

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
TESE DE DOUTORADO

# Quebra da aproximação modulacional numa extensão multi modo da interação de tripleto<sup>†</sup>

César Abraham Torrico Chávez

Tese de Doutorado realizado sob orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de *Doutor em Física*.

Porto Alegre, 26 de dezembro de 2016

---

<sup>†</sup>Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pelo Centro Latino-Americano de Física (CLAF)

... *A Mary*

*...A ti, oh Dios de mis padres, te doy gracias y te alabo, porque me has dado sabiduría y fuerza, y ahora me has revelado lo que te pedimos; pues nos has dado a conocer el asunto del rey ... Daniel 2:23*

*Também agradeço a meu pai Félix, minha mãe Nelly e meus irmãos Isabel e Elías por toda vossa ajuda em todo sentido. Ao meu orientador o Prof. Rizzato por ter me orientado e ajudado com tanta paciência. Aos meus colegas do grupo Samuel, Eduardo e Paulo pela colaboração na pesquisa e em todo sentido. Às minhas tias Elena e Lourdes pelo apoio. A meus amigos e colegas de física da Bolívia: Joaquin, Benito, Andrea, Vladimir, Filiberto e Ramiro.*

## *Resumo*

*A abordagem modulacional fornece uma estrutura simplificada para descrever a interação não-linear de três ondas (tripleto) em regimes onde a frequência dos portadores é muito maior do que a frequência modulacional. No primeira parte deste trabalho investigamos a quebra da tradicional aproximação modulacional na interação de tripleto, que é precisa quando o acoplamento das três ondas é fraco. Examinamos os tipos de dinâmicas decorrentes quando o acoplamento se incrementa desde valores muito pequenos até valores grandes e detectamos uma transição abrupta para valores grandes onde as excursões de amplitude limitada do regime modulacional alcançam regiões muito maiores do espaço de fases. Na segunda parte, estudamos uma extensão multi modo da interação não-linear de três ondas e vemos que os limites da aproximação modulacional podem ser de fato muito restritivos. Para acoplamentos muito pequenos mostramos que todos os modos exibem modulações lentas na amplitude, porém a medida que incrementamos o acoplamento uma transição acontece e os modos mudam para um novo regime dinâmico onde nenhum deles pode mais ser visto como portadores harmônicos de alta frequência lentamente modulados. As estimativas para o acoplamento crítico e para os tempos de relaxação foram obtidos baseados em uma análise apropriada do tripleto mais instável.*

## *Abstract*

*The modulational approach provides a simplified structure to describe the non-linear interaction of three waves (triplet) in regimes where the carriers frequencies are much larger than the modulational frequency. In the first part of this work we investigate the breakdown of the traditional modulational approximation in the triplet interaction, which is accurate when the coupling between the three waves is weak. We examine the types of dynamics arising when the coupling is increased from very small values to larger values and we detect an abrupt transition for large values where the excursions of the limited amplitude of the modulational regime reach larger regions of the phase space. In the second part, we study a multimode extension of the non-linear interaction of three waves and we see that the limits of the modulational approximation can be indeed very restrictive. For very small couplings we show that all modes display slow amplitude modulations, but as we increase the coupling a transition happens and the modes change to a new dynamical regime where none of them can be seen as a slowly modulated high-frequency harmonic carrier. Estimates for the critical coupling and relax times have been obtained based on proper analysis of the most unstable triplet.*

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Além da aproximação modulacional na interação de tripleto de ondas</b>	<b>3</b>
1.1 Modelo Físico . . . . .	3
1.1.1 Lagrangeano completo . . . . .	3
1.2 A abordagem modulacional e sua comparação com simulações do Lagrangeano completo . . . . .	4
1.2.1 O Lagrangeano modulacional quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$ . . . . .	4
1.2.2 O Lagrangeano modulacional quando $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$ . . . . .	15
<b>2 Quebra da aproximação modulacional numa extensão multi modo da interação de tripleto</b>	<b>21</b>
2.1 Lagrangeano completo, seus parâmetros e condições iniciais . . . . .	22
2.1.1 Condições iniciais para o tripleto excitado . . . . .	23
2.2 Escalas de tempo para o tripleto isolado . . . . .	24
2.3 Escalas de tempo para o sistema multimodo . . . . .	25
2.4 Resultados numéricos . . . . .	29
2.4.1 Regime modulacional I: $\Omega_{fast} \ll \omega_1$ . . . . .	30
2.4.2 Regime II: $\Omega_{pump} \ll \omega_1 \lesssim \Omega_{fast}$ . . . . .	32
2.4.3 Regime III: $\Omega_{pump} \gtrsim \omega_1$ . . . . .	34
2.4.4 Verificação numérica da curva teórica: $t_{relax}(\varepsilon, N = 128, I_p = ctte.)$ . . . . .	35
2.4.5 Verificação numérica da curva teórica: $\varepsilon_{pump}(N = 128, I_p)$ . . . . .	38
<b>Conclusões</b>	<b>41</b>
<b>Referências</b>	<b>41</b>

# Introdução

No primeiro capítulo estudamos a quebra da aproximação modulacional na interação de triplete. A aproximação modulacional lenta para a dinâmica de modos portadores de alta frequência tem sido provada continuamente como uma técnica poderosa para tratar com sistemas que envolvem a interação de muitos graus-de-liberdade. Ao invés de descrever os modos oscilatórios nas suas pequenas escalas de tempo o espaço, a abordagem modulacional permite obter equações aproximadas para um conjunto de variáveis dinâmicas que variam mais suavemente: as amplitudes e as fases dos modos que interagem [1, 3].

As técnicas modulacionais tem sido aplicadas a uma variedade de esquemas físicos, desde ondas mecânicas em sólidos e meios sísmicos [5], ótica [17, 18], ondas gravitacionais de superfície [40], a ondas eletromagnéticas em plasmas e aceleradores de plasmas [19]-[32], e *free electron lasers* [33]-[37], algumas referencias de trabalhos experimentais em plasmas incluem [38, 39]. Em todos os casos, a condição necessária para precisão é que a interação dos modos seja suficientemente fraca para que as amplitudes e fases em efeito mudem em uma escala muito mais longa que a escala de tempo das frequências altas e a escala espacial do comprimento de onda dos portadores. A teoria modulacional tem tido sucesso particularmente no estudo de sistemas de três ondas, onde o intercambio de energia envolvendo os três modos é possível se instabilidades paramétricas estejam presentes. O triplete de ondas é uma referencia no estudo de interação não-linear de ondas e estruturas interativas mais complexas que podem ser frequentemente entendidas com base a partições de três ondas [19]. Ele surge como uma entidade de importância física, a medida que um seleciona os três modos mais proeminentes de um sistema oscilatório e investiga a dinâmica acoplada destes modos selecionados como um subsistema isolado. Em geral, um modo inicia-se com um conteúdo energético considerável, o qual é trocado com os outros dois modos em uma forma ressonante. Condições ressonantes, por conseguinte, um ingrediente chave para uma interação ativa dos modos, são definidas como as condições de casamento para as frequências altas dos portadores lentamente modulados envolvidos na interação. O decaimento do modo “1” nos outros dois (“2” e “3”), por exemplo, é favorecido quando a condição ressonante  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$  entre as três frequências altas é observada [26]. Vê-se imediatamente que, na sua forma canônica, condições ressonantes são fortemente baseadas em uma clara separação entre as escalas de tempo referentes à dinâmica de altas frequências e à dinâmica modulacional lenta. No entanto, existe uma série de casos onde tal distinção entre escalas de tempo não é tão clara. O fato é que, embora a frequência alta tenda a ser um parâmetro fixo para cada um dos modos interagentes, a baixa frequência associada ao processo modulacional cresce com as amplitudes e com a intensidade do acoplamento das ondas envolvidas. Se para amplitudes ou intensidades de acoplamento suficientemente grandes a frequência modulacional se torna comparável à frequência dos portadores:  $\Omega_{modulacional} \sim \omega_i$ , a aproximação modulacional falha [27, 28]. A física de plasmas fornece um caso conhecido em que este cenário se aplica. Em um plasma, as ondas de Langmuir, que são modos vibrando com uma frequência grande chamada frequência de plasma, interagem com as ondas íon-acústicas de baixa frequência [15]. Para amplitudes extremamente baixas, o acoplamento da onda é pequeno e a frequência modulacional é menor que a frequência

---

baixa dos portadores íon-acústicos. No entanto, quando se incrementa as amplitudes do modo, a frequência característica dos modos íon-acústicos torna-se comparável à frequência modulacional e a abordagem modulacional falha [10]. Outros casos envolvendo configurações diferentes [11] apontam para a mesma direção, então é de relevância uma análise aprofundada do problema. A descrição modulacional de um sistema de onda é uma grande conquista que simplifica o que pelo contrário seria uma dinâmica de multimodo complicada. A dinâmica completa é simplificada, uma vez que é feita a média sobre as rapidamente variantes fases das ondas dos portadores, permitindo assim a interação ser examinada em termos de quantidades estatisticamente observáveis.

Enquanto um tripleto isolado pode bem representar casos onde condições ressonantes favorecem só três modos ao mesmo tempo [21], frequentemente o caso é que um número maior de modos pode participar simultaneamente na interação não-linear. Tal é o caso quando um modo fundamental interage com seu próprio harmônico em um meio onde a velocidade de fase de ondas relevantes é aproximadamente constante. Aqui, dependendo da qualidade linear da relação de dispersão associada, muitos tripletos misturados são excitados a partir de um modo inicial e a abordagem do tripleto isolado pode ao máximo servir como uma ajuda para entender um sistema maior e mais complexo [7].

Assim por exemplo entre as extensões de interação de quatro ondas temos aplicações em: ondas gravitacionais de superfície [44, 45, 49] e ondas de plasma [46, 47, 48].

Já no caso de extensões de interações de muitas ondas existem um número menor de trabalhos, entre eles podemos citar: estudos teóricos [50], interações de multi modos em ótica [51, 52], estudos teóricos de sistemas dispersivos de multi-ondas [53], modelos de multi-ondas para ondas gravitacionais de superfície [54, 55], modelos de multi ondas para a interação de elétrons com ondas de plasma [56, 57, 58], e *free-electron laser* [59]. E na maioria deles não se faz um estudo da validade da aproximação modulacional.

E por esta razão que no segundo capítulo nos focamos em uma extensão multimodo [60] da interação de tripleto para estudar o comportamento correspondente a medida que o acoplamento não-linear entre os vários modos se incrementa. A questão a ser examinada é basicamente se há ou não uma intensidade de acoplamento que define a transição de um tipo de dinâmica mais suave a menos regular, semelhantemente ao que ocorre com um tripleto isolado. Como veremos, a transição será em efeito identificada e considerada de relevância para campos de onda não-lineares com não linearidades cúbicas nas correspondentes funções Lagrangeanas ou Hamiltonianas. Não só isso, mas veremos que no caso onde um número grande de modos estão envolvidos ativamente na dinâmica, o acoplamento crítico vem a ser surpreendentemente pequeno.

# Capítulo 1

## Além da aproximação modulacional na interação de tripleto de ondas

*Neste capítulo investigamos a quebra da tradicional aproximação modulacional na interação não-linear de três ondas, a interação de tripleto de onda. Uma maneira comum de descrever a interação de três portadores de alta frequência é assumir que as amplitudes e fases são lentamente moduladas. Esta é a base da abordagem modulacional, que é precisa quando o acoplamento das três ondas é fraco. Examinamos os tipos de dinâmicas decorrentes quando o acoplamento se incrementa desde valores muito pequenos até valores grandes. Detectamos uma transição abrupta para valores grandes onde as excursões de amplitude limitada do regime modulacional alcançam regiões muito maiores do espaço de configuração apropriado. Extensões para casos semelhantes também são investigadas.*

Neste capítulo, vamos a focar nossa atenção no problema da interação envolvendo três modos oscilantes puramente no domínio temporal. A dependência espacial será deixada de lado e reservada para uma futura investigação. As condições ressonantes envolvendo as frequências dos portadores serão cumpridas, porém não serão feitas suposições *a priori* sobre os regimes modulacionais lentos. Desta forma, seremos capazes de construir um conjunto completo de equações e examinar a transição de um regime modulacional genuíno até e além da quebra das aproximações modulacionais.

O presente capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 1.1 discutimos o modelo físico básico e introduzimos o correspondente conjunto completo de equações com a quais estaremos trabalhando; na Seção 1.2 obtemos as aproximações modulacionais para o conjunto completo em um número de configurações físicas relevantes, comparamos as aproximações com simulações completas e examinamos o que acontece além da quebra da abordagem de modulacional.

### 1.1 Modelo Físico

#### 1.1.1 Lagrangeano completo

Começamos com o Lagrangeano para três modos interagentes 1, 2, 3 na forma

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 g_{1,2,3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde as frequências naturais dos três modos são denotadas por  $\omega_i$ , com  $i=1, 2, 3$ . O parâmetro  $\varepsilon_1$  mede a intensidade do acoplamento do tripleto representado pelo produto  $x_1x_2x_3$ , e o fator de forma  $g_{1,2,3}$  é escolhido para garantir circunscrição da dinâmica a regiões finitas do espaço de fases. No presente trabalho escolhemos  $g_{1,2,3} = g(x_1, x_2, x_3) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)/\sigma^2}$  com um valor relativamente grande de  $\sigma$ , a saber:  $\sigma = 100$ . A medida que a soma quadrática  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \gg \sigma^2$  excede o valor de  $\sigma^2$  a interação é automaticamente desligada com  $g \rightarrow 0$  e o potencial harmônico restante impede que as coordenadas tendam para o infinito. Por outro lado, quando,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ll \sigma^2$ ,  $g \rightarrow 1$  e o acoplamento atua como uma pequena perturbação produzindo as pequenas mudanças modulacionais na amplitude e fase dos modos; é aqui onde um encontra-se no regime modulacional lento. O Lagrangeano é similar a modelos usados na análise de ressonâncias paramétricas em sistemas altamente não-lineares de três modos interagentes [8]. A forma particular para o potencial não-linear escolhida aqui permite avaliar o papel da interação de tripleto de onda. Para ver isto escrevemos as equações de Euler-Lagrange ( $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, 3$ ) para os três modos envolvidos,

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i - \varepsilon_1 x_j x_k \left(1 - \frac{2x_i^2}{\sigma^2}\right) e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)/\sigma^2} \quad (1.2)$$

Nesta notação compacta, todos os três índices  $i, j$  e  $k$  tomando valores desde 1 até 3 diferem um do outro. Fica claro que a dinâmica do modo  $i$  é afetada pelo termo do produto  $x_j x_k$ , a assinatura da interação de tripleto.

Pode se ver que não introduzimos nem dissipação [9] nem efeitos de banda larga [20] no nosso modelo. A dinâmica pode ser caótica e incoerente, porém, se isso ocorre é devido exclusivamente a efeitos não-lineares dos três-graus-de-liberdade. Comparações apropriadas com efeitos decorrentes da incoerência de banda larga serão deixados para investigações futuras. O principal assunto que pretendemos analisar neste capítulo é a validade da aproximação modulacional do Lagrangeano completo introduzido pela expressão (1.1). Dedicaremos as seguintes duas seções a esta tarefa.

## 1.2 A abordagem modulacional e sua comparação com simulações do Lagrangeano completo

### 1.2.1 O Lagrangeano modulacional quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

A estrutura mais usual para a abordagem modulacional é aquela em que todos os modos têm frequências dos portadores com a mesma ordem de grandeza, todos os quais são muito maiores do que as frequências modulacionais das correspondentes fases e amplitudes modais. Como mencionado anteriormente, veremos que isso requer valores suficientemente pequenos do coeficiente de acoplamento do tripleto  $\varepsilon_1$  para uma determinada amplitude do modo.

Para implementar a ideia de modulações lentas, escrevemos cada modo do tripleto na forma

$$x_i = \sqrt{\frac{2A_i(t)}{\omega_i}} \sin(\omega_i t + \phi_i(t)), \quad (1.3)$$

com

$$\dot{x}_i = \sqrt{\frac{1}{2\omega_i A_i(t)}} \dot{A}_i \sin(\omega_i t + \phi_i(t)) + \sqrt{\frac{2A_i(t)}{\omega_i}} \cos(\omega_i t + \phi_i(t)) (\omega_i + \dot{\phi}_i(t)), \quad (1.4)$$

onde, em contraste com o caso desacoplado onde  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , agora supomos que a amplitude  $A_i$  e a fase  $\phi_i$  adquiram uma dependência lenta com o tempo satisfazendo  $\frac{\dot{A}_i}{A_i} \sim \frac{\dot{\phi}_i}{\phi_i} \sim \Omega \ll \omega_i$ . A

freqüência  $\Omega$  será definida em breve e neste ponto pode ser vista como uma medida da escala de tempo lenta do problema.

Supondo – sem perda de generalidade – uma condição ressonante ativa da forma  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ , inserimos as expressões (1.3) e (1.4) no Lagrangeano  $L$  (1.1) e fazemos uma média sobre qualquer das escalas de alta freqüência para obter o Lagrangeano médio no tempo [2]

$$\mathcal{L} \equiv T^{-1} \int_0^T L(t + \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \right) d\tau, \quad (1.5)$$

onde a variável auxiliar  $\tau$  é utilizada aqui para efetuar a média requerida ao longo do intervalo de tempo fixo  $T$  muito mais longo do que o período de alta freqüência porém muito menor do que a escala modulacional. Fazemos notar que uma vez que  $T$  é muito menor do que a escala de tempo das modulações, as amplitudes e fases lentamente moduladas podem ser considerados constantes no processo de cálculo da média. O primeiro termo dentro da integral é

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 d\tau, \quad (1.6)$$

usando a expressão (1.4) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 &= \frac{\dot{A}_i^2}{A_i \omega_i} \sin^2(\omega_i \tau + \phi_i) + \frac{A_i}{\omega_i} \cos^2(\omega_i \tau + \phi_i) (\omega_i^2 + \dot{\phi}^2 + 2\omega_i \dot{\phi}_i) \\ &\quad + 2 \frac{\dot{A}_i}{\omega_i} \sin(\omega_i \tau + \phi_i) \cos(\omega_i \tau + \phi_i) (\omega_i + \dot{\phi}_i) \end{aligned} \quad (1.7)$$

então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \dot{x}_i^2 d\tau, \\ &\quad \frac{\dot{A}_i^2}{A_i \omega_i} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau + A_i \omega_i \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau \\ &\quad + \frac{A_i}{\omega_i} \dot{\phi}_i^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau + 2A_i \dot{\phi}_i \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau + \\ &\quad + 2\dot{A}_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_i \tau + \phi_i) \cos(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau + 2\dot{A}_i \dot{\phi}_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_i \tau + \phi_i) \cos(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Como os produtos  $\sin^2(\omega_i \tau + \phi_i)$  e  $\cos^2(\omega_i \tau + \phi_i)$  são funções pares suas médias ao longo de um período são não nulas, tal que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau = \frac{1}{2}, \quad (1.9)$$

porém, como o produto  $\sin(\omega_i \tau + \phi_i) \cos(\omega_i \tau + \phi_i)$  é uma função ímpar sua média temporal ao longo de um período é nula, tal que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_i \tau + \phi_i) \cos(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau = 0. \quad (1.10)$$

Portanto, o primeiro termo do Lagrangeano médio fica

$$\mathcal{L}_a = \frac{\dot{A}_i^2}{2A_i \omega_i} + \frac{A_i \omega_i}{2} + \frac{A_i \dot{\phi}_i^2}{2\omega_i} + A_i \dot{\phi}_i, \quad (1.11)$$

onde o termo  $\frac{A_i^2}{2A_i\omega_i} \sim 0$  é negligenciado porque  $\frac{A_i}{A_i} \ll 1$ , assim como o termo  $\frac{A_i\dot{\phi}_i^2}{2\omega_i} \sim 0$  porque leva em conta a taxa de variação da frequência em segunda ordem, com o que finalmente obtemos

$$\mathcal{L}_a \approx \sum_{i=1}^3 \left( \frac{A_i\omega_i}{2} + A_i\dot{\phi}_i \right). \quad (1.12)$$

O segundo termo dentro da integral da expressão (1.5) resulta ser

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b &= -\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 d\tau = -\frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^3 A_i \omega_i \sin^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau = -\sum_{i=1}^3 A_i \omega_i \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_i \tau + \phi_i) d\tau \\ &\approx -\sum_{i=1}^3 \frac{A_i \omega_i}{2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

O terceiro termo dentro da integral da expressão (1.5) é

$$\mathcal{L}_c = -\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_1 x_i x_j x_k e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} d\tau, \quad (1.14)$$

porém no regime modulacional temos,  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ll \sigma^2$ , o que implica  $g_{1,2,3} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \rightarrow 1$  de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &\approx -\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_1 x_i x_j x_k d\tau \\ &= -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin(\omega_i \tau + \phi_i) \sin(\omega_j \tau + \phi_j) \sin(\omega_k \tau + \phi_k)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned} \theta_i &\equiv \omega_i t + \phi_i \\ \theta_j &\equiv \omega_j t + \phi_j \\ \theta_k &\equiv \omega_k t + \phi_k \end{aligned} \quad (1.16)$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_c &= -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin \theta_i \sin \theta_j \sin \theta_k) d\tau \\
 &= -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{e^{i\theta_i} - e^{-i\theta_i}}{2i} \frac{e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_j}}{2i} \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2i} \right) d\tau \\
 &= -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{-1}{4} \right) \left( e^{i(\theta_i + \theta_j)} - e^{i(\theta_i - \theta_j)} - e^{-i(\theta_i - \theta_j)} + e^{-i(\theta_i + \theta_j)} \right) \left( \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2i} \right) d\tau \\
 &= \varepsilon_1 \left( \frac{1}{8i} \right) \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( e^{i(\theta_i + \theta_j + \theta_k)} - e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k)} - e^{-i(\theta_i - \theta_j - \theta_k)} + e^{-i(\theta_i + \theta_j - \theta_k)} \right. \\
 &\quad \left. - e^{i(\theta_i + \theta_j - \theta_k)} + e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k)} + e^{-i(\theta_i - \theta_j + \theta_k)} - e^{-i(\theta_i + \theta_j + \theta_k)} \right) d\tau \\
 &= \varepsilon_1 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8A_i A_j A_k}{\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{e^{i(\theta_i + \theta_j + \theta_k)} - e^{-i(\theta_i + \theta_j + \theta_k)}}{2i} - \frac{e^{i(\theta_i - \theta_j + \theta_k)} - e^{-i(\theta_i - \theta_j + \theta_k)}}{2i} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{i(\theta_i + \theta_j - \theta_k)} - e^{-i(\theta_i + \theta_j - \theta_k)}}{2i} + \frac{e^{i(\theta_i - \theta_j - \theta_k)} - e^{-i(\theta_i - \theta_j - \theta_k)}}{2i} \right) d\tau \\
 &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i A_j A_k}{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k) - \sin(\theta_i - \theta_j + \theta_k) - \sin(\theta_i + \theta_j - \theta_k) \\
 &\quad + \sin(\theta_i - \theta_j - \theta_k)) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Usando as relações (1.16) e a condição de ressonância  $\omega_i = \omega_j + \omega_k$  vemos que a maioria dos argumentos das funções senoidais em (1.17) dependem do tempo:

$$\begin{aligned}
 \theta_i + \theta_j + \theta_k &= 2\omega_i \tau + \phi_i + \phi_j + \phi_k \\
 \theta_i - \theta_j + \theta_k &= \phi_i - \phi_j - \phi_k \\
 \theta_i + \theta_j - \theta_k &= 2\omega_k \tau + \phi_i - \phi_j + \phi_k \\
 \theta_i - \theta_j - \theta_k &= 2\omega_j \tau + \phi_i + \phi_j - \phi_k
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

com exceção do termo  $\theta_i - \theta_j + \theta_k = \phi_i - \phi_j - \phi_k$  que é considerado como constante porque as fases dos modos permanecem quase constantes na escala de tempo lento do regime modulacional. Uma vez introduzidas as últimas relações em (1.17) podemos ver que os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega_i \tau + \phi_i + \phi_j + \phi_k) d\tau &= 0, \\
 \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega_k \tau + \phi_i - \phi_j + \phi_k) d\tau &= 0, \\
 \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega_j \tau + \phi_i + \phi_j - \phi_k) d\tau &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

são nulos porque a média temporal da função senoidal ao longo de um período  $T$  é nula, de forma que o terceiro termo fica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i A_j A_k}{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\phi_i - \phi_j - \phi_k) d\tau \\ &= \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i A_j A_k}{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \sin(\phi_i - \phi_j - \phi_k) \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \\ &\approx \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i A_j A_k}{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \sin(\phi_i - \phi_j - \phi_k).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Finalmente juntando os três termos temos que o Lagrangeano médio é dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c \\ \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^3 A_j \dot{\phi}_j + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)\end{aligned}\quad (1.21)$$

que ainda depende do tempo  $t$ , mas apenas através da escala de tempo lento.

As equações de Euler-Lagrange para as seis variáveis dinâmicas presentes no Lagrangeano (1.21),  $A_i$ ,  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), podem ser escritas na forma (com  $\varphi \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$ )

$$\dot{A}_i = \varepsilon_1 (-1)^{[(2-i)(3-i)+2]/2} \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi), \quad (1.22)$$

$$\dot{\phi}_i = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i^{-1} A_j A_k}{8\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi), \quad (1.23)$$

onde, de forma semelhante à notação compacta utilizada na Eq. (1.2), todos os símbolos são diferentes na Eq. (1.23). Em particular, a combinação das equações para as amplitudes  $A_i$  permite obter as quantidades conservadas de Manley-Rowe  $I_{2,3} = A_1 + A_{2,3}$  [1], com as quais, considerando o caso  $I = I_2 = I_3$  por razões de simplicidade, então temos que:

$$I = A_1 + A_2 \quad \text{e} \quad I = A_1 + A_3 \quad \text{o qual implica que} \quad A_3 = A_2. \quad (1.24)$$

Desta forma obtemos um único conjunto de equações modulacionais acopladas para  $A_1$  e  $\varphi$ :

$$\dot{A}_1 = \varepsilon_1 \frac{(I - A_1) \sqrt{A_1}}{\sqrt{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi), \quad (1.25)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{8\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \left( \frac{(I - A_1)}{\sqrt{A_1}} - 2\sqrt{A_1} \right). \quad (1.26)$$

O conjunto acoplado (1.25) e (1.26) admite pontos fixos cercados por órbitas cada vez mais não-lineares. As órbitas próximas aos pontos fixos pode ser bem descrita por aproximações lineares e oferecer estimativas precisas sobre a frequência modulacional do sistema.

O ponto fixo ( $fp$ ) pode ser imediatamente obtido quando se exige  $\dot{A}_1 = \dot{\varphi} = 0$

$$\varphi_{fp} = \pm\pi/2, \quad (1.27)$$

$$A_{fp} = I/3, \quad (1.28)$$

e a frequência com que as flutuações lineares das variáveis dinâmicas oscilam em torno dos pontos fixos pode ser escrita na forma conveniente

$$\Omega = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{I}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} = \varepsilon_1 \left( \frac{I}{2\omega_1^3 \omega_2 \omega_3} \right)^{1/2} \omega_1. \quad (1.29)$$

A expressão (1.29) serve como a nossa definição formal para a frequência modulacional  $\Omega$ , a qual, como mencionamos anteriormente, deve ser vista como uma medida do processo modulacional lento envolvendo os portadores. A partir da relação 1.29 podemos observar dois aspectos da teoria:

1. Por um lado, considerando todas as frequências com a mesma ordem de grandeza,  $\omega_j \sim \mathcal{O}(1)$  e para valores suficientemente grandes de  $\varepsilon_1$  e amplitudes tais que  $\varepsilon_1 I^{1/2} \sim 1$ , vemos que a aproximação modulacional é válida enquanto a frequência modulacional seja menor do que as frequências dos portadores  $\Omega \ll \omega_j$ .
2. Por outro lado, quando o máximo valor da frequência modulacional é da ordem da menor das frequências ( $\omega_3 < \omega_2 < \omega_1$ ) dos portadores:  $\Omega_{max} = \omega_3$ , podemos estimar o valor crítico de acoplamento  $\varepsilon_{1crit}$ , a partir do qual a aproximação modulacional falha:

$$\Omega_{max} = \omega_3 = \varepsilon_{1crit} \sqrt{\frac{I}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \rightarrow \varepsilon_{1crit} = \sqrt{\frac{2\omega_1\omega_2\omega_3^3}{I}}. \quad (1.30)$$

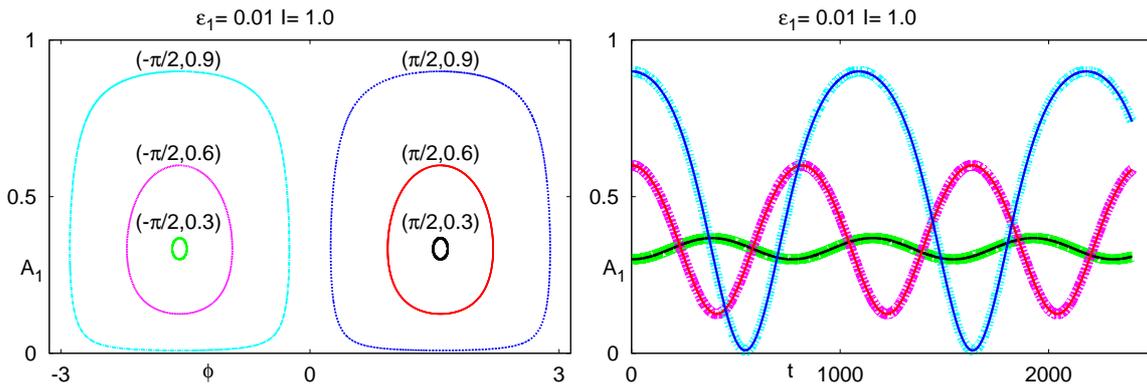


Figura 1.1: (a) Estrutura orbital da aproximação modulacional, para distintas condições iniciais (porém sempre com  $I = 1$ ). Notar a presença dos pontos fixos em  $A_{fp} = I/3$  e  $\varphi_{fp} = \pm\pi/2$ . (b) Series temporais da variável  $A_1(t)$  correspondentes às órbitas mostradas na Fig. 1.1(a).

Nossa primeira figura, Fig. 1.1, mostra a estrutura do espaço de fases associado com as variáveis  $\varphi$  e  $A_1$ . A Fig. 1.1(a) foi obtida por integração direta das Eqs. (1.25) e (1.26) para várias condições iniciais,  $(A_1(0), \varphi(0))$  que estão rotuladas na figura, mas também pode ser obtida considerando curvas de contorno da função de energia conservada  $E_{\mathcal{L}} = \sum \dot{\phi}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_j} + \sum \dot{A}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} - \mathcal{L}$ . Para gerar a figura tomamos  $\omega_1 = 1.5$ ,  $\omega_2 = 1$ , e  $\omega_3 = 0.5$ , junto com  $\varepsilon_1 = 0.01$  e  $I = 1$ .

Vê-se claramente na Fig. 1.1 os pontos fixos orbitais e as órbitas co-focais em torno deles, a mais próxima das quais obedece a dinâmica linear mencionada e analisada acima. Longe dos pontos fixos as órbitas tornam-se cada vez mais não-lineares, até que atingem os extremos onde se vê que as condições do tipo  $A_1 \sim I$ ,  $A_2 = A_3 \sim 0$  podem ser realizadas. Ressaltamos que estas são condições de injeção típicas onde toda a energia da onda é fornecida pelo modo 1 em um meio inicialmente inativo. Independentemente das condições iniciais, as órbitas modulacionais representadas na Fig. 1.1(a) são simplesmente periódicas, tal como mostram as respectivas series temporais da amplitude  $A_1(t)$  mostradas na Fig. 1.1(b).

Neste ponto gostaríamos de examinar - e enfatizamos este como um objetivo principal deste capítulo - o que acontece quando a aproximação modulacional falha. A fim de fazer isso é necessário

comparar a dinâmica completa representada pela expressão (1.2), e sua aproximação modulacional representada pelas equações (1.25) e (1.26). Nosso procedimento é então estabelecer condições iniciais e frequências comuns para os conjuntos completos e modulacionais, e aumentar gradualmente o acoplamento  $\varepsilon_1$  desde valores pequenos onde se espera que a abordagem modulacional funcione, até valores o suficientemente grandes onde se espera que a abordagem modulacional falhe.

Para poder estabelecer condições iniciais comuns a ambos conjuntos procedemos da seguinte forma.

1. Conjunto modulacional:

Dadas as condições iniciais  $\rightarrow$  pelas relações 1.24 ficam definidas

$$A_1, I \rightarrow A_2 = I - A_1 = A_3 \quad (1.31)$$

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3 \rightarrow \varphi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \quad (1.32)$$

logo fazendo uso das equações (1.22) e (1.23)

a partir de  $\rightarrow$  obtemos suas respectivas derivadas

$$A_1, A_2, A_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3 \rightarrow \dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3 \quad (1.33)$$

2. Conjunto completo:

Finalmente

A partir das condições iniciais  $\rightarrow$  pelas relações 1.33 e as 1.3 e 1.4 obtemos

$$A_i, \phi_i \quad (i = 1, 2, 3) \rightarrow x_i = x_i(A_1, \phi_i) \quad (1.34)$$

$$A_i, \dot{A}_i, \phi_i, \dot{\phi}_i \quad (i = 1, 2, 3) \rightarrow \dot{x}_i = \dot{x}_i(A_i, \phi_i, \dot{A}_i, \dot{\phi}_i) \quad (1.35)$$

Nas duas figuras seguintes, repetimos as frequências dos portadores da Fig. 1.1, trabalhamos com amplitudes iniciais dos modos da ordem de um,  $A_j \sim \mathcal{O}(1)$  com  $A_1 = 0.5$  e  $I = 1.0$ , e escolhemos  $\phi_1 = \pi/2$ ,  $\phi_2 = 0$  e  $\phi_3 = 0$  de modo que a fase inicial fica  $\varphi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \pi/2$ . O parâmetro  $\sigma$  é fixado em  $\sigma = 100$ , portanto seu correspondente termo exponencial  $g_{1,2,3} \rightarrow 1$  e não afeta o regime modulacional onde as amplitudes são limitadas, no entanto quando as amplitudes tentam crescer indefinidamente,  $g_{1,2,3} \rightarrow 0$  e evita possíveis divergências mesmo além da quebra da aproximação modulacional, que para nosso conjunto de condições iniciais está prevista para um acoplamento crítico teórico de  $\varepsilon_{1crit-teo} = 0.61$ , obtido a partir da relação (1.30). Como veremos mais adiante o acoplamento crítico numérico  $\varepsilon_{1crit-num} = 0.49$ , obtido através de experimentos numéricos, cerca de 18.3% inferior ao valor teórico.

Vamos a começar com a Fig. 1.2, onde estudamos os efeitos de  $\varepsilon_1$  sobre a dinâmica dos modos. As três linhas desta figura mostram os gráficos para três valores distintos de acoplamento:  $\varepsilon_1 = 0.01$ ,  $0.45$  e  $0.49$  respectivamente. A primeira coluna compara a dinâmica exata com a aproximação modulacional onde escolhemos olhar  $x_1$  como função do tempo. A segunda coluna mostra uma projeção bi-dimensional da trajetória da órbita exata obtida integrando as equações (1.2), e finalmente a terceira coluna nos dá o retrato da estrutura tri-dimensional da órbita no espaço- $(x_1, x_2, x_3)$ .

Primeiro examinamos o caso de um valor pequeno de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.01$ , que corresponde aos gráficos da primeira linha da Fig. 1.2. O primeiro deles, a Fig. 1.2(a), mostra a comparação: da solução exata  $x_1(t)$  (em linhas azuis) do conjunto completo (1.2) com a aproximação modulacional (em linhas grossas) fornecida pelas Eqs. (1.25) e (1.26) e vemos que com efeito para tais valores pequenos do acoplamento  $\varepsilon_1$ , o envelope da solução completa concorda perfeitamente bem com

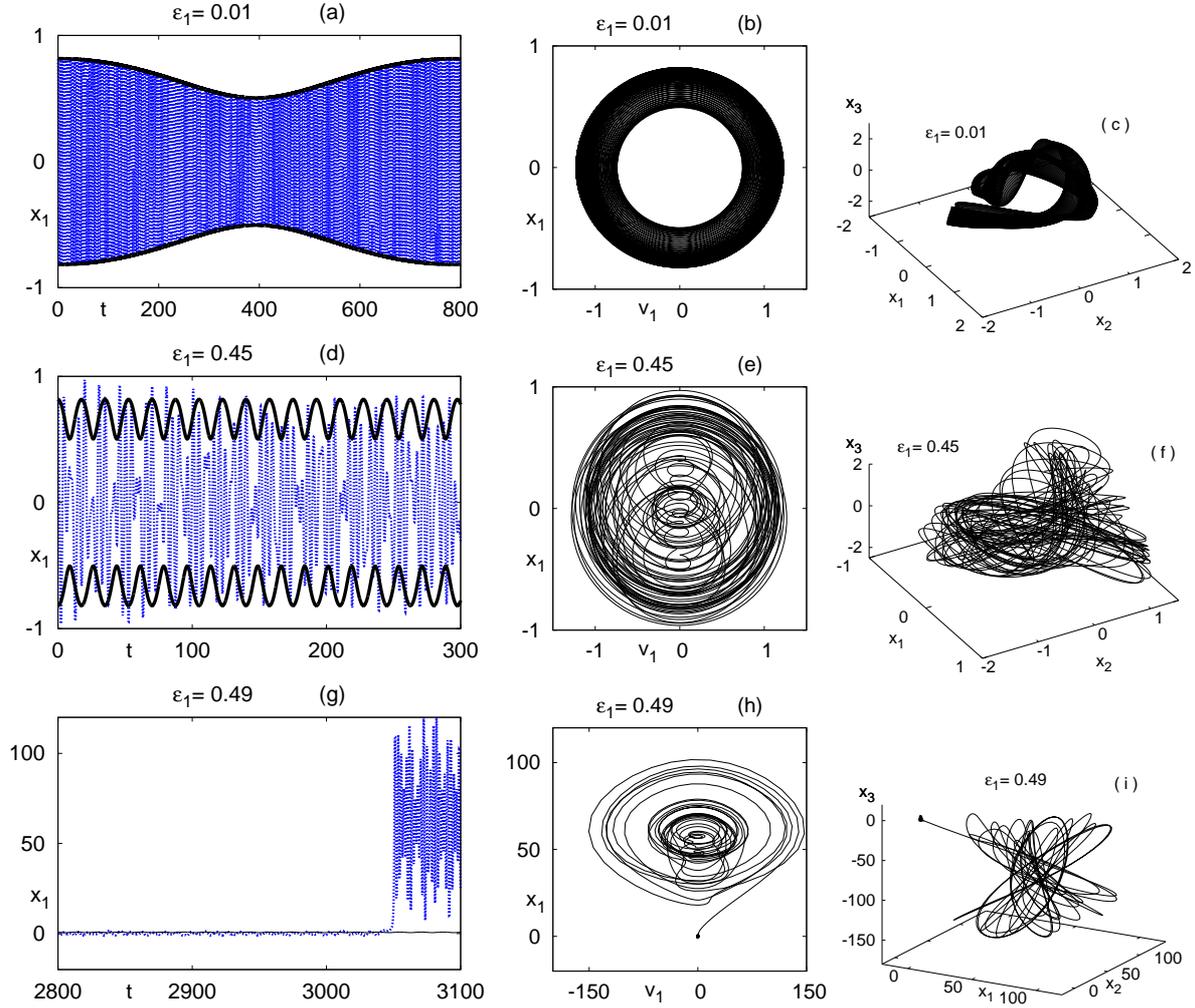


Figura 1.2: Os diferentes graus da aproximação modulacional quando  $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$ . Os valores para  $\varepsilon_1$  são 0.01, 0.45 e 0.49, para a primeira, segunda e terceira linhas da figura respectivamente. Os mesmos valores iniciais foram usados em todos os painéis. Nas figuras da primeira coluna as linhas grossas representam os envelopes  $\pm A_1$  da aproximação modulacional.

a amplitude modulada  $A_1$ , obtida a partir do conjunto modulacional. Ainda observamos que o portador de alta frequência executa um grande número de oscilações dentro do envelope lentamente modulado. Tudo isto é o que realmente se espera em um regime onde os modos do triplo são fracamente acoplados. A projeção bidimensional da órbita exata no plano- $(x_1, v_1)$  mostrada na Fig. 1.2(b) nos permite ver que a órbita associado gera um toro cuja estrutura tri-dimensional está mostrada na Fig. 1.2(c). Para complementar nossos gráficos da órbita exata no espaço de fases, adicionalmente calculamos o espectro dos expoentes de Lyapunov:  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$  associados às seis variáveis do conjunto completo para cada órbita. Para isto usamos o algoritmo de Wolf [61] fazendo uma renormalização a cada 10 passos de integração das equações

Tabela 1.1: Tabela de comparação entre os valores de acoplamento crítico  $\varepsilon_{1crit-teo}$  e  $\varepsilon_{1crit-num}$ , até onde é válida a aproximação modulacional para diferentes ordens de grandeza de  $I$ . Adicionalmente tabulamos os expoentes de Lyapunov correspondentes que caracterizam o tipo de órbita associada.

$I$	$\varepsilon_{1crit.}$	$\varepsilon_{1num.}$	$diff.\%$	$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$	órbita
$1 \times 10^{-3}$	19.4	15.2	-21.5%	(0.49, 0.13, 0, 0, -0.13, -0.49)	caótica (depois explo.)
$1 \times 10^{-2}$	6.12	4.9	-20.0%	(0.43, 0.22, 0, 0, -0.22, -0.43)	caótica (depois explo.)
$1 \times 10^{-1}$	1.94	1.6	-17.4%	(0.22, 0.11, 0, 0, -0.11, -0.22)	caótica (depois explo.)
$1 \times 10^0$	-	0.01	-	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	quase-per. (antes explo.)
$1 \times 10^0$	-	0.45	-	(0.06, 0.04, 0, 0, -0.03, -0.06)	caótica (antes explo.)
$1 \times 10^0$	0.61	0.49	-18.3%	(0.11, 0.05, 0, 0, -0.05, -0.11)	caótica (depois explo.)

completas (1.2) junto com suas respectivas equações variacionais:

$$\begin{aligned}
\delta \dot{x}_1 &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v_1} \delta v_1 + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v_2} \delta v_2 + \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial v_3} \delta v_3, \\
&\vdots \\
\delta \dot{v}_3 &= \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_3} \delta x_3 + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial v_1} \delta v_1 + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial v_2} \delta v_2 + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial v_3} \delta v_3,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

partindo das condições iniciais comuns para o conjunto completo e modulacional discutidas anteriormente. Os valores dos expoentes para este e outros valores de acoplamento estão tabulados na Tabela 1.1, onde podemos verificar que para este caso particular de acoplamento  $\varepsilon_1 = 0.01$  todos os expoentes são nulos, o qual confirma que a órbita em questão gera um toro e o a dinâmica do conjunto completo é quase-periódica.

Quando então se considera valores maiores de  $\varepsilon_1$ , porém inferiores ao  $\varepsilon < \varepsilon_{crit-num}$  a abordagem modulacional torna-se cada vez menos precisa. Consideremos o caso  $\varepsilon_1 = 0.45$  que corresponde aos gráficos da segunda linha da Fig. 1.2. Na Fig. 1.2(d) vê-se que embora o sistema completo (em linhas azuis) ainda execute oscilações limitadas, a concordância com a abordagem modulacional é quase inexistente. A órbita exata (em linhas azuis) da Fig. 1.2(d) é projetada no plano- $(x_1, v_1)$  na Fig. 1.2(e) onde pode-se ver uma estrutura caótica tal como também sugere a trajetória mostrada em três dimensões na Fig. 1.2(f). Se olharmos a Tabela 1.1 para este valor de acoplamento vemos que o sistema tem dois expoentes de Lyapunov positivos o qual confirma que a órbita é caótica. Este tipo de transição de uma dinâmica quase-periódica dentro de um toro para uma caótica, algumas vezes é referida como uma quebra do toro na bibliografia [6].

O comportamento intrigante, no entanto, vem quando o acoplamento atinge o valor crítico numérico  $\varepsilon_{1crit-num} = 0.49$ , para o qual a aproximação modulacional não é mais válida, que corresponde aos gráficos da terceira linha da Fig. 1.2. Na Fig. 1.2(g) vê-se que a solução exata sofre um comportamento explosivo. Até antes do salto abrupto de  $x_1(t)$  perto de  $t = 3050$ , a comparação entre o conjunto completo e modulacional é semelhante à Fig. 1.2(d) no sentido que: as oscilações são irregulares, porém limitadas. Logo para  $t > 3050$  ocorre o que chamamos a “explosão” de modo que a solução não permanece mais confinada na região de oscilações limitadas. A projeção bi-dimensional da órbita mostrada na Fig. 1.2(h) e a tri-dimensional mostrada na Fig. 1.2(i) nos permitem observar que depois de um determinado transiente de oscilações pequenas perto da origem repentinamente o sistema tem um comportamento explosivo depois do qual o conjunto completo tem uma dinâmica caótica de maiores amplitudes. Os expoentes para este valor maior

de acoplamento tabulados na Tabela 1.1 no permitem verificar que temos ainda dois expoentes positivos ligeiramente maiores ao caso  $\varepsilon = 0.45$ . Como mencionamos anteriormente pelos nossos experimentos numéricos e sob as condições iniciais estudadas aqui, vemos que o acoplamento crítico numérico  $\varepsilon_{1crit-num} \approx 0.49$  ilustrado na terceira linha da Fig. 1.2 é cerca de 18.3% a mais inferior ao valor crítico teórico  $\varepsilon_{1crit-teo} \approx 0.61$  estimado a partir da relação (1.30) (ver Tabela comparativa 1.1).

Como mencionamos anteriormente o valor crítico até onde a aproximação modulacional é válida depende das condições iniciais:  $I = I(A_1, A_2, A_3)$ , através da relação 1.30 para  $\varepsilon_{1crit-teo} = \varepsilon_{1crit-teo}(I)$ . De forma que os valores críticos dos acoplamentos podem ser estimados para diferentes ordem de magnitudes de:  $I = 1 \times 10^{-3}$ ,  $1 \times 10^{-2}$  e  $1 \times 10^{-1}$ . Logo através de experimentos numéricos semelhantes ao ilustrado na terceira linha da Fig. 1.2 para o caso  $I = 1 \times 10^0$ , pode-se determinar os valores de acoplamento críticos numéricos onde começa o comportamento explosivo. Isto foi feito e os dados obtidos estão tabulados na Tabela comparativa 1.1 onde pode-se apreciar que os valores críticos obtidos com os experimentos numéricos são aproximadamente 20% inferiores às estimativas teóricas.

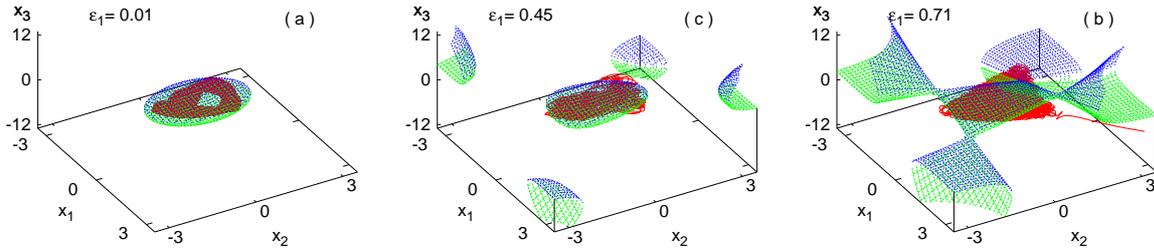


Figura 1.3: As superfícies de contorno das regiões permitidas. As energias totais nos painéis (a), (b) e (c) são correspondentemente as mesmas usadas na Fig. 1.2.

Agora queremos entender o que acontece a medida que o valor crítico de  $\varepsilon_1$  é atravessado. Afortunadamente, a forma de analisar o problema envolve nada mais do que uma análise da energia total do Lagrangeano completo (1.1) que está dada por:

$$\begin{aligned} E_L &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) + \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 g_{1,2,3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) + \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

de forma que para qualquer condição inicial, podemos mapear as regiões permitidas para a dinâmica subsequente. Estas regiões permitidas são simplesmente aquelas onde a energia cinética  $1/2 \sum \dot{x}_j^2 \geq 0$  não é negativa:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 = E_L - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2 - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \geq 0. \quad (1.38)$$

Para investigar a questão começamos exatamente com as mesmas condições iniciais e frequências que estamos usando até agora, e examinaremos as regiões permitidas a medida que o acoplamento  $\varepsilon_1$  é variado.

Vejamos a Fig. 1.3(a), onde reconsideramos o caso  $\varepsilon_1 = 0.01$ . Dentro da escala visualizada na figura, pode-se identificar apenas uma pequena região central, que encapsula a dinâmica

modulacional gerada pelas Eqns. (1.25) e (1.26). Em outras palavras, com a condição inicial colocada nesta região central, a dinâmica subsequente permanece confinada lá e é regular para tal valor pequeno do acoplamento. Em efeito vemos que a órbita mostrada anteriormente na Fig. 1.2(c) permanece dentro da região modulacional elipsoidal mostrada na Fig. 1.3(a). Então avançamos a um valor relativamente maior do acoplamento  $\varepsilon_1 = 0.45$ . Agora, em adição a região central, se observa claramente na Fig. 1.3(b) quatro regiões permitidas adicionais que se aproximam do centro. Iniciando dentro da região central a órbita permanece lá, porque as regiões adicionais estão separadas da central, por *gaps* de regiões não permitidas. A Fig. 1.2(f) mostra que a dinâmica para um valor maior de  $\varepsilon_1$  como este já perdeu o seu comportamento regular.

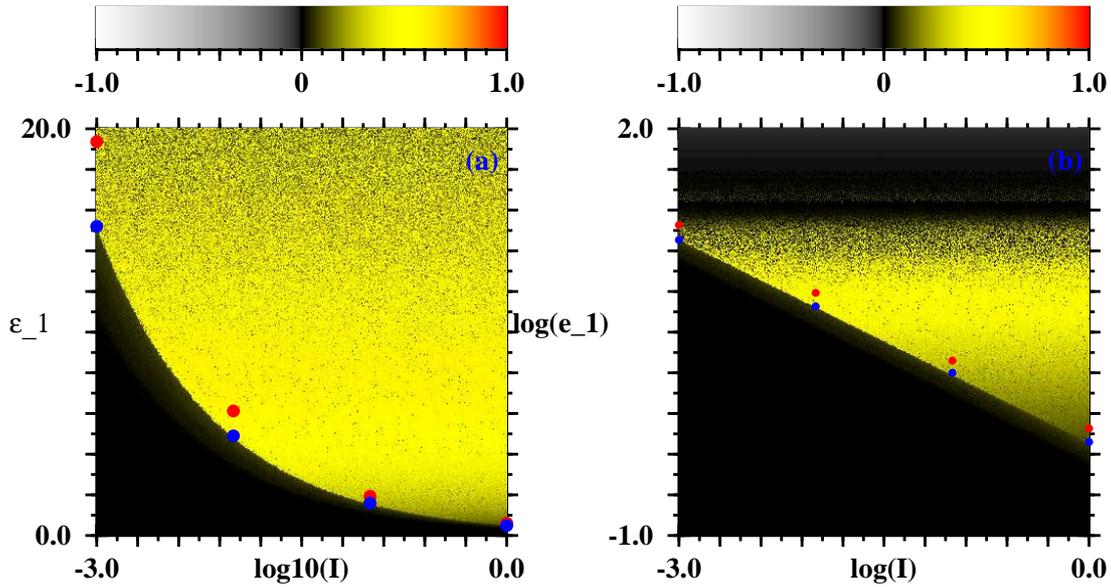


Figura 1.4: Painel (a): Diagrama de fases do espaço paramétrico- $(\log_{10}I, \varepsilon_1)$  obtido a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Os pontos vermelhos correspondem aos acoplamentos críticos teóricos dados pela curva crítica (1.29):  $\varepsilon_{1crit} = \sqrt{\frac{2\omega_1\omega_2\omega_3^3}{I}}$ , com  $\omega_1 = 1.5$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = 0.5$  e  $I = 1$ . Os pontos azuis correspondem aos acoplamentos críticos obtidos por experimentos numéricos onde ocorre a explosão das órbitas e a aproximação modulacional falha. Os respectivos valores das coordenadas dos pontos mostrados estão tabulados na Tabela 1.1. Painel(b): Diagrama de fases equivalente ao mostrado no painel (a) onde ambos eixos foram variados logaritmicamente.

Finalmente, a medida que incrementa-se o acoplamento até  $\varepsilon_1 = 0.7$ , o painel Fig. 1.3(c) revela que as regiões extra permitidas se conectam com a região central, e as excursões orbitais não estão mais restritas à antiga região modulacional. O caráter caótico da dinâmica permite à órbita explorar o espaço de configuração e encontrar o seu caminho longe do centro. Mais uma vez, não só a trajetória é extremamente irregular enquanto está na região central, mas eventualmente abandona o centro visitando os volumes permitidos do entorno. A transição é abrupta: depois de um tempo transitório explorando a região de pequenas amplitudes, a órbita rapidamente salta para longe do centro para excursões de amplitude muito maiores. A transição abrupta vista aqui tem sido observada no passado para sistemas de onda significativamente diferentes [1]. É portanto notável observar que este tipo de transição parece ser bastante comum na interação não-linear de modos.

Para finalizar esta seção e tentar validar a curva crítica dada pela relação (1.29),  $\varepsilon_{1crit} =$

$\sqrt{\frac{2\omega_1\omega_2\omega_3^3}{I}}$  varremos o espaço de parâmetros:  $(I, \varepsilon_1)$ , calculando o maior expoente de Lyapunov. O diagrama de fases gerado está mostrado na Fig. 1.4 onde as cores codificam o maior expoente de Lyapunov não nulo de acordo com a legenda na parte superior da figura. O lado esquerdo (direito) da legenda corresponde a expoentes negativos (positivos). Para cada pixel iniciamos a integração das equações do conjunto completo e suas respectivas equações variacionais partindo de condições iniciais comuns para o conjunto completo e modulacional descritas anteriormente. O conjunto fixo de frequências:  $\omega_1 = 1.5$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = 0.5$  e  $I = 1$ . é o mesmo das figuras anteriores. A curva crítica teórica dada pela relação(1.29):  $\varepsilon_{1crit} = \sqrt{\frac{2\omega_1\omega_2\omega_3^3}{I}}$ , está representada pelos pontos vermelhos. Os pontos azuis correspondem aos acoplamentos críticos numéricos discutidos anteriormente e tabulados na Tabela 1.1 para os quais ocorre a explosão das órbitas e a aproximação modulacional falha. Pode-se ver claramente de uma forma global que a transição real (numérica) para a explosão coincide com a transição de uma dinâmica quase-periódica para caótica do conjunto completo. Por outro lado os dados da Tabela 1.1 mostram que a concordância entre a curva teórica e os valores críticos numéricos para uma larga faixa de ordens de magnitude de  $I$  está em torno de 20%.

### 1.2.2 O Lagrangeano modulacional quando $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$

No segundo caso que desejamos examinar neste capítulo, uma das frequências dos portadores será considerada muito menor do que as outras. No presente trabalho tomaremos o modo 1 como o de baixa frequência.

Este é o típico regime de operação dos dispositivos de elétrons rarefeitos onde duas ondas de alta frequência lentamente moduladas excitam uma onda espacial de carga de baixa frequência. Em aceleradores de pulsos de ondas [16-18] e *free electron lasers*[19-21], por exemplo, os portadores de alta frequência são modos eletromagnéticos e o modo de baixa frequência é uma onda de plasma. A interação de ondas de Langmuir e ondas íon-acústicas mencionadas no início do capítulo podem ser adicionados como um outro caso de interação envolvendo ondas com grandes disparidades nas frequências dos portadores.

Só para relembrar escrevemos de novo o Lagrangeano completo

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 g_{1,2,3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \end{aligned} \quad (1.39)$$

a partir do qual as equações de Euler-Lagrange ( $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, 3$ ) para os três modos envolvidos do conjunto completo estão dadas por:

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i - \varepsilon_1 x_j x_k \left(1 - \frac{2x_i^2}{\sigma^2}\right) e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \quad (1.40)$$

Relembrando que o primeiro modo 1 é aquele com frequência mais baixa,  $\omega_1 \sim \delta \ll \omega_2 \sim \omega_3$ , a fim de investigar este caso realizamos a média temporal do Lagrangeano que agora chamamos

$$\mathcal{L}' \equiv \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2 + \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \right) d\tau, \quad (1.41)$$

somente sobre a escala de tempo mais rápido associada com as frequências mais altas,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ . Não vamos a supor, que a frequência do portador mais lento seja muito maior do que a frequência

modulacional,  $\omega_1 \ll \Omega$ , de modo que a aproximação modulacional só é usada para descrever os dois modos restantes de frequência:  $\omega_2$  e  $\omega_3$  mais elevadas. Com o cuidado de identificar quais são as variáveis de tempo lento aqui, o procedimento de fazer a média é semelhante ao empregado na Seção 1.2.1, com a variável temporal  $t$  novamente representando a dependência temporal lenta. Notamos que, no presente caso os modos 2 e 3 devem ter então suas frequências casadas,  $\omega_2 = \omega_3 + \omega_1 = \omega_3 + \delta$ , o qual em concordância com a Seção 1.1, em um sentido esgota as possíveis combinações ressonantes para um sistema de tripleto. Ressaltamos mais uma vez que enquanto o presente regime não cai propriamente na modelagem canônica estudado na Seção 1.2.1 anterior, é de extrema relevância para a eletrônica moderna [34]. Realizando os cálculos de forma semelhante às da Seção anterior o primeiro termo dentro da integral em (1.41) fornece

$$\mathcal{L}'_a = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \dot{x}_i^2 d\tau \approx \sum_{i=2}^3 \left( \frac{A_i \omega_i}{2} + A_i \dot{\phi}_i \right). \quad (1.42)$$

O segundo resulta ser

$$\mathcal{L}'_b = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \omega_i^2 \dot{x}_i^2 d\tau \approx -\sum_{i=2}^3 \frac{A_i \omega_i}{2}. \quad (1.43)$$

Já para o terceiro termo, lembrando que na aproximação modulacional  $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \ll \sigma^2$ , o qual implica:  $g_{1,2,3} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \rightarrow 1$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_c &= -\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_1 x_i x_j x_k e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} d\tau = -\frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_1 x_i x_j x_k d\tau \\ &= -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin(\omega_j \tau + \phi_j) \sin(\omega_k \tau + \phi_k)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Novamente introduzindo a notação :

$$\begin{aligned} \theta_j &\equiv \omega_j \tau + \phi_j, \\ \theta_k &\equiv \omega_k \tau + \phi_k, \end{aligned} \quad (1.45)$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_c &= -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\theta_j) \sin(\theta_k) d\tau \\ &= -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_j}}{2i} \right) \left( \frac{e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_k}}{2i} \right) d\tau \\ &= -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{-1}{4} \right) \left( e^{i(\theta_j + \theta_k)} - e^{i(\theta_j - \theta_k)} - (e^{i(\theta_j - \theta_k)} - e^{-i(\theta_j + \theta_k)}) \right) d\tau \\ &= \varepsilon_1 x_1 \left( \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{4A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{e^{i(\theta_j + \theta_k)} - e^{i(\theta_j - \theta_k)}}{2} - \frac{(e^{i(\theta_j - \theta_k)} - e^{-i(\theta_j + \theta_k)})}{2} \right) d\tau \\ &= \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\cos(\theta_j + \theta_k) - \cos(\theta_j - \theta_k)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Usando as relações (1.45) e a condição de ressonância,  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ , vemos que os dois argumentos das funções cosseno dependem do tempo na forma:

$$\begin{aligned} \theta_j + \theta_k &= (\delta + 2\omega_k)\tau + \phi_j + \phi_k, \\ \theta_j - \theta_k &= \delta\tau + \phi_j - \phi_k. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Com o qual vemos que o termo

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos((\theta_j + \theta_k)d\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos((\delta + 2\omega_k)\tau + \phi_j + \phi_k) = 0, \quad (1.48)$$

é nulo porque a média temporal da função cosseno ao longo de um período  $T$  é nula. Já no termo  $\int_0^T \cos((\theta_j - \theta_k)d\tau) = \int_0^T \cos(\delta\tau + \phi_j - \phi_k)$ , como,  $\omega_1 = \delta \ll \omega_2 \sim \omega_3$  é pequeno o termo  $\cos(\theta_j - \theta_k) = \cos(\delta\tau + \phi_j - \phi_k) \sim ctte.$  e independente do tempo, já que as fases dos modos praticamente não mudam na escala de tempo lenta modulacional, de forma que esse termo pode sair fora da integral com o que resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c &= -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \frac{1}{T} \int_0^T (\cos(\delta\tau + \phi_j - \phi_k)) d\tau = -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \cos(\delta\tau + \phi_j - \phi_k) \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \\ &\approx -\varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_j A_k}{\omega_j \omega_k}} \cos(\delta\tau + \phi_j - \phi_k). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Finalmente, juntando todos os termos, nosso Lagrangeano médio no tempo fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2 + \mathcal{L}'_a + \mathcal{L}'_b + \mathcal{L}'_c = \\ &\approx \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \sum_{j=2}^3 \dot{\phi}_j A_j - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_j \omega_k}} \cos(\varphi), \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde  $\varphi = \phi_2 - \phi_3 + \delta t$ . A partir deste Lagrangeano as equações de Euler-Lagrange na aproximação modulacional ficam:

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad (1.51)$$

$$\dot{v}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_1 \omega_3}} \cos \varphi \quad (1.52)$$

$$\dot{A}_{2,3} = \pm \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \sin \varphi \quad (1.53)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon_1 x_1}{2\sqrt{\omega_2 \omega_3}} \left( \sqrt{\frac{A_3}{A_2}} - \sqrt{\frac{A_2}{A_3}} \right) \cos \varphi + \delta. \quad (1.54)$$

A fim de olhar a transição abrupta vista na Seção anterior 1.2.1 fazemos uso dos seguintes parâmetros e condições iniciais:  $\omega_1 = \delta = 0.01$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1 = \omega_2 - \delta$ ,  $x_1 = 0.2$ ,  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $A_2 = A_3 = 0.5$ ,  $\varphi = 0.1$  e  $\sigma = 100$ .

Então, examinamos a dinâmica de  $x_2$  começando com um valor muito pequeno do acoplamento  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0002$ . Sob esta condição a frequência modulacional é proporcional ao acoplamento e é muito menor do que qualquer das frequências dos portadores:  $\Omega \ll \omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$ , e nós apenas recuperamos o tipo de comportamento modulacional visto na Seção 1.2.1. A dinâmica modulacional é simplesmente periódica e está de acordo com as simulações do sistema completo, como ilustrado na Fig. 1.5(a) onde pode-se ver como a dinâmica rapidamente oscilante de  $x_2(t)$  (em linhas azuis) regida pelas equações completas (1.40) se ajusta bem dentro do envelope modulacional,  $\pm A_2(t)$  (linhas grossas), regido pela Eq. 1.53. A segunda Fig. 1.5(b) mostra a órbita  $(x_2(t), v_2(t))$ , integrada a partir das equações completas (1.40) projetada no plano- $(x_2, v_2)$  onde vê-se que a órbita gera um toro cujo maior expoente de Lyapunov é nulo tal como confirmam os seis expoentes tabulados na Tabela 1.2. Já a Fig. 1.5(c) mostra a estrutura tri-dimensional do toro no espaço- $(x_1, x_2, x_3)$ . Uma ferramenta recomendada para examinar a periodicidade em sistemas dinâmicos é a seção de Poincaré [6]. No caso particular do acoplamento  $\varepsilon_1 = 0.0002$ ,

escolhemos a seção de Poincaré dada por  $\Sigma : x_1 = 0$  e gravamos os valores de  $\varphi$ ,  $A_2$  sempre que a órbita atravessava este plano. A seção correspondente a este acoplamento de  $\varepsilon_1 = 0.0002$  está mostrada na Fig. 1.6(a) onde pode-se confirmar que efetivamente temos a existência de um toro com dinâmica quase-periódica para o conjunto completo. Adicionalmente, calculamos as seções de Poincaré para duas órbitas vizinhas com  $A_2(0) = 0.2$  e  $0.9$  que também são quase-periódicas. O sistema é, portanto, integrável para este valor de acoplamento.

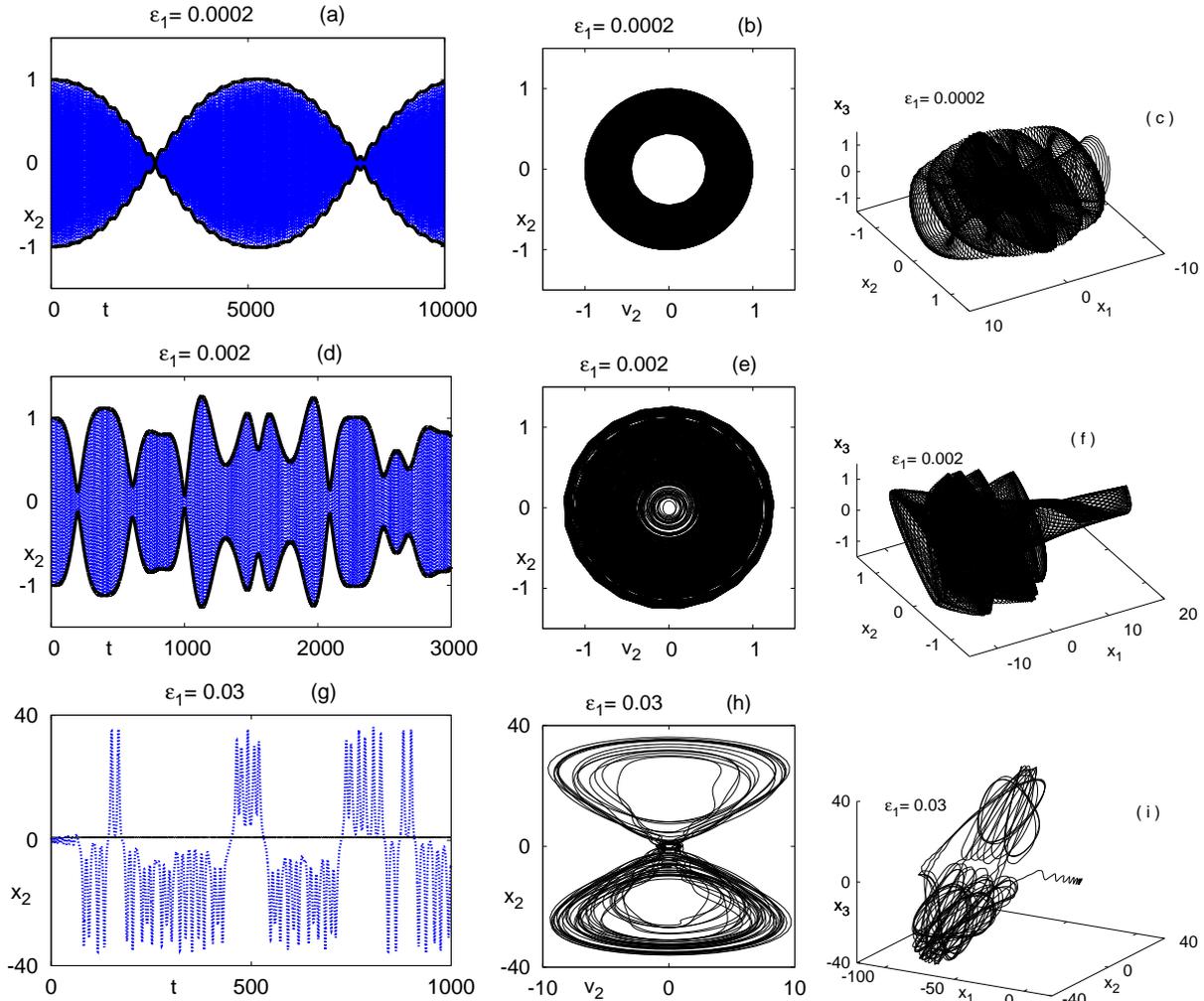


Figura 1.5: Os diferentes graus da aproximação modulacional quando  $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$ . Os valores para  $\varepsilon_1$  são 0.0002, 0.002 e 0.03, que correspondem aos gráficos mostrados na primeira, segunda e terceira linhas da figura respectivamente. Os mesmos valores iniciais foram usados em todos os painéis. Nas figuras da primeira coluna as linhas grossas representam os envelopes  $\pm A_2$  da aproximação modulacional.

A medida que incrementamos a valores moderadamente maiores de  $\varepsilon_1$ , como  $\varepsilon_1 = 0.002$  os gráficos da segunda linha da Fig. 1.5 mostram que a dinâmica torna-se aperiódica, embora mantendo a boa concordância entre suas descrições modulacional e completa tal como mostra a Fig. 1.5(d). A Eq. (1.29) revela que um acoplamento dessa magnitude gera uma dinâmica modulacional cuja frequência é muito menor do que as frequências dos portadores mais rápidos, mas semelhante em tamanho com a frequência de portador mais lento. Portanto, não é de admirar que as equações derivadas de  $\mathcal{L}'$  podem ainda funcionar muito bem sob estas circunstâncias.

Dinâmica aperiódica é vista frequentemente nas interações de onda auto-consistentes [32] e gostaríamos de qualificar ainda mais o comportamento observado. Isso pode ser feito rapidamente quando percebemos que o Lagrangeano modulacional  $\mathcal{L}'$  controla um sistema com dois-graus-de-liberdade. Um é formado pelo par de variáveis  $x_1, \dot{x}_1$  e o outro simplesmente por  $\varphi, A_2$  por exemplo, uma vez que, a partir da estrutura de  $\mathcal{L}'$ ,  $A_3$  e  $A_2$  não são realmente independentes:  $\dot{A}_3 = \dot{A}_2$ . A seção de Poincaré associada a este valor de acoplamento  $\varepsilon_1 = 0.002$  está mostrada na Fig. 1.6(b) que comprova que realmente a dinâmica do conjunto completo torna-se caótica porém permanece limitada, razão pela qual também neste caso escolhemos o plano  $\Sigma : x_1 = 0$  como nossa seção de Poincaré. Se olharmos os expoentes de Lyapunov associados a este valor de acoplamento tabulados na Tabela 1.2 também verificamos aparição de um expoente positivo que torna a dinâmica aperiódica. Esta transição de quase-periodicidade para comportamento caótico é algumas vezes chamado de quebra do toro, e pode ser visto aproximadamente como uma progressão de uma dinâmica da amplitude única a multi-periódica [12]- [14].

Para valores ligeiramente maiores do acoplamento a concordância entre as simulações com-

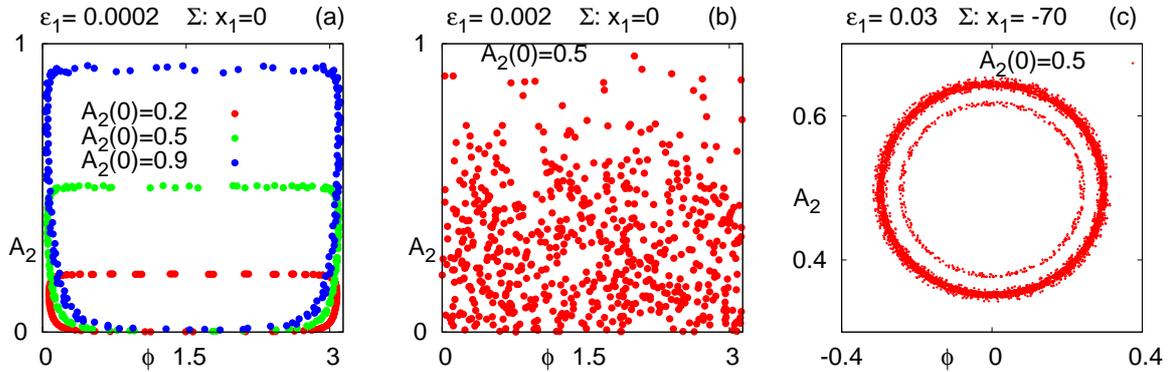


Figura 1.6: Seções de Poincaré  $\Sigma$  mostrando a transição do comportamento (a) quase periódico da dinâmica modulacional para o comportamento (b) caótico e (c) explosivo mostrado na Fig. 1.5 a medida que o acoplamento  $\varepsilon_1$  incrementa. A primeira Fig. 1.6(a) mostra a seção para a órbita com amplitude inicial  $A_2(0) = 0.5$  mostrada na Fig. 1.5(a) junto com outras duas órbitas vizinhas.

pletas e modulacionais fica comprometida. Até que para um acoplamento crítico numérico de  $\varepsilon_{1crit-num} = 0.03$  temos o que chamamos de “explosão” quando as variáveis se disparam para valores maiores de amplitude e a aproximação modulacional não é mais válida. A Fig. 1.5(g) mostra a discrepância entre a dinâmica real (em linhas azuis) regida pelas equações exatas e o envelope da aproximação modulacional quase invisível nesta escala devido à explosão dos valores de  $x_2(t)$ . Uma vez que esta explosão ocorre a dinâmica do conjunto completo continua sendo caótica porém com maiores amplitudes. A Fig. 1.5(i) mostra como as amplitudes das três variáveis:  $x_1, x_2$  e  $x_3$  se disparam depois de um transiente curto perto da região modulacional de pequenas amplitudes. A Fig. 1.5(h) mostra a estrutura bidimensional da órbita caótica que tem dois expoentes de Lyapunov positivos tal como mostra os dados na Tabela 1.2 para este valor de acoplamento e também a seção de Poincaré mostrada na Fig. 1.6(c) onde usamos o plano  $\Sigma : x_1 = -70$  como nossa seção de Poincaré devido a que amplitude da variável  $x_1$  oscila em torno desse valor. Depois, que atingimos o valor crítico numérico  $\varepsilon_{1crit-num} = 0.03$ , a região modulacional mais uma vez se funde com a aproximação das regiões vista na Seção 1.2.1 anterior, e as órbitas tornam-se livres para percorrer vastas regiões do espaço de fases. O mecanismo de fusão é totalmente análogo ao visto na subseção anterior.

Uma questão discutível do presente capítulo é que o modelo foi restrito a apenas três modos.

Tabela 1.2: Tabela de comparação entre os valores de acoplamento crítico  $\varepsilon_{1crit-teo}$  e  $\varepsilon_{1crit-num}$ , até onde é válida a aproximação modulacional para diferentes ordens de grandeza de  $I$ . Adicionalmente tabulamos os expoentes de Lyapunov correspondentes que caracterizam a órbita associada.

$I$	$\varepsilon_{1teo.}$	$\varepsilon_{1num.}$	$diff.\%$	$(\lambda_{x1}, \lambda_{x2}, \lambda_{x3}, \lambda_{v1}, \lambda_{v2}, \lambda_{v3})$	órbita
$0.5 \times 10^0$	-	0.0002	- %	(0, 0, 0, 0, 0, 0)	quase-per. (antes explo.)
$0.5 \times 10^0$	-	0.002	- %	(0.003, 0, 0, 0, 0, -0.003)	caótico (antes explo.)
$0.5 \times 10^0$	-	0.03	- %	(0.043, 0.006, 0, 0, -0.005, -0.043)	caótico (depois explo.)

Na presença de modos adicionais, tal como no caso de um sistema completo de ondas, a energia entregue para o tripleto inicial pode não permanecer ali depois da súbita transição – poderia ser bastante razoável supor que pelo menos parte da energia inicial será transferida para aqueles modos adicionais. Apesar de não ser o presente foco, o problema foi parcialmente estudado no passado [14]. O que foi aprendido confirma nossa hipótese: enquanto que em regimes regulares subsistemas de três modos tendem a preservar sua energia, a amplitudes maiores o sistema de três modos se expande parcialmente no espaço de fases e parcialmente fornece energia para os modos adicionais. Seria interessante determinar se os limiares obtidos aqui mantêm-se em extensões multimodo do presente modelo. É disso que nos ocupamos no seguinte capítulo.

## Capítulo 2

# Quebra da aproximação modulacional numa extensão multi modo da interação de tripleto

*Neste capítulo investigamos a quebra da aproximação modulacional em uma extensão multimodo da interação não-linear de três ondas. A abordagem modulacional fornece uma estrutura simplificada para descrever a interação de tripleto em regimes onde as frequências dos portadores são muito maiores do que a frequência modulacional. A abordagem é frequentemente levada a seus limites e além, e no presente capítulo argumentamos que esses limites podem ser de fato muito restritivos. Para acoplamentos muito pequenos mostramos que todos os modos exibem modulações lentas na amplitude, porém a medida que incrementamos o acoplamento então acontece uma transição e os modos pulam a um novo regime dinâmico onde nenhum deles pode mais ser visto como portadores harmônicos de alta frequência lentamente modulados. Estimativas para o acoplamento crítico e tempos de relaxação podem ser obtidos com uma análise apropriada do tripleto mais instável [60].*

Considerando a importância da interação de três ondas, no primeiro capítulo investigamos o comportamento da dinâmica de tripleto a medida que o acoplamento cresce além do domínio de validade apropriado para aproximações modulacionais. Mostramos que em efeito existe uma intensidade de acoplamento crítico que separa os regimes modulacionais e irregulares, onde nos últimos as amplitudes saltam a muito maiores e oscilações muito mais rápidas que nos primeiros [41].

No presente capítulo estudamos uma extensão multimodo da interação de tripleto, para ver o comportamento correspondente a medida que o acoplamento não-linear entre os vários modos se incrementa. Nossa intenção é ver se de forma similar ao que ocorre com um tripleto isolado, na extensão multimodo existe uma intensidade de acoplamento que define a transição de um tipo de dinâmica mais suave a menos regular.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 descrevemos o modelo físico e seu correspondente conjunto completo de equações; nas Seções 2.2 e 2.3 fazemos nossas estimativas analíticas baseados nas escalas de tempo do tripleto isolado e do sistema multimodo e finalmente na Seção 2.4 verificamos nossos cálculos analíticos com simulações numéricas do conjunto completo.

## 2.1 Lagrangeano completo, seus parâmetros e condições iniciais

Começamos com o Lagrangeano para interação de multimodo de uma coleção de  $N$  modos na forma:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N x_i x_j x_k g_{i,j,k} \delta_{i+j,k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N x_i x_j x_k e^{-(x_i^2+x_j^2+x_k^2)/\sigma^2} \delta_{i+j,k} \end{aligned} \quad (2.1)$$

As frequências naturais dos  $N$  modos são denotadas por  $\omega_i$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ , e entre a soma ordenada sobre combinações não repetidas dos índices  $i, j, k$  selecionamos só aquelas para as quais os casamentos indicados:  $\delta_{i+j,k}$ , podem ocorrer. Os índices inteiros dos modos  $i, j, k$  imitam vetores de ondas em uma forma adimensional, e com esta regra de soma procuramos satisfazer o panorama geral sobre a interação de tripleto, em que cada tripleto é formado por diferentes modos que cumprem as condições de casamentos de vetores de ondas. Sempre que um casamento de frequências é satisfeito então ocorre um acoplamento ressonante forte. Adicionalmente as frequências  $\omega_i$  serão tomadas como linearmente homogêneas no índice “ $i$ ”:  $\omega_i \propto i$ , o que representa o caso onde as frequências dos modos estão somente determinadas pelos vetores de ondas resultantes das derivadas de segundo ordem operando em um eixo coordenado espacial virtualmente associado. Neste caso o casamento das frequências não possui maior restrição que o casamento nos vetores de ondas e vários tripletos podem ser excitados simultaneamente, o que concorda com o foco da presente análise mencionado mais adiante. Este tipo de modelamento físico é de relevância na interação colinear de modos ópticos de banda larga e não-ópticos em meios não-lineares [17, 18].

O parâmetro  $\varepsilon$  mede a intensidade do acoplamento do tripleto representado pelo produto  $x_i x_j x_k$ , e o fator de forma  $g$  é escolhido para garantir circunscrição da dinâmica a regiões finitas do espaço de fases. Notamos então que o produto cúbico não tem sinal definitivo e, se isolado, poderia gerar trajetórias não confinadas que escapam ao infinito. O propósito do fator de forma  $g$  é então confinar a dinâmica a regiões finitas do espaço de configuração. No presente capítulo escolhemos  $g_{i,j,k} = g(x_i, x_j, x_k) = e^{-(x_i^2+x_j^2+x_k^2)/\sigma^2}$  com um valor de  $\sigma$  relativamente grande. A medida que a soma quadrática excede o valor de  $\sigma^2$  a interação é automaticamente desligada com  $g \rightarrow 0$  e o potencial harmônico remanescente impede que as coordenadas modais tendam para o infinito. Por outro lado, quando as excursões dos modos são sempre muito menores que  $\sigma$ , então  $g \rightarrow 1$  e o acoplamento atua como uma pequena perturbação produzindo as mudanças modulacionais na amplitude e as fases modais; aqui é onde se encontra o regime lentamente modulacional. Também testamos formas polinomiais de confinamento, as quais produzem essencialmente os mesmos resultados, embora a maiores custos computacionais. A exponencial então se torna como a escolha preferida aqui.

Todos os modos começam com um nível de ruído aleatório nas amplitudes,  $|x_i| \leq 0.01$ , exceto para o modo  $i = N/2$  o qual atua como o bombeador inicial. A menos que se diga o contrario, tomamos  $x_{N/2} = 1$ . Colocamos o bombeador no meio do espectro para examinar a distribuição bi-lateral de energia a medida que o sistema evolui. Desta forma pode-se examinar em uma forma muito simétrica a cascata inversa se dirigindo ao modo  $j = 1$  e a cascata direta de incremento de energia até o modo  $j = N$  a medida que o tempo evolui. A premissa de que nenhum modo além do  $N$ -ésimo é excitado, pode ser colocado em uma base física ligeiramente mais firme se adicionamos taxas de dissipação maiores além do modo  $N$ . Com maior dissipação adicionada desta forma, cada modo fora do grupo considerado poderia ser completamente enchido e a energia poderia permanecer confinada na coleção inicial.

Finalmente, normalizamos o tempo tal que  $\omega_{i=N/2} = 1$ . Sob estas condições temos

$$\omega_i = \frac{2i}{N}, \quad (2.2)$$

com  $\omega_1 = 2/N$  e  $\omega_N = 2$  em particular.

A forma particular para o potencial não-linear escolhido aqui permite considerar o papel da interação de três ondas. Para ver isto escrevemos as equações de Euler-Lagrange ( $\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, N$ ) para os  $N$  modos envolvidos,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -\omega_i^2 x_i - \varepsilon \sum_{j=1, \neq i}^N \sum_{k>j}^N x_j x_k \left(1 - \frac{2x_i^2}{\sigma^2}\right) e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2} \delta_{|i \pm j|, k} \\ \ddot{x}_i &\approx -\omega_i^2 x_i - \varepsilon \sum_{j=1, \neq i}^N \sum_{k>j}^N x_j x_k \delta_{|i \pm j|, k} \quad \text{quando } x^2 \ll \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nesta notação compacta, todos os três índices  $i, j$  e  $k$  tomam valores desde 1 até  $N$  e diferem um do outro. As frequências altas dos portadores estão sujeitas à condição ressonante:

$$|\omega_i \pm \omega_j| = \omega_k. \quad (2.4)$$

Fica claro que a dinâmica do modo  $i$  é ditada pelo termo do produto  $x_j x_k$ , a assinatura da interação de triplete.

Incidentalmente, a derivada temporal é de segunda ordem, assim enfatizamos que nenhuma aproximação modulacional está sendo usada *a priori* para descrever a dinâmica.

A diferença da presente abordagem com a análise previa do Cap. 1 [41] reside no fato que agora consideramos uma multitude de modos ao invés de um triplete puro. Assim, devemos ter um número grande de combinações diferentes de tripletos em uma competição pelo conteúdo energético disponível no sistema. A tarefa seguinte é determinar sob quais condições pode-se esperar que a dinâmica multimodal torne-se similar ao regime modulacional, e o que ocorre quando vai-se além deste regime.

Iremos a usar um grupo de um número de modos não proibitivamente grande com a finalidade de ter uma boa estatística a um custo computacional baixo. Nossa escolha será  $N = 128$  modos, a qual será brevemente comparada com casos semelhantes.

### 2.1.1 Condições iniciais para o triplete excitado

Conforme vimos no Cap. 1 a dinâmica modulacional para um triplete isolado arbitrário: “ $ijk$ ”, está dado pelas equações modulacionais (1.25) e (1.26) que reescrevemos:

$$\dot{A}_i = \varepsilon \frac{(I - A_i) \sqrt{A_i}}{\sqrt{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \cos(\varphi), \quad (2.5)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{8\omega_i \omega_j \omega_k}} \left( \frac{(I - A_i)}{\sqrt{A_i}} - 2\sqrt{A_i} \right). \quad (2.6)$$

Sabendo que temos a quantidade conservada:  $I = A_i + A_{j,k}$ , e que os modos secundários começam com um nível de ruído aleatório nas amplitudes:  $A_j = A_k \ll A_i$ , exceto o modo principal  $A_{i=N/2} \sim 1$  o qual atua como o bombeador inicial. Então podemos definir:  $\delta \equiv A_j = A_k \ll A_i$  que substituído na expressão (2.5) nos dá a taxa de crescimento das amplitudes dos modos secundários  $j$  e  $k$ :

$$\dot{\delta} = -\varepsilon \frac{\delta \sqrt{A_i}}{\sqrt{2\omega_i \omega_j \omega_k}} \cos(\varphi). \quad (2.7)$$

Olhando o numerador esta taxa pode ser maximizada quando o termo  $\cos(\varphi) \rightarrow -1$ , o qual ocorre quando:  $\varphi = \pi$  ( o que deve ser considerado na hora de colocar as condições iniciais para os valores de  $x_i$ ), logo:

$$\dot{\delta}_{max} = \varepsilon \frac{\sqrt{A_i}}{\sqrt{2\omega_i\omega_j\omega_k}} \delta. \quad (2.8)$$

Agora resta minimizar o produto:  $\omega_i\omega_j\omega_k$  no denominador, sendo que necessariamente uma das frequências corresponde ao bombeador  $\omega_{i=\frac{N}{2}}$  e as outras secundárias estão restritas pela condição ressonante:  $|\omega_{i=\frac{N}{2}} \pm \omega_j| = \omega_k$ . Assim se  $\omega_j$  assume seu menor valor possível  $\omega_{j=1}$  só nos resta que  $\omega_k = \omega_{\frac{N}{2}} - \omega_1 = \omega_{\frac{N}{2}-1}$ . Com o qual finalmente resulta:

$$\dot{\delta}_{max} = \varepsilon \frac{\sqrt{A_i}}{\sqrt{2\omega_{\frac{N}{2}}\omega_1\omega_{\frac{N}{2}-1}}} \delta. \quad (2.9)$$

## 2.2 Escalas de tempo para o tripleto isolado

Na aproximação modulacional lenta, é precisa a representação

$$x_i = \sqrt{\frac{2A_i(t)}{\omega_i}} \sin(\omega_i t + \phi_i(t)), \quad (2.10)$$

com amplitudes  $A_i$  e fases  $\phi_i$  variando lentamente. Sob essas condições observamos no capítulo 1 [41] que:

1. O modo principal bombeador transfere sua energia aos dois modos secundários de menor frequência inicializados com um nível de ruído a uma taxa logarítmica dada por:

$$\gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_d\omega_{d'}\omega_p}}, \quad (2.11)$$

onde os subscritos  $d$ ,  $d'$  e  $p$  denotam os dois modos filhos e o modo principal de bombeamento, respectivamente. A intensidade do tripleto  $I_p$  é introduzida como a amplitude inicial do bombeamento  $A_p(t=0) = A_p(0)$ , e é muito maior que as amplitudes iniciais dos modos filhos;  $A_d(0) \sim A_{d'}(0) \ll A_p(0)$ .

2. A expressão (2.11) não só representa a taxa de crescimento  $\gamma$  no processo instável de decaimento do bombeador nos modos filhos, mas também nos fornece a frequência modulacional  $\Omega$  para essas situações onde trabalha-se perto do ponto fixo modulacional estável ( $fp$ ) onde, como mostramos no capítulo 1 [41],  $A_{fp} = I_p/3$ ; nos referimos a esta frequência modulacional como  $\Omega_{pump}$ , cuja magnitude pode então ser avaliada da igualdade

$$\Omega_{pump} = \gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_d\omega_{d'}\omega_p}}. \quad (2.12)$$

A expressão (2.12) pode ser usada para estimar as várias escalas de tempo importantes do sistema. É suficiente correlacioná-las com os modos envolvidos, introduzindo as frequências e intensidades apropriadas na expressão para  $\Omega = \gamma$  (2.12).

Com respeito à validade da abordagem modulacional, que é o foco do presente capítulo, o papel das escalas de tempo dadas pela expressão (2.12) tem sido testadas com a análise do sistema de três ondas correspondente na sua forma completa dada pela versão de três modos da expressão (2.1). Tão importante quanto é o teste da precisão das estimativas, a comparação ajuda a entender a física perto da quebra do regime modulacional.

## 2.3 Escalas de tempo para o sistema multimodo

Agora vamos a examinar as escalas de tempo relevantes do sistema multimodo completo. Para uma determinada intensidade inicial de bombeamento  $A_{N/2}(0) = I_{N/2} \equiv I_p$ , a frequência modulacional associada ao modo principal bombeador- $i = \frac{N}{2}$  esta dada por:

$$\Omega_{pump} = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2 \omega_{i=\frac{N}{2}} \omega_j \omega_k}}, \quad (2.13)$$

onde as frequências secundárias  $\omega_j$  e  $\omega_k$  estão restritas pela condição ressonante dada pela expressão (2.4) que neste caso resulta:  $|\omega_{i=\frac{N}{2}} \pm \omega_j| = \omega_k$ . O tempo característico associado à frequência modulacional de bombeamento  $\Omega_{pump}$  é dado por:

$$T_{pump} = \frac{2\pi}{\Omega_{pump}} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2 \omega_{i=\frac{N}{2}} \omega_j \omega_k}{I}}, \quad (2.14)$$

de modo que dependendo da escolha dos modos secundários  $j$  e  $k$  sujeitos à condição ressonante  $|\omega_{i=\frac{N}{2}} \pm \omega_j| = \omega_k$ , por um lado podemos obter a escala de tempo mais rápida  $T_{pump} \rightarrow$  mínimo (ou equivalentemente  $\Omega_{pump} \rightarrow$  máximo) quando o produto:  $\omega_{i=\frac{N}{2}} \omega_j \omega_k \rightarrow_{min}$ , assim se  $\omega_j$  assume seu menor valor possível  $\omega_{j=1}$  pela condição ressonante necessariamente temos que ter  $\omega_{k=N/2-1}$ . Introduzindo estas frequências na relação 2.13 obtemos:

$$\Omega_{pump}^{max} \equiv \Omega_{pump} = \varepsilon \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_{\frac{N}{2}}\omega_{\frac{N}{2}-1}\omega_1}} \sim \varepsilon \sqrt{I_p N} \quad \text{e} \quad T_{pump}^{min} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{N I_p}}. \quad (2.15)$$

Por outro lado para obter a escala de tempo mais lenta envolvendo o modo bombeador- $i = N/2$ , temos que ter:  $T_{pump} \rightarrow$  máximo (ou equivalentemente  $\Omega_{pump} \rightarrow$  mínimo) o qual ocorre quando o produto no numerador de 2.14  $\omega_{i=\frac{N}{2}} \omega_j \omega_k \rightarrow$  máximo. Assim supondo que o modo secundário  $\omega_k$  assumira seu máximo valor possível permitido que é:  $\omega_{k=N-1}$  e respeitando a condição ressonante, então  $\omega_j$  necessariamente tem que ser  $\omega_{j=(N-1)-N/2} = \omega_{j=N/2-1}$ . Com isto obtemos que o mínimo valor possível que pode assumir a frequência modulacional associada ao modo principal bombeador:

$$\Omega_{pump}^{min} \equiv \Omega_{slow} = \varepsilon \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_{\frac{N}{2}}\omega_{\frac{N}{2}-1}\omega_{N-1}}} \sim \varepsilon \sqrt{I_p} \sim \frac{\Omega_{pump}}{\sqrt{N}} \quad \text{e} \quad T_{pump}^{max} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{I_p}} \quad (2.16)$$

Esta frequência modulacional também pode ser deduzida a partir de uma análise energética, considerando que a escala mais lenta envolve o bombeador- $i = N/2$ , e os modos  $N - 1$  e  $\frac{N}{2} - 1$ . Já que o bombeador não pode decair diretamente nos modos de frequências mais altas (como o modo  $N - 1$ ), esta escala se liga ativamente quando o modo  $\frac{N}{2} - 1$  sobe a uma intensidade apreciável via o decaimento do bombeador inicial mais rápido. Neste ponto o modo  $N - 1$  e seus vizinhos podem ser conduzidos por um processo de decaimento inverso. Este triplete comparte sua energia com muitos outros, porém coloca uma escala de tempo maior sobre a qual o sistema se aproxima á relaxação. Pode-se estimar a frequência modulacional associada  $\Omega_{slow}$  introduzindo as frequências apropriadas na expressão (2.12), supondo que a maior energia possível entregue ao modo  $N - 1$ , que desempenha o papel de *bombeador* para este triplete, emerge da conservação da energia. Dentro da representação modulacional a energia de cada modo,  $E_i = (\dot{x}_i^2 \omega_i^2 x_i^2)/2$  pode ser escrita como  $\omega_i A_i$ . Dado que  $\omega_1 \ll 1$  e que  $I_1$  é limitada pelas relações de Manley-Rowe [1], a energia máxima entregue ao modo  $N - 1$  pode ser calculada a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \omega_{N-1} I_{N-1} &= \omega_{N/2} I_{N/2} (= \omega_{N/2} I) \\ &\rightarrow I_{N-1} \approx I/2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Demonstra-se imediatamente que  $\Omega_{slow} \sim \frac{\Omega_{pump}}{\sqrt{N}}$ .

Acabamos de calcular o valor máximo e mínimo que pode assumir a frequência modulacional associada especificamente ao modo bombeador- $i = N/2$ , porém se consideramos um triplete arbitrário:  $i - j - k$  vemos que a frequência modulacional associado ao mesmo esta dada por:

$$\Omega = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2 \omega_i \omega_j \omega_k}}, \quad (2.18)$$

a qual pode assumir seu máximo valor (ou equivalentemente teríamos a escala de tempo mais rápida) quando o produto:  $\omega_i \omega_j \omega_k \rightarrow_{min}$ , assim se  $\omega_{i=1}$  assume seu menor valor possível a condição ressonante exige que os outros dois modos acoplados que minimizam o produto sejam:  $\omega_{j=2}$  e  $\omega_{k=3}$ . Introduzindo estas frequências na relação 2.18 obtemos:

$$\Omega_{max} \equiv \Omega_{fast} = \varepsilon \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \sim \varepsilon \sqrt{IN^3} \sim N\varepsilon \sqrt{IN} \sim N \Omega_{pump} \text{ e } T_{min} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{I_p N^3}}. \quad (2.19)$$

Alternativamente este valor máximo da frequência modulacional pode ser obtido através duma análise energética. Imaginemos que para um acoplamento pequeno  $\varepsilon$  a energia do bombeador tenta distribuir-se a se mesma sobre todo o espectro – foi visto que a energia do bombeador é essencialmente dada por  $\omega_{N/2} I = I$  e a energia que cada modo receberá será  $I/N$ . Os primeiros três modos 1, 2, 3 então adquirem uma quantidade total de energia  $\frac{3I}{N}$  a qual incrementa a intensidade do modo 3 de maior frequência a  $\frac{I}{2}$  quando as outras duas são pequenas. Usando esta estimativa para a intensidade do triplete formado pelos três modos de frequência mais baixa, se mostra que a frequência modulacional correspondente, que chamamos  $\Omega_{fast}$ , compartilha a seguinte relação com  $\Omega_{pump}$ :  $\Omega_{fast} \sim N \Omega_{pump}$ .

Vemos então que, dependendo do número de modos envolvidos, a frequência mais rápida  $\Omega_{fast}$  pode ser muito maior que aquela associada com a escala de tempo inicial correspondente ao decaimento do bombeador, i.e.:  $\Omega_{fast} > \Omega_{pump}^{max}$ . A validade da aproximação modulacional completa é então vista como sendo mais restrita do que foi previamente esperado baseados na escala de tempo dada pela modulação do bombeador, já que o que realmente precisamos é  $\Omega_{fast} \ll \omega_1$ . Agora juntamos toda a informação até este ponto e focamos a atenção em três regimes sugeridos pela magnitude do acoplamento  $\varepsilon$ .

$$\Omega_{fast} = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \sim \varepsilon \sqrt{IN^3} \sim N\varepsilon\sqrt{IN} \sim N \Omega_{pump}$$

$$\omega_N = \frac{2N}{N} = 2$$

$$\omega_{N-1} = \frac{2(N-1)}{N} \sim 2$$

$$\Omega_{pump} = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2\omega_{\frac{N}{2}}\omega_{\frac{N}{2}-1}\omega_1}} \sim \sqrt{\frac{I(N)}{2(1)(1)(2)}} \sim \varepsilon\sqrt{IN}$$

$$\omega_{\frac{N}{2}} = \frac{2\frac{N}{2}}{N} = 1$$

$$\Omega_{slow} = \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2\omega_{\frac{N}{2}}\omega_{\frac{N}{2}-1}\omega_{N-1}}} \sim \varepsilon \sqrt{\frac{I}{2(1)(1)(2)}} \sim \varepsilon\sqrt{I} \sim \frac{\Omega_{pump}}{\sqrt{N}}$$

$$\omega_{\frac{N}{2}-1} = \frac{2(\frac{N}{2}-1)}{N} \sim 1$$

$$\omega_i = \frac{2(i)}{N}$$

$$\omega_3 = \frac{2(3)}{N} \sim \frac{1}{N}$$

$$\omega_2 = \frac{2(2)}{N} \sim \frac{1}{N}$$

$$\omega_1 = \frac{2(1)}{N} \sim \frac{1}{N}$$

1. O primeiro regime ocorre quando a frequência modulacional mais rápida  $\Omega_{fast}$  é ainda suficientemente menor do que a menor das frequências dos portadores;  $\Omega_{fast} \ll \omega_1$ . Esperamos que a representação modulacional seja ainda precisa para representar a dinâmica dos modos. Na Fig. 2.1 (a) indicamos a localização do ponto  $\varepsilon_a = 0.5 \times 10^{-4}$  no espaço paramétrico- $(I_p, \varepsilon)$  para o qual ilustraremos este primeiro regime modulacional, na próxima seção.
2. O segundo é aquele onde  $\Omega_{pump} \ll \omega_1 \lesssim \Omega_{fast}$ . Aqui esperamos que enquanto a maioria dos modos são ainda lentamente modulados, os portadores de mais baixa frequência começam a fugir do comportamento modulacional lento. O acoplamento crítico para a transição neste segundo regime é denotada por  $\varepsilon_{fast}$  e estimado a partir de  $\Omega_{fast} = \omega_1$  ou de uma análise mais topológica desenvolvida na Ref. [41]. Então usando a expressão 2.19 para  $\Omega_{fast}$  e a relação 2.2 para as frequências obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_{fast} &= \omega_1 \\ \varepsilon_{fast} \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} &= \omega_1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{fast}(N, I_p) \equiv \frac{8}{N^2} \sqrt{\frac{6}{NI_p}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde podemos apreciar que o acoplamento crítico para abandonar a aproximação modulacional depende tanto do número de modos  $N$  como da intensidade inicial do bombeador  $A_{N/2} = I_p$ . No nosso caso específico para  $N = 128$  e  $I_p = 0.5$ , resulta  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p = 0.5) \approx 1.495 \times 10^{-4}$ . O valor extremamente pequeno do acoplamento resulta da nossa normalização da frequência. Poderíamos alternativamente ter normalizado o tempo e as frequências com a frequência fundamental  $\omega_1$ , em cujo caso o

acoplamento crítico poderia ser  $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ . Este ainda é um acoplamento pequeno para números grandes de modos e, o que é mais importante, muito menor que o que se poderia esperar usando  $\Omega_{pump}$  para medir a escala de tempo modulacional. Na Fig. 2.1 (a) mostramos a curva  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  para  $N = 128$  modos em uma escala logarítmica com a finalidade de enfatizar a dependência de  $\varepsilon_{fast} \sim I_p^{-1/2}$  com a intensidade de bombeamento  $I_p$ . Na mesma figura indicamos a localização do ponto  $\varepsilon_b = 1.55 \times 10^{-4}$ , que será usado para ilustrar este segundo regime, na próxima seção. Notar que o acoplamento  $\varepsilon_b$  usado para ilustrar o Regime II está ligeiramente acima do valor crítico correspondente  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p = 0.5) \approx 1.45 \times 10^{-4}$ .

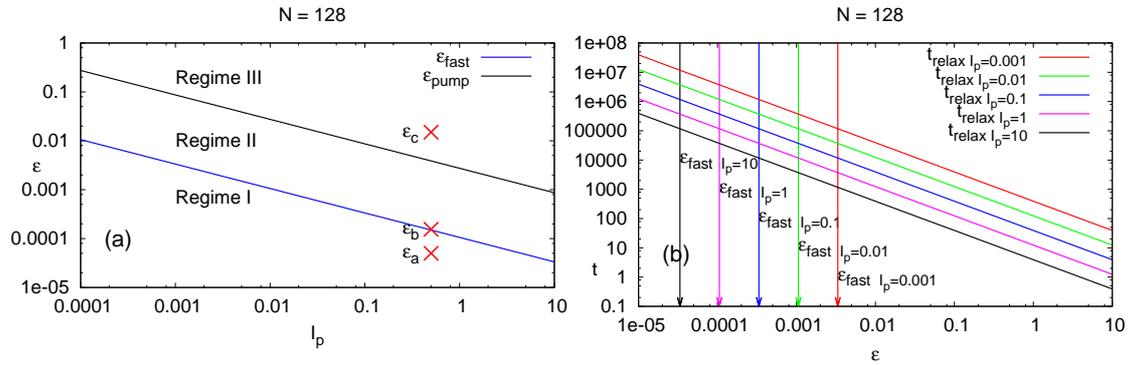


Figura 2.1: Painel (a): Curvas teóricas de transição no espaço paramétrico bidimensional  $(I_p, \varepsilon)$ : a curva  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  dada por (2.20) é representada pela linha reta azul inferior, e a curva  $\varepsilon_{pump}(N = 128, I_p)$  dada por (2.21) pela linha preta superior.  $\varepsilon_{(a,b,c)} = (0.5, 1.55, 150) \times 10^{-4}$  ao longo de  $I_p = 0.5$ . Painel (b): Curvas teóricas  $t_{relax}(\varepsilon, N = 128, I_p)$  dadas por (2.26) para diferentes ordens de magnitude de  $I_p = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0$ .

- Um terceiro regime proeminente pode também ser esperado quando  $\Omega_{pump} \gtrsim \omega_1$ . Neste caso o próprio modo bombeador- $i = N/2$  é afetado pela quebra da aproximação modulacional e se espera que ocorra uma quebra modulacional completa para toda a coleção multimodal. O acoplamento crítico para imersão neste terceiro regime é denotado por  $\varepsilon_{pump}$  e definido a partir da relação  $\Omega_{pump} = \omega_1$ , assim usando a expressão (2.15) para  $\Omega_{pump-fast}$  e a relação (2.2) para as frequências obtemos:

$$\Omega_{pump} = \omega_1$$

$$\varepsilon_{pump} \sqrt{\frac{I_p}{2\omega_{N/2}\omega_{N/2-1}\omega_1}} = \omega_1 \rightarrow \varepsilon_{pump}(N, I_p) \equiv \frac{4}{N^2} \sqrt{\frac{N-2}{I_p}} \quad (2.21)$$

Também neste caso vemos que para um determinado número fixo de modos a dependência do acoplamento com a intensidade de bombeamento é potencial:  $\varepsilon_{pump} \sim I_p^{-1/2}$ . A correspondente curva para  $N = 128$  modos está plotada na Fig. 2.1 (a) onde também indicamos a localização do ponto  $\varepsilon_c = 150 \times 10^{-4}$ , ao longo da linha  $I_p = 0.5$  e acima da curva  $\varepsilon_{pump}$  que será usado para ilustrar este terceiro regime na seguinte seção.

Como vimos anteriormente a frequência modulacional associada ao modo bombeador tem um valor mínimo  $\Omega_{slow} \sim \Omega_{pump}/\sqrt{N}$  dado pela relação (2.16) e um valor máximo  $\Omega_{pump}$  dado pela relação (2.15). Porém vimos que realmente o maior valor possível desta frequência modulacional esta dado por  $\Omega_{fast} \sim N\Omega_{pump}$  na relação 2.19. De forma que ordenando as frequências

modulacionais com suas respectivas escalas de tempo teríamos:

$$\begin{aligned} \Omega_{slow} \sim \varepsilon \sqrt{I_p} &< \Omega_{pump} \sim \varepsilon \sqrt{N I_p} &< \Omega_{fast} \sim \varepsilon \sqrt{N^3 I_p} & (2.22) \\ T_{slow} \sim \frac{1}{\Omega_{slow}} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{I_p}} &> T_{pump} \sim \frac{1}{\Omega_{pump}} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{N I_p}} &> T_{fast} \sim \frac{1}{\Omega_{fast}} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{N^3 I_p}} & (2.23) \end{aligned}$$

Como a escala de tempo mais lenta está dada por  $T_{slow}$ , poderíamos considerar este tempo como uma espécie de tempo de relaxação  $t_{relax} \equiv T_{slow} \sim \frac{1}{\varepsilon \sqrt{I_p}}$ , no qual o sistema entra em um estado relativamente estacionário, onde as oscilações na energia já não são muito grandes. Podemos então expressar as outras escalas de tempo em função deste tempo de relaxação:

$$\begin{aligned} \Omega_{slow} \sim \varepsilon \sqrt{I_p} &< \Omega_{pump} \sim \varepsilon \sqrt{N I_p} &< \Omega_{fast} \sim \varepsilon \sqrt{N^3 I_p} & (2.24) \\ T_{slow} \sim \frac{1}{\Omega_{slow}} \sim t_{relax} &> T_{pump} \sim \frac{1}{\Omega_{pump}} \sim \frac{t_{relax}}{\sqrt{N}} &> T_{fast} \sim \frac{1}{\Omega_{fast}} \sim \frac{t_{relax}}{\sqrt{N^3}} & (2.25) \end{aligned}$$

Também podemos obter a expressão exata para o tempo de relaxação usando a expressão (2.16) para  $\Omega_{slow}$  e a relação (2.2) para as frequências envolvidas,, assim:

$$t_{relax} \equiv T_{slow} = \frac{2\pi}{\Omega_{slow}} \quad (2.26)$$

$$t_{relax}(\varepsilon, N, I_p) = \frac{4\pi}{\varepsilon N} \sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{I_p}}, \quad (2.27)$$

onde pode-se ver que este tempo não só depende de  $N$  e a intensidade inicial do modo bombeador  $I_p$  mas também do acoplamento  $\varepsilon$ . Como veremos na próxima seção, mesmo para valores superiores ao acoplamento crítico  $\varepsilon_{fast}$ , onde a aproximação modulacional não é mais válida, esta relação teórica nos permitirá quantificar o tempo em que a amplitude do primeiro modo de menor energia  $x_1$  começa a fugir da região harmônica  $g \sim 1$  onde as condições iniciais são colocadas, i.e. o tempo em que a amplitude pula para regiões onde  $x_1 \gg \sigma$  e  $g \lesssim 1$ . Na Fig. 2.1 (b) plotamos o tempo de relaxação  $t_{relax}$  como função do acoplamento  $\varepsilon$  para  $N = 128$  modos e diferentes ordens de grandeza das amplitudes iniciais do modo bombeador  $I_p = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0$ . Vemos que a medida que  $I_p$  é maior, o tempo de relaxação do sistema é menor, pois as curvas se deslocam para baixo ao longo do eixo- $t$ . No mesmo gráfico aproveitamos para indicar com setas os valores dos acoplamentos críticos  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  até onde a aproximação modulacional é válida, neste caso vemos que a medida que a intensidade inicial do bombeador  $I_p$  é maior os valores de acoplamento críticos  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  correspondentes a cada  $I_p$  são cada vez menores.

## 2.4 Resultados numéricos

Como o último passo da presente análise, testamos as estimativas preditivas da seção previa contra simulações completas de nosso sistema multimodo representado pelo Lagrangeano completo (2.1) e suas correspondentes equações de Euler-Lagrange.

Nas Figs. 2.2, 2.3 e 2.4 ilustramos os três tipos de regimes para três valores diferentes de acoplamento  $\varepsilon_{(a,b,c)} = (0.5, 1.55, 150) \times 10^{-4}$ , localizados dentro dos três regimes explicados. Usamos  $I_p = 0.5$ ,  $N = 128$  e  $\sigma = 10^2$ . A localização destes três pontos ao longo da linha  $I_p = 0.5$ , estão indicados no espaço paramétrico- $(I_p, \varepsilon)$  mostrado na Fig. 2.1 (a) para  $N = 128$  modos.

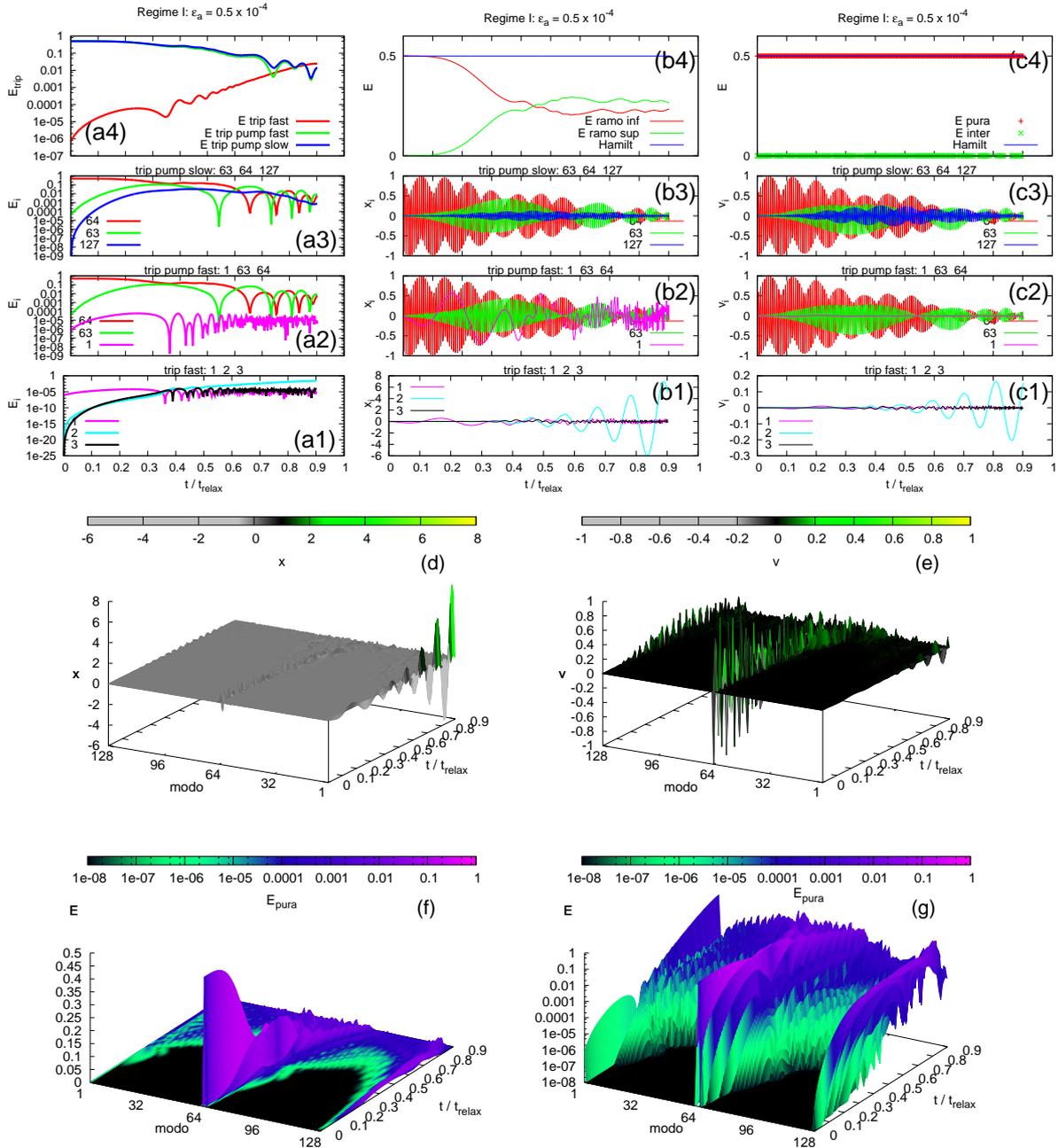


Figura 2.2: Ilustração do Regime modulacional I para  $\epsilon_a = 0.5 \times 10^{-4}$  e  $I_p = 0.5$ : Painéis superiores mostram a evolução temporal das:  $E_i(t)$ ,  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis centrais mostram a evolução modo-temporal das  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis inferiores mostram a evolução modo-temporal das  $E_i(t)$  dos modos.

#### 2.4.1 Regime modulacional I: $\Omega_{fast} \ll \omega_1$

Na Fig. 2.2 ilustramos a dinâmica do regime modulacional. para um valor de acoplamento  $\epsilon_a = 0.5 \times 10^{-4}$  abaixo da curva crítica  $\epsilon_{fast}$  no espaço de parâmetros- $(I_p, \epsilon)$  mostrado na Fig. 2.1. Em todos os gráficos mostrados na Fig. 2.2 as escalas de tempo estão expressas em unidades do

tempo de relaxação  $t_{relax}(\varepsilon = \varepsilon_a, N = 128, I_p = 0.5)$  dado por 2.26.

Antes de analisar os gráficos da Fig. 2.2 lembramos que para o caso particular de  $N = 128$  modos analisado aqui as três escalas de tempo obtidas na relação (2.24) estão dadas por:

$$T_{slow} \sim t_{relax} > T_{pump} \sim \frac{t_{relax}}{\sqrt{128}} \sim 0.1 \times t_{relax} > T_{fast} \sim \frac{t_{relax}}{\sqrt{128^3}} \sim 0.001 \times t_{relax}, \quad (2.28)$$

onde  $T_{slow}$  está associado ao tripleto bombeador mais lento: 63-64-127,  $T_{pump}$  ao tripleto bombeador mais rápido: 1-63-64 e  $T_{fast}$  ao tripleto mais rápido de todos: 1-2-3.

A Fig. 2.2 (a1) mostra a evolução temporal da energia “pura”:  $E_i = \frac{1}{2}(x_i^2 + \omega_i^2 x_i^2)$  dos primeiros 3 modos que pertencem ao tripleto mais rápido: 1-2-3. A escala do tempo na figura está expressa em unidades do tempo de relação  $t_{relax}(\varepsilon = \varepsilon_a, N = 128, I_p = 0.5)$  dado por (2.26). O qual nos permite apreciar que neste caso efetivamente a energia  $E_i(t)$  do modo-1 que pertence ao tripleto mais rápido oscila em uma escala de tempo da ordem de  $T_{fast} \sim 0.001 \times t_{relax}$  tal como prevê a estimativa teórica (2.28). Já na Fig. 2.2 (a2) vemos que a energia dos modos-63 e 64 que pertencem ao tripleto bombeador mais rápido variam em uma escala de tempo da ordem de  $T_{pump} \sim 0.1 \times t_{relax}$  em concordância com a estimativa teórica (2.28). Finalmente na Fig. 2.2 (a3) vemos que a evolução temporal da  $E_i(t)$  do modo-127 que pertence ao tripleto bombeador mais lento varia em uma escala de tempo  $T_{slow} \sim t_{relax}$  conforme prevê a estimativa teórica (2.28). A Fig. 2.2 (a4) mostra a evolução temporal da energia “pura” total:  $E_{trip:ijk} = E_i + E_j + E_k$ , dos três tripletos, onde podemos apreciar a transferência de energia do modo bombeador-64 para os modos restantes, em particular neste caso para os modos que pertencem ao tripleto mais rápido: 1-2-3, cuja energia se incrementa até alcançar um valor assintótico quase estacionário a medida que o tempo  $t \rightarrow t_{relax}$ .

A Fig. 2.2 (d) mostra evolução modo-temporal das amplitudes  $x_i(t)$  dos modos, o que nos dá uma ideia de como se distribui a energia potencial  $U_i(t) \propto x_i(t)^2$  entre os modos a medida que transcorre o tempo. Na Fig. 2.2 (d) vemos como todos os modos partem com uma amplitude inicial nula  $x_i(t = 0) = 0$  ou equivalentemente com uma energia potencial  $U_i(t = 0) = 0$  nula, e a medida que passa o tempo os modos de menor frequência vão adquirindo maior energia potencial. Isto tem uma explicação lógica considerando que o modo-1 de menor frequência está acoplado ressonantemente a um maior número de tripletos “vizinhos”, o qual favorece que sua energia potencial se incremente de forma ressonante. E como o número de tripletos “vizinhos” diminui a medida que a frequência dos modos se incrementa, o efeito é menor nos modos de maior frequência. Isto fica confirmado se olharmos mais detalhadamente como as amplitudes dos modos de menor frequência mostrados na Fig. 2.2 (b1) são maiores do que as amplitudes do modo bombeador na Fig. 2.2 (b2) e do modo-127 de maior frequência Fig. 2.2 (b3).

Por outro lado a Fig. 2.2 (e) mostra a distribuição das velocidades  $v_i(t)$  dos modos o que nos dá uma ideia da distribuição da energia cinética  $T_i(t) \propto v_i(t)^2$  ao longo dos modos a medida que passa o tempo. Claramente vê-se que no início o modo bombeador-64 é o único que possui energia cinética, a qual ele vai entregando aos modos restantes a medida que o sistema se aproxima do tempo de relaxação. Uma visão mais detalhada das velocidades  $v_i(t)$  dos modos mostra que os níveis de energia cinética: do modo bombeador-64 na Fig. 2.2 (c2) e do modo-127 de maior frequência na Fig. 2.2 (c3), são maiores do que a energia cinética do modo-1 de menor frequência na Fig. 2.2 (c1).

Finalmente a Fig. 2.2 (f) nos mostra o efeito combinado da distribuição modo-temporal da energia total  $E_i(t) = T_i + U_i$  dos modos, que resulta da soma da energia potencial e cinética ao longo dos modos e do tempo, onde pode se ver como a energia cinética inicial do modo bombeador-64 vai se distribuindo equitativamente a ambos lados do espectro, até que todos os

modos adquiram um nível de energia estacionário a medida que o sistema se aproxima do tempo de relaxação  $t \rightarrow t_{relax}$ . Uma visão mais detalhada da distribuição da energia a ambos lados do modo bombeador pode ser observada na Fig. 2.2 (b4). Nesta figura se nota como diminui a energia total dos modos do ramo inferior do espectro (que inclui o modo bombeador-64) definida como:

$$E_{ramo-inf} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N/2} (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) = \sum_{i=1}^{N/2} (T_i + U_i). \quad (2.29)$$

Enquanto a energia total dos modos do ramo superior do espectro definida como:

$$E_{ramo-sup} = \frac{1}{2} \sum_{i=N/2+1}^N (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) = \sum_{i=N/2+1}^N (T_i + U_i), \quad (2.30)$$

vai aumentando até que a energia de ambos ramos alcança um mesmo nível em um tempo próximo a  $t \sim 0.45 \times t_{relax}$ , para logo oscilar levemente em torno dos seus valores assintóticos a medida que todo o sistema relaxa em um estado mais ou menos estacionário.

Finalmente, é importante notar que uma característica do regime modulacional é que a energia de interação entre os tripletos acoplados com uma intensidade de acoplamento  $\varepsilon = \varepsilon_a$  dada por:

$$U_{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N U_{ijk} = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N \varepsilon x_i x_j x_k e^{-(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2)/\sigma^2} \delta_{i+j,k} \quad (2.31)$$

oscila em torno de um valor praticamente desprezível  $U_{int} \ll E_{pura}$  em comparação com a energia “pura” total, que é a soma da energia cinética e potencial dos modos dada por:

$$E_{pura} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) = \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N U_i \quad (2.32)$$

De forma que a energia do Hamiltoniano dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N x_i x_j x_k e^{-(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2)/\sigma^2} \delta_{i+j,k} \\ &= \sum_{i=1}^N T_i + \sum_{i=1}^N U_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \sum_{k>j}^N U_{ijk} \\ &= T + U \end{aligned}$$

se conserva, tal como mostra a Fig. 2.2 (c4).

#### 2.4.2 Regime II: $\Omega_{pump} \ll \omega_1 \lesssim \Omega_{fast}$

O segundo regime está ilustrado na Fig. 2.3 para um valor de acoplamento  $\varepsilon_b = 1.55 \times 10^{-4}$  justamente acima da curva crítica  $\varepsilon_{fast}$  no espaço de parâmetros- $(I_p, \varepsilon)$  mostrado na Fig. 2.1. Em todos os gráficos mostrados na Fig. 2.3 as escalas de tempo estão expressadas em unidades do tempo de relaxação  $t_{relax}(\varepsilon = \varepsilon_b, N = 128, I_p = 0.5)$  dado por 2.26. As duas principais diferenças com o regime modulacional previamente apresentado são:

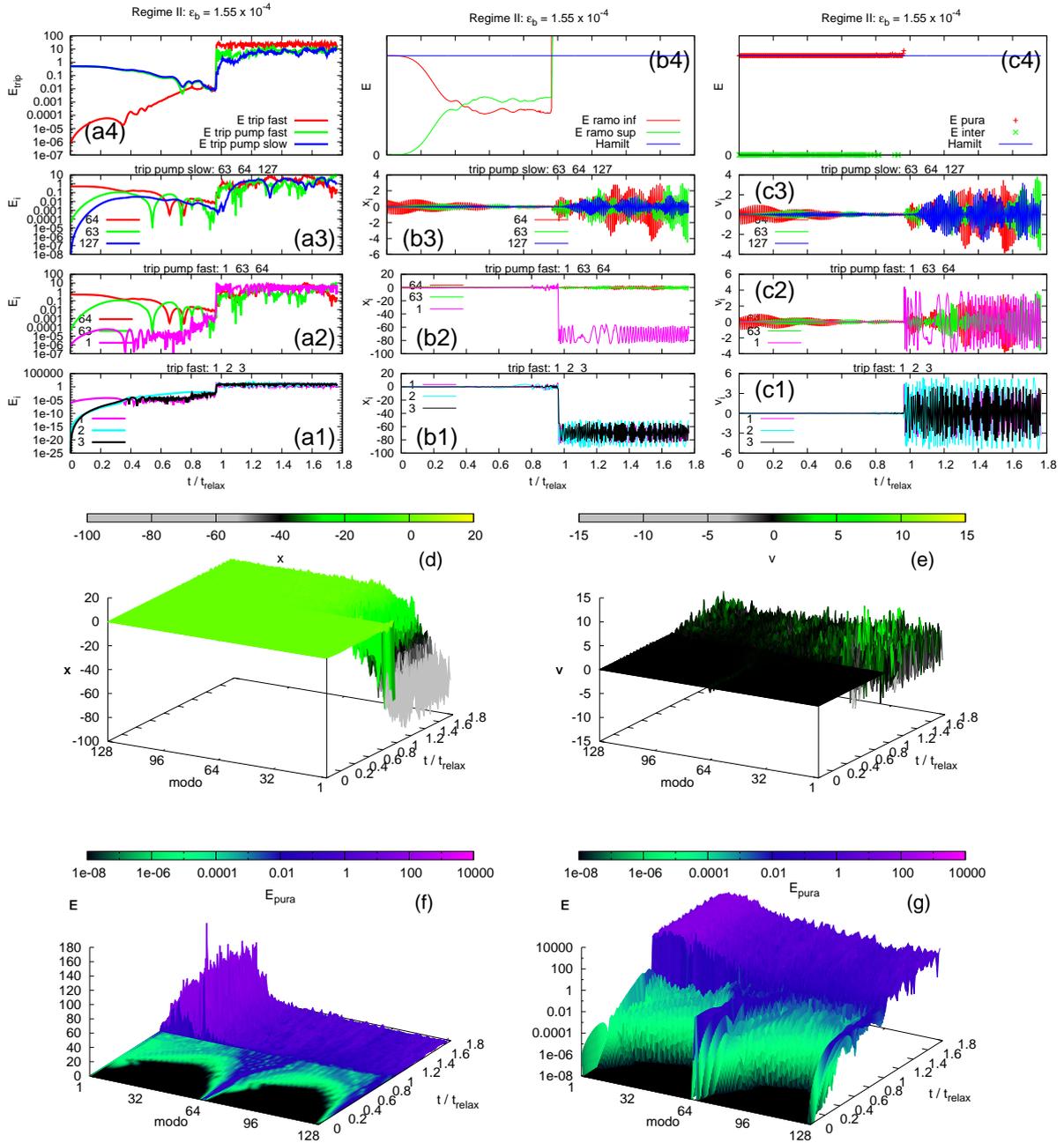


Figura 2.3: Ilustração do Regime II para  $\varepsilon_b = 1.55 \times 10^{-4}$ : Painéis superiores mostram a evolução temporal das:  $E_i(t)$ ,  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis centrais mostram a evolução modo-temporal das  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis inferiores mostram a evolução modo-temporal das  $E_i(t)$  dos modos.

1. As amplitudes  $x_i$  dos modos de menor frequência experimentam um salto e começam a oscilar em torno de valores médio não nulos longe da origem  $x_i \gg 0$ , onde são colocadas as condições iniciais do sistema. Isto é justamente devido ao fato que o máximo valor da frequência modulacional  $\Omega_{fast}$  é da ordem da menor frequência dos portadores  $\Omega_{fast} \sim \omega_1$ , o que implica que a aproximação modulacional não é mais válida para os modos de menor

freqüência. Na Fig. 2.3(b1) vemos como as amplitudes dos 3 modos de menor freqüência experimentam uma “explosão” ao redor de  $t \sim t_{relax}$  e começam a oscilar em torno de um valor não nulo  $x_i \sim -70$  longe da origem onde são colocadas as condições iniciais  $x_i(0) = 0$ .

2. Por outro lado, como a freqüência modulacional associada ao bombeador  $\Omega_{pump}$  é ainda muito menor do que a freqüência modulacional máxima:  $\Omega_{pump} \ll \Omega_{fast}$ , então a aproximação modulacional ainda é válida para descrever o modo bombeador-64 e os modos de maior freqüência, tal como mostra a Fig. 2.3(b2) para os modos-63 e 64 e a Fig. 2.3(b3) para os modos 63, 64 e 127, que mostram que mesmo depois do tempo  $t \sim t_{relax}$  onde ocorre a explosão nas amplitudes dos modos de menor freqüência, as amplitudes dos modos 63, 64 e 127 continuam oscilando em torno da origem. Na Fig. 2.3(d) temos a evolução modo-temporal das amplitudes  $x_i(t)$  dos modos onde pode-se apreciar que efetivamente os modos com menor freqüência ao modo bombeador-64 experimentam uma “explosão” nas suas amplitudes. Agora se olhamos a distribuição modo-temporal da energia cinética na Fig. 2.3(e) vemos que se as velocidades  $v_i(t)$  dos modos de menor freqüência experimentam um incremento depois de um tempo  $t \sim t_{relax}$ . Porém elas continuam oscilando em torno da origem com um valor médio nulo, tal como mostra a Fig. 2.3(c1) para os três modos de menor freqüência, e os modos de maior freqüência 63, 64 e 127 nas Figs. 2.3(c2) e (c3). Do anterior podemos concluir que os modos de menor freqüência abandoam o regime modulacional principalmnete devido a um incremento ressonante da energia potencial dos mesmos e não devido a um incremento da suas energias cinéticas.

Se agora consideramos o efeito combinado da soma da distribuição modo-temporal das energias potencial e cinética mostrado nas Figs. 2.3(f) e (g) vemos que efetivamente a energia “pura” total dos modos de menor freqüência experimenta uma “explosão”.

### 2.4.3 Regime III: $\Omega_{pump} \gtrsim \omega_1$

A dinâmica do terceiro regime esta ilustrada na Fig. 2.4 para um valor de acoplamento  $\varepsilon_c = 150 \times 10^{-4}$  acima da curva crítica  $\varepsilon_{pump}$  no espaço de parâmetros- $(I_p, \varepsilon)$  mostrado na Fig. 2.1. Em todos os gráficos mostrados na Fig. 2.4 as escalas de tempo estão expressadas em unidades do tempo de relaxação  $t_{relax}(\varepsilon = \varepsilon_c, N = 128, I_p = 0.5)$  dado por 2.26. A principal diferença deste regime com os dois previamente ilustrados é que neste regime a freqüência modulacional associada ao modo bombeador é da ordem da menor das freqüências dos portadores:  $\Omega_{pump} \gtrsim \omega_1$ , de forma que o mesmo modo bombeador é afetado pela quebra da aproximação modulacional, tal como mostra a Fig. 2.4 (b2) onde vê-se que não só a amplitude do modo 1 experimenta uma “explosão” depois de um tempo  $t > 0.3t_{relax}$ , mas também o modo bombeador 64 e modos de maior freqüência como o modo 127 na Fig. 2.4 (b3). Se olhamos a distribuição modo-temporal da energia potencial dos modos na Fig. 2.4 (d) vemos que os modos de menor freqüência são os que sofrem o maior incremento ressonante nas suas amplitudes. Enquanto que a distribuição da energia cinética dos modos na Fig. 2.4 (e) mostra que depois da “explosão” as velocidades de todos os modos se incrementam radicalmente, tanto dos modos 1, 2 e 3 de menor freqüência na Fig. 2.4 (c1) assim como as velocidades dos modos 63, 64 e 127 de maior freqüência na Fig. 2.4 (c2) e (c3). O efeito combinado do incremento ressonante nas energias potenciais dos modos de menor freqüência com o incremento das energias cinéticas de todos os modos está mostrado nas Fig. 2.4 (f) e (g), que dão a distribuição da energia “pura” total. Pode-se apreciar que o pequeno porém persistente platô visto na Fig. 2.3 (g) tem-se espalhado sobre o espectro inteiro na Fig. 2.4 (g).

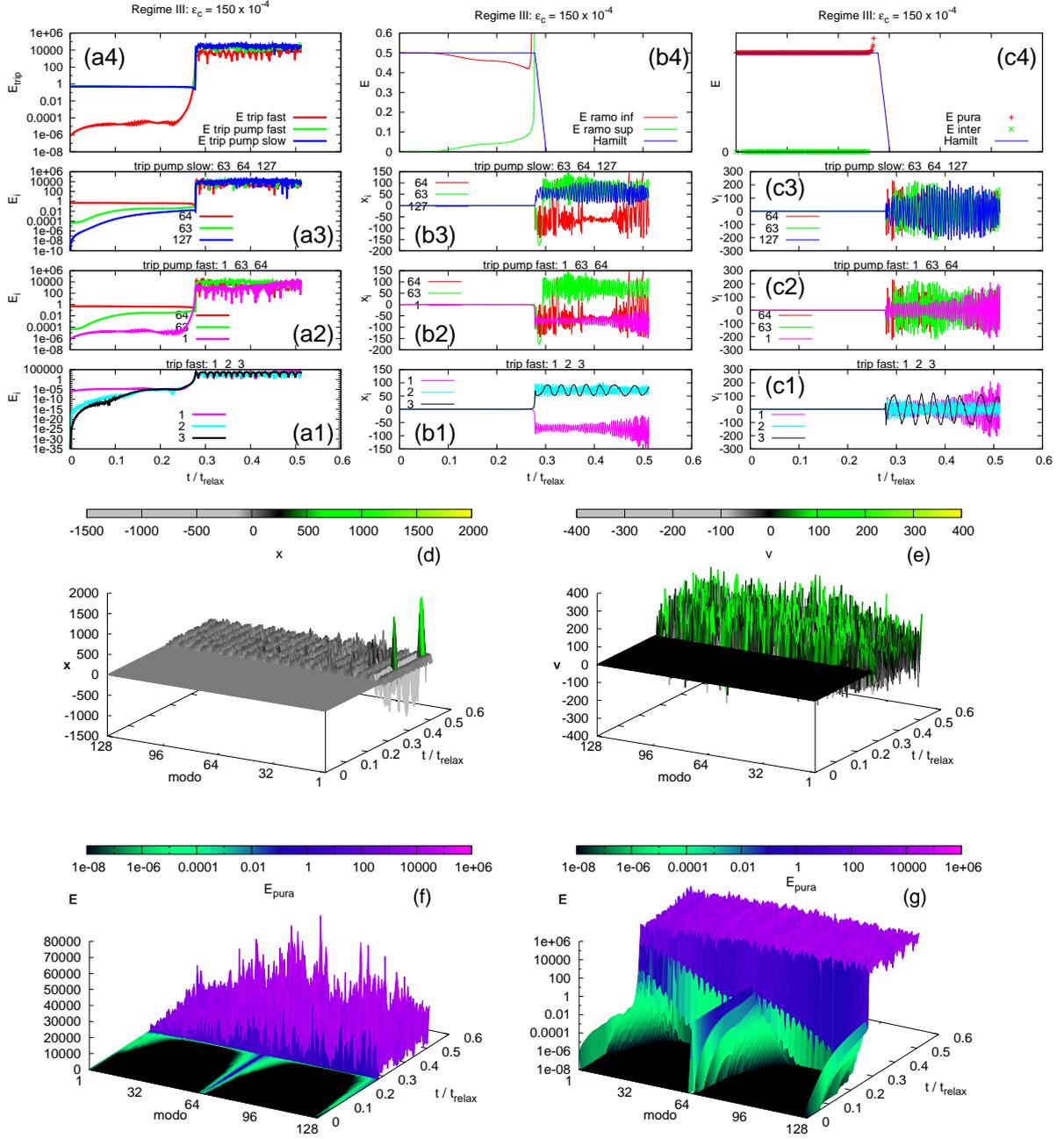


Figura 2.4: Ilustração do Regime III para  $\epsilon_c = 150 \times 10^{-4}$ : Painéis superiores mostram a evolução temporal das:  $E_i(t)$ ,  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis centrais mostram a evolução modo-temporal das  $x_i(t)$  e  $v_i(t)$  dos modos. Painéis inferiores mostram a evolução modo-temporal das  $E_i(t)$  dos modos.

#### 2.4.4 Verificação numérica da curva teórica: $t_{relax}(\epsilon, N = 128, I_p = ctte.)$

Lembramos que na seção anterior vimos que o tempo de relaxação (2.26):

$$t_{relax}(\epsilon, N, I_p) = \frac{4\pi}{\epsilon N} \sqrt{\frac{(N-2)(N-1)}{I_p}} \quad (2.33)$$

depende do acoplamento  $\varepsilon$ , do número de modos  $N$  e da intensidade inicial do modo bombeador  $A_{N/2}(0) = I_p$ . De forma que:

$$\text{quando } N = ctte. \text{ e } \varepsilon = ctte. \rightarrow t_{relax}(I_p) \propto \frac{1}{\sqrt{I_p}} \quad (2.34)$$

o tempo de relaxação tem uma dependência potencial inversa com a amplitude inicial do bombeador  $I_p$ . Por outro lado:

$$\text{quando } N = ctte. \text{ e } I_p = ctte. \rightarrow t_{relax}(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

o tempo de relaxação tem uma dependência inversa com o acoplamento  $\varepsilon$ . Relembramos também que quando o acoplamento  $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{fast}$  o sistema abandona o regime modulacional e uma assinatura disto é que a amplitude do modo-1 de menor frequência experimenta uma “explosão”  $x_1(t) \gg 0$  para um tempo  $t \lesssim t_{relax}$ . Assim, por exemplo, no segundo regime ilustrado na Fig. 2.3 vimos que para um acoplamento  $\varepsilon_b \sim \varepsilon_{fast}$  esta “explosão” ocorre em um tempo próximo de  $t \sim t_{relax}$ , enquanto que para um acoplamento maior  $\varepsilon_c > \varepsilon_{fast}$  como o do terceiro regime ilustrado na Fig. 2.4, a “explosão” na amplitude do modo-1 ocorre em um tempo menor de ao redor de  $t \sim 0.3 \times t_{relax}$ . Também relembramos que para acoplamentos  $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_{fast}$  a quebra do regime modulacional nos sistemas de três ondas está sempre acompanhada por um salto das oscilações do triplete para excursões muito maiores, longe da região harmônica  $g \sim 1$  onde as condições iniciais são colocadas e onde termos de mais alta ordem do potencial de confinamento são desprezíveis. Então podemos monitorar o modo 1 e tomar nota do tempo que leva para saltar a regiões modais onde  $x_1 \gg \sigma$ , e  $g \leq 1$ . O salto é abrupto e facilmente monitorado computacionalmente, e nós chamamos este tempo crítico de  $t_{break}$ . Então a ideia é examinar a correlação que existe entre o tempo de relaxação  $t_{relax}(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon}$  e o tempo de quebra  $t_{break}$  para diferentes valores de acoplamento  $\varepsilon$ . Para isto, fixamos  $N = ctte. = 128$  e  $I_p = ctte.$  e realizamos simulações para dez valores diferentes do acoplamento  $\varepsilon$  começando embaixo da curva  $\varepsilon_{fast}$  e incrementando o acoplamento logaritmicamente até  $\varepsilon = 1$ , tal como indicam os pontos teste azuis na Fig. 2.5 (a) ao longo das três linhas verticais  $I_p = 0.25, 0.5$  e  $0.75$ . As simulações para todos os pontos teste foram feitas de forma paralela no cluster do CESUP-UFRGS usando um código de cómputo paralelo escrito em linguagem FORTRAN, e sempre que na simulação a amplitude do modo-1 experimentava uma “explosão” marcamos com uma cruz magenta na Fig. 2.5 (a) acima do ponto simulado, e salvamos o  $t_{break}$  em questão.

Na Fig. 2.5(b) marcamos ambos o  $t_{break}$  (indicado com triângulos para  $I_p = 0.25$ , círculos para  $I_p = 0.5$  e quadrados para  $I_p = 0.75$ ) e as curvas teóricas do tempo de relaxação  $t_{relax}(\varepsilon, N = 128, I_p)$  em função do acoplamento  $\varepsilon$  em uma escala log-log (em linha azul para  $I_p = 0.25$ , vermelha para  $I_p = 0.5$  e preta para  $I_p = 0.75$ ). Vemos que a medida que o acoplamento aumenta as curvas  $t_{relax}(\varepsilon, N = 128, I_p)$  revelam o típico comportamento associado com a dependência inversa com o acoplamento; a medida que  $\varepsilon$  incrementa ambas escalas de tempo tanto da relaxação quanto da quebra decrescem da mesma forma, com a quebra sempre ocorrendo antes que o sistema esteja completamente relaxado. Porém, as linhas de pontos associadas com o  $t_{break}$  não são retas porque para valores menores de  $\varepsilon$  suas pendentes tendem a inclinar-se no gráfico log-log, eventualmente atravessando as curvas definidas por  $t_{relax}$ . Assim para o caso  $I_p = 0.5$  o cruzamento ocorre ao redor de  $1.2 \times 10^{-4}$ , o qual está perto da estimativa analítica dado por  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p = 0.5) \sim 1.45 \times 10^{-4}$  2.20. As três linhas verticais (linha vertical azul para  $I_p = 0.25$ , linha vertical vermelha para  $I_p = 0.5$  e linha vertical preta para  $I_p = 0.75$ ) indicam os valores críticos de acoplamento  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  até onde a aproximação modulacional é válida para os três casos. Vemos que por exemplo para o caso  $I_p = 0.5$  para valores menores a

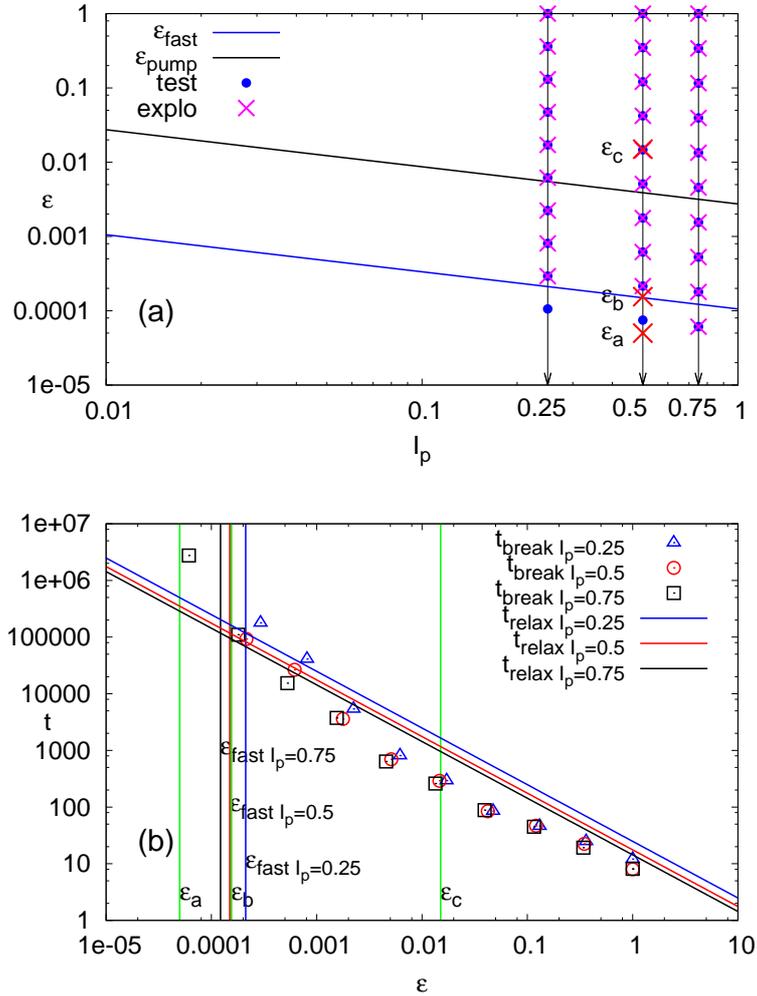


Figura 2.5: Painel (a) Os pontos teste azuis correspondem aos valores de acoplamento para os quais se realizaram as simulações para obter os tempos de quebra numéricos  $t_{break}$  que são graficados no painel (b). Sempre que ocorria uma explosão na amplitude do modo-1 foi marcada uma cruz magenta acima do respectivo ponto teste azul. Painel (b): Dados do tempo de quebra da aproximação modulacional  $t_{break}$  obtidos numericamente para três valores distintos da amplitude inicial do modo principal  $A(0) \frac{N}{2} = I$  (triângulos azuis para  $I = 0.25$ , círculos vermelhos para  $I = 0.5$  e quadrados pretos para  $I = 0.75$ ) contrastados com as curvas teóricas  $t_{relax}(\epsilon)$  (linha azul para  $I = 0.25$ , linha vermelha para  $I = 0.5$  e linha preta para  $I = 0.75$ ). As três linhas verticais (em azul, vermelho e preto respectivamente) indicam os respectivos acoplamentos críticos  $\epsilon_{fast}$  até onde a aproximação modulacional é válida para as três respectivas amplitudes iniciais  $I = 0.25, 0.5$  e  $0.75$ . Finalmente as três linhas verdes nos acoplamentos  $\epsilon_{(a,b,c)} = (0.5, 1.55, 150) \times 10^{-4}$  correspondem aos três valores de acoplamentos que usamos mais acima para ilustrar os Regimes I, II e III respectivamente usando nas simulações uma amplitude inicial do modo principal de  $I = 0.5$ .

$\epsilon_{fast}(N = 128, I_p = 0.5)$  não conseguimos obter um  $t_{break}$  finito mesmo para simulações rodando até dez vezes o tempo de relaxação  $t_{relax}$ . Em um sentido aproximado, se o sistema não sai fora do regime modulacional antes que o tempo de relaxação, este não sairá mais dele. As três linhas verticais verdes indicam os três valores de acoplamento  $\epsilon_{(a,b,c)}$  que foram usados para ilustrar os

regimes I, II e III respectivamente para o caso de  $I_p = 0.5$ .

### 2.4.5 Verificação numérica da curva teórica: $\varepsilon_{pump}(N = 128, I_p)$

Lembramos que na seção anterior a fronteira entre o regime modulacional I e o Regime II no espaço de parâmetros- $(I_p, \varepsilon)$ , está dado pela curva teórica (2.20):

$$\varepsilon_{fast}(N, I_p) \equiv \frac{8}{N^2} \sqrt{\frac{6}{NI_p}} \quad (2.37)$$

que depende do número de modos  $N$  e da amplitude inicial do modo bombeador  $A_{N/2}(0) = I_p$ . Desta forma:

$$\text{quando } N = ctte. \quad \rightarrow \varepsilon_{fast}(I_p) \propto \frac{1}{\sqrt{I_p}} \quad (2.38)$$

o acoplamento crítico  $\varepsilon_{fast}$  tem uma dependência potencial inversa com  $I_p$ , tal como mostra a curva preta na Fig. 2.6. Para poder verificar numericamente esta curva fixamos o número de modos a  $N = 128$  e rodamos várias simulações perto da curva teórica  $\varepsilon_{fast}$  para diferentes ordens de magnitude da amplitude inicial do bombeador  $A_{N/2} = I_p = 0.001, 0.01, 0.1$  e  $1$ . Os pontos para os quais se realizaram as simulações estão indicados com pontos azuis na Fig. 2.6, e as coordenadas de todos eles estão tabuladas na Tabela 2.1. As simulações para os diferentes pontos foram computadas de forma paralela no cluster do CESUP-UFRGS. A simulação para cada ponto consistiu essencialmente nos seguintes cálculos:

- da evolução temporal da energia “pura” do ramo inferior  $E_{ramo-inf}(t)$  dada por (2.29) e  $E_{ramo-sup}(t)$  dada por (2.30) com a finalidade de identificar a “explosão” característica nas energias quando o sistema abandona o regime modulacional.
- e por outro lado também se calculou a serie temporal do Hamiltoniano  $\mathcal{H}(t)$  dado por (2.33) para monitorar que a energia total seja conservada na simulação.

Para um determinado valor fixo de  $I_p = ctte.$  se simularam 3 pontos: um justamente sobre a curva teórica a uma distância de 0% do valor teórico  $\varepsilon_{fast}$ , outro a uma distancia de -15% inferior ao valor teórico  $\varepsilon_{fast}$ , e outro a uma distancia de -30% abaixo da curva teórica  $\varepsilon_{fast}$ . Sempre que verificamos uma explosão na serie temporal das energias dos ramos marcamos graficamente o ponto em questão com uma cruz magenta na Fig. 2.6 e indicamos a dinâmica observada na última coluna da Tabela 2.1. Analisando os dados da Tabela 2.1 e olhando a Fig. 2.6 vemos que ao longo das linhas  $I_p = 0.001$  e  $0.01$  a curva teórica tem um margem de erro de até -30%, porém para  $I_p = 0.1$  e  $1$  vemos que o erro porcentual é menor a -15%, o qual mostra uma concordância aceitável das simulações com as estimativas teóricas. Os acoplamentos  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  e  $\varepsilon_c$  usados na ilustração dos três regimes explicados anteriormente estão indicados na Fig. 2.6 assim como a curva teórica  $\varepsilon_{pump}$ .

Vemos que as simples estimativas desenvolvidas previamente são bastante compatíveis com os resultados vistos nas simulações modais completas. Devemos mencionar que integradores simplécticos foram usados em nossas simulações com um erro relativo muito pequeno da ordem de só  $\frac{\delta E_{full}}{E_{full}} \sim 10^{-6}$ , com a energia total conservada sendo escrita como antes (1.37):

$$\begin{aligned} E_{full} &= \sum_{i=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) + \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 g_{1,2,3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2) + \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/\sigma^2}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

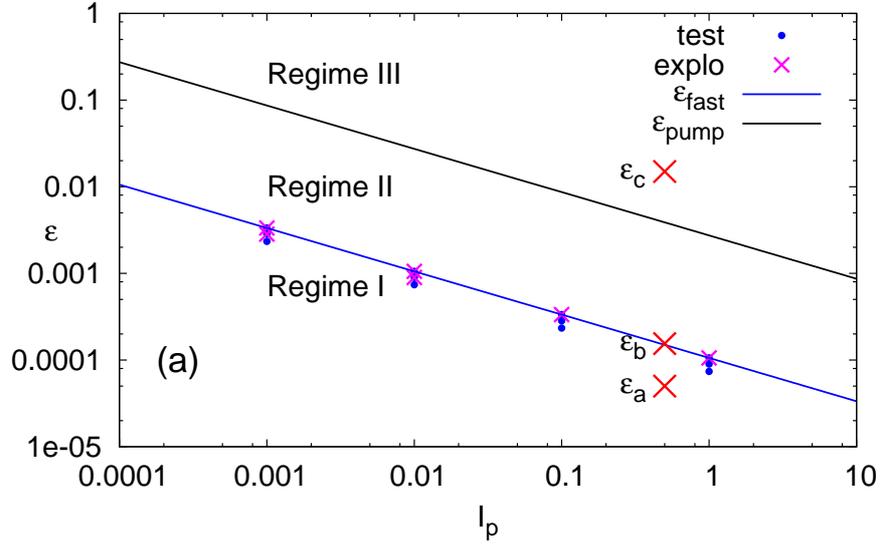


Figura 2.6: Curvas teóricas de transição no espaço de parâmetros- $(I, \varepsilon)$ . Círculos azuis indicam pontos teste simulados e sempre que ocorre uma explosão na amplitude do modo 1 marcamos com uma cruz magenta acima do ponto azul. A curva teórica  $\varepsilon_{fast}(I)$  é representada pela linha reta azul inferior, e  $\varepsilon_{pump}(I)$  pela linha reta preta superior. As coordenadas dos pontos teste azuis estão tabuladas na Tabela 2.1. Também marcamos os três pontos  $\varepsilon_{(a,b,c)} = (0.5, 1.55, 150) \times 10^{-4}$  que foram usados mais acima para ilustrar os três Regimes para  $I = 0.5$ .

Tabela 2.1: Colunas 1 e 2 indicam as coordenadas dos pontos teste azuis indicados na Fig. 2.6. A coluna 3 indica o valor teórico  $\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$  dado pela Eq. 2.20. A coluna 4 da a diferença percentual:  $diff.\% = \frac{(\varepsilon_{fast} - \varepsilon_{test}) \times 100}{\varepsilon_{fast}}$  dos pontos teste em relação ao valor teórico e a coluna 5 indica a dinâmica da energia do ramo inferior:  $E_{ramo-inf}(t)$  2.29 observada nas simulações.

$I_p$	$\varepsilon_{test}$	$\varepsilon_{fast}(N = 128, I_p)$	$diff.\%$	dinâmica da $E_{ramo-inf}(t)$
0.1000000E-01	0.1057160E-02		0%	explode
0.1000000E-01	0.8985859E-03	0.1057160E-02	-15%	explode
0.1000000E-01	0.7400119E-03		-30%	modulacional
0.1000000E-02	0.3343033E-02		0%	explode
0.1000000E-02	0.2841578E-02	0.3343033E-02	-15%	explode
0.1000000E-02	0.2340123E-02		-30%	modulacional
0.1000000E+00	0.3343033E-03		0%	explode
0.1000000E+00	0.2841578E-03	0.3343033E-03	-15%	modulacional
0.1000000E+00	0.2340123E-03		-30%	modulacional
0.1000000E+01	0.1057160E-03		0%	explode
0.1000000E+01	0.8985859E-04	0.1057160E-03	-15%	modulacional
0.1000000E+01	0.7400119E-04		-30%	modulacional

# Conclusões

No primeiro capítulo, examinamos o que acontece com sistemas não-lineares de três ondas a medida que as aproximações modulacionais, tantas vezes usadas para descrever o sistema [38, 39, 40], falham. Aproximações modulacionais são justificadas quando tanto a amplitude como a fase de cada onda varia em uma escala de tempo muito maior do que aquela associada com a alta frequência dos portadores. Já que foi observado que a dinâmica da amplitude e a fase evoluem em uma escala de tempo definida por uma frequência característica  $\Omega \sim \varepsilon_1$ , concluímos que a abordagem modulacional é conveniente para sistemas fracamente acoplados. A medida que o acoplamento do tripleto cresce desde valores pequenos, observamos uma série de comportamentos distintos. O primeiro, associado a pequenos valores do acoplamento, é o modulacional genuíno onde as simulações do sistema completo concordam precisamente com a aproximação modulacional. Valores uniformemente crescentes do acoplamento  $\varepsilon_1$  primeiro afetam o acordo entre as simulações do sistema completo com os modulacionais porém não muda o caráter limitado das excursões da amplitude. Depois, valores maiores do acoplamento não só afetam a precisão da abordagem modulacional, mas através de uma mudança global do espaço de configuração disponível para o tripleto, conduzem a dinâmica para excursões muito maiores. Neste último caso, as órbitas gastam um tempo transiente dentro da região previamente associada com a dinâmica modulacional, porém todas, depois de um salto repentino, executam as grandes excursões de amplitude mencionadas.

No caso de três ondas o varrido do espaço paramétrico- $(I, \varepsilon_1)$  através do computo do expoente de Lyapunov dominante, mostrou que de uma forma global a transição da aproximação modulacional para a explosão, coincide com a transição de uma dinâmica quase-periódica para uma caótica do conjunto completo. Sendo que a curva teórica de transição e a curva obtida numericamente diferem num máximo de 20% para uma larga faixa de ordens de magnitude da intensidade inicial  $I$ .

O comportamento é visto em ambos os casos: tanto quando examinamos o sistema de três ondas mais canônico onde as frequências dos portadores são semelhantes em termos de ordem de grandeza, assim como no caso em que uma das frequências dos portadores é muito menor do que as outras duas. Este último, embora um pouco fora das definições de livro texto de sistemas de tripleto, é de extrema importância para dispositivos de elétrons, onde, tipicamente, duas ondas eletromagnéticas de alta frequência excitam uma onda espacial de carga de menor frequência, também chamada onda de plasma [15].

No segundo capítulo nossas conclusões finais apontam ao fato que a interação multimodo [60], se bem mais complexa que a interação de tripleto isolada [41], ainda herda as características chave da transição que puxa a dinâmica fora do regime modulacional. Isto ficou respaldado pela boa concordância, entre a curva teórica (que marca a fronteira da aproximação modulacional no espaço paramétrico- $(I_p, \varepsilon)$ ) e as simulações numéricas do sistema completo, para uma larga faixa de ordens de magnitude da intensidade inicial  $I_p$  do modo bombeador. Por outro lado também mostramos que, mesmo quando o sistema já está fora do regime modulacional, a expressão teórica obtida para o tempo de relaxação concorda bem com os tempos de quebra nos quais o sistema

completo experimenta a explosão, para uma faixa larga de ordens de grandeza do acoplamento  $\varepsilon$ . Até onde vai nosso conhecimento no tema, a transição não tem sido completamente explorada e coloca um limite para abordagens que não consideram os efeitos completos das derivadas inerciais temporais de segundo ordem nas equações que governam o sistema.

Enquanto o regime modulacional pode ser descrito por amplitudes lentamente moduladas dos portadores harmônicos, a transição discutida aqui leva a dinâmica para um estado onde todos os modos oscilam com médias temporais não nulas. A quebra da aproximação modulacional ocorre numa maneira gradual. Esta começa quando a frequência modulacional do tripleto mais rápido, o tripleto 1, 2, 3, cresce até um ponto onde esta é comparável com a menor frequência do portador  $\omega_1$ . Desse ponto em adiante, um crescente número de modos se envolve na quebra até o que parece ser um limite de saturação em  $\varepsilon = \varepsilon_{pump}$ , onde a coleção inteira de modos abandona o regime modulacional.

Disipação ainda para ser considerada mais propriamente no nosso modelo, porém enquanto a sua escala de tempo é similar à escala modulacional esperamos que nossa análise ainda se aplique. A abordagem modulacional tem sido usada ao longo dos anos para descrever a interação de tripleto levemente não-linear e inclusive interações que envolvem termos de acoplamento com graus de não linearidade mais altos, como no caso da interação de quatro ondas [42, 43]. O que vemos aqui é que mesmo com intensidades de acoplamentos pequenas, a abordagem tem limitações relevantes no contexto de cenários de multimodos.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. Weiland, H. Wilhelmsson, *Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas*, Pergamon, Oxford, (1977).
- [2] G.B. Whitham, *Linear and nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York (1974).
- [3] R. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, London, (1972).
- [4] J.T. Mendonça, *Theory of Photon Acceleration*, IOP Publishing, Bristol, (2001).
- [5] B.N. Kuvshinov, T.J.H. Smit, and X.H. Campman, *Non-linear interaction of elastic waves in rocks*, Geophys. J. Int. **194**, 1920 (2013).
- [6] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1992).
- [7] H. Segur, *Triad (or 3-Wave) Resonances*,  
<https://www.whoi.edu/fileserver.do?id=136505&pt=10&p=85713>,  
1 (2009).
- [8] A.F. El-Bassiouny, *Three-mode interaction in harmonically excited system with cubic nonlinearities*, Appl. Math. Comput. **139**, 201 (2003).
- [9] S.R. Lopes, A.C.-L. Chian, *Controlling chaos in nonlinear three-wave coupling*, Phys. Rev. E **54**, 170 (1996).
- [10] G.I. de Oliveira, L.P.L. de Oliveira, F.B. Rizzato, *Nonintegrable three mode interaction in the Zakharov equations*, Physica D **104**, 119 (1997).
- [11] G.J. Gerhardt, M. Frichembruder, F.B. Rizzato, S.R. Lopes, *Sudden transition to spatiotemporal chaos in a nonlinear Klein-Gordon equation*, Chaos Solitons Fractals **13**, 1269 (2002).
- [12] F.J. Romeiras, *Integrability of double three-wave interaction*, Phys. Lett. A **93**, 227 (1983).
- [13] E.V. Felk, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, *Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation*, Physica A **410**, 561 (2014).
- [14] S.R. Lopes and F.B. Rizzato, *Nonintegrable dynamics of the triplet-triplet spatiotemporal interaction*, Phys. Rev. E **60**, 5375 (1999).
- [15] G.I. de Oliveira, L.P.L. de Oliveira, F.B. Rizzato, *Low-dimensional phase-locked states in the Zakharov equations*, PRE **54**, 3239 (1997).

- [16] G.H. Dong *et al.*, *Laboratory study on the modulation evolution of nonlinear wave trains*, Ocean Systems Engineering **2**, 189 (2012).
- [17] M. Conforti, F. Baronio, and C. De Angelis, *Nonlinear envelope equation for broadband optical pulses in quadratic media*, Phys. Rev. A **81**, 053841 (2010).
- [18] A.S. Shcherbakov, A.A. Lopez, *Wave multiplication of binary encoded data exploiting solitary multi-pulse non-collinear threewave coupled states*, J. Opt. A **8**, 464 (2006).
- [19] H. Alinejad, P.A. Robinson, O. Skjaeraasen, I.H. Cairns, *Coupled Langmuir and nonlinear ion acoustic waves in the presence of non-thermal electrons*, J. Plasma Phys. **75**, 193 (2008).
- [20] P.M. Drysdale, P.A. Robinson, *Mean field theory of the coherent to random-phase state transition in three-wave interactions*, Phys. Plasmas **9**, 4896 (2002).
- [21] M. Frichebruder, R. Pakter, F.B. Rizzato, *Coherence-incoherence transition in nonlinear wave interactions*, J. Plasma Physics **71**, 11 (2005).
- [22] P.K. Shukla, N.N. Rao, M.Y. Yu, N.L. Tsintsadze, *Relativistic nonlinear effects in plasmas*, Phys. Rep. **138**, 1 (1986).
- [23] E.G. Evstatiev, P.J. Morrison, W. Horton, *A relativistic beam-plasma system with electromagnetic waves*, Phys. Plasmas **12**, 072108 (2005).
- [24] A.M. Batista, I.L. Caldas, S.R. Lopes, R.L. Viana, W. Horton, P.J. Morrison, *Nonlinear three-mode interaction and drift-wave turbulence in a tokamak edge plasma*, Phys. Plasmas **13**, 042510 (2006).
- [25] G. Brodin, L. Stenflo, *Alfven wave interactions within the Hall-MHD description*, J. Plasma Phys. **79**, 909 (2013).
- [26] S.G. Thornhill, and D. ter Haar, *Langmuir turbulence and modulational instability*, Phys. Rep. **43**, 43 (1978).
- [27] F.B. Rizzato, A.C.-L. Chian, *Nonlinear generation of the fundamental radiation in plasmas: The role of induced ion-acoustic and Langmuir waves*, J. Plasma Phys. **48**, 71 (1992).
- [28] M. Frichebruder, R. Pakter, G. Gerhardt, F.B. Rizzato, *Chaos and coherence in the conservative three-mode decay interaction*, Phys. Rev. E **62**, 7861 (2000).
- [29] L.F. Monteiro, A. Serbeto, K.H. Tsui, J.T. Mendonça, R.M.O. Galvão, *Quantum fluid model of coherent stimulated radiation by a dense relativistic cold electron beam*, Phys. Plasmas **20**, 073101 (2013).
- [30] A. Bonatto, R.P. Nunes, C. Bonatto, S.R. Lopes, R. Pakter, F.B. Rizzato, *Multidimensional aspects of nonlinear electromagnetic solitary pulses*, Physica A **404**, 332 (2014).
- [31] G. Lehmann and K.H. Spatschek, *Control of Brillouin short-pulse seed amplification by chirping the pump pulse*, Phys. Plasmas **22**, 043105 (2015).
- [32] A. Bonatto, R. Pakter and F.B. Rizzato, *Self-consistent dynamics of electromagnetic pulses and wakefields in laser-plasma interactions*, Laser Part. Beams **29**, 399 (2011).
- [33] R. Bonifacio, F. Casagrande, G. Cerchioni, L. de Salvo Souza, P. Pierini, N. Piovella, *Physics of the High-Gain Free Electron Laser & Superradiance*, Riv. Nuovo Cimento **13**, 1 (1990).

- [34] F. Schluck, G. Lehmann and K.H. Spatschek, *Amplification of a seed pumped by a chirped laser in the strong coupling Brillouin regime*, Phys. Plasmas **22**, 093104 (2015).
- [35] T. Tajima and J.M. Dawson, *Laser Electron Accelerator*, Phys. Rev. Lett. **43**, 267 (1979).
- [36] E. Peter, A. Endler, F.B. Rizzato, *Nonlinear model for thermal effects in free-electron lasers*, Phys. Plasmas **21**, 113104 (2014).
- [37] P. Gibbon, *Short Pulse Laser Interactions with Matter*, Imperial College Press, London, (2007).
- [38] T. Honzawa, T. Hoshina and Y. Saitou, *Experimental study on Instabilities of Explosive Type in Beam-Plasma Systems*, J. Plasma Fusion Res. **2**, 356 (1999).
- [39] S. Basu, *Study of two coupled three-wave interactions with a quadratic non-linearity in the presence of dissipation and frequency mismatch*, J. Plasma Physics **69**, 1 (2003).
- [40] K.M. Huang *et al.*, *Nonlinear interaction of gravity waves in a nonisothermal and dissipative atmosphere*, Ann. Geophys. **32**, 263 (2014).
- [41] P. Iorra, S. Marini, E. Peter, R. Pakter, F.B. Rizzato, *Beyond the modulational approximation in the wave triplet interaction*, Phys. A **436**, 686 (2015).
- [42] T.F. Viscondi, I. Caldas, and P.J. Morrison, *A method for Hamiltonian truncation: a four-wave example*, J. Phys. A: Math. Theor. **49**, 165501 (2016).
- [43] R. Pakter, S.R. Lopes, R.L. Viana, *Transition to chaos in the conservative four-wave parametric interactions*, Physica D **110**, 227 (1997).
- [44] M. Stiassnie, L. Shemer, *On the interaction of four water - waves*, Wave motion **41**, 307 (2005).
- [45] P.A.M. Janssen, *Nonlinear Four-Wave Interactions and Freak Waves*, Journal of Physical Oceanography **33**, 864 (2003).
- [46] R.C. Davidson, *Resonant Four-Wave Interaction of Electron-Plasma Oscillations*, PRE **176**, 344 (1968).
- [47] J.G. Turner, *Four-Wave Interaction of Positive and Negative Energy Waves in Plasmas*, Physica Scripta **21**, 185 (2007).
- [48] R. Sugihara, *Interaction between an Electromagnetic Wave, Plasma Waves, and an Ion Acoustic Wave*, Physics of Fluids **11**, (2003).
- [49] A.I. Dyachenko, Y.V. Lvov, V.E. Zakharov, *Five-wave interaction on the surface of deep fluid*, Physica D **87**, 233 (1995).
- [50] S. Wojciechowski, Z. Jiang, R.K. Bullough, *Integrable multiwave interaction systems of ODEs*, Physics Letters A **117**, 399 (1986).
- [51] O.G. Romanov and A.L. Tolstik, *Wave front transformation of optical vortices with multiwave interactions in resonant media*, Journal of Applied Spectroscopy **76**, 370 (2009).
- [52] I.V. Shutov, A.A. Novikov and A.S. Chirkin, *Multi-wave coupled interactions in aperiodically poled nonlinear crystals*, Proc. SPIE 6729, ICONO 2007: Coherent and Nonlinear Optical Phenomena, 67292W (2007).

- 
- [53] M. Oikawa and N. Yajima, *Part II. Further Developments of the Reductive Perturbation Method A Generalization of the Reductive Perturbation Method to Multi-Wave Systems*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics **55**, 36 (1974).
- [54] R.E. Glazman, *Multi-wave interaction theory for wind-generated surface gravity waves*, Journal of Fluid Mechanics **243**, 623 (1992).
- [55] Z. Liu and Sh.J. Liao, *Steady-state resonance of multiple wave interactions in deep water*, J. Fluid Mech. **242**, 664 (2014).
- [56] E.G. Evstatiev, W. Horton, and P.J. Morrison, *Multiwave model for plasma wave interaction*, Physics of Plasmas **10**, 1063 (2003).
- [57] N.I. Karbushev, *Multi-wave interaction of the intense relativistic electron beam with a plasma waveguide*, IEEE International Conference on Plasma Science (1992).
- [58] R.R. Lindberg, *Nonlinear and Multi-Wave Effects in Fast-Scale Laser-Plasma Interactions*, Doctoral Thesis, Univ. of California, Berkeley (2007).
- [59] Y.-X. Lai and S.-Ch. Zhang, *Multiwave interaction formulation of a coaxial Bragg structure and its experimental verification*, Physics of Plasmas **14**, 1063 (2007)
- [60] E. Peter, S. Marini, A.T. Chávez and F.B. Rizzato, *Breakdown of the modulational approximation in a multimode extension of the triplet interaction*, Physica A **463**, 103 (2016).
- [61] A. Wolf et al. *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16**, 285 (1985).