

Guilherme Marasca Wiener

# **Valores Fracos na Mecânica Quântica**

Porto Alegre

2016

Guilherme Marasca Wiener

## **Valores Fracos na Mecânica Quântica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Física.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Sandra Denise Prado

Porto Alegre

2016

# Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram durante toda a graduação: amigos, familiares e professores que foram fundamentais ao meu aprendizado tanto em assuntos acadêmicos, quanto pessoal e social, sendo estes dois inerentes a qualquer educação de qualidade. Agradeço primeiramente ao orientador de iniciação científica Carlos Felipe que me acompanhou durante a graduação, mostrando uma calma e poder de compreensão sobre-humana, e a orientadora deste trabalho Sandra pela sua disposição a sempre ajudar, a sua empolgação sobre este assunto foi vital para que este trabalho fosse realizado. Agradeço ao meu pai, minha mãe, as minhas irmãs Luciana, Alice e Carolina, aos meus avós por todo o auxílio e apoio que me permitiram dedicar toda a quantidade de tempo que fosse necessária aos estudos e atividades acadêmicas. Agradeço a amigos e amigas, amizades de longa data ou criadas durante a faculdade, que me concederam refúgio dos meus problemas ou me ajudaram a enfrentá-los conforme era necessário. Agradeço sobretudo a minha namorada Carol, esta monografia nunca teria sido realizada sem sua ajuda, suporte e persistência de valor inestimável. Agradeço a todos por compreenderem que sou terrível neste quesito de agradecimentos, mas que espero algum dia poder retribuir para vocês e para o mundo o tanto quanto vocês contribuíram para minha vida.

# Resumo

O problema da medida em Mecânica Quântica emerge quando se investiga o que ocorre ao se efetuar uma medida de um observável cujo valor é indefinido. Veremos nesse trabalho que esse é um assunto muito diverso e exploraremos, em especial, a medida fraca ou o também chamado de valor fraco de medida. O valor fraco é definido como o valor obtido por uma medida fraca, considerando-se os estados inicial e final do sistema. Em certo sentido, o valor fraco é similar ao modelo de medidas de von Neumann [1], pois Aharonov et al. [2] interpreta este valor como a média de um observável, tal qual a média de um observável por medidas fortes. Contudo, será mostrado que a analogia não vai muito longe, pois ao se medir o valor fraco da projeção de spin de uma partícula com spin  $1/2$ , pode-se obter o valor 100. Esses valores paradoxais levantam muita discussão sobre a interpretação dos resultados de medidas fracas. Vamos mostrar aqui, que a interpretação de Aharonov não é válida, quando se utiliza uma derivação que usa conceitos de caminho de Feynman. Acreditamos que muitos dos paradoxos, tal qual este da projeção de spin com valor 100, são devidos a esta interpretação equivocada do significado dos valores fracos.

**Palavras-chaves:** valores fracos, medidas fracas, mecânica quântica, caminhos de Feynman, modelo de medidas de von Neumann

# Abstract

Measurements in Quantum Mechanics is a very rich subject, and in this work, we will explore weak values, the result of a weak measurement considering both initial and final states of a system. This value will be obtained using the von Neumann Measurement Model, which will be presented in this work. Using an analogy to the strong measurement, Aharonov et al. [2] interprets the weak value as the medium value of an observable. We will show that, for example, a weak value for the projection of a spin-1/2 particle can yield 100 as its value. After this presentation of the problem, we will show an alternative interpretation derived using concepts from Feynman pathways, as done by Sokolovski [3]. We believe that most paradoxes using weak values, such as the example cited above, come from the Aharonov misleading interpretation.

**Key-words:** weak values, weak measurements, quantum mechanics, Feynman pathways, von Neumann measurement model

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>EMBASAMENTO MATEMÁTICO E TEÓRICO</b>	<b>8</b>
<b>2.1</b>	<b>Experimento de Stern-Gerlach</b>	<b>8</b>
<b>2.2</b>	<b>Postulados da Mecânica Quântica</b>	<b>10</b>
2.2.1	Aplicação ao Experimento de Stern-Gerlach	12
2.2.2	Representação de Momentum ou de Espaço e a Transformada de Fourier	12
2.2.3	Medidas em sistemas compostos	13
<b>2.3</b>	<b>Modelo de Medidas de von Neumann</b>	<b>14</b>
2.3.1	Modelo de von Neumann para o Experimento de Stern-Gerlach	16
<b>3</b>	<b>MEDIDAS FRACAS E VALORES FRACOS</b>	<b>19</b>
<b>3.1</b>	<b>Medidas Fracas</b>	<b>19</b>
<b>3.2</b>	<b>Valores Fracos</b>	<b>20</b>
3.2.1	Condições para Aproximação do Valor Fraco	22
3.2.2	Valores Fracos Imaginários	23
<b>3.3</b>	<b>Como medir um Valor Fraco usando Stern-Gerlach</b>	<b>23</b>
3.3.1	Condições para a aproximação do valor fraco no SG	25
<b>4</b>	<b>INTERPRETAÇÃO DOS VALORES FRACOS</b>	<b>26</b>
<b>4.1</b>	<b>Caminhos, Amplitudes, Probabilidades e Medidas</b>	<b>26</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelo de Medidas de von Neumann e Pós-Seleção</b>	<b>28</b>
4.2.1	Medidas Fortes	28
<b>4.3</b>	<b>Reinterpretação dos Valores Fracos</b>	<b>29</b>
4.3.1	Projeção de spin 100 e outros paradoxos	30
	<b>Conclusão</b>	<b>32</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>33</b>
	<b>APÊNDICE A – CALCULANDO O VALOR <math>\langle p \rangle_w</math></b>	<b>34</b>

# 1 Introdução

Desde o início da Mecânica Quântica, medidas são um assunto muito interessante. A principal diferença entre medidas quânticas e as medidas clássicas é que as quânticas alteram o sistema de forma perceptível, tendo sobretudo o efeito denominado colapso da função de onda ou de estado. Este efeito abre espaço a diferentes interpretações da Mecânica Quântica. Um melhor entendimento das medidas quânticas, sobretudo do colapso, está associado a um melhor entendimento da realidade. Dentro do contexto de médias quânticas, exploraremos o conceito de valor fraco, que é definido como o valor obtido por uma medida fraca considerando os estados inicial e final do sistema.

O valor fraco de um observável gera diversas controvérsias desde sua introdução por Aharonov, Albert e Vaidman, em 1988 [2]. Neste artigo é sugerido que o valor fraco é a média do observável e deve ser interpretado da mesma forma que a média de um observável para uma medida forte e é mostrado como poderíamos obter um valor fraco 100 para a projeção de spin de uma partícula com spin  $1/2$ , um resultado absurdo. Outros paradoxos que podem ser obtidos através da medida de um valor fraco são: energia cinética negativa [4], partícula passando por barreira com velocidades acima da velocidade da luz [5], separação de uma partícula de suas propriedades (por exemplo, encontrar o spin numa posição e a partícula em outra) [6].

Todos estes paradoxos indicam que é necessário uma maior compreensão do significado desses valores fracos. Através de conceitos dos propagadores de Feynman será apresentada uma outra interpretação dos valores fracos: estes representariam uma média dos autovalores de observáveis pesados pelas amplitudes de caminhos virtuais, que não são propriamente probabilidades [7]. Por não serem probabilidades, a interpretação deste média não é a usual, como a dada para medidas fortes.

No capítulo 2, Embasamento Matemático e Teórico, apresentaremos o formalismo da Mecânica Quântica que será utilizado, definindo alguns conceitos e apresentando alguns resultados que serão utilizados posteriormente na introdução dos valores fracos. Será apresentado o modelo de medidas de von Neumann, um modelo em que consideramos o aparato medidor como um sistema quântico que interage com o sistema de interesse, podendo através de medidas no aparato inferir sobre resultados no sistema de interesse. Apresentaremos também o experimento de Stern-Gerlach para medida de componente de spin e mostraremos como pode ser efetuada a descrição deste experimento utilizando o formalismo apresentado e o modelo de medidas de von Neumann.

No capítulo 3, Medidas Fracas e Valores Fracos, definiremos matemática e fisicamente o conceito de uma medida fraca. Realizaremos uma medida fraca entre a pré e

pós-seleção de estados para obter o valor fraco e obteremos os resultados apresentados em [2], com algumas correções quanto às condições para a validade do resultado [8]. Na sequência, exemplificaremos como a medida de um valor fraco do observável associada a um componente de spin pode resultar em um valor absurdo como 100, mostrando como poderíamos realizar a pré e pós seleção para este experimento específico.

No capítulo 4, Interpretação dos Valores Fracos, introduziremos alguns conceitos de caminhos de Feynman para obter uma interpretação mais clara dos valores fracos. Veremos que estes estão associados às amplitudes de transição do estado inicial e final, permitindo assim a medida destas amplitudes. Exemplificaremos esta interpretação utilizando os resultados já obtidos para a medida fraca de um componente de spin, discutiremos brevemente os outros paradoxos apresentados nesta introdução.

## 2 Embasamento Matemático e Teórico

Este capítulo é separado em três seções onde apresentaremos o conhecimento básico para entender a formulação das medidas fracas e valores fracos do capítulo seguinte, e o exemplo que será utilizado para demonstrar uma medição de um valor fraco. Desta forma, teremos a seção: Experimento de Stern-Gerlach, que será utilizada para introduzir alguns conceitos de medidas em Mecânica Quântica. Na sequência, é apresentado um formalismo através de postulados para Mecânica Quântica, na seção 2.2, e é introduzido também o conceito de observável. Aplicamos os postulados para explicar o experimento de Stern-Gerlach de forma simples, e apresentamos outros resultados da aplicação dos postulados como medidas em sistemas compostos, representação de base. A última seção deste capítulo se refere ao Modelo de Medidas de von Neumann, este modelo que considera o aparato medidor como um sistema quântico, através do emaranhamento com o sistema que queremos medir, permite inferência sobre propriedades do sistema de interesse. Finalizamos aplicando este modelo para o experimento de Stern-Gerlach.

### 2.1 Experimento de Stern-Gerlach

O experimento de Stern-Gerlach é importante na Física, pois com este experimento se demonstrou a quantização do momento angular e a existência de um momento angular intrínseco do elétron, que denominamos spin [9]. Este experimento é interessante para descrevermos alguns dos fenômenos mais básicos da Mecânica Quântica, pois a parte relevante para uma descrição inicial do sistema pode ser representada pela combinação linear de dois estados (spin up e down). A montagem do experimento é mostrada na Figura 1, temos um feixe de átomos de Prata (*Ag*) colimado (vindo do aquecimento de átomos de prata e das fendas usadas para colimar) que passa por um campo magnético anisotrópico. O átomo de Prata é neutro e possui 47 elétrons, sendo que 46 destes podem ser modelados com uma nuvem eletrônica com momento angular nulo. O momento magnético do átomo se deverá, portanto, ao momento angular do último elétron. Temos a interação do momento magnético  $\mu$  do átomo com o campo  $\vec{B}$ , sabemos que a energia desta interação é  $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ , portanto a força que o campo exerce sobre o átomo é  $\vec{F} = \vec{\nabla}(\mu \cdot \vec{B})$  e a trajetória do átomo é então desviada.

Após passar pelo aparato de Stern-Gerlach, o feixe colide com um anteparo, de onde obtemos informação sobre a posição de chegada dos átomos. Classicamente, é esperado que o momento angular do átomo assumia valores contínuos e aleatórios, formando um padrão gaussiano no anteparo. No entanto, o que vemos é que o átomo será desviado para valores discretos de posição, para cima ou para baixo, pelo campo. Isto se deve à quantização do

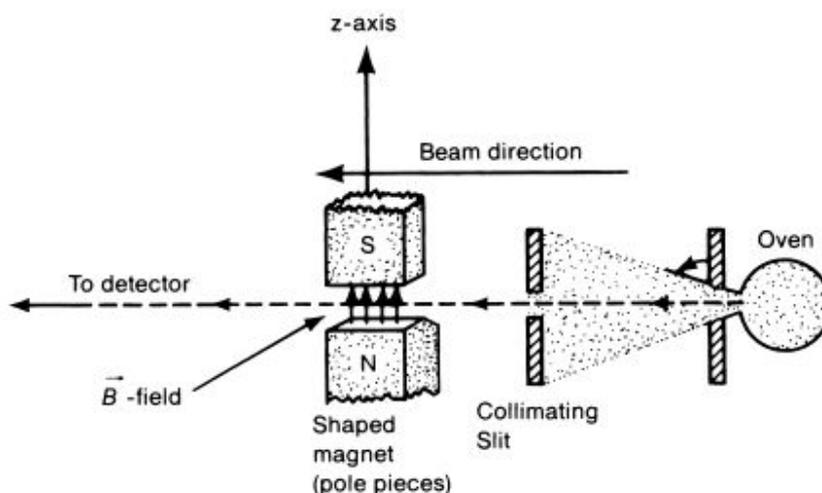


Figura 1 – Esquema de montagem do experimento de Stern-Gerlach. Imagem retirada do livro [9].

momento angular e da forma como medidas acontecem na Mecânica Quântica. Também veremos que os resultados possíveis para o momento angular são compatíveis com o elétron tendo um momento angular intrínseco, spin, com valor semi-inteiro  $1/2$ .

Estes são dois resultados importantes que podemos tirar deste experimento, mas também podemos passar o feixe por sucessivos aparatos de Stern-Gerlach para um melhor entendimento sobre o que acontece nas medidas e sobre o colapso da função de onda, que será apresentado a seguir. Podemos ter dois aparatos em sequência com uma medição no

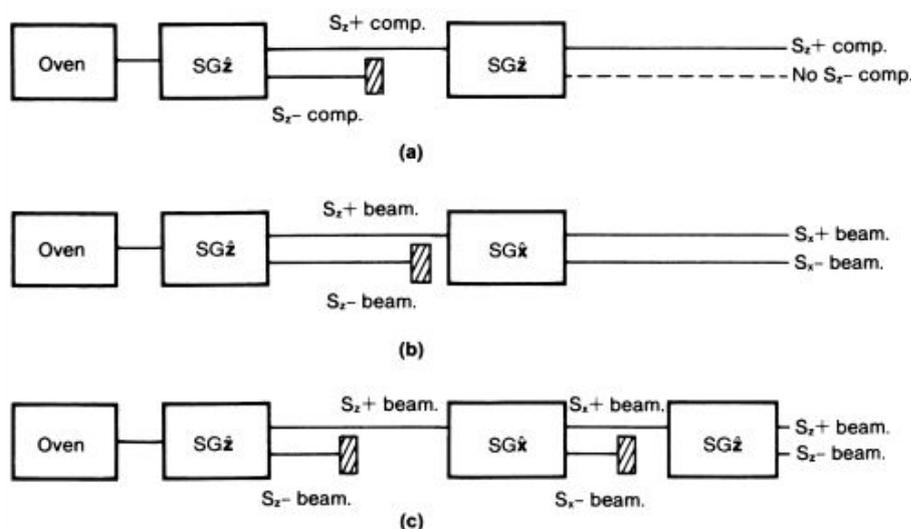


Figura 2 – Montagem esquemática de sucessivos experimentos de Stern-Gerlach. Imagem retirada do livro [9].

final, conforme Figura 2, onde o segundo aparato apenas recebe um dos feixes do primeiro

aparato, por exemplo, o feixe no qual as partículas tem spin up ( $|\uparrow_z\rangle$ ). O resultado será o seguinte: para o caso em que os dois aparatos medindo tem a mesma direção (direção  $\hat{e}_z$ ), o resultado do segundo será 100% spin up ( $|\uparrow_z\rangle$ ), isto é, obtemos a mesma informação do resultado anterior. Caso meçamos em uma direção perpendicular (direção  $\hat{e}_x$ ), obteremos 50% spin up ( $|\uparrow_x\rangle$ ) e 50% spin down ( $|\downarrow_x\rangle$ ) na direção x. Isto poderia indicar que o spin tem projeções independentes na direção  $\hat{e}_x$  e  $\hat{e}_z$ , o que podemos testar utilizando mais um aparato de Stern-Gerlach sequencial.

Agora consideraremos três aparatos, sendo o primeiro na direção  $\hat{e}_z$ , o segundo na direção  $\hat{e}_x$  e o terceiro novamente na direção  $\hat{e}_z$ , conforme a Figura 2.(c). Veremos que a última medida gerará 50% spin up ( $|\uparrow_z\rangle$ ) e 50% spin down ( $|\downarrow_z\rangle$ ), isto é, a medida na direção  $\hat{e}_x$  destruiu a informação quanto à direção do spin na direção  $\hat{e}_z$ . De forma análoga, podemos utilizar a direção  $\hat{e}_y$  no lugar de  $\hat{e}_x$  ou  $\hat{e}_z$ , obtendo resultados semelhantes. Podemos definir  $P(|\uparrow_j\rangle, |\uparrow_i\rangle)$  como a probabilidade de encontrar o estado  $|\uparrow_j\rangle$  dado que estamos no estado  $|\uparrow_i\rangle$ , onde  $i$  e  $j$  assumem os valores  $\{x, y, z\}$ . Também definimos de forma análoga para outros spins. Teremos que o valor das probabilidades é dado por:  $P(|\uparrow_j\rangle, |\uparrow_i\rangle) = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij})$  e  $P(|\downarrow_j\rangle, |\uparrow_i\rangle) = \frac{1}{2}(1 - \delta_{ij})$ . De forma análoga para a inversão da direção do spin:  $P(|\downarrow_j\rangle, |\downarrow_i\rangle) = \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij})$  e  $P(|\uparrow_j\rangle, |\downarrow_i\rangle) = \frac{1}{2}(1 - \delta_{ij})$ . Posteriormente, será apresentado outra forma de calcular estas probabilidades.

## 2.2 Postulados da Mecânica Quântica

Todas estas características apresentadas através de exemplos do experimento de Stern-Gerlach devem ser reproduzidas dentro formalismo da Mecânica Quântica. Por isso, apresentaremos um formalismo da Mecânica Quântica através de postulados, e então o utilizaremos no exemplo do experimento de Stern-Gerlach já explicado. Seguem os postulados como dado no livro [10]:

**Postulado 1:** A qualquer sistema físico isolado existe associado um espaço vetorial complexo com produto interno (um espaço de Hilbert <sup>1</sup>), conhecido como espaço de estados do sistema. O sistema é completamente descrito pelo seu vetor de estado, um vetor unitário no espaço de estados.

**Postulado 2:** A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária, ou seja, o estado  $|\psi\rangle$  de um sistema em um tempo  $t_1$  está relacionado ao estado  $|\psi'\rangle$  do sistema em  $t_2$  por um operador unitário  $U$  que depende somente de  $t_1$  e  $t_2$ :

$$|\psi'\rangle = U |\psi\rangle . \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> É assumido que o leitor conhece alguns conceitos do espaço de Hilbert e outros conceitos de Álgebra Linear, tais como produto externo, produto tensorial. Também é assumido familiaridade com a notação de Dirac.

**Postulado 3:** As medidas quânticas são descritas por determinados operadores de medida  $\{M_m\}$ . Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice  $m$  se refere aos possíveis resultados da medida. Se o estado de um sistema quântico for  $|\psi\rangle$ , imediatamente antes da medida, a probabilidade de um resultado  $m$  ocorrer é dada por:

$$p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle , \quad (2.2)$$

e o estado do sistema após a medida será:

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} . \quad (2.3)$$

Os operadores de medida satisfazem a relação de completitude:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I . \quad (2.4)$$

**Postulado 4:** O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos sistemas físicos individuais. Se os sistemas forem numerados de 1 até  $n$ , e o sistema  $i$  for preparado no estado  $|\psi_i\rangle$ , decorre que o estado do sistema composto será  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ .

**Medidas Projetivas e Observáveis:** Um caso especial é o que consideramos apenas medidas projetivas em diferentes subespaços de estados do sistema. Uma medida projetiva deve satisfazer  $P_n P_m = \delta_{nm} P_m$  e  $\sum_m P_m = I$ . Os projetores podem ser escritos como  $P_m = \sum_i |m_i\rangle \langle m_i|$  com  $\langle m_i | m_j \rangle = \delta_{ij}$ , isto é, como a soma de projetores  $|m_i\rangle \langle m_i|$  para espaços unidimensionais. Definimos, então um observável como  $\hat{A} \equiv \sum_{\{m\}} m P_m$ , do qual  $\{m\}$  são seus autovalores, propriamente associados ao espaço em que  $\{P_m\}$  projeta, os seus auto-espaços. Desta forma, basta que definamos um observável  $\hat{A}$  para definir uma medida, onde o resultado de um estado  $|\psi\rangle$  será o autovalor  $m$  de  $\hat{A}$ , com probabilidade  $p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle$ , e o estado após a medida será  $P_m |\psi\rangle / \sqrt{p(m)}$ . Para que um operador possa ser descrito como a combinação linear de projetores (e, portanto, ser um observável) é suficiente a condição que ele seja hermitiano, isto é,  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ .

O operador unitário dado no Postulado 2 pode ser encontrado utilizando a equação de Schrödinger, onde teremos  $U(t_1, t_2) = e^{-i \int_{t_1}^{t_2} H dt / \hbar}$ , em que  $H = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$  é o Hamiltoniano do sistema. Para Hamiltonianos independentes do tempo teremos  $U(t_1, t_2) = e^{-iH(t_2-t_1)}$ , onde a partir deste momento consideramos  $\hbar = 1$ . Durante este trabalho consideraremos várias vezes  $H = 0$ , isto não será desconsiderar o momentum da partícula. Mas considerar que as mudanças nos estados devido a evolução  $U(t_1, t_2) = e^{-ip(t_2-t_1)/(2m)}$ , que causarão uma separação espacial com o decorrer do tempo para estados espacialmente juntos mas com diferentes *momenta*, poderão ser apreciadas observando os *momenta* destas partículas. Isto é, afirmaremos que partículas com diferentes *momenta* serão separadas espacialmente após algum tempo, sem no entanto, considerar esta parte do Hamiltoniano.

### 2.2.1 Aplicação ao Experimento de Stern-Gerlach

A medida da componente de spin pode ser efetivada considerando que o observável é representado pelas matrizes de Pauli  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , onde temos que  $\sigma_i = |\uparrow_i\rangle\langle\uparrow_i| - |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i|$ . De forma que temos o projetor  $P_+^i = |\uparrow_i\rangle\langle\uparrow_i|$  associado ao autovalor  $+1$  e o projetor  $P_-^i = |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i|$  associado ao autovalor  $-1$ . Definindo:  $|\uparrow_z\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|\downarrow_z\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , temos que as matrizes de Pauli são da seguinte forma:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Teremos que os autovetores de  $\sigma_x$  serão  $|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$  e  $|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle)$  associados aos autovalores  $1$  e  $-1$ , respectivamente. Para o  $\sigma_y$ , teremos  $|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + i|\downarrow_z\rangle)$  e  $|\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle - i|\downarrow_z\rangle)$ .

Podemos descrever a medida da projeção de spin na direção  $\hat{e}_i$  como a medida do observável  $\sigma_i$ . Desta forma, os resultados comentados na seção 2.1 serão reproduzidos dentro deste formalismo. Por exemplo, utilizando o postulado 3, teremos que após uma medida de  $\sigma_z$ , o sistema será deixado ou no estado  $|\uparrow_z\rangle$  ou em  $|\downarrow_z\rangle$ , obtendo o resultado  $\pm 1$ . Uma medida posterior de  $\sigma_z$  obterá um resultado em concordância com o primeiro, isto é, obterá o mesmo valor  $\pm 1$ . Uma medida posterior de  $\sigma_x$ , no entanto, obterá como resultado ou o estado  $|\uparrow_x\rangle$  ou em  $|\downarrow_x\rangle$ , com probabilidades  $1/2$ , evidenciado pela realização dos produtos internos:  $|\langle\uparrow_x|\uparrow_z\rangle|^2 = |\langle\downarrow_x|\uparrow_z\rangle|^2 = |\langle\uparrow_x|\uparrow_z\rangle|^2 = |\langle\downarrow_x|\uparrow_z\rangle|^2 = 1/2$ . O mesmo ocorre para trocas dos índices  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Podemos também definir uma medida da componente do spin numa direção qualquer  $\hat{e}_u$ :

$$\sigma_u = \hat{e}_u \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.6)$$

onde  $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{e}_x + \sigma_y \hat{e}_y + \sigma_z \hat{e}_z$ .

### 2.2.2 Representação de Momentum ou de Espaço e a Transformada de Fourier

Assim como feito na subseção anterior, é usual definir uma base de vetores que utilizaremos para definir os outros vetores. Por exemplo, na subseção 2.2.1n utilizamos  $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ . No entanto, qualquer conjunto de vetores  $\{|i\rangle\}$  que satisfaçam a condição de completude ( $\sum_i |i\rangle\langle i| = I$ ) e que satisfaçam  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$  formam uma base que poderíamos utilizar. Por este motivo, uma mudança de base pode ser utilizada para uma melhor compreensão de um determinado estado ou para facilitar algum cálculo.

Uma das mudanças de base mais importantes na Mecânica Quântica é a mudança do espaço de posição para o espaço de momentum e vice-versa. Considerando o caso unidimensional, temos que a relação entre estas representações pode ser obtida de  $\langle x|p\rangle =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipx}$  e, portanto, teremos que a transformada de Fourier leva de um espaço ao outro [9], pois:

$$|\alpha\rangle = \int \langle x'|\alpha\rangle |x'\rangle dx' = \int \langle p'|\alpha\rangle |p'\rangle dp' , \quad (2.7)$$

onde a transformação de  $\langle x'|\alpha\rangle$  (representação em  $x$ ) e  $\langle p'|\alpha\rangle$  (representação em  $p$ ) será:

$$\langle x'|\alpha\rangle = \int \langle x'|p\rangle \langle p|\alpha\rangle dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipx'} \langle p|\alpha\rangle dp , \quad (2.8)$$

onde nesta equação definimos, propriamente, a transformada que será utilizada para levar do espaço de momentum ao espaço de posição.

### 2.2.3 Medidas em sistemas compostos

Nesta seção apresentaremos o conceito de sistemas com emaranhamento, e, utilizando o Postulado 3 e Postulado 4 da Mecânica Quântica, mostraremos alguns resultados sobre medidas neste tipo de sistema composto que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Assim como descrito no Postulado 4, o estado  $|\Psi\rangle$  de um sistema físico composto por  $n$  sistemas individuais e independentes será

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle \equiv |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \cdots |\psi_n\rangle \quad (2.9)$$

onde definimos a notação usual, na qual o produto tensorial está implícito.

Para um sistema composto em que os seus subsistemas são dependentes entre si, isto é, sistemas que possuem emaranhamento, podemos escrever o estado do sistema composto como uma combinação linear de estados compostos em que os subsistemas são independentes. Desta forma, o estado do sistema composto pode ser descrito por:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_1\rangle_i |\psi_2\rangle_i \cdots |\psi_n\rangle_i , \quad (2.10)$$

sendo  $|\psi_k\rangle_i$  é um estado específico referente ao subsistema  $k$ . Onde, caso queiramos descartar o subsistema  $k$ , mas continuar com o estado dos outros sistemas, podemos realizar a seguinte operação:

$$\left( \sum_j I \otimes \cdots \otimes \langle \phi_k|_j \otimes \cdots \otimes I \right) |\Psi\rangle = \quad (2.11)$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \langle \phi_k|\psi_k\rangle_i |\psi_1\rangle_i |\psi_2\rangle_i \cdots |\psi_{k-1}\rangle_i |\psi_{k+1}\rangle_i \cdots |\psi_n\rangle_i , \quad (2.12)$$

onde os estados  $\{|\phi_k\rangle_j\}$  formam uma base para o subespaço  $k$ . Temos que tomando  $\alpha'_i = \alpha_i \langle \phi_k|\psi_k\rangle_i$ , temos um sistema composto de dimensão  $n - 1$  do mesmo formato de

(2.9), podemos repetir o processo até obter o estado para um subsistema específico. Esta operação é o equivalente ao traço parcial utilizado sobre o operador densidade para um estado puro.

Exemplificaremos agora, que em sistemas emaranhados, a medida de um subsistema altera o outro subsistema. Considerando um sistema composto de apenas dois subsistemas, onde cada subsistema está associado a projeção do spin de uma partícula com spin  $1/2$ , neste exemplo, o estado inicial do sistema composto é:

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle |\uparrow_x\rangle + |\downarrow_z\rangle |\downarrow_x\rangle) \quad (2.13)$$

Caso quiséssemos trabalhar com propriedades de apenas um dos subsistemas, poderíamos usar como se o estados dos sistemas fossem:  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$  e  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle)$ , usando o processo descrito em (2.11). Podemos medir o observável  $\sigma_z$  no subsistema 1, por exemplo, obtendo ou  $+1$  ou  $-1$  com probabilidade  $1/2$  para ambos os casos. Por exemplo, após obter o resultado  $+1$ , sabemos que o estado do subsistema 1 deve ser  $|\uparrow_z\rangle$ , portanto, temos que o estado completo do subsistema será  $|\Psi\rangle = |\uparrow_z\rangle |\uparrow_x\rangle$ , e saberemos que uma medida do observável  $\sigma_x$  no subsistema 2 vai obter o resultado  $+1$  com probabilidade 1. Isto se deve, que a medição do observável  $\sigma_z$  no subsistema 1 equivale ao uso do conjunto de operadores de medida  $\{|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| \otimes I, |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z| \otimes I\}$ , com valores respectivos  $\{+1, -1\}$  no sistema composto. Desta forma, aplicando o Postulado 3, obtemos exatamente o estado completo do subsistema mostrado anteriormente.

Podemos generalizar o cálculo anterior, considerando um sistema composto de dois subsistema descrito pelo estado  $|\Psi\rangle = \sum_j \alpha_j |a_j\rangle |\phi_j\rangle$  [10], onde é realizada uma medida do observável  $\hat{A}$ , com autovetores  $\{|a_j\rangle\}$ , no subsistema 1. Temos que se o resultado da medida for  $a_i$ , associado ao projeto  $P_{a_i} = |a_i\rangle\langle a_i|$ , o estado do sistema conjunto será

$$\frac{(|a_i\rangle\langle a_i| \otimes I_2) |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|(|a_i\rangle\langle a_i| \otimes I_2)|\Psi\rangle}} = |a_i\rangle |\phi_i\rangle, \quad (2.14)$$

utilizando o Postulado 3. Poderemos, portanto afirmar, utilizando o resultado de (2.11), que o estado do subsistema 2 será  $|\phi_i\rangle$ .

## 2.3 Modelo de Medidas de von Neumann

O modelo de von Neumann (MvN) considera o aparato medidor também como um sistema quântico, tornando assim a descrição das medidas mais completa. No modelo, como é descrito no artigo [1], teremos que o aparato medidor se encontra inicialmente num estado  $|\chi_{in}\rangle$  e o sistema que queremos medir num estado inicial  $|\phi_{in}\rangle$ , temos que os sistemas iniciam completamente independentes, de forma que o sistema conjunto é, inicialmente, descrito por  $|\Psi_{in}\rangle = |\chi_{in}\rangle |\phi_{in}\rangle$ . Através da evolução temporal, acoplaremos o

aparato medidor ao sistema que queremos medir e, posteriormente, será feita uma medida usual com colapso no aparato medidor, e com esta informação poderemos inferir o valor que a medida obteve para  $\hat{A}$ . O acoplamento dos dois sistemas é feito através da adição ao Hamiltoniano de um potencial do tipo:

$$V = -\epsilon g(t)\hat{q}\hat{A} ; \quad (2.15)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante de acoplamento,  $g(t)$  é uma função normalizada com suporte compacto próximo ao tempo da medida (explicado a seguir) e  $q$  é a variável canônica da sonda, com variável conjugada  $p_q$ . Chamaremos, usualmente,  $q$  de variável da posição da sonda e  $p_q$  da variável de momentum da sonda.

Utilizaremos  $g(t) = \delta(t - t_0)$ , onde  $t_0$  é o tempo da medida, de forma que os cálculos a seguir se tornam mais fácil e o sentido físico não é perdido. A delta de Dirac é uma função que satisfaz as duas condições impostas a função  $g(t)$ : é uma função normalizada, isto é  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$ ; e tem suporte compacto perto do tempo da medida, que significa que a função é não-nula apenas para um conjunto compacto, isto estabelece um intervalo de tempo  $[t_{início}, t_{início} + \tau]$  em que a interação da medida ocorre. No caso da delta de Dirac, este intervalo é infinitesimal, isto é,  $\tau \rightarrow 0$ .

O caso ideal para o estado inicial de um medidor  $|\chi_{in}\rangle$  será quando temos  $p_q$  bem definido, tal que possamos obter o valor obtido do observável  $\hat{A}$  através da mudança no valor de  $p_q$ , isto é,  $A = \delta p_q / \epsilon$ . Um estado apropriado será um estado gaussiano com dispersão  $\Delta p_q$  na representação de momentum, onde teremos o centro bem definido  $\langle p_q \rangle = 0$ :

$$|\chi_{in}\rangle = \int dp_q \langle p_q | \chi_{in} \rangle |p_q\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta p_q)^2}} \int dp_q e^{-p_q^2 / (2\Delta p_q)^2} |p_q\rangle . \quad (2.16)$$

Este estado é especialmente interessante, pois teremos que o estado representado no espaço de posição  $q$ , obtido através da transformada de Fourier, também será uma gaussiana, esta com dispersão  $\Delta q = 1/(2\Delta p_q)$ :

$$|\chi_{in}\rangle = \int dq \langle q | \chi_{in} \rangle |q\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\Delta q)^2}} \int dq e^{-q^2 / (2\Delta q)^2} |q\rangle . \quad (2.17)$$

Por uma questão de notação, utilizaremos a seguinte definição:

$$\blacktriangle \equiv \Delta q = \frac{1}{2\Delta p_q} . \quad (2.18)$$

Portanto, utilizando a definição acima, as representações de  $|\chi_{in}\rangle$  no espaço de momentum e no espaço de posição serão escritas como:

$$\langle q | \chi_{in} \rangle = \frac{1}{2\blacktriangle\sqrt{\pi}} e^{-q^2 / (2\blacktriangle)^2} \quad ; \quad \langle p_q | \chi_{in} \rangle = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} e^{-\blacktriangle^2 p_q^2} . \quad (2.19)$$

O sistema que queremos observar, está em um estado inicial  $|\phi_{in}\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle$  onde  $|a_i\rangle$  é o autovetor de  $\hat{A}$  associado com o autovalor  $a_i$  e  $\alpha_i = \langle a_i | \phi_{in} \rangle$ . Portanto,  $|\phi_{in}\rangle$  escrito acima, está representado na base dos autovetores de  $\hat{A}$ . Temos, portanto, que o estado inicial do sistema conjunto será  $|\Psi_{in}\rangle = |\chi_{in}\rangle |\phi_{in}\rangle$ , como já discutido anteriormente.

Para descobrirmos o estado do sistema  $|\Psi(t > t_0)\rangle$  a um tempo posterior a medida ( $t > t_0$ ), aplicamos o operador evolução temporal  $U(t, 0) = e^{-i \int_0^t H(t') dt'} = e^{i\epsilon\hat{q}\hat{A}}$ :

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, 0) |\Psi_{in}\rangle = e^{i\epsilon\hat{q}\hat{A}} \left[ \frac{1}{2\blacktriangle\sqrt{\pi}} \int dq e^{-q^2/(2\blacktriangle)^2} |q\rangle \right] \left[ \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \right] \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2\blacktriangle\sqrt{\pi}} \sum_i \int dq \alpha_i \left[ e^{i\epsilon\hat{q}\hat{A}} e^{-q^2/(2\blacktriangle)^2} |q\rangle |a_i\rangle \right] \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2\blacktriangle\sqrt{\pi}} \sum_i \int dq \alpha_i \left[ e^{i\epsilon q a_i} e^{-q^2/(2\blacktriangle)^2} |q\rangle |a_i\rangle \right]. \quad (2.22)$$

Podemos utilizar a transformada de Fourier, para obter o resultado de (2.22), representada no espaço de momentum, obtendo-se assim:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \sum_i \int dp_q \alpha_i e^{-\blacktriangle^2(p_q - \epsilon a_i)^2} |p_q\rangle |a_i\rangle. \quad (2.23)$$

Este resultado pode ser facilmente interpretado notando que temos para cada estado  $|a_i\rangle$  um estado específico do medidor, onde teremos que este estado é uma gaussiana centrada em  $\epsilon a_i$ . Caso tivermos que  $\epsilon |a_i| \gg 1/\blacktriangle$  para todo  $i$ , isto é,  $\epsilon |a_i| \gg 2\Delta p_q$  para todo  $i$ , as gaussianas estarão suficientemente separadas para que quando efetivarmos uma medida do momentum  $p_q$  do medidor, possamos afirmar que um resultado de  $p_q$  em torno de  $\epsilon a_i$  estará associado ao sistema de interesse se encontrar no estado  $|a_i\rangle$ .

A característica apresentada acima é a característica fundamental do Modelo de von Neumann, onde temos que após a interação do aparato medidor, observarmos que o momentum do medidor teve a mudança  $\delta p_q = \epsilon a_i$ , podemos dizer que o sistema de interesse se encontra no estado  $|a_i\rangle$ .

### 2.3.1 Modelo de von Neumann para o Experimento de Stern-Gerlach

A aplicação do modelo de medidas de von Neumann para o experimento de Stern-Gerlach é essencial, pois, como descrito na seção 2.1, o que é observado no experimento é o desvio do feixe, e a projeção do spin é inferida a partir do desvio. Desta forma, é evidente que o tratamento utilizado na seção 2.2.1 é simplificado e não descreve uma das principais características do experimento.

Utilizando o experimento de Stern-Gerlach para uma medida da projeção do spin na direção  $\hat{e}_z$  teremos que o nosso aparato medidor a ser acoplado com o spin será a própria posição do átomo de Prata, especialmente a coordenada  $z$ . Assumiremos que o momentum em  $x$  e  $y$  se mantém constantes, de forma que o tempo de interação pode

ser obtido calculando o tempo em que o átomo leva dentro do aparato de Stern-Gerlach, proporcional ao tamanho do aparato e o inverso da velocidade em  $y$ . Outra forma de analisar esta questão, é adotar o referencial que inicialmente acompanha a partícula, estando ela na origem. Notaremos que após um determinado tempo, a partícula começa a ganhar momentum na direção  $\hat{e}_z$ , se afastando da origem, e o momentum para de variar após o tempo  $\tau$  da interação com o aparato. Consideraremos, também, que o tempo de interação  $\tau$  pode ser considerado pequeno, de forma que temos  $g(t) = \delta(t - t_1)$ , onde  $t_1$  é o tempo em que ocorre a interação.

Consideraremos que o estado inicial do spin do átomo é dado por  $|\phi_0\rangle = \alpha_0 |\downarrow_z\rangle + \alpha_1 |\uparrow_z\rangle$ . Consideraremos que a posição inicial do átomo é dada por

$$|\chi_0\rangle = |\chi_{xy}\rangle \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi(2\Delta)^2}} \int dz e^{-z^2/(2\Delta)^2} |z\rangle \right] \quad (2.24)$$

onde  $|\chi_{xy}\rangle$  contém a informação sobre as coordenadas  $x$  e  $y$  do átomo, esta parte não é relevante para a descrição da medida, portanto a desconsideraremos. É importante notar que este estado gaussiano coerente na coordenada  $z$  é construído através da colimação do feixe. Consideraremos que o estado inicial do spin é independente da posição do átomo, portanto temos que o estado inicial do sistema será  $|\Psi_0\rangle = |\chi_0\rangle |\phi_0\rangle$

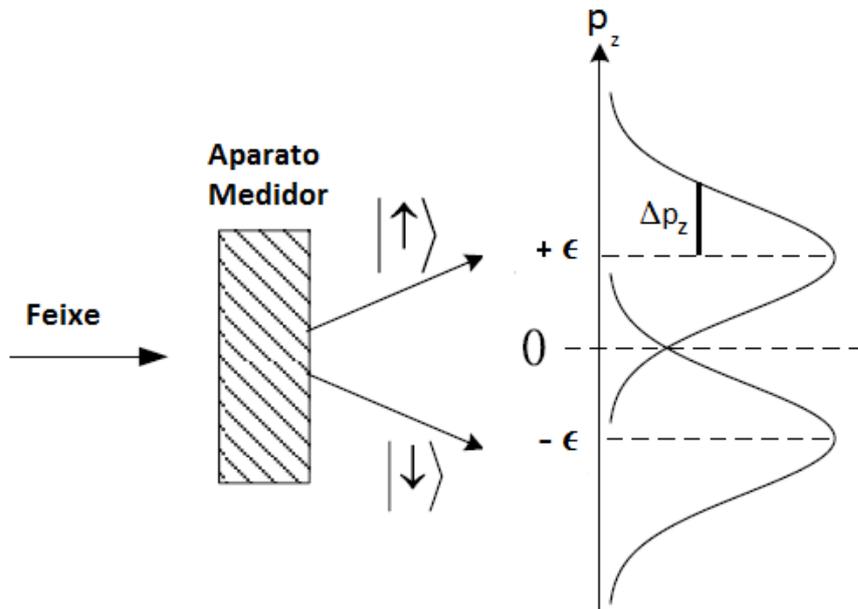


Figura 3 – Esquema do resultado obtido através do Modelo de von Neumann para o experimento de Stern-Gerlach. Na imagem é evidente que para uma medida separar o estado  $|\uparrow_z\rangle$  de  $|\downarrow_z\rangle$  deve ter uma razão  $\epsilon/\Delta p_z$  grande. Imagem adaptada de [1].

Portanto, utilizando o formalismo introduzido no modelo de von Neumann, teremos que o Hamiltoniano para o experimento do Stern-Gerlach para uma medida da projeção

do spin na direção  $\hat{e}_z$  será dado por:

$$H(t) = - \left[ \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] \hat{z} \hat{\sigma}_z g(t) \quad , \quad (2.25)$$

onde temos que a constante de acoplamento é  $\epsilon_{SG} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$ , a coordenada generalizada a ser acoplada é a coordenada  $\hat{z}$  do átomo de Prata e  $\sigma_z$  é a matriz de Pauli na direção  $\hat{e}_z$ , onde temos que  $\sigma_z |\uparrow_z\rangle = +1(|\uparrow_z\rangle)$  e  $\sigma_z |\downarrow_z\rangle = -1(|\downarrow_z\rangle)$

Utilizando o resultado da equação 2.23, obtemos:

$$|\Psi(t)\rangle = |\chi_{xy}\rangle \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \int dp_z |p_z\rangle \left( \alpha_0 e^{-\blacktriangle^2(p_z + \epsilon_{SG})^2} |\downarrow_z\rangle + \alpha_1 e^{-\blacktriangle^2(p_z - \epsilon_{SG})^2} |\uparrow_z\rangle \right) . \quad (2.26)$$

Este resultado é representado na figura 3 e pode ser interpretado da seguinte maneira: temos duas gaussianas no espaço de momentum, uma centrada em  $\delta p_z = -\epsilon_{SG}$  e a outra em  $\delta p_z = \epsilon_{SG}$ , cada uma associada a um diferente estado de spin, onde teremos que: caso uma medida do momentum do átomo obtenha um valor em torno de  $\epsilon_{SG}$  (ou  $-\epsilon_{SG}$ ), podemos afirmar que o estado de spin é  $|\uparrow_z\rangle$  ( $|\downarrow_z\rangle$ ), desde que a separação das gaussianas seja muito maior que a dispersão delas, dada por  $\Delta p_z = 1/(2\blacktriangle)$ . Desta forma, deve ser satisfeita a condição  $\epsilon_{sg} = \mu \partial B_z / \partial z \gg 1/\blacktriangle$ , que sempre pode ser satisfeita ajustando a variação do campo magnético do aparato de Stern-Gerlach.

## 3 Medidas Fracas e Valores Fracos

Medidas fracas e valores fracos são dois conceitos introduzidos por Aharonov, e Albert e Vaidman (AAV) em 1988 no artigo [2]. Iniciaremos este capítulo introduzindo a descrição matemática da medida fraca de um observável  $\hat{A}$ , utilizando o Modelo de medidas de von Neumann já apresentado. As medidas fracas terão o interessante resultado de não colapsar exatamente em um dos autoestados do observável, mas ainda revelar informação sobre o sistema. Isto é, consideramos uma medida, diferente da do Postulado 2, que altera pouco o estado e nos revela, também, pouca informação.

Apresentaremos depois como o resultado de uma medida fraca é alterado considerando uma pós-seleção, gerando a definição de valor fraco. Ao valor fraco, será dada a interpretação utilizada em [2], análoga ao caso do modelo de von Neumann para medidas fortes, que este é o valor médio do observável. No final, apresentaremos uma medida fraca da projeção do spin através e uma adaptação do experimento de Stern-Gerlach e mostramos por exemplo como este valor de projeção do spin pode ser igual a 100.

### 3.1 Medidas Fracas

Para a construção matemática da medida fraca, faremos as mesmas considerações do subcapítulo 2.3, onde apresentamos o Modelo de von Neumann para medidas. Teremos um Hamiltoniano dado por:

$$H = -\epsilon g(t)\hat{q}\hat{A} . \quad (3.1)$$

Consideramos um medidor em que o estado inicial, representado no espaço de momentum, é uma gaussiana:  $\langle p_q | \chi_{in} \rangle = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} e^{-\blacktriangle^2 p_q^2}$  e o sistema que queremos medir num estado inicial  $|\phi_{in}\rangle = \sum_i \alpha_i |\hat{A} = a_i\rangle$ , desta forma, o estado inicial sistema composto do aparato medidor e do sistema mensurável é, representado no espaço de momento:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\chi_{in}\rangle |\psi_{in}\rangle = \int dp_q \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} e^{-\blacktriangle^2 p_q^2} |p_q\rangle \left[ \sum_i \alpha_i |\hat{A} = a_i\rangle \right] . \quad (3.2)$$

Como já apresentado anteriormente em (2.23), teremos que o estado do sistema conjunto após o tempo da interação ( $t > t_1$ ) será:

$$|\Psi(t > t_1)\rangle = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \sum_i \int dp_q \alpha_i e^{-\blacktriangle^2 (p_q - \epsilon a_i)^2} |p_q\rangle |a_i\rangle . \quad (3.3)$$

Como já discutido anteriormente, para o caso em que  $\epsilon a_i \gg 1/\blacktriangle$  teremos que o estado de posição (ou momentum) do medidor será várias gaussianas bem separadas onde cada uma poderá ser associada com um dos autovalores  $a_i$  do observável  $\hat{A}$ . Portanto, uma medida

com colapso da posição (ou momentum) do sistema definirá o valor de  $\hat{A}$  no sistema que queríamos medir. No caso oposto, o caso das medidas fracas em que  $\epsilon a_i \ll 1/\blacktriangle$ , teremos aproximadamente para o estado de posição (ou momentum) do medidor uma gaussiana centrada no valor médio de  $\hat{A}$ :  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi(t > t_1) | \hat{A} | \Psi(t > t_1) \rangle = |\alpha_i^2| a_i$ . É evidente que a determinação experimental dentro de um certo grau de precisão de  $\langle \hat{A} \rangle$  exige várias medidas, e o número de medidas crescerá conforme diminui  $\blacktriangle = 1/(2\Delta p)$ , mas sempre pode ser atingida utilizando um número crescente de medidas. Evidenciamos a diferença dos dois tipos de medida com a seguinte aplicação: no segundo caso uma medida com colapso da posição do medidor não colapsará o sistema de interesse em um auto-estado específico de  $\hat{A}$ , isto é, ainda teremos um estado que é combinação linear destes auto-estados. Portanto, não podemos afirmar o valor de uma nova medida de  $\hat{A}$  no sistema, o que é uma das características das medidas fortes, uma vez que nestas o estado após a primeira medida será um auto-estado do observável.

## 3.2 Valores Fracos

Os valores fracos surgem de uma questão que pode ser postulada da seguinte forma: Se, subsequentemente ao processo da medida fraca, aplicarmos outra medida e selecionarmos apenas um estado específico  $|\phi_f\rangle$ , qual será o valor médio do observável  $A$  para a medida fraca? Aqui estamos considerando que podemos repetir o processo da medida fraca em diversos sistemas, selecionando aqueles em que satisfazem a condição de estar num estado inicial específico e que uma pós-seleção de um estado específico seja realizada.

Utilizando o resultado acima e considerações de medidas em sistemas compostos, podemos calcular para estados finais  $|\phi_f\rangle = |a_k\rangle$ , o estado final do aparato medidor  $|\chi_k\rangle$  será:

$$|\chi_k\rangle = \frac{(I \otimes \langle a_k |) |\Psi(t > t_1)\rangle}{\sqrt{\langle \Psi(t > t_1) | (I \otimes \langle a_k |) | \Psi(t > t_1)\rangle}} = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \int dp_q e^{-\blacktriangle^2(p_q - \epsilon a_k)^2} |p_q\rangle . \quad (3.4)$$

Podemos ver que teremos uma mudança no momentum do aparato medidor compatível com  $\delta p_q/\epsilon = \langle \hat{A} \rangle = a_k$ . Para estados deste tipo ( $|\phi_f\rangle = |a_k\rangle$ ), fica evidente que se quisermos, por exemplo, maximizar a mudança no momentum do aparato medidor, basta pós-selecionarmos o estado com maior auto-valor. Mas a pós-seleção não necessita ser dos auto-estados de  $\hat{A}$ , portanto, para um estado qualquer final  $|\psi_f\rangle = \sum_j \beta_j |a_j\rangle$  teremos que

o estado do aparato medidor será, a menos de uma constante de normalização  $\gamma_0$ :

$$|\chi_f\rangle = \gamma_0 \sum_j \beta_j^* (I \otimes \langle a_j |) |\Psi(t > t_1)\rangle \quad (3.5)$$

$$= \gamma_0 \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int dp_q \sum_j \beta_j^* \left[ \sum_i \alpha_i e^{-\Delta^2(p_q - \epsilon a_i)^2} |p_q\rangle \langle a_j | a_i \rangle \right] \quad (3.6)$$

$$= \gamma_0 \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \int dp_q \sum_i \beta_i^* \alpha_i e^{-\Delta^2(p_q - \epsilon a_i)^2} |p_q\rangle . \quad (3.7)$$

Este resultado é difícil de ser interpretado sem conhecer exatamente os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_i^*$ . Podemos calcular  $|\chi_f\rangle$  de forma aproximada, sob condições que apresentaremos a seguir. O resultado obtido pode ser mais facilmente interpretado e nos trará a definição de valor fraco como proposto em [2]. Inicialmente, teremos que:

$$|\chi_f\rangle = \gamma_1 (I \otimes \langle \phi_f |) e^{-i \int H dt} |\Psi_{in}\rangle = \gamma_1 \int dq \langle \phi_f | e^{(i\epsilon q \hat{A})} | \phi_{in} \rangle e^{-q^2/4\Delta^2} |q\rangle . \quad (3.8)$$

Assim como descrito em [8], podemos realizar a seguinte aproximação, sob as condições que serão descritas na subseção 3.2.1, :

$$\langle \psi_f | e^{(i\epsilon q \hat{A})} | \psi_i \rangle = \sum_n \frac{(iq)^n}{n!} \langle \psi_f | (\epsilon \hat{A})^n | \psi_i \rangle \quad (3.9)$$

$$\cong \langle \psi_f | \psi_i \rangle \left( 1 + iq \frac{\langle \psi_f | (\epsilon \hat{A}) | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right) \quad (3.10)$$

$$\cong \langle \psi_f | \psi_i \rangle e^{iq \epsilon \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}} ; \quad (3.11)$$

Substituíremos o resultado obtido na equação (3.11) em (3.8), obtendo o estado  $|\chi_f\rangle$  a menos de uma constante de normalização  $\gamma_2$ :

$$|\chi_f\rangle \cong \gamma_2 \int dq e^{iq \epsilon \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}} e^{-q^2/4\Delta^2} |q\rangle . \quad (3.12)$$

Utilizando a transformada de Fourier para obter a representação no espaço de momentum, obtemos o estado a menos de uma constante de normalização  $\gamma_3$ :

$$|\chi_f\rangle \cong \gamma_3 \int dp_q e^{-\Delta^2(p_q - \epsilon A_w)^2} |p_q\rangle , \quad (3.13)$$

onde definimos o valor fraco  $A_w$  como sendo:

$$A_w \equiv \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} . \quad (3.14)$$

A interpretação deste resultado dada em [2], que faz analogia a interpretação do modelo de von Neumann, é que a medida de  $\hat{A}$  obteve o valor  $A_w$ . O interessante deste resultado é que  $A_w$  pode ser um valor muito maior que qualquer dos auto-valores  $a_i$ , que poderiam ser obtidos em uma medida forte, com a escolha apropriada dos estados  $|\phi_f\rangle$  e  $|\phi_i\rangle$ , respeitando

o limite dado pela aproximação feita. Inclusive,  $A_w$  pode assumir valores complexos, este caso é considerado na subseção subsequente 3.2.2.

Temos, obviamente, que nos perguntar como os resultados em (3.13) e em (3.7) podem ser equivalentes. No caso da aproximação, o resultado é uma gaussiana que pode estar centrada muito distante dos valores permitidos dos autovalores de  $\hat{A}$ , enquanto que na descrição exata, obtemos um somatório de gaussianas com fatores complexos. Fica evidente que este efeito é devido a interações dos coeficientes complexos  $\alpha_i \beta_i^*$  que, devido a efeitos de interferência, podem resultar, aproximadamente, em uma gaussiana deslocada por valores superior até aos permitidos em medidas fortes.

Outras perguntas que devemos realizar é se o valor fraco  $A_w$  deve ser realmente interpretada como a média do operador  $\hat{A}$ , da mesma forma como é realizado no caso do de uma medida forte, e as possíveis implicações desta interpretação. É evidente, no entanto, um dos usos deste processo é a amplificação do desvio  $\delta p$ , que, com a correta montagem, possibilita uma medida mais exata do valor de  $\epsilon$  quando este for muito pequeno.

### 3.2.1 Condições para Aproximação do Valor Fraco

A aproximação feita do passo (3.9) para (3.10), isto é, desconsiderar os termos de ordem  $n \geq 2$  do somatório, só é válida se estes termos forem muito menores que os dois primeiros, portanto, temos que as condições a seguir devem ser satisfeitas:

$$|q^n \langle \psi_f | (\epsilon \hat{A})^n | \psi_i \rangle| \ll |\langle \psi_f | \psi_i \rangle| ; \quad (3.15)$$

$$|q^n \langle \psi_f | (\epsilon \hat{A})^n | \psi_i \rangle| \ll |q \langle \psi_f | \epsilon \hat{A} | \psi_i \rangle| . \quad (3.16)$$

Para realizar a segunda aproximação de (3.10) para (3.11), temos que a condição

$$\left| q \epsilon \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right| \ll 1 \quad (3.17)$$

deve ser satisfeita, esta condição equivale a  $|q \epsilon \langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle| \ll |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|$ , portanto, dado que a condição em (3.17) é válida precisamos satisfazer apenas a condição em (3.16). Como temos que a dispersão de  $q$  é regida por  $\blacktriangle$ , podemos substituir  $|q|$  por  $\blacktriangle$ , assim as condições para aproximação feita em (3.11) ser válida é:

$$\blacktriangle \ll \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{\langle \psi_f | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle} \right| \quad e ; \quad (3.18)$$

$$\blacktriangle \ll \min_{n \geq 2} \left| \frac{\epsilon \langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\epsilon^n \langle \psi_f | \hat{A}^n | \psi_i \rangle} \right|^{1/(n-1)} = \frac{1}{\epsilon} \min_{n \geq 2} \left| \frac{\langle \psi_f | \hat{A} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \hat{A}^n | \psi_i \rangle} \right|^{1/(n-1)} . \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Valores Fracos Imaginários

A interpretação da parte imaginária pode ser facilmente obtida em um cálculo mais cuidadoso. Temos que  $A_w = \alpha_r + i\alpha_i$ , onde  $\alpha_r = \text{Re } A_w$  e  $\alpha_i = \text{Im } A_w$  são reais e são, respectivamente, a parte real e parte imaginária de  $A_w$ . Retornando à equação (3.12), teremos que:

$$|\chi_f\rangle \cong \gamma_2 \int dq e^{iq\epsilon\alpha_r} e^{-q\epsilon\alpha_i} e^{-q^2/4\blacktriangle^2} |q\rangle . \quad (3.20)$$

Temos que  $q\epsilon\alpha_i + q^2/4\blacktriangle^2 = (q + 2\blacktriangle^2\epsilon\alpha_i)/(4\blacktriangle^2) - 4\blacktriangle^4\epsilon^2\alpha_i^2$ , absorvendo o termo constante de forma a termos  $\gamma_4 = \gamma_2 e^{4\blacktriangle^4\epsilon^2\alpha_i^2}$ , ficamos com a expressão:

$$|\chi_f\rangle \cong \gamma_4 \int dq e^{iq\epsilon\alpha_r} e^{-(q+2\blacktriangle^2\epsilon\alpha_i)^2/4\blacktriangle^2} |q\rangle , \quad (3.21)$$

onde podemos ver que a parte imaginária de  $A_w$  causará um desvio na coordenada  $q$ , de forma a obtermos:  $\delta q = -2\blacktriangle^2\epsilon \text{Im } A_w$ . Realizando a transformação de base, obteremos de forma mais cuidadosa que o desvio causado em  $p$  será  $\delta p = \epsilon \text{Re } A_w$ .

## 3.3 Como medir um Valor Fraco usando Stern-Gerlach

Utilizaremos agora a descrição de valores fracos para o caso do experimento de Stern-Gerlach. Mostraremos como realizar uma medida fraca e uma pós-seleção, e descreveremos as condições para a realização da medida fraca e valor fraco no caso deste experimento. Neste contexto, obteremos um valor fraco do observável  $\sigma_z$  fora do intervalo permitido para medidas fortes  $[-1, 1]$ , através de uma escolha de estado inicial apropriada. A montagem

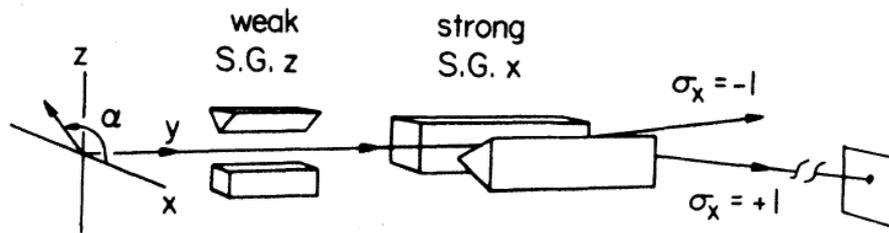


Figura 4 – Esquema de montagem para medir um valor fraco usando adaptação do experimento de Stern-Gerlach. Imagem retirada de [8].

está esquematizada na Figura 4 e será descrita da seguinte forma: Faremos a pré-seleção de um estado inicial de spin descrito por:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |\uparrow_x\rangle + \sin(\theta/2) |\downarrow_x\rangle \quad (3.22)$$

$$= \frac{\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{\sqrt{2}} |\uparrow_z\rangle + \frac{\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)}{\sqrt{2}} |\downarrow_z\rangle . \quad (3.23)$$

Este estado pode ser selecionado, por exemplo, utilizando uma medida forte da projeção do spin em uma direção  $\vec{u}$  no plano x-z com ângulo  $\theta$  a partir da direção  $\hat{e}_x$  (isto é,  $\hat{e}_u = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_z$ ).

Para a medida fraca utilizaremos um aparato de Stern-Gerlach medindo o observável  $\sigma_z$  e sequencialmente faremos uma medida forte de  $\sigma_x$  utilizando outro aparato de Stern-Gerlach, este segundo aparato será responsável pela pós-seleção. Cada aparato um possui seu próprio hamiltoniano independente, como dado na seção 2.3.1, localizado em tempos distintos  $t_1$  e  $t_2$ , onde teremos que o Hamiltoniano total será a soma dos dois hamiltonianos:

$$H = \epsilon_w \hat{z} \hat{\sigma}_z \delta(t - t_1) + \epsilon_x \hat{x} \hat{\sigma}_x \delta(t - t_2) \quad (3.24)$$

Assumiremos que os estados iniciais dos medidores  $|\phi\rangle_z$  e  $|\phi\rangle_x$  são estados gaussianos como os utilizados na seção 2.3.1. Utilizaremos que  $\blacktriangle_x = \blacktriangle_w \equiv \blacktriangle$ , isto é, tomaremos que a incerteza dos dois medidores são iguais, apenas mudaremos a intensidade das constantes de acoplamento  $\epsilon_w$  e  $\epsilon_x$ . Como queremos que a primeira medida seja fraca e a segunda forte, as condições  $\blacktriangle \ll \frac{1}{\epsilon_w}$  e  $\blacktriangle \gg \frac{1}{\epsilon_x}$  devem ser satisfeitas.

O estado final será pós-selecionado pela medida forte. Como já mostrado anteriormente, esta medida separará o seus autoestados:  $|\uparrow_x\rangle$  e  $|\downarrow_x\rangle$ . Podemos calcular o valor fraco para os dois resultados possíveis da segunda medida, a medida forte. Usando o resultado da equação (3.14):

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_w^+ &= \frac{\langle \uparrow_x | \sigma_z | \psi \rangle}{\langle \uparrow_x | \psi \rangle} = \frac{[\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)] \langle \uparrow_x | \uparrow_z \rangle - [\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)] \langle \uparrow_x | \downarrow_z \rangle}{\sqrt{2} \cos(\theta/2)} \\ &= \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan(\theta/2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_w^- &= \frac{\langle \downarrow_x | \sigma_z | \psi \rangle}{\langle \downarrow_x | \psi \rangle} = \frac{[\cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)] \langle \downarrow_x | \uparrow_z \rangle - [\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)] \langle \downarrow_x | \downarrow_z \rangle}{\sqrt{2} \sin(\theta/2)} \\ &= \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} = \frac{1}{(\sigma_z)_w^+} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Vemos aqui que dependendo da pré-seleção, podemos tornar  $(\sigma_z)_w^+$  quão grande quanto quisermos, basta aproximarmos  $\theta$  de  $\pi$ , pois neste caso  $(\sigma_z)_w^+ \rightarrow \infty$ . No entanto, é importante notar que quanto maior fizermos  $(\sigma_z)_w^+$ , mais medidas terão de ser realizadas para que a pós-seleção no estado  $|\uparrow_x\rangle$  ter sucesso, pois temos que  $|\langle \downarrow_x | \psi \rangle|^2 = |\sin(\theta/2)|^2$  se torna menor. Devemos nos perguntar se tornar  $(\sigma_z)_w^+$  o maior possível não quebra as condições para a aproximação do valor fraco, veremos na subseção 3.3.1 que uma escolha apropriada de  $\epsilon$  permite  $(\sigma_z)_w^+$  assumir qualquer valor. Um exemplo de valor grande é sugerido no título do artigo [2], que sugere obter  $(\sigma_z)_w^+ = 100$ . Temos para tanto que  $\theta \approx \pi - 0.02$  deve ser o ângulo escolhido, de forma que teremos que a pós-seleção obterá êxito com probabilidade  $|\sin(\theta/2)|^2 \approx 4 \times 10^{-4}$ .

Também é notável que quanto maior  $(\sigma_z)_w^+$  menor será  $(\sigma_z)_w^-$ . Resultado análogo pode ser obtido se quisermos tomar  $(\sigma_z)_w^-$  o maior possível. Estes efeitos são esperados, pois se retornarmos ao caso sem pós-seleção o medidor fraco deve obter valores médios dentro do intervalo permitido, e este valor médio pode ser obtido pela média de  $(\sigma_z)_w^+$  e  $(\sigma_z)_w^-$  pesada pela probabilidade de cada resultado ocorrer.

### 3.3.1 Condições para a aproximação do valor fraco no SG

As condições para a aproximação do valor fraco ser válida são dadas nas equações (3.18) e (3.19). Estas condições podem ser facilmente investigadas, pois temos que o observável  $\sigma_z$  satisfaz  $\sigma_z^2 = I$ , portanto,  $\sigma_z^{2k+1} = \sigma_z$  e  $\sigma_z^{2k} = I$  para  $k \in \mathbb{N}$ . A condição na equação (3.18) é simplesmente  $\blacktriangle \ll \frac{1}{\epsilon_w |(\sigma_z)_w|}$ . A condição dada em (3.19) exige que  $\blacktriangle$  seja muito menor que todos os possíveis resultados de  $\left| \frac{\langle \psi_f | (\sigma_z)^n | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | (\sigma_z)^n | \psi_i \rangle} \right|^{1/(n-1)}$  para  $n \geq 2$ . Analisaremos separadamente  $n$  par e  $n$  ímpar.

Para  $n = 2k + 1$  ( $n$  ímpar), teremos que

$$\left| \frac{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z^{2k+1} | \psi_i \rangle} \right|^{1/(2k)} = \left| \frac{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z | \psi_i \rangle} \right|^{1/(2k)} = 1. \quad (3.27)$$

Portanto, limitando-se caso de  $n$  ímpar, teremos que (3.19) se reduz a  $\blacktriangle \ll 1$ . Enquanto que para  $n = 2k$  ( $n$  par), teremos que

$$\left| \frac{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z^{2k} | \psi_i \rangle} \right|^{1/(2k-1)} = \left| \frac{\langle \psi_f | \hat{\sigma}_z | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle} \right|^{1/(2k-1)} = |(\sigma_z)|^{1/(2k-1)}. \quad (3.28)$$

Separando que casos em que  $|(\sigma_z)_w| \geq 1$  ou  $|(\sigma_z)_w| < 1$  para analisarmos o mínimo, teremos que:

$$\min_{k \geq 1} |(\sigma_z)_w|^{1/(2k-1)} = 1 \quad \text{se } |(\sigma_z)_w| \geq 1 \quad (3.29)$$

$$\min_{k \geq 1} |(\sigma_z)_w|^{1/(2k-1)} = |A_w| \quad \text{se } |(\sigma_z)_w| < 1 \quad (3.30)$$

Podemos reunir as duas condições e todos os casos  $n$  da seguinte forma: Se  $|(\sigma_z)_w| \geq 1$  teremos que  $|(\sigma_z)_w| \geq 1 \geq 1/|(\sigma_z)_w|$ , portanto a condição mais forte será simplesmente  $\blacktriangle \ll 1/(\epsilon_w |(\sigma_z)_w|)$ . Enquanto que para  $|(\sigma_z)_w| < 1$ , a condição mais forte será  $\blacktriangle \ll |(\sigma_z)_w|/(\epsilon_w)$ .

## 4 Interpretação dos Valores Fracos

A interpretação dos valores fracos é um assunto controverso. Caso seja utilizada a interpretação de média do operador, assim como interpretamos nas medidas fortes, podemos produzir uma série de paradoxos e causar diversas implicações que mudam conceitos fundamentais da Física. A interpretação, no entanto, não deve ser feita desta forma e outra interpretação foi obtida recentemente através de duas abordagens diferentes.

Uma das abordagens utiliza noções dos propagadores de Feynman para explicar como deve ser interpretado os valores fracos [7], a outra abordagem é através de um formalismo diferente para a Mecânica Quântica, chamado de *Quantum Bayesianism* (*QBism*) [3]. Ambas abordagens chegam em resultados bem semelhantes, utilizaremos a primeira abordagem que permite uma explicação mais simples, sem a necessidade da introdução do operador densidade e considerações de purificação do mesmo. Introduziremos a seguir alguns conceitos dos propagadores de Feynman que serão utilizados: como caminhos, amplitudes de probabilidade, a realização de medidas no sistema e efeitos de pós seleção. Neste contexto, consideraremos o modelo de von Neumann e como este pode transformar caminhos virtuais em caminhos reais.

Utilizando os conceitos de caminhos e mais algumas considerações clássicas, poderemos calcular a média da posição do aparato medidor para medidas fortes e medidas fracas. Para medidas fracas, obteremos um resultado equivalente ao de [2] para o valor fraco, isto é, o resultado de uma medida fraca considerando pré e pós-seleção. No entanto, o resultado obtido neste capítulo pode ser interpretado de outra forma e é fortemente desaconselhável a interpretação de média do operador, tal qual feita para medidas fortes. A nova interpretação sugere que os valores fracos medem amplitudes de caminhos virtuais.

### 4.1 Caminhos, Amplitudes, Probabilidades e Medidas

Consideramos um sistema representado por um espaço de Hilbert com  $N$  dimensões com o Hamiltoniano  $\hat{H}$  constante no tempo. Realizamos, neste sistema, uma pré-seleção no tempo  $t = 0$  de um estado  $|\Psi\rangle$  e no tempo final  $t = t_f$  de um estado  $|\Phi\rangle$ . Temos que a probabilidade desta transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  é dada por  $\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi} = |\langle \Phi | e^{i\hat{H}t_f} | \Psi \rangle|^2$ , propriamente associada com uma amplitude de probabilidade  $\mathbb{A}^{\Phi \leftarrow \Psi} = \langle \Phi | e^{i\hat{H}t_f} | \Psi \rangle$ . Realçamos que as probabilidades são reais positivas, enquanto que as amplitudes podem assumir valores complexos.

Supomos que este sistema possui um observável  $A$ , com auto-estados  $|i\rangle$  associados a autovalores  $a_i$  (onde  $i = 1, 2, 3, \dots, N$  e  $a_i \neq a_j$ ), onde teremos que  $\sum_i |i\rangle \langle i| = I$  é a

unidade. De forma que podemos escrever:

$$\mathbb{A}^{\Phi \leftarrow \Psi} = \langle \Phi | e^{i\hat{H}t_f} | \Psi \rangle = \sum_i \langle \Phi | e^{i\hat{H}t_f/2} | i \rangle \langle i | e^{i\hat{H}t_f/2} | \Psi \rangle \equiv \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} ; \quad (4.1)$$

$$\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi} = \left| \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} \right|^2, \quad (4.2)$$

onde interpretaremos  $\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}$  como a amplitude da transição percorrendo um determinado caminho, em que num tempo intermediário  $t_1$  ( $0 < t_1 < t_f$ ), o estado era  $|i\rangle$ . A soma das amplitudes de todos os caminhos, isto é, que no tempo  $t_1$  se encontravam nos diferentes estados  $|i\rangle$ , nos permite calcular a amplitude da transição  $\mathbb{A}^{\Phi \leftarrow \Psi}$ . Notamos que apenas foi dado um sentido físico a  $\langle \Phi | i \rangle \langle i | \Psi \rangle$ , não tendo sido modificado o formalismo apresentado até então.

Podemos nos perguntar o que acontece se realizarmos uma medida forte, assim como as do Postulado 2, do observável  $\hat{A}$  no tempo  $t_1$ . Teremos que recalculer a probabilidade  $\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi}$  considerando que os caminhos serão independentes, uma vez que o resultado da medida de  $\hat{A}$  nos determina em qual estado estaremos no tempo  $t_1$ . Podemos obter então a probabilidade da transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  considerando a probabilidade da transição  $i \leftarrow \Psi$  e posteriormente a transição  $\Phi \leftarrow i$ , somando sobre todas as possibilidades de estados  $i$ . Desta forma, obtemos a probabilidade da transição  $\Phi \leftarrow \Psi$ :

$$\mathbb{P}_{real}^{\Phi \leftarrow \Psi} = \sum_i \mathbb{P}^{\Phi \leftarrow i} \mathbb{P}^{i \leftarrow \Psi} = \sum_i |\langle \Phi | i \rangle|^2 |\langle i | \Psi \rangle|^2 \quad (4.3)$$

$$= \sum_i |\langle \Phi | i \rangle \langle i | \Psi \rangle|^2 = \sum_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 \quad (4.4)$$

Podemos notar a semelhança entre as fórmulas obtidas em (4.2) e (4.3) para calcular as probabilidades da transição nas duas situações diferentes. A principal diferença é que os caminhos sofrem interferência no primeiro caso, notável pela soma das amplitudes complexas. No segundo caso, temos que as probabilidades estritamente reais e positivas não permitirão interferência. No primeiro caso, os caminhos são considerados virtuais, enquanto que no segundo, eles são ditos caminhos reais.

Podemos generalizar para que a medida intermediária seja a de um observável com degenerescência, isto é, permitindo autovalores iguais. Para isto, consideraremos que a medida não destrói a interferência para estados com mesmo autovalor, então considerando que os estados  $|1\rangle, \dots, |K\rangle$  possuam o mesmo autovalor  $a_1$  e os estados  $|K+1\rangle, \dots, |N\rangle$  possuem o mesmo autovalor  $a_2$  ( $a_2 \neq a_1$ ). Teremos então que a probabilidade da transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  é dada por:

$$\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi} = \left| \sum_{i=0}^K \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} \right|^2 + \left| \sum_{j=K+1}^N \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} \right|^2 \quad (4.5)$$

Consideramos que os caminhos com estados intermediários  $|1\rangle, \dots, |K\rangle$  formam uma via real I, enquanto que os outros caminhos formam uma outra via real. Dentro de cada via é permitido interferência entre os caminhos, mas diferentes vias não causam interferência.

## 4.2 Modelo de Medidas de von Neumann e Pós-Seleção

Utilizaremos o modelo de medidas de von Neumann para mostrar como medidas fortes em um tempo intermediário formam caminhos reais. Calcularemos a média do momentum do aparato medidor para obter a média do observável  $\hat{A}$ . Posteriormente, adaptaremos estes cálculos para obter a média do aparato medidor para uma medida fraca, obtendo um resultado equivalente ao obtido no capítulo 3, mas com uma interpretação mais clara.

Continuaremos com as mesmas considerações sobre o modelo de von Neumann: Consideraremos que o Hamiltoniano é dado por  $\hat{H} = -\epsilon\hat{q}\hat{A}\delta(t - t_1)$ ; Que o estado inicial  $|\chi_i\rangle$  do aparato medidor é representado na base de momentum por  $\langle p|\chi_i\rangle = \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}}e^{-\blacktriangle^2(p)^2}$ ; Que o estado inicial do sistema de interesse é  $|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$ , onde  $|i\rangle$  é autovetor de  $\hat{A}$  com autovalor associado  $a_i$ ; E que o estado final (pós-seleção) deste sistema é  $|\Phi\rangle = \sum_i \beta_i |i\rangle$ .

Teremos, como já foi calculado em 3.2 que o estado final do medidor  $|\chi_f\rangle$  será, representado na base de momentum:

$$\langle p|\chi_f\rangle = \gamma_0 \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \sum_i (\beta_i^* \alpha_i) e^{-\blacktriangle^2(p - \epsilon a_i)^2} = \gamma_0 \frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} e^{-\blacktriangle^2(p - \epsilon a_i)^2}, \quad (4.6)$$

onde  $\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} = \beta_i^* \alpha_i$ , pois,  $\beta_i^* = \langle \Phi|i\rangle$  e  $\alpha_i = \langle i|\Psi\rangle$ .

A média do momentum (operador  $\hat{p}$ ), pode ser calculada utilizando o resultado clássico:

$$\langle p \rangle = \frac{\int p \mathbb{P}(p) dp}{\int \mathbb{P}(p) dp}, \quad (4.7)$$

onde  $\mathbb{P}(p) = \mathbb{P}^{p \rightarrow \chi_i} = |\langle p|e^{i\hat{H}t}|\chi_i\rangle|^2 = |\langle p|\chi_f\rangle|^2$ , utilizando os resultados e conceitos de caminhos introduzidos na seção anterior.

### 4.2.1 Medidas Fortes

Para o caso das medidas fortes, teremos  $\blacktriangle = 1/(2\Delta p_q) \rightarrow \infty$ , isto faz com que qualquer diferença no momentum separando os auto-estados do observável  $\hat{A}$  possa ser percebida. Para  $\blacktriangle \rightarrow 0$  temos que os estados gaussianos tendem a delta de Dirac, em torno do centro, isto é,

$$\frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} e^{-\blacktriangle^2(p - \epsilon a_i)^2} \rightarrow \delta(p - \epsilon a_i). \quad (4.8)$$

Podemos, facilmente calcular o valor médio da posição do medidor seguindo as equações Podemos calcular o termo da probabilidade  $|\langle p|\chi_f\rangle|^2 = \langle p|\chi_f\rangle^* \langle p|\chi_f\rangle$ :

$$\mathbb{P}(p) = |\langle p|\chi_f\rangle|^2 = |\gamma_0|^2 \left[ \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} \delta(p - \epsilon a_i) \right] \left[ \sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} \delta(p - \epsilon a_j) \right] \quad (4.9)$$

$$= |\gamma_0|^2 \left[ \sum_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 \delta^2(p - \epsilon a_i) \right] + \left[ \sum_{i \neq j} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \delta(p - \epsilon a_j) \delta(p - \epsilon a_i) \right] \quad (4.10)$$

$$= |\gamma_0|^2 \left[ \sum_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 \delta(p - \epsilon a_i) \right]. \quad (4.11)$$

Onde de (4.9) para (4.10), separamos os resultados da multiplicação de termos iguais. E de (4.10) para (4.11) assumimos que todos os autovalores são distintos, portanto, teremos que  $\delta(p - \epsilon a_j) \delta(p - \epsilon a_i) = 0$ . Também, temos que  $\delta^2(p - \epsilon a_i) = \delta(p - \epsilon a_i)$ . Assim, podemos avaliar os resultados das integrais em (4.7) para obter o valor médio de uma medida forte de  $\langle p \rangle$ :

$$\langle p \rangle_{forte} = \frac{\int p \mathbb{P}(p) dp}{\int \mathbb{P}(p) dp} = \frac{\sum_i \epsilon a_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2}{\sum_j |\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2} = \epsilon \frac{\sum_i a_i \mathbb{P}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\sum_j \mathbb{P}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}} = \epsilon \langle A \rangle \quad (4.12)$$

Podemos notar que  $\omega_i \equiv \frac{|\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2}{\sum_j |\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2} = \frac{\mathbb{P}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi}}$  é a probabilidade relativa do caminho  $i$  ter sido tomado, renormalizado pela consideração que a transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  sucedeu. Aqui podemos ver que o processo realizado pelo modelo de von Neumann destrói os efeitos de interferência entre os caminhos, dado que a medida seja uma medida forte.

### 4.3 Reinterpretação dos Valores Fracos

As medidas fracas ocorrem no limite oposto ao das medidas fortes, isto é, teremos  $\blacktriangle = 1/(2\Delta p_q) \rightarrow 0$ . Desta forma, a gaussiana no espaço de momentum tem o desvio muito grande, portanto, sendo assim muito difícil diferenciar pequenas mudanças no momentum associadas a diferentes autoestados do observável  $\hat{A}$ . Teremos que:

$$\frac{\blacktriangle}{\sqrt{\pi}} e^{-\blacktriangle^2 (p - \epsilon a_i)^2} \rightarrow G(p - \epsilon a_i) \quad (4.13)$$

Onde não tomamos o limite exato, pois a função se torna uma constante, de forma que ela é não normalizável. Usaremos, no entanto, o limite para uma função  $G(p)$  que mantém várias propriedades da gaussiana, tal qual em [7], teremos que:

$$G(p) \geq 0 \quad G(p) \text{ é uma função real e positiva} \quad (4.14)$$

$$G(p) = G(-p) \quad G(p) \text{ é uma função par} \quad (4.15)$$

$$\int |G(p)|^2 dp = 1 \quad G(p) \text{ é uma função normalizada} \quad (4.16)$$

Utilizando a propriedade de (4.15), teremos que  $G(p - p_0)G(p - p_1)$  é par frente a uma reflexão em torno do ponto médio do pico das duas gaussianas, isto é, o ponto  $(p_0 + p_1)/2$ . Utilizando a mesma propriedade, teremos também que  $\int p|G(p)|^2 dp = 0$ , pois  $|G(p)|^2$  é par e  $p$  é ímpar.

Utilizando todas estas propriedades da função  $G(p)$  e a aproximação  $\int G(p - a)G(p - b)dp \approx 1$  no limite em que  $\Delta \rightarrow 0$ , obteremos:

$$\langle p \rangle_w \approx \epsilon \sum_i a_i \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}} \right) \quad (4.17)$$

Os cálculos justificando este resultado estão no Apêndice A. Podemos ver a ligação direta com o resultado obtido em [2] e reproduzido na seção 3.2, utilizando a definição de  $\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} = \langle \Phi | j \rangle \langle j | \Psi \rangle$ , que  $a_i = \langle i | A | i \rangle$  e os autovalores são sempre reais para observáveis:

$$\langle p \rangle_w \approx \epsilon \sum_i \langle i | A | i \rangle \operatorname{Re} \frac{\langle \Phi | i \rangle \langle i | \Psi \rangle}{\sum_j \langle \Phi | j \rangle \langle j | \Psi \rangle} = \epsilon \operatorname{Re} \sum_i \frac{\langle \Phi | i \rangle \langle i | A | i \rangle \langle i | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} \quad (4.18)$$

$$= \epsilon \operatorname{Re} \frac{\langle \Phi | A | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = \epsilon \operatorname{Re} A_w \quad (4.19)$$

Este resultado é idêntico ao resultado obtido na seção 3.2. Também podemos obter o resultado que a medida da posição do medidor trará informações sobre a parte imaginária de  $A_w$  [7]. Apesar de obtermos o mesmo resultado, a equação (A.1) permite uma interpretação mais clara deste resultado obtido. Temos que  $\left( \frac{\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}} \right)$  é a amplitude relativa do caminho  $i$  normalizado considerando que a transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  ocorreu (pós-seleção obteve sucesso).

Desta forma, no caso especial em que o observável medido fracamente é um projetor unidimensional ( $|i\rangle\langle i|$ ), teremos que o valor fraco obtido será justamente a amplitude do caminho  $i$  normalizado considerando que a transição  $\Phi \leftarrow \Psi$  ocorreu (pós-seleção obteve sucesso). Desta forma, utilizando um conjunto de medidas fracas de projetores unidimensionais podemos medir completamente as amplitudes das transições. O mesmo pode ser feito para um observável  $\hat{A}$  considerando que ele será projetores pesados pelos autovalores  $a_i$ . Utilizando um conjunto de observáveis  $\{\hat{K}\}$  poderemos medir as amplitudes, com uma escolha apropriada de autovalores  $k_i$ . Desta forma interpretaremos que um valor fraco é uma medida da amplitude pesada por autovalores  $a_i$ , e não o valor médio do observável  $\hat{A}$ .

### 4.3.1 Projeção de spin 100 e outros paradoxos

Como vimos nesta seção, a interpretação do valor fraco como média do observável deve ser evitada. O valor fraco 100 obtido na seção 3.3 não representa, propriamente, a média da projeção do spin da partícula. Teremos que neste caso específico, como o

observável medido fracamente é  $\sigma_z$  teremos que os caminhos cujo mediremos as amplitudes serão os que passam por  $|\uparrow_z\rangle$  e  $|\downarrow_z\rangle$ , pesados por  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. De forma que teremos que a medida da posição do aparato medidor, nos trará que

$$(\sigma_z)_w = \text{Re} \frac{\mathbb{A}_{\uparrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\mathbb{A}_{\uparrow}^{\Phi \leftarrow \Psi} + \mathbb{A}_{\downarrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}} - \text{Re} \frac{\mathbb{A}_{\downarrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\mathbb{A}_{\uparrow}^{\Phi \leftarrow \Psi} + \mathbb{A}_{\downarrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}} \quad (4.20)$$

Uma escolha apropriada de estado inicial e final, portanto, de amplitude de transição, torna o valor fraco quão grande quanto queiramos. É evidente que com a informação de  $(\sigma_z)_w$ , parte real e imaginária que pode ser obtida da medida do momentum do aparato medidor, junto com a probabilidade da pos-seleção ocorrer ( $\mathbb{P}^{\Phi \leftarrow \Psi} = |\mathbb{A}_{\uparrow}^{\Phi \leftarrow \Psi} + \mathbb{A}_{\downarrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2$ ), podemos determinar o valor de  $\mathbb{A}_{\uparrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}$  ou de  $\mathbb{A}_{\downarrow}^{\Phi \leftarrow \Psi}$ . Isto é, o valor fraco de  $\sigma_z$  serve, neste caso, para inferir as amplitudes do estado.

Outros paradoxos citados na introdução como: Energia cinética negativa [4] ; Partícula passando por barreira a velocidades acima da velocidade da luz [5]; Separação de uma partícula de suas propriedades [6]; são todos devido a atribuição de um sentido físico ao valor fraco. Em especial, o último paradoxo citado faz uso de diversas medidas fracas e comparação de seus valores fracos para afirmar que há a separação de uma partícula de suas propriedades, além da atribuição de que o valor fraco seria a média do observável. [7]

# Conclusão

Neste trabalho foi explanado o conceito de valor fraco, que é o valor obtido por uma medida fraca sob as condições de pré e pós seleção. Foi mostrada a interpretação dada ao valor fraco como média do observável, em uma analogia as medidas fortes do modelo de von Neumann, dada por AAV no artigo [2]. Apresentamos o exemplo dado neste mesmo artigo de como obter um valor fraco para o observável da projeção de spin, este valor seria absurdo caso obtido no caso de uma medida forte. Foi então utilizado os conceitos de caminho de Feynman para calcular a média da medida fraca, sob pré e pós seleção, assim como no artigo [7]. Este calculo apresentou uma outra interpretação ao valor fraco, não por analogia a medida forte, mas como uma média sob caminhos virtuais, o que mostra que não podemos interpretar da mesma forma esta média, pois os pesos não são probabilidades, mas amplitudes complexas. Interpretamos o valor fraco como uma forma de medir as amplitudes dos caminhos virtuais.

Em [11], uma Teoria Física é definida como o conjunto de três partes essenciais: (1) domínio da realidade, isto é, ao que a teoria se aplica; (2) uma teoria matemática para descrever o domínio; (3) o mapa, a parte que associa os resultados matemáticos ao domínio da realidade. Como vimos, a derivação feita por AAV sobre os valores fracos não está matematicamente errada, este resultado pode ser obtido através de diferentes derivações, como foi feito no capítulo 4 utilizando conceitos de caminho de Feynman ou como no artigo [3] utilizando um formalismo diferente, Quantum Bayesianism. No entanto, todos os paradoxos criados utilizando os valores fracos associam uma interpretação de valor médio, tal qual as medidas fortes. Vemos que esta interpretação não está correta, portanto estes paradoxos são erros no mapeamento dos resultados matemáticos ao domínio da realidade, não indicando novos fenômenos ou propriedades físicas (por exemplo, energia cinética negativa).

# Referências

- [1] Pier A. Mello. The von Neumann model of measurement in quantum mechanics. *AIP Conference Proceedings*, 1575:136–165, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 3, 14 e 17.
- [2] Yakir Aharonov, David Z. Albert, and Lev Vaidman. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin 1/2 particle can turn out to be 100. *Phys. Rev. Lett.*, 60:1351–1354, Apr 1988. Citado 10 vezes nas páginas 3, 4, 6, 7, 19, 21, 24, 26, 30 e 32.
- [3] L. Qin, W. Feng, and X.-Q. Li. Simple understanding of quantum weak values. *Scientific Reports*, 6:20286, February 2016. Citado 3 vezes nas páginas 4, 26 e 32.
- [4] Daniel Rohrlich, Yakir Aharonov, Sandu Popescu, and Lev Vaidman. Negative kinetic energy between past and future state vectors. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 755(1):394–399, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 31.
- [5] Daniel Rohrlich and Yakir Aharonov. Cherenkov radiation of superluminal particles. *Phys. Rev. A*, 66:042102, Oct 2002. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 31.
- [6] Yakir Aharonov, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich, and Paul Skrzypczyk. Quantum cheshire cats. *New Journal of Physics*, 15(11):113015, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 31.
- [7] D. Sokolovski. Weak measurements measure probability amplitudes (and very little else). *Physics Letters A*, 380(18–19):1593 – 1599, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 6, 26, 29, 30, 31 e 32.
- [8] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan. The sense in which a "weak measurement" of a spin-1/2 particle's spin component yields a value 100. *Phys. Rev. D*, 40:2112–2117, Sep 1989. Citado 3 vezes nas páginas 7, 21 e 23.
- [9] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, revised edition, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 13.
- [10] Michael A Nielsen; Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 10th anniversary edition, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.
- [11] C.A. Hein G. Ludwig. *Foundations of Quantum Mechanics I*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K, 1983. Citado na página 32.

# APÊNDICE A – Calculando o valor $\langle p \rangle_w$

Este apêndice busca provar a afirmação:

$$\langle p \rangle_w \approx \epsilon \sum_i a_i \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}} \right) \quad (\text{A.1})$$

no limite  $\blacktriangle \rightarrow 0$ , onde podemos tomar a aproximação  $\int G(p-a)G(p-b)dp \approx 1$ , e utilizar as propriedades descritas na seção 4.3. Podemos abrir o termo  $\mathbb{P}^w(p)$  de forma semelhante ao feito para o caso da medida forte:

$$\mathbb{P}^w(p) = |\langle p | \chi_f \rangle|^2 = |\gamma_0|^2 \left[ \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} G(p - \epsilon a_i) \right] \left[ \sum_j (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* G(p - \epsilon a_j) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$= |\gamma_0|^2 \left[ \sum_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 |G(p - \epsilon a_i)|^2 \right] + \quad (\text{A.3})$$

$$+ |\gamma_0|^2 \left[ \sum_{i,j; i \neq j} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* G(p - \epsilon a_j) G(p - \epsilon a_i) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Com base no resultado acima, realizamos a integral  $\int \mathbb{P}^w(p) dp$ :

$$\int \mathbb{P}^w(p) dp = |\gamma_0|^2 \left( \sum_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 + \sum_{i,j; i \neq j} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= |\gamma_0|^2 \left( \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} \right) \left( \sum_j (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \right) = |\gamma_0|^2 \left| \sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} \right|^2 \quad (\text{A.6})$$

Onde utilizamos  $\blacktriangle \rightarrow 0$  para obter  $\int G(p - \epsilon a_j) G(p - \epsilon a_i) dp = 1$ , pois nesse limite  $G(p - \epsilon a_j) \approx G(p - \epsilon a_i)$ .

E também podemos obter a integral  $\int p \mathbb{P}^w(p) dp$ :

$$\int p \mathbb{P}^w(p) dp = |\gamma_0|^2 \left( \sum_i \epsilon a_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 + \sum_{i,j; i \neq j} \epsilon \frac{a_i + a_j}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \right) \quad (\text{A.7})$$

$$= \epsilon |\gamma_0|^2 \left( \sum_i a_i |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 + \sum_{i,j; i \neq j} \frac{a_i + a_j}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \epsilon |\gamma_0|^2 \sum_i a_i \left( |\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 + \operatorname{Re} \left[ \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi*} \sum_{j \neq i} \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} \right] \right) \quad (\text{A.9})$$

$$= \epsilon |\gamma_0|^2 \sum_i a_i \left( + \operatorname{Re} \left[ \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi*} \sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} \right] \right) \quad (\text{A.10})$$

Onde temos que de (A.8) para (A.9) foi utilizado o seguinte resultado, em que de (A.12) para (A.13) foi apenas mudado os indices mudos  $i$  e  $j$

$$\sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_i + a_j}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_i}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* + \sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_j}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \quad (\text{A.12})$$

$$= \sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_i}{2} \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* + \sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_i}{2} \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi})^* \quad (\text{A.13})$$

$$= \sum_{i,j ; i \neq j} \frac{a_i}{2} [\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^* + \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi})^*] \quad (\text{A.14})$$

$$= \sum_{i,j ; i \neq j} a_i \operatorname{Re}[\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi} (\mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi})^*] \quad (\text{A.15})$$

O resultado final  $\langle p \rangle$  pode ser então obtido:

$$\langle p \rangle = \frac{\int p \mathbb{P}^w(p) dp}{\int \mathbb{P}^w(p) dp} = \epsilon \frac{\sum_i a_i (|\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2 + \operatorname{Re} [\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi*} \sum_{j \neq i} \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}])}{|\sum_i \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}|^2} \quad (\text{A.16})$$

$$= \epsilon \sum_i a_i \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}}{\sum_j \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}} \right) \quad (\text{A.17})$$

De (A.16) para (A.17) foi considerado que (utilizando  $y = \mathbb{A}_i^{\Phi \leftarrow \Psi}$  e  $x = \sum_{j ; j \neq i} \mathbb{A}_j^{\Phi \leftarrow \Psi}$ ):

$$\frac{|y|^2 + \operatorname{Re}(x^* y)}{|x + y|^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2|y|^2 + x^* y + y^* x}{(x + y)^*(x + y)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{y^*(y + x) + y(y^* + x^*)}{(x + y)^*(x + y)} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{y^*}{(x + y)^*} + \frac{y}{(x + y)} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{y}{x + y} \right) \quad (\text{A.19})$$