

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
Tese de Doutorado

**Um estudo sobre feixes intensos e não-contínuos de  
partículas carregadas\***

**(A study of intense bunched charged particle beams)**

Thales Marques Corrêa da Silva

Tese elaborada sob orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, co-orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre  
Novembro de 2016

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# Agradecimentos

À minha mãe, Tânia, e ao meu pai, Vitalino, por todo apoio e suporte emocional e financeiro durante toda minha vida. Também agradeço por todos os momentos que passamos juntos e todos sacrifícios que vocês fizeram. Amo muito vocês.

Ao meu irmão, Vitáli. Nossa convivência nunca foi muito fácil, mas aprender a lidar com nossas diferenças me ajudou muito a amadurecer nos últimos anos.

À minha avó Ibraima, por ter ajudado na nossa criação.

Gostaria de agradecer a todos meus familiares com quem passei bons momentos juntos.

À Fernanda, por me dizer o que eu precisava ouvir (em vez do que eu queria ouvir). À Nicole, pela amizade contínua durante todos esses anos. Ao Rafael pelas variadas discussões e ajudas. À Sabrina pela amizade e discussões.

Também gostaria de agradecer a uma série de pessoas com quem compartilhei ótimos momentos durante todos esses anos. Nominalmente: Breno, Bruno, David, Gabriel Canova, Luiza, Marcelo, Raquel, Tarso e Vinícius.

Gostaria de agradecer aos professores e funcionários do IF-UFRGS. Em particular, à Professora Ruth de Souza Schneider e aos professores Cláudio Schneider e Luiz Fernando Ziebell. Também gostaria de agradecer ao professor Yan Levin pela sua colaboração nos artigos que foram a base para esta tese.

Por fim, gostaria de deixar meu agradecimento muito especial aos meu orientadores. Ao Felipe por sempre ter ajudado a me manter motivado, por todas discussões e conhecimentos passados. Ao Renato pela paciência, disponibilidade e por tudo que tu me ensinou durante todos esses anos. Acho que nunca conseguirei retribuir tudo que tu fez por mim, apenas espero estar numa posição em que possa fazer o mesmo por alguém no futuro. Agradeço muito a vocês dois também pela preocupação genuína com meu futuro e pela ajuda ao longo desse último ano. Por isso, serei eternamente grato.

Muito obrigado a todos os citados,

Thales.

# Resumo

Nesta tese, estudamos feixes intensos não-contínuos de partículas carregadas. Na primeira parte, analisamos um feixe com simetria esférica e a sua relaxação para um estado quase-estacionário. Por ser um sistema com interação de longo alcance, a evolução do feixe é dominado pela dinâmica de Vlasov-Maxwell. Mostramos que o mecanismo de relaxação é a ressonância entre o movimento coletivo e o individual de algumas partículas. Fazemos uma analogia entre a dinâmica de Vlasov e um gás de férmions para modelar o estado quase-estacionário. Os parâmetros do modelo são calculados usando princípios básicos, como os de conservação de energia e de partículas no transporte. Os resultados quando comparados com simulação mostram uma boa concordância. Na segunda parte, verificamos a estabilidade do modo de oscilação simétrico para um feixe esférico. Argumentamos que, quando esse modo for estável, o modelo para o estado quase-estacionário pode descrever feixes levemente anisotrópicos, o que é uma situação mais realista em experimentos. Constatamos que, num regime de interesse prático, esse modo é sempre estável. Por fim, estudamos um caso em que as forças focalizadoras externas são anisotrópicas, e o feixe tem simetria elipsoidal. Mostramos que, para certos valores dos parâmetros, há um forte acoplamento entre a dinâmica não-linear dos envelopes, o que causa uma troca de energia entre os graus de liberdade. Os resultados quando comparados com dinâmica molecular mostraram uma boa concordância.

**Palavras-chave:** feixes intensos não-contínuos, estado quase-estacionário, dinâmica de Vlasov-Maxwell, modo de oscilação simétrico, dinâmica molecular.

# Abstract

In this thesis, we study intense bunched charged particle beams. In the first part, we analyze a beam with spherical symmetry and its relaxation to a stationary state. The beam evolution follows the Vlasov-Maxwell dynamics since it is a system of long range interaction. We show that the main mechanism for the beam relaxation is a resonance between the collective beam motion and individual particle motion. We make an analogy between Vlasov dynamics and a Fermi gas to model the beam quasistationary state. The parameters of the model are calculated using basic principles, such as energy and particle conservation in the beam transport. The results compared with simulation showed a good agreement. In the second part, we verify the symmetric oscillation mode stability for a spherical beam. We argue that when this mode is stable, our model for the quasistationary state can also describe slightly anisotropic beams, a situation more realistic in experiments. We find out that in situations of practical interest the mode is always stable. Finally, we study a situation in which the external focusing forces are anisotropic, and the beam has ellipsoidal symmetry. We show that, for certain values of the parameters, there is a strong coupling between the nonlinear envelopes dynamics, which causes exchange of energy between the degrees of freedom. The results compared with molecular dynamics showed a good agreement.

**Keywords:** intense bunched beams, quasistationary state, Vlasov-Maxwell dynamics, symmetric oscillation mode, molecular dynamics.

# Lista de Abreviações

	Abreviação	Significado
A	ADN	Ácido desoxirribonucleico
B	<i>BNL</i>	<i>Brookhaven National Laboratory</i>
C	<i>CERN</i>	<i>Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire</i>
D	<i>DNA</i>	<i>Deoxyribonucleic acid</i>
I	<i>IFMIF</i>	<i>International Fusion Materials Irradiation Facility</i>
L	<i>LHC</i>	<i>Large Hadron Collider</i>
N	<i>NASA</i>	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
	<i>NSRL</i>	<i>NASA Space Radiation Laboratory</i>
P	<i>PQG</i>	Plasma de quark-glúons
R	<i>RFQ</i>	<i>radio-frequency quadrupole</i>
	<i>RHIC</i>	<i>Relativistic Heavy Ion Collider</i>
	<i>rms</i>	<i>root mean square</i>
S	<i>SLAC</i>	<i>Stanford Linear Accelerator Center</i>
	<i>SPS</i>	<i>Super Proton Synchrotron</i>

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b> . . . . .	i
<b>Resumo</b> . . . . .	ii
<b>Abstract</b> . . . . .	iii
<b>Lista de Abreviações</b> . . . . .	iv
<b>1. Introdução</b> . . . . .	3
1.1 Feixes de partículas carregadas: definição e relaxação para distribuição quase-estacionária . . . . .	5
1.2 Dinâmica de Vlasov-Maxwell . . . . .	9
1.3 Aproximação paraxial . . . . .	11
1.4 Forças focalizadoras . . . . .	15
<b>2. Relaxação não-colisional em um feixe esférico</b> . . . . .	22
2.1 Distribuição inicial . . . . .	22
2.2 Equação do envelope . . . . .	23
2.3 Mecanismo de relaxação, partícula teste e raio do halo . . . . .	27
2.4 Modelo para o estado quase-estacionário . . . . .	32
2.5 Simulação e resultados . . . . .	36
<b>3. Estabilidade do modo de oscilação simétrico de um feixe esférico</b> . . . . .	41
3.1 Equação do envelope . . . . .	41
3.2 Análise da estabilidade . . . . .	44
<b>4. Estabilidade não-linear de um feixe elipsoidal</b> . . . . .	51
4.1 Análise da estabilidade linear . . . . .	51
4.2 Instabilidade não-linear . . . . .	56
4.3 Simulação e comparação com o modelo . . . . .	60
<b>5. Considerações finais</b> . . . . .	65
<b>Apêndices</b> . . . . .	67
<b>A. Referencial de Larmor</b> . . . . .	67

---

B. O potencial de um elipsoide uniformemente carregado . . . . .	69
C. Seção de Poincaré . . . . .	75
Bibliografia . . . . .	78

## Capítulo 1

# Introdução

Há cerca de um século, começaram a surgir os primeiros trabalhos com resultados teóricos e experimentais sobre o fluxo de elétrons em determinadas geometrias. Trabalhos clássicos de C. D. Child [1], de I. Langmuir [2] e de J. R. Pierce [3] já se preocupavam com condições de equilíbrio e de estabilidade para feixes de elétrons em configurações de campos eletromagnéticos. Desde então, a utilização de feixes de partículas carregadas aumentou significativamente, tanto em Ciência quanto em aplicações na tecnologia.

Em magnétrons, um feixe de elétrons passa por cavidades ressonantes enquanto interage com um campo magnético, excitando ondas eletromagnéticas nas cavidades. A dimensão dessas cavidades determina a frequência da radiação eletromagnética produzida. Essa é tipicamente a fonte de micro-ondas utilizadas nos fornos de micro-ondas.

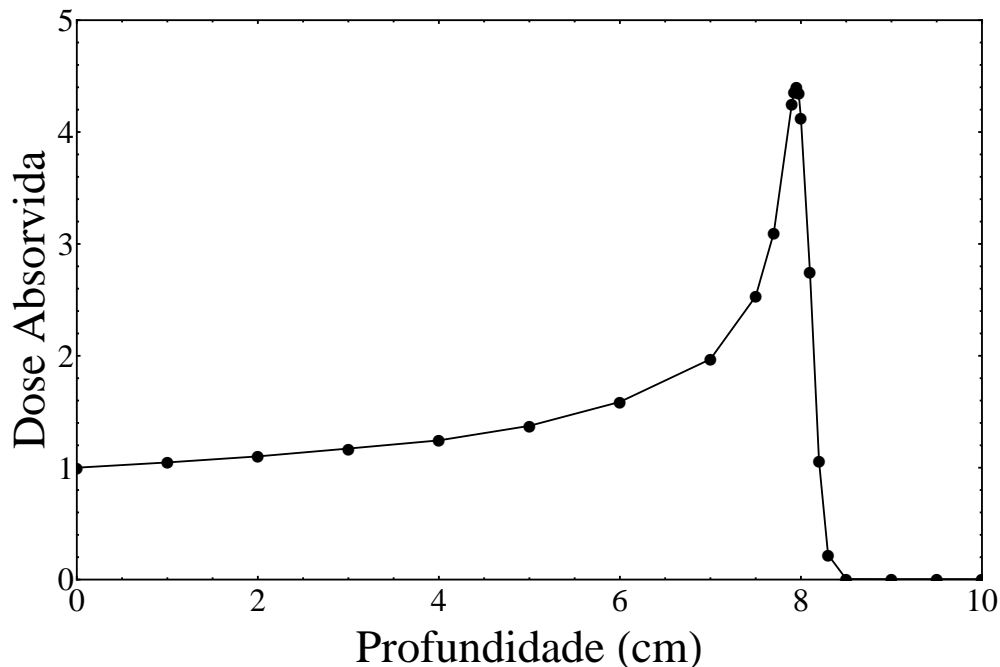
Até duas décadas atrás, a maior parte dos televisores e monitores de computador eram feitos de tubos de raios catódicos. Simplificadamente, a versão colorida desses contém três feixes de elétrons. Cada feixe atinge um material luminescente que emite radiação visível em uma das cores primárias - vermelho, verde ou azul - com diferentes intensidades. Esse processo é repetido dezenas de milhares de vezes por segundo, em cada uma das linhas da tela, de forma a criar a imagem ou o vídeo de acordo com o sinal recebido.

Hadronterapia é um método de tratamento de câncer. Um feixe de hádrons é lançado contra as células cancerígenas, danificando seu ADN (*DNA*, na sigla em inglês) e causando a morte dessas células. Tipicamente é utilizado um feixe de prótons, embora íons mais massivos, como os de carbono, possam ser mais recomendados em algumas situações. Esse método tem como grande vantagem que a energia absorvida pelo tecido varia pouco desde a penetração do feixe na pele até próximo ao “pico de Bragg”, onde há um grande acréscimo na absorção de energia. Logo após esse pico, a energia absorvida cai bruscamente para zero. Dessa maneira, o feixe é ajustado de forma que essa máxima absorção ocorra nas células cancerígenas, minimizando danos às células saudáveis. Como ilustração, mostramos na Fig. 1.1 a dose absorvida em função da profundidade do feixe no material, conforme medidas disponíveis na Ref. [4].

Feixe de íons também são utilizados em implantadores iônicos. Um dos usos desses dispositivos é modificar as propriedades de um sólido. Ele é utilizado, por exemplo, na dopagem de materiais semicondutores. Esses, por sua vez, são utilizados em um vasto número de aplicações, como no circuito dos componentes de computadores.

Esses são apenas alguns exemplos que ilustram a utilização de feixes de partículas carregadas na tecnologia e na medicina. Para a ciência, esses também tiveram papel fundamental em alguns dos experimentos mais conhecidos das últimas décadas.





**Fig. 1.1:** Energia (ou dose) absorvida por um polímero (polieteno) de alta densidade ( $\rho = 0,97 \text{ g/cm}^3$ ) como função da profundidade do feixe no material. Notamos um aumento da dose absorvida com o máximo em torno de 7,95 cm e uma queda brusca para zero logo após o pico. Os dados experimentais (pontos na figura) foram medidos para um feixe de prótons com energia de 103 MeV. O valor da dose absorvida está normalizado ao valor na entrada do material, que é de  $0,7148 \text{ KeV}/\mu\text{m}$ . Os dados foram medidos no *NSRL* e estão disponíveis na Ref. [4].

O plasma de quark-glúons (PQG) é um estado da matéria previsto pela cromodinâmica quântica em que quarks e glúons estão assintoticamente livres [5, 6]. Acredita-se que o universo se encontrava nesse estado entre  $10^{-12}$  e  $10^{-6}$  segundos após o *Big Bang*. Cientistas começaram a tentar criar PQG em laboratório na década de 80, para ajudar o entendimento do universo em seus instantes iniciais. Ao longo de duas décadas, experimentos realizados no *SPS*, localizado no *CERN*, culminaram na detecção indireta do PQG [7], com anúncio feito no ano 2000. Nos experimentos realizados da metade da década de 90 até o anúncio, colidiu-se um feixe de íons de chumbo totalmente ionizados ( $\text{Pb}^{82+}$ ), com energia de até 158 GeV por núcleon, contra um alvo fixo.

Mais recentemente, em 2010, pesquisadores do *RHIC*, localizado no *BNL*, afirmaram ter criado um PQG como resultado da colisão frontal de dois feixes de íons de ouro ( $\text{Au}^{79+}$ ), com energia de centro de massa de 200 GeV por núcleon [8]. Em 2015, novamente no *CERN*, porém dessa vez no *LHC*, foi criado um PQG colidindo um feixe de chumbo ( $\text{Pb}^{82+}$ ) contra um de prótons, com energia de centro de massa de 5,02 TeV por núcleon [9].

Por fim, um dos tópicos mais divulgados envolvendo física de feixes relacionado à ciência, nessa década, foi a descoberta do bóson de Higgs [10]. Embora tenha sido predito teoricamente na década de 60 [11–13], apenas com a construção do *LHC* obteve-se feixes com energia suficiente para sua detecção. A detecção foi feita a partir de medidas resultantes da

colisão de dois feixes de prótons, com energia de centro de massa variando entre 7 TeV e 8 TeV [10].

Além desses exemplos mais conhecidos, existem diversas instalações espalhadas por todo o mundo utilizando feixes de partículas carregadas, cada uma com seus próprios objetivos. O assunto desta tese, por exemplo, foi parcialmente motivado pelo projeto *IFMIF*. Esse tem como objetivo estudar materiais que precisam resistir à radiação intensa de nêutrons em reatores de fusão da próxima geração e deve entrar em operação na próxima década, no Japão [14, 15]. De acordo com o projeto, o fluxo de nêutrons será gerado com resultado da colisão de dois feixes de íons de deutério<sup>1</sup> ( $D^+$ ), com energia de 40 MeV, contra um alvo de lítio [16].

O nosso interesse nesse projeto ocorre porque, de acordo como foram projetados os componentes do acelerador, esses feixes de deutério acabam sendo não-contínuos e têm simetria aproximadamente esférica [16]. Não obstante, baseado em resultados de simulações, foi verificado que, para evitar colisões de partículas com os componentes do acelerador, o feixe deve ser projetado de forma a minimizar o tamanho do halo durante a propagação [17, 18]. Isso entra em conflito com o que usualmente é feito, que é otimizar o tamanho do valor quadrático médio (*rms*, na sigla em inglês) da distribuição de partículas. Na linguagem utilizada em física de feixes, isso significa que o envelope do feixe está descasado. A maior parte dos efeitos que serão analisados neste trabalho surgem devido ao descasamento do feixe. Mais detalhes sobre os conceitos de halo, envelope e (des)casamento do feixe serão descritos e utilizados no Capítulo 2.

Os orientadores desta tese, em conjunto com outros pesquisadores, trabalharam ao longo das últimas décadas com assuntos como quebra de simetria [19] e relaxação do feixe para uma distribuição do tipo núcleo-halo [20–22] em feixes contínuos e descasados. A ideia para esta tese foi generalizar os modelos e as simulações utilizados nesses trabalhos para o caso de um feixe não-contínuo, similar ao projetado no *IFMIF*. Esperamos que os resultados que serão mostrados nos próximos capítulos possam ter implicações diretas nesse sistema e em outros que utilizem feixes similares, o que será evidenciado no texto quando conveniente.

Nas próximas subseções desse capítulo, iremos revisar alguns conceitos da física de feixes que serão utilizados nesta tese. O leitor que já é familiar com o assunto, ou que tenha interesse apenas nos resultados deste trabalho, pode avançar para o Capítulo 2. Serão feitas referências a essas subseções ao longo do texto, para justificar alguma afirmação ou passo nos cálculos - o leitor pode então escolher voltar para revisar o assunto se julgar necessário. Para quem possuir maior interesse nesse conteúdo, é recomendado que procure as referências de livros e de artigos que serão feitas, visto que o objetivo aqui é apenas introduzir o assunto.

## 1.1 Feixes de partículas carregadas: definição e relaxação para distribuição quase-estacionária

A definição de feixes de partículas carregadas é similar à de plasmas não-neutros. R. C. Davidson e H. Qin definem-nos como uma coleção de partículas carregadas que exibem uma grande variedade de comportamentos coletivos [23]. Entretanto, quando falamos de

---

<sup>1</sup> Isótopo do Hidrogênio. Seu núcleo é formado por um próton e um nêutron.

sistemas de partículas carregadas, o termo plasma não-neutro é mais utilizado para descrever sistemas que estão, em média, em repouso com relação a um referencial no laboratório. Já feixes são aqueles que têm uma grande velocidade média, usualmente relativística, em uma determinada direção com relação a esse referencial. Assim, fica claro que a diferença é apenas na terminologia, visto que uma mudança de referencial torna os dois sistemas equivalentes.

Quando tratamos de feixes de íons com carga, densidade e energia típica dos aceleradores atuais, espera-se que os efeitos da repulsão coulombiana (também conhecidos como efeitos de carga espacial, numa tradução livre do termo em inglês *space charge*) tenham grande influência, podendo acabar com a coerência do feixe.

Tipicamente é desejado que as dimensões do feixe sejam as menores possíveis. Assim, por exemplo, evitamos colisões com os componentes do acelerador, maximizamos o número de eventos na colisão frontal de dois feixes e aumentamos a resolução na análise das propriedades de um sólido com implantador iônico.

Para manter a coerência do feixe são utilizadas configurações de campos eletromagnéticos que agem de forma a contrabalancear os efeitos da carga espacial. Tipicamente, estamos interessados em propriedades de equilíbrio, estabilidade e/ou transporte do feixe sob influência dessa configuração de campos e da carga espacial.

A descrição exata, dentro do limite da mecânica clássica, da dinâmica das partículas do feixe é dada pela equação de Klimontovich-Dupree, em conjunto com as equações de Maxwell para calcular os auto-campos eletromagnéticos como resultado da carga espacial [24–26]. Dado o vetor posição e momento linear de cada partícula em um instante de tempo, podemos usar esse sistema de equações para calcular a posição e o momento de cada partícula para qualquer tempo, em princípio.

Embora essa seja uma descrição exata, em sistemas de muitos corpos é pouco prático seguir a evolução temporal de cada partícula. Além da dificuldade analítica e numérica de resolver um número tão grande de equações de forma auto-consistente, as quantidades de interesse nesse tipo de sistema, tais como temperatura, entropia, emitância, entre outras, podem ser calculadas fazendo as médias apropriadas da distribuição das partículas no espaço de fases. Por isso, opta-se por uma abordagem estatística em que avaliamos a distribuição da posição e do momento linear dessas partículas, em vez da localização exata de cada uma.

Vamos usar essa abordagem para argumentar sobre a relaxação de feixes de partículas carregadas para o equilíbrio. O problema é o seguinte: dada uma distribuição inicial de posição e de momento das partículas, qual será a forma dessa distribuição após um longo período de tempo, em que as partículas interagiram entre si e com a configuração de campos externos? A distribuição de posição e de momento é dada, por definição, pela função distribuição  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , que tem o seguinte significado,

$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p$  representa a probabilidade de encontrar uma partícula no tempo  $t$  num volume  $d^3r$  em torno da posição  $\mathbf{r}$  e com momento  $d^3p$  em torno de  $\mathbf{p}$ .

A equação para evolução dessa função distribuição depende da distribuição de duas partículas  $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t)$ , onde  $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}', \mathbf{p}', t) d^3r d^3p d^3r' d^3p'$  é a probabilidade conjunta (ou “correlação”) de encontrar no espaço de fases duas partículas, uma num elemento infinitesimal de volume centrado em  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  e a outra em  $(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ , no tempo  $t$ . A evolução dessa, por sua vez, vai depender da distribuição de três partículas e assim sucessivamente [25]. No limite

termodinâmico, em que o número de partículas  $N$  tende ao infinito, teremos um sistema com número infinito de equações - a evolução da distribuição para  $n$  partículas depende da distribuição para  $n + 1$  partículas. Essa é a chamada hierarquia BBGKY, deduzida independentemente por Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood e Yvon [24]. Adicionalmente, continuamos resolvendo as equações de Maxwell de forma auto-consistente, agora para o valor médio dos campos eletromagnéticos.

Até aqui o problema continua tão difícil quanto ao anterior. Fazendo médias sobre a equação de Klimontovich-Dupree, derivamos a hierarquia BBGKY, ambas contendo um número infinito de equações a serem resolvidas. Todavia, a hierarquia BBGKY permite que façamos argumentos físicos sobre o sistema em estudo para truncar essa cadeia de equações, o que não é simples usando Klimontovich-Dupree.

Por exemplo, em plasmas quase-neutros<sup>2</sup>, as partículas tendem a se distribuir de forma que os íons estão sempre cercados de elétrons, dando origem à blindagem de Debye. O potencial de uma determinada partícula é da forma

$$\Phi(r) \sim \frac{e^{-r/\lambda_d}}{r}, \quad (1.1.1)$$

portanto, tal partícula interage predominantemente com as que estão a uma distância  $\lambda_D$  dela, onde  $\lambda_D$  é o comprimento de Debye [25]. Esse comprimento define uma esfera imaginária ao redor da partícula, a chamada esfera de Debye.

Existe uma relação inversamente proporcional entre o chamado parâmetro de plasma,  $g$ , e o número de partículas dentro da esfera de Debye. Se o plasma for denso, o valor de  $g$  será pequeno, e a energia de interação entre as partículas será pequena comparada com a energia cinética [25]. Por conseguinte, a correlação entre as partículas é fraca e, no limite  $g \rightarrow 0$ , o plasma se comporta como um gás ideal.

No caso oposto, quando plasma é tênue, podemos colocar em dúvida a validade da Eq. (1.1.1) e do conceito de blindagem de Debye, se não houver um número estatisticamente relevante de partículas dentro da esfera de Debye [25, 27].

O exemplo do plasma quase-neutro mostra como podemos truncar a hierarquia BBGKY usando argumentos físicos. Lembramos que  $g$  é um parâmetro intrínseco de cada plasma. Tipicamente a distribuição de  $n$  partículas é da ordem de grandeza de  $\mathcal{O}(g^{n-1})$  [25]. Podemos usar isso para argumentar até que ordem de correlações vamos considerar.

Retornando para os feixes de partículas carregadas, o mais usual é ter feixes de apenas um tipo de partículas (prótons, elétrons ou algum íon). Nesse caso, não fica prontamente evidente a condição para truncar a hierarquia BBGKY. Não há possibilidade de blindagem, como descrito acima para um plasma quase-neutro, pois as partículas interagem através da força de Coulomb, que é uma interação de longo alcance.

O tratamento estatístico de sistemas com interação de longo alcance leva a resultados não intuitivos para quem está acostumado com mecânica estatística de equilíbrio. Esses sistemas não respeitam conceitos básicos da termodinâmica, como aditividade e extensividade da energia interna, o que leva a resultados como calor específico negativo, se o sistema estiver isolado, e não-equivalência entre *ensembles* [28].

---

<sup>2</sup> Quase-neutralidade aqui significa que a carga líquida do plasma é nula, mas localmente, devido a ondas se propagando ou a instabilidades, pode haver pequenas variações na densidade de carga ao longo do plasma.

Um truque utilizado na área para recuperar a extensividade do sistema é a chamada prescrição de Kac [29]. Essa consiste em reescalar a constante de acoplamento da força por um fator de  $1/N$ , onde  $N$  é o número de partículas no sistema. Para o feixe de partículas carregadas, isso é equivalente a reescalar a carga de cada partícula como  $q \rightarrow q/N$ . Assim, quando  $N \rightarrow \infty$ , teremos  $q \rightarrow 0$ . Entretanto, a carga total  $Q = Nq$  usando essa prescrição será  $Q = q$ . Resumindo, no limite termodinâmico a carga de cada partícula tende a zero, mas a carga total continua finita. Embora esse truque torne o sistema extensivo, o mesmo continua não aditivo [28].

Explicada a prescrição de Kac, podemos retornar ao problema de como truncar a hierarquia BBGKY. A princípio, poderíamos pensar que os efeitos de correlação seriam dominantes em feixes, justamente pela interação ser de longo alcance. Todavia, como explicado acima, usando esse ardil, a carga de cada partícula fica cada vez menor quanto mais partículas estão presentes no feixe. Por conseguinte, os efeitos de correlação entre as partículas ficam cada vez menores. Enquanto isso, a carga total está fixa, portanto os efeitos de campo médio continuam da mesma ordem de grandeza e dominam sobre as correlações.

No limite termodinâmico, o sistema será descrito de forma exata pela equação de ordem zero da hierarquia BBGKY, conhecida como equação de Boltzmann não-colisional [30], que chamaremos, por analogia com o problema da física de plasmas, de equação de Vlasov [25].

Em sistemas físicos reais, com número finito de partículas, previsões teóricas e resultados de simulação mostram que sistemas com interação de longo alcance têm duas escalas de tempo características de relaxação [31–33]. A primeira é dominada pela dinâmica de Vlasov enquanto os efeitos de correlações são desprezíveis. A função distribuição irá se modificar tendendo a um estado estacionário da equação de Vlasov. Esse processo, conhecido como relaxação violenta [34], começa a ocorrer já nas primeiras oscilações do sistema.

Como o número de partículas é finito, os efeitos das correlações irão, eventualmente, tirar o sistema do estado estacionário de Vlasov. O sistema relaxará para o equilíbrio termodinâmico, ou seja, para a distribuição de Maxwell-Boltzmann. O tempo característico para os efeitos de correlação se tornarem importantes,  $\tau_C$ , escala como  $\tau_C \sim N^\gamma$ , onde  $\gamma$  é um fator que depende de cada sistema, mas tipicamente  $\gamma \geq 1$  [28, 31].

Em muitos casos, se o número de partículas for suficientemente grande, essa segunda escala de tempo nunca será observada. É o caso, por exemplo, de estrelas numa galáxia em que uma estimativa de  $\tau_C$  leva à  $\tau_C \sim 10^7 \tau_u$ , onde  $\tau_u$  é a idade do universo, enquanto o tempo de relaxação violenta,  $\tau_D$ , é da ordem  $\tau_D \sim 10^{-2} \tau_u$  [35]. De forma similar,  $\tau_C$ , em feixes de partículas carregadas, é várias ordens de magnitude maior que o tempo de relaxação violenta [36] e que o tempo característico dos experimentos em aceleradores de partículas.

Essa argumentação justifica o uso da equação de Vlasov em conjunto com as equações de Maxwell (daqui em diante chamaremos de sistema Vlasov-Maxwell) para determinar a distribuição estacionária do feixe. Na linguagem de mecânica estatística, a palavra equilíbrio é utilizada como sinônimo para equilíbrio termodinâmico e da distribuição de Maxwell-Boltzmann. Portanto, para evitar confusão, utilizaremos o termo distribuição quase-estacionária para fazer referência à solução estacionária da equação de Vlasov. Dessa forma, deixamos explícito que ela não é a distribuição de equilíbrio termodinâmico, todavia é a solução de interesse no problema de relaxação do feixe.

## 1.2 Dinâmica de Vlasov-Maxwell

Como argumentado na Sec. 1.1, em escalas de tempo características de experimentos, a evolução da função distribuição para um feixe de partículas carregadas é regida pelo sistema Vlasov-Maxwell. Esse pode ser escrito como

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \left[ q_b \left( \mathbf{E}^s + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s}{c} \right) + \mathbf{F}^{ext} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (1.2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^s = 4\pi q_b n_b(\mathbf{r}, t), \quad (1.2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^s}{\partial t}, \quad (1.2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^s = 0, \quad (1.2.1d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^s = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t}, \quad (1.2.1e)$$

onde  $\mathbf{E}^s$  e  $\mathbf{B}^s$  são o campo elétrico e magnético gerado pela distribuição de cargas, respectivamente,  $\mathbf{F}^{ext}$  é a força externa resultante que age sobre as partículas do feixe,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $q_b$  é a carga de cada partícula. O momento  $\mathbf{p}$  e velocidade  $\mathbf{v}$  das partículas estão relacionados através da relação relativística

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m_b} = \frac{\mathbf{p}}{m_b \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_b^2 c^2}}}, \quad (1.2.2)$$

onde  $\gamma = \sqrt{1 + p^2/m_b^2 c^2}$  é o fator de Lorentz,  $m_b$  a massa de cada partícula e

$$n_b(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p, \quad (1.2.3a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q_b \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p, \quad (1.2.3b)$$

são a densidade e a densidade de corrente do feixe, respectivamente. Nas equações acima, consideramos apenas partículas de uma espécie, que é o caso típico dos feixes usados em aceleradores, mas não é difícil generalizá-las para situações em que há mais de uma. Também desconsideramos cargas e correntes externas.

Notamos que a Eq. (1.2.1a) é não-linear em  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , visto que tanto  $\mathbf{E}^s$ , quanto  $\mathbf{B}^s$  dependem da função distribuição. Portanto, dificilmente existem soluções analíticas dessa equação fora de um regime perturbativo. Outrossim, soluções numéricas da equação de Vlasov nem sempre são confiáveis, visto que o erro numérico acumulativo pode resultar em soluções falsas [37]. Em particular, soluções estacionárias conhecidas da equação de Vlasov podem se modificar em apenas alguns passos de integração.

Uma propriedade interessante da evolução não-linear da equação Vlasov é a incompressibilidade da função distribuição. Para analisar isso, vamos fazer uma analogia com a mecânica de fluidos, já que é um exemplo bem mais concreto em comparação com os conceitos mais abstratos como função distribuição e espaço de fases.

Seja o escoamento de um fluido, esse pode ser descrito pelo campo de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  e por sua densidade  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , que indicam o vetor velocidade e a densidade do elemento de fluido

na posição  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$ , respectivamente. Uma aproximação utilizada para descrever alguns líquidos ou gases é a de um escoamento incompressível. A aproximação diz que se seguirmos um elemento de volume do fluido, a densidade permanece constante ao longo do escoamento, ou seja,  $d\rho(\mathbf{r},t)/dt$ . Isso é equivalente à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (1.2.4)$$

onde usamos a regra da cadeia para calcular a derivada total. A interpretação da Eq. (1.2.4) é a seguinte: o primeiro termo do lado esquerdo representa a variação da densidade com o tempo, enquanto o segundo representa a mudança de densidade devido ao deslocamento do elemento de volume no espaço. Portanto, a soma dessas contribuições deve ser nula em um fluxo incompressível.

Voltando à equação de Vlasov, se definirmos  $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$  e  $\nabla_X = (\partial/\partial \mathbf{r}, \partial/\partial \mathbf{p})$ , podemos reescrevê-la como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla_X f = 0, \quad (1.2.5)$$

onde  $\dot{\mathbf{X}}$  é dado por

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q_b \left( \mathbf{E}^s + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s}{c} \right) + \mathbf{F}^{ext} \end{pmatrix}.$$

Comparando as Eqs. (1.2.4) e (1.2.5), observamos que a função distribuição se modifica no espaço de fases de forma análoga ao escoamento incompressível de um fluido no espaço real. Por conseguinte, dizemos que a dinâmica de Vlasov é incompressível.

No que diz respeito às soluções estacionárias da equação de Vlasov, existe um número infinito de soluções. Por exemplo, existe uma família de soluções, que são qualquer função derivável que dependa das variáveis do espaço de fases apenas através da energia de uma partícula.

Para mostrar isso, consideremos o sistema de Vlasov-Maxwell estacionário

$$\left\{ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \left[ q_b \left( \mathbf{E}^s + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s}{c} \right) + \mathbf{F}^{ext} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \quad (1.2.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^s = 4\pi q_b n_b(\mathbf{r}), \quad (1.2.6b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = 0, \quad (1.2.6c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^s = 0, \quad (1.2.6d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^s = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad (1.2.6e)$$

Supomos agora que a força externa,  $\mathbf{F}^{ext}$ , é oriunda de um campo conservativo, ou seja,  $\mathbf{F}^{ext} = -\nabla \Psi$ . A energia relativística para uma partícula sob influência dessa força e dos campos  $\mathbf{E}^s$  e  $\mathbf{B}^s$ , é dada por

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sqrt{m_b^2 c^4 + c^2 p^2} + q_b \phi^s(\mathbf{r}) + \Psi(\mathbf{r}), \quad (1.2.7)$$

onde  $\phi^s$  é o potencial eletrostático que está relacionado com o campo elétrico através de  $\mathbf{E}^s = -\nabla \phi^s$ .

Agora consideramos qualquer função  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\varepsilon)$  que tenha derivadas bem definidas na região do espaço de fases de interesse. Usamos a regra da cadeia para calcular as derivadas

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left( q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (1.2.8a)$$

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{c^2 \mathbf{p}}{\sqrt{m_b^2 c^4 + c^2 p^2}} = \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \quad (1.2.8b)$$

onde usamos a Eq. (1.2.2) na última igualdade da Eq. (1.2.8b).

Substituindo as Eqs. (1.2.8) na Eq. (1.2.6a), obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \left[ \left( q_b \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi^s}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right) + \left( q_b \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^s + q_b \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s}{c} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{ext} \right) \right] \equiv 0, \quad (1.2.9)$$

em que utilizando as relações  $\mathbf{E}^s = -\nabla \phi^s$ ,  $\mathbf{F}^{ext} = -\nabla \Psi$  e  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}^s) = 0$ , notamos que a Eq. (1.2.9) é identicamente satisfeita. Portanto,  $f = f(\varepsilon)$  é solução estacionária da equação de Vlasov.

Ressaltamos que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\varepsilon)$  é uma condição suficiente para ser solução estacionária da equação de Vlasov, mas não é necessária. Por exemplo, uma função distribuição tal que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\varepsilon, L^2)$ , onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula, também é solução estacionária do problema.

De forma geral, a particular solução estacionária da equação de Vlasov para qual o sistema vai relaxar depende da distribuição inicial. Isso contrasta com a dinâmica de Boltzmann, em que as correlações levam qualquer distribuição inicial a relaxar para a distribuição de Maxwell-Boltzmann.

As duas propriedades mencionadas aqui, a incompressibilidade da dinâmica de Vlasov e a família de soluções estacionárias da forma  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(\varepsilon)$  serão de grande importância para o modelo que estudaremos no Cap. 2.

### 1.3 Aproximação paraxial

Como mencionado na definição de feixe, na Sec. 1.1, tipicamente feixes de partículas carregadas possuem uma grande velocidade, usualmente relativística, ao longo do eixo do acelerador. A variação em torno dessa velocidade média é pequena (não-relativística). Essa é uma das condições para o uso da chamada aproximação paraxial [23, 38, 39]. Usamos essa aproximação para simplificar as equações utilizando, argumentos físicos que são válidos na grande maioria dos experimentos envolvendo feixes. As principais condições para sua validade são:

- (a) as dimensões do feixe são muito menores que as dimensões das paredes do acelerador ou dos condutores que englobam o feixe e, ainda, muito menores que a periodicidade dos campos usados para focalizar o feixe;
- (b) o feixe tem uma velocidade  $V_b$  na direção de propagação, que é muito maior que a velocidade das partículas, ou seja,  $v_x^2, v_y^2, (v_z - V_b)^2 \ll V_b^2$ . Portanto, o movimento no referencial do feixe é não-relativístico;



- (c) os efeitos de carga espacial não dominam completamente o sistema. Isso significa que os campos focalizadores devem ser suficientes para manter pequenas as dimensões do feixe durante o seu transporte. Assim, garantimos a validade do item (a) dessa lista. Entretanto, isso não significa que os efeitos de carga espacial precisam estar totalmente ausentes. Eles ainda podem e, em geral, têm grande influência na dinâmica não-linear do feixe.

Agora vamos calcular como fica a equação de movimento de uma partícula do feixe na aproximação paraxial. As deduções feitas aqui são baseadas na Ref. [23]. O hamiltoniano relativístico para uma partícula de massa  $m_b$  e carga  $q_b$ , sob a influência de um campo eletromagnético é dado por

$$H = (m_b^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2} + q_b \phi^s(\mathbf{r}, t), \quad (1.3.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\mathbf{p} = \gamma m_b \mathbf{v}$  é o momento da partícula,  $\gamma = (1 + p^2/m_b^2 c^2)^{1/2}$  é o fator relativístico de Lorentz e  $\phi^s$  é o potencial escalar. Lembramos que  $\mathbf{p}$  não é a variável canônica conjugada a  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{r}$  não obedecem as equações de Hamilton (portanto  $H$ , como escrito na Eq. (1.3.1), não é exatamente um hamiltoniano). O momento canônico é dado por

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{q_b}{c} \mathbf{A}^s(\mathbf{r}, t), \quad (1.3.2)$$

onde  $\mathbf{A}^s$  é o potencial vetor.

Podemos expandir o termo cinético do hamiltoniano da Eq. (1.3.1) em série de Taylor como

$$\begin{aligned} (m_b^2 c^4 + c^2 p^2)^{1/2} &= m_b c^2 \left[ 1 + \frac{p_b^2}{m_b^2 c^2} \left( \frac{p_x^2}{p_b^2} + \frac{p_y^2}{p_b^2} + \frac{p_z^2}{p_b^2} \right) \right]^{1/2} \approx \\ &\gamma_b m_b c^2 + \frac{p_x^2}{2\gamma_b m_b} + \frac{p_y^2}{2\gamma_b m_b} + \frac{p_b}{\gamma_b m_b} (p_z - p_b) + \frac{(p_z - p_b)^2}{2\gamma_b^3 m_b}, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

onde  $\gamma_b = 1/\sqrt{1 - V_b^2/c^2}$ ,  $p_b = \gamma_b m_b V_b$  e ignoramos termos de ordem  $\mathcal{O}(\chi^3)$ , onde  $p_x/p_b$ ,  $p_y/p_b$  e  $(p_z - p_b)/p_b \sim \chi$ . Assim, o hamiltoniano na aproximação paraxial fica

$$\begin{aligned} H &= \gamma_b m_b c^2 + \frac{1}{2\gamma_b m_b} \left[ \left( P_x - \frac{q_b}{c} A_x^s \right)^2 + \left( P_y - \frac{q_b}{c} A_y^s \right)^2 \right] + \frac{1}{2\gamma_b^3 m_b} \left( P_z - p_b - \frac{q_b}{c} A_z^s \right)^2 + \\ &\frac{p_b}{\gamma_b m_b} (P_z - p_b) + q_b \left( \phi^s(\mathbf{r}, t) - \frac{p_b}{\gamma_b m_b c} A_z^s \right), \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

onde já substituímos o momento da partícula pelo momento canônico da Eq. (1.3.2). Podemos obter as equações de movimento a partir das equações de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.3.5a)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad (1.3.5b)$$

Por exemplo, a equação para  $\ddot{x}$  fica

$$\ddot{x} = \frac{q_b}{c} \left[ \dot{y} \left( \frac{\partial A_y^s}{\partial x} - \frac{\partial A_x^s}{\partial y} \right) - \dot{z} \left( \frac{\partial A_z^s}{\partial x} - \frac{\partial A_x^s}{\partial z} \right) \right] - q_b \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x^s}{\partial t} \right). \quad (1.3.6)$$

Usando a definição dos potenciais  $\phi^s$  e  $\mathbf{A}^s$  em termos do campo elétrico  $\mathbf{E}^s$  e do campo magnético  $\mathbf{B}^s$

$$\mathbf{E}^s = -\nabla\phi^s - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^s}{\partial t}, \quad (1.3.7a)$$

$$\mathbf{B}^s = \nabla \times \mathbf{A}^s, \quad (1.3.7b)$$

obtemos a equação de movimento para uma partícula na aproximação paraxial

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = q_b \left[ E_x^s + \frac{1}{c} \left( \frac{dy}{dt} B_z^s - \frac{dz}{dt} B_y^s \right) \right], \quad (1.3.8a)$$

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = q_b \left[ E_y^s + \frac{1}{c} \left( \frac{dz}{dt} B_x^s - \frac{dx}{dt} B_z^s \right) \right], \quad (1.3.8b)$$

$$\gamma_b^3 m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = q_b \left[ E_z^s + \frac{1}{c} \left( \frac{dx}{dt} B_y^s - \frac{dy}{dt} B_x^s \right) \right], \quad (1.3.8c)$$

que são idênticas às equações clássicas para uma partícula num campo eletromagnético, se considerarmos  $\gamma_b m_b$  como sendo a massa efetiva transversal da partícula e  $\gamma_b^3 m_b$  como a massa efetiva longitudinal.

Vamos analisar agora como os campos elétrico e magnético, gerados pelas partículas do feixe, podem ser simplificados na aproximação paraxial. Os auto-campos podem ser escritos através dos potenciais como nas Eqs. (1.3.7). Tomando o divergente da Eq. (1.3.7a), o auto-potencial  $\phi^s$ , gerado pelas partículas, obedece à equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi^s(\mathbf{r}, t) = -4\pi q_b n_b(\mathbf{r}, t), \quad (1.3.9)$$

onde usamos o calibre de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A}^s = 0$  e a lei de Gauss como na Eq. (1.2.1b).

Já na Eq. (1.3.7b), usando o teorema de Helmholtz, podemos calcular  $\mathbf{A}^s$  através de (ver Ref. [40], por exemplo)

$$\mathbf{A}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (1.3.10)$$

Como a densidade de corrente  $\mathbf{J}$ , dada na Eq. (1.2.3b), depende da velocidade  $\mathbf{v}$  e a velocidade das partículas tem uma pequena variação em relação a  $\mathbf{v} \approx V_b \hat{e}_z$ , supomos, de forma consistente com a aproximação paraxial, que  $\mathbf{J} = q_b V_b n_b(\mathbf{r}, t) \hat{e}_z$  e  $\mathbf{A}^s = A_z^s \hat{e}_z$ . Dessa forma, o campo magnético gerado pelas partículas é dado por

$$\mathbf{B}^s = \nabla \times (A_z^s \hat{e}_z). \quad (1.3.11)$$

Substituindo a Eq. (1.3.11) na Eq. (1.2.1e) e, usando a propriedade do cálculo vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^s) - \nabla^2 \mathbf{A}^s,$$

obtemos

$$\nabla^2 A_z^s = -4\pi q_b \beta_b n_b(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z^s}{\partial t} \right), \quad (1.3.12)$$

onde  $\beta_b = V_b/c$ .

Em diversos regimes de interesse prático, uma análise dimensional da Eq. (1.3.12) mostra que os dois últimos termos dessa equação podem ser desprezados [23]. Quando essa aproximação é válida, a Eq. (1.3.12) fica

$$\nabla^2 A_z^s = -4\pi q_b \beta_b n_b(\mathbf{r}, t). \quad (1.3.13)$$

Comparando as Eqs. (1.3.9) e (1.3.13), notamos que

$$A_z^s = \beta_b \phi^s. \quad (1.3.14)$$

Assim sendo, as componentes do campo elétrico  $\mathbf{E}^s$  podem ser calculadas usando a Eq. (1.3.7a) e obtemos

$$E_x^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial x}, \quad (1.3.15a)$$

$$E_y^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (1.3.15b)$$

$$E_z^s = -\frac{\partial \phi^s}{\partial z} - \frac{1}{c} \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial t}. \quad (1.3.15c)$$

De forma similar, usando as Eqs. (1.3.11) e (1.3.14), podemos calcular as componentes do campo magnético  $\mathbf{B}^s$  como

$$B_x^s = \beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (1.3.16a)$$

$$B_y^s = -\beta_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x}, \quad (1.3.16b)$$

$$B_z^s = 0. \quad (1.3.16c)$$

Notamos que, embora a Eq. (1.3.9) para  $\phi^s$  seja similar à equação para o potencial eletrostático,  $\phi^s$  é um potencial escalar que inclui efeitos tanto de campo elétrico como de campo magnético.

Finalmente, podemos obter as equações de movimento para uma partícula do feixe na aproximação paraxial substituindo as Eqs. (1.3.15) e (1.3.16) nas Eqs. (1.3.8) como

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + F_x^{mag}, \quad (1.3.17a)$$

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial y} + F_y^{mag}, \quad (1.3.17b)$$

$$\gamma_b^3 m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial z} + F_z^{RF}, \quad (1.3.17c)$$

onde ignoramos termos do tipo  $v_x/c$ ,  $v_y/c$  e  $(1/c)(\partial\phi^s/\partial t)$ , concordando com aproximações feitas anteriormente durante essa dedução. Também adicionamos manualmente um termo para forças externas que serão necessárias para focalizar o feixe, como será argumentado na próxima seção.

Notamos que nos termos referentes à carga espacial na direção transversal ao movimento, ou seja, Eqs. (1.3.17a) e (1.3.17b), há um fator  $1/\gamma_b^2$  que ameniza esse efeito, já que  $\gamma_b \geq 1$ . Enquanto do ponto de vista da eletrostática, as partículas, por terem carga de mesmo sinal, se repelem; de acordo com a eletrodinâmica, cargas em movimento paralelo (correntes paralelas) se atraem na direção radial. No limite  $V_b \rightarrow c$ , esses dois efeitos se anulam.

Esse é o motivo principal pelo qual a maioria dos estudos com feixe de elétrons não levam em conta efeitos de carga espacial. A massa do elétron é tão pequena que, nas energias típicas do experimentos atuais,  $V_b \lesssim c$ . Por exemplo, o principal acelerador do *SLAC National Accelerator Laboratory* pode acelerar um feixe de elétrons ou de pósitrons até uma energia de 50 GeV [41]. Podemos calcular o fator  $\gamma_b$  nesse caso usando a energia cinética relativística

$$E_K = (\gamma_b - 1) m_e c^2 \Rightarrow \gamma_b \approx 98040,$$

onde  $m_e$  é a massa do elétron, portanto  $1/\gamma_b^2 \approx 10^{-10}$ . Se fizermos um cálculo análogo para o *IFMIF*, que é projetado para acelerar deutério até 40 MeV, obtemos que  $1/\gamma_b^2 \approx 0,96$ . Já um feixe de elétrons, acelerados até os mesmos 40 MeV, tem  $1/\gamma_b^2 \approx 1,5 \times 10^{-4}$ .

Mesmo que exista essa competição entre a repulsão coulombiana e a atração magnética na direção radial, o efeito líquido é sempre de uma força repulsiva. Já na direção axial, não há efeito de atração devido às correntes, portanto, o efeito de carga espacial é puramente devido à repulsão coulombiana.

## 1.4 Forças focalizadoras

Como argumentado na Sec. 1.3, o efeito da carga espacial tende a repelir as partículas do feixe. Esse efeito diminui a qualidade do feixe para o experimento ou para a aplicação em que é utilizado. Uma maneira para contrabalancear esse efeito é utilizar uma configuração de campos eletromagnéticos externos [23].

Em aceleradores de partículas, o feixe é injetado no sistema e passa por diversas componentes até chegar no alvo com a energia final desejada. Cada uma dessas componentes tem como objetivo acelerar o feixe até uma certa energia (que está limitada por sua geometria e pelas propriedades físicas do componente), enquanto mantendo o feixe coerente. O componente mais utilizado após a injeção do feixe no acelerador é o chamado *RFQ*, sigla em inglês para *radio-frequency quadrupole*. Esse componente tem três efeitos sobre o feixe: particionar (tradução livre para o termo, em inglês, *bunching*), focalizar e acelerar o feixe [38].

O *RFQ* é um condutor cilíndrico que possui cavidades periódicas no espaço (com período  $S$ ). A relação de dispersão das ondas eletromagnéticas, permitidas nessa geometria e que se propagam na direção axial, vai depender do tamanho dessas cavidades, ou seja,  $\omega = \omega(k_z; S)$ . Se a velocidade do feixe for similar à velocidade de fase da onda quando esse é injetado no *RFQ*, ou seja,  $V_b \approx \omega/k_z$ , as partículas do feixe vão ser aprisionadas no potencial da onda.

Isso está ilustrado na Fig. 1.2. Na parte (a), temos um feixe contínuo de partículas e uma ilustração do potencial da onda *RF*. Essa figura pode representar, por exemplo, a configuração

quando as partículas do feixe entram no *RFQ*. Já na parte (b), temos a configuração em um tempo posterior. Notamos que as partículas que estavam à frente do vale da onda tendem a ser desaceleradas, enquanto as que estavam atrás tendem a ser aceleradas. Podemos notar os três efeitos mencionados anteriormente. Primeiro, o feixe foi particionado, já que as partículas tenderam ao mínimo do potencial da onda. Esse ponto justifica ainda mais as análises feitas neste trabalho, focadas em feixes não-contínuos, já que é o caso mais comum em aceleradores que usam esse componente. Segundo, o potencial da onda também serve para focalizar o feixe na direção de propagação, visto que partículas que tendem a se afastar desse mínimo sentem uma força restauradora. Por fim, as partículas aprisionadas no potencial podem ser transportadas na direção axial pela onda.

Adicionalmente, se as dimensões do feixe,  $r_b$ , forem tais que  $r_b \times (k_z^2 - \omega^2/c^2) \ll 1$ , as partículas do feixe ficam agrupadas no fundo do potencial da onda *RF* como mostra a Fig. 1.3. Consequentemente, podemos fazer uma aproximação linear para a força restauradora na direção de propagação. Levando isso em consideração, a equação de movimento na direção axial de uma partícula do feixe, Eq. (1.3.17c), é dada por

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\hat{\kappa}_z z - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial z}, \quad (1.4.1)$$

onde  $\hat{\kappa}_z$  vai depender de parâmetros do feixe ( $q_b$ ,  $m_b$  e  $V_b$ ) e da onda *RF* (amplitude e  $k_z$ ). Portanto, ressaltamos que esse parâmetro depende da geometria e pode ser ajustado mudando o tamanho das cavidades do *RFQ*.

Um efeito indesejado da onda *RF* nesse tipo geometria é que, enquanto ela focaliza o feixe na direção axial, ela tende a desfocalizar o feixe na direção transversal [23]. Esse efeito, somado com o da carga espacial, discutido na Sec. 1.3, é combatido utilizando uma configuração de quadrupolos magnéticos periodicamente posicionados. A Fig. 1.4 mostra como os quadrupolos são distribuídos. Notamos que, dois quadrupolos consecutivos estão rotacionados em  $90^\circ$  a cada meio período espacial  $\lambda/2$ .

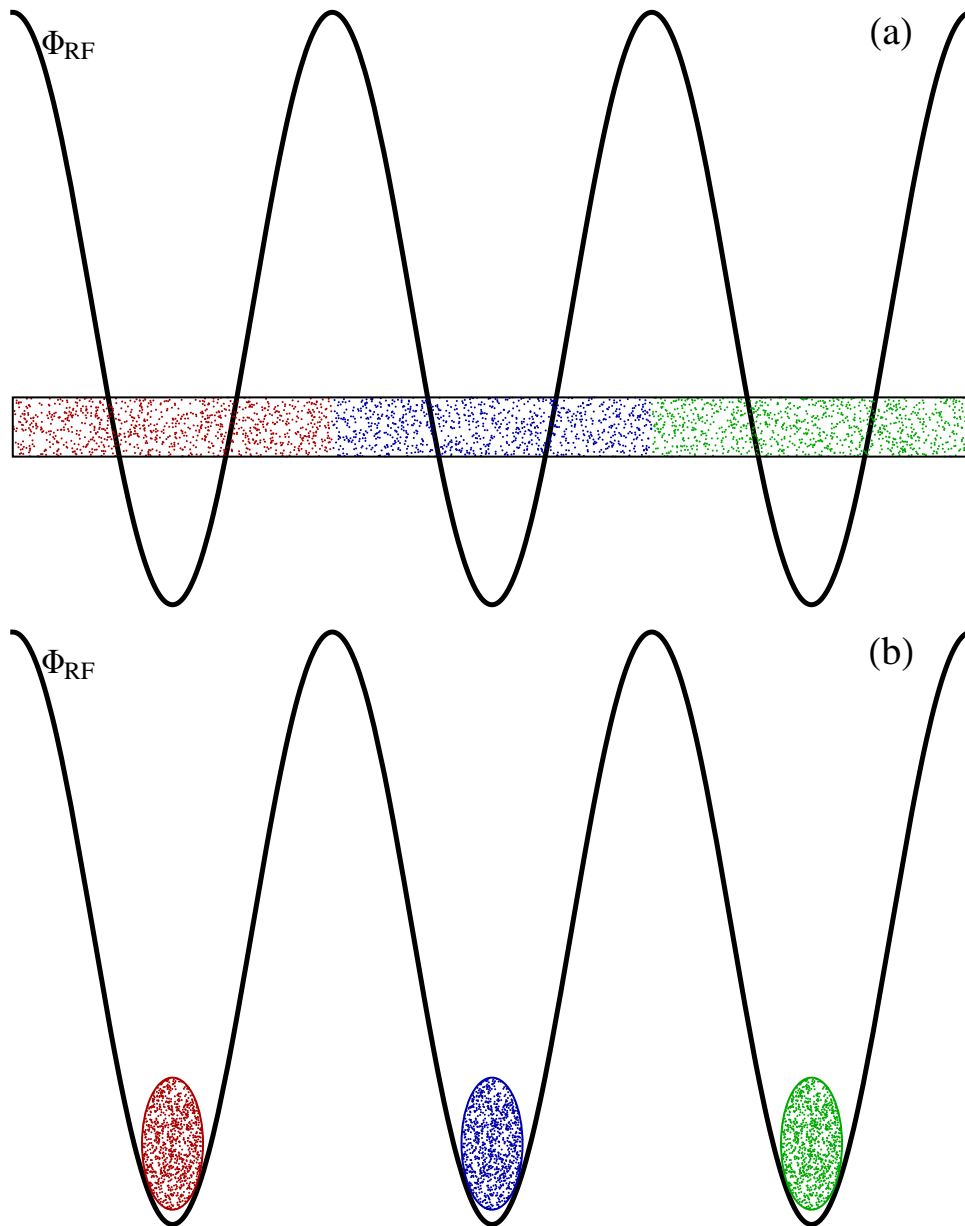
A força exercida pelo quadrupolo sobre as partículas do feixe depende da posição axial do feixe,  $s = V_b t$ . Seu efeito, em módulo, é máximo quando o feixe passa pelo quadrupolo e mínimo quando estiver equidistante à dois seguidos. Para eliminar essa dependência temporal na força restauradora, utilizamos a chamada aproximação de focalização suave (tradução livre da expressão *smooth focusing approximation*, em inglês).

A principal suposição dessa aproximação é que o tamanho (envelope) do feixe varia muito pouco durante um período espacial do quadrupolo,  $\lambda$ . Dizemos que o envelope  $r_b$  é dado por

$$r_b = \langle r_b \rangle + \delta r_b, \quad (1.4.2)$$

onde  $\langle r_b \rangle$  tem uma variação lenta com  $s$  e  $\delta r_b$  uma variação rápida, com período espacial igual ao dos quadrupolos,  $\lambda$ . Além disso, assumimos que  $\delta r_b$  é apenas uma perturbação em torno do valor médio do envelope  $\langle r_b \rangle$ , ou seja,  $\langle r_b \rangle \gg |\delta r_b|$ . A Fig. 1.5 ilustra essas suposições.

Se isso for verdade, a aproximação diz que o efeito dos quadrupolos sobre a variação lenta do envelope,  $\langle r_b \rangle$  no referencial de laboratório, é equivalente a um campo magnético constante na direção axial no referencial de Larmor. Para uma dedução desse resultado, recomendamos as Refs. [23, 38].

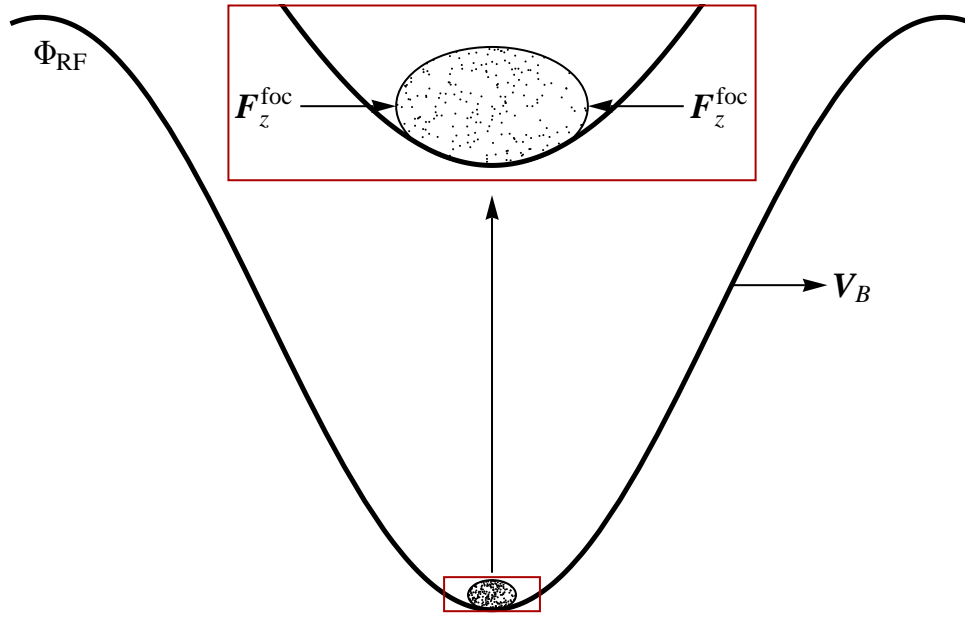


**Fig. 1.2:** Em (a), temos um feixe contínuo junto com o potencial da onda *RF*. No painel (b), mostramos uma possível configuração num tempo futuro, onde as partículas do feixe tendem para o mínimo de potencial da onda, formando uma série de feixes não-contínuos.

Assim sendo, consideramos o movimento transversal de uma partícula do feixe sob influência da carga espacial e de um campo magnético uniforme na direção longitudinal. O movimento dessa partícula é descrito pelas Eqs. (1.3.17a) e (1.3.17b), ou seja,

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + F_x^{mag}, \quad (1.4.3a)$$

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial y} + F_y^{mag}. \quad (1.4.3b)$$



**Fig. 1.3:** Esquematização do potencial da onda RF e das partículas do feixe próximas do mínimo desse potencial.

Com o campo magnético  $\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z$ ,  $\mathbf{F}^{mag}$  é dado pela força de Lorentz

$$\mathbf{F}^{mag} = \frac{q_b}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q_b}{c} \left( \frac{dy}{dt} B_0 \hat{e}_x - \frac{dx}{dt} B_0 \hat{e}_y \right), \quad (1.4.4)$$

logo, as equações de movimento para  $x$  e  $y$  ficam, respectivamente,

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + \frac{q_b}{c} \frac{dy}{dt} B_0, \quad (1.4.5a)$$

$$\gamma_b m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{q_b}{\gamma_b^2} \frac{\partial \phi^s}{\partial y} - \frac{q_b}{c} \frac{dx}{dt} B_0. \quad (1.4.5b)$$

Analisando as Eqs. (1.4.5) é possível notar que a equação para  $d^2 x/dt^2$  depende de  $dy/dt$  e a para  $d^2 y/dt^2$  depende de  $dx/dt$ . Para remover essa dependência cruzada, mudamos para o chamado referencial de Larmor (para mais detalhes, consultar o Apêndice A)

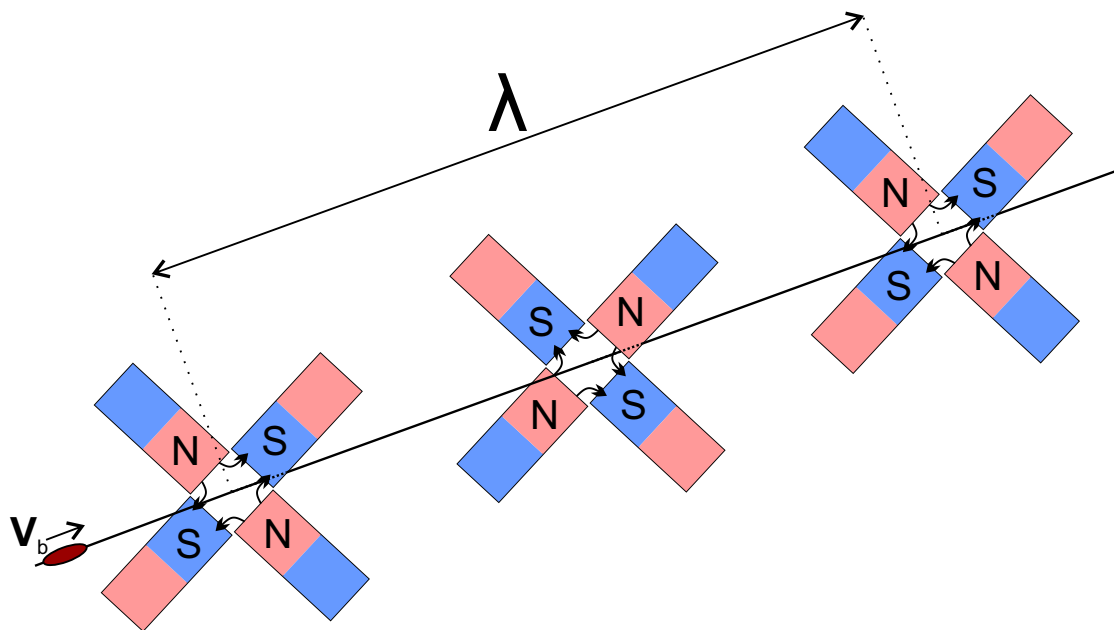
$$x = X \cos \Omega_L t + Y \sin \Omega_L t, \quad (1.4.6a)$$

$$y = Y \cos \Omega_L t - X \sin \Omega_L t, \quad (1.4.6b)$$

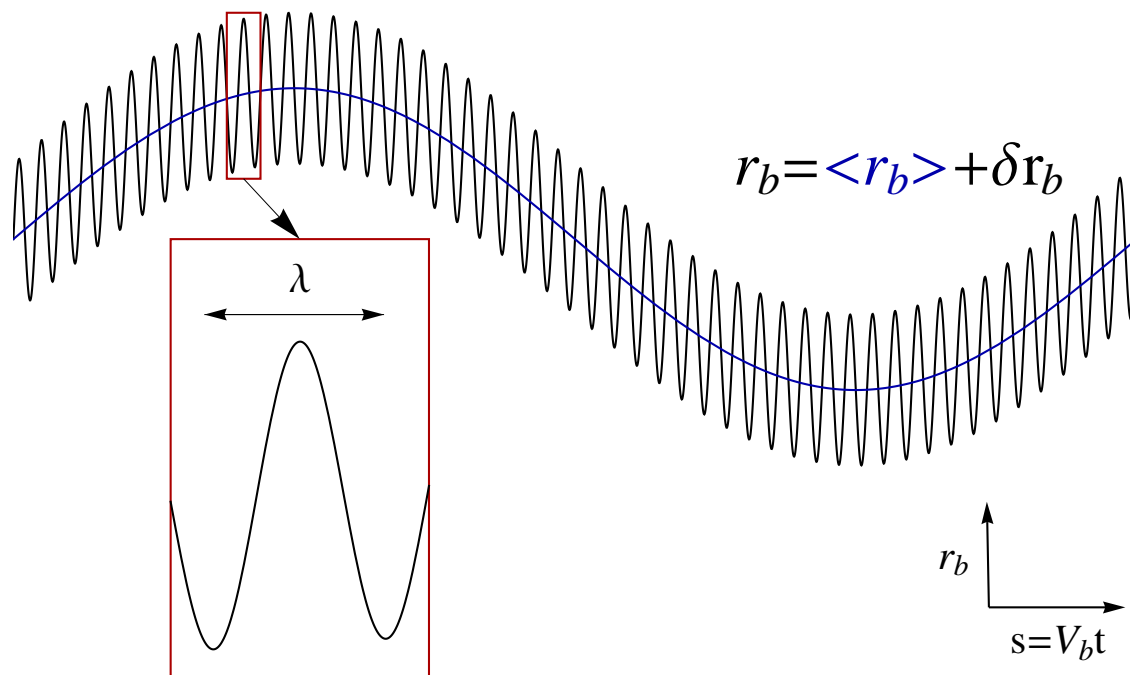
onde a frequência de Larmor,  $\Omega_L = \Omega_C/2$  e  $\Omega_C = q_b B_0 / \gamma_b m_b c$  é a frequência de cíclotron. Nesse referencial, as equações do movimento transversal da partícula ficam

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{\Omega_c^2}{4} X - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial X}, \quad (1.4.7a)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{\Omega_c^2}{4} Y - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y}, \quad (1.4.7b)$$



**Fig. 1.4:** Configuração de quadrupolos magnéticos usados no *RFQ*. A periodicidade espacial dos quadrupolos é  $\lambda$ . Também foi desenhada algumas das linhas do campo magnético dos quadrupolos.



**Fig. 1.5:** Ilustração do envelope do feixe durante o transporte. Ao usar a aproximação de focalização suave, as equações descrevem o efeito médio do quadrupolo sobre o sistema, como na linha azul, ignorando as supostas pequenas oscilações ao redor dessa média causada pela dependência temporal da força restauradora.



que, assim como a Eq. (1.4.1), são análogas a equação de movimento de um oscilador harmônico forçado.

Recapitulando os resultados das Secs. 1.3 e 1.4, investigamos as equações que descrevem o movimento de uma partícula do feixe. Se as condições da aproximação paraxial são válidas, obtivemos as Eqs. (1.3.9) e (1.3.17) que descrevem o movimento da partícula.

Para manter o feixe coerente, notamos que são necessárias forças focalizadoras que se oponham ao efeito da carga espacial. Argumentamos que um dos componentes geralmente presente em aceleradores de partículas, o *RFQ*, focaliza o feixe na direção axial usando uma onda eletromagnética.

Na direção transversal, a focalização é feita utilizando quadrupolos magnéticos. Se forem válidas as condições para o uso da aproximação de focalização suave, informamos, sem demonstrar, que o efeito dos quadrupolos sobre o movimento da partícula é, em média, equivalente ao de um campo magnético uniforme na direção axial no referencial de Larmor.

Levando em consideração todo esses pontos, as equações que descrevem de forma auto-consistente o movimento de uma partícula do feixe são

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\hat{\kappa}_\rho x - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial x}, \quad (1.4.8a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\hat{\kappa}_\rho y - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial y}, \quad (1.4.8b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\hat{\kappa}_z z - \frac{q_b}{\gamma_b^3 m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial z}, \quad (1.4.8c)$$

$$\nabla^2 \phi^s(\mathbf{r}, t) = -4\pi q_b n_b(\mathbf{r}, t). \quad (1.4.8d)$$

Ressaltamos que  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $x$  e  $y$  indicam a posição transversal da partícula no referencial de Larmor,  $z$  é a posição da partícula com relação ao centro do feixe. Para manter uma forma similar à equação axial, renomeamos o parâmetro  $\hat{\kappa}_\rho = \Omega_c^2/4$  nas equação de movimento transversal.

Um artifício muito usado ao tratar problemas de física de feixes é renormalizar o tempo como a posição do centro do feixe no referencial do laboratório, ou seja,  $s = V_b t$ . Reescrevemos, então, as Eqs. (1.4.8) como

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\kappa_\rho x - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.4.9a)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\kappa_\rho y - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (1.4.9b)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\kappa_z z - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (1.4.9c)$$

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, s) = -\frac{4\pi K}{N_b} n_b(\mathbf{r}, s), \quad (1.4.9d)$$

onde  $\psi = q_b \phi^s / \gamma_b^3 m_b V_b^2$  é o potencial normalizado,  $\kappa_\rho = \hat{\kappa}_\rho / V_b^2$  e  $\kappa_z = \hat{\kappa}_z / V_b^2$  são parâmetros que medem a intensidade dos campos focalizadores,  $K = q_b^2 N_b / \gamma_b^3 m_b V_b^2$  é um parâmetro que mede a intensidade da carga espacial do feixe e  $N_b = \int n_b d^3r d^3v$  é o número de partículas do feixe.

Embora tenhamos argumentado na Sec. 1.1 que em sistemas de muitos corpos o interesse maior seja em quantidades médias do que no movimento individual de cada corpo, essas equações serão de grande utilidade para calcularmos tais quantidades para o feixe em estudo. Também são as equações essenciais do método da partícula teste, que será utilizado no Cap. 2.

## Capítulo 2

# Relaxação não-colisional em um feixe esférico

Neste capítulo, discutiremos os resultados publicados na Ref. [42]. O primeiro objetivo é entender o mecanismo de relaxação de feixes de partículas carregadas. Baseado nesse mecanismo e em concordância com as propriedades da dinâmica de Vlasov, discutidas na Sec. 1.2, vamos propôr um modelo para o estado quase-estacionário de um feixe esfericamente simétrico. Por fim, vamos comparar resultados de simulação com os previsto pelo modelo para quantidades de interesse.

## 2.1 Distribuição inicial

Para começar nossa análise, vamos deixar explícita a distribuição das partículas na injeção do feixe. Isso é relevante, pois, como argumentado na Sec. 1.2, a relaxação do feixe para um estado quase-estacionário depende da distribuição inicial. Além disso, a dedução da equação para evolução do envelope do feixe esférico requer um conhecimento prévio da distribuição das partículas.

Vamos trabalhar com uma distribuição inicial em que as partículas estão uniformemente distribuídas tal que

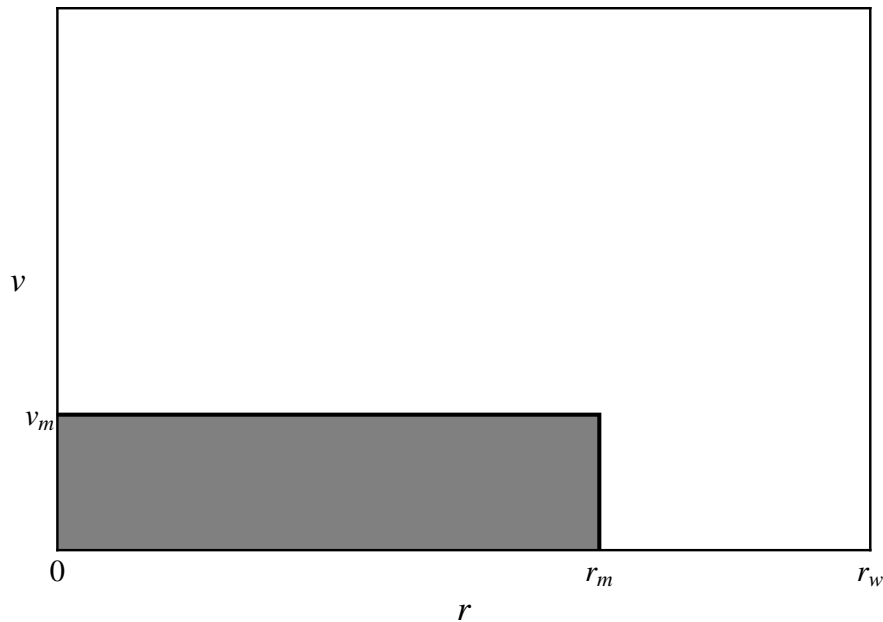
$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{9N_b}{16\pi^2 r_m^3 v_m^3} \Theta(r_m - r) \Theta(v_m - v), \quad (2.1.1)$$

onde  $v = |d\mathbf{v}/ds|$ ,  $r_m$  e  $v_m$  são os valores máximo de  $r$  e  $v$  da distribuição inicial, respectivamente, e

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

é a função degrau de Heaviside. A distribuição da Eq. (2.1.1) é conhecida como distribuição *waterbag*. A Fig. 2.1 ilustra essa distribuição.

Esse é um modelo simples, mas que geralmente produz estimativas razoáveis para distribuições iniciais mais complexas [21, 22]. Ademais, a teoria que será apresentada neste capítulo pode ser generalizada para outras distribuições, aproximando-as por uma série de distribuições do tipo *waterbag* com densidades diferentes [20].



**Fig. 2.1:** Distribuição *waterbag*. As partículas estão uniformemente distribuídas até um raio máximo  $r_m$  e com velocidade máxima, em módulo,  $v_m$ . Na figura  $r_w$  representa o raio das paredes dos condutores que envolvem o feixe, que supomos que tendem ao infinito.

## 2.2 Equação do envelope

No Sec. 1.4, deduzimos, após algumas suposições e aproximações, as equações de movimento de uma partícula do feixe, que são as Eqs. (1.4.9a)-(1.4.9c). Queremos agora trabalhar num caso específico em que as forças focalizadoras são isotrópicas, ou seja,  $\kappa_\rho = \kappa_z = \kappa$ . Essa é uma condição necessária, mas não é suficiente para obter um feixe esférico.

O movimento de uma partícula do feixe, usando essa suposição, pode ser calculado resolvendo as equações

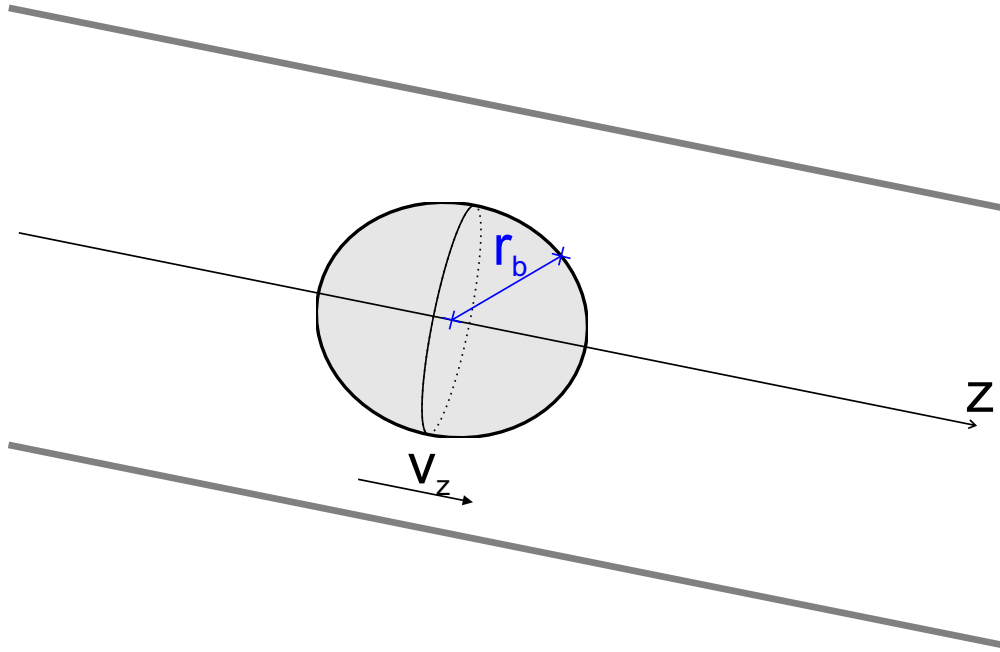
$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = -\kappa \mathbf{r} - \nabla \psi, \quad (2.2.1a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi K}{N_b} n_b(\mathbf{r}, s). \quad (2.2.1b)$$

Dado esse conjunto de equações, observamos a segunda condição para obter um feixe esférico - a densidade do feixe  $n_b(\mathbf{r}, s=0) = n_b(r)$ , ou seja, as partículas precisam estar inicialmente distribuídas de forma isotrópica também. Essa condição e a força restauradora isotrópica são condições suficientes para garantir que o feixe será esférico. Ressaltamos que serão analisadas, no Cap. 3, condições em que pequenas imperfeições na isotropia da distribuição inicial podem levar à quebra dessa simetria.

O envelope do feixe é uma medida do seu tamanho. Em termos matemáticos, podemos escrever, nesse caso esférico,  $r_b \propto \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ , onde a média é feita sobre a distribuição de partículas. A escolha da constante de proporcionalidade varia de autor para autor. Aqui, calculamos essa constante de tal forma que o envelope coincida com as partículas mais externas do feixe para uma distribuição uniforme, como a da Eq. (2.1.1). Isso está ilustrado

na Fig. 2.2.



**Fig. 2.2:** Representação do feixe esférico no referencial do laboratório. O envelope do feixe é definido de forma que representa o tamanho do feixe para uma distribuição uniforme de partículas.

Levando essa definição em consideração, o envelope é dado por

$$r_b = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle}. \quad (2.2.2)$$

As duas primeiras derivadas de  $r_b$  com relação a  $s$  são

$$\dot{r}_b = \frac{5}{3} \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rangle}{r_b}, \quad (2.2.3a)$$

$$\ddot{r}_b = \frac{1}{r_b^3} \left[ \frac{25}{9} (\langle r^2 \rangle \langle \dot{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rangle^2) \right] + \frac{5}{3} \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{r_b}. \quad (2.2.3b)$$

O termo entre colchetes na Eq. (2.2.3b) está relacionado com uma quantidade de muito interesse na física de feixes - a emitância. A definição precisa de emitância, para o caso de um feixe esférico, é

$$\epsilon = \frac{5}{3} \left[ \langle r^2 \rangle \langle \dot{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rangle^2 \right]^{1/2}. \quad (2.2.4)$$

O conceito de emitância é bastante abstrato. Na prática, o que a Eq. (2.2.4) mede é a quão distribuídas estão as partículas do feixe no espaço de fases. Voltemos para a Fig. 2.1. Nesse caso, se calcularmos a emitância, o resultado será  $\epsilon = r_m v_m$ . É fácil ver que, se diminuirmos os valores de  $r_m$  e de  $v_m$ , as partículas do feixe estarão distribuídas numa região

do espaço de fases menor. Portanto a emitância será menor. Se aumentarmos os valores de  $r_m$  e de  $v_m$ , o valor da emitância será maior.

Em face disso, há um grande interesse na emitância por quem trabalha com feixes, pois ela serve como uma medida da qualidade do feixe. Como mencionado na Sec. 1.1, tipicamente, o interesse é de tentar obter feixes com as menores dimensões possíveis. Enquanto o envelope representa a evolução espacial das partículas, a emitância leva em conta tanto a dispersão no espaço quanto à em velocidade.

Mesmo que o envelope do feixe seja pequeno num certo tempo, a dispersão em velocidade e a emitância ainda podem ser grandes. Nesse exemplo específico, embora as dimensões do feixe sejam pequenas naquele instante, a grande dispersão em velocidade indica que, num tempo posterior, as partículas estarão dispersas no espaço. Segue que a qualidade do feixe é pequena.

Tipicamente, a emitância do feixe varia com  $s$ , como será argumentado mais adiante. Por hora, entretanto, vamos considerar a emitância constante e lidaremos com as consequências dessa hipótese mais tarde. Considerando  $\epsilon(s) = \epsilon$ , reescrevemos a Eq. (2.2.3b) como

$$\ddot{r}_b = \frac{\epsilon^2}{r_b^3} + \frac{5}{3} \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle}{r_b}. \quad (2.2.5)$$

Podemos calcular a média  $\langle \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \rangle$  usando a Eq. (2.2.1a)

$$\ddot{r}_b = \frac{\epsilon^2}{r_b^3} - \kappa r_b - \frac{5}{3} \frac{\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle}{r_b}. \quad (2.2.6)$$

Para obtermos uma equação fechada para  $r_b$ , resta-nos calcular a média  $\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle$ . Para isso, precisamos escolher a distribuição para as partículas - usaremos a da Eq. (2.1.1), a *waterbag*. Dessa forma, podemos calcular a média como

$$\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle = \frac{4\pi}{N_b} \int_0^\infty n_b(r) r^2 \left[ r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] dr = \frac{3}{r_b^3} \int_0^{r_b} r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} dr, \quad (2.2.7)$$

onde  $n_b = \int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v$  e lembramos que, por construção,  $r_b(s=0) = r_m$ .

Podemos calcular  $\partial \psi / \partial r$  substituindo a *watebag* da Eq. (2.1.1) na equação de Poisson (2.2.1b).

$$\frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r}^2 \frac{\partial \psi}{\partial \hat{r}} \right) = -\frac{3K}{r_b^3} \Theta(r_b - \hat{r}). \quad (2.2.8)$$

Multiplicando a Eq. (2.2.8) por  $\hat{r}^2 d\hat{r}$  e integrando  $\hat{r}$  de 0 até  $r$ , com  $r \leq r_b$ , obtemos

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r}^2 \frac{\partial \psi}{\partial \hat{r}} \right) d\hat{r} = -\frac{3K}{r_b^3} \int_0^r \hat{r}^2 d\hat{r},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{Kr}{r_b^3}, \quad (2.2.9)$$

que é o resultado esperado, visto que a equação de Poisson para o potencial  $\psi$  é equivalente à do caso eletrostático, e é um resultado conhecido que o campo elétrico, dentro de uma esfera uniformemente carregada, varia de forma linear com  $r$  [43].

Substituindo o resultado da Eq. (2.2.9) na Eq. (2.2.7) e integrando, obtemos

$$\langle \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \rangle = -\frac{3K}{5r_b}. \quad (2.2.10)$$

Por fim, usando o resultado da Eq. (2.2.10) na Eq. (2.2.6), encontramos uma equação fechada para o envelope dada por

$$\ddot{r}_b + \kappa r_b - \frac{\epsilon^2}{r_b^3} - \frac{K}{r_b^2} = 0. \quad (2.2.11)$$

Ressaltamos que a Eq. (2.2.11) foi deduzida para uma distribuição uniforme. Entretanto, assim como a emitância, a distribuição também varia durante a propagação do feixe. Como consequência dessas duas suposições, a Eq. (2.2.11) deve descrever o movimento do feixe apenas nas primeiras oscilações do envelope, enquanto a validade dessas hipóteses é razoável.

Em tese, a Eq. (2.2.11) têm três parâmetros livres:  $\kappa$ ,  $\epsilon$  e  $K$ . Entretanto, se escalarmos  $r_b$  e  $s$  de uma forma conveniente, que é  $r_b \rightarrow (\epsilon^2/\kappa)^{1/4} r_b$  e  $s \rightarrow \kappa^{-1/2} s$ , obteremos uma equação do envelope que depende de apenas um parâmetro  $\zeta \equiv K/(\kappa\epsilon^6)^{1/4}$

$$\ddot{r}_b + r_b - \frac{1}{r_b^3} - \frac{\zeta}{r_b^2} = 0. \quad (2.2.12)$$

Agora estamos aptos descobrir o raio casado, que é o valor de  $r_b = r_{bm}$  tal que as forças focalizadoras são iguais à força de auto-repulsão das partículas. Logo, se o feixe começar com  $r_b = r_{bm}$  e  $\dot{r}_b = 0$ , ele permanecerá com essa configuração durante a propagação. Todavia, é praticamente inviável, ou até mesmo indesejado [18], obter-se um feixe casado em experimentos. De forma mais geral, podemos definir um parâmetro chamado descasamento que é dado por

$$\mu = \frac{r_b(0)}{r_{bm}}, \quad (2.2.13)$$

e nos indica quão afastada a nossa condição inicial está da condição casada. O valor do raio casado  $r_{bm}$  pode ser obtido colocando  $\ddot{r}_b = 0$  na Eq. (2.2.12) quando  $r_b = r_{bm}$ , resultando na equação algébrica

$$r_{bm}^4 - \zeta r_{bm} - 1 = 0. \quad (2.2.14)$$

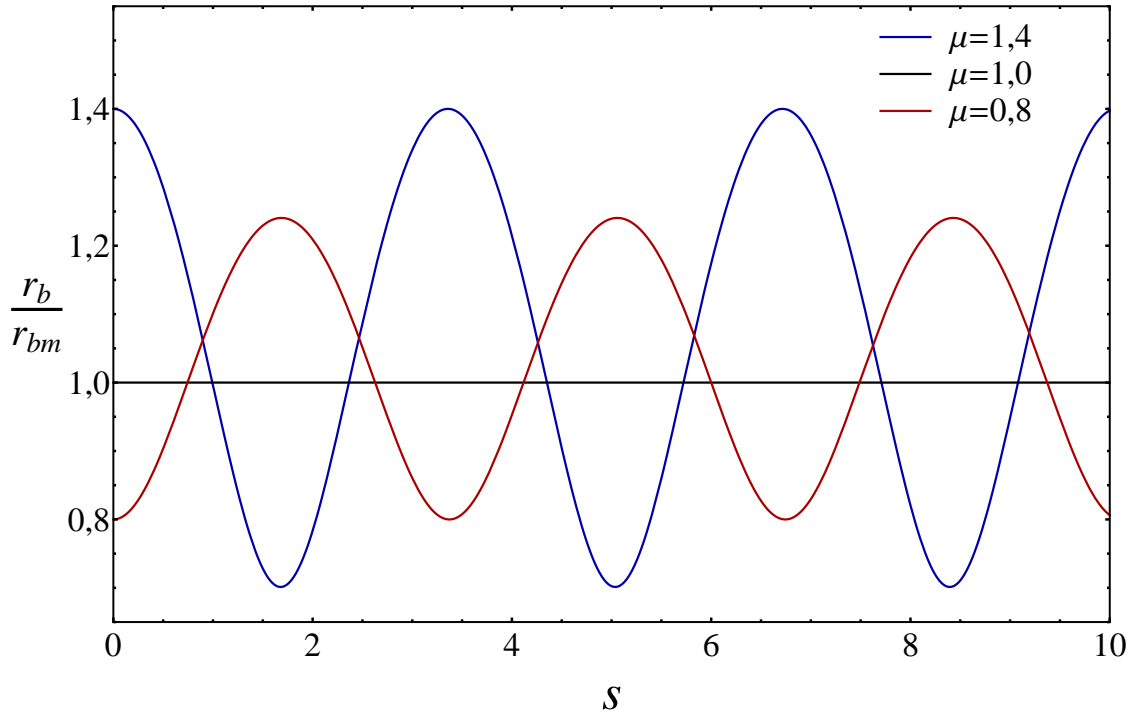
A Eq. (2.2.14) apresenta quatro soluções. Entretanto, apenas uma delas é de interesse físico, visto que duas delas são complexas e uma negativa, portanto, há apenas uma solução real e positiva para  $r_{bm}$ .

A Fig. 2.3 mostra três soluções da Eq. (2.2.12) para valores diferentes de  $\mu$ , com  $\dot{r}_b(0) = 0$  e com  $\zeta = 1$  para todas soluções. Notamos que as soluções descasadas, em vermelho e em azul, possuem período de oscilação fixo, mas diferentes entre si.

Isso é uma característica de sistemas integráveis. A Eq. (2.2.12) pode ser deduzida do hamiltoniano

$$H(p_{r_b}, r_b) = \frac{p_{r_b}^2}{2} + \frac{r_b^2}{2} + \frac{1}{2r_b^2} + \frac{\zeta}{r_b}, \quad (2.2.15)$$

onde  $p_{r_b}$  é o momento conjugado à  $r_b$ . Como  $H$  é independente do tempo, esse é uma constante de movimento. Segue que, por ser um sistema de um grau de liberdade, podemos escrever a solução do sistema na forma de uma quadratura [44].



**Fig. 2.3:** Soluções da equação do envelope. Em preto, para  $\mu = 1$ , temos a solução casada que não oscila. Em vermelho e azul temos casos descasados com  $\mu = 0,8$  e  $\mu = 1,4$ , respectivamente, valores para quais o envelope vai oscilar em torno de  $\mu = 1$ . O outro parâmetro é  $\zeta = 1$  em todas soluções.

## 2.3 Mecanismo de relaxação, partícula teste e raio do halo

De posse da equação do envelope, vamos investigar o comportamento de uma partícula do feixe. A equação do movimento dessa partícula é dada pela Eq. (2.2.1a), onde o campo auto-consistente  $\nabla\psi$  foi determinado na Eq. (2.2.9), quando a partícula estiver dentro do envelope do feixe. Resta-nos calcular o seu valor fora da distribuição, e isto é feito multiplicando por  $\hat{r}^2 d\hat{r}$  a Eq. (2.2.8) e integrando  $\hat{r}$  de 0 até  $r$ , com  $r > r_b$ , obtendo

$$\int_0^r \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left( \hat{r}^2 \frac{\partial \psi}{\partial \hat{r}} \right) d\hat{r} = -\frac{3K}{r_b^3} \int_0^{r_b} \hat{r}^2 d\hat{r},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{K}{r_b^2}, \quad (2.3.1)$$

ou seja, o auto-campo  $\nabla\psi$  é dado por

$$\nabla\psi = \begin{cases} -K\mathbf{r}/r_b^3(s) & \text{se } r \leq r_b(s), \\ -K\mathbf{r}/r^3 & \text{se } r > r_b(s), \end{cases} \quad (2.3.2)$$

que é novamente o resultado esperado devido à semelhança de  $\psi$  com o potencial eletrostático [43]. Utilizando a mesma normalização feita na Sec. 2.2, podemos escrever a equação para

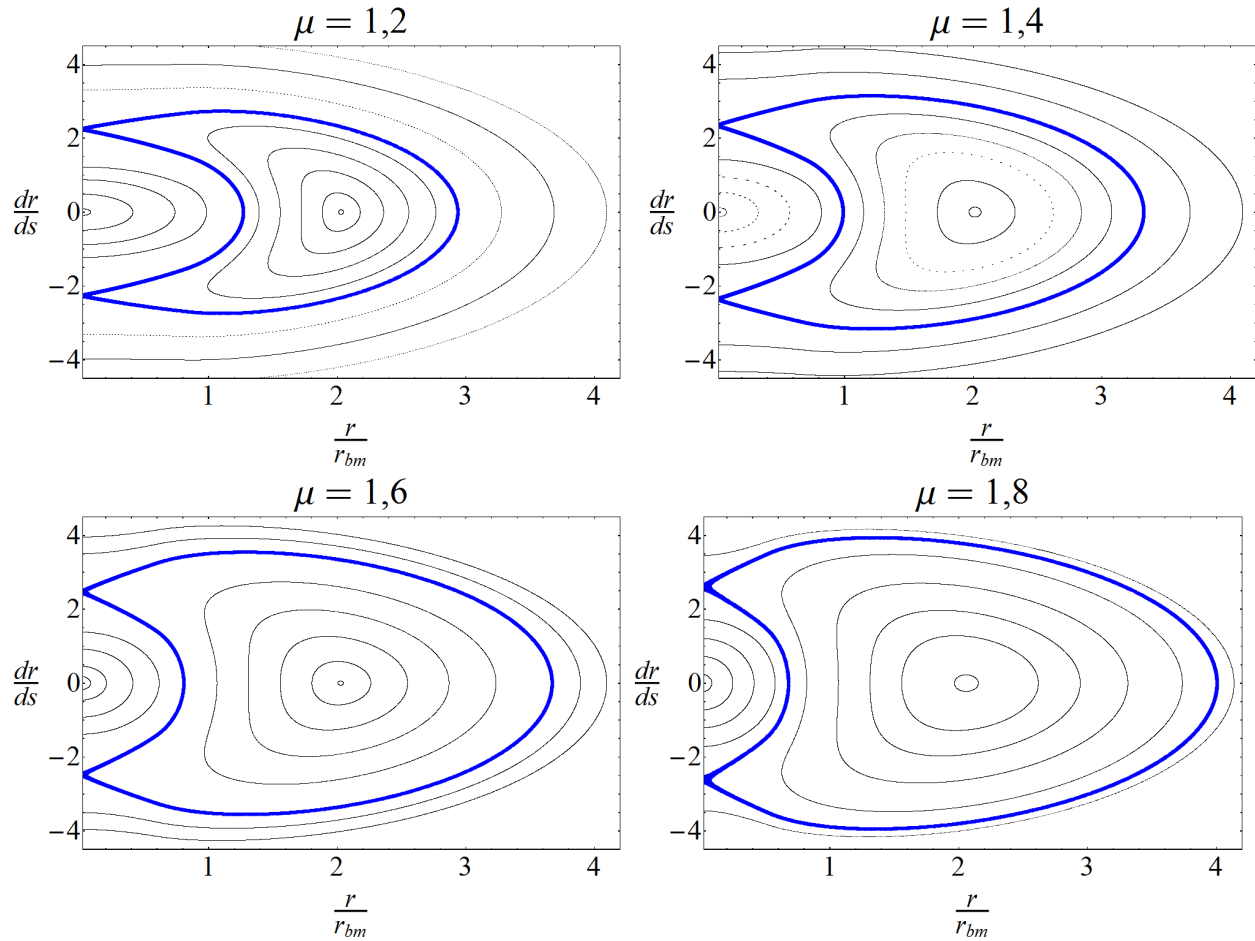


o movimento radial como

$$\ddot{r} + r - \frac{L^2}{r^3} - \frac{\zeta r}{r_b^3} = 0 \quad \text{se } r \leq r_b(s), \quad (2.3.3a)$$

$$\ddot{r} + r - \frac{L^2}{r^3} - \frac{\zeta}{r^2} = 0 \quad \text{se } r > r_b(s), \quad (2.3.3b)$$

onde  $L = p_\theta/\epsilon$  e  $p_\theta$  é o momento angular da partícula, que é uma quantidade conservada.



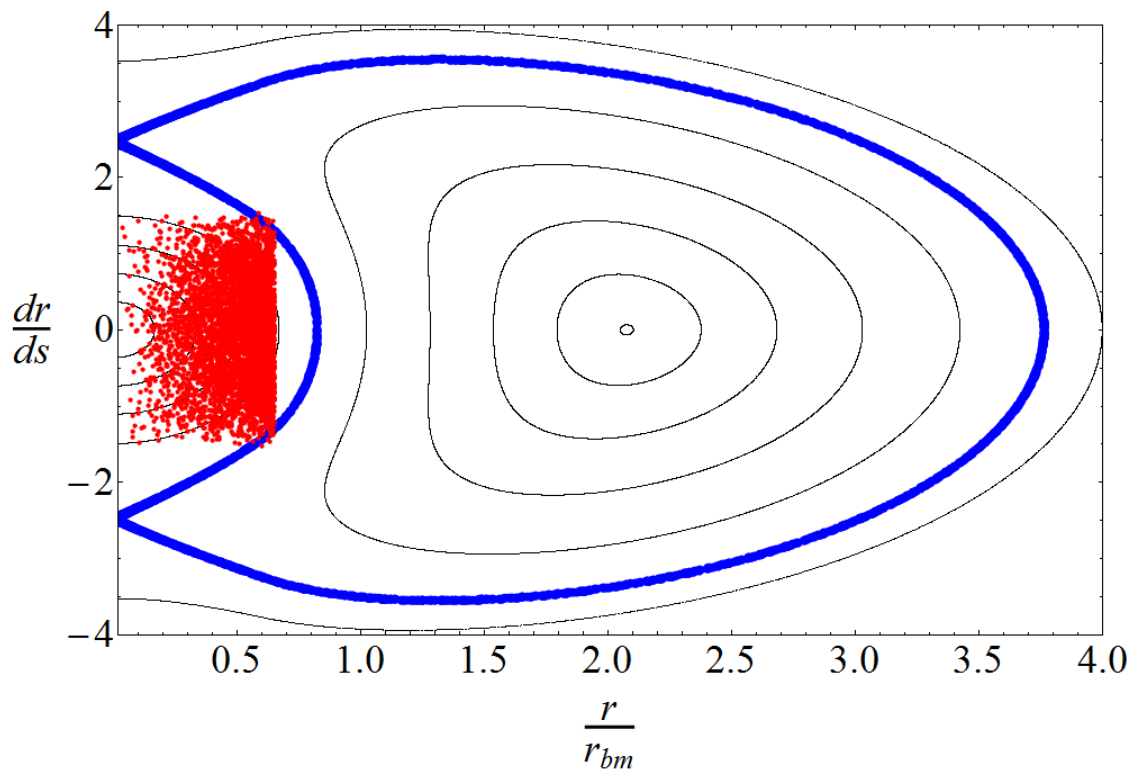
**Fig. 2.4:** Seção de Poincaré para a dinâmica da partícula teste. Os pontos em azul representam a separatriz da ressonância responsável pela formação de halo e formam uma pequena camada de caos. Os parâmetros utilizados são  $\zeta = 1$  e  $L = 10^{-3}$ .

Vamos analisar o movimento da partícula a partir de seções de Poincaré (ou mapas de Poincaré). Os mapas são construídos da seguinte forma: resolvemos concomitantemente a equação para o movimento da partícula e a do envelope; como argumentamos anteriormente, o período de oscilação do envelope é bem definido; a cada período do envelope, colocamos um ponto num gráfico de  $r \times dr/ds$ , ou seja, da posição e da velocidade da partícula. Fazendo isso para vários períodos e para um número suficiente de condições iniciais, poderemos observar alguns padrões na dinâmica da partícula. Para mais detalhes fazemos referência ao Apêndice C, bem como à Ref. [45].

A Fig. 2.4 mostra a seção de Poincaré para essa partícula teste. Os pontos dos gráficos são gerados cada vez que o envelope atinge um mínimo. Notamos que há dois pontos fixos presentes em todas as figuras, um para  $r/r_{bm} \gtrsim 0$  e  $\dot{r} = 0$  e o outro em torno de  $r/r_{bm} \approx 2$  e  $\dot{r} = 0$ .

Apesar de serem pontos fixos do mapa de Poincaré, esses pontos não representam pontos fixos da dinâmica, ou seja, não são condições de equilíbrio. De fato, nesse caso, eles indicam condições de ressonância entre o movimento da partícula e do envelope inicialmente. Como mencionamos, todos pontos dos gráficos representam uma condição de mínimo do envelope. Portanto, se, a cada período do envelope, a partícula está na mesma posição e com a mesma velocidade, a frequência do movimento da partícula e a do envelope são iguais. Logo, há uma condição de ressonância.

Voltando à Fig. 2.4, temos quatro painéis, cada um com um valor diferente de desca-  
samento inicial. Ao redor das duas ressonâncias observadas, notamos dois comportamentos bem distintos. As partículas com condições iniciais próximas à  $r/r_{bm} \gtrsim 0$  e  $\dot{r} = 0$  ficam restritas a essa pequena região do mapa. Já as condições iniciais ao redor da ressonância, centrada em  $r/r_{bm} \approx 2$  e  $\dot{r} = 0$ , fazem excursões muito maiores no mapa.



**Fig. 2.5:** Superposição de uma seção de Poincaré para a partícula teste e a correspondente condição inicial para as partículas em vermelho. Os parâmetros utilizados são  $\zeta = 1$ ,  $L = 10^{-3}$  e  $\mu = 1,6$ .

Agora, vamos argumentar sobre o mecanismo de relaxação do feixe. Na Fig. 2.5, mostramos concomitantemente a seção de Poincaré e a distribuição inicial dada pela *waterbag* da Eq. (2.1.1).

Notamos que a maior parte das partículas estão ao redor da ressonância centrada em  $r/r_{bm} \gtrsim 0$  e  $\dot{r} = 0$ . Entretanto, algumas partículas têm condições iniciais ao longo da separatriz da ressonância centrada em  $r/r_{bm} \approx 2$  e  $\dot{r} = 0$ , ou seja, da curva azul. Ressaltamos que a espessura dessa curva não é maior para enfatizá-la, mas porque ela representa uma camada de caos.

Essas partículas vão ganhar uma grande quantidade de energia e vão evaporar para regiões mais afastadas do caroço de partículas do feixe - elas vão passar a formar o chamado halo.

Esse é um bom ponto de partida para entendermos a relaxação do feixe. O modelo da partícula teste, entretanto, não é capaz de descrever o que acontece a seguir. Com ele, conseguimos entender como a oscilação do envelope afeta o movimento das partículas do feixe. Mas o problema não é auto-consistente, visto que não recalculamos a equação do envelope, dado o comportamento das partículas.

De fato, a oscilação do envelope serve como uma fonte e um sumidouro inesgotável de energia para as partículas, enquanto, no problema real, a energia é conservada. O que acontece então é que, à medida que partículas ganham energia e evaporam para o halo, as demais perdem, e a oscilação do envelope é amortecida, análogo ao conceito de amortecimento de Landau [25].

Outro ponto a destacar, é que esse processo evaporativo produz um aumento na emitância, visto que as partículas que evaporam para o halo causam um aumento na dispersão no espaço de fases. Além disso, é claro que a distribuição não é mais uniforme. Esses dois fatores colocam em dúvida a validade da equação do envelope deduzida na seção anterior.

Embora não consigamos resolver o problema de forma auto-consistente, usando o método da partícula teste, podemos inferir o que vai acontecer. À medida que partículas são ejetadas para o halo, as oscilações coletivas são amortecidas. Essa nova amplitude de oscilação induzirá mais partículas as serem ejetadas, no entanto a energia disponível para isso é menor do que a inicial. Logo, essas partículas não irão para tão longe do caroço quanto às primeiras.

A princípio, poderíamos pensar que isso se repetiria indefinitivamente - as partículas ressonantes evaporam para o halo, e as demais tendem a colapsar cada vez mais enquanto as oscilações são amortecidas. Entretanto, como discutido na Sec. 1.2, a dinâmica de Vlasov é incompressível. Logo, esse colapso está limitado pela densidade da distribuição inicial.

De certa forma, a limitação na densidade funciona como o princípio da exclusão de Pauli para férmions. Assim, as partículas que formam o caroço tendem a ocupar os menores valores de energia possível, respeitando a conservação da densidade no espaço de fases. Esse processo é análogo a um gás de férmions idênticos, em que esses tendem a ocupar os estados de menor energia, mas o princípio de exclusão limita cada estado quântico a ser ocupado por no máximo um férmion.

Na próxima seção vamos focar em descrever o estado quase-estacionário para qual o feixe relaxa, segundo essa receita. Por enquanto, voltamos ao modelo da partícula teste. Nosso foco agora é descobrir o valor máximo do raio do halo. Como já mencionado, esse valor máximo deve ser atingido pelas primeiras partículas que evaporam, portanto, o modelo parece ideal para tal feito.

Podemos determinar o valor do raio do halo, para um particular caso, utilizando a seção de Poincaré, como na Fig. 2.4 e observando o maior valor de  $r$  que uma partícula, com condição inicial na separatriz (curva azul na figura), atinge. Entretanto, diversas vezes,

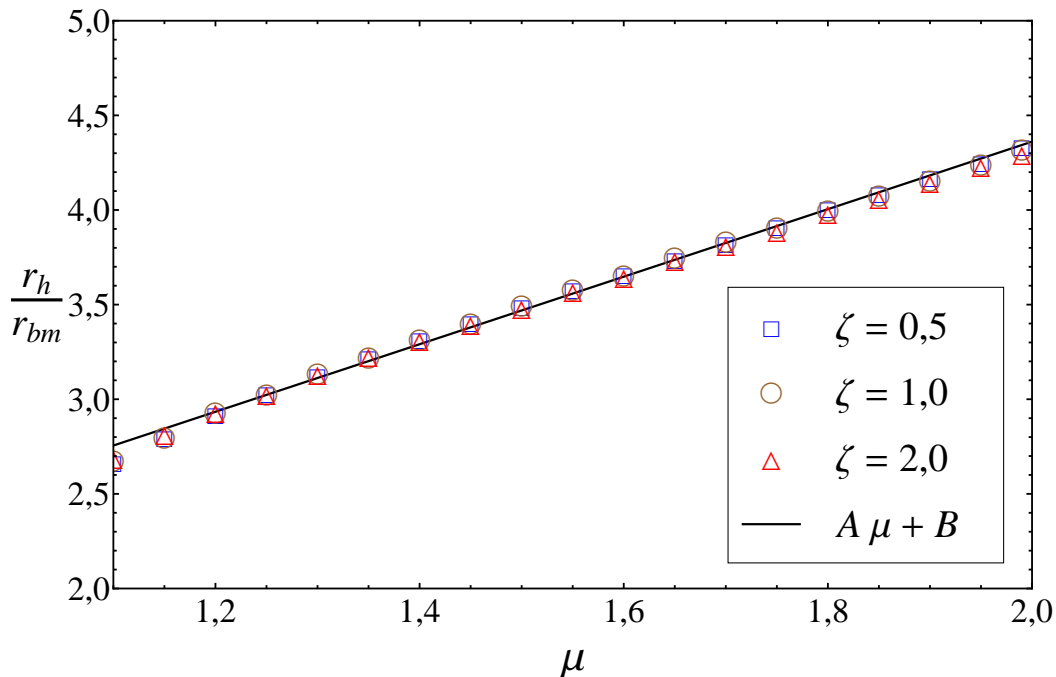
queremos fazer cálculos variando parâmetros e esse procedimento pode se tornar tedioso e demorado. Para o caso de um feixe contínuo bidimensional, foi determinada uma fórmula empírica para a variação do raio da halo  $\rho_h$  com o descasamento  $\mu$  [46], que diz

$$\frac{\rho_h}{\rho_{bm}} = A + B |\ln(\mu)|, \quad (2.3.4)$$

com  $A$  e  $B$  sendo aproximadamente  $A \approx B \approx 2$ . De acordo com a fórmula da Eq. (2.3.4), a dependência nos parâmetros do feixe está contida no valor do raio casado  $\rho_{bm}$ , logo a razão entre  $\rho_h$  e  $\rho_{bm}$  depende apenas do descasamento  $\mu$ . Como tentativa de obter uma fórmula análoga para o caso de um feixe não-contínuo esférico, propomos que

$$\frac{r_h}{r_{bm}} = f(\mu), \quad (2.3.5)$$

onde a função  $f(\mu)$  precisa ser determinada.



**Fig. 2.6:** Gráfico da razão entre o raio da halo e raio casado  $r_h/r_{bm}$  pelo descasamento  $\mu$  obtidos através da partícula teste para diferentes valores de  $\zeta$  (símbolos). A linha sólida corresponde a um ajuste linear proposto, que parece bastante apropriado para descrever a variação do raio da halo.

A Fig. 2.6 mostra o comportamento da razão  $r_h/r_{bm}$  como função do descasamento  $\mu$  para três valores diferentes de  $\zeta$ , representado pelos símbolos. Esses símbolos são obtidos colocando uma condição inicial da partícula teste na separatriz da ressonância (curva azul das Figs. 2.4) e evoluindo a dinâmica da partícula para tempo suficientemente grande, guardando o maior raio que a partícula atinge. Afim de obter o maior valor de  $r_h$  possível, utilizamos  $L \rightarrow 0$ . Notamos que, para cada valor de  $\mu$  as soluções para diferentes  $\zeta$ , convergem para

o mesmo valor de  $r_h/r_{bm}$ , indicando que o raio do halo também depende do parâmetro do feixe  $\zeta$  através do raio casado  $r_{bm}$ . Além disso, a dependência dessa razão em função de  $\mu$  parece ser muito bem descrita nessa região por uma reta, ou seja,

$$f(\mu) = A \mu + B, \quad (2.3.6)$$

com  $A = 1,784$  e  $B = 0,7931$ .

## 2.4 Modelo para o estado quase-estacionário

Nesta seção, vamos propor um modelo baseado na similaridade da incompressibilidade da dinâmica de Vlasov com o princípio de exclusão de Pauli. Relembrando, o processo de relaxação é o seguinte: à medida que algumas partículas do feixe entram em ressonância com as oscilações do envelope, essas ganham uma grande quantidade de energia, enquanto a oscilação do envelope diminui. O processo se repete até as partículas do núcleo, ou seja, as que não entraram em ressonância atingem uma densidade igual à da distribuição inicial. Essa limitação na densidade funciona como o princípio de exclusão, não permitindo que dois férmions idênticos ocupem o mesmo estado quântico. Por conseguinte, modelamos o núcleo do estado quase-estacionário como uma distribuição do tipo Fermi-Dirac totalmente degenerada.

Por outro lado, as partículas que evaporam para o halo são modeladas como tendo energia uniformemente distribuída entre  $\varepsilon_F$  e  $\varepsilon_h$ , onde  $\varepsilon_F$  é a energia de Fermi e  $\varepsilon_h$  a maior energia das partículas que formam o halo. Portanto, a função distribuição é dada por (ver a Fig. 2.7 para uma ilustração dessa distribuição)

$$f_{qs}(\varepsilon) = \eta_0 [\Theta(\varepsilon_F - \varepsilon) + \chi \Theta(\varepsilon_h - \varepsilon) \Theta(\varepsilon - \varepsilon_F)], \quad (2.4.1)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heaviside,  $\eta_0$  é a densidade do núcleo,  $\eta_0\chi$  é a densidade do halo e  $\varepsilon$  é a energia de uma única partícula dada por

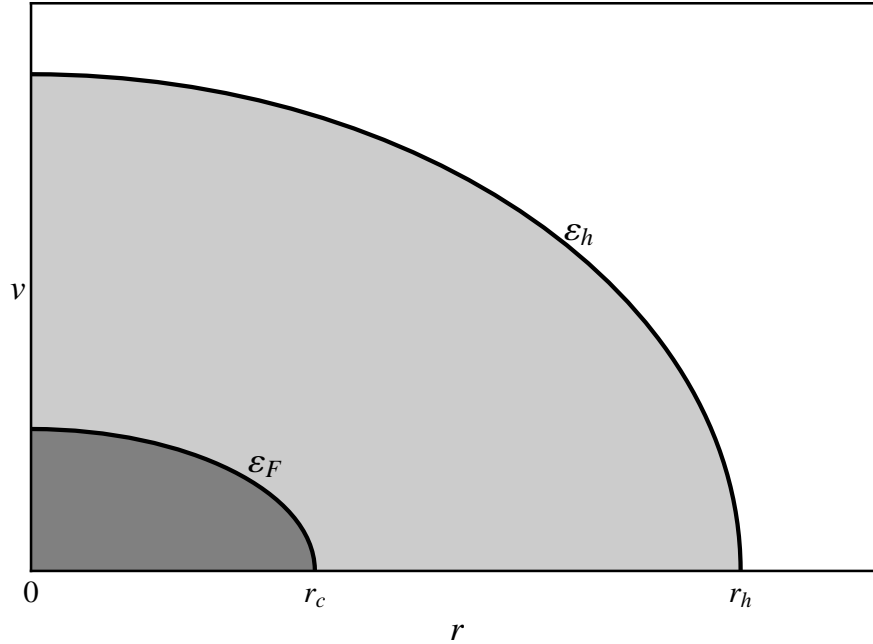
$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa r^2}{2} + \psi(r). \quad (2.4.2)$$

Ressaltamos que a densidade do halo é uma fração da densidade do núcleo num sentido *coarse-grained* ou “macroscópico”. Num sentido *fine-grained* ou “microscópico”, a incompressibilidade da dinâmica de Vlasov é obedecida. Para maiores detalhes, ver a Ref. [28]. Como mostrado na Sec. 1.2, por depender de  $\mathbf{r}$  e de  $\mathbf{v}$  através da energia de uma partícula, a distribuição da Eq. (2.4.1) é uma solução estacionária da equação de Vlasov.

Baseado na distribuição inicial que estamos estudando, dada pela Eq. (2.1.1), e na dinâmica de Vlasov, identificamos a densidade do núcleo como sendo  $\eta_0 = 9N_b/16\pi^2 r_m^3 v_m^3$ .

Também podemos utilizar a fórmula da Eq. (2.3.5) para calcular o raio do halo  $r_h$ . De posse de  $r_h$ , podemos calcular a energia do halo  $\varepsilon_h$  notando que a distribuição da Eq. (2.4.1) é esfericamente simétrica. Então, fora da distribuição para  $r \geq r_h$ , o potencial  $\psi(r)$  é o mesmo como se houvesse apenas uma partícula no centro contendo toda a carga da distribuição. Isso resulta num potencial

$$\psi_{r \geq r_h}(r) = \frac{K}{r}. \quad (2.4.3)$$



**Fig. 2.7:** Modelo para distribuição quase-estacionária.

Substituindo o potencial da Eq. (2.4.3) na energia de uma partícula da Eq. (2.4.2) com  $r = r_h$  e  $v = 0$ , obtemos

$$\varepsilon_h = \frac{\kappa r_h^2}{2} + \frac{K}{r_h}. \quad (2.4.4)$$

Resta-nos calcular dois parâmetros,  $\varepsilon_F$  e  $\chi$ , para o nosso modelo. Para isso, utilizaremos dois princípios básicos: o número de partículas e a energia total (ou energia média por partícula) devem ser conservados durante o transporte do feixe. O número de partículas é dado por

$$N_b = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v, \quad (2.4.5)$$

e a energia média por partícula

$$E = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + \frac{\kappa \langle r^2 \rangle}{2} + E_\psi, \quad (2.4.6)$$

onde  $\langle \dots \rangle = \int \dots f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v$  e

$$E_\psi = \frac{1}{2K} \int_0^\infty \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr. \quad (2.4.7)$$

O fator 1/2 na Eq. (2.4.7) evita que a interação entre duas partículas seja contada duas vezes no cálculo da energia.

Substituindo a distribuição inicial  $f_0$  da Eq. (2.1.1) nas Eqs. (2.4.5) e (2.4.6), temos

$$N_0 = \frac{9N_b}{16\pi^2 r_m^3 v_m^3} \int \Theta(r_m - r) \Theta(v_m - v) d^3 r d^3 v = N_b, \quad (2.4.8a)$$

$$\langle v^2 \rangle_0 = \frac{9}{16\pi^2 r_m^3 v_m^3} \int v^2 \Theta(r_m - r) \Theta(v_m - v) d^3 r d^3 v = \frac{3v_m^2}{5}, \quad (2.4.8b)$$

$$\langle r^2 \rangle_0 = \frac{9}{16\pi^2 r_m^3 v_m^3} \int r^2 \Theta(r_m - r) \Theta(v_m - v) d^3 r d^3 v = \frac{3r_m^2}{5}. \quad (2.4.8c)$$

Por fim, podemos calcular  $E_\psi$  usando  $\partial\psi/\partial r$  dado pela Eq. (2.3.2) substituindo  $r_b$  por  $r_m$ , visto que lá também foi suposta uma distribuição uniforme. Isso resulta em

$$E_{\psi_0} = \frac{1}{2K} \left[ \int_0^{r_m} \left( -\frac{Kr}{r_m^3} \right)^2 r^2 dr + \int_{r_m}^\infty \left( -\frac{K}{r^2} \right)^2 r^2 dr \right] = \frac{3K}{5r_m}, \quad (2.4.9)$$

então, a energia que deve ser conservada durante o transporte é

$$E_0 = \frac{3v_m^2}{10} + \frac{3\kappa r_m^2}{10} + \frac{3K}{5r_m}. \quad (2.4.10)$$

Para a distribuição da Eq. (2.4.1), devemos calcular  $N$  e  $E$  e igualar aos resultados obtidos nas Eqs. (2.4.8a) e (2.4.10). Começamos calculando a densidade

$$n_{qs}(r) = \int f_{qs} d^3 v = 4\pi\eta_0 \left[ \int_0^\infty \Theta\left(\varepsilon_F - \frac{v^2}{2} - V(r)\right) v^2 dv + \chi \int_0^\infty \Theta\left(\varepsilon_h - \frac{v^2}{2} - V(r)\right) \Theta\left(\frac{v^2}{2} + V(r) - \varepsilon_F\right) v^2 dv \right], \quad (2.4.11)$$

onde  $V(r) = \psi(r) + \kappa r^2/2$ .

As integrais na Eq. (2.4.11) resultam em

$$\int_0^\infty \Theta\left(\varepsilon_F - \frac{v^2}{2} - V(r)\right) v^2 dv = \int_0^{\sqrt{2[\varepsilon_F - V(r)]}} v^2 dv = \frac{2^{3/2}}{3} [\varepsilon_F - V(r)]^{3/2}, \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Theta\left(\varepsilon_h - \frac{v^2}{2} - V(r)\right) \Theta\left(\frac{v^2}{2} + V(r) - \varepsilon_F\right) v^2 dv = \\ \int_{\sqrt{2[\varepsilon_F - V(r)]}}^{\sqrt{2[\varepsilon_h - V(r)]}} v^2 dv = \frac{2^{3/2}}{3} [\varepsilon_h - V(r)]^{3/2} - \frac{2^{3/2}}{3} [\varepsilon_F - V(r)]^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Substituindo os resultados da Eqs. (2.4.12) e (2.4.13) na densidade da Eq. (2.4.11), obtemos

$$n_{qs}(r) = \frac{2^{7/2}\pi\eta_0}{3} \left\{ (1 - \chi) \Theta(r_c - r) \left[ \varepsilon_F - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} + \chi \Theta(r_h - r) \left[ \varepsilon_h - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} \right\}, \quad (2.4.14)$$

onde  $r_c$  é o valor máximo do raio das partículas do núcleo (*core*). O número total de partículas será obtido integrando a densidade em todo espaço

$$N_{qs} = \frac{2^{11/2}\pi^2\eta_0}{3} \left\{ (1 - \chi) \int_0^{r_c} \left[ \varepsilon_F - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} r^2 dr + \chi \int_0^{r_h} \left[ \varepsilon_h - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} r^2 dr \right\}. \quad (2.4.15)$$

Os cálculos de  $\langle v^2 \rangle$  e  $\langle r^2 \rangle$ , para a distribuição da Eq. (2.4.1), são feitos de forma similar ao do número de partículas

$$\langle v^2 \rangle_{qs} = \frac{1}{N_{qs}} \int f_{qs} v^2 d^3 r d^3 v = \frac{2^{13/2}\pi^2\eta_0}{5N_{qs}} \left\{ (1 - \chi) \int_0^{r_c} \left[ \varepsilon_F - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{5/2} r^2 dr + \chi \int_0^{r_h} \left[ \varepsilon_h - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{5/2} r^2 dr \right\}, \quad (2.4.16)$$

$$\langle r^2 \rangle_{qs} = \frac{1}{N_{qs}} \int f_{qs} r^2 d^3 r d^3 v = \frac{2^{11/2}\pi^2\eta_0}{3N_{qs}} \left\{ (1 - \chi) \int_0^{r_c} \left[ \varepsilon_F - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} r^4 dr + \chi \int_0^{r_h} \left[ \varepsilon_h - \psi(r) - \frac{\kappa r^2}{2} \right]^{3/2} r^4 dr \right\}, \quad (2.4.17)$$

Agora utilizamos a Eq. (2.4.7) para calcular a contribuição do potencial  $\psi$  para a energia média por partícula, lembrando que já foi argumentado que fora da distribuição o potencial é dado pela Eq. (2.4.3),

$$E_{\psi_{qs}} = \frac{1}{2K} \left[ \int_0^{r_h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr + \int_{r_h}^{\infty} \left( -\frac{K}{r^2} \right)^2 r^2 dr \right] = \frac{K}{2r_h} + \frac{1}{2K} \int_0^{r_h} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 r^2 dr. \quad (2.4.18)$$

Assim, a energia média por partícula, quando o sistema atinge o estado quase-estacionário, é dada por

$$E_{qs} = \frac{\langle v^2 \rangle_{qs}}{2} + \frac{\kappa \langle r^2 \rangle_{qs}}{2} + E_{\psi_{qs}}. \quad (2.4.19)$$

Em princípio, precisamos apenas igualar  $N_{qs} = N_0$  e  $E_{qs} = E_0$  para descobrir os parâmetros  $\chi$  e  $\varepsilon_F$  que satisfazem conservação do número de partículas e de energia. Todavia, tanto  $N_{qs}$  quanto  $E_{qs}$  dependem do potencial  $\psi(r)$ , que ainda é desconhecido quando o sistema relaxa para a distribuição quase-estacionária. Para determinar  $\psi_{qs}$ , usamos a equação de Poisson, dada na Eq. (2.2.1b), em coordenadas esféricas

$$\frac{d^2 \psi_{qs}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_{qs}}{dr} + \frac{4\pi K}{N_b} n_{qs}(r) = 0. \quad (2.4.20)$$



Na Eq. (2.4.14),  $n_{qs}$  depende de  $\psi$  de uma forma não-linear, portanto a Eq. (2.4.20) precisa ser resolvida numericamente. Esse não é o caso quando o feixe é contínuo, onde a dependência de  $n_b$  em  $\psi$  é linear, o que possibilita a obtenção de um sistema de equações transcendentais para obtenção dos parâmetros  $\chi$  e  $\varepsilon_F$  [22]. Ademais, a equação para  $\psi_{qs}$  depende dos parâmetros  $\chi$  e  $\varepsilon_F$ , logo temos um problema em que precisamos saber  $\chi$  e  $\varepsilon_F$  para obter  $\psi_{qs}$  e vice-versa. Por conseguinte, temos que utilizar um método iterativo (por exemplo, Newton-Raphson) para solucionar o problema.

Resumindo, temos um sistema de duas equações

$$N_{qs} = N_0, \quad (2.4.21a)$$

$$E_{qs} = E_0, \quad (2.4.21b)$$

que usamos para descobrir os parâmetros  $\chi$  e  $\varepsilon_F$ . Como precisamos desses parâmetros para calcular  $\psi$ , temos que usar um método iterativo. Para tal, propomos valores para  $\chi$  e  $\varepsilon_F$  e calculamos  $N_{qs}$  e  $E_{qs}$ . Em geral, o resultado será diferente das condições das Eqs. (2.4.21). Entretanto, usando o método de Newton-Raphson, obtemos uma nova estimativa para  $\chi$  e  $\varepsilon_F$ . Repetimos o processo quantas vezes forem necessárias, esperando que convirja para as condições da Eq. (2.4.21) com a precisão desejada.

## 2.5 Simulação e resultados

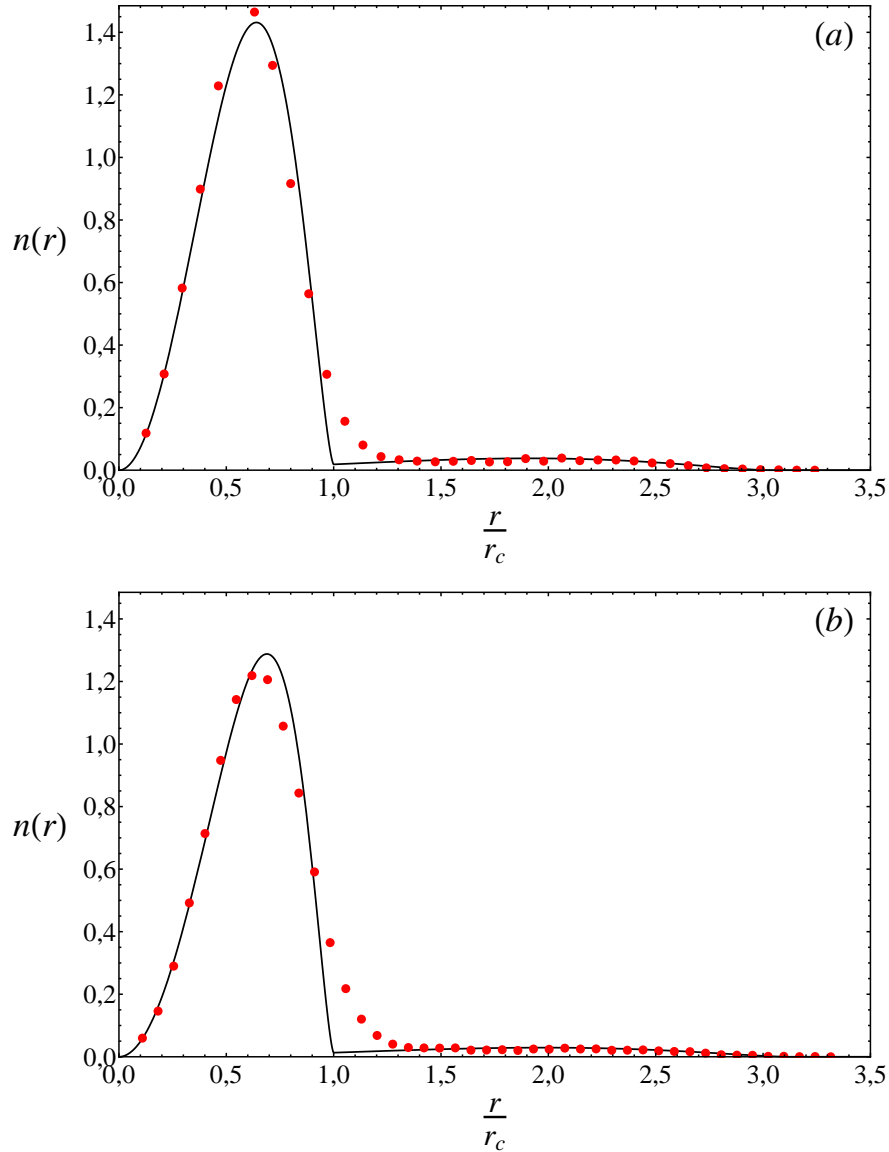
Para testar nosso modelo para o estado quase-estacionário da Eq. (2.4.1), fazemos uma simulação do transporte do feixe. Por causa da simetria esférica da distribuição de partículas, podemos utilizar a Lei de Gauss para calcular interação entre elas, o que diminui o tempo de computação. A equação de movimento para uma partícula com raio  $r_i$  na simulação é dada por

$$\frac{d^2 r_i}{ds^2} = -\kappa r_i + \frac{p_\theta^2}{r_i^3} + \frac{1}{r_i^2} \frac{K}{N} \sum_j \Theta(r_i - r_j), \quad (2.5.1)$$

onde  $p_\theta$  é o momentum angular constante da partícula,  $N$  é o número total de partículas na simulação e a soma no último termo conta o número de partículas com raio menor que  $r_i$ . Fazendo uma analogia com a eletrostática,  $K/N \times \sum_j \Theta(r_i - r_j)$  seria a fração da carga total dentro da superfície gaussiana.

Os resultados mostrados a seguir são obtidos simulando  $N = 5000$  partículas distribuídas inicialmente de acordo com a Eq. (2.1.1). Durante o transporte do feixe, monitoramos diversas quantidades como a energia média por partícula, o envelope e a emitância. Em particular, usamos a emitância para determinar quando o feixe atinge o estado quase-estacionário - basta notar quando seu crescimento satura.

A Fig. 2.8 mostra uma comparação da densidade do feixe, obtida através da nossa teoria da Eq. (2.4.14) (linha sólida) e da simulação (símbolos). Na Fig. 2.8(a) temos um descasamento inicial do feixe de 60%, ou seja,  $\mu = 1,6$  e parâmetro  $\zeta = 0,1$  que consideramos um valor pequeno de carga espacial. Há uma boa concordância entre simulação e modelo. A única região em que há uma discordância mais significativa é a da transição do núcleo para o halo, o que indica que as partículas do núcleo não ocupam completamente os estados de menor energia. Em vez disso, algumas podem ser excitadas para estados com energia



**Fig. 2.8:** Comparação da densidade do feixe no estado quase-estacionário de acordo com o nosso modelo (curva sólida) e simulação de N-partículas (símbolos). Os parâmetros utilizados são  $\zeta = 0,1$  e  $\mu = 1,6$  em (a) e  $\zeta = 1,0$  e  $\mu = 1,6$  em (b).

$\varepsilon \gtrsim \varepsilon_F$  [21]. Isso é um pouco mais perceptível na Fig. 2.8(b), em um caso de um feixe com carga espacial maior  $\zeta = 1,0$  e com mesmo valor de descasamento inicial  $\mu = 1,6$ .

Ressaltamos que essa discrepância não é resultado de um tempo insuficiente de integração da dinâmica das partículas, mas uma propriedade intrínseca da distribuição quase-estacionária em feixes de partículas carregadas. Não obstante, os resultados são contundentes em ambas as situações, especialmente para região do halo. Como medimos a qualidade do feixe através do crescimento da emitância, e este depende fortemente das partículas que evaporam para o halo, esperamos que o nosso modelo seja eficaz para calcular essa quantidade.

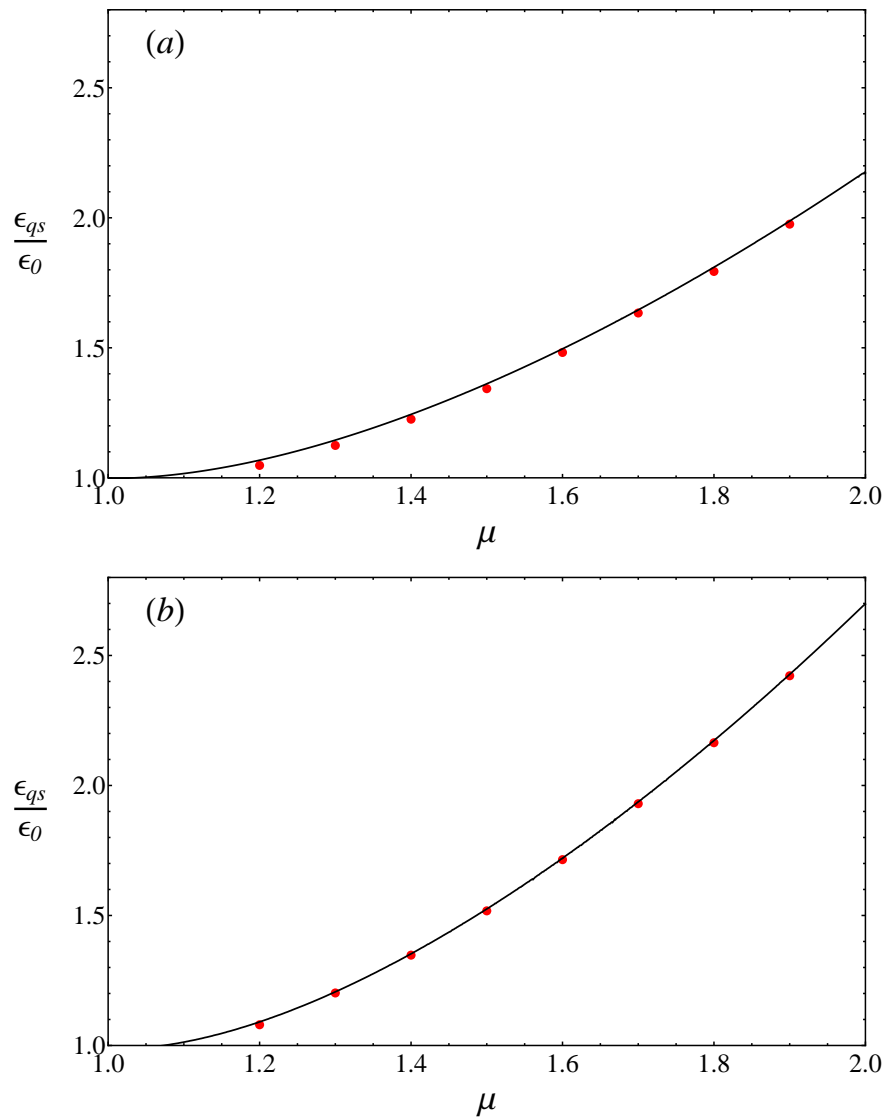
A emitância inicial  $\varepsilon_0$  pode ser obtida utilizando a Eq. (2.2.4) com médias  $\langle v^2 \rangle_0$  e  $\langle r^2 \rangle_0$

calculados nas Eqs. (2.4.8b) e (2.4.8c), respectivamente, lembrando que  $\langle \dot{r} \rangle_0 = 0$ . Assim,

$$\epsilon_0 = r_m v_m. \quad (2.5.2)$$

Para o cálculo da emitância no estado quase-estacionário  $\epsilon_{qs}$ , fazemos o mesmo procedimento, porém usando  $\langle v^2 \rangle_{qs}$  e  $\langle r^2 \rangle_{qs}$  calculados nas Eqs. (2.4.16) e (2.4.17), respectivamente, notando que  $\langle \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \rangle \propto dr_b/ds$ , como visto na Eq. (2.2.3a), e a derivada do envelope é nula para um feixe estacionário.

A Fig. 2.9 mostra o crescimento da emitância  $\epsilon_{qs}/\epsilon_0$  como função do descasamento inicial  $\mu$ . A curva sólida mostra a previsão do nosso modelo, enquanto os pontos representam o valor estacionário da emitância na simulação. Novamente analisamos dois casos  $\zeta = 0,1$ , na Fig. 2.9(a), e  $\zeta = 1,0$ , na (b). Notamos uma excelente concordância entre a simulação de

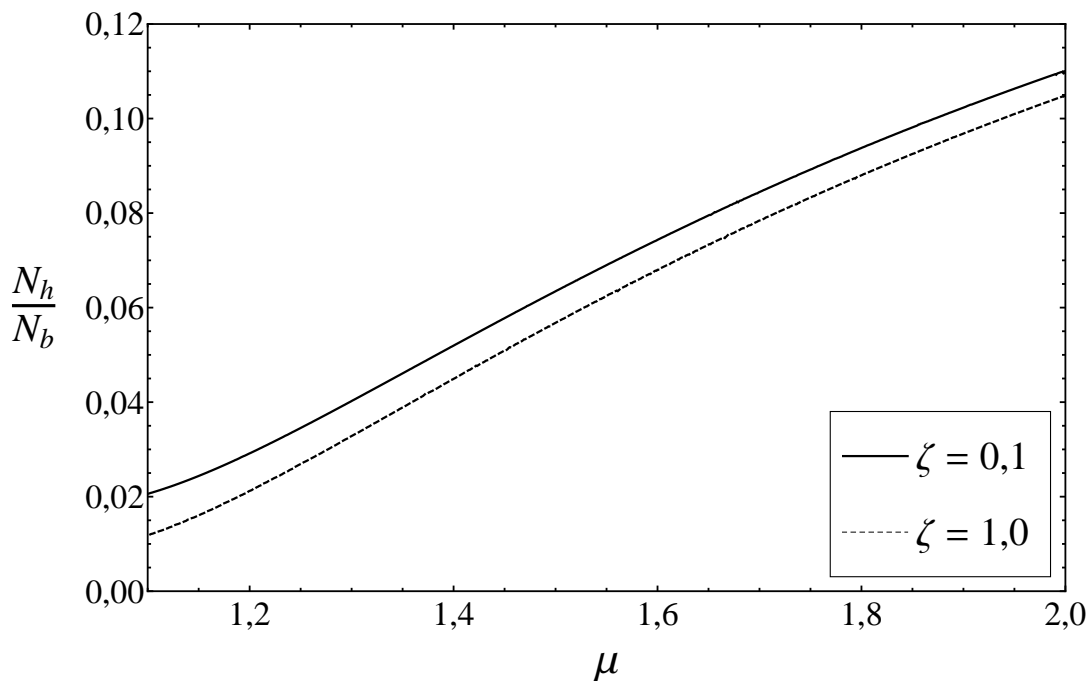


**Fig. 2.9:** Crescimento da emitância em função do descasamento. Em (a) temos  $\zeta = 0,1$  e em (b)  $\zeta = 1,0$ . A curva sólida é o valor previsto do modelo, enquanto os símbolos são o resultado da simulação de N-partículas.

N-partículas e o modelo. Como citado anteriormente, o crescimento da emitância depende predominantemente das partículas que evaporam para o halo, portanto, esse resultado não é nenhuma surpresa quando observamos que a porção do halo na Fig. 2.8 concorda muito bem com o modelo.

Outra quantidade essencial para medir a qualidade do feixe é o número de partículas que evaporam para o halo. Em geral, definir precisamente o halo não é trivial [47], especialmente na análise da simulação em que ainda não há um critério claro para separar partículas do núcleo e do halo. Entretanto, nosso modelo para distribuição quase-estacionária da Eq.(2.4.1), diferencia claramente as partículas do núcleo (as que têm  $\varepsilon \leq \varepsilon_F$ ) e as do halo ( $\varepsilon_F < \varepsilon \leq \varepsilon_h$ ). Podemos, então, calcular a fração das partículas que evaporam para o halo de acordo com nosso modelo como

$$\frac{N_h}{N_b} = \eta_0 \chi \int \Theta(\varepsilon_h - \varepsilon) \Theta(\varepsilon - \varepsilon_F) d^3 r d^3 v. \quad (2.5.3)$$



**Fig. 2.10:** Fração de partículas que evaporam para halo em função do descasamento. Analisamos dois casos de  $\zeta$  como está indicado na figura.

A Fig. 2.10 mostra a fração de partículas que evapora para o halo em função do descasamento inicial  $\mu$  de acordo com nossa teoria. Continuamos analisando dois casos,  $\zeta = 0,1$  (linha sólida) e  $\zeta = 1,0$  (linha pontilhada). Como mencionado anteriormente, não há um critério para determinar quais são as partículas do halo na simulação, portanto não é feita nenhuma comparação. Como esperado, o número de partículas que evapora para o halo aumenta com o descasamento, já que a oscilação do envelope é maior, então, o feixe tem mais energia disponível para enviar partículas para o halo.

Um fato menos óbvio é que o número de partículas que evaporam para o halo é maior quando a interação entre as partículas é menor. Isso também acontece num feixe contínuo

[22]. Ainda assim, a carga total que evapora para o halo, dada por  $\zeta N_h/N_b$ , é a maior para o feixe mais intenso.

## Capítulo 3

# Estabilidade do modo de oscilação simétrico de um feixe esférico

No Cap. 2, investigamos a relaxação de um feixe esférico para o estado quase-estacionário. Sabemos, entretanto, sobre a dificuldade experimental de lançar um feixe perfeitamente simétrico. Supondo que o aparato experimental é planejado para criar um feixe esférico, em geral, ainda teremos uma pequena anisotropia. Nesse caso, há duas possibilidades: se o modo simétrico de oscilação for estável, o feixe vai tender a ficar aproximadamente esférico; não obstante, se o modo for instável, essa pequena anisotropia acopla a dinâmica dos graus de liberdade, fazendo o feixe crescer numa direção em detrimento de outras. No último caso, fica claro que há uma quebra na simetria.

Esse argumento mostra a importância de determinar a estabilidade desse modo em função dos parâmetros do sistema. Em feixes contínuos, foi mostrado que a quebra de simetria entre os graus de liberdade transversais à propagação do feixe pode ocorrer para descasamentos da ordem de 100%, ou seja,  $\mu = 2$  [19]. Apesar de grande, esse é um valor realista em algumas aplicações [48].

Neste capítulo, focaremos em analisar a estabilidade do modo de oscilação simétrico devido a uma pequena anisotropia entre a distribuição axial e azimutal de partículas. O resultados mostrados aqui foram publicados na Ref. [49].

### 3.1 Equação do envelope

Na equação do envelope para um feixe esférico, deduzida na Sec. 2.2, todos os graus de liberdade estão vinculados, e a oscilação será sempre simétrica. Para analisar a possibilidade de quebra de simetria, temos que deduzir novas equações para o envelope. Supomos que as partículas estão distribuídas com densidade dada por

$$n_b(\rho, z) = \frac{N_b}{\frac{4}{3}\pi\rho_m^2 z_m} \Theta\left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_m^2} - \frac{z^2}{z_m^2}\right), \quad (3.1.1)$$

onde  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  e  $\rho_m$  e  $z_m$  são os maiores valores de raio transversal e da posição axial em que as partículas estão distribuídas, respectivamente. O objetivo neste capítulo é que os valores de  $\rho_m$  e de  $z_m$  sejam similares, mas vamos deixá-los genéricos por enquanto.

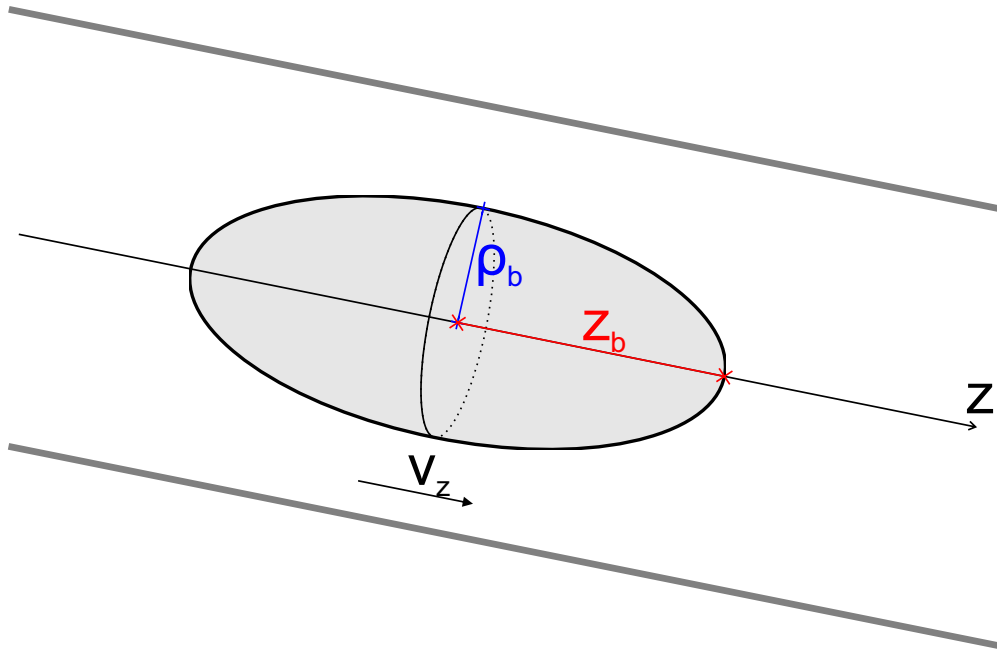
Assim como na Sec. 2.2, definimos o envelope de tal forma que o envelope do feixe coincida com as partículas mais externas do feixe para a distribuição uniforme da Eq. (3.1.1). Isso

resulta em

$$\rho_b = \sqrt{\frac{5}{2} \langle \rho^2 \rangle}, \quad (3.1.2a)$$

$$z_b = \sqrt{5 \langle z^2 \rangle}, \quad (3.1.2b)$$

para o envelope transversal e axial, respectivamente. A Fig. 3.1 mostra uma representação de um feixe elipsoidal e dos envelopes  $\rho_b$  e  $z_b$ .



**Fig. 3.1:** Representação do feixe elipsoidal no referencial do laboratório. O envelope do feixe é definido de forma que representa o tamanho do feixe para uma distribuição uniforme de partículas.

As equações que regem o movimento de uma partícula do feixe, na direção transversal e axial, respectivamente são

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{ds^2} = -\kappa_\rho \boldsymbol{\rho} - \nabla_\perp \psi, \quad (3.1.3a)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\kappa_z z - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3.1.3b)$$

onde escolhemos deixar  $\kappa_\rho$  e  $\kappa_z$  genéricos durante a dedução.

A partir daqui, a dedução é bastante similar à feita na Sec. 2.2. As duas primeiras derivadas da Eq. (3.1.2a) são

$$\dot{\rho}_b = \frac{5}{2\rho_b} \langle \boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \rangle, \quad (3.1.4a)$$

$$\ddot{\rho}_b = \frac{\epsilon_\rho^2}{\rho_b^3} + \frac{5}{2\rho_b} \langle \boldsymbol{\rho} \cdot \ddot{\boldsymbol{\rho}} \rangle, \quad (3.1.4b)$$

onde

$$\epsilon_\rho = \frac{5}{2} [\langle \rho^2 \rangle \langle \dot{\rho}^2 \rangle - \langle \rho \cdot \dot{\rho} \rangle^2]^{1/2}, \quad (3.1.5)$$

é a emitância transversal.

Utilizando a Eq. (3.1.3a), podemos calcular a média  $\langle \rho \cdot \ddot{\rho} \rangle$ , que aparece na Eq. (3.1.4b), como

$$\langle \rho \cdot \ddot{\rho} \rangle = -\frac{2}{5} \kappa_\rho \rho_b^2 - \left\langle \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right\rangle. \quad (3.1.6)$$

O cálculo do potencial  $\psi$  é muito mais complicado e extenso que o feito na Sec. 2.2 para um feixe esférico. O leitor interessado pode consultar o apêndice B. Neste ponto, utilizaremos o resultado obtido na Eq. (B.36) para calcular a média

$$\left\langle \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right\rangle = \frac{1}{N_b} \int \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} n_b(\rho, z) d^3r = -\frac{3K}{2} \left[ \frac{\arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} - \frac{z_b}{\rho_b^2(\rho_b^2 - z_b^2)} \right] \frac{2}{5} \rho_b^2. \quad (3.1.7)$$

Substituindo as Eqs. (3.1.6) e (3.1.7) na Eq. (3.1.4b), obtemos a equação do envelope transversal

$$\ddot{\rho}_b = -\kappa_\rho \rho_b + \frac{\epsilon_\rho^2}{\rho_b^3} + \frac{3K}{2} \left[ \frac{\rho_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} - \frac{z_b}{\rho_b(\rho_b^2 - z_b^2)} \right]. \quad (3.1.8)$$

De forma similar, as duas primeiras derivadas da Eq. (3.1.2b) são

$$\dot{z}_b = \frac{5}{z_b} \langle z \dot{z} \rangle, \quad (3.1.9a)$$

$$\ddot{z}_b = \frac{\epsilon_z^2}{z_b^3} + \frac{5}{z_b} \langle z \ddot{z} \rangle, \quad (3.1.9b)$$

onde

$$\epsilon_z = 5 [\langle z^2 \rangle \langle \dot{z}^2 \rangle - \langle z \dot{z} \rangle^2]^{1/2}, \quad (3.1.10)$$

é a emitância longitudinal.

Utilizando as Eqs. (3.1.1) e (B.38), podemos calcular a média  $\langle z \ddot{z} \rangle$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle z \ddot{z} \rangle &= -\frac{1}{5} \kappa_z z_b^2 - \left\langle z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle = -\frac{1}{5} \kappa_z z_b^2 - \frac{1}{N_b} \int z \frac{\partial \psi}{\partial z} n_b(\rho, z) d^3r = \\ &= -\frac{1}{5} \kappa_z z_b^2 + 3K \left[ \frac{1}{z_b(\rho_b^2 - z_b^2)} - \frac{\arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} \right] \frac{1}{5} z_b^2. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Substituindo o resultado da Eq. (3.1.11) na Eq. (3.1.9b), obtemos

$$\ddot{z}_b = -\kappa_z z_b + \frac{\epsilon_z^2}{z_b^3} + 3K \left[ \frac{1}{(\rho_b^2 - z_b^2)} - \frac{z_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} \right], \quad (3.1.12)$$

que é a equação do envelope longitudinal.



Assim como feito na Sec. 2.2, podemos reescalar  $\rho_b$ ,  $z_b$  e  $s$  de forma a diminuir o número de parâmetros independentes no modelo. Escolhemos  $\rho_b \rightarrow (\epsilon_\rho^2/\kappa_\rho)^{1/4}\rho_b$ ,  $z_b \rightarrow (\epsilon_\rho^2/\kappa_\rho)^{1/4}z_b$  e  $s \rightarrow \kappa_\rho^{-1/2}s$ . Dessa forma, as Eqs. (3.1.8) e (3.1.12) ficam, respectivamente,

$$\ddot{\rho}_b = -\rho_b + \frac{1}{\rho_b^3} + \frac{3\zeta}{2} \left[ \frac{\rho_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} - \frac{z_b}{\rho_b(\rho_b^2 - z_b^2)} \right], \quad (3.1.13a)$$

$$\ddot{z}_b = -\alpha z_b + \frac{\beta^2}{z_b^3} + 3\zeta \left[ \frac{1}{(\rho_b^2 - z_b^2)} - \frac{z_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} \right], \quad (3.1.13b)$$

onde  $\alpha \equiv \kappa_z/\kappa_\rho$  é a razão entre o coeficiente das forças focalizadoras longitudinal e transversal,  $\beta \equiv \epsilon_z/\epsilon_\rho$  é a razão entre a emitância longitudinal e transversal, e  $\zeta \equiv K/(\kappa_\rho\epsilon_\rho^6)^{1/4}$  é um parâmetro que mede a intensidade do feixe.

Integrando as equações de Hamilton, podemos descobrir qual hamiltoniano dá origem a essas equações. Isso resulta em

$$H(p_{\rho_b}, p_{z_b}, \rho_b, z_b) = \frac{p_{\rho_b}^2}{4} + \frac{p_{z_b}^2}{2} + \rho_b^2 + \alpha \frac{z_b^2}{2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{\beta^2}{2z_b^2} + 3\zeta \frac{\arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{\sqrt{\rho_b^2 - z_b^2}}, \quad (3.1.14)$$

onde  $p_{\rho_b}$  e  $p_{z_b}$  são os momentos conjugados a  $\rho_b$  e a  $z_b$ , respectivamente.

Por fim, podemos descobrir os semi-eixos principais do elipsoide casado  $\rho_{bm}$  e  $z_{bm}$ , ou seja, o elipsoide em que a força restauradora é igual à força repulsiva, colocando  $\ddot{\rho}_b = 0$  e  $\ddot{z}_b = 0$  quando  $\rho_b = \rho_{bm}$  e  $z_b = z_{bm}$  na Eqs. (3.1.13), o que resulta em

$$\rho_{bm}^4 - \frac{3\zeta}{2}\rho_{bm}^3 \left[ \frac{\rho_{bm} \arccos\left(\frac{z_{bm}}{\rho_{bm}}\right)}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)^{3/2}} - \frac{z_{bm}}{\rho_{bm}(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)} \right] - 1 = 0, \quad (3.1.15a)$$

$$\alpha z_{bm}^4 - 3\zeta z_{bm}^3 \left[ \frac{1}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)} - \frac{z_{bm} \arccos\left(\frac{z_{bm}}{\rho_{bm}}\right)}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)^{3/2}} \right] - \beta^2 = 0. \quad (3.1.15b)$$

Por ser um conjunto de equações acopladas e transcendentais, é necessário resolvê-las numericamente.

## 3.2 Análise da estabilidade

Para analisar a estabilidade do modo simétrico, começamos construindo mapas de Poincaré para dinâmica do envelope dada pelas Eqs. (3.1.13).

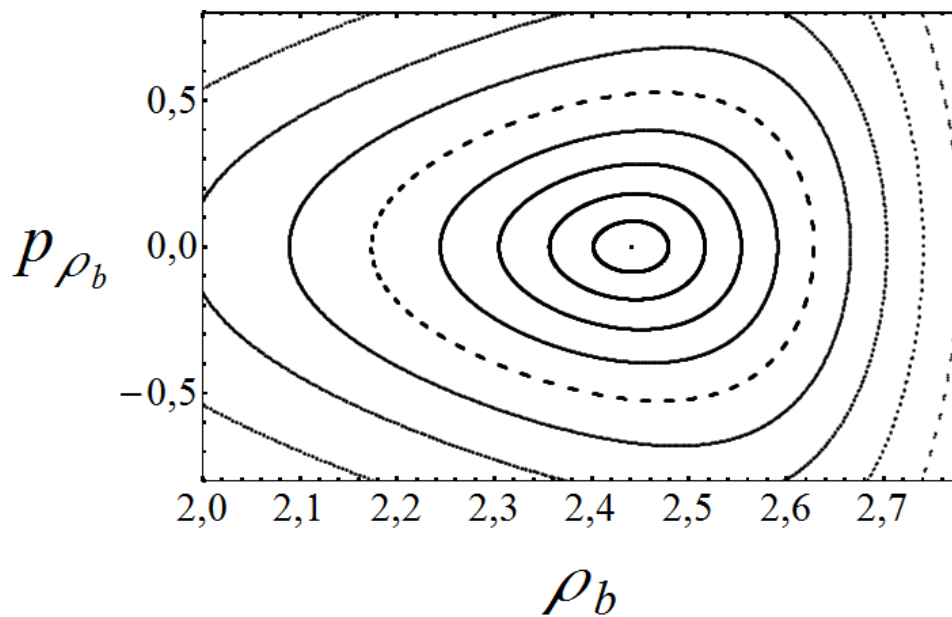
Como o hamiltoniano da Eq. (3.1.14) é independente do tempo, ele é uma constante de movimento. A princípio, podemos reescrever  $z_b = (p_{\rho_b}, p_{z_b}, \rho_b, H)$ . Notamos que o movimento no espaço de fases 4D está restrito a uma hipersuperfície de  $H$  constante. Portanto, dado um valor de  $H$ , apenas três das variáveis canônicas são necessárias para descrever o sistema, já que podemos calcular a quarta através dessa relação.

A seção de Poincaré é construída da seguinte forma [45]:

- (a) Como queremos trabalhar com feixe quase esférico, colocamos  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ . A pequena anisotropia considerada vem da distribuição de partículas. Os parâmetros livres são  $\zeta$  (intensidade do feixe) e  $\mu$  (descasamento inicial).
- (b) Calculamos  $H$  da Eq. (3.1.14) como  $H_0 = H(0,0,\mu\rho_{bm},\mu z_{bm})$ .
- (c) Para essas condições iniciais, evoluímos a dinâmica do envelope e colocamos num gráfico valores de  $\rho_b \times p_{\rho_b}$  toda vez que  $p_{z_b} = 0$  com  $\dot{p}_{z_b} < 0$
- (d) Escolhemos novas condições iniciais  $p_{\rho_b}(0) = 0$ ,  $p_{z_b}(0) = 0$ ,  $\rho_b(0) = \mu_\rho \rho_{bm}$ ,  $z_b(0) = \mu_z z_{bm}$ . Entretanto, para pertencer ao mesmo mapa de Poincaré, os valores de  $\mu_\rho$  e  $\mu_z$  devem ser tais que  $H(0,0,\mu_\rho \rho_{bm},\mu_z z_{bm}) = H_0$ .
- (e) Para essas novas condições iniciais, retornamos ao item (c). Fazemos isso quantas vezes forem necessárias para observar padrões entre as dinâmicas transversal e longitudinal do envelope.

Na Fig. 3.2, mostramos um mapa de Poincaré para parâmetros  $\zeta = 1$  e  $\mu = 2$ . Notamos um ponto fixo em  $\rho_b = 2,44$  e  $p_{\rho_b} = 0$ . Lembramos que esse ponto fixo do mapa não é um ponto fixo da dinâmica. O argumento é similar ao feito na Sec. 2.3: a condição para colocar um ponto no gráfico é, basicamente, a cada período de oscilação do envelope longitudinal, logo, esse ponto indica uma condição de ressonância.

De fato, além de ser uma ressonância, o real significado desse ponto é que ele é a condição em que  $\mu_\rho = \mu_z = \mu$ . Portanto, o feixe é exatamente esférico. É possível ver na Fig. 3.2 que esse ponto é estável (também conhecido como elíptico na linguagem de sistemas dinâmicos). A ideia agora é tentar descobrir se existem parâmetros  $\zeta$  e  $\mu$  tais que ele fique instável (ou hiperbólico).



**Fig. 3.2:** Seção de Poincaré obtida através das Eqs. (3.1.13). Os parâmetros utilizados são  $\mu = 2$  e  $\zeta = 1$ , e a condição para colocar valores de  $\rho_b \times p_{\rho_b}$  no gráfico é  $p_{z_b} = 0$  com  $\dot{p}_{z_b} < 0$ .

O cálculo da estabilidade do ponto fixo tem duas partes. Na primeira, queremos descobrir a localização do ponto fixo que representa a ressonância no mapa. A segunda, visto que sabemos onde se encontra o ponto fixo, é fazer uma análise de estabilidade linear ao redor desse ponto.

Supondo que num tempo  $s = s_p$ ,  $p_{z_b}(s = s_p) = 0$  e  $\dot{p}_{z_b}(s = s_p) < 0$ . Portanto, o ponto

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} \rho_b \\ p_{\rho_b} \end{pmatrix}_{s=s_p} \quad (3.2.1)$$

está localizado no mapa de Poincaré. Seja  $\vec{P}$  o mapeamento que leva um ponto  $\vec{X}_n$  do mapa de Poincaré para o próximo ponto, isto é, o próximo valor de  $s = s_p + \delta s$  em que  $p_{z_b}(s = s_p + \delta s) = 0$  e  $\dot{p}_{z_b}(s = s_p + \delta s) < 0$ . Então

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{P}(\vec{X}_n). \quad (3.2.2)$$

Se  $\vec{X}^*$  é um ponto fixo do mapa de Poincaré, a aplicação de  $\vec{P}$  sobre esse ponto deve ser ele próprio, ou seja,

$$\vec{X}^* = \vec{P}(\vec{X}^*). \quad (3.2.3)$$

Definindo

$$R(\vec{X}) = \vec{P}(\vec{X}) - \vec{X}, \quad (3.2.4)$$

o problema de encontrar  $\vec{X}^*$  é equivalente a calcular as raízes da equação  $R(\vec{X}^*) = 0$ . Podemos, então, utilizar métodos numéricos para encontrar o valor de  $\vec{X}^*$ .

Para a análise da estabilidade, a ideia é expandir em torno desse ponto o mapeamento  $\vec{P}(\vec{X})$ , mantendo apenas termos lineares em  $\vec{X}$ . Ou seja,

$$\vec{X}_{n+1} = \overleftarrow{J} \cdot (\vec{X}_n - \vec{X}^*) + \vec{X}^*, \quad (3.2.5)$$

onde  $\overleftarrow{J}$  é a matriz Jacobiana  $\overleftarrow{J} = d\vec{P}/d\vec{X}_n$ . Definindo  $\vec{u}_n = \vec{X}_n - \vec{X}^*$  e procurando soluções do tipo  $\vec{u}_n = \lambda^n \vec{u}$ , obtemos

$$\overleftarrow{J} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u}. \quad (3.2.6)$$

Portanto, a solução do mapeamento linear está contida no problema de autovalores da Eq. (3.2.6). Como  $\vec{X}_n$  é um vetor de dimensão dois, teremos dois autovalores e dois autovetores como solução da Eq. (3.2.6). A solução geral é, portanto, a combinação linear

$$\vec{u}_n = c_+ \lambda_+^n \vec{u}_+ + c_- \lambda_-^n \vec{u}_-, \quad (3.2.7)$$

onde  $c_+$  e  $c_-$  são constantes. Notamos que, se a parte real de um dos autovalores  $|\text{Re}\{\lambda\}| > 1$ ,  $\vec{u}_n$  diverge, ou seja, a solução linear tende a se afastar do ponto fixo a cada iteração do mapa. Em tal caso, o ponto fixo é instável. Se todos autovalores são tais que  $|\text{Re}\{\lambda\}| < 1$ , o ponto é estável, pois, a cada iteração do mapa, a solução tende a ficar mais próxima do ponto fixo.

O cálculo dos autovalores de  $\overleftarrow{J}$  resulta em

$$\lambda_{\pm} = \Lambda \pm \sqrt{\Lambda^2 - 1}, \quad (3.2.8)$$

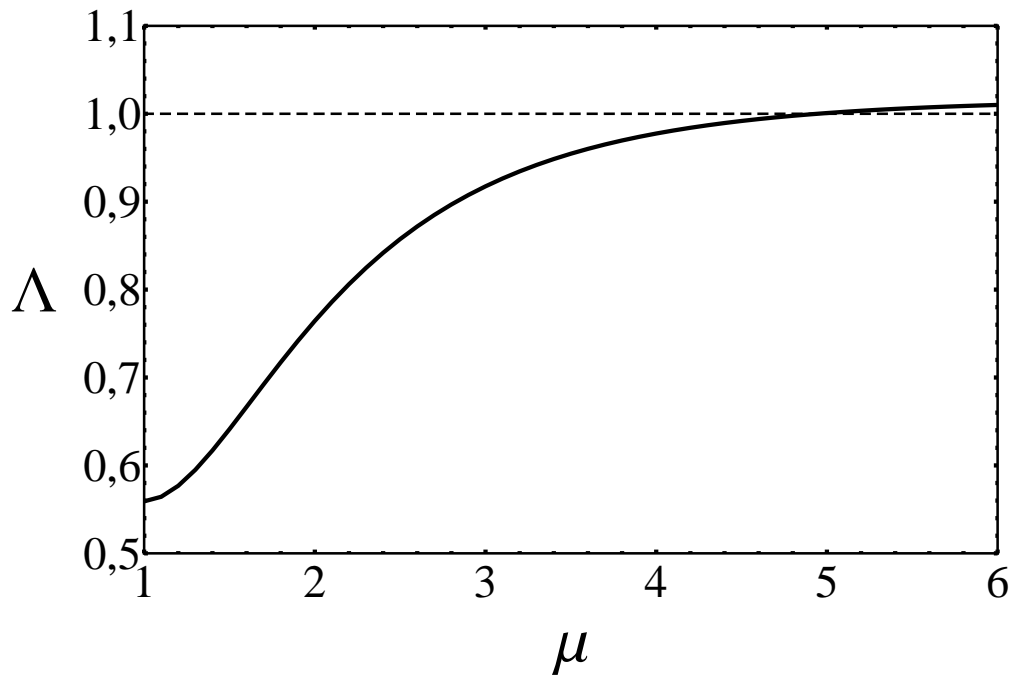
onde  $\Lambda/2 = \text{Tr}[\overleftrightarrow{J}]$  é o traço da matriz Jacobiana. Também usamos o fato de que o sistema é hamiltoniano, por conseguinte o mapa de Poincaré é simplético, e o determinante de  $\overleftrightarrow{J}$  é a unidade.

Olhando para os autovalores da Eq. (3.2.8) e levando em conta os argumentos feitos sobre a relação entre a estabilidade do ponto fixo e os valores de  $\lambda$ , constatamos que o ponto fixo é estável se  $|\Lambda| < 1$  e instável se  $|\Lambda| > 1$ . O caso  $|\Lambda| = 1$  é a transição entre os dois regimes.

Resumindo, para determinarmos a estabilidade do ponto fixo, calculamos a matriz Jacobiana no ponto fixo e, então, calculamos seu traço. Em termos práticos, calcular de forma analítica as derivadas do mapeamento  $\vec{P}(\vec{X})$ , é a parte mais desafiadora. Por isso, desenvolvemos um método totalmente numérico para calcular a jacobiana.

Para construir a Fig. 3.3, fixamos  $\zeta = 1$ , variamos o descasamento  $1 \leq \mu \leq 6$  e calculamos os valores de  $\Lambda$  para cada valor de  $\mu$ . Para  $\mu = 2$ , que é o caso mostrado na Fig. 3.2, a análise de estabilidade linear mostra que o ponto é, de fato, estável.

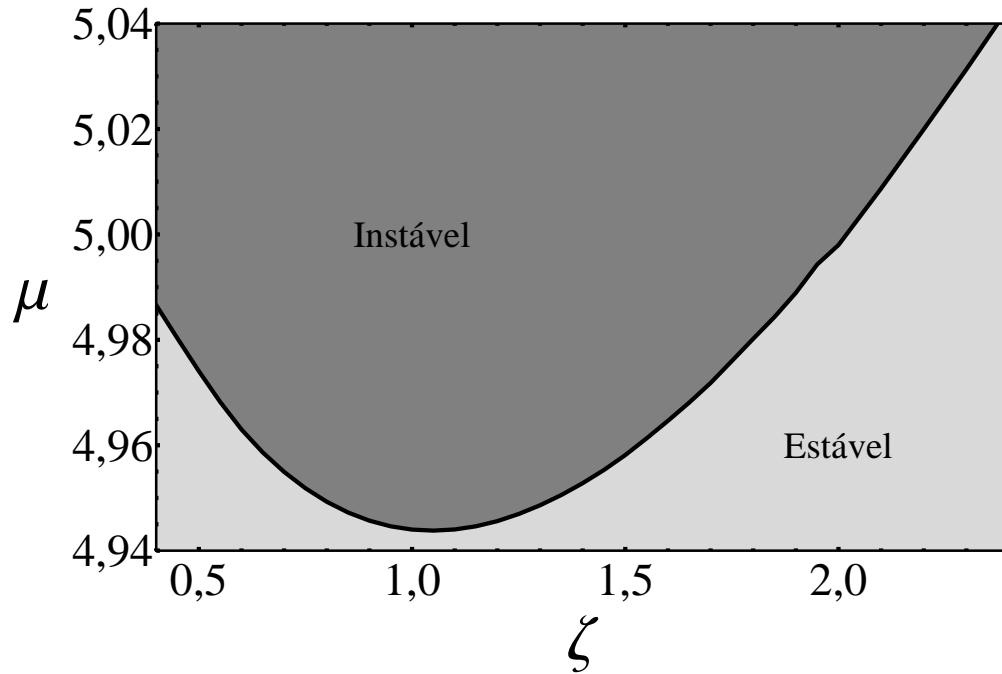
Aumentando o descasamento, observamos um aumento lento de  $\Lambda$ . Entretanto, para  $\mu \approx 4,95$ , a curva finalmente cruza a linha pontilhada, que representa a condição para o ponto fixo ficar instável.



**Fig. 3.3:** Índice de instabilidade  $\Lambda$  como função do descasamento para  $\zeta = 1$ . A linha pontilhada indica a transição de um regime estável ( $\Lambda < 1$ ) para instável ( $\Lambda > 1$ ).

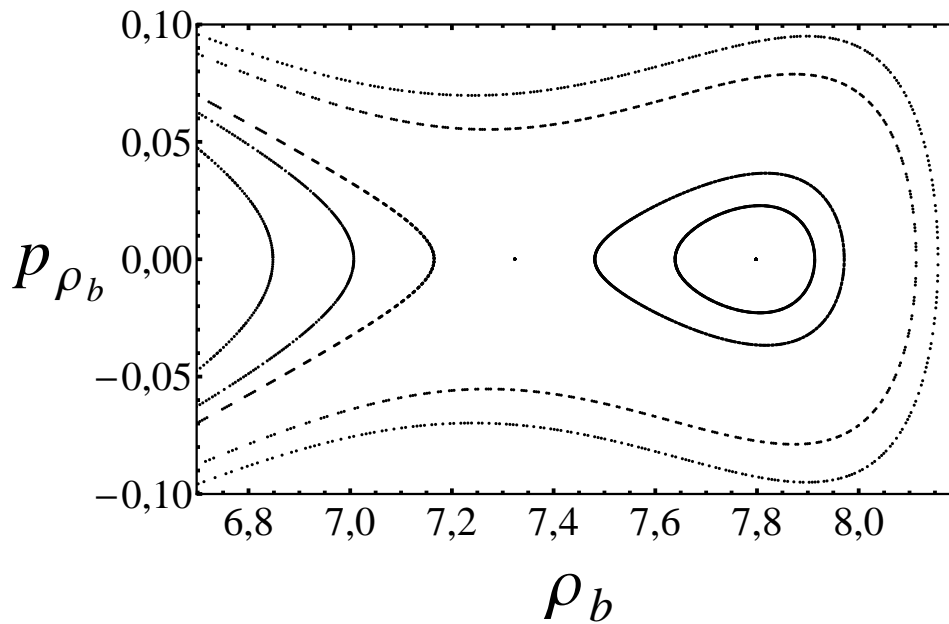
Esse valor representa um descasamento da ordem de 400%, o que quase nunca será observado num experimento real, já que feixes são, usualmente, gerados de forma a estarem o mais próximo possível da condição casada.

Na Fig. 3.4, mostramos o espaço de parâmetros  $\zeta \times \mu$ . As áreas em cinza claro representam um conjunto de parâmetros em que o ponto fixo é estável, enquanto que as em cinza escuro são regiões de instabilidade. Notamos a presença de um mínimo no gráfico. Isso está de



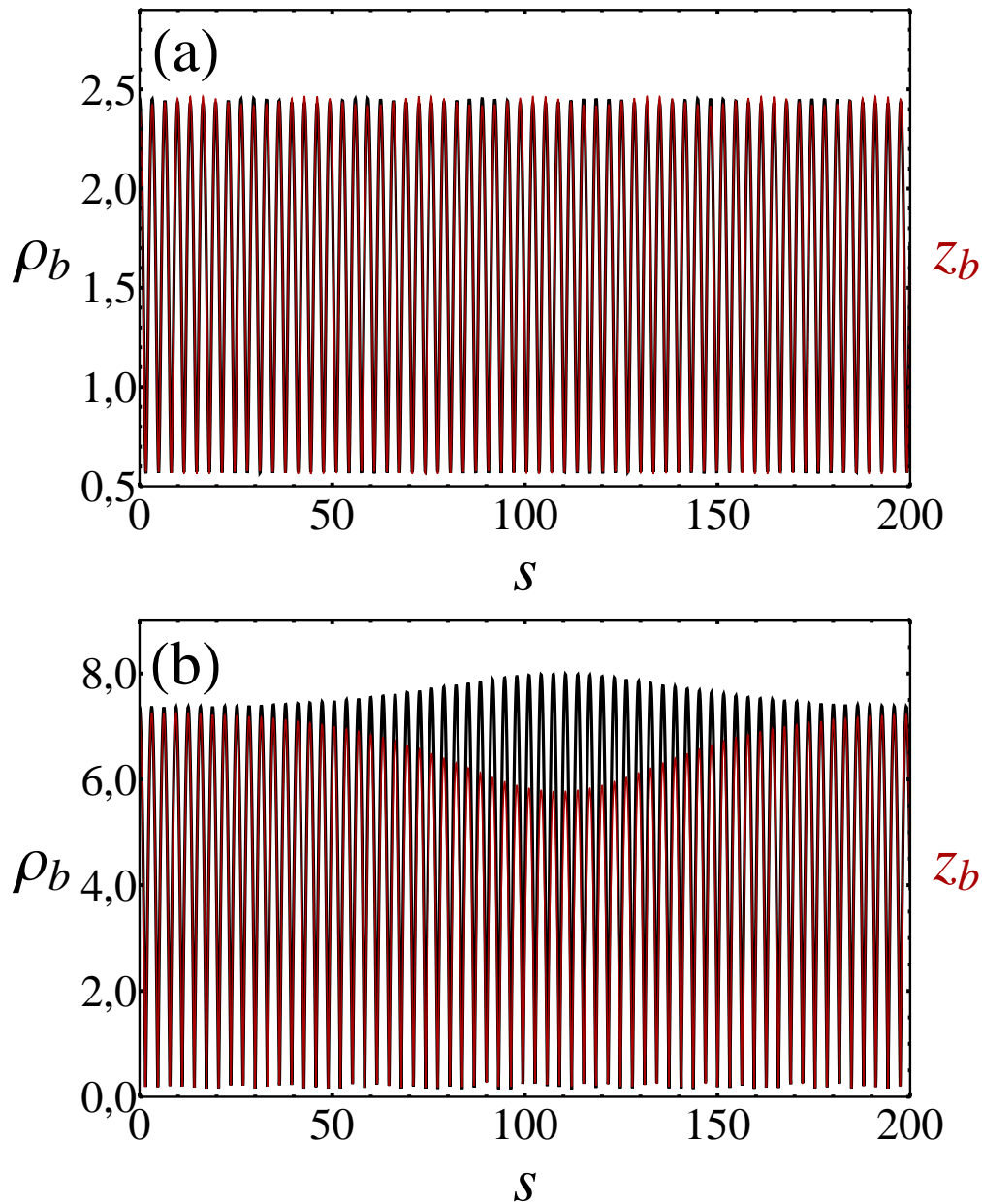
**Fig. 3.4:** Espaço de parâmetros  $\zeta \times \mu$ . As partes em cinza claro indicam que o ponto fixo é estável, enquanto, para parâmetros na região em cinza escuro, o ponto é instável.

acordo com o argumento da Ref. [19], que diz que tanto nos limites  $\zeta \rightarrow 0$ , quanto  $\zeta \rightarrow \infty$ , a dinâmica entre os graus de liberdade desacopla, portanto, o modo simétrico é estável.



**Fig. 3.5:** Seção de Poincaré obtida através das Eqs. (3.1.13). Os parâmetros utilizados são  $\mu = 6$  e  $\zeta = 1$ . Notamos que condições iniciais próximas ao ponto fixo centrado em  $\rho_b \approx 7,32$  e  $p_{\rho_b} = 0$  tendem a se afastar desse ponto.

Notamos que, de fato, os valores mínimos de descasamento para qual há instabilidade ocorre é da ordem de  $\mu \approx 5$ . Isso ocorre justamente para  $\zeta \approx 1,05$ , valor próximo ao usado para construir a Fig. 3.3.



**Fig. 3.6:** Soluções das equações de envelope para um caso estável e instável nos painéis (a) e (b), respectivamente. Notamos que, em (a) o feixe, que começou com uma pequena assimetria, permanece praticamente esférico. Já no caso (b), a instabilidade acopla a dinâmica dos envelopes e há quebra de simetria.

Por complementaridade, mostramos, na Fig. 3.5, o mapa de Poincaré para  $\zeta = 1$  e  $\mu = 6$ , quando o ponto fixo, localizado em  $\rho_b \approx 7,32$  e  $p_{\rho_b} = 0$ , é instável. Notamos que condições iniciais próximas ao ponto fixo se afastam dele, comportamento bem distinto ao

da Fig. 3.2, para um caso estável. Ressaltamos que esse é o ponto de interesse para analisar a estabilidade da oscilação simétrica. O outro ponto fixo presente na Fig. 3.5, centrado em  $\rho_b \approx 7,8$  e  $p_{\rho_b} = 0$ , é apenas uma condição em que  $\rho_b$  e  $z_b$  têm mesma frequência.

Também mostramos na Fig. 3.6 soluções das Eqs. (3.1.13), as equações do envelope, para os casos das Figs. 3.2 e 3.5. Na parte (a), para  $\mu = 2$  e  $\zeta = 1$ , começamos com um feixe levemente anisotrópico, isto é,  $\mu_\rho \approx 2,01$  e  $\mu_z \approx 1,98$ . Lembramos que calculamos  $\mu_\rho$  e  $\mu_z$  de forma que  $H(0,0,\mu_\rho\rho_{bm},\mu_z z_{bm}) = H(0,0,\mu\rho_{bm},\mu z_{bm})$ . Observamos que é praticamente impossível distinguir as curvas preta e vermelha, que representam  $\rho_b$  e  $z_b$ , respectivamente. Portanto, o feixe permanece praticamente esférico nesse caso.

Na parte (b), para  $\mu = 6$  e  $\zeta = 1$ , e condições iniciais  $\mu_\rho \approx 6,03$  e  $\mu_z \approx 5,94$ , percebemos um forte acoplamento entre as dinâmicas, causado pela instabilidade. Olhando a figura, notamos que os graus de liberdade do envelope trocam energia, o que faz a amplitude de  $\rho_b$  crescer à custa de  $z_b$ . Concluímos, então, que há quebra de simetria nessa circunstância.

Como conclusão para esse capítulo, ressaltamos que a análise feita para a estabilidade do modo de oscilação simétrico mostrou que, no regime da vasta maioria das aplicações, esse modo é estável. Isso reforça que, o nosso modelo para descrição do estado quase-estacionário, apresentado no Cap. 2, pode ser usado para descrever, com ótima precisão, feixes aproximadamente esféricos.

## Capítulo 4

# Estabilidade não-linear de um feixe elipsoidal

Como argumentado na Sec. 1.4, a origem das forças que focalizam o feixe é diferente na direção transversal (campo magnético) e na longitudinal (onda  $RF$ ). Na Sec. 3.1, deduzimos as equações do envelope para um feixe com simetria elipsoidal, que são

$$\ddot{\rho}_b = -\rho_b + \frac{1}{\rho_b^3} + \frac{3\zeta}{2} \left[ \frac{\rho_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} - \frac{z_b}{\rho_b(\rho_b^2 - z_b^2)} \right], \quad (4.1a)$$

$$\ddot{z}_b = -\alpha z_b + \frac{\beta^2}{z_b^3} + 3\zeta \left[ \frac{1}{(\rho_b^2 - z_b^2)} - \frac{z_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} \right]. \quad (4.1b)$$

No caso do Cap. 3, consideramos  $\alpha = 1$ . Na análise a seguir, não imporemos restrições sobre  $\alpha = \kappa_z/\kappa_\rho$ , que é a razão entre o coeficiente das forças focalizadoras. Entretanto, continuaremos usando  $\beta = 1$ , ou seja, que as emitância transversal e longitudinal são iguais. Ressaltamos que, a análise realizada neste capítulo pode ser feita para qualquer valor de  $\beta$ , apenas escolhemos um valor para diminuir o número de parâmetros.

O resultados mostrados nesse capítulo também foram publicados na Ref. [49].

### 4.1 Análise da estabilidade linear

Começamos a análise das Eqs. (4.1) fazendo o cálculo de estabilidade linear. A condição de equilíbrio para essa simetria é obtida colocando  $\ddot{\rho}_b = 0$  e  $\ddot{z}_b = 0$  quando  $\rho_b = \rho_{bm}$  e  $z_b = z_{bm}$ .

$$\rho_{bm}^4 - \frac{3\zeta}{2} \rho_{bm}^3 \left[ \frac{\rho_{bm} \arccos\left(\frac{z_{bm}}{\rho_{bm}}\right)}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)^{3/2}} - \frac{z_{bm}}{\rho_{bm}(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)} \right] - 1 = 0, \quad (4.1.1a)$$

$$\alpha z_{bm}^4 - 3\zeta z_{bm}^3 \left[ \frac{1}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)} - \frac{z_{bm} \arccos\left(\frac{z_{bm}}{\rho_{bm}}\right)}{(\rho_{bm}^2 - z_{bm}^2)^{3/2}} \right] - \beta^2 = 0. \quad (4.1.1b)$$

A ideia é procurar soluções em torno desse ponto fixo e determinar a sua estabilidade.



Salientamos que esse procedimento é diferente da análise feita na Sec. 3.2. Naquele caso, examinamos a estabilidade de um ponto fixo do mapa de Poincaré, que é uma condição de ressonância entre os envelopes longitudinal e transversal. Aqui, estamos, de fato, estudando a estabilidade do ponto fixo da dinâmica do envelope.

Relembramos que as Eqs. (4.1) podem ser deduzidas do hamiltoniano

$$H(p_{\rho_b}, p_{z_b}, \rho_b, z_b) = \frac{p_{\rho_b}^2}{4} + \frac{p_{z_b}^2}{2} + \rho_b^2 + \alpha \frac{z_b^2}{2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{\beta^2}{2z_b^2} + 3\zeta \frac{\arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{\sqrt{\rho_b^2 - z_b^2}}. \quad (4.1.2)$$

Sejam as variáveis canônicas em notação simplética

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \rho_b \\ z_b \\ p_{\rho_b} \\ p_{z_b} \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Podemos escrever as equações de Hamilton como

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \overleftarrow{\Omega} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{Q}}, \quad (4.1.4)$$

onde a matriz

$$\overleftarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.5)$$

O ponto fixo da dinâmica é dado por

$$\vec{Q}^* = \begin{pmatrix} \rho_{bm} \\ z_{bm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

Escrevemos, então,  $\vec{Q} = \vec{Q}^* + \vec{\Delta}$ , substituimos na Eq. (4.1.4) e expandimos em série de Taylor, mantendo apenas termos lineares em  $\vec{\Delta}$ , que é uma perturbação infinitesimal em torno do equilíbrio. Isso resulta em

$$\frac{d\vec{\Delta}}{dt} = \overleftarrow{J} \cdot \vec{\Delta}, \quad (4.1.7)$$

onde a matriz Jacobiana pode ser escrita em termos das derivadas do hamiltoniano como

$$\overleftarrow{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\rho_b} \partial \rho_b} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\rho_b} \partial z_b} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\rho_b}^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\rho_b} \partial p_{z_b}} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_{z_b} \partial \rho_b} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{z_b} \partial z_b} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{z_b} \partial p_{\rho_b}} & \frac{\partial^2 H}{\partial p_{z_b}^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_b^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_b \partial z_b} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_b \partial p_{\rho_b}} & -\frac{\partial^2 H}{\partial \rho_b \partial p_{z_b}} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial z_b \partial \rho_b} & -\frac{\partial^2 H}{\partial z_b^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial z_b \partial p_{\rho_b}} & -\frac{\partial^2 H}{\partial z_b \partial p_{z_b}} \end{pmatrix} \vec{Q} = \vec{Q}^* \quad (4.1.8)$$

Procurando soluções do tipo

$$\vec{\Delta} = \vec{P}e^{i\omega t}, \quad (4.1.9)$$

para a Eq. (4.1.7), obtemos o problema de autovalores

$$\overleftrightarrow{\mathcal{J}} \cdot \vec{P} = i\omega \vec{P}. \quad (4.1.10)$$

Assim, a relação de dispersão em função dos parâmetros do sistema,  $\omega = \omega(\alpha, \beta, \zeta)$ , são os autovalores da matriz  $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$  da Eq. (4.1.8). Essa relação de dispersão corresponde às frequências permitidas para perturbações infinitesimais em torno do ponto.

Uma análise detalhada do problema mostra que temos dois pares de autovalores de  $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$  na forma  $\omega = \pm\omega_A$  e  $\omega = \pm\omega_S$ . Além disso, os autovalores são reais. Temos duas possibilidades para a solução geral da Eq. (4.1.7). Se  $\omega_A \neq \omega_S$ ,

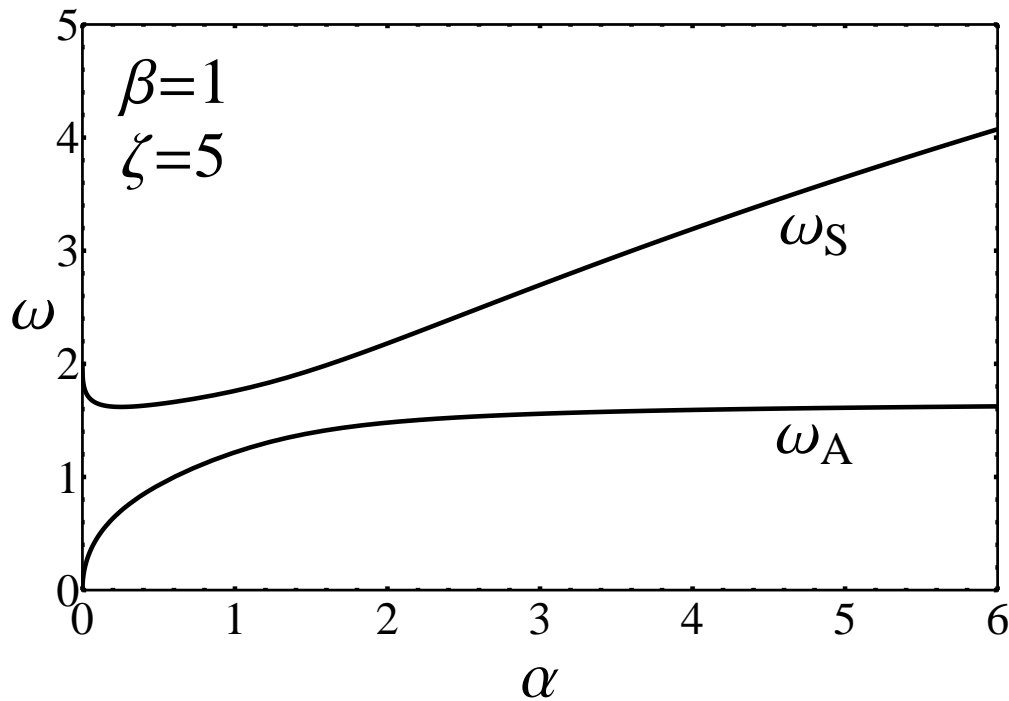
$$\vec{\Delta}(t) = c_A^+ \vec{P}_A^+ e^{i\omega_A t} + c_A^- \vec{P}_A^- e^{-i\omega_A t} + c_S^+ \vec{P}_S^+ e^{i\omega_S t} + c_S^- \vec{P}_S^- e^{-i\omega_S t}, \quad (4.1.11)$$

onde  $c_A^+$ ,  $c_A^-$ ,  $c_S^+$  e  $c_S^-$  são constantes. Como os autovalores são reais, notamos que, nesse caso, o ponto fixo é sempre estável.

Entretanto, quando  $\omega_A = \omega_S = \omega$ , a solução geral do problema é

$$\vec{\Delta}(t) = c_1 \vec{P}_1 e^{i\omega t} + c_2 \vec{P}_2 e^{-i\omega t} + c_3 \vec{P}_3 t e^{i\omega t} + c_4 \vec{P}_4 t e^{-i\omega t}, \quad (4.1.12)$$

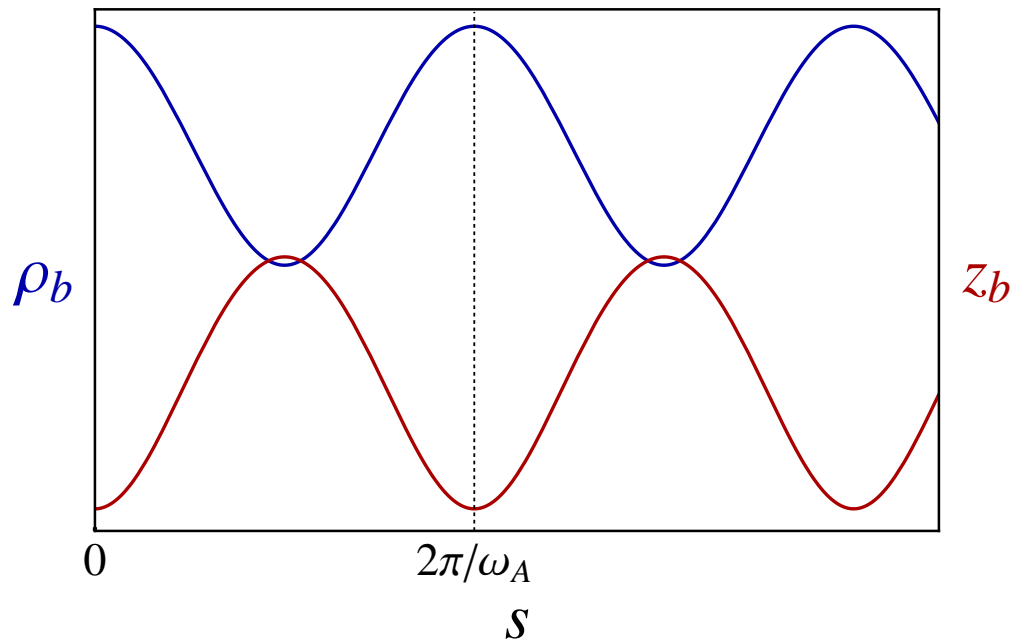
com  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  constantes, onde notamos que ela diverge com o tempo. Portanto, o ponto fixo é instável. Concluimos que a única possibilidade de instabilidade linear dá-se quando as frequências  $\omega_A$  e  $\omega_S$  são degeneradas.



**Fig. 4.1:** Relação de dispersão para o movimento linearizado em função do parâmetro  $\alpha$ . Notamos que não há degenerescência dos modos simétrico e antissimétrico; logo, o ponto fixo é linearmente estável.

Na Fig. 4.1, temos a solução da relação de dispersão para parâmetros  $\beta = 1$  e  $\zeta = 5$ , com  $\alpha$  variando. Mostramos apenas valores de  $\omega$  positivo, já que o resultado é análogo para valores negativos. Como pode ser observado, os dois ramos referentes a  $\omega_S$  e a  $\omega_A$  nunca se cruzam. Portanto, a análise de estabilidade indica que, no regime linear, o ponto fixo é sempre estável. Isso concorda com o que foi previsto na Ref. [50]. Mostramos isso para apenas um conjunto de parâmetros  $\beta$  e  $\zeta$ , entretanto, constatamos que isso é verdade para quaisquer valores de  $\alpha > 0$ , de  $\beta \geq 0$  e de  $\zeta \geq 0$ . Ressaltamos que o valor usado de  $\zeta = 5$  serve para a análise de um regime dominado pela carga espacial e facilita na comparação com a simulação feita mais adiante, já que é necessário um tempo menor para o efeito da instabilidade surgir nesse caso. Essa é a razão para escolha desse parâmetro em detrimento ao valor  $\zeta = 1$  utilizado até o momento.

Uma questão não discutida até agora é o significado dos modos  $\omega_A$  e  $\omega_S$ . Se as condições iniciais da Eq. (4.1.7) forem tais que os coeficientes  $c_S^+ = 0$  e  $c_S^- = 0$  na solução geral da Eq. (4.1.11), o resultado é uma oscilação antissimétrica (ou completamente fora de fase), como mostrado na Fig. 4.2, com período de oscilação  $T = 2\pi/\omega_A$ .



**Fig. 4.2:** Solução antissimétrica para o movimento linearizado.

No caso de as condições iniciais forem tais que os coeficientes  $c_A^+ = 0$  e  $c_A^- = 0$ , os envelopes transversal e longitudinal oscilam de forma simétrica (ou em fase), com frequência  $\omega_S$ , como mostra a Fig. 4.3. Para qualquer outra condição inicial, a solução vai ser uma combinação desses modos.

Embora a Fig. 4.1 mostre que não existe nenhuma condição direta (ou 1:1) de ressonância entre esses modos, temos duas condições de ressonância do tipo 1:2, como podemos ver na Fig. 4.4

Notamos que uma dessas condições ocorre para  $\alpha > 1$ , ou seja,  $\kappa_z > \kappa_\rho$ , enquanto a outra ocorre para  $\alpha < 1$ , ou seja,  $\kappa_z < \kappa_\rho$ . Também verificamos que isso acontece para quaisquer

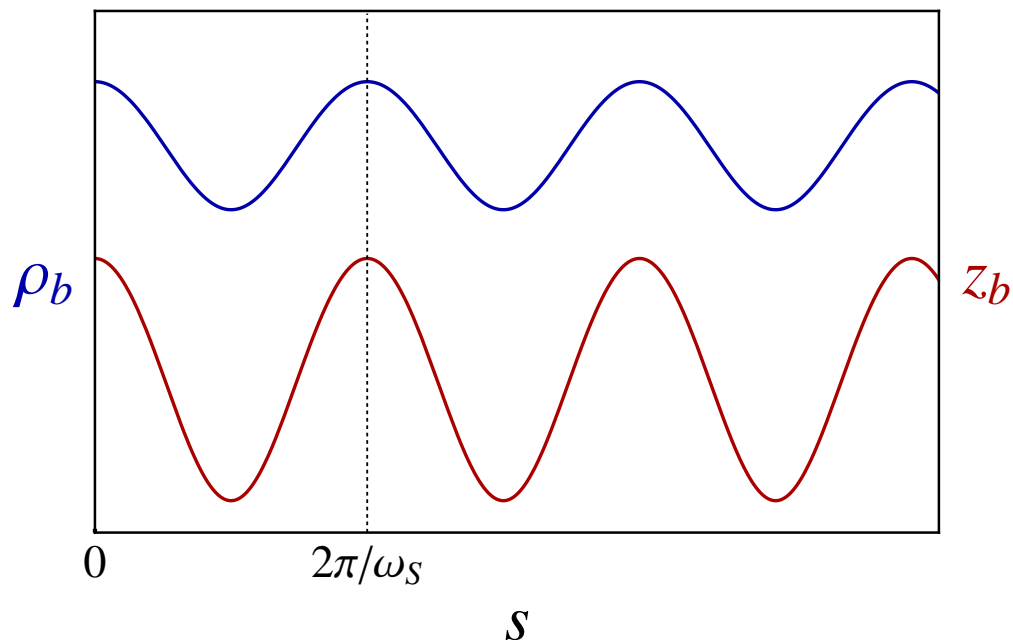


Fig. 4.3: Solução simétrica para o movimento linearizado.

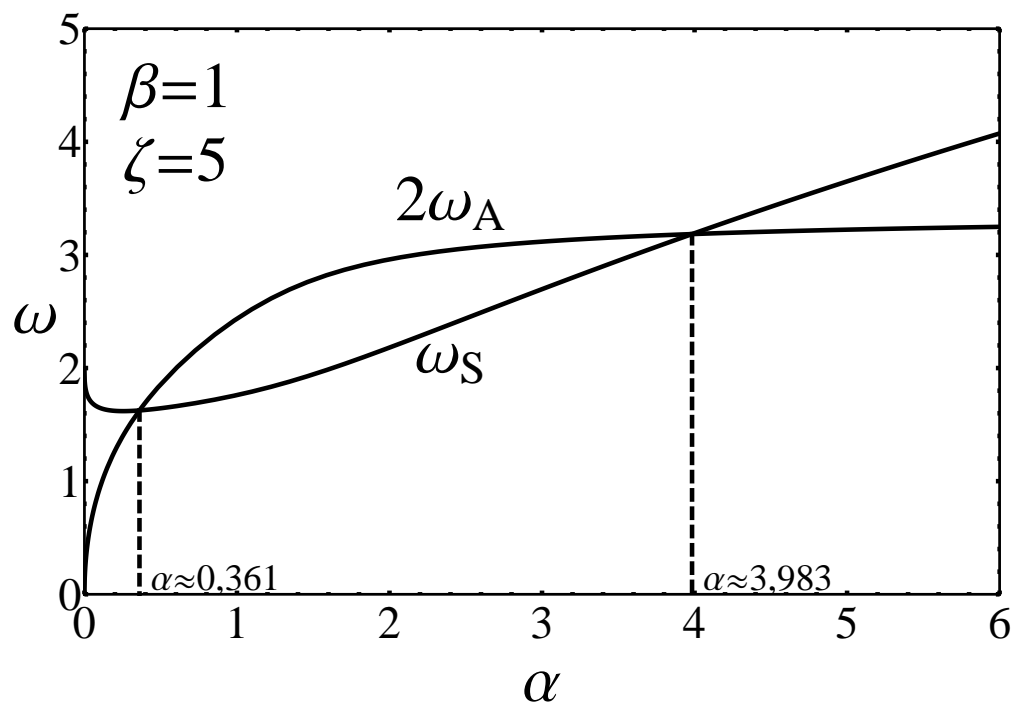


Fig. 4.4: Mostramos as duas condições de ressonância 1:2 dos modos simétrico e antissimétrico. Uma ocorre para  $\alpha < 1$  e outra para  $\alpha > 1$ . Essas condições indicam a possibilidade de instabilidades num regime não-linear para  $\alpha$  em torno desse valores de ressonância.

valores de  $\beta$  e  $\zeta$ .

Podemos entender, simplificada, o que significa essa condição de ressonância 1:2,

olhando para o seguinte exemplo. Sejam as equações acopladas

$$\ddot{a} + \omega_a^2 a = b^2, \quad (4.1.13a)$$

$$\ddot{b} + \omega_b^2 b = 0. \quad (4.1.13b)$$

A solução da segunda equação é do tipo  $b = e^{i\omega_b t}$ . Substituindo na primeira, obtemos

$$\ddot{a} + \omega_a^2 a = e^{2i\omega_b t}. \quad (4.1.14)$$

Assim, temos soluções seculares (que aumentam linearmente com o tempo) do problema quando  $\omega_a = 2\omega_b$ . Portanto, esse tipo de ressonância somente será observada quando levamos em conta termos não-lineares, como  $b^2$  no exemplo.

Recapitulando, uma análise linear em torno do equilíbrio mostrou que o ponto fixo é sempre estável nesse regime. Entretanto, verificamos que há possibilidade de uma ressonância 1:2 entre os modos simétrico e antissimétrico, o que poderá causar uma instabilidade no regime não-linear. Isso será investigado na próxima seção.

## 4.2 Instabilidade não-linear

Na Sec. 4.1, procuramos soluções das equações do envelope ao redor da solução casada. A diferença da análise que será feita nesta seção para a realizada na anterior, é que lá consideramos amplitudes infinitesimais em torno de  $\mu = 1$ , enquanto aqui, teremos um valor arbitrário do descasamento  $\mu$ .

Se substituirmos a condição casada no hamiltoniano da Eq. (4.1.2), ou seja,  $H = H(0,0,\rho_{bm},z_{bm})$ , esse é o valor de mínimo do hamiltoniano. Nessa situação, temos os dois modos  $\omega_A$  e  $\omega_S$  de oscilação, que foram apresentados na Sec. 4.1.

À medida que mudamos o valor de  $\mu$ , temos uma variedade de condições iniciais  $\mu_\rho$  e  $\mu_z$  que satisfazem

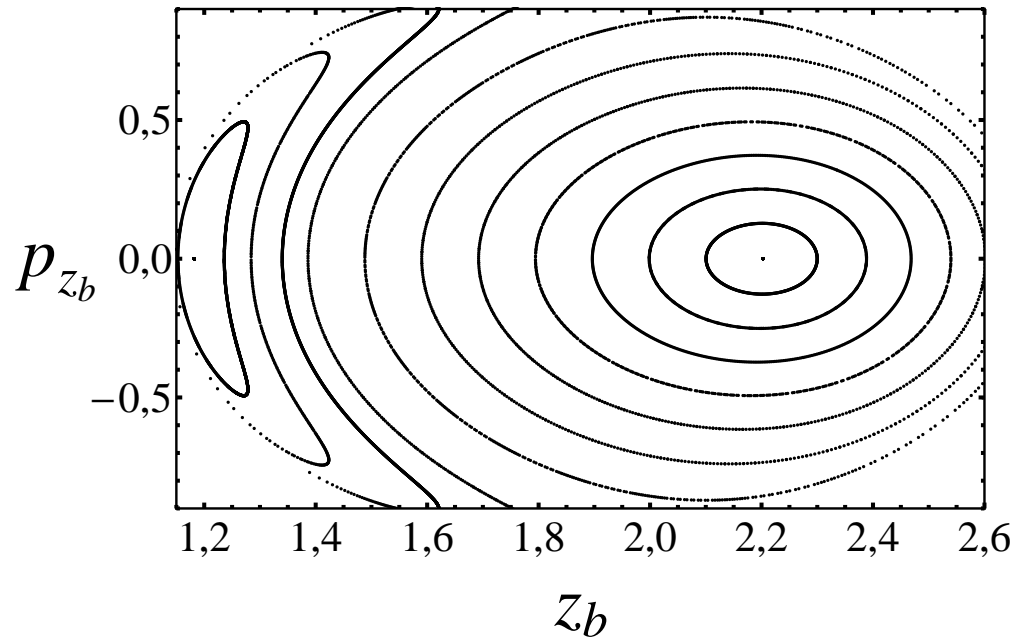
$$H(0,0,\mu_\rho \rho_{bm},\mu_z z_{bm}) = H(0,0,\mu \rho_{bm},\mu z_{bm}).$$

Cada uma dessas condições iniciais representa um comportamento distinto. Em particular, temos um valor de  $(\mu_\rho, \mu_z)$  que leva a uma oscilação simétrica dos envelopes, e outro que leva a uma oscilação antissimétrica. Essas soluções são a continuação no regime não-linear dos modos estudados na Sec. 4.1. As demais soluções, em geral, são oscilações que têm amplitude e frequência variando com o tempo.

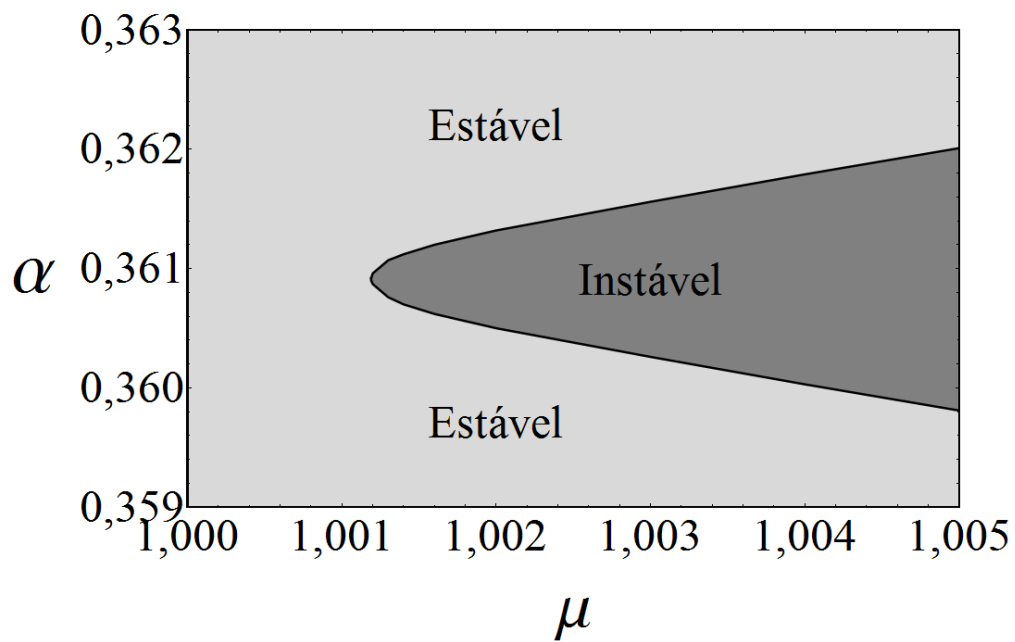
Na Fig. 4.5 mostramos uma seção de Poincaré que exemplifica essas soluções. Construímos o mapa da mesma maneira como foi explicado na Sec. 3.2, com exceção que  $\alpha \neq 1$  e, por conveniência, resolvemos fazer um gráfico de  $z_b \times p_{z_b}$  toda vez que  $p_{\rho_b} = 0$  com  $\dot{p}_{\rho_b} < 0$ . No caso dessa figura, escolhemos  $\alpha = 0,9$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$ .

Temos dois pontos fixos no mapa. Um deles, centrado em  $z_b \approx 1,18$  e  $p_{z_b} = 0$ , é a solução antissimétrica, enquanto o outro, centrado em  $z_b \approx 2,20$  e  $p_{z_b} = 0$ , é a solução simétrica. As demais curvas representam as soluções com amplitude e com frequência que variam com o tempo. No limite  $\mu \rightarrow 1$ , esses dois pontos fixos se aproximam até ficarem infinitesimalmente próximos e voltamos ao problema da Sec. 4.1.

A partir de agora, vamos focar no ponto que representa o modo simétrico, visto que é uma solução mais relevante para problemas reais por apresentar um comportamento mais



**Fig. 4.5:** Mapa de Poincaré para a dinâmica do envelope das Eqs. (4.1). Os parâmetros utilizados são  $\alpha = 0,9$ ,  $\beta = 1$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$ . O ponto centrado em  $z_b \approx 1,18$  e  $p_{z_b} = 0$  é a solução antissimétrica das equações, enquanto o ponto em  $z_b \approx 2,20$  e  $p_{z_b} = 0$  é a solução simétrica.

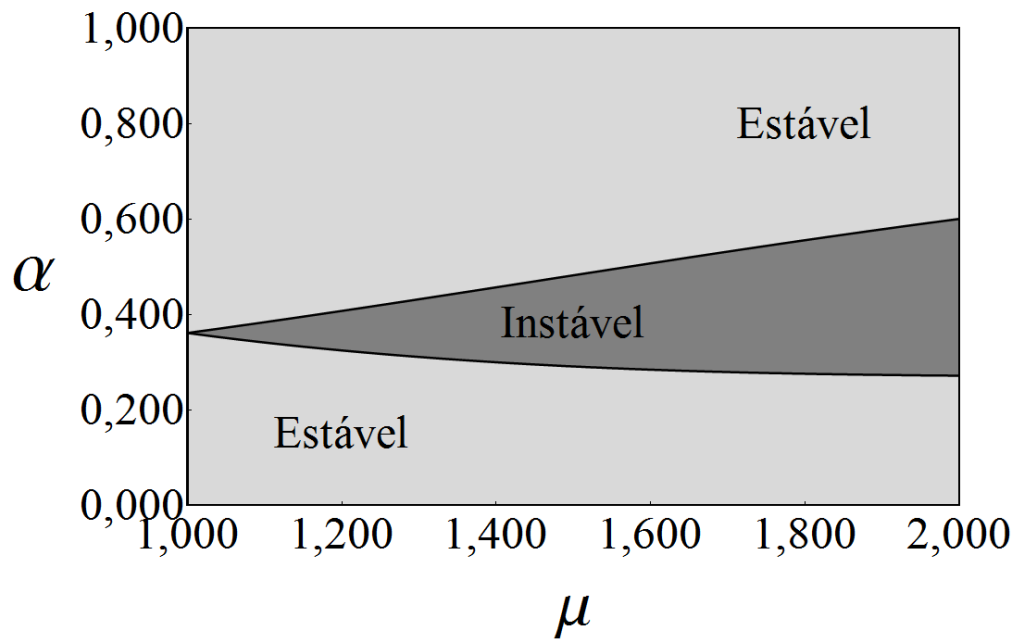


**Fig. 4.6:** Espaço de parâmetros  $\mu \times \alpha$  mostrando condições em que o modo simétrico é estável (cinza claro) e instável (cinza escuro). Mostramos a região próxima a condição de ressonância 1:2 e descasamento  $\mu \geq 1$ . Os demais parâmetros são  $\beta = 1$  e  $\zeta = 5$ .

previsível. A ideia é fazer uma análise de estabilidade desse ponto, da mesma forma como fizemos no Cap. 3. As condições de ressonância 1:2 sugerem que, para parâmetros próximos delas, a dinâmica não-linear dos envelopes pode apresentar um forte acoplamento entre graus de liberdade. Vamos focar na situação  $\alpha < 1$ , já que os resultados obtidos são similares em ambos os casos.

Usamos a mesma técnica descrita no Cap. 3 para calcular a estabilidade do ponto fixo. Mostramos na Fig. 4.6, o espaço de parâmetros  $\mu \times \alpha$  para  $\beta = 1$  e  $\zeta = 5$ . A parte em cinza claro indica que o modo simétrico é estável, enquanto para os parâmetros referentes à região cinza escuro, o ponto é instável. Notamos que, para  $\mu \rightarrow 1$ , o ponto é estável, como previsto pela teoria linear na Sec. 4.1. Entretanto, próximo à condição de ressonância 1:2, ou seja,  $\alpha \approx 0,361$ , um descasamento de apenas 0,1% ou  $\mu = 1,001$  é necessário para tornar o modo instável.

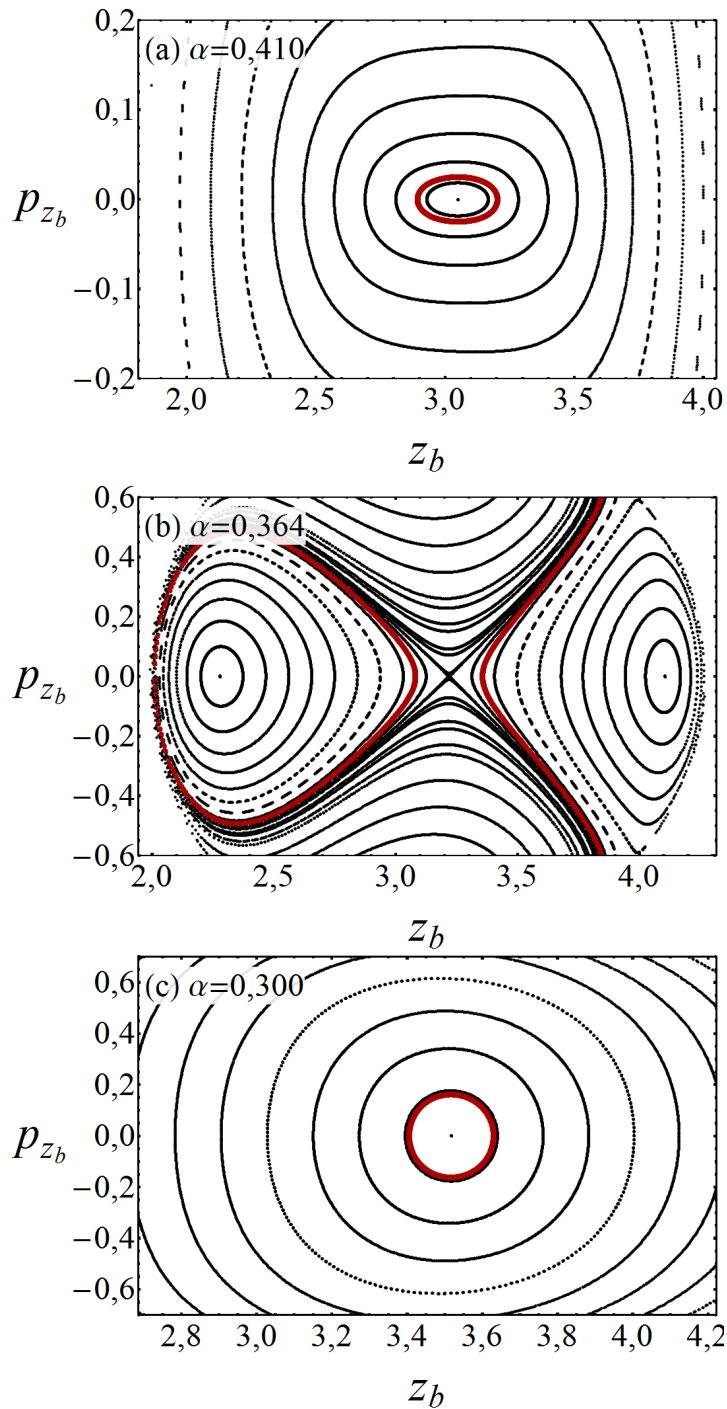
Na Fig. 4.7, estendemos a análise de estabilidade para uma região maior do espaço de parâmetros. Notamos que para  $0 < \alpha < 1$  e  $1 \leq \mu \leq 2$ , uma região significativa de parâmetros apresenta comportamento instável.



**Fig. 4.7:** Expansão do espaço de parâmetros da Fig. 4.6 para  $0 < \alpha < 1$  e  $1 \leq \mu \leq 2$ .

Para verificar a influência da instabilidade nas soluções das equações do envelope, mostramos três mapas de Poincaré na Fig. 4.8. Marcamos, em vermelho, a solução de uma condição inicial tal que  $z_b(0) = z_{bm}$ , ou seja, todo descasamento está em  $\rho_b$ . Essa condição ajuda a entender quando há um forte acoplamento entre os graus de liberdade, já que um dos graus de liberdade começa na condição casada. Os parâmetros utilizados são  $\beta = 1$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$  e o valor de  $\alpha$  varia em cada figura.

Na Fig. 4.8(a), temos  $\alpha = 0,41$ , que é um valor em que o modo é estável. Notamos que a solução em vermelho fica próxima do ponto fixo localizado em  $z_b \approx 3,05$  e  $p_{z_b} = 0$ , o que indica que o acoplamento entre os graus de liberdade é fraco. No painel (b), para  $\alpha = 0,364$ , que está na região instável, notamos que o ponto fixo centrado em  $z_b \approx 3,22$  e  $p_{z_b} = 0$  se



**Fig. 4.8:** Mapa de Poincaré para três valores de  $\alpha$ . Em (a) e (c), para  $\alpha = 0,41$  e  $\alpha = 0,3$ , respectivamente, o modo simétrico é estável. Já em (b), para  $\alpha = 0,364$ , o ponto que representa esse modo, localizado em  $z_b \approx 3,22$  e  $p_{z_b} = 0$ , é instável. A curva vermelha representa a solução do envelope em que  $z_b(0) = z_{bm}$ , e ajuda a medir a efetividade do acoplamento entre os graus de liberdade. Os demais parâmetros são  $\beta = 1$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$ .



instabilizou via dobramento de período. Percebemos que a solução em vermelho faz uma grande excursão pelo mapa de Poincaré. Concluímos que há um forte acoplamento entre os graus de liberdade. Por fim, na parte (c),  $\alpha = 0,3$ , voltamos à região estável da Fig. 4.7. O modo simétrico, referente ao ponto em  $z_b \approx 3,51$  e  $p_{z_b} = 0$ , é estável e o acoplamento é fraco.

### 4.3 Simulação e comparação com o modelo

Afim de verificar o resultado sobre a instabilidade não-linear no transporte do feixe, estudado na Sec. 4.2, desenvolvemos uma simulação baseada em dinâmica molecular. Além disso, a comparação da simulação com o modelo do envelope ajuda a validar as suposições feitas para deduzir as equações, que são emitância constante e que a distribuição das partículas do feixe permanece uniforme durante a propagação. Embora, como argumentamos no Cap. 2, nenhuma dessas suposições sejam válidas para feixes descasados, elas ainda podem ser razoáveis na escala de tempo em que essa instabilidade afeta a dinâmica.

A simetria azimutal do feixe em estudo, neste capítulo, permite que façamos dinâmica molecular de anéis carregados em vez de partículas. Esta tem a vantagem de ser mais rápida, pois precisamos simular um número significativamente menor de anéis do que precisaríamos de partículas.

Dessa forma, torna-se essencial descobrir o potencial gerado por um anel, pois, sabendo-o, podemos calcular a interação total que um particular anel sofre somando o potencial gerado pelos demais. A dedução a seguir é baseada na Ref. [51].

A densidade de um anel de raio  $R_i$  com carga uniformemente distribuída e que se encontra ao longo do plano  $z = z_i$  é dado por

$$n_{b_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\rho} \delta(\rho - R_i) \delta(z - z_i). \quad (4.3.1)$$

Podemos utilizar a Eq.(2.2.1b), que é a equação de Poisson, para calcular o potencial. Entretanto, é mais simples usar uma fórmula derivada da equação de Poisson em que o potencial já está explícito (para maiores detalhes consultar o apêndice B), que é

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{K}{N_b} \int \frac{n_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (4.3.2)$$

Sem perda de generalidade, vamos calcular o potencial em  $\mathbf{r} = \rho\hat{e}_x + z\hat{e}_z$ , enquanto o vetor  $\mathbf{r}'$  é dado por  $\mathbf{r}' = \rho'(\cos\varphi'\hat{e}_x + \sin\varphi'\hat{e}_y) + z'\hat{e}_z$ . Substituindo  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  e a Eq. (4.3.1) na Eq. (4.3.2), obtemos

$$\psi_i(\rho, z) = \frac{K}{2\pi N_R} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{\rho^2 + R_i^2 + (z - z_i)^2 - 2\rho R_i \cos\varphi'}}, \quad (4.3.3)$$

onde  $N_R$  é o número total de anéis na simulação.

Fazendo uma mudança de variáveis  $\varphi' = 2\theta + \pi$ , que implica  $\cos\varphi' = 2\sin^2\theta - 1$  e arrumando convenientemente a Eq. (4.3.3), obtemos

$$\psi_i(\rho, z) = \frac{2K}{\pi N_R \sqrt{(\rho + R_i)^2 + (z - z_i)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4\rho R_i}{(\rho + R_i)^2 + (z - z_i)^2} \sin^2\theta}}. \quad (4.3.4)$$

Agora reconhecemos a integral elíptica completa de primeira espécie, dada por (ver, por exemplo, Ref. [52])

$$\bar{K}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}, \quad (4.3.5)$$

logo a Eq. (4.3.4) pode ser escrita como

$$\psi_i(\rho, z) = \frac{2K}{\pi N_R \sqrt{(\rho + R_i)^2 + (z - z_i)^2}} \bar{K} \left( \frac{4\rho R_i}{(\rho + R_i)^2 + (z - z_i)^2} \right). \quad (4.3.6)$$

Para testar a Eq. (4.3.6), colocamos  $\rho = 0$ . Nesse caso, estamos calculando o potencial ao longo do eixo do anel. Como  $\bar{K}(0) = \pi/2$ , obtemos

$$\psi_i(z) = \frac{K/N_R}{\sqrt{(z - z_i)^2 + R_i^2}}, \quad (4.3.7)$$

que é o resultado esperado na eletrostática [43].

O campo associado ao potencial da Eq. (4.3.6) pode ser obtido tomando o negativo de suas derivadas

$$F_{\rho i}^s = -\frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} = \frac{K}{N_R \pi \rho} \left[ \frac{\rho^2 - R_i^2 - (z - z_i)^2}{(\rho - R_i)^2 + (z - z_i)^2} \frac{\bar{E} \left( \frac{4\rho R_i}{(z - z_i)^2 + (R_i + \rho)^2} \right)}{\sqrt{(z - z_i)^2 + (\rho + R_i)^2}} - \frac{\bar{K} \left( \frac{4\rho R_i}{(z - z_i)^2 + (R_i + \rho)^2} \right)}{\sqrt{(z - z_i)^2 + (\rho + R_i)^2}} \right], \quad (4.3.8a)$$

$$F_{z i}^s = -\frac{\partial \psi_i}{\partial z} = \frac{K}{N_R \pi} \frac{2(z - z_i)}{(\rho - R_i)^2 + (z - z_i)^2} \frac{\bar{E} \left( \frac{4\rho R_i}{(z - z_i)^2 + (R_i + \rho)^2} \right)}{\sqrt{(z - z_i)^2 + (\rho + R_i)^2}}, \quad (4.3.8b)$$

onde

$$\bar{E}(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta, \quad (4.3.9)$$

é a integral elíptica completa de segunda espécie [52].

Dessa forma, a equação de movimento para um anel de raio  $\rho_i$  e na posição  $z_i$  é dado por

$$\frac{d^2 \rho_i}{ds^2} = -\kappa_\rho \rho_i + \frac{p_\varphi^2}{\rho_i^3} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_R} F_{\rho j}^s, \quad (4.3.10a)$$

$$\frac{d^2 z_i}{ds^2} = -\kappa_z z_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N_R} F_{z j}^s, \quad (4.3.10b)$$

onde  $p_\varphi$  é o momentum angular associado a variável  $\varphi$  que é conservado.

Distribuímos  $N_R = 4225$  anéis, número que foi suficiente para convergência dos resultados, de forma uniforme e tais que

$$\rho_b(0) = \sqrt{\frac{5}{2} \sum_{i=1}^{N_R} \rho_i^2} \quad \text{e} \quad z_b(0) = \sqrt{5 \sum_{i=1}^{N_R} z_i^2}.$$

Para a distribuição de velocidades, temos uma dependência parabólica com a distância da partícula até o centro do feixe, de forma que os anéis da borda têm velocidade tendendo a zero. Dessa forma, diminuímos o número de partículas energéticas que evaporam para o halo quase imediatamente (ver Fig. 2.5, por exemplo). Lembramos que a amplitude da distribuição de velocidade é tal que a emitância inicial coincida com a usada nas equações do envelope.

Na Fig. 4.9, comparamos a solução das equações do envelope com a dinâmica molecular. O parâmetros utilizados são  $\beta = 1$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$ . Na parte (a), temos  $\alpha = 0,41$ , mesmo valor da Fig. 4.8(a), em que o modo simétrico é estável. A condição inicial é a mesma da curva vermelha, ou seja, calculamos  $H_0 = H(0,0,\mu\rho_{bm},\mu z_{bm})$  e, então, achamos o valor de  $\mu_\rho$  tal que  $H(0,0,\mu_\rho\rho_{bm},z_{bm}) = H_0$ . Resumindo, todo o descasamento está no envelope  $\rho_b$ . Nesse caso, como previsto, o acoplamento entre os graus de liberdade é fraco. Notamos uma boa concordância entre o modelo (linha sólida) e a simulação (pontos).

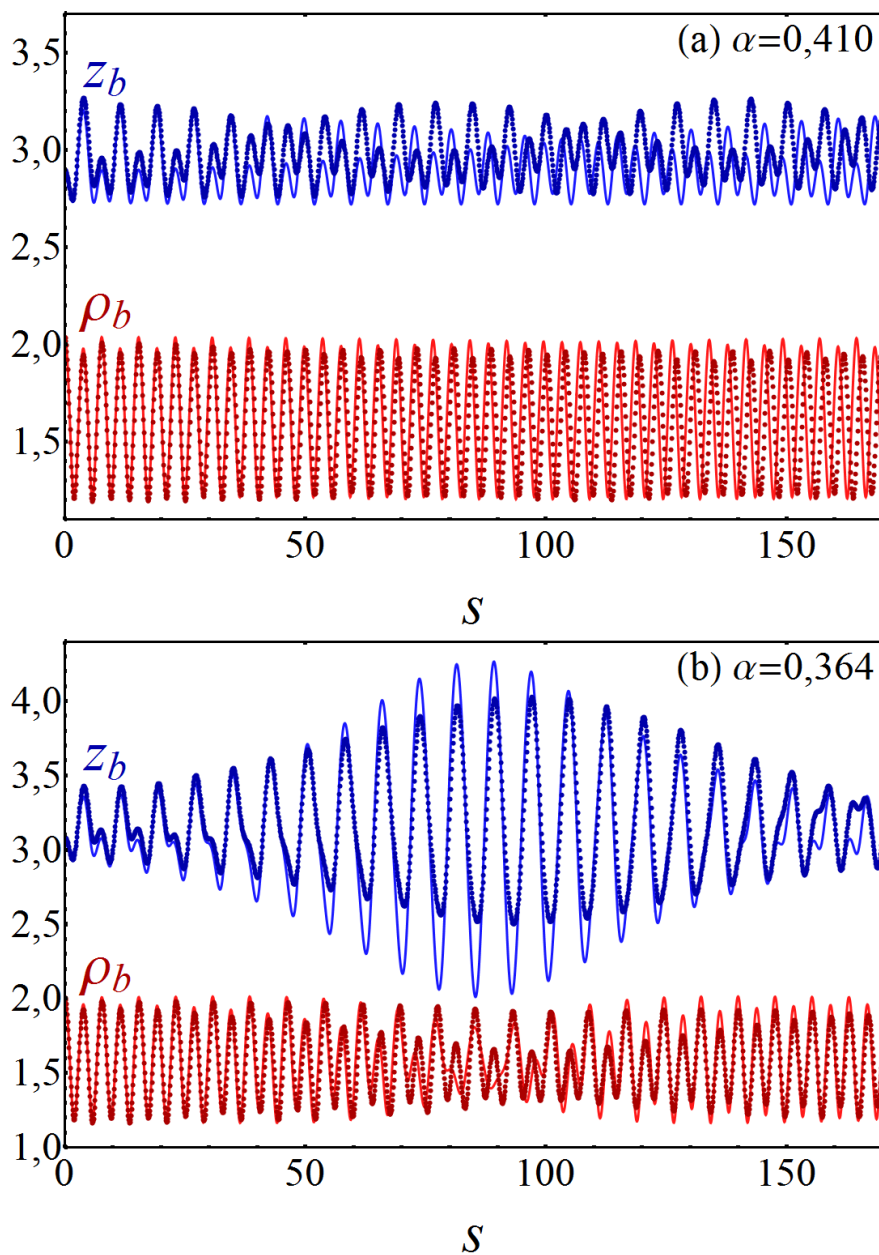
No painel (b), temos  $\alpha = 0,364$ , caso da Fig. 4.8(b). A condição inicial é calculada da mesma forma descrita acima. Nesse situação, o modo é instável e é notável a diferença comparando com o painel (a). O acoplamento entre os graus de liberdade é forte, o que causa esse grande aumento na amplitude de  $z_b$ , que começa na condição casada, em detrimento de  $\rho_b$ . Mais uma vez, temos uma boa concordância entre modelo e simulação, embora a simulação não mostre um ganho na amplitude de  $z_b$  tão grande quando previsto pelo modelo.

Um resultado adicional, que obtemos por meio da simulação, é o da evolução auto-consistente da emitância. O modelo assume que ela é constante, entretanto, esperamos que a emitância aumente durante o transporte do feixe, já que o feixe é descasado.

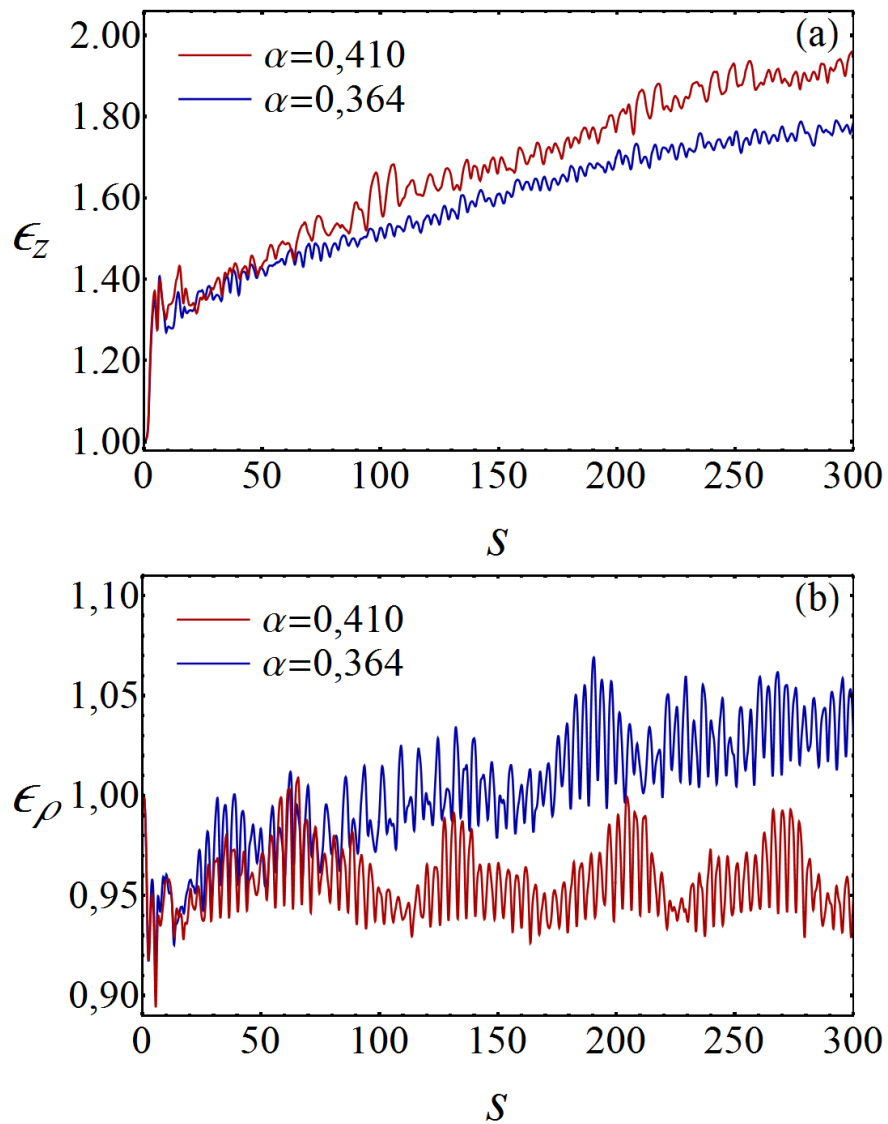
Mostramos a evolução da emitância na Fig. 4.10. A emitância longitudinal  $\epsilon_z$ , parte (a), apresenta um comportamento similar tanto no caso estável, curva vermelha, quanto no instável, curva azul.

Entretanto, notamos um comportamento diferente para a emitância transversal,  $\epsilon_\rho$ , no painel (b). Enquanto há um rápido decréscimo na emitância, provavelmente devido às partículas se redistribuindo para uma situação mais estável, notamos dois comportamento bem distintos após isso. Para o caso estável, curva vermelha, a emitância oscila em torno de um valor médio fixo, enquanto para o caso instável, curva azul, há um aumento da emitância com o tempo.

Esse comportamento, talvez inesperado, pode ser objeto de estudo em trabalhos futuros, pois a emitância é uma quantidade de muito interesse em aplicações, e seu comportamento é de muita importância para projetar aceleradores.



**Fig. 4.9:** Envelope do feixe como função do tempo. As linhas indicam a solução do envelope, enquanto os pontos são resultado da dinâmica molecular. Além dos valores de  $\alpha$  indicado em cada figura, os demais parâmetros utilizados são  $\beta = 1$ ,  $\zeta = 5$  e  $\mu = 1,2$ . A condição inicial é tal que todo descasamento está em  $\rho_b$ .



**Fig. 4.10:** Resultado da evolução da emitância de acordo com a dinâmica molecular. Os parâmetros são os mesmos da Fig. 4.9.

## Capítulo 5

# Considerações finais

Nesse trabalho, estudamos feixes intensos não-contínuos de partículas carregadas. Até o momento, diversos trabalhos do grupo haviam estudado propriedades de equilíbrio, de transporte e de estabilidade de feixes contínuos. A ideia inicial dessa tese foi generalizar esses estudos para o caso de feixes não-contínuos.

No capítulo introdutório, motivamos a importância do estudo desses feixes, incluindo uma possível aplicação dos nossos modelos no projeto *IFMIF*. Além disso, mostramos as aproximações e as propriedades usadas para dedução dos modelos utilizados.

Em seguida, estudamos um feixe isotrópico, ou seja, com simetria esférica. Verificamos que o mecanismo de relaxação é a ressonância entre o movimento de algumas de suas partículas com a oscilação coletiva (envelope) do feixe. Como a função distribuição evolui de forma incompressível, fizemos uma analogia com a distribuição de Fermi-Dirac totalmente degenerada para modelar o caroço das partículas não-ressonantes. Já as ressonantes, foram modeladas sendo uniformemente distribuídas entre a energia de Fermi e a maior energia da partícula que evapora para o halo. Os parâmetros do modelo foram calculados usando princípios básicos: conservação de energia e de número de partículas durante o transporte. Os resultados, comparados com simulação, foram excelentes o que comprova, *a posteriori*, a validade de todas suposições.

Continuamos o trabalho verificando a estabilidade desse modo simétrico de oscilação para o caso esférico. Argumentamos que os resultados obtidos para relaxação do feixe esférico podem ser usados em feixes aproximadamente esféricos, o que é uma situação mais realista, se esse modo for estável. A análise da estabilidade mostrou que, em regimes de interesse prático, esse modo é estável, o que ilustra o poder de o nosso modelo descrever o estado quase-estacionário de feixes não-contínuos.

Por fim, abandonamos a suposição de que as forças focalizadoras externas são isotrópicas e passamos a acompanhar a evolução dos envelopes e a possibilidade de um acoplamento forte entre os graus de liberdade. Num regime linear, foi constatado que as oscilações do envelope são sempre estáveis para descasamentos infinitesimais em torno do equilíbrio. Num regime não-linear, entretanto, mostramos o surgimento de uma instabilidade para certos parâmetros, o que acopla fortemente a dinâmica dos envelopes.

Essa busca por instabilidades no transporte de feixes de partículas carregadas é de extrema importância na hora de construir os equipamentos para o experimento. Tipicamente, busca-se evitar essas regiões de parâmetros afim de ter-se um feixe bem comportado. Concluímos, então, que essa análise pode ser de grande importância na construção de sistemas como *IFMIF* e de outros similares.

Como comentário final, ressaltamos que a maior parte das análises feitas nessa tese foram em situações arbitrariamente fora do equilíbrio, o que contrasta com alguns dos trabalhos clássicos da literatura [50, 53].

## Apêndice A

# Referencial de Larmor

O movimento transversal de uma particular partícula de um feixe carregado não-relativístico é descrito, na aproximação paraxial [23], pelas equações

$$m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = -q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + F_x^{foc}, \quad (\text{A.1a})$$

$$m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = -q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y} + F_y^{foc}, \quad (\text{A.1b})$$

onde  $\phi^s$  é o potencial repulsivo auto-consistente que pode ser calculado através da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi^s(\mathbf{r}, t) = -4\pi q_b n_b(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.2})$$

Se o focador externo for um campo magnético uniforme na direção de propagação, ou seja,  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$ , a força de Lorentz é dada por

$$\mathbf{F}^{foc} = \frac{q_b}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q_b}{c} \left( \frac{dy}{dt} B_0 \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{dx}{dt} B_0 \hat{\mathbf{e}}_y \right), \quad (\text{A.3})$$

logo, as equações de movimento para  $x$  e  $y$  ficam, respectivamente,

$$m_b \frac{d^2 x}{dt^2} = -q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial x} + \frac{q_b}{c} \frac{dy}{dt} B_0, \quad (\text{A.4a})$$

$$m_b \frac{d^2 y}{dt^2} = -q_b \frac{\partial \phi^s}{\partial y} - \frac{q_b}{c} \frac{dx}{dt} B_0. \quad (\text{A.4b})$$

Analisando as Eqs. (A.4) é possível notar uma dependência cruzada - a equação para  $d^2 x/dt^2$  depende de  $dy/dt$ , e a para  $d^2 y/dt^2$  depende de  $dx/dt$ . Muitas vezes, isso acaba dificultando cálculos como, por exemplo, o do envelope do feixe. Para contornar isso, um procedimento amplamente utilizado na física de feixes é mudar para um referencial que gira em torno do eixo  $z$  com frequência de Larmor  $\Omega_L$ . Entretanto, vamos assumir um frequência  $\Omega$  genérica, por enquanto, e mostrar que a escolha de  $\Omega = \Omega_L$  é a mais conveniente.

Propomos uma mudança de coordenadas da seguinte forma:

$$X = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t, \quad (\text{A.5a})$$

$$Y = -x \sin \Omega t + y \cos \Omega t. \quad (\text{A.5b})$$

Se  $\Omega > 0$ , as Eqs. (A.5) indicam que o referencial gira no sentido anti-horário em relação ao eixo  $z$  positivo. Caso  $\Omega < 0$ , o referencial gira no sentido horário.



A transformação inversa, suas derivadas temporais e a regra para derivação em  $X$  e  $Y$  são dadas por

$$x = X \cos \Omega t - Y \sin \Omega t, \quad (\text{A.6a})$$

$$y = X \sin \Omega t + Y \cos \Omega t, \quad (\text{A.6b})$$

$$\dot{x} = \dot{X} \cos \Omega t - \Omega X \sin \Omega t - \dot{Y} \sin \Omega t - \Omega Y \cos \Omega t, \quad (\text{A.6c})$$

$$\dot{y} = \dot{X} \sin \Omega t + \Omega X \cos \Omega t + \dot{Y} \cos \Omega t - \Omega Y \sin \Omega t, \quad (\text{A.6d})$$

$$\ddot{x} = \ddot{X} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{X} \sin \Omega t - \Omega^2 X \cos \Omega t - \ddot{Y} \sin \Omega t - 2\Omega \dot{Y} \cos \Omega t + \Omega^2 Y \sin \Omega t, \quad (\text{A.6e})$$

$$\ddot{y} = \ddot{X} \sin \Omega t + 2\Omega \dot{X} \cos \Omega t - \Omega^2 X \sin \Omega t + \ddot{Y} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{Y} \sin \Omega t - \Omega^2 Y \cos \Omega t, \quad (\text{A.6f})$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \phi^s}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y} = \cos \Omega t \frac{\partial \phi^s}{\partial X} - \sin \Omega t \frac{\partial \phi^s}{\partial Y}, \quad (\text{A.6g})$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial \phi^s}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y} = \sin \Omega t \frac{\partial \phi^s}{\partial X} + \cos \Omega t \frac{\partial \phi^s}{\partial Y}. \quad (\text{A.6h})$$

Substituindo as Eqs. (A.6d), (A.6e) e (A.6g) na Eq. (A.4a) e colocando  $\cos \Omega t$  e  $\sin \Omega t$  em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} & \cos \Omega t \left\{ \ddot{X} - \Omega^2 X - 2\Omega \dot{Y} - \Omega_c \Omega X - \Omega_c \dot{Y} + \frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial X} \right\} - \\ & \sin \Omega t \left\{ \ddot{Y} - \Omega^2 Y + 2\Omega \dot{X} - \Omega_c \Omega Y + \Omega_c \dot{X} + \frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\Omega_c = q_b B_0 / m_b c$  é a frequência de ciclotron. A única maneira de garantir a validade da Eq. (A.7) para qualquer tempo é se os termos multiplicando  $\cos \Omega t$  e  $\sin \Omega t$  forem zero independentemente. Isso nos leva as equações de movimento no referencial  $X$  e  $Y$  dadas por

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \Omega_c \Omega X + \Omega^2 X + 2\Omega \dot{Y} + \Omega_c \dot{Y} - \frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial X}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \Omega_c \Omega Y + \Omega^2 Y - 2\Omega \dot{X} - \Omega_c \dot{X} - \frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y}. \quad (\text{A.8b})$$

Até o momento deixamos  $\Omega$  genérico. Para remover a dependência cruzada nas Eqs. (A.8), é fácil ver que basta escolher  $\Omega = \Omega_L = -\Omega_c/2$ , lembrando que o sinal negativo indica que o referencial gira no sentido horário. Portanto, as equações de movimento para a partícula no referencial de Larmor são similares a de um oscilador harmônico forçado

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\Omega_c^2}{4} X = -\frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial X}, \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{\Omega_c^2}{4} Y = -\frac{q_b}{m_b} \frac{\partial \phi^s}{\partial Y}. \quad (\text{A.9b})$$

## Apêndice B

# O potencial de um elipsoide uniformemente carregado

A dedução a seguir é baseada na feita na Ref. [54] para o caso gravitacional. Utilizando a equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi K}{N_b} n_b(\mathbf{r}), \quad (\text{B.1})$$

vamos calcular o potencial  $\psi$  dentro da distribuição para uma densidade  $n_b$  uniforme de partículas num elipsoide, ou seja,

$$n_b(\mathbf{r}) = \frac{N_b}{\frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3}, \quad (\text{B.2})$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são os raios do elipsoide ao longo dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  respectivamente. No caso de  $a_1 = a_2 = a_3$ , temos uma esfera, como no caso estudado no Cap. 2, se  $a_1 = a_2 \neq a_3$  temos um elipsoide com simetria azimutal, como estudado no Cap. 4.

Multiplicando a Eq. (B.1) por  $d^3 r / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  e integrando em todo espaço, obtemos

$$\int \frac{\nabla^2 \psi(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r = -\frac{4\pi K}{N_b} \int \frac{n_b(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r. \quad (\text{B.3})$$

Podemos trocar as variáveis  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  sem alterar a igualdade na Eq. (B.3)

$$\int \frac{\nabla'^2 \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = -\frac{4\pi K}{N_b} \int \frac{n_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (\text{B.4})$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\sigma \nabla^2 \eta - \eta \nabla^2 \sigma = \nabla \cdot (\sigma \nabla \eta - \eta \nabla \sigma), \quad (\text{B.5})$$

com  $\eta = \psi$  e  $\sigma = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , a Eq. (B.4) fica

$$\begin{aligned} \int \nabla' \cdot \left[ \frac{\nabla' \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3 r' + \int \psi(\mathbf{r}') \nabla'^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ = -\frac{4\pi K}{N_b} \int \frac{n_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Podemos utilizar o teorema de Gauss no primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (B.6)

$$\int \nabla' \cdot \left[ \frac{\nabla' \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3 r' = \oint_{S \rightarrow \infty} \left[ \frac{\nabla' \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \cdot \hat{n} d^2 r' = 0, \quad (\text{B.7})$$

já que tanto o potencial  $\psi$  quanto  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  vão a zero quando levamos a superfície até o infinito. Podemos simplificar ainda mais a Eq. (B.6) reconhecendo que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{B.8})$$

Utilizando os resultados das Eqs. (B.7) e (B.8) na Eq. (B.6), obtemos

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{K}{N_b} \int \frac{n_b(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (\text{B.9})$$

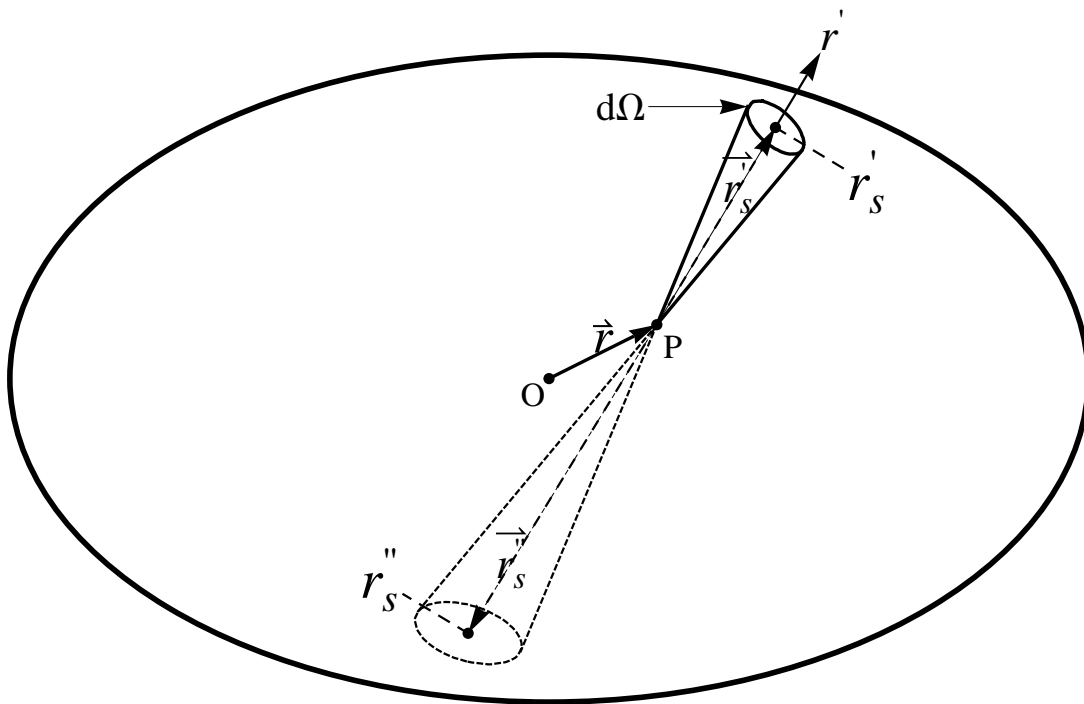


Fig. B.1: Ilustração do elipsoide.

A Fig. B.1 mostra uma ilustração do elipsoide. Vamos calcular o potencial em um ponto  $P$  dentro do elipsoide devido a carga que está contida num ângulo sólido  $d\Omega$  ao longo do eixo  $r'$ . Isso resulta em

$$d\psi = \left[ \frac{K n_b}{N_b} \int_0^{r'_s} r' dr' \right] d\Omega = \frac{K n_b}{2 N_b} r_s'^2 d\Omega, \quad (\text{B.10})$$

onde  $r'_s$  é valor de  $r'$  que cruza a superfície do elipsoide. O potencial no ponto  $P$  será obtido integrando a Eq. (B.10) sobre todo ângulo sólido

$$\psi = \frac{Kn_b}{2N_b} \int r_s'^2 d\Omega. \quad (\text{B.11})$$

Agora, o mesmo argumento poderia ser utilizado para outro ângulo sólido que vai de  $P$  até  $r' = r''_s$ , ou seja,

$$\psi = \frac{Kn_b}{2N_b} \int r_s''^2 d\Omega, \quad (\text{B.12})$$

portanto podemos escrever o potencial  $\psi$  no ponto  $P$  como sendo

$$\psi = \frac{Kn_b}{4N_b} \int (r_s'^2 + r_s''^2) d\Omega. \quad (\text{B.13})$$

O vetor  $\mathbf{r}$ , que vai da origem até o ponto  $P$ , pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3. \quad (\text{B.14})$$

Além disso, o vetor unitário na direção  $\mathbf{r}'$  é dado por  $\hat{r}' = n_1\hat{x}_1 + n_2\hat{x}_2 + n_3\hat{x}_3$ , onde em coordenadas esféricas  $n_1 = \sin\theta' \cos\phi'$ ,  $n_2 = \sin\theta' \sin\phi'$  e  $n_3 = \cos\theta'$ . Dessa forma, podemos escrever os vetores  $\mathbf{r}'_s$  e  $\mathbf{r}''_s$  que vão do ponto  $P$  até a superfície do elipsoide ao longo do eixo  $r'$  como

$$\mathbf{r}'_s = r'_s \hat{r}', \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{r}''_s = r''_s \hat{r}'. \quad (\text{B.15b})$$

Tanto o vetor  $\mathbf{r} + \mathbf{r}'_s$  quanto o  $\mathbf{r} + \mathbf{r}''_s$  vão da origem  $O$  até a superfície do elipsoide, portanto seus módulos devem obedecer à equação do elipsoide

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{x_i + r_s n_i}{a_i} \right)^2 = 1, \quad (\text{B.16})$$

onde as raízes da Eq. (B.16) são  $r_s = r'_s$  e  $r_s = r''_s$ . Podemos escrever a Eq. (B.16) como

$$Ar_s^2 + Br_s + C = 0, \quad (\text{B.17})$$

onde

$$A = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{a_i^2}, \quad (\text{B.18a})$$

$$B = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i n_i}{a_i^2}, \quad (\text{B.18b})$$

$$C = -1 + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2}. \quad (\text{B.18c})$$

Um resultado conhecido sobre a soma e o produto de equações de segundo grau é que

$$r'_s + r''_s = -\frac{B}{A}, \quad (\text{B.19a})$$

$$r'_s r''_s = \frac{C}{A}, \quad (\text{B.19b})$$

logo,

$$r_s'^2 + r_s''^2 = \frac{B^2}{A^2} - 2\frac{C}{A}. \quad (\text{B.20})$$

Substituindo o resultado da Eq. (B.20) na Eq. (B.13), obtemos

$$\psi = \frac{Kn_b}{2N_b} \int \left[ \frac{2 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i n_i}{a_i^2} \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{a_i^2} \right)^2} + \frac{1 - \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{a_i^2}} \right] d\Omega. \quad (\text{B.21})$$

Podemos simplificar esse resultado notando que a primeira integral do lado direito da Eq. (B.21) pode ser escrito como

$$\int \frac{\left( \sum_i \frac{x_i n_i}{a_i^2} \right)^2}{\left( \sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2} \right)^2} d\Omega = \int \left[ \frac{\sum_i \frac{x_i^2 n_i^2}{a_i^4} + \sum_{i \neq j} \frac{x_i x_j n_i n_j}{a_i^2 a_j^2}}{\left( \sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2} \right)^2} \right] d\Omega. \quad (\text{B.22})$$

Por sua vez, se  $i \neq j$  a integral

$$\int \frac{\frac{x_i x_j n_i n_j}{a_i^2 a_j^2}}{\left( \sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2} \right)^2} d\Omega \propto \int_0^{2\pi} \frac{f_{ij}(\varphi)}{c_1 + c_2 \cos^2 \varphi + c_3 \sin^2 \varphi} d\varphi = 0, \quad (\text{B.23})$$

onde  $c_1, c_2, c_3$  são funções apenas de  $\theta$ ,  $f_{ij}(\varphi) = (\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{j1}\delta_{i2}) \cos \varphi \sin \varphi + (\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{j1}\delta_{i3}) \cos \varphi + (\delta_{i2}\delta_{j3} + \delta_{j2}\delta_{i3}) \sin \varphi$  e  $\delta_{ij}$  é o símbolo da delta de Kronecker. Logo, o potencial da Eq. (B.21) pode ser escrito como

$$\psi = \frac{Kn_b}{2N_b} \int \left[ 2 \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 n_i^2}{a_i^4}}{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{a_i^2} \right)^2} + \frac{1 - \left( \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{a_i^2}} \right] d\Omega. \quad (\text{B.24})$$

Seja

$$J \equiv \int \frac{d\Omega}{\sum_i \frac{n_i^2}{a_i^2}}, \quad (\text{B.25})$$

com um pouco de álgebra é possível mostrar que o potencial  $\psi$ , dado Eq. (B.24), pode ser escrito como

$$\psi = \frac{Kn_b}{2N_b} \left[ J + \sum_i \left( \frac{1}{a_i} \frac{\partial J}{\partial a_i} - \frac{J}{a_i^2} \right) x_i^2 \right], \quad (\text{B.26})$$

portanto, para calcular o potencial  $\psi$ , basta resolver a integral na Eq. (B.25) e substituir na Eq. (B.26).

Substituindo  $n_i$  por seus valores em coordenadas esféricas na Eq. (B.25), obtemos

$$J = \int \frac{d\Omega}{\left(\frac{n_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3}\right)^2} = 8 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\cos \varphi \sin \theta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \sin \theta}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{\cos \theta}{a_3}\right)^2}. \quad (\text{B.27})$$

Fazendo uma mudança de variáveis  $\tau = \tan \varphi$ , obtemos

$$J = 8 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{k_1 + k_2 \tau^2} = 4\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{k_1 k_2}} d\theta, \quad (\text{B.28})$$

onde  $k_1 = \sin^2 \theta / a_1^2 + \cos^2 \theta / a_3^2$  e  $k_2 = \sin^2 \theta / a_2^2 + \cos^2 \theta / a_3^2$ . Fazendo mais uma mudança de variáveis,  $u = a_3^2 \tan^2 \theta$ , e substituindo na Eq. (B.28), temos que

$$J = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_1^2 + u)^{1/2} (a_2^2 + u)^{1/2} (a_3^2 + u)^{1/2}}. \quad (\text{B.29})$$

Finalmente, substituindo  $J$  no potencial da Eq. (B.26) e usando a densidade  $n_b$  dada na Eq. (B.2), obtemos

$$\psi = \frac{3K}{4} \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_1^2 + u)^{1/2} (a_2^2 + u)^{1/2} (a_3^2 + u)^{1/2}} \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + u} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + u} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + u}\right), \quad (\text{B.30})$$

que é o potencial dentro de um elipsoide uniformemente carregado.

As componentes do campo associado ao potencial  $\psi$  são dadas por

$$E_i = -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{3K}{2} x_i \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_i^2 + u) \prod_j (a_j^2 + u)^{1/2}}. \quad (\text{B.31})$$

Afim de testar esse resultado, vamos calcular o campo da Eq. (B.31) no caso de uma distribuição esférica com  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ . Nesse caso, cada componente fica

$$E_i = \frac{3K}{2} x_i \int_0^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{5/2}} = \frac{3K}{2} \frac{2}{3a^3} x_i = \frac{K x_i}{a^3}, \quad (\text{B.32})$$

e o vetor  $\mathbf{E} = E_1 \hat{x}_1 + E_2 \hat{x}_2 + E_3 \hat{x}_3$

$$\mathbf{E} = \frac{K}{a^3} (x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3) = \frac{K \mathbf{r}}{a^3}, \quad (\text{B.33})$$

que é o resultado conhecido para o campo elétrico dentro de uma esfera uniformemente carregada [43].

No caso de um elipsoide com simetria azimutal, ou seja,  $a_1 = a_2 \neq a_3$ , o potencial  $\psi$  pode ser escrito como

$$\psi = \frac{3K}{4} \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)(a_3^2 + u)^{1/2}} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a_1^2 + u} - \frac{z^2}{a_3^2 + u} \right). \quad (\text{B.34})$$

onde  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e  $z = x_3$ .

O campo associado na direção  $\hat{\rho}$  é dado por

$$E_\rho = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{3K}{2}\rho \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)^2 (a_3^2 + u)^{1/2}}, \quad (\text{B.35})$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$E_\rho = \frac{3K}{2}\rho \left[ \frac{\arccos\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}{(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} - \frac{a_3}{a_1^2(a_1^2 - a_3^2)} \right]. \quad (\text{B.36})$$

De forma similar, o campo na direção  $\hat{z}$  pode ser calculado como

$$E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{3K}{2}z \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2 + u)(a_3^2 + u)^{3/2}}, \quad (\text{B.37})$$

e a solução após resolver a integral é

$$E_z = 3Kz \left[ \frac{1}{a_3(a_1^2 - a_3^2)} - \frac{\arccos\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}{(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} \right]. \quad (\text{B.38})$$

## Apêndice C

# Seção de Poincaré

Uma das técnicas mais importantes para análise de sistemas dinâmicos, tanto por sua simplicidade como por sua utilidade, é a seção de Poincaré (ou mapa de Poincaré). De forma geral, a seção de Poincaré de um sistema com  $n$  graus de liberdade tem dimensão  $(2n - 2)$ . Isso significa que essa técnica é muito útil para sistemas com  $n = 2$ , já que o espaço de fases nesse caso têm quatro dimensões, e a seção de Poincaré duas. Algumas propriedades do fluxo no espaço de fases são mantidas na seção de Poincaré, tal como conservação de volume (ou área). Por isso, a seção de Poincaré é reconhecida como o espaço de fases reduzido do sistema [45].

Nossa intenção aqui é apenas mostrar como obter o mapa de Poincaré e, então, identificar ressonâncias, sem nos aprofundarmos no formalismo matemático. Vamos começar supondo um Hamiltoniano autônomo para um sistema com dois graus de liberdade

$$H = H(p_1, p_2, q_1, q_2). \quad (\text{C.1})$$

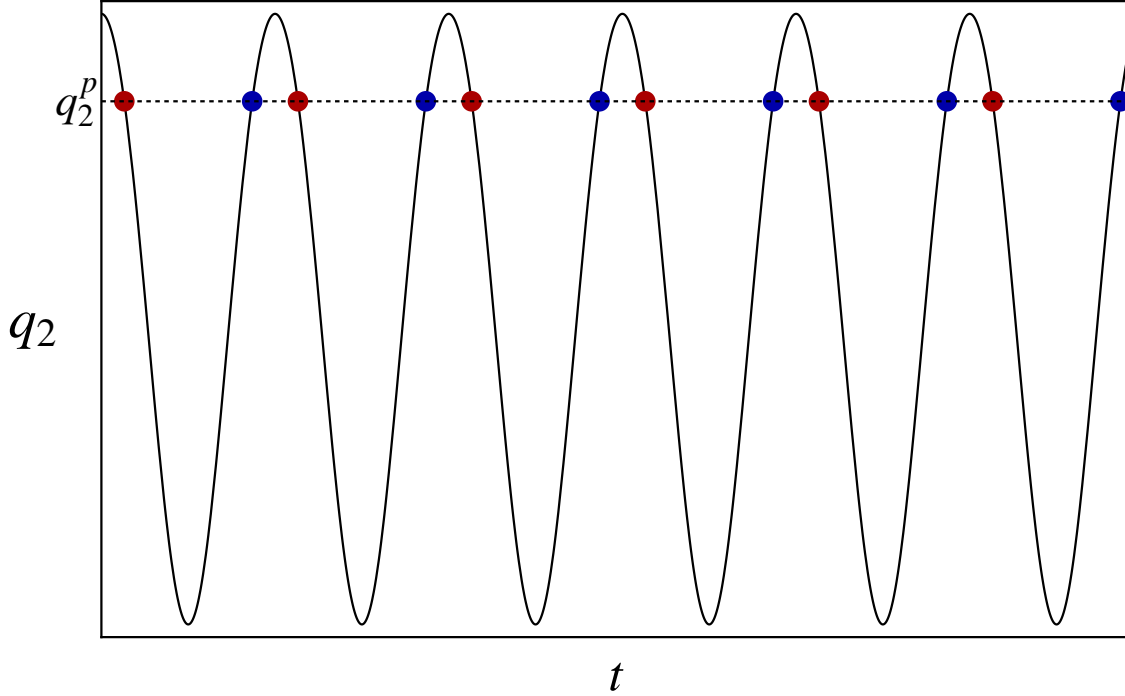
Como  $H$  não depende explicitamente do tempo, esse é uma constante de movimento, ou seja,  $H = H_0$ , portanto a trajetória da partícula no espaço de fases ocorre numa superfície de  $H$  constante e podemos reescrever a Eq. (C.1), isolando, por exemplo,  $p_2$

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2; H_0). \quad (\text{C.2})$$

Assim, apenas três das variáveis canônicas são necessárias para descrever o sistema, já que podemos calcular a quarta através de uma equação do tipo Eq. (C.2).

Se uma das variáveis do sistema, vamos dizer  $q_2$ , repetidamente cruza um certo valor  $q_2 = q_2^p$  durante a dinâmica, podemos observar o comportamento de  $q_1 \times p_1$  toda vez que  $q_2 = q_2^p$  vindo de uma certa direção - essa é a seção de Poincaré. A Fig. C.1 mostra um exemplo simples da variação de  $q_2$  com o tempo num caso em que o período de oscilação de  $q_2$  é fixo. Notamos que  $q_2$  cruza um particular valor de  $q_2 = q_2^p$  duas vezes a cada período - uma vez no ponto vermelho e outra no ponto azul. Para formar a seção de Poincaré, queremos o valor de  $q_1 \times p_1$  uma vez a cada período de  $q_2$ , portanto escolhemos  $q_1 \times p_1$  correspondente ou aos pontos em azul, em que  $dq_2/dt > 0$ , ou em vermelho, em que  $dq_2/dt < 0$ . A escolha da derivada positiva ou negativa ou o particular valor de  $q_2^p$  usualmente pode mudar a orientação das ressonâncias e da seção de Poincaré em geral. Algumas vezes, há escolhas mais convenientes que outras, mas no geral diferentes tipos de comportamentos e soluções, como curvas regulares, caos, ressonâncias, bifurcações, entre outros, devem estar presentes independente dessas escolhas.





**Fig. C.1:** Variação da variável canônica  $q_2$  com o tempo. Podemos utilizar um valor de  $q_2 = q_2^p$  como condição para adicionar um ponto à seção de Poincaré de  $q_1 \times p_1$ . A ideia é que o mapa de Poincaré seja gerado com um ponto por período  $q_2$ , portanto escolhemos apenas um dos conjuntos de pontos vermelho ou azul para tal.

Para exemplificar, vamos utilizar as equações do envelope obtidas na Sec. 3.1 que são

$$\ddot{\rho}_b = -\rho_b + \frac{1}{\rho_b^3} + \frac{3\zeta}{2} \left[ \frac{\rho_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} - \frac{z_b}{\rho_b(\rho_b^2 - z_b^2)} \right], \quad (\text{C.3a})$$

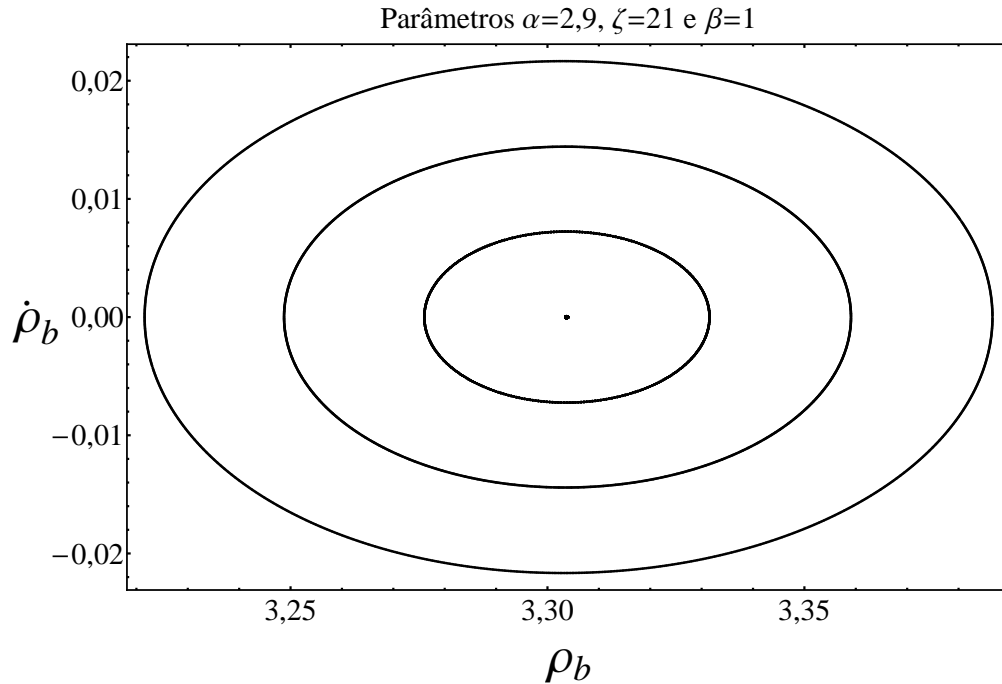
$$\ddot{z}_b = -\alpha z_b + \frac{\beta^2}{z_b^3} + 3\zeta \left[ \frac{1}{(\rho_b^2 - z_b^2)} - \frac{z_b \arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{(\rho_b^2 - z_b^2)^{3/2}} \right]. \quad (\text{C.3b})$$

Integrando as equações de Hamilton, descobrimos que o Hamiltoniano que dá origem as Eqs. (C.3) é dado por

$$H(p_{\rho_b}, p_{z_b}, \rho_b, z_b) = \frac{p_{\rho_b}^2}{4} + \frac{p_{z_b}^2}{2} + \rho_b^2 + \alpha \frac{z_b^2}{2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{\beta^2}{2z_b^2} + 3\zeta \frac{\arccos\left(\frac{z_b}{\rho_b}\right)}{\sqrt{\rho_b^2 - z_b^2}}, \quad (\text{C.4})$$

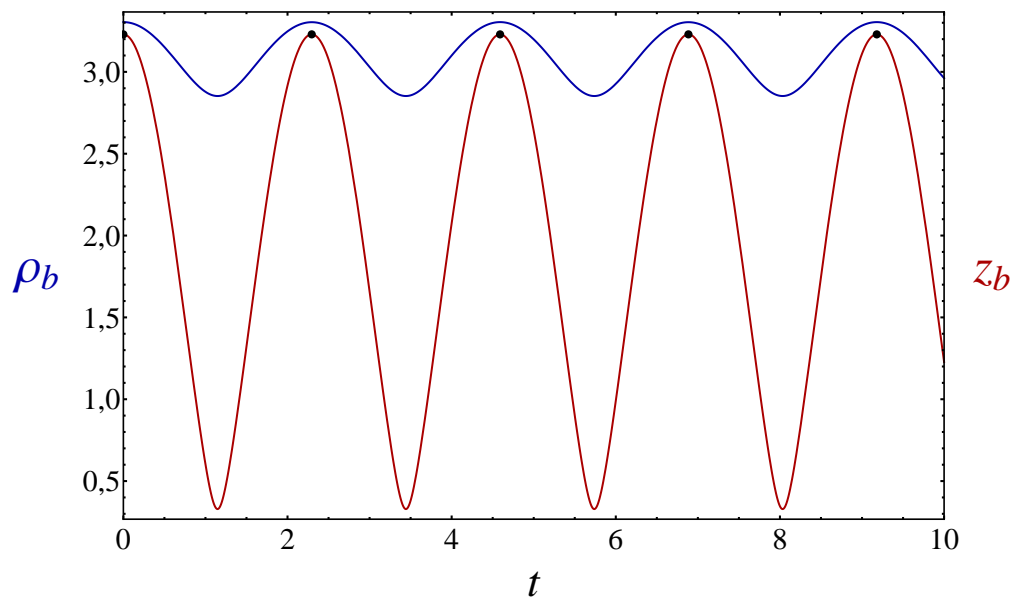
Então, dado um valor de  $H$ , esse deve ser o mesmo para todas as curvas na seção de Poincaré. Nos exemplos abaixo vamos utilizar  $H_0 = H(0; 0; 1,5\rho_{bm}; 1,5z_{bm})$ , onde  $\rho_{bm}$  e  $z_{bm}$  são dados nas Eqs. (3.1.15).

Na Fig. C.2, mostramos uma ressonância na seção de Poincaré  $\rho_b \times \dot{\rho}_b$ . Os pontos no mapa são obtidos sempre que  $p_{z_b} = 0$  com  $\dot{p}_{z_b} < 0$ . O ponto localizado em  $\rho_b \approx 3,3$  e  $\dot{\rho}_b = 0$  significa que todo período de  $p_{z_b}$ ,  $\rho_b$  retorna ao mesmo ponto do mapa de Poincaré, portanto



**Fig. C.2:** Mapa de Poincaré formado por pontos da dinâmica em que  $p_{z_b} = 0$  com  $\dot{p}_{z_b} < 0$ . O ponto fixo na seção de Poincaré é um ressonância porque a cada período de  $p_z$ ,  $\rho_b$  e  $\dot{\rho}_b$  apresentam o mesmo valor, portanto os graus de liberdade oscilam com a mesma frequência.

suas frequências de oscilação são iguais. As curvas regulares ao redor desse ponto formam a ilha ressonante em torno do ponto, soluções do problema que apresentam amplitude e frequência que variam levemente com tempo em torno do valor da solução ressonante.



**Fig. C.3:** Oscilação do envelope transversal e longitudinal para a ressonância da Fig. C.2.

Para mostrar que a frequência do movimento transversal é igual a do longitudinal, a Fig. C.3 apresenta a oscilação do envelope  $\rho_b$  e  $z_b$  contra o tempo para o ponto fixo da Fig. C.2. Os pontos pretos representam a condição utilizada para gerar o mapa de Poincaré.

# Bibliografia

- [1] C. D. Child. Discharge From Hot CaO. *Phys. Rev. (Series I)*, 32:492–511, May 1911.
- [2] I. Langmuir. The Effect of Space Charge and Initial Velocities on the Potential Distribution and Thermionic Current between Parallel Plane Electrodes. *Phys. Rev.*, 21:419–435, Apr 1923.
- [3] J. R. Pierce. Instability of Hollow Beams. *IRE Transactions on Electron Devices*, 3(4):183–189, Oct 1956.
- [4] *Bragg Curves and Peaks*, acesso em 09 de setembro de 2016. <https://www.bnl.gov/nsrl/userguide/bragg-curves-and-peaks.php>.
- [5] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, Jun 1973.
- [6] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, Jun 1973.
- [7] B. Schwarzschild. Have Heavy Ion Collisions at CERN Reached the Quark-Gluon Plasma? *Physics Today*, 53:20–23, May 2000.
- [8] A. Adare, et al. Enhanced Production of Direct Photons in Au + Au Collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV and Implications for the Initial Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 104:132301, Mar 2010.
- [9] V. Khachatryan, et al. Evidence for Collective Multiparticle Correlations in  $p$ -Pb Collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 115:012301, Jun 2015.
- [10] G. Aad, et. al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1):1 – 29, 2012.
- [11] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, Aug 1964.
- [12] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [13] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global Conservation Laws and Massless Particles. *Phys. Rev. Lett.*, 13:585–587, Nov 1964.

- [14] *What is IFMIF*, acesso em 19 de setembro de 2016. [http://www.ifmif.org/?page\\_id=6](http://www.ifmif.org/?page_id=6).
- [15] J. Knaster, et al. IFMIF, the European-Japanese efforts under the Broader Approach agreement towards a Li(d,xn) neutron source: Current status and future options. *Nuclear Materials and Energy*, 000:1–9, 2016.
- [16] P.A.P. Nghiem, et al. The IFMIF-EVEDA challenges in beam dynamics and their treatment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 654(1):63–71, 2011.
- [17] S.P. Simakov, et al. Activation of the IFMIF prototype accelerator and beam dump by deuterons and protons. *Fusion Engineering and Design*, 83(10-12):1543–1547, 2008.
- [18] P.A.P. Nghiem, et al. Dynamics of the IFMIF very high-intensity beam. *Laser and Particle Beams*, 32(1):109–118, 001 2014.
- [19] W. Simeoni, F. B. Rizzato, and R. Pakter. Nonlinear coupling between breathing and quadrupole-like oscillations in the transport of mismatched beams in continuous magnetic focusing fields. *Physics of Plasmas*, 13(6), 2006.
- [20] Tarcísio N. Teles, Renato Pakter, and Yan Levin. Relaxation and emittance growth of a thermal charged-particle beam. *Applied Physics Letters*, 95(17):173501, 2009.
- [21] Yan Levin, Renato Pakter, and Tarcísio N. Teles. Collisionless relaxation in non-neutral plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 100:040604, Jan 2008.
- [22] Tarcísio N. Teles, Renato Pakter, and Yan Levin. Emittance growth and halo formation in the relaxation of mismatched beams. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 13:114202, Nov 2010.
- [23] R.C. Davidson and H. Qin. *Physics of Intense Charged Particle Beams in High Energy Accelerators*. Imperial College Press, 2001. ISBN 9781860943010.
- [24] I.U.L. Klimontovich. *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*. Pergamon Press, 1982. ISBN 9780080216713.
- [25] N.A. Krall and A.W. Trivelpiece. *Principles of plasma physics*. McGraw-Hill, 1973. ISBN 9780070353466.
- [26] Luiz F. Ziebell. *Notas de aula de FIP20810, Tópico em Física Não Linear, Plasmas e Fluidos: Física de Plasmas A*, 2014 (acesso em 23 de setembro de 2016). [http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas\\_aula.pdf](http://www.if.ufrgs.br/~ziebell/fip20810/notas_aula.pdf).
- [27] F.F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, 1984. ISBN 0306413329.
- [28] Yan Levin, Renato Pakter, Felipe B. Rizzato, Tarcísio N. Teles, and Fernanda P.C. Benetti. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions. *Physics Reports*, 535(1):1–60, 2014.

- [29] M. Kac, G. E. Uhlenbeck, and P. C. Hemmer. On the van der Waals Theory of the Vapor-Liquid Equilibrium. I. Discussion of a One-Dimensional Model. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2):216–228, 1963.
- [30] W. Braun and K. Hepp. The Vlasov Dynamics and Its Fluctuations in the  $1/N$  Limit of Interacting Classical Particles. *Communications in Mathematical Physics*, 56(2):101–113, 1977.
- [31] Yoshiyuki Y. Yamaguchi, Julien Barré, Freddy Bouchet, Thierry Dauxois, and Stefano Ruffo. Stability criteria of the Vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 337(1-2):36–66, 2004.
- [32] Kavita Jain, Freddy Bouchet, and David Mukamel. Relaxation times of unstable states in systems with long range interactions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007(11):P11008, 2007.
- [33] T. N. Teles, Y. Levin, and R. Pakter. Statistical mechanics of 1D self-gravitating systems: the core-halo distribution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 417(1):L21–L25, 2011.
- [34] Yan Levin, Renato Pakter, and Felipe B. Rizzato. Collisionless relaxation in gravitational systems: From violent relaxation to gravothermal collapse. *Phys. Rev. E*, 78:021130, Aug 2008.
- [35] F. COMBES, M. Seymour, P. Boissé, A. Mazure, and A. Blanchard. *Galaxies and Cosmology*. Springer Berlin Heidelberg, 2004. ISBN 9783540419273.
- [36] J. Rosenzweig and L. Serafini. *The Physics of High Brightness Beams: Proceedings of the 2nd ICFA Advanced Accelerator Workshop*. World Scientific, 2000. ISBN 9789810244224.
- [37] C. Jarzynski and G. F. Bertsch. Numerical convergence in solving the Vlasov equation. *Phys. Rev. C*, 53:1028–1031, Feb 1996.
- [38] M. Reiser. *Theory and Design of Charged Particle Beams*. Wiley, 2008. ISBN 9783527622054.
- [39] J.D. Lawson. *The Physics of Charged-particle Beams*. Clarendon Press, 1988. ISBN 9780198517191.
- [40] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. ISBN 9780471309321.
- [41] R. Erickson, T. Fieguth, L. Keller, and D. Walz. SLAC A-Line Upgrade to 50 GeV. *1992 Linear Accelerator Conference Proceedings*, SLAC-PUB-5891, 1992.
- [42] Thales M. Corrêa da Silva, Renato Pakter, Felipe B. Rizzato, and Yan Levin. Halo formation and emittance growth in the transport of spherically symmetric mismatched bunched beams. *Physics of Plasmas*, 22(2):023102, 2015.

- [43] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of Physics*. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470469118.
- [44] N.A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007. ISBN 9788588325241.
- [45] Allan J. Lichtenberg and M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1992. ISBN 3-540-97745-7.
- [46] T. P. Wangler, K. R. Crandall, R. Ryne, and T. S. Wang. Particle-core model for transverse dynamics of beam halo. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 1:084201, Dec 1998.
- [47] P. A. P. Nghiem, N. Chauvin, W. Simeoni, and D. Uriot. Core-halo issues for a very high intensity beam. *Applied Physics Letters*, 104(7):–, 2014.
- [48] R. Pakter and Chiping Chen. Electron beam halo formation in high-power periodic permanent magnet focusing klystron amplifiers. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 28(3):502–510, Jun 2000.
- [49] Thales M. Corrêa da Silva, Felipe B. Rizzato, Renato Pakter, and Yan Levin. Nonlinear stability in the transport of intense bunched beams. *Physics of Plasmas*, 23(11), 2016.
- [50] I. Hofmann. Stability of anisotropic beams with space charge. *Phys. Rev. E*, 57:4713–4724, Apr 1998.
- [51] Orion Ciftja, Arica Babineaux, and Nadia Hafeez. The electrostatic potential of a uniformly charged ring. *European Journal of Physics*, 30(3):623, 2009.
- [52] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1964. ISBN 9780486612720.
- [53] Steven M. Lund and Boris Bukh. Stability properties of the transverse envelope equations describing intense ion beam transport. *Phys. Rev. ST Accel. Beams*, 7:024801, Feb 2004.
- [54] Richard Fitzpatrick. *Fluid Mechanics*, 2012 (acesso em 20 de abril de 2015). <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/336L/Fluidhtml/node185.html>.