4, o grupo A estava com dificuldade de utilizar uma variável como parâmetro para generalizar a equação da circunferência e fez uso do GeoGebra para pensar em Matemática e para auxiliar neste processo de generalização. No final desta atividade, o grupo demonstrou ter compreendido este processo ao utilizar parâmetros para criar uma única expressão algébrica que representasse uma família de circunferências com o comando *sequência*.

Nas atividades seguintes, o grupo A, por vezes, precisou se apoiar na representação geométrica de uma família de circunferências para compreender o papel dos parâmetros e conseguir chegar a uma única expressão algébrica que generalizasse esta família, o que é um processo normal na aprendizagem, pois os alunos estão aos poucos consolidando os seus conhecimentos sobre o objeto de estudo e o *software* GeoGebra teve um papel importante neste processo, ao proporcionar o desenvolvimento do pensamento Matemático nos alunos.

Nas atividades finais, os alunos deste grupo desenvolveram um pensamento matemático mais avançado ao conseguirem formalizar as relações entre as circunferências, conforme as suas posições relativas, e de generalizar, representando de forma clara o objeto circunferência nas suas diferentes representações, caracterizando que estes alunos estavam operando no “mundo formal axiomático".

GRUPO C

Os alunos do grupo C iniciaram as atividades demonstrando insegurança ao precisarem da representação geométrica para ter certeza de que haviam digitado a equação algébrica de forma correta, demonstrando estarem operando no “mundo conceitual corporificado”. Logo esta insegurança deu lugar ao capricho e a organização, ao representarem as posições relativas das circunferências de forma colorida e criativa, mostrando clareza e espontaneidade ao transitar entre os registros de representação algébrico e geométrico, demonstrando a conversão feita entre os dois registros.

Este grupo conseguiu operar os símbolos algébricos com exatidão, se enquadrando no “mundo operacional simbólico” e, na sequência, estava desenvolvendo certo nível de abstração do pensamento matemático, ao obter relações entre os objetos matemáticos e as suas respectivas propriedades.

Ao iniciar o trabalho com o comando *sequência*, o grupo C não teve clareza de como identificar os parâmetros da equação da circunferência que deveriam variar e quais deveriam ter um valor fixo. Foi preciso apoiar-se nos recursos do *software* GeoGebra para conseguirem atingir os objetivos desta atividade, mostrando que, em relação à utilização dos parâmetros, os alunos estavam em fase de experimentação e observação, caracterizando o “mundo conceitual corporificado”.

Ao tentar expressar uma família de circunferências por meio de uma única relação, inicialmente, o grupo teve algumas dificuldades em reconhecer os parâmetros a serem utilizados na expressão, mas o uso do GeoGebra, permitindo a transição entre os registros algébrico e geométrico, fez com que os alunos pensassem matematicamente e visualizassem os parâmetros de forma correta.

Nas atividades finais, foi notória a evolução do grupo ao conseguirem generalizar as coleções de circunferências por meio das expressões algébricas, conseguindo formalizá-las e fazendo parte do “mundo formal axiomático”.

GRUPO E

Nas atividades iniciais, o grupo E demonstrou estar dando os primeiros passos no processo de generalização. Estabeleceram relações entre os objetos matemáticos e as suas propriedades, caracterizando um nível de abstração mais elevado do pensamento matemático, operando no “mundo formal axiomático”.

Com o começo do estudo do comando *sequência*, o grupo passou a ter dificuldades em determinar os valores dos parâmetros, denotando que os conhecimentos acerca do objeto circunferência ainda não estavam totalmente consolidados, mas montaram estratégias, utilizando o GeoGebra, para alcançar os objetivos da atividade.

Em outras atividades, o grupo utilizou a experimentação para atingir os resultados esperados, explorando o *software* da melhor forma possível como uma *ferramentaparapensamentos*, caracterizando o “mundo conceitual corporificado”. O fato de estar testando possibilidades entre os registros de representações fez com que o grupo alcançasse a compreensão e o conhecimento mais global do objeto circunferência. Desta forma, nas atividades finais, o grupo E conseguiu criar família de circunferências utilizando parâmetros para chegar à generalização e assim operarem no “mundo formal axiomático”.

A exploração do *software* GeoGebra foi tanta que, na última atividade proposta, o grupo descobriu como colorir a área da circunferência para deixar a imagem criada no GeoGebra mais fiel à imagem origem.

GRUPO H

Para desenvolver as atividades iniciais, o grupo H precisou das representações geométricas para conseguir definir as representações algébricas. Demonstraram pertencer ao “mundo conceitual corporificado” ao estarem na etapa de perceber, observar e descrever o objeto circunferência, passando assim, a terem mais clareza sobre os parâmetros da equação da circunferência.

Na aula em que foi aplicada a atividade 3, compareceu à aula somente um aluno, que apresentou dificuldades em desenvolver a atividade sozinho, e constatou-se que este aluno estava na fase inicial do processo de compreensão do objeto estudado, pois fez uso do GeoGebra para manipular o objeto de estudo e fazer tentativas para chegar ao propósito da atividade.

Nas atividades seguintes, a dupla H teve algumas restrições para identificar os parâmetros da equação da circunferência que deveriam variar e quais não deveriam, não sendo ainda capazes de antecipar e estabelecer valores e variáveis para os parâmetros da equação. Ao manipular o objeto de estudos em suas diferentes representações, os alunos passaram a compreender as propriedades da circunferência e o significado dos parâmetros na expressão algébrica. Também passaram a criar coleções de circunferências a partir de uma única expressão, fazendo uso do pensamento generalizador.

Na atividade final, os alunos demonstraram estar operando no “mundo formal axiomático”, ao generalizar quarenta e cinco circunferências por meio de apenas quatro expressões algébricas, mostrando que os domínios de validação foram expandidos ao procurarem pontos em comum nas circunferências para generalizá-las.

.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das dificuldades de uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio em compreender o estudo da circunferência nas suas diferentes representações, originou-se este trabalho de dissertação, que consiste em uma experiência de ensino e aprendizagem sobre o estudo da circunferência, em que o principal objetivo foi a utilização de parâmetros no *software* GeoGebra, para provocar nos alunos o processo de generalização de raciocínios a partir das atividades que estimulem este processo. Ao analisar o processo de cada grupo, ao longo da realização desta pesquisa, acompanhou-se o desenvolvimento que estes grupos tiveram ao avançarem nas atividades propostas, mostrando evolução na compreensão do estudo da circunferência, tanto na equação e suas propriedades, como em transitar espontaneamente entre os registros algébricos e geométricos.

Portanto, quanto à pergunta norteadora da pesquisa: **Quais são as contribuições do GeoGebra no estudo da Geometria Analítica, em específico da circunferência, utilizando parâmetros para chegar a raciocínios generalizados, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio?**, constatou-se que o GeoGebra foi utilizado como um recurso para pensar em Matemática e explorar o objeto matemático circunferência em suas diferentes representações, conforme a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), na qual afirma que os alunos precisam mobilizar o objeto de estudo em diferentes registros de representações para ter a compreensão deste objeto de forma mais ampla.

A pesquisa desenvolvida nessa dissertação teve como objetivos: elaborar, implementar e analisar uma sequência de atividades; analisar as contribuições do *software* GeoGebra no estudo da circunferência; observar como os alunos mobilizam os registros de representações semióticas; e identificar as contribuições do *software* GeoGebra para a compreensão do raciocínio generalizar quando utilizado os parâmetros.

Para atender aos objetivos da pesquisa, uma sequência de atividades foi disponibilizada em um *website* no endereço eletrônico http://marcianecarlos.wixsite.com/matematica. Este *website* interativo é o produto didático relacionado com a dissertação.

Para fazer a análise desta pesquisa, foi preciso observar como os alunos transitavam entre os registros das representações semióticas, algébricos e geométricos, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009, 2011), durante o processo de ensino e aprendizagem proposto por este trabalho. Nota-se o quão importante foi o uso da tecnologia, o GeoGebra, nesta experiência para desencadear o processo de conversão entre os registros algébricos e geométricos do estudo da circunferência, auxiliando assim, o processo de aprendizagem. Esta ferramenta tecnológica, além de tornar as aulas mais dinâmicas, instigou reflexões nos alunos que os levaram à compreensão da circunferência e das relações existentes entre os registros geométrico e algébrico, tornando mais versátil as diferentes representações.

Quanto as contribuições do *software* GeoGebra para a compreensão do raciocínio generalizador ao utilizar parâmetros para a construção de figuras geométricas, nota-se que, a partir da manipulação no GeoGebra, os alunos identificaram pontos que estavam variando em uma família de circunferências e os representaram por meio de uma variável, para conseguir expressar estas circunferências em uma única expressão algébrica, ou seja, fizeram uso dos parâmetros para alcançarem, na atividade cognitiva, a generalização, parte integrante do terceiro mundo, o “mundo formal axiomático” de Tall (2004).

O GeoGebra, juntamente com as atividades propostas, também proporcionou aos alunos transitarem entre os Três Mundos da Matemática ao perceberem, visualizarem, observarem, descreverem e formalizarem as propriedades das circunferências e suas relações.

Os resultados foram positivos e conclui-se que trabalhar atividades que proporcionam o conhecimento global do objeto de estudo é importante para a compreensão do mesmo. A utilização do *software* GeoGebra nesta sequência de atividades foi importante no processo de aprendizagem dos alunos, ao proporcionar o pensar matematicamente diante das atividades propostas sendo, portanto, uma *ferramentaparapensamentos* (SHAFFER e CLINTON, 2006).

Ao ver a compreensão do objeto de estudo por parte dos alunos, constatei o quanto foi gratificante desenvolver esta atividade e ver a satisfação dos alunos ao compreenderem na forma mais global a circunferência e suas propriedades em suas diferentes representações, por meio dos parâmetros no GeoGebra. Ver o envolvimento dos alunos nas atividades, desempenhando-as com esmero, me faz acreditar, cada vez mais, que os alunos precisam de atividades envolvendo a tecnologia que estimulem o pensamento matemático acerca do objeto de estudo.

Desta forma, tenho como objetivo, nas minhas aulas sobre o estudo da circunferência, continuar aplicando o produto didático desenvolvido nesta pesquisa, a fim de poder proporcionar aos meus alunos um conhecimento mais amplo sobre a circunferência. Pretendo, também, continuar fazendo pesquisas relacionadas aos parâmetros no GeoGebra com outros conteúdos matemáticos, com o mesmo propósito: possibilitar aos alunos o conhecimento global do objeto de estudo.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo matemática com o geogebra.** São Paulo: Editora Exato, 2010.

BASSO, M.V.A., NOTARE, M.R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação.** v. 13, n.2, 2015. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432/36324>. Acesso em: 27 abr. 2016.

BASTOS, Débora de Oliveira. **Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do Software GeoGebra.** Dissertação de Mestrado. UFRG, 2014. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6520/TCC_Debora_Bastos_versao_final.pdf?sequence=1>. Acesso em: 04 nov. 2016.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Orientações curriculares para o ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**, volume 2. – Brasília: 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 mai. 2016.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 out. 2016.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **PCN+: Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 23 out. 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** São Paulo: Ática, 2011.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, David (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking.** Norwell: Kluver Academic Publishers, 1991, p. 25 – 41.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica - 2ª ed. Campinas, São Paulo. Papirus, p. 11- 33. 2005.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação dos dois registros. **Revemat**. Florianópolis: v.6, n.2, p.96-112, 2011.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**. Florianópolis: v.07, n.2, p.266-297, 2012.

FARAGO, Jorge Luiz; CARNEIRO, Lucio Nicolau dos Santos. **Matemática: ensino médio, 3ª série**. Curitiba: Positivo, 2012.

FIALHO, Edson de Souza Carneiro. **Uma proposta de utilização do software GeoGebra para o ensino de geometria analítica.** Dissertação de Mestrado. CEFET/RJ, 2010. Disponível em: <http://dippg.cefet-rj.br/index.php?option=com_docman&task=doc_details&gid=842&Itemid=169>. Acesso em: 04 nov. 2016.

INSTITUTO GeoGebra no Rio de Janeiro. Apresentação. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 09 mai. 2016.

GEOGEBRA. GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download>. Acesso em: 09 mai. 2016.

GOLDENBERG, P. Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. In: **Education Development Center**, 2000. Disponível em: <http://mcc.edc.org/pdf/iss_tech.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2016.

GRAVINA, M. A., BASSO, M. V. A. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A., BÚRIGO, E. Z., BASSO, M. V. A., GARCIA, V. C. V (org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática – tripé para formação do professor de Matemática.** Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAY, E.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **Journal for Research in Mathematics Education,** 26 (2), 115–141,1994.

KAPUT, J. Technology Becoming Infrastructural in Mathematics Education. In: **TSG15-ICME-10**, Copenhagem, 2004. Disponível em: <http://matrix.skku.ac.kr/sglee/album/TSG%2015_%20The%20role%20and%20use%20of%20technology%20in%20the%20teaching%20and%20learning%20of%20mathematics.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2016.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear.** 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.MACHADO, Nílson José. **Geometria Analítica.** Coleção Matemática por assunto- vol.7. São Paulo: Editora Scipione, 1988.

NOTARE, M. R.; FIOREZE, L.A.; HALBERSTADT, F. F. O Software Grafeq e os Registros de Representação Semiótica: Uma Análise de Trabalhos com Ilusão de Ótica. In: **XIV Conferencia Interamericana de Educação Matemática - XIV CIAEM**, 2015, Tuxtla. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2015.

NOTARE, M.R., GRAVINA, M. A. (2013). A Formação Continuada de Professores de Matemática e a Inserção de Mídias Digitais na Escola. **Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM)**, São Carlos, SP, Brasil. Disponível em: <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T1_13_MarciaNotare_MariaAliceGravina_versao_final.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2016.

OLIVEIRA, Carlos André Neiva. **O Uso do GeoGebra no Ensino da Geometria Analítica: Estudo da Circunferência.** Dissertação de Mestrado. UFG, 2013. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3237>. Acesso em: 04 nov. 2016.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática.** 1.ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PAULA, Teófilo Oliveira de. **O ensino de Geometria Analítica com o uso do GeoGebra.** Dissertação de Mestrado. UFRJ, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/510. Acesso em 04 nov. 2016.

PEA, R. Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), **Cognitive Science and Mathematics Education.** Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p.89-122, 1987. Disponível em: <http://web.stanford.edu/~roypea/RoyPDF%20folder/A41_Pea_87b.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2016.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática.** Bolema, 25, 105-132, 2006.

SHAFFER, D. W., CLINTON, K. A. Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age. In: **Mind, Culture and Activity**, vol. 13, n. 4, Califórnia, 2006. Disponível em: <http://lchc.ucsd.edu/mca/Journal/pdfs/13-4-williamson.pdf>. Acesso em: 17 mai. 2016.

SILVA, Luís Gustavo. **Variação de Parâmetros em Funções Elementares Utilizando o GeoGebra.** Dissertação de Mestrado. UFTM, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/421>. Acesso em: 04 nov. 2016.

SOUSA, Agigleudo Coêlho de. **Atividades interativas com o GeoGebra: uma abordagem introdutória ao estudo de geometria analítica.** Dissertação de Mestrado. UFC, 2014. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/8957>. Acesso em: 04 nov. 2016.

TALL, David. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, David (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking.** Norwell: Kluver Academic Publishers, 1991, p. 3 – 21.

TALL, David. Introducing Three Worlds of Mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 23 (3). 29–33, 2004.

WERNECK, Jorge da Silva. **Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática com Atividades de Aplicação em Geometria Analítica: A circunferência.** Dissertação de Mestrado. Porto Velho: UNIR, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/357>. Acesso em: 04 nov. 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

Produto Técnico

Como produto desta dissertação apresentada-se a sequência das atividades revisadas sobre o estudo da circunferência, que foi aplicada nesta pesquisa, e está disponível no endereço eletrônico http://marcianecarlos.wixsite.com/matematica. Esta sequência é composta por dez atividades e pode ser aplicada em sala de aula para uma melhor compreensão do objeto de estudo.

- **Atividade 1:** Recordar noções básicas do GeoGebra

Objetivos: relembrar alguns comandos básicos do GeoGebra.

1. Insira um novo ponto na janela de visualização utilizando a barra de ferramentas ou digitando no Campo de Entrada.
2. Construa uma circunferência qualquer digitando no Campo de Entrada a equação da circunferência que seja construir, atribuindo valores para o centro e o raio.
3. Construa uma circunferência utilizando o controle deslizante variando o raio.

- **Atividade 2:** Construindo circunferências

Objetivos: construir circunferências variando o centro e/ou raio por meio de controles deslizantes e construir também circunferências onde devemos levar em consideração suas posições relativas.

1. Crie uma circunferência, digitando no Campo de Entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (0,0) e raio 2.

2.

a) Crie outra circunferência, digitando no Campo de Entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (6,1) e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

3.

a) Crie outra circunferência, a partir da sua equação, com raio 1 e centro variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

4.

a) Digite a equação da circunferência com centro e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio?

- **Atividade 3:** Construindo circunferências conforme suas posições relativas

Objetivos: construir circunferências a partir de suas posições relativas com o intuito de identificar no plano cartesiano o espaço que cada circunferência ocupa em função do seu centro e raio.

1.

a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.

b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?

c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.

e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?

f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

2.

a) Digite as equações de duas circunferências que são tangentes externas.

b) Registre a maneira como você pensou para garantir a posição de tangentes externas destas circunferências.

c) O que você mudaria na(s) equação(ões) de modo a torná-las tangentes internas?

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências tangentes internas.

3.

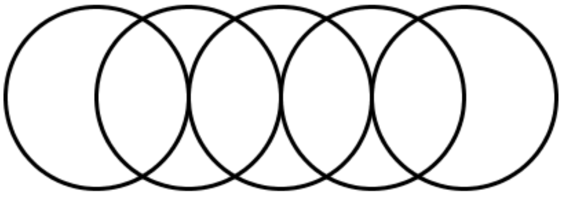
a) Digite as equações de duas circunferências que são secantes.

b) Registre a maneira como você pensou para garantir que as duas circunferências sejam secantes.

- **Atividade 4:** Construir sequências de circunferências

Objetivos: Identificar na representação das circunferências dadas, a parte da circunferência que fica variando. Aprender a construir sequências de circunferências utilizando o pensamento generalizador.

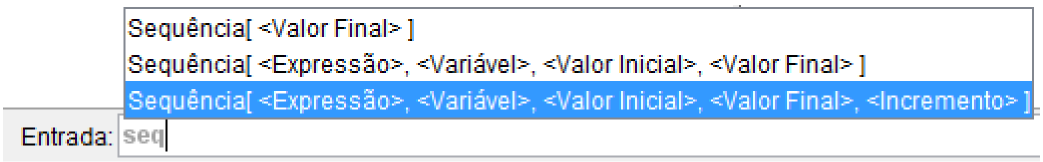
1. Construir uma sequência de circunferências conforme o desenho:



2. Pensando na equação da circunferência para criar esta sequência de circunferências, o que você acha que deve variar de uma circunferência para outra da sequência?

3. Como podemos criar uma sequência de circunferências conforme a figura acima?

4. Digitar no Campo de Entrada a palavra *sequência* e escolher como mostra a imagem:



- ✓ Em “expressão”, digitar a circunferência que queremos criar;
- ✓ Em “variável”, digitar a variável que deve mudar para gerar a sequência;
- ✓ Em “valor inicial” e “valor final”, digitar os valores inicial e final da variável;
- ✓ Em “incremento”, digitar o valor que queremos que a variável propague.

➢ **Atividade 5:** Construir sequências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra

Objetivos: Construir sequências de posições relativas entre circunferências com base nas suas equações e utilizando o pensamento generalizador. A partir de uma representação geométrica de sequências de circunferências, encontrar uma expressão que a generalize.

1.

a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências externas a partir de uma única relação.

b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são externas?

c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências secantes?

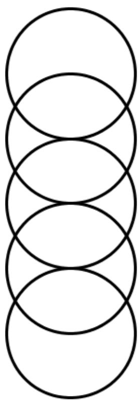
2.

a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências tangentes externas a partir de uma única relação.

b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são tangentes externas?

c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências tangentes externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências concêntricas?

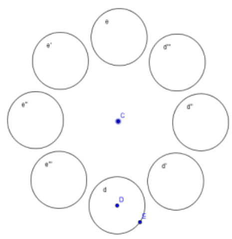
3. Escrever a expressão que generaliza a sequência de circunferências da imagem abaixo:



➢ **Atividade 6:** Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência

Objetivos: construir circunferências que giram em torno de uma circunferência, primeiro uma a uma para entender o processo de criação, depois generalizando.

Vamos criar uma sequência de circunferências que giram primeiramente em torno de um ponto e depois em torno de uma circunferência. Em um primeiro momento criaremos as circunferências uma a uma e, em um segundo momento, criaremos várias por meio de uma expressão.

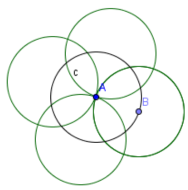


1.

a) Construir um ponto qualquer e uma circunferência qualquer. Queremos que esta circunferência rotacione/gire em torno do ponto por um ângulo de 45°. Para tanto, selecionamos o comando “rotação em torno de um ponto” localizado na barra de ferramentas no nono ícone e depois selecionamos o ponto, a circunferência e o ângulo que queremos que a circunferência rotacione/gire em torno do ponto.

b) Continuar rotacionando circunferências em torno do ponto até chegar na circunferência onde começou a rotação.

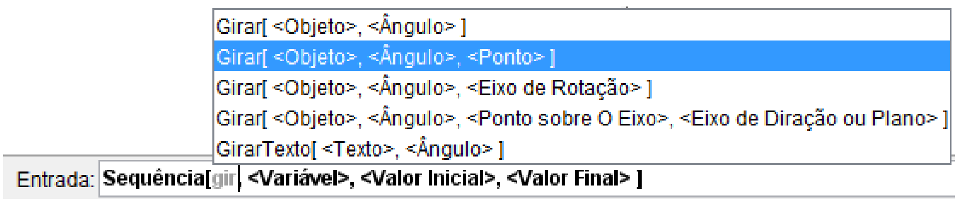
2. Vamos construir sequências de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência, para tanto:



a) Determinar uma circunferência de centro definido e marcar um ponto sobre a circunferência.

b) Criar controles deslizantes para duas variáveis: *i*, que representa a distribuição equidistante das circunferências em torno de um ponto e *k*, que presenta a quantidade de circunferências que serão criadas.

c) Usar o comando *girar*. Após digitar *sequência* no Campo de Entrada, em *expressão*, digite *girar* e selecione: *[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]*, como mostra a imagem:

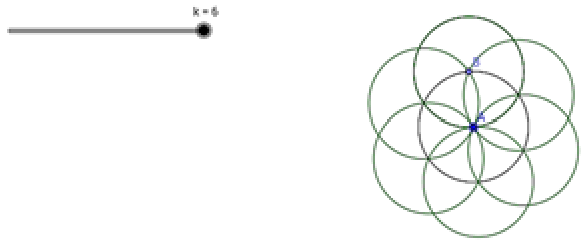


O objeto a ser girado será uma circunferência criada com base no ponto sobre a circunferência. Exemplo: Ponto *B* sobre a circunferência de centro *A*. Em *ângulo*, digitar *i 360°/k*.

- **Atividade 7:** Reproduzir a *semente da vida*

Objetivos: reproduzir a *semente da vida*, mostrada através de um vídeo e também disponibilizado em um arquivo no GeoGebra com a construção para ser reproduzido.

Assista ao vídeo e na sequência reproduza a *semente da vida* conforme a construção apresentada no GeoGebra.



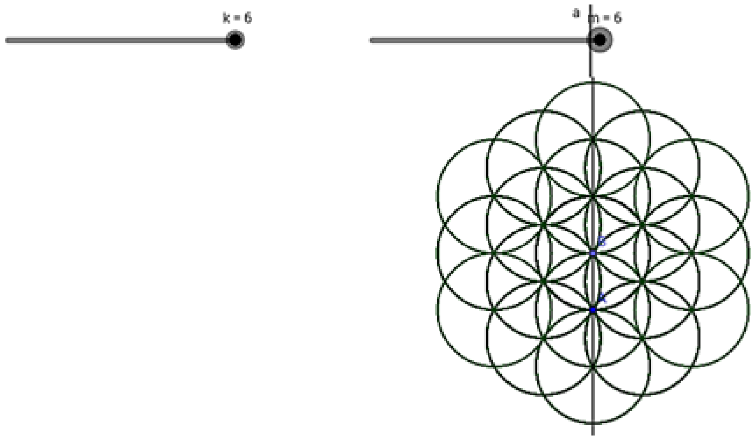
Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

- **Atividade 8:** Replicar o início da *flor da vida*

Objetivos: reproduzir mais uma etapa da *flor da vid*a, disponibilizada em um arquivo no GeoGebra com a construção para ser reproduzida.

Dando continuidade a forma geométrica que queremos fazer, vamos construir mais uma etapa da *flor da vida*.

Veja a construção abaixo feita no GeoGebra mexendo primeiramente no controle deslizante *k* e depois no controle deslizante *m* e a reproduza.



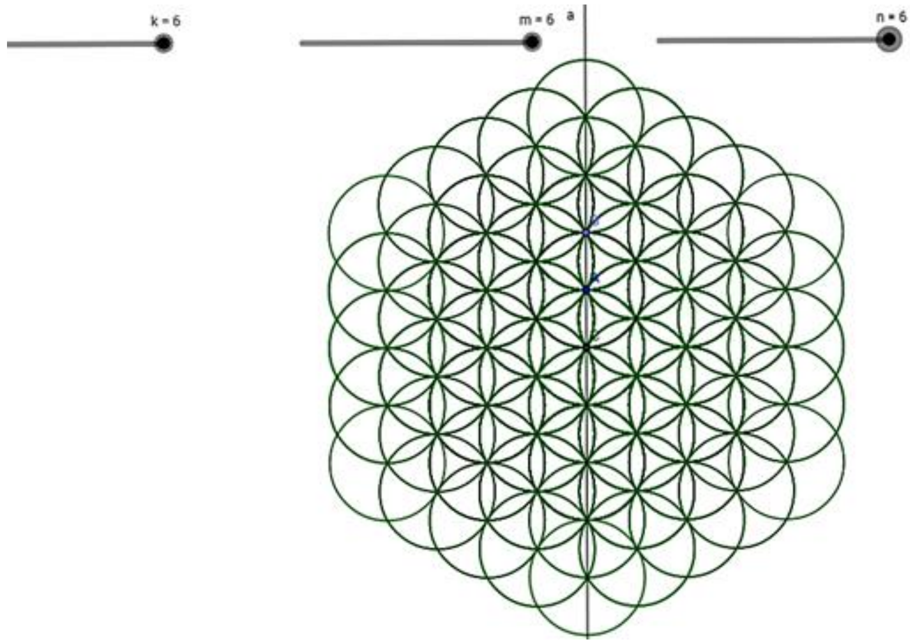
Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

- **Atividade 9:** Reproduzir a *flor da vida*

Objetivos: avançar na construção com mais uma sequência de circunferências e finalizar a *flor da vida*.

Nesta atividade vamos finalizar a construção da *flor da vida*.

Observe a construção feita no GeoGebra movimentando primeiramente o controle deslizante *k*, depois o controle deslizante *m* e por fim o controle deslizante *n* e reproduza a sequência de circunferências.

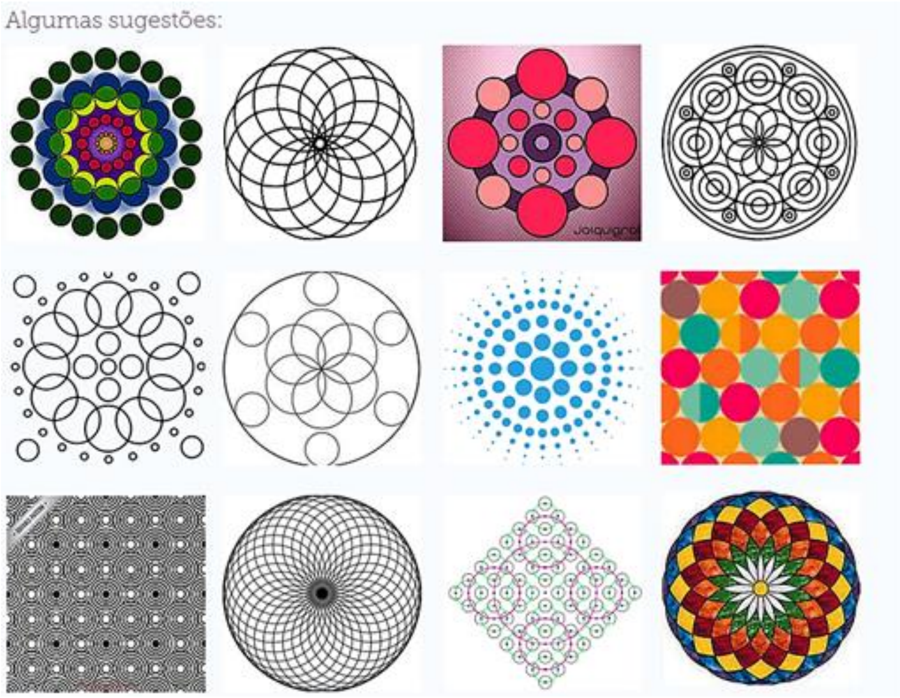


Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

- **Atividade 10:**

Objetivos: escolher uma imagem com várias circunferências e reproduzí-la. Para tanto, utilizar o menor número possível de comandos, utilizando o comando *sequência* para generalizar. Criar um roteiro dos passos que fez para reproduzir a imagem escolhida.

Pesquisar uma imagem com várias circunferências, ou uma das sugestões dadas, e reproduzi-la.



Utilizar o menor número possível de comandos, fazendo uso do comando *sequência* para criar várias circunferências.

Criar um roteiro com os passos que seguiram para chegar na reprodução da imagem escolhida.

APÊNDICE 2

Folhas das atividades que foram entregues para os alunos

Atividade 2 - Construindo circunferências

Nesta atividade vamos construir circunferências variando o centro e/ou o raio através dos controles deslizantes.

1. Crie uma circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (0,0) e raio 2.

2.

a) Crie outra circunferência, digitando no campo de entrada do GeoGebra a equação da circunferência, com centro (6,1) e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

3.

a) Crie outra circunferência, a partir da sua equação, com raio 1 e centro variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio desta circunferência?

4.

a) Digite a equação da circunferência com centro e raio variando.

b) Registre a maneira como você pensou para criar esta circunferência.

c) Ao movimentar o controle deslizante e a circunferência, o que acontece com o centro e o raio?

Atividade 3 - Construindo circunferências conforme suas posições relativas

Vamos construir também circunferências onde devemos levar em consideração suas posições relativas.

1.

a) Digite as equações de duas circunferências que são concêntricas.

b) Como você pensou para criar estas duas circunferências de modo a garantir que são concêntricas?

____

c) Analisando as equações digitadas das duas circunferências concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las circunferências internas não-concêntricas?

____

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências internas não-concêntricas.

e) Com base nas circunferências internas não-concêntricas, o que você mudaria na(s) equação(ões) para torná-las externas?

____

f) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências externas.

2.

a) Digite as equações de duas circunferências que são tangentes externas.

b) Registre a maneira como você pensou para garantir a posição de tangentes externas destas circunferências.

____

c) O que você mudaria na(s) equação(ões) de modo a torná-las tangentes internas?

____

d) Faça as alterações necessárias na(s) equação(ões) para poder visualizar as duas circunferências tangentes internas.

3.

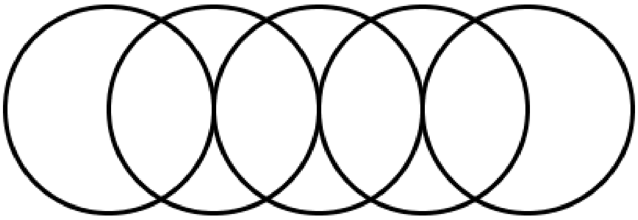
a) Digite as equações de duas circunferências que são secantes.

b) Registre a maneira como você pensou para garantir que as duas circunferências sejam secantes.

____

Atividade 4 - Construir sequências de circunferências

Vamos construir uma sequência de circunferências conforme o desenho:



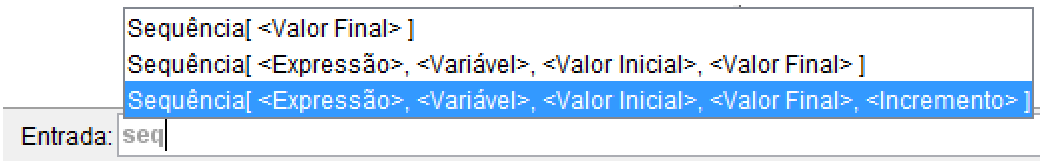
1. Pensando na equação da circunferência para criar esta sequência de circunferências, o que você acha que deve variar de uma circunferência para outra da sequência?

____
____
____

2. Como podemos criar uma sequência de circunferências conforme a figura acima?

____
____
____

3. Digitar no campo de entrada a palavra “sequência” e escolher como mostra a imagem:



- ✓ Em “expressão”, digitar a circunferência que queremos criar;
- ✓ Em “variável”, digitar a variável que deve mudar para gerar a sequência;
- ✓ Em “valor inicial” e “valor final”, digitar os valores inicial e final da variável;
- ✓ Em “incremento”, digitar o valor que queremos que a variável propague.

Atividade 5 - Construir sequências das posições relativas entre circunferências no GeoGebra

1.

a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências externas a partir de uma única relação.

b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são externas?

____
____
____

c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências secantes?

____
____
____

2.

a) Crie, no GeoGebra, uma sequência de circunferências tangentes externas a partir de uma única relação.

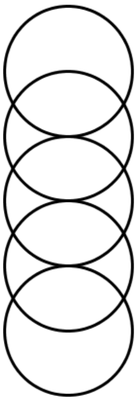
b) Como você pensou para criar esta sequência de modo a garantir que são tangentes externas?

____
____
____

c) Analisando a expressão criada para a sequência de circunferências tangentes externas, o que você mudaria na expressão para torná-las circunferências tangentes internas?

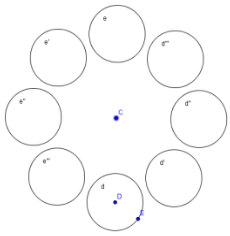
____
____
____

3.Escrever a expressão que generaliza a sequência de circunferências da imagem abaixo:



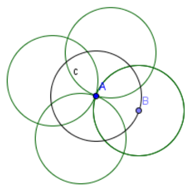
Atividade 6 - Construir sequências de circunferências girando em torno de uma circunferência

Vamos criar uma sequência de circunferências que giram primeiramente em torno de um ponto e depois em torno de uma circunferência. Em um primeiro momento criaremos as circunferências uma a uma e, em um segundo momento, criaremos várias através de uma expressão.

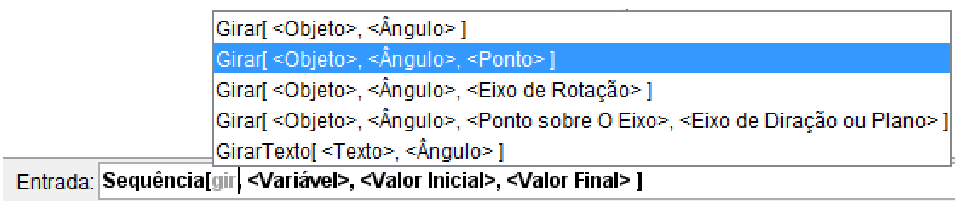


1.
a) Construir um ponto qualquer e uma circunferência qualquer. Queremos que esta circunferência rotacione/gire em torno do ponto por um ângulo de 45°. Para tanto, selecionamos o comando “rotação em torno de um ponto” localizado na barra de ferramentas no nono ícone e depois selecionamos o ponto, a circunferência e o ângulo que queremos que a circunferência rotacione/gire em torno do ponto.
b) Continuar rotacionando circunferências em torno do ponto até chegar na circunferência onde começou a rotação.

2. Vamos construir sequências de circunferências girando em torno do centro de uma circunferência, para tanto:



a) Determinar uma circunferência de centro definido e marcar um ponto sobre a circunferência.
b) Criar controles deslizantes para duas variáveis: "i", que representa a distribuição equidistante das circunferências em torno de um ponto e "k", que presenta a quantidade de circunferências que serão criadas.
c) Usar o comando “girar”. Após digitar sequência no campo de entrada, em “expressão”, digite “girar” e selecione: “[<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]”, como mostra a imagem:



O objeto a ser girado será uma circunferência criada com base no ponto sobre a circunferência. Exemplo: Ponto B sobre a circunferência de centro A. Em “ângulo”, digitar "i 360°/k".

Atividade 7 - Reproduzir a "semente da vida"

A forma geométrica formada por circunferências que pretendemos construir nesta atividade chama-se “semente da vida”.
Assista ao vídeo e na sequência reproduza a 'semente da vida' conforme a construção apresentada no GeoGebra.

Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

____
____
____
____
____
____

<u>Atividade 8 – Replicar o início da "flor da vida"</u>

Dando continuidade a forma geométrica "flor da vida" que queremos fazer, vamos construir mais uma etapa da "flor da vida".
Veja a construção abaixo feita no GeoGebra e a reproduza.

Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

____
____
____
____
____
____

Atividade 9 – Reproduzir a ‘flor da vida’

Nesta atividade vamos finalizar a construção da 'flor da vida'.
Observe a construção feita no GeoGebra movimentando primeiramente o controle deslizante 'k', depois o controle deslizante 'm' e por fim o controle deslizante 'n' e reproduza a sequência de circunferências.

Depois da construção pronta no GeoGebra, você consegue estabelecer relações entre as circunferências criadas? Quais?

____

____

____

____

____

____

<u>Atividade 10 – Reproduzir uma imagem com sequências de circunferências</u>

Pesquisar uma imagem com várias circunferências, ou uma abaixo, e reproduzi-la.

Utilizar o menor número possível de comandos, fazendo uso das sequências para criar várias circunferências em um único comando.

Criar um roteiro com os passos que seguiram para chegar na reprodução da imagem escolhida.

Depois do trabalho pronto, enviar o arquivo .ggb e a imagem que foi reproduzida para o e-mail: marciane.carlos@gmail.com

Bom trabalho!

APÊNDICE 3

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada , **Utilizando parâmetros no GeoGebra: um estudo com alunos do 3º ano do Ensino Médio,** desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) **Marciane Linhares Carlos**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Márcia Rodrigues Notare Meneghetti**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone 51 33086212 ou e-mail **marcia.notare@ufrgs.br**.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

✓ Analisar o processo de aprendizagem dos alunos no estudo da circunferência utilizando o *software* GeoGebra, onde serão disponibilizadas atividades introdutórias dos conteúdos e, a partir da compreensão destes, partir para o raciocínio generalizador através de atividades com a utilização de parâmetros.

✓ Observar como os alunos mobilizam diferentes registros das representações semióticas, em especial, os registros algébricos e geométricos, segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2009, 2011), durante o processo de ensino e aprendizagem proposta por este trabalho.

✓ Elaborar, implementar e analisar uma sequência de atividades que serão disponibilizadas em um *website* para atender aos objetivos citados acima.

✓ Identificar as contribuições do *software* GeoGebra para a compreensão do raciocínio generalizador ao utilizar parâmetros para a construção de circunferências.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço Avenida Getúlio Vargas, 4388, B. São João Batista, São Leopoldo - RS, e-mail marciane.carlos@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

São Leopoldo, 8 de outubro de 2015.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: