

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENGENHARIA ELÉTRICA

**RAFAEL RUI**

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS AFINS  
POR PARTES EM ESPAÇO DE  
ESTADOS**

Porto Alegre  
2016

**RAFAEL RUI**

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS AFINS  
POR PARTES EM ESPAÇO DE  
ESTADOS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Sanfelice  
Bazanella

Porto Alegre  
2016

**RAFAEL RUI**

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS AFINS  
POR PARTES EM ESPAÇO DE  
ESTADOS**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vitor Heloiz Nascimento, PSI – Poli-USP  
Doutor pela Universidade da Califórnia – Los Angeles, Estados Unidos

Prof. Dr. Aurelio Tergolina Salton, PPGEE – PUCRS  
Doutor pela Universidade de Newcastle – Newcastle, Austrália

Prof. Dr. Marcelo Gomes da Silva Bruno, PG/EEC– ITA  
Doutor pela Carnegie Mellon University – Pittsburgh, Estados Unidos

Prof. Dr. Valner João Brusamarello, PPGEE – UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., PPGEE – UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse, França

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Valner João Brusamarello

Porto Alegre, Dezembro de 2016.



## RESUMO

Esta tese foca no problema de estimação de estado e de identificação de parâmetros para modelos afins por partes. Modelos afins por partes são obtidos quando o domínio do estado ou da entrada do sistema é particionado em regiões e, para cada região, um submodelo linear ou afim é utilizado para descrever a dinâmica do sistema. Propomos um algoritmo para estimação recursiva de estados e um algoritmo de identificação de parâmetros para uma classe de modelos afins por partes. Propomos um estimador de estados Bayesiano que utiliza o filtro de Kalman em cada um dos submodelos. Neste estimador, a função distribuição cumulativa é utilizada para calcular a distribuição *a posteriori* do estado assim como a probabilidade de cada submodelo. Já o método de identificação proposto utiliza o algoritmo EM (Expectation Maximization algorithm) para identificar os parâmetros do modelo. A função distribuição cumulativa é utilizada para calcular a probabilidade de cada submodelo a partir da medida do sistema. Em seguida, utilizamos o filtro de Kalman suavizado para estimar o estado e calcular uma função substituta da função *likelihood*. Tal função é então utilizada para identificar os parâmetros do modelo.

O estimador proposto foi utilizado para estimar o estado do modelo não linear para vibrações causadas por folgas. Foram realizadas simulações, onde comparamos o método proposto ao filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas. O algoritmo de identificação foi utilizado para identificar os parâmetros do modelo do jato JAS 39 Gripen, assim como, o modelos não linear de vibrações causadas por folgas.

**Palavras-chave:** Identificação de Sistemas, Filtro não linear, Sistemas Não-Lineares, Algoritmo de EM, Modelos afins por partes.

## ABSTRACT

This thesis focuses on the state estimation and parameter identification problems of piecewise affine models. Piecewise affine models are obtained when the state domain or the input domain are partitioned into regions and, for each region, a linear or affine submodel is used to describe the system dynamics. We propose a recursive state estimation algorithm and a parameter identification algorithm to a class of piecewise affine models. We propose a Bayesian state estimate which uses the Kalman filter in each submodel. In this estimator, the cumulative distribution is used to compute the posterior distribution of the state as well as the probability of each submodel. On the other hand, the proposed identification method uses the Expectation Maximization (EM) algorithm to identify the model parameters. We use the cumulative distribution to compute the probability of each submodel based on the system measurements. Subsequently, we use the Kalman smoother to estimate the state and compute a surrogate function for the likelihood function. This function is used to estimate the model parameters.

The proposed estimator was used to estimate the state of the nonlinear model for vibrations caused by clearances. Numerical simulations were performed, where we have compared the proposed method to the extended Kalman filter and the particle filter. The identification algorithm was used to identify the model parameters of the JAS 39 Gripen aircraft as well as the nonlinear model for vibrations caused by clearances.

**Keywords:** System Identification, Particle Filter, Nonlinear Systems, EM Algorithm, Piecewise affine models.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	8
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> . . . . .	11
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	12
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	14
1.1 <b>Apresentação do trabalho</b> . . . . .	16
<b>2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE PROBABILIDADE</b> . . . . .	17
2.1 <b>Teoria de Probabilidade</b> . . . . .	17
2.2 <b>Variáveis Aleatórias (VA)</b> . . . . .	18
2.3 <b>Processos Estocásticos</b> . . . . .	22
2.4 <b>Considerações Finais</b> . . . . .	23
<b>3 MODELOS EM ESPAÇO DE ESTADOS</b> . . . . .	24
3.1 <b>Modelos não lineares</b> . . . . .	24
3.1.1 <b>Modelos Lineares Gaussianos</b> . . . . .	25
3.2 <b>Modelos Afins por Partes</b> . . . . .	26
3.3 <b>Considerações Finais</b> . . . . .	28
<b>4 INTRODUÇÃO À ESTIMAÇÃO BAYESIANA</b> . . . . .	29
4.1 <b>Estimação de Estados</b> . . . . .	29
4.1.1 <b>Estimação de Estado Recursiva</b> . . . . .	29
4.1.2 <b>Predição</b> . . . . .	36
4.1.3 <b>Smoother</b> . . . . .	36
4.2 <b>Estimação de parâmetros</b> . . . . .	38
4.2.1 <b>Estimativa por Máxima Verossimilhança</b> . . . . .	38
4.2.2 <b>Algoritmo EM</b> . . . . .	40
4.3 <b>Considerações Finais</b> . . . . .	42
<b>5 FILTRO DE PARTÍCULAS</b> . . . . .	43
5.1 <b>Método de Monte Carlo</b> . . . . .	43
5.2 <b>Importance Sampling (IS)</b> . . . . .	45
5.3 <b>Filtro de Partículas</b> . . . . .	47
5.3.1 <b>Reamostragem</b> . . . . .	48
5.3.2 <b>Escolha da Proposta</b> . . . . .	49

5.4	Filtro de Partículas Marginalizado . . . . .	52
5.5	Considerações Finais . . . . .	54
<b>6</b>	<b>ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE MODELOS AFINS POR PARTES . . . . .</b>	<b>57</b>
6.1	Algoritmo Proposto . . . . .	58
6.2	Exemplos Ilustrativos . . . . .	64
6.3	Considerações Finais . . . . .	68
<b>7</b>	<b>ALGORITMO EM PARA MODELOS AFINS POR PARTES . . . . .</b>	<b>72</b>
7.1	Algoritmo Proposto . . . . .	73
7.2	Exemplos Ilustrativos . . . . .	78
7.2.1	Identificação do Jato Gripen JAS 39 . . . . .	78
7.2.2	Identificação do Sistema Massa-Mola . . . . .	86
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS . . . . .</b>	<b>89</b>
	<b>APÊNDICE A FILTRO DE KALMAN . . . . .</b>	<b>91</b>
A.1	Prova Bayesiana para o Filtro de Kalman . . . . .	91
	<b>APÊNDICE B ALGORITMO EM . . . . .</b>	<b>95</b>
B.1	Derivação de $L_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$ . . . . .	95
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>97</b>



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

3.1	Aproximação de uma função $f(x)$ (curva em preto) por uma função afim por partes com $N_r = 4$ (curva em azul) . . . . .	27
4.1	Esquemático dos estágios da estimação recursiva. . . . .	33
4.2	Interpretação gráfica de uma iteração do algoritmo EM. A função $l(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_k)$ é limitada acima pela função <i>likelihood</i> $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ . As funções são iguais em $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k$ . O algoritmo procura o valor $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ como o valor que maximiza $l(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_k)$ . Como $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \geq l(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_k)$ , aumentando $l(\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}_k)$ garante que o valor da função <i>likelihood</i> $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ aumenta em cada iteração. . . . .	41
5.1	Função $\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \exp(0.4(x - 0.4)^2 - 0.08x^4)$ e função proposta $q_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{1:t}; -1.3, 3)$ para a função alvo $\bar{\pi}(\mathbf{x}_{1:t})$ . . . . .	46
5.2	As partículas são propagadas cada uma com sua probabilidade $w_t^i$ . O tamanho do círculo indica a probabilidade da partícula. Na amostragem as partículas com maior probabilidade são “clonadas” e as com menor são eliminadas. Imagem retirada de (FREITAS et al., 2000) . . . . .	49
6.1	A função afim $f(\eta_t)$ é localmente aproximada por uma reta (linha pontilhada) na região definida pela média da distribuição. A área sombreada representa a probabilidade do estado estar em uma certa região do domínio da função. . . . .	58
6.2	Doubly truncated multivariate normal distributions (DTMND). . . . .	62
6.3	Modelo de um sistema massa mola com um grau de liberdade. . . . .	64
6.4	Característica não linear da mola do sistema da Fig. 6.3 . . . . .	66
6.5	Média do RMSE em função do tempo para cada estimador de estado, caso $C_1 = [1 \ 0]$ . Figura superior componente $\eta_t$ , inferior $\zeta_t$ . . . . .	69
6.6	Média do RMSE em função do tempo para cada estimador de estado, caso $C_2 = [0 \ 1]$ . Figura superior componente $\eta_t$ , inferior $\zeta_t$ . . . . .	71
7.1	A área sombreada representa a probabilidade do sistema estar em uma determinada região delimitada pela função afim. . . . .	73
7.2	Jato JAS 39 Gripen, (LARSSON, 2013) . . . . .	78
7.3	Função afim por partes Gripen. . . . .	79
7.4	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do modelo (7.37) e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes. . . . .	82

7.5	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do modelo (7.37) e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes. . . . .	83
7.6	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do sistema e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes. . . . .	84
7.7	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do sistema e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes. . . . .	85
7.8	Estimativa da função afim para uma das 240 realizações. A linha trasejada é representa a função afim por partes utilizada para inicializar o algoritmo EM, a linha laranja é a estimativa final encontrada após 100 iterações do algoritmo EM. . . . .	85
7.9	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM, $M = 600$ trajetórias $r_{1:T}$ . A linha cheia é a média sobre 300 realizações do sistema, a linha pontilhada é média $\pm$ desvio padrão e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 300 realizações diferentes. . . . .	87
7.10	Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM assumindo que a trajetória real é conhecida. A linha cheia é a média sobre 350 realizações do sistema, a linha pontilhada é média $\pm$ desvio padrão e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 350 realizações diferentes. . . . .	88

## LISTA DE TABELAS

6.1	Parâmetros do modelo SDOFS . . . . .	67
6.2	Média (ARMSE), desvio padrão (STD) do RMSE para os filtros de partículas utilizando diferentes número de partículas. Caso $C_1 = [1 \ 0]$ . . . . .	67
6.3	Média (ARMSE), desvio padrão (STD) do RMSE para EKF, PAKF e MPF com 50 000 partículas, assim como o menor e maior valor RMSE dentre as 5 000 simulações. Caso $C_1 = [1 \ 0]$ . . . . .	68
6.4	Comparação entre os filtros de partículas para diferentes número de partículas. Caso $C_2 = [0 \ 1]$ . . . . .	70
6.5	Média, desvio padrão do RMSE para EKF, PAKF e MPF com 50 000 partículas, assim como o menor e maior valor RMSE dentre as 5 000 simulações. Caso $C_2 = [0 \ 1]$ . . . . .	70
7.1	Parâmetros do modelo . . . . .	79
7.2	Erro em % entre o valor real do parâmetro e a média da estimativa na centésima iteração do algoritmo EM. . . . .	80
7.3	Erro em % entre o valor real do parâmetro e a média da estimativa na centésima iteração do algoritmo EM. . . . .	80
7.4	Parâmetros do modelo SDOFS . . . . .	86
7.5	Erro médio das estimativas, média sobre 300 realizações. . . . .	86
7.6	Erro médio das estimativas, trajetória conhecida. Média sobre 350 realizações. . . . .	88

## LISTA DE ABREVIATURAS

DTMND	<i>Doubly Truncated Multivariate Normal Distributions</i>
EKF	Filtro de Kalman Estendido
EKFP	<i>Extended Kalman Particle Filter</i>
EM	<i>Expectation Maximization</i>
HMM	<i>Hidden Markov model</i>
MPF	Filtro de Partículas Marginalizado
PAKF	<i>Piecewise Affine Kalman Filter</i>
PDF	Função Distribuição de Probabilidade
pdf	Função Densidade de Probabilidade
PE	Processo Estocástico
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
PWARX	<i>Piecewise Affine Autoregressive System with Exogenous Inputs.</i>
PWASS	<i>Piecewise Affine State-Space</i>
RMSE	Erro Médio Quadrático
SIS	<i>Sequential Importance Sampling</i>
SMC	Método Sequencial de Monte Carlo
SWARX	<i>Switched Affine Autoregressive Model with Exogenous Inputs</i>
VA	Variável Aleatória

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\stackrel{\pm}{=}$	Igualdade onde se omitem termos constantes ou independentes dos parâmetros
$\stackrel{\Delta}{=}$	Igual por definição
$\propto$	Proporcional
$\tau$	Operador transposto
$1:t$	Lê-se de 1 até $t$
$t_1 t_2$	Lê-se no tempo $t_1$ dado $t_2$
$\sim$	A variável à esquerda tem uma distribuição de probabilidade dada por
$\arg \min f(x)$	Valor de $x$ que minimiza $f(x)$
$\zeta_t$	Partição do estado para modelos PWASS.
$ M $	Determinante da matriz $M$
$[M]_{1:i,1:j}$	Matriz formada das linhas 1 à $i$ e das colunas 1 à $j$ da matriz $M$
$L_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T})$	Função <i>log-likelihood</i>
$\mathbf{x}_{1:T}$	Conjunto de valores da variável $\mathbf{x}_t$ do tempo 1 até $T$
$d\mathbf{x}_{1:T}$	Diferencial de $\mathbf{x}_t$ para $t = 1, \dots, T$ , $d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_T$
$L_{\theta}^l(\mathbf{y}_{1:T})$	Função <i>log-likelihood</i> para modelo linear
$L_{\theta}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$	Função <i>log-likelihood</i> completa, Algoritmo EM
$\theta$	Vetor de parâmetros
$\hat{\theta}$	Estimativa de $\theta$
$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	Distribuição normal com média $\mu$ e variância $\Sigma$
$\mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \mu, \Sigma)$	A variável $\mathbf{x}_t$ tem distribuição normal com média $\mu$ e variância $\Sigma$
$P_{t t}$	Covariância da estimativa <i>a posteriori</i> do filtro de Kalman
$P_{t t-1}$	Covariância da estimativa <i>a priori</i> do filtro de Kalman
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são o argumento da função.
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$	Delta de Dirac em $x_0$
$\Pr(\mathcal{A})$	Probabilidade do evento $\mathcal{A}$
$\Pr(\mathcal{A} \mathcal{B})$	Probabilidade condicional, probabilidade de $\mathcal{A}$ dado $\mathcal{B}$
$M$	Número de partículas
$\eta_t$	Partição do estado para modelos PWASS.
$T$	Número de amostras do sistema
$\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$	Distribuição alvo
$q_t(\mathbf{x}_{1:t})$	Proposta de distribuição
$P_{\Xi}(\xi)$	Função distribuição de probabilidade
$p_{\Xi}(\xi)$	Função densidade de probabilidade (pdf)
$p(\xi A)$	Função densidade condicional de probabilidade
$P(\xi_1, \xi_2)$	Distribuição conjunta
$p(\xi_1, \xi_2)$	Função densidade de probabilidade conjunta
$p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T})$	Função <i>likelihood</i> parametrizada por $\theta$
$Q(\theta, \theta_k)$	Aproximação da função <i>log-likelihood</i> completa, Algoritmo EM
$W_t^{(i)}$	Probabilidade relativa ou peso relativo não normalizado da $i$ -ésima partícula no instante $t$
$w_t^{(i)}$	Probabilidade relativa ou peso relativo normalizado da $i$ -ésima partícula no instante $t$
$\Omega$	Espaço amostral
$\mathbf{x}_t$	Vetor de estados no instante de tempo $t$
$[\mathbf{x}_t]_i$	$i$ -ésima componente de $\mathbf{x}_t$
$\mathbf{x}_t^{(i)}$	$i$ -ésima partícula do vetor de estado $\mathbf{x}_t$
$\hat{\mathbf{x}}_{t t}$	Estimativa <i>a posteriori</i> , estimativa de $\mathbf{x}_t$ no tempo $t$ dada informação até o tempo $t$
$\hat{\mathbf{x}}_{t+1 t}$	Estimativa <i>a priori</i> , estimativa de $\mathbf{x}_t$ no tempo $t$ dada informação até o tempo $t - 1$
$\mathbf{u}_t$	Vetor do sinal de entrada
$\mathbf{y}_t$	Vetor do sinal de saída do sistema
$Z_t$	Constante de normalização PAKF
$\chi_t$	Partição do estado para modelos PWASS

# 1 INTRODUÇÃO

De modo geral, estimação é o processo de inferir alguma informação sobre uma quantidade desconhecida através de alguma forma direta ou indireta de medida. Existem variáveis dentro do sistema que podem não estar disponíveis diretamente para medida ou, como na maioria dos sistemas reais, existem sinais de ruído que corrompem o sinal medido ou perturbações que interferem diretamente na dinâmica do sistema. Essas incertezas podem ser modeladas por um sistema estocástico, o que nos permite utilizar uma abordagem estatística para descrever a dinâmica e a medida do sistema. Dentro desta formulação estatística, toda inferência das quantidades desconhecidas é baseada na distribuição *a posteriori* das medidas, que é obtida a partir do teorema de Bayes (BAYES; PRICE, 1763). A abordagem Bayesiana é uma abordagem estatística que considera as quantidades desconhecidas como variáveis estocásticas. Toda informação sobre uma determinada variável é obtida a partir de sua função densidade de probabilidade (pdf). Esta abordagem vem sendo utilizada em diversas aplicações como rastreamento de aeronave usando medidas de radar (BERGMAN, 1999), (GUSTAFSSON, 2010), estimativas de sinais de comunicação digital (LOGOTHETIS; KRISHNAMURTHY, 1999), estimação da volatilidade dos mercados financeiros (FLURY; SHEPHARD, 2011), detecção de faltas (GUSTAFSSON, 2007), entre outras.

Modelos no espaço de estados são modelos compostos por dois conjuntos de equações; um para descrever a dinâmica do sistema e outro que descreve a saída, sinal medido. Tanto a dinâmica do estado quanto a dinâmica da saída são parametrizadas por um conjunto de valores que regem o comportamento do sistema. Estimação de modelos no espaço de estados consiste em estimar o estado do modelo para todo instante de tempo e/ou identificar os parâmetros que formam o modelo a partir do sinal medido. O problema de estimação de estado envolve diversas áreas da ciência e de acordo com a área de interesse o problema aparece com diferentes nomes, incluindo filtragem Bayesiana, filtragem ótima, filtragem estocástica e inferência online. Já o problema de identificar os parâmetros é conhecido como identificação de parâmetros.

Tanto o problema de identificação de parâmetros quanto o de estimação de estados só tem solução analítica para casos especiais. Um exemplo é quando o sistema é descrito por um modelo linear com perturbações Gaussianas. Neste caso, é possível encontrar a solução ótima para o problema de estimação de estados pelo Filtro de Kalman (KALMAN, 1960) e o problema de identificação de parâmetros pode ser resolvido utilizando o método da máxima verossimilhança (ALDRICH, 1997). No entanto, sistemas reais tendem a ser bastante complexos, tipicamente envolvendo elementos não Gaussianos e não linearidades o que, na maioria dos casos, não per-

mite obter soluções exatas para o problema. Por mais de trinta anos algoritmos para lidar com estes tipos de sistemas têm sido propostos, tais como: filtro de Kalman estendido, aproximações em somas Gaussianas (ALSPACH; SORENSON, 1972), filtros baseados em Grids (ARULAMPALAM et al., 2002), filtro de partículas (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993), entre outros. O filtro de Kalman estendido é um dos mais utilizados devido a sua fácil implementação e baixo custo computacional comparado com os demais. Neste método o problema é aproximado localmente por um problema linear e as perturbações do sistema são aproximadas por ruídos Gaussianos. Já os filtros baseados em Grids e os filtros de partículas podem levar a resultados precisos, mas são difíceis de implementar e demandam um alto custo computacional. O filtro de partículas, por sua vez, tende à solução ótima para o problema de estimação não linear quando algumas condições são satisfeitas.

Nesta tese são propostos um estimador de estado e um método de identificação de parâmetros para uma classe de modelos afins por partes na representação de espaço de estados (PWASS)<sup>1</sup> utilizando a abordagem Bayesiana. PWASS são modelos não lineares e são um caso particular dos modelos afins comutativos (*switched affine (SWA) models*). Estes modelos são obtidos particionando o domínio das variáveis que formam o modelo em um número finito de regiões, e considerando um submodelo afim para cada uma destas regiões. No caso dos modelos PWASS, o domínio do estado ou da entrada do modelo podem ser particionados. Modelos SWA são utilizados em diferentes áreas, *e.g.*, na área de controle (SEAH; HWANG, 2009), processamento digital de sinais (DOUCET; GORDON; KROSHNAMURTHY, 2001), sistemas biológicos (PORRECA et al., 2009), visão computacional (VIDAL; MA, 2006), entre outras. O problema de estimação de estado para modelos SWA consiste em estimar o estado e ainda estimar qual submodelo está ativo para cada instante de tempo. Já o problema de identificação de parâmetros é mais complexo e trata de identificar os parâmetros do modelo, o número de regiões que o espaço de estado foi particionado, e ainda, onde cada região foi particionada.

A maioria dos trabalhos que lidam com o problema de estimação de estados de modelos SWA consideram os chamados *jump Markov models* (MURPHY, 1998), (GHAHRAMANI; HINTON, 2000), (BARBER, 2006), (BARBER; MESOT, 2007), (MESOT, 2008), (OZKAN et al., 2013). Nestes modelos uma variável discreta é introduzida para descrever as transições entre submodelos que formam o modelo, onde uma matriz constante e independente do estado é utilizada para propagar estas transições. Iremos considerar modelos SWA onde o submodelo ativo não é modelado por um *jump Markov model*, mas depende do estado de forma determinística. Na prática, existem muitos sistemas onde utilizar *jump Markov models* para descrever a transição entre submodelos é uma aproximação da realidade. Por exemplo, no modelo do jato JAS 39 Gripen, a dinâmica do sistema depende do ângulo de ataque da aeronave através de uma função afim por partes, *i.e.*, para cada intervalo de valores do ângulo de ataque, a dinâmica do sistema é modelada por um modelo PWASS (LARSSON, 2013). A solução ótima para o problema de estimação de estado para este tipo de modelo é a soma de distribuições normais truncadas, onde o número de componentes desta soma cresce exponencialmente com o tempo. Propomos um estimador Bayesiano para modelos PWASS que utiliza o filtro de Kalman para cada submodelo do modelo. No estimador proposto, a distribuição a posteriori do estado assim como a probabilidade de ocorrência de cada submodelo são calculadas (RUI;

---

<sup>1</sup>Piecewise affine State-Space model



ARDESHIRI; BAZANELLA, 2016).

Para o problema de identificação de modelos SWA, a maioria dos trabalhos propostos foca na identificação de modelos chamados *switched affine autoregressive model with exogenous inputs (SWARX)* ou ainda no caso particular dos modelos *piecewise affine autoregressive system with exogenous inputs (PWARX)*. (WAGNER, 2004), (BORGES et al., 2005), (VERDULT; VERHAEGEN, 2004), (BAKO et al., 2009), (HARTMANN et al., 2015), (OZKAN et al., 2015), (BAKO; LAUER; BLOCH, 2013). A equivalência entre os modelos PWASS e os modelos SWARX é conhecida (WEILAND; JULOSKI; VET, 2006), (PAOLETTI et al., 2007), (PAOLETTI et al., 2008). Como mostrado por (WEILAND; JULOSKI; VET, 2006) e (PAOLETTI et al., 2008), todo modelo PWASS observável pode ser colocado na representação SWARX, porém o número de submodelos e o número de parâmetros no SWARX equivalente crescem consideravelmente. Por outro lado, dado um modelo SWARX com, por exemplo,  $n$  submodelos, é possível encontrar um modelo PWASS equivalente com  $n$  submodelos, no entanto este não será uma realização mínima (WEILAND; JULOSKI; VET, 2006).

Para a identificação de parâmetros de modelos PWASS, propomos um algoritmo de identificação de parâmetros que utiliza o algoritmo EM, *Expectation Maximization algorithm* (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977). O algoritmo EM combina a estimação de estados Bayesiana com o problema de identificação de sistemas utilizando o estimador de máxima verossimilhança. No algoritmo proposto, utilizamos a distribuição cumulativa para calcular a probabilidade de ocorrência de cada submodelo do sistema, dada a medida. Deste modo, dado o submodelo os estados são estimados utilizando o filtro de Kalman suavizado. Por fim, os parâmetros são estimados utilizando uma função substituta para a função *likelihood* (RUI et al., 2016).

## 1.1 Apresentação do trabalho

Este trabalho está dividido da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta os conceitos básicos da teoria de probabilidade que serão utilizados na descrição estocástica de modelos no espaço de estado. No Capítulo 3 apresentaremos as diferentes classes de modelos na representação por espaço de estado, assim como os modelos PWASS que serão utilizados neste trabalho. No Capítulo 4 serão introduzidos os métodos de estimação de estados e identificação de parâmetros que utilizam a abordagem Bayesiana. Ainda neste mesmo capítulo, apresentaremos as soluções dos problemas de estimação de estados e identificação de parâmetros para sistemas lineares Gaussianos. No Capítulo 5 apresentaremos três implementações do filtro de partículas para a estimação de estados de sistemas não lineares. O método proposto para a estimação de estado de modelos PWASS será apresentado no Capítulo 6, assim como os comparativos entre o estimador proposto com outros estimadores encontrados na literatura (filtro de partículas, filtro de Kalman estendido). No capítulo 7 será apresentado o algoritmo EM proposto para a identificação de parâmetros de modelos PWASS, assim como os resultados obtidos. Por fim, no Capítulo 8 serão apresentadas as conclusões do trabalho e trabalhos futuros.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE PROBABILIDADE

Este capítulo apresenta uma breve introdução e revisão de alguns conceitos de probabilidade que serão utilizados neste trabalho.

### 2.1 Teoria de Probabilidade

Dois conceitos básicos da teoria de probabilidade são:

1. espaço amostral  $\Omega$  – consiste de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;
2. eventos – são subconjuntos de  $\Omega$ , podendo ser constituído de apenas um elemento chamados então de eventos simples, até o número total de elementos do espaço amostral.

Segundo a definição clássica de probabilidade,  $\Pr(\mathcal{A})$  é a probabilidade de ocorrência de um evento  $\mathcal{A}$  resultante de um experimento aleatório pertencente ao espaço amostral  $\Omega$ , isto é

$$\Pr(\mathcal{A}) = \frac{\text{número de vezes que o evento } \mathcal{A} \text{ ocorreu}}{\text{número total de repetições do experimento}},$$

onde o número de repetições do experimento deve ser suficientemente grande. Embora a definição clássica possa ser utilizada no estudo de eventos aleatórios, toda a teoria base da teoria da probabilidade é formulada a partir da definição axiomática de probabilidade (PAPOULIS; PILLAI, 2002).

**Axioma 1.** (Definição axiomática de probabilidade (PAPOULIS; PILLAI, 2002))  
Seja o espaço de medidas  $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ , onde para cada evento  $\mathcal{A}$  se atribui um número  $Pr(\mathcal{A})$  chamado de probabilidade do evento  $\mathcal{A}$ . Esta probabilidade é escolhida de forma a satisfazer os seguintes axiomas:

1.  $Pr(\mathcal{A}) \geq 0$
2.  $Pr(\Omega) = 1$
3. Se  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , então  $Pr(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = Pr(\mathcal{A}) + Pr(\mathcal{B})$ ,

◇

Em termos mais formais, a probabilidade é uma medida sobre uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos do espaço amostral, sendo estes subconjuntos membros da  $\sigma$ -álgebra os eventos do espaço amostral. Toda inferência estatística é baseada no conceito de probabilidades condicionais. A probabilidade condicional refere-se à probabilidade de um determinado evento dada a ocorrência de um outro evento relacionado.

**Definição 2.1.1.** (*Probabilidade Condicional*)

A probabilidade condicional de um evento  $\mathcal{A}$  dado um evento  $\mathcal{B}$  com probabilidade diferente de zero,  $Pr(\mathcal{B}) > 0$  é definida como a razão

$$Pr(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = \frac{Pr(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{Pr(\mathcal{B})}$$

◇

A partir desta definição é possível deduzir que a probabilidade de cada evento possível de um espaço amostral pode ser escrita como a soma de probabilidades condicionais.

**Teorema 2.** (*Teorema da Probabilidade Total*)

Seja  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$  um subconjunto de  $\Omega$ , e seja  $\mathcal{B}$  um evento arbitrário, então

$$Pr(\mathcal{B}) = Pr(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)Pr(\mathcal{A}_1) + \dots + Pr(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)Pr(\mathcal{A}_n)$$

◇

Combinando a Definição 2.1.1 e o Teorema 2 chegamos à fórmula clássica para a probabilidade condicional (**BAYES; PRICE, 1763**).

**Teorema 3.** (*Teorema de Bayes*)

Seja  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$  uma partição de  $\Omega$ , e sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{M}$  dois eventos, então

$$Pr(\mathcal{M}|\mathcal{B}) = \frac{Pr(\mathcal{B}|\mathcal{M})Pr(\mathcal{M})}{Pr(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)Pr(\mathcal{A}_1) + \dots + Pr(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)Pr(\mathcal{A}_n)}$$

◇

Como veremos no decorrer deste trabalho, o Teorema 3 é utilizado na estimação Bayesiana para atualizar a probabilidade *a priori* de uma estimativa à medida que mais informação fica disponível.

## 2.2 Variáveis Aleatórias (VA)

Uma variável aleatória  $\Xi(\omega)$  é definida como o mapa funcional de um conjunto de resultados para um conjunto de números. Para cada realização  $\omega$  se atribui um número  $\Xi(\omega)$ . Por exemplo, o lançamento de um dado pode ser interpretado como uma variável aleatória se mapearmos a face com o número um ( $\omega = \text{face com o número 1}$ ) como sendo uma saída com valor um ( $\Xi(\omega) = 1$ ), a face com o número dois ( $\omega = \text{face com o número 2}$ ) como sendo a saída dois ( $\Xi(\omega) = 2$ ), e assim para os demais. Vale observar que, após o lançamento do dado, o valor obtido não será mais uma variável aleatória, este valor torna-se uma realização. Isto é, se definirmos  $\Xi(\omega)$  como uma variável aleatória que representa o lançamento de um dado, então,

se após um lançamento obtivermos o valor quatro, este valor será uma realização da variável aleatória  $\Xi(\omega)$ . Esta distinção entre VA e realização de uma VA é importante para o entendimento dos conceitos de probabilidade. Quando dizemos que, por exemplo, a probabilidade de que  $\Xi(\omega) = 4$  é  $1/6$ , isto significa que existe uma chance em seis de que as realizações de  $\Xi(\omega)$  sejam iguais ao valor quatro. Para simplificar a notação iremos omitir a dependência explícita do evento  $\omega$  e escrever a variável aleatória como  $\Xi$ .

Uma VA pode ser contínua ou discreta. O número de lançamentos de um dado até a aparição de um determinado número pode ser considerado uma variável aleatória discreta, já que se atribui às realizações um conjunto de valores discretos de aparições (1, 2, 3, ...). Um exemplo de VA contínua pode ser a máxima temperatura em uma certa cidade, já que a medida de temperatura (realização da VA) pertence a um conjunto de valores contínuos.

Uma propriedade fundamental de uma VA  $\Xi$  é a sua função distribuição cumulativa de probabilidade (PDF), definida como

$$P_{\Xi}(\xi) \triangleq \Pr(\Xi \leq \xi), \quad (2.1)$$

onde  $P_{\Xi}(\xi)$  é a PDF da variável aleatória  $\Xi$ , e  $\xi$  é uma variável independente ou constante. A partir da Definição (2.1) podemos obter uma série de propriedades (PAPOULIS; PILLAI, 2002)

$$\begin{aligned} P_{\Xi}(\xi) &\in [0, 1] \\ P_{\Xi}(-\infty) &= 0 \\ P_{\Xi}(\infty) &= 1 \\ P_{\Xi}(\alpha) &\leq P_{\Xi}(\beta) \text{ se } \alpha \leq \beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \Pr(\alpha < \Xi \leq \beta) &= P_{\Xi}(\beta) - P_{\Xi}(\alpha) \end{aligned}$$

A função densidade de probabilidade (pdf) é definida como a derivada da PDF.

$$p_{\Xi}(\xi) \triangleq \frac{dP_{\Xi}(\xi)}{d\xi}. \quad (2.2)$$

Para simplificar a notação iremos omitir o subíndice da notação  $P_{\Xi}(\xi)$  e  $p_{\Xi}(\xi)$ , e simplesmente escrever como  $P(\xi)$  e  $p(\xi)$ . A partir da definição (2.2) podemos obter as seguintes propriedades (PAPOULIS; PILLAI, 2002):

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \int_{-\infty}^{\xi} p(z)dz, \\ p(\xi) &\geq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)d\xi &= 1, \\ \Pr(\alpha < \xi \leq \beta) &= \int_{\alpha}^{\beta} p(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

A Definição 2.1.1 de probabilidade condicional é diretamente estendida para a função distribuição de probabilidades.

**Definição 2.2.1.** (*Distribuição Condicional*)

A distribuição condicional de uma variável aleatória  $\Xi$  dada a ocorrência de um determinado evento  $\mathcal{A}$  é definida como:

$$P(\xi|\mathcal{A}) \triangleq \Pr(\Xi \leq \xi|\mathcal{A}) = \frac{\Pr(\Xi \leq \xi, \mathcal{A})}{\Pr(\mathcal{A})}. \quad (2.3)$$

O evento  $\{\Xi \leq \xi, \mathcal{A}\}$  é o evento que consiste de todos os resultados  $\omega$  tal que  $\Xi(\omega) \leq \xi$  e  $\omega \in \mathcal{A}$ . A função densidade condicional será a derivada de  $P(\xi|\mathcal{A})$ ,

$$p(\xi|\mathcal{A}) \triangleq \frac{dP(\xi|\mathcal{A})}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{P(\xi \leq \Xi \leq \xi + \Delta\xi|\mathcal{A})}{\Delta\xi}.$$

◇

A probabilidade condicional de um evento  $\mathcal{A}$  dado um evento de probabilidade nula, como  $\Xi = \xi$ , pode ser definida através do limite

$$\Pr(\mathcal{A}|\Xi = \xi) \triangleq \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \Pr(\mathcal{A}|\xi \leq \Xi \leq \xi + \Delta\xi). \quad (2.4)$$

O Teorema 2 da probabilidade total para eventos condicionais com probabilidade zero pode ser escrito como uma soma infinita sobre os limites em (2.4). Assim, a probabilidade de qualquer evento  $\mathcal{A}$  é dada por

$$\Pr(\mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(\mathcal{A}|\Xi = \xi)p(\xi)d\xi.$$

Deste modo, a função densidade condicional de probabilidades de  $\Xi$  dado o evento  $\mathcal{A}$  será

$$p(\xi|\mathcal{A}) = \frac{\Pr(\mathcal{A}|\Xi = \xi)p(\xi)}{\Pr(\mathcal{A})}. \quad (2.5)$$

Até agora consideramos apenas eventos escalares reais de variáveis aleatórias. A extensão para vetores com componentes aleatórias, *i.e.*,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\xi}]_1 \\ [\boldsymbol{\xi}]_2 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{\xi}]_n \end{bmatrix},$$

onde  $[\boldsymbol{\xi}]_i$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $\boldsymbol{\xi}$ , segue o mesmo conceito e as funções distribuição e densidade de probabilidade são obtidas naturalmente. Para o caso em que  $n = 2$ , por exemplo, temos

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\xi}) &= P([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2) \\ &= \Pr(\Xi_1 \leq [\boldsymbol{\xi}]_1, \Xi_2 \leq [\boldsymbol{\xi}]_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\xi}) &= p([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2) \\ &= \frac{\partial^2 P([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2)}{\partial[\boldsymbol{\xi}]_1 \partial[\boldsymbol{\xi}]_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A função (2.6) é chamada de distribuição conjunta e a função (2.7) é chamada de função densidade de probabilidade conjunta. A definição de distribuição condicional e densidade condicional aplicada a pares de variáveis aleatórias é dada por:

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\xi}|\mathcal{A}) &= P([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2|\mathcal{A}) \\ &= \frac{\Pr(\Xi_1 \leq [\boldsymbol{\xi}]_1, \Xi_2 \leq \xi_2, \mathcal{A})}{\Pr(\mathcal{A})} \\ p(\boldsymbol{\xi}|\mathcal{A}) &= p([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2|\mathcal{A}) \\ &= \frac{\partial^2 P([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2|\mathcal{A})}{\partial[\boldsymbol{\xi}]_1 \partial[\boldsymbol{\xi}]_2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como na Definição 2.2.1, assumimos que  $\Pr(\mathcal{A}) > 0$ . A função densidade condicional de uma variável aleatória  $\Xi_2$ , assumindo que o valor de uma outra variável aleatória  $\Xi_1$  é conhecido, é utilizada frequentemente em inferência estatística. Esta função densidade não pode ser derivada diretamente da expressão (2.8) devido ao fato que o evento  $\{\Xi = \xi\}$  pode ter probabilidade nula. Deste modo, o função densidade de probabilidades conjunta será definida através do limite

$$p([\boldsymbol{\xi}]_2|\Xi_1 = [\boldsymbol{\xi}]_1) = \lim_{\Delta[\boldsymbol{\xi}]_1 \rightarrow 0} p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1 < \Xi_1 \leq [\boldsymbol{\xi}]_1 + \Delta[\boldsymbol{\xi}]_1) \quad (2.9)$$

$$= \frac{p([\boldsymbol{\xi}]_1, [\boldsymbol{\xi}]_2)}{p([\boldsymbol{\xi}]_2)}. \quad (2.10)$$

Quando não existir risco de ambiguidade, utilizaremos uma notação mais compacta  $p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1)$  para a função (2.10), *i.e.*,  $p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1) = p([\boldsymbol{\xi}]_2|\Xi_1 = [\boldsymbol{\xi}]_1)$ . Combinando as equações (2.10) e (2.5) podemos reescrever o Teorema 3 (Teorema de Bayes).

**Teorema 4.** *(Teorema de Bayes e Probabilidade Total)*

*A função densidade condicional pode ser escrita*

$$p([\boldsymbol{\xi}]_1|[\boldsymbol{\xi}]_2) = \frac{p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1)p([\boldsymbol{\xi}]_1)}{p([\boldsymbol{\xi}]_2)}, \quad (2.11)$$

onde a constante de normalização no denominador pode ser encontrada utilizando a lei da probabilidade total

$$p([\boldsymbol{\xi}]_2) = \int_{\mathbb{R}^n} p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1)p([\boldsymbol{\xi}]_1) d[\boldsymbol{\xi}]_1.$$

◇

Observe que no Teorema 4 utilizamos a notação simplificada

$$p([\boldsymbol{\xi}]_2|[\boldsymbol{\xi}]_1) = p([\boldsymbol{\xi}]_2|\Xi_1 = [\boldsymbol{\xi}]_1) \quad \text{e} \quad p([\boldsymbol{\xi}]_1|[\boldsymbol{\xi}]_2) = p([\boldsymbol{\xi}]_1|\Xi_2 = [\boldsymbol{\xi}]_2).$$

A função densidade condicional  $p([\boldsymbol{\xi}]_1|[\boldsymbol{\xi}]_2)$  fornece qual a probabilidade de ocorrência da variável aleatória  $[\boldsymbol{\xi}]_1$  dado uma realização de  $[\boldsymbol{\xi}]_2$ .

## 2.3 Processos Estocásticos

Os processos estocásticos são definidos como um conjunto de variáveis aleatórias  $\Xi_1(t), \Xi_2(t), \dots, \Xi_n(t)$  indexados em função do tempo. Para definir matematicamente um processo estocástico (PE), consideramos um experimento aleatório  $\Xi$ , que consiste em observar qualitativamente ou quantitativamente uma grandeza qualquer  $\omega$ , sujeita a variações imprevisíveis com o tempo, ao longo de um intervalo finito  $[0, T]$ . Se o experimento for repetido inúmeras vezes sob condições iniciais idênticas, e se a cada repetição obtivermos resultados diferentes para  $\Xi$  este processo é chamado de processo estocástico. Assim, analogamente à definição de variável aleatória, define-se um processo estocástico como um mapeamento  $\Xi(\cdot, t)$  que associa a cada evento elementar  $\omega \in \Omega$  uma função real do tempo

$$\omega \xrightarrow{PE} \Xi(\omega, t) = \xi_t$$

Na teoria de probabilidade, um processo estocástico é um conjunto de valores aleatórios usado para representar a evolução de uma variável aleatória durante um certo intervalo de tempo. Ao invés de descrever um processo de forma determinística, em um processo estocástico existe algum elemento do sistema que possui alguma variável indeterminada. Uma classe de processos estocásticos muito estudada na literatura são os processos estocásticos Markovianos, ou simplesmente Processos Markovianos

### Definição 2.3.1. Processo Markoviano

Um processo estocástico de tempo discreto é um processo Markoviano se

$$p(\xi_{t+1} | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) = p(\xi_{t+1} | \xi_t) \quad (2.12)$$

◇

Isto quer dizer que, a realização do processo no instante de tempo  $t$  contém toda informação sobre o passado, a qual é necessária para calcular o comportamento futuro do processo. Desde modo, o valor da realização no tempo  $t + 1$  pode ser estimado a partir do conhecimento do valor da realização no tempo  $t$

$$\xi_{t+1} \sim p_{\theta}(\xi_{t+1} | \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t) = p_{\theta}(\xi_{t+1} | \xi_t), \quad (2.13)$$

onde a notação  $p_{\theta}(\cdot)$  é utilizada para descrever a família de funções densidade de probabilidade parametrizadas pelo vetor de parâmetros  $\theta$ , e  $\xi \sim p(\xi)$  significa que  $\xi$  tem uma distribuição de probabilidade dada pela pdf  $p(\xi)$ . A pdf  $p_{\theta}(\xi_{t+1} | \xi_t)$  descreve a evolução da variável estocástica em função do tempo. Assume-se que a condição inicial  $\xi_0$  da variável  $\xi_t$  tem uma pdf  $p_{\theta}(\xi_0)$ , chamada de *prior*.

Se o parâmetro  $\theta$  for desconhecido, este pode ser estimado. O problema de estimar este parâmetro é chamado de identificação de sistemas. Esse problema será apresentado na Seção 4.2.

Se assumirmos que o processo  $\{\xi_t\}$  não é observado, e toda informação sobre este processo é obtida indiretamente através de observações (medidas)  $\gamma_t$  de acordo a um modelo de observações onde

$$\gamma_t \sim p_{\theta}(\gamma_t | \xi_t), \quad (2.14)$$

dizemos que (2.13) e (2.14) são um modelo oculto de Markov (*Hidden Markov model* HMM) (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000).

**Definição 2.3.2.** *Modelo Oculto de Markov (HMM)*

Um modelo oculto de Markov é definido como

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\xi}_{t+1}|\boldsymbol{\xi}_t), \quad (2.15a)$$

$$\gamma_t \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_t|\boldsymbol{\xi}_t), \quad (2.15b)$$

onde assume-se que o processo  $\{\gamma_t\}$  é condicionalmente independente do processo  $\{\boldsymbol{\xi}_t\}$ , i.e.,

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_t|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_T) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_t|\boldsymbol{\xi}_t), \quad \forall t, 1 \leq t \leq T.$$

E ainda, assume-se que as observações são mutuamente independentes

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_1, \dots, \gamma_T|\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_T) = \prod_{i=1}^T p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_i|\boldsymbol{\xi}_i) \quad (2.16)$$

$$= \prod_{i=1}^T p_{\boldsymbol{\theta}}(\gamma_i|\boldsymbol{\xi}_i), \quad \forall t, 1 \leq t \leq T. \quad (2.17)$$

◇

Na Definição 2.3.2 introduzimos a notação  $\boldsymbol{\xi} \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$  que significa que a variável  $\boldsymbol{\xi}$  tem uma distribuição de probabilidade dada por  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$  parametrizada pelo vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$ .

## 2.4 Considerações Finais

Modelos ocultos de Markov podem ser representados como modelos na representação por espaço de estados, onde o estado é a variável estocástica. O problema de estimar  $\boldsymbol{\xi}_{t+1}$  dado toda informação até o tempo  $t$  é chamado de filtragem ou estimação de estado. Este problema será tratado e formalmente apresentado no Capítulo 4. No próximo Capítulo apresentaremos os modelos no espaço de estado e também como estes modelos se relacionam com os HMMs.



### 3 MODELOS EM ESPAÇO DE ESTADOS

Um modelo no espaço de estados é um modelo onde a relação entre o sinal de entrada, sinal de saída e as perturbações/ruídos é dada por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, no caso contínuo, e um sistema de equações de diferenças para sistemas de tempo discreto. Este tipo de modelo é composto por dois conjuntos de equações chamados equações de estado e equação de saída. O vetor de estados  $\mathbf{x}_t$  contém toda informação disponível sobre o sistema até o tempo  $t$ , a qual é utilizada para determinar o comportamento futuro do sistema através da equação de estado. A equação de saída determina a relação entre o sinal medido  $\mathbf{y}_t$  e o estado do sistema.

O resto deste capítulo irá apresentar as diferentes classes de modelos no espaço de estado em tempo discreto, começando pelo modelo mais geral. Será apresentada também a relação entre modelos no espaço de estados e os HMMs apresentados na seção anterior.

#### 3.1 Modelos não lineares

A equação de estado e equação de saída para modelos não lineares são dadas por

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\omega}_t, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\nu}_t, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (3.1b)$$

onde  $\mathbf{x}_t = [[\mathbf{x}_t]_1, \dots, [\mathbf{x}_t]_{n_x}]^\top \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o estado do sistema,  $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $\mathbf{y}(t) = [[\mathbf{y}_t]_1, \dots, [\mathbf{y}_t]_{n_y}]^\top \in \mathbb{R}^{n_y}$  são, respectivamente, os sinais de entrada e saída medidos,  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]^\top \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  é o vetor de parâmetros usados para descrever o sistema. O estado no instante de tempo inicial tem uma distribuição  $\mathbf{x}_1 \sim p(\mathbf{x}_1)$ ;  $\{\boldsymbol{\omega}_t \in \mathbb{R}^{n_x} | 1 \leq t \leq T\}$  e  $\{\boldsymbol{\nu}_t \in \mathbb{R}^{n_y} | 1 \leq t \leq T\}$  são processos estocásticos mutuamente independentes e representam, respectivamente, o ruído do estado e ruído da medida.

O modelo é dito não linear com ruído aditivo se

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\nu}_t. \quad (3.2b)$$

O modelo (3.2) pode ser colocado na forma de um modelo oculto de Markov (Definição 2.3.2). Devido às componentes aleatórias  $\boldsymbol{\omega}_t$  e  $\boldsymbol{\nu}_t$  podemos considerar cada componente do vetor de estado como uma variável estocástica e escrever um

modelo probabilístico de (3.2) como

$$\mathbf{x}_1 \sim p_{\theta}(\mathbf{x}_1), \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} \sim p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t), \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{y}_t \sim p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t), \quad (3.3c)$$

onde uma distribuição inicial fornece a distribuição *a priori*  $p_{\theta}(\mathbf{x}_1)$  do estado  $\mathbf{x}_1$  no instante inicial de tempo  $t = 1$ .

A pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$  descreve a dinâmica do sistema e suas incertezas como um processo de Markov e  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$  descreve como a medida  $\mathbf{y}_t$  se relaciona com o estado atual  $\mathbf{x}_t$ . Ou seja, desempenham um papel similar às das funções  $\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{h}(\cdot)$  de (3.2). Assumindo que  $\boldsymbol{\omega}_t$  e  $\boldsymbol{\nu}_t$  têm pdfs conhecidas dadas por  $p_{\omega}(\cdot)$  e  $p_{\nu}(\cdot)$ , podemos reescrever (3.3) como (NINNESS; WILLS; SCHON, 2010)

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) = p_{\omega}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t)), \quad (3.4a)$$

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) = p_{\nu}(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t)). \quad (3.4b)$$

Caso  $\boldsymbol{\omega}_t$  e  $\boldsymbol{\nu}_t$  sejam ruído Gaussiano mutuamente independentes, (3.2) é um modelo não linear Gaussiano. Neste caso

$$\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\omega}, \Sigma_{\omega})$$

e

$$\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\nu}, \Sigma_{\nu}),$$

onde

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (3.5)$$

denota distribuição Gaussiana com média  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  e covariância  $\Sigma$ , e  $|\Sigma|$  é o determinante da matriz  $\Sigma$ . Deste modo, (3.4a) e (3.4b) podem ser reescritos utilizando (3.5) como

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x} |\Sigma_{\omega}|}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) - \boldsymbol{\mu}_{\omega})^{\top} \Sigma_{\omega}^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) - \boldsymbol{\mu}_{\omega})\right), \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} |\Sigma_{\nu}|}} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) - \boldsymbol{\mu}_{\nu})^{\top} \Sigma_{\nu}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) - \boldsymbol{\mu}_{\nu})\right). \end{aligned} \quad (3.6b)$$

### 3.1.1 Modelos Lineares Gaussianos

A classe de modelos mais importante dentro da representação por variáveis de estado é, sem dúvidas, o caso linear e Gaussiano. Isto é, quando as funções  $\mathbf{f}(\cdot)$  e

$\mathbf{h}(\cdot)$  são funções lineares sujeitas a perturbações Gaussianas. O modelo de tempo discreto para o modelo linear Gaussiano é dado por

$$\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (3.7b)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é a matriz de transição de estado,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$  é a matriz do sinal de entrada,  $C \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  é a matriz de saída,  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$ , e  $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q)$  e  $\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R)$  são ruído branco Gaussiano mutuamente independentes.

Neste caso, podemos escrever as pdfs  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$  e  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$  como

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_x}|Q|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{t+1} - (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t))^{\top} Q^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t))\right), \quad (3.8a)$$

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y}|R|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t)^{\top} R^{-1} (\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t)\right), \quad (3.8b)$$

onde  $Q^{-1}$  é a inversa da matriz  $Q$ .

## 3.2 Modelos Afins por Partes

Chamados na literatura de *Piecewise affine state-space models PWASS*, os modelos afins por partes são compostos por  $N_r$  submodelos que compartilham um mesmo vetor de estado. As trocas entre cada submodelo são indexadas por uma variável discreta  $r_t$  (ANDREA, 2012)

$$\mathbf{x}_{t+1} = A_{r_t}\mathbf{x}_t + B_{r_t}\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{y}_t = C_{r_t}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (3.9b)$$

onde  $\mathbf{b}_{r_t} \in \mathbb{R}^{n_x}$  e a variável  $r_t \in \{1, 2, \dots, N_r\}$  define o submodelo que está ativo no tempo  $t$ . Em geral, a variável  $r_t$  pode ser função das variáveis de entrada  $\mathbf{u}_t$  e/ou do estado  $\mathbf{x}_t$ . Este tipo de modelo é utilizado em diversas áreas. Uma utilização bastante comum é a de aproximar modelos não lineares, onde a função não linear é aproximada por um conjunto de retas. A Figura 3.1 apresenta a aproximação de uma parábola por uma função afim por partes com  $N_r = 4$ , ou seja, a função é aproximada por quatro retas. Quando maior o número de partições utilizadas melhor será a aproximação da função não linear.

Neste trabalho iremos considerar um caso particular de (3.9), que é a seguinte classe de modelos afins por partes

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_t) + B\mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (3.10b)$$

onde  $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  é particionado em duas variáveis escalares  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  assim como pelo vetor  $\boldsymbol{\chi}_t \in \mathbb{R}^{(n_x-2)}$  tal que

$$\mathbf{x}_t \triangleq [\eta_t, \zeta_t, \boldsymbol{\chi}_t^{\top}]^{\top}.$$

A função  $\mathcal{F}(\cdot)$  é dada por

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}_t) \triangleq \begin{bmatrix} \Phi^{\top}\mathbf{x}_t \\ f(\eta_t) + \phi^{\top}\mathbf{z}_t \\ F\mathbf{x}_t \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

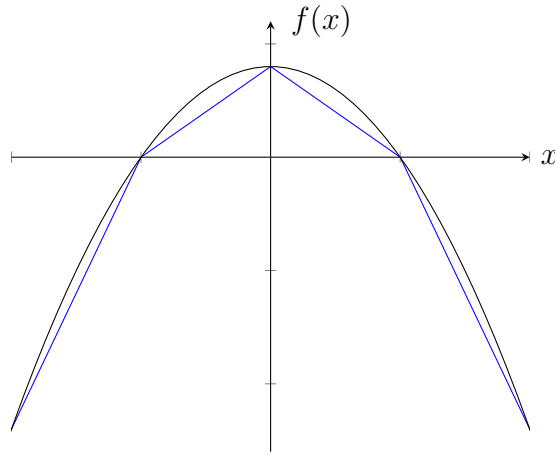


Figura 3.1: Aproximação de uma função  $f(x)$  (curva em preto) por uma função afim por partes com  $N_r = 4$  (curva em azul)

onde  $\mathbf{z}_t \triangleq [\zeta_t, \boldsymbol{\chi}_t^\top]^\top$ ,  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{(n_x-1)}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{(n_x-2) \times n_x}$ ; e a função afim por partes  $f(\eta_t)$  é dada por

$$f(\eta_t) = \begin{cases} f_1 = a_1\eta_t + b_1 & \text{if } l_1 < \eta_t \leq l_2 \\ f_2 = a_2\eta_t + b_2 & \text{if } l_2 < \eta_t \leq l_3 \\ \vdots & \\ f_{N_r} = a_{N_r}\eta_t + b_{N_r} & \text{if } l_{N_r} < \eta_t < l_{N_r+1}, \end{cases} \quad (3.12)$$

com  $l_1 = -\infty$  e  $l_{N_r+1} = +\infty$ . Assim, para uma região  $\mathcal{R}_i \triangleq \{\mathbf{x}_t : l_i < \eta_t \leq l_{i+1}\}$  podemos reescrever (3.11) utilizando (3.12) como

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \Phi^\top \mathbf{x}_t \\ a_i \eta_t + b_i + \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{z}_t \\ F \mathbf{x}_t \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi^\top \\ a_i \ \boldsymbol{\phi}^\top \\ F \end{bmatrix}}_{A_i} \mathbf{x}_t + \underbrace{\begin{bmatrix} b_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_i} \quad (3.14)$$

$$= A_i \mathbf{x}_t + \mathbf{b}_i. \quad (3.15)$$

Deste modo, condicionado à região  $\mathcal{R}_i$ , o modelo (3.10) será

$$\mathbf{x}_{t+1} = A_i \mathbf{x}_t + B \mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{y}_t = C \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (3.16b)$$

onde  $A_i$  e  $\mathbf{b}_i$  são definidas em (3.14) e o índice  $i \in \{1, \dots, N_r\}$  determina em qual dinâmica afim o sistema se encontra no instante de tempo  $t$ , *i.e.*, qual submodelo está ativo no tempo  $t$ . Observe que, (3.16) é um modelo Gaussiano afim para uma dada região.

Essa classe de modelos pode ser utilizada para modelar uma série de sistemas reais, como por exemplo, a dinâmica da direção longitudinal do jato Gripen, onde a dinâmica do ângulo de *pitch* da aeronave é função de uma função afim por partes

que, por sua vez, depende do ângulo de ataque da aeronave (LARSSON, 2013). Outro exemplo de sistema que pode ser modelado por esta classe de modelos é o modelo não linear para vibrações causadas por folgas (MAHFOUZ; BADRAKHAN, 1990). Neste caso a dinâmica da velocidade da vibração é dada por uma função fim por partes. Estes dois modelos serão utilizados neste trabalho e serão apresentados nas seções 7 e 6 respectivamente.

### 3.3 Considerações Finais

Neste trabalho propomos um algoritmo de estimação de estados e um algoritmo de estimação de parâmetros para os modelos afim por partes como (3.10). Como vimos este tipo de modelo é não linear, e a não linearidade é dada por uma função afim por partes. Vale observar que se a região em que o estado se encontra for conhecida, o modelo se torna um modelo afim. No próximo capítulo serão apresentados os problemas de estimação de estados e identificação de parâmetros, e ainda a solução para estes dois problemas para o caso linear Gaussiano como o em (3.7).

## 4 INTRODUÇÃO À ESTIMAÇÃO BAYESIANA

Neste capítulo iremos tratar do problema de estimação de estados e estimação de parâmetros utilizando a abordagem Bayesiana (BAYES; PRICE, 1763), a qual considera qualquer variável desconhecida como uma variável estocástica. Estes dois problemas, estimação de estados e estimação de parâmetros, são tratados separadamente. Na estimação de estados Bayesiana a solução do problema é apresentada em termos da função densidade de probabilidade  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:k})$  do vetor de estados  $\mathbf{x}_t$ . Já o problema de estimação de parâmetros é solucionado através do método da Máxima Verossimilhança. Neste método procura-se um valor para o vetor de parâmetros  $\theta$  que maximize a probabilidade dos dados medidos, *i.e.*, procura-se  $\theta$  que maximize a função *likelihood*

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T}) \triangleq p_{\theta}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T).$$

Nesta seção iremos introduzir estes dois problemas, e ainda apresentar a solução destes problemas para sistemas lineares Gaussianos.

### 4.1 Estimação de Estados

Na estimação de estados Bayesiana, estamos interessados na função densidade de probabilidade  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:k})$ . Isto é, a distribuição do estado  $\mathbf{x}_t$  dada toda a informação disponível através das medidas até o instante de tempo  $k$ ,  $\mathbf{y}_{1:k} \triangleq \{\mathbf{y}_i\}_{i=0}^k$ . Dependendo da relação entre  $t$  e  $k$  em  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:k})$  temos três problemas diferentes de estimação

$t = k$ , Estimação de estado recursiva (Filtragem)

$t > k$ , Predição

$t < k$ , Suavização (*Smoothing*).

Como veremos no decorrer desta seção, somente em alguns casos o problema de estimação de estados tem solução analítica. O principal exemplo onde isto acontece são os casos que o modelo é linear e os ruídos do sistema são Gaussianos.

#### 4.1.1 Estimação de Estado Recursiva

Como mencionado anteriormente, o objetivo da estimação Bayesiana é utilizar a informação obtida através de observações de uma certa variável (medida da saída) com o objetivo de inferir uma outra variável desconhecida (estado). No problema de estimação de estado recursiva ou filtragem, a estimativa do estado no tempo  $t$  é

calculada a partir da estimativa do estado no instante anterior e a medida atual  $\mathbf{y}_t$  de forma recursiva. Assumimos que o vetor de estados  $\mathbf{x}_t$  possui uma função densidade *a priori*,  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  que contém toda informação do estado anterior à realização da medida do sistema. Quando a medida é realizada, precisamos relacionar esta nova informação com o estado estimado para então obter a função densidade *a posteriori* do estado  $\mathbf{x}_t$  denotada por  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . Esta relação é feita através da função *likelihood* das medidas  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$ , que determina quão provável a medida é dada uma estimativa *a priori* do estado.

O estimador Bayesiano calcula a pdf condicional de  $\mathbf{x}_t$  baseado no conjunto de medidas de  $\mathbf{y}_{1:t}$ . A pdf condicional no instante de tempo  $t$  será

$$p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \rightarrow \text{pdf de } \mathbf{x}_t \text{ condicionada às medidas } \mathbf{y}_{1:t} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_t\}.$$

Considere o modelo não linear com ruído aditivo (3.2)

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (4.1b)$$

onde a pdf dos ruídos do estado e da saída são conhecidas e a primeira medida do sistema é obtida em  $t = 1$ , assim a condição inicial do estimador é a pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_1)$ .

Como vimos em (3.3), podemos reescrever o modelo (4.1) na forma probabilística (3.3). Devido à propriedade Markoviana do estado (Definição 2.3.1), podemos escrever a função densidade de probabilidades conjunta do estado

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}) \triangleq p_{\theta}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t)$$

e a função densidade de probabilidade condicional

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t}) \triangleq p_{\theta}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t)$$

como

$$p(\mathbf{x}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_1) \prod_{k=2}^t p_{\theta}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) \quad (4.2a)$$

$$p(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t}) = \prod_{k=1}^t p_{\theta}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k), \quad (4.2b)$$

onde  $\mathbf{x}_{1:t} \triangleq \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_t\}$ . No contexto Bayesiano, a estimação da trajetória  $\mathbf{x}_{1:t}$  dado o conjunto de medidas  $\mathbf{y}_{1:t}$  depende da distribuição *a posteriori*

$$p_{\theta}(x_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_{\theta}(x_{1:t}, \mathbf{y}_{1:t})}{p(\mathbf{y}_{1:t})} \quad (4.3)$$

onde

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}, \mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t})p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t}) \quad (4.4)$$

e, da lei de probabilidade total (Teorema 4),

$$p(\mathbf{y}_{1:t}) \triangleq \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t})p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t})d\mathbf{x}_{1:t} \quad (4.5)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \dots \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t})p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t}|\mathbf{x}_{1:t})d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_t. \quad (4.6)$$

Podemos mostrar que a distribuição a posteriori  $p_{\theta}(x_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$  satisfaz a seguinte recursão (SÄRKKÄ, 2013)

$$p_{\theta}(x_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(x_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}, \quad (4.7)$$

onde  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  é uma constante de normalização e pode ser calculada por

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)d\mathbf{x}_{t-1:t}.$$

No problema de estimação de estados estamos interessados em encontrar a distribuição  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . Esta distribuição pode ser obtida através da marginalização da distribuição (4.7), ou seja, precisamos integrar em  $\mathbf{x}_{1:t-1}$  a distribuição (4.7)

$$p_{\theta}(x_t|\mathbf{y}_{1:t}) \triangleq \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})d\mathbf{x}_{1:t-1} \quad (4.8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p_{\theta}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{t-1} \quad (4.9)$$

A marginalização (4.9) significa tomar a média sobre todas as trajetórias possíveis do estado até o tempo  $t - 1$ . Uma vez computado  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$  é possível estimar  $\mathbf{x}_t$  de diferentes formas, por exemplo, através da média

$$\hat{\mathbf{x}}_t \triangleq \mathbf{E}[\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_t p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})d\mathbf{x}_t,$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}_t$  é a estimativa do vetor de estados e  $\mathbf{E}[\cdot]$  é o operador valor esperado.

O objetivo então é encontrar uma forma recursiva de calcular a pdf condicional  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . Para isto iremos, primeiramente, encontrar a pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$ , isto é, a pdf de  $\mathbf{x}_t$  dadas as medidas *a priori* do tempo  $t$ . Utilizando o teorema da probabilidade total (Teorema 2), pode-se mostrar que a pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  pode ser escrita como (SIMON, 2006):

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) &= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1}. \end{aligned}$$

Devido à propriedade Markoviana do estado (Definição 2.3.1),

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}),$$

isto é,  $\mathbf{x}_t$  é inteiramente determinado dado  $\mathbf{x}_{t-1}$ . Assim,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1}. \quad (4.10)$$

A segunda pdf do lado direito da equação (4.10) não está definida ainda, por outro lado, a primeira pdf,  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$ , é a pdf do estado no tempo  $t$  dado o estado no tempo  $t - 1$ . Esta pdf é conhecida (equação (3.4a)) já que a pdf do ruído e a função de transição de estado  $\mathbf{f}(\cdot)$  são conhecidas. Agora considere a pdf condicional



a posteriori de  $\mathbf{x}_t$ ,  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . Utilizando o Teorema de Bayes (Teorema 4) e como  $\mathbf{y}_{1:t} = \{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}\}$  temos que

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) &= p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{1:t-1}) \\ &= \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})} \end{aligned} \quad (4.11)$$

No caso em que o ruído de medida é fraco, temos que  $p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t-1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) = p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:t-1}|\mathbf{x}_t)$ , deste modo obtemos

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}. \quad (4.12)$$

A equação (4.12) relaciona como a probabilidade *a priori* do estado  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  se modifica após obtida a medida  $\mathbf{y}_t$ . Todos os termos à direita de (4.12) estão disponíveis:

- A pdf  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)$  é obtida a partir da equação de saída do estado  $\mathbf{h}(\cdot)$  e da pdf do ruído da medida  $\boldsymbol{\nu}_t$ , através de (3.4b);
- A pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  é obtida em (4.10) utilizando (3.4a);
- A pdf  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  é obtida de forma similar a (4.10):

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) &= \int p_{\theta}(\mathbf{y}_t, \mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t \\ &= \int p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t, \end{aligned}$$

como  $\mathbf{y}_t$  é completamente determinado a partir de  $\mathbf{x}_t$  pela equação de saída (3.4b)

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t. \quad (4.13)$$

O problema de estimação de estados consiste de dois estágios: predição e atualização. No estágio de predição, a distribuição  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})$  obtida no tempo  $t-1$  é propagada no tempo utilizando a equação de estados obtendo a distribuição *a priori*  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$ . Na atualização, a distribuição *a priori* é atualizada considerando a medida obtida no instante  $t$  utilizando o teorema de Bayes. A Figura 4.1 apresenta um esquemático de uma iteração dos estágios envolvidos na estimação de estados recursiva.

Assim, as equações (4.13), (4.12) e (4.10) fornecem uma maneira recursiva de encontrar as pdfs do estado. Porém, as integrais multidimensionais envolvidas só possuem soluções analíticas em alguns casos especiais. O caso mais conhecido é quando o sistema é linear e o ruído e as pdfs das condições iniciais são ambos normalmente distribuídas, como modelo (3.7b). A solução encontrada, neste caso, é dada pelo filtro de Kalman.

### Teorema 5. (*Filtro de Kalman*)

Considere o sistema de tempo discreto descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= A_t\mathbf{x}_t + B_t\mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t \\ \mathbf{y}_t &= C_t\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t \end{aligned} \quad (4.14)$$

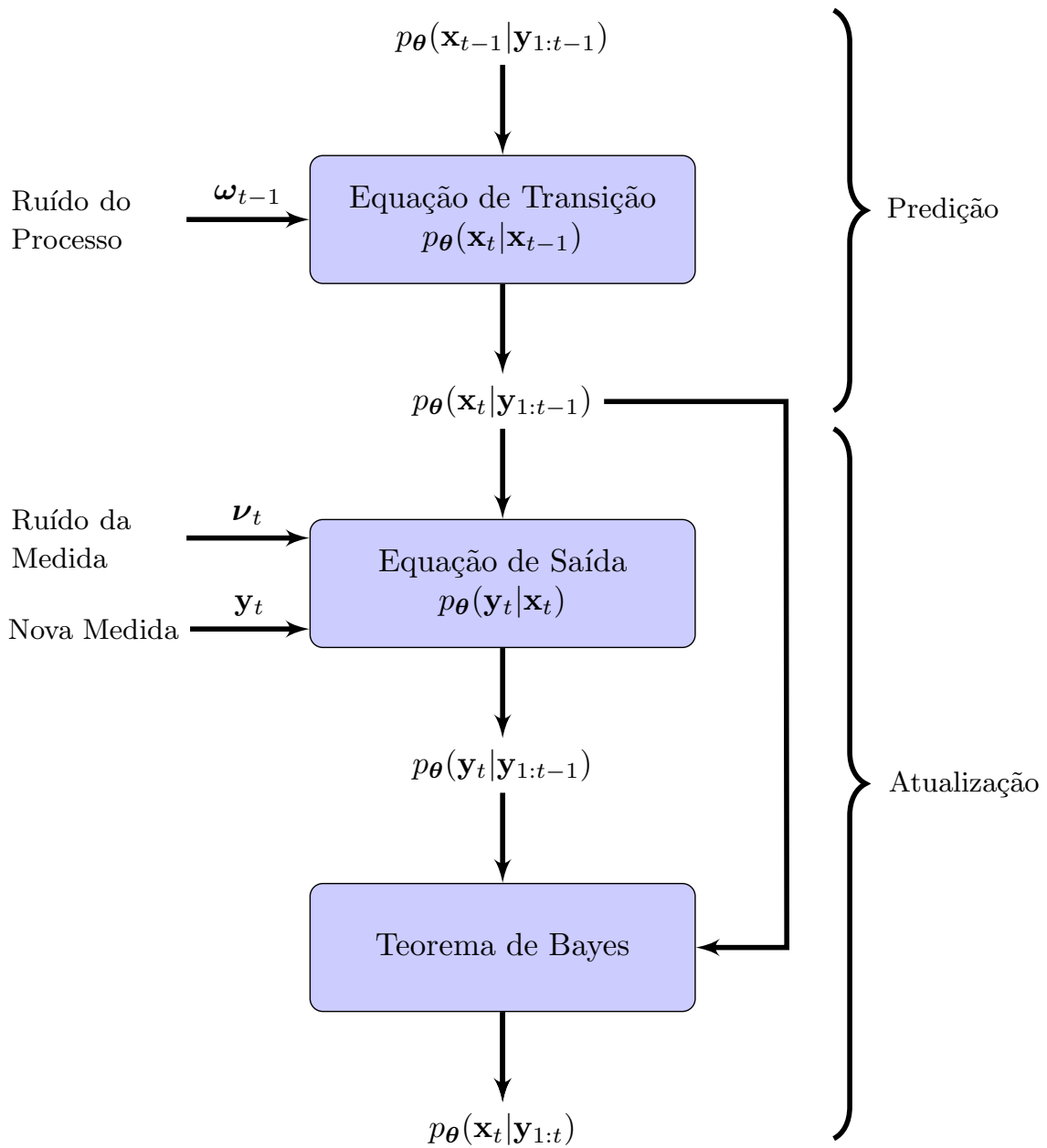


Figura 4.1: Esquemático dos estágios da estimação recursiva.

e assuma que os ruídos e o estado inicial são Gaussianos, i.e.,  $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q_t)$ ,  $\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R_t)$  e  $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_0)$ . Então,

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}), \quad (4.15a)$$

$$p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}, P_{t+1|t}), \quad (4.15b)$$

onde  $\mathcal{N}(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, P)$  é a distribuição normal de  $\mathbf{x}_t$  com média  $\hat{\mathbf{x}}$  e variância  $P$ ,

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t(\mathbf{y}_t - C_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}), \quad (4.16a)$$

$$K_t = P_{t|t-1} C_t^\top S_t^{-1}, \quad (4.16b)$$

$$S_t = C_t P_{t|t-1} C_t^\top + R_t, \quad (4.16c)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} C_t^\top S_t^{-1} C_t P_{t|t-1}, \quad (4.16d)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = A_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B_t \mathbf{u}_t, \quad (4.16e)$$

$$P_{t+1|t} = A_t P_{t|t} A_t^\top + Q_t, \quad (4.16f)$$

com  $\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0$ ,  $P_{0|-1} = \bar{P}_0$ . Temos ainda que  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}$  é uma estimativa a priori (estimativa do estado no tempo  $t+1$  dada medida da saída no tempo  $t$ ),  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  é a estimativa a posteriori (estimativa do estado no tempo  $t$  dada medida da saída no tempo  $t$ ),  $P_{t|t}$  é a matriz de covariância da distribuição a posteriori e  $P_{t|t-1}$  é a matriz de covariância da distribuição a priori.

◇

**Prova.** Prova pode ser encontrada no Apêndice A.

•

O prova apresentada no Apêndice A é a prova Bayesiana no filtro de Kalman, ou seja, em termos das funções de probabilidade. Esta prova será útil para entender a derivação do estimador de estado proposto na Seção 6. Os lemas a seguir serão utilizados para simplificar demonstrações futuras (SÄRKKÄ, 2013) e podem ser derivados utilizando as mesmas relações utilizadas no Apêndice A.

**Lema 4.1.** *Distribuição conjunta de variáveis aleatórias Gaussianas.*

Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades Gaussianas

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \hat{\mathbf{x}}, P) \quad (4.17a)$$

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}; H\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}, R) \quad (4.17b)$$

então a distribuição conjunta de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  e a distribuição marginal de  $\mathbf{y}$  são dadas por

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ H\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P & PH^\top \\ HP & HPH^\top + R \end{bmatrix} \right) \quad (4.18a)$$

$$p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}; H\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}, HPH^\top + R) \quad (4.18b)$$

**Prova.** Utilizando o Teoremas de Bayes temos que

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{y})p(\mathbf{y}). \quad (4.19)$$

Como todas pdfs são Gaussianas, expandindo a relação acima da mesma forma que em (A.4) obtemos (4.18a). Para encontrar (4.18b) basta calcular

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}.$$

•

**Lema 4.2.** Distribuição condicional de variáveis aleatórias Gaussianas.

Sejam  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  variáveis aleatórias com distribuição de probabilidades conjunta

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C \\ C^\top & B \end{bmatrix} \right) \quad (4.20)$$

então a distribuição marginal e a distribuição condicional de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{a}, A), \quad (4.21a)$$

$$p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{b}, B), \quad (4.21b)$$

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{a} + CB^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}), A - CB^{-1}C^\top), \quad (4.21c)$$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{b} + C^\top A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}), B - C^\top A^{-1}C). \quad (4.21d)$$

**Prova.** Temos que

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (4.22)$$

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

e pelo Teorema de Bayes 4

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})} \quad (4.25)$$

e

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{x})}. \quad (4.26)$$

Como todas pdfs são Gaussianas, expandindo as relações acima da mesma forma que em (A.4) obtemos as relações desejadas.

•

### 4.1.2 Predição

O problema de predição consiste em estimar o estado no tempo  $t$  dada medida até o instante de tempo  $k < t$ . O preditor um passo à frente é o preditor que estima o estado no instante de tempo  $t + 1$  dada informação até o instante de tempo  $t$ . Partindo da densidade de probabilidades conjunta

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}), \quad (4.27)$$

onde utilizamos o Teorema de Bayes para encontrar (4.27), para encontrar a pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t})$  do preditor um passo à frente precisamos marginalizar  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  em  $\mathbf{x}_t$ , ou seja

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t}) = \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (4.28)$$

$$= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t. \quad (4.29)$$

Marginalizar em  $\mathbf{x}_t$  significa que somamos sobre todos os valores possíveis da variável desconhecida  $\mathbf{x}_t$ . A expressão para o preditor  $k$ -passos à frente segue o mesmo raciocínio usado para encontrar (4.29). Neste caso é necessário marginalizar  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+k}, \dots, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  com respeito a  $d\mathbf{x}_t, \dots, d\mathbf{x}_{t+k-1}$

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+k} | \mathbf{y}_{1:t}) \triangleq \int \prod_{i=1}^k p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+i} | \mathbf{x}_{t+i-1}) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{t:t+k-1} \quad (4.30)$$

$$= \int \dots \int \prod_{i=1}^k p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+i} | \mathbf{x}_{t+i-1}) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \dots d\mathbf{x}_{t+k-1}. \quad (4.31)$$

### 4.1.3 Smoother

A diferença entre o estimador de estados recursivo e o estimador suavizado (*smoother*) é que o primeiro calcula a estimativa do estado utilizando somente medidas do sistema até o instante de tempo atual, enquanto o *smoother* utiliza medidas futuras. O objetivo do *smoother* é encontrar a função distribuição *a posteriori* marginalizada do estado  $\mathbf{x}_t$  tendo medidas do sistema até o tempo  $T$  com  $T > t$ , *i.e.*,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:T}).$$

Para encontrar o estimador suavizado partimos da distribuição conjunta do estado  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t+1}$  dado  $\mathbf{y}_{1:T}$

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:T}) p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) \quad (4.32)$$

Como dado  $\mathbf{x}_{t+1}$ ,  $\mathbf{x}_t$  não depende de  $\mathbf{y}_{t+1:T}$  temos

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t}),$$

ou seja

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) &= p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t}) p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) \\ &= \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t}) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})}{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t})} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) \\ &= \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})}{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t})} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:T})$  é a distribuição suavizada do estado em  $t + 1$ . Assim, para obtermos  $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T})$  basta marginalizarmos (4.33), ou seja, integrar com respeito a  $\mathbf{x}_{t+1}$  (4.33)

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \int \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)}{p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_{t+1}. \quad (4.34)$$

O estimador suavizado obtém uma estimativa para o estado muito mais precisa que o estimador recursivo já que todo o conjunto de dados obtidos está sendo utilizado para estimar o estado. Somente em alguns casos teremos uma expressão analítica para (4.34). Do mesmo modo que para o estimador de estados recursivo, se o sistema for linear e Gaussiano o Filtro de Kalman Suavizado ou *Rauch-Tung-Striebel smoother* (RAUCH; STRIEBEL; TUNG, 1965) pode ser utilizado.

**Teorema 6.** *Rauch-Tung-Striebel smoother*

Considere o sistema de tempo discreto descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= A_t \mathbf{x}_t + B_t \mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t \\ \mathbf{y}_t &= C_t \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t \end{aligned} \quad (4.35)$$

e assumo que os ruídos e o estado inicial são Gaussianos, i.e,  $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(0, Q_t)$ ,  $\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(0, R_t)$  e  $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{P}_0)$ . Então,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}, \hat{P}_{t|1:T}),$$

onde

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = A_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B_t \mathbf{u}_t \quad (4.36a)$$

$$P_{t+1|t} = A_t P_t A_t^{\top} + Q_t, \quad (4.36b)$$

$$G_t = P_{t|t} A_t^{\top} [P_{t+1|t}]^{-1}, \quad (4.36c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + G_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}), \quad (4.36d)$$

$$\hat{P}_{t|1:T} = P_{t|t} + G_t (\hat{P}_{t+1|1:T} - P_{t+1|t}) G_t^{\top}, \quad (4.36e)$$

e,  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  e  $\hat{P}_{t|t}$  são a média e a covariância calculadas pelo filtro de Kalman (Teorema 5).

◇

**Prova.** Como mostrado no Teorema 5,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (4.37)$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t, Q) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (4.38)$$

Como  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t$  são variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana, podemos utilizar o Lema 4.1

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t+1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_t \\ A\hat{\mathbf{x}}_t + B\mathbf{u}_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{t|t} & P_{t|t} A^{\top} \\ AP_{t|t} & AP_{t|t} A^{\top} + Q \end{bmatrix} \right). \quad (4.39)$$

Devido à propriedade Markoviana do estado (Definição 2.3.1) temos que

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t}) \quad (4.40)$$

e então, utilizando o Lema 4.2 em (4.39) obtemos a seguinte função distribuição condicional

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t}) \quad (4.41)$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \tilde{\mathbf{m}}_2, \tilde{P}_2), \quad (4.42)$$

onde

$$G_t \triangleq P_{t|t} A^{\top} (A P_{t|t} A^{\top} + Q)^{-1} \quad (4.43)$$

$$\tilde{\mathbf{m}}_2 \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + G_t (\mathbf{x}_{t+1} - A \hat{\mathbf{x}}_{t|t} - B \mathbf{u}_t) \quad (4.44)$$

$$\tilde{P}_2 \triangleq P_{t|t} - G_t (A P_{t|t} A^{\top} + Q) G_t^{\top}. \quad (4.45)$$

Assumindo que  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|T}, \hat{P}_{t+1|T})$ , a distribuição conjunta de  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t+1}$  dado  $\mathbf{y}_{1:T}$  será

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t}) p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:T}) \quad (4.46)$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \tilde{\mathbf{m}}_2, \tilde{P}_2) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T}, \hat{P}_{t+1|1:T}) \quad (4.47)$$

$$= \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t+1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + G_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T} - A \hat{\mathbf{x}}_{t|t} - B \mathbf{u}_t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{P}_{t+1|1:T} & \hat{P}_{t+1|1:T} G_t^{\top} \\ G_t^{\top} \hat{P}_{t+1|1:T} & G_t \hat{P}_{t+1|1:T} G_t^{\top} + \tilde{P}_2 \end{bmatrix} \right). \quad (4.48)$$

Por fim, utilizando Lema 4.2 com (4.48) obtemos

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:T}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}, \hat{P}_{t|1:T}),$$

onde

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + G_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}), \quad (4.49)$$

$$\hat{P}_{t|1:T} = P_{t|t} + G_t (\hat{P}_{t+1|1:T} - P_{t+1|t}) G_t^{\top}. \quad (4.50)$$

•

## 4.2 Estimação de parâmetros

Utilizando a abordagem Bayesiana podemos separar o problema de estimação de estados do problema de estimação de parâmetros. Para lidar com o problema de estimação dos parâmetros do sistema, o método da máxima verossimilhança (LJUNG, 1999) fornece uma estimativa do vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$  a partir do valor que maximiza a função densidade de probabilidade conjunta (*likelihood*)  $p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T})$  das observações.

### 4.2.1 Estimativa por Máxima Verossimilhança

A função *likelihood*  $p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T})$  avalia como a probabilidade em obter um certo conjunto de dados varia dado  $\theta$ . Assim, procuramos

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} p_{\theta}(\mathbf{y}_{1:T}) \\ &= \arg \max_{\theta} p_{\theta}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T), \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \triangleq p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T)$ . Ou seja, queremos um valor para o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  que maximize a probabilidade dos dados medidos. Para encontrar a solução deste problema podemos utilizar o Teorema 3 (teorema de Bayes) para decompor a função *likelihood*

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_T) \quad (4.52)$$

$$= p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_1) \prod_{t=2}^T p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}). \quad (4.53)$$

Como a função logaritmo é uma função monotônica, o problema de maximização (4.51) é equivalente ao problema de minimização

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} -L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}), \quad (4.54)$$

onde  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  é a função *log-likelihood* definida como:

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \triangleq \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) = \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_1) + \sum_{t=2}^T \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}). \quad (4.55)$$

Para o caso de um modelo linear com ruído e condições iniciais Gaussianas, como em (4.14), a função *log-likelihood* tem uma forma fechada (A.11), assim a função *log-likelihood* para o sistema linear  $L_{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{y}_{1:T})$  será

$$L_{\boldsymbol{\theta}}^l(\mathbf{y}_{1:T}) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^T n_y \ln 2\pi + \ln |K_{k|k-1}| + (\mathbf{y}_k - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T K_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{y}_k - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \quad (4.56)$$

onde

$$K_{k|k-1} \triangleq C_k P_{k|k-1} C_k^T + R,$$

$P_{k|k-1}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$  são dados pelo Filtro de Kalman (Teorema 5).

Tipicamente, a função (4.55) é diferenciável, e o problema de otimização (4.54) pode ser resolvido através de métodos de procura baseados no gradiente da função *log-likelihood* (SCHÖN; WILLS; NINNESS, 2011). O problema surge quando queremos encontrar a estimativa (4.51) para modelos não lineares, quando não existe forma analítica para a função *likelihood*. A inexistência de uma solução analítica para a função *likelihood* vem do fato que a trajetória do estado  $\mathbf{x}_{1:T}$  é desconhecida. Assim, para calcular  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  precisamos tomar a média sobre todas as possíveis trajetórias do estado. Mais precisamente, a função *likelihood* é dada através da marginalização de  $\mathbf{x}_{1:T}$  da função *likelihood* conjunta

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) = \int p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_{1:T} \quad (4.57)$$

Utilizando a propriedade Markoviana (Definição 2.3.1) do sistema, podemos reescrever função *likelihood* conjunta como

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1) \prod_{t=1}^T p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) \prod_{t=1}^{T-1} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t), \quad (4.58)$$



ou ainda sem perda de generalidade, a função *log-likelihood* conjunta

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) \triangleq \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}). \quad (4.59)$$

Como, na maioria dos casos, não existe solução analítica para a integral (4.57), métodos numéricos devem ser utilizados. A existência de uma variável desconhecida  $\mathbf{x}_{1:T}$  sugere a utilização do método chamado *data augmentation* (TANNER; WONG, 1987). Esse método se baseia na ideia de que se o estado  $\mathbf{x}_{1:T}$  fosse conhecido, inferência de  $\boldsymbol{\theta}$  seria simples. O algoritmo EM utiliza este método para criar uma função substituta para  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ , de modo que resolver o problema para esta função substituta equivale a resolver (4.51).

#### 4.2.2 Algoritmo EM

O algoritmo EM combina a estimação de estados Bayesiana, introduzida na Seção 4.1, com a identificação de parâmetros utilizando o estimador de máxima verossimilhança (Seção 4.2). A ideia principal do algoritmo é considerar a função *log-likelihood* conjunta (4.58), ao invés de considerar apenas a função *log-likelihood*  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ . Esta estratégia pressupõe que maximizar a função *log-likelihood* “completa”  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  é mais fácil que a “incompleta”  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  devido à informação que o conjunto  $\mathbf{x}_{1:T}$  pode fornecer (SCHÖN; WILLS; NINNESS, 2011). Por exemplo, se a estrutura do modelo for linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t \\ \mathbf{y}_t &= C\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t \end{aligned}$$

então o conhecimento do vetor de estados  $\mathbf{x}_t$  nos permite estimar as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  através de uma simples regressão linear (LJUNG, 1999). Como não conhecemos o conjunto  $\mathbf{x}_{1:T}$ , o algoritmo procura uma estimativa para este conjunto e considera uma aproximação  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  da função  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$ . A aproximação utilizada é a de mínima variância de  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  dado o conjunto de dados observados  $\mathbf{y}_{1:T}$  e a hipótese de que  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  é o valor para o vetor de parâmetros na  $k$ -ésima iteração do algoritmo. Este estimador de mínima variância é dado pelo valor esperado da função *log-likelihood* completa  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  com respeito ao estado  $\mathbf{x}_{1:T}$  condicionado às medidas  $\mathbf{y}_{1:T}$  e à estimativa  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  obtida na  $k$ -ésima iteração do algoritmo EM (MCLACHLAN; KRISHNAN, 2007)

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) \triangleq \mathbf{E}[L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) | \mathbf{y}_{1:T}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k] \quad (4.60)$$

$$= \int L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_{1:T}, \quad (4.61)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  em  $p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T})$  significa que  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T})$  é a pdf de  $\mathbf{x}_{1:T}$  dados o conjunto de medidas  $\mathbf{y}_{1:T}$  calculada utilizando a estimativa  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  obtida na  $k$ -ésima iteração do algoritmo EM. A chave para entender o significado da função  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  é notar que  $\mathbf{y}_{1:T}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  são conhecidos, e o estado  $\mathbf{x}_{1:T}$  é uma variável aleatória governada pela distribuição  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T})$ .

O cálculo de  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  é chamado de passo E (*expectation step*) do algoritmo. O segundo passo do algoritmo, chamado passo M (*maximization step*), é maximizar a função (4.61) com respeito a  $\boldsymbol{\theta}$ , *i.e.*,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k). \quad (4.62)$$

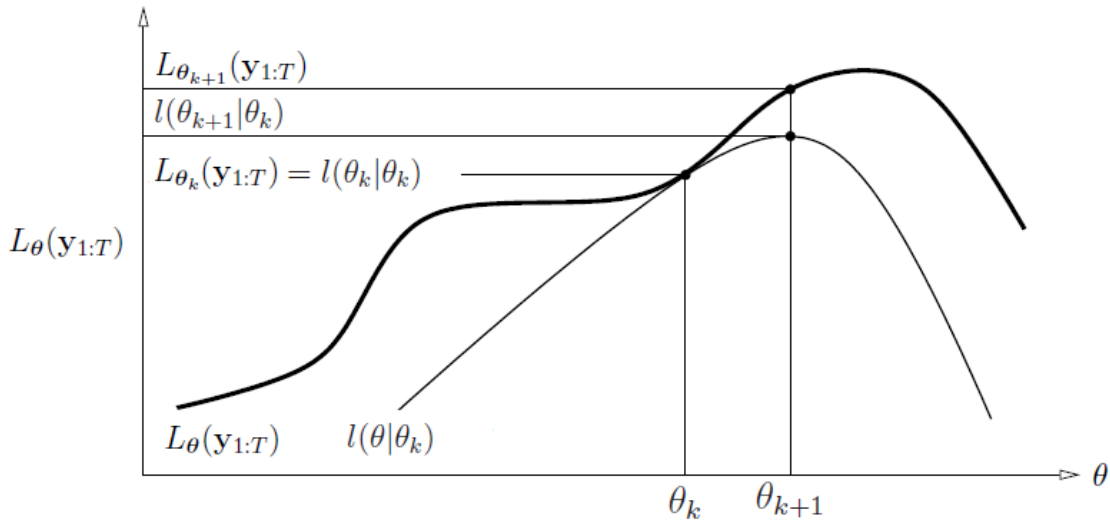


Figura 4.2: Interpretação gráfica de uma iteração do algoritmo EM. A função  $l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_k)$  é limitada acima pela função *likelihood*  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ . As funções são iguais em  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k$ . O algoritmo procura o valor  $\boldsymbol{\theta}_{k+1}$  como o valor que maximiza  $l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_k)$ . Como  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \geq l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_k)$ , aumentando  $l(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}_k)$  garante que o valor da função *likelihood*  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  aumenta em cada iteração.

Estes dois passos são repetidos até que um critério de parada pré-determinado seja atingido. Para cada iteração do algoritmo, pode-se mostrar que maximizar (4.62) significa maximizar  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  e que o algoritmo converge para um máximo local de  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ . Isto vem da relação que existe entre  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  com a aproximação  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  da função *log-likelihood*. Pode-se mostrar a seguinte relação de desigualdade (SCHÖN; WILLS; NINNESS, 2011)

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) - L_{\boldsymbol{\theta}_k}(\mathbf{y}_{1:T}) \geq Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) - Q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) \quad (4.63)$$

ou ainda

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \geq \overbrace{L_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{y}_{1:T}) + Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) - Q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)}^{l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)}. \quad (4.64)$$

O objetivo é encontrar os valores de  $\boldsymbol{\theta}$  que maximizem  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ , ou seja o valor do vetor de parâmetros que maximize a probabilidade dos dados medidos. A desigualdade (4.64) mostra que a função  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  é um limite superior para  $l(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$ . Ou seja, dado  $\boldsymbol{\theta}$  tal que  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) > Q(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  a função *log-likelihood*  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$  também aumenta de modo a satisfazer a desigualdade (4.64). A Figura 4.2 ilustra este processo. Com o objetivo de alcançar o maior aumento no valor de  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ , o algoritmo EM procura o valor de  $\boldsymbol{\theta}$  que maximiza  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$ . Chamamos este valor de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}$ . O algoritmo EM explora esta desigualdade retornando uma sequência de valores  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, k = 1, 2, \dots$  que cada vez mais se aproxima do estimador de máxima verossimilhança (4.55).

O primeiro desafio na implementação do algoritmo EM é computar a função *log-likelihood* aproximada  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  a partir da sua definição (4.61). Utilizando o Teorema 3 temos

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}) = \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{1:T}) + \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}) \quad (4.65)$$

$$= \underbrace{\log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1)}_{L_{\boldsymbol{\theta}}^1} + \underbrace{\sum_{t=1}^{N-1} \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)}_{L_{\boldsymbol{\theta}}^2} + \underbrace{\sum_{t=1}^N \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)}_{L_{\boldsymbol{\theta}}^3} \quad (4.66)$$

Como vimos,  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  é o valor esperado de  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  condicionado às medidas  $\mathbf{y}_{1:T}$  e a estimativa  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ . Assim, aplicando o operador valor esperado em cada termo de (4.66) obtemos

$$I_1 \triangleq \mathbf{E}[L_{\boldsymbol{\theta}}^1|\mathbf{y}_{1:T}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k] = \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_1) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_1|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_1 \quad (4.67a)$$

$$I_2 \triangleq \mathbf{E}[L_{\boldsymbol{\theta}}^2|\mathbf{y}_{1:T}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k] = \sum_{t=1}^{N-1} \int \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t+1} \quad (4.67b)$$

$$I_3 \triangleq \mathbf{E}[L_{\boldsymbol{\theta}}^3|\mathbf{y}_{1:T}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k] = \sum_{t=1}^N \int \log p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_t \quad (4.67c)$$

Assim,

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.68)$$

Como pode ser observado em (4.68), para calcular a função  $Q(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  precisamos conhecer as pdfs  $p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T})$  e  $p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:T})$  associadas ao problema de suavização (Seção 4.1.3).

### 4.3 Considerações Finais

Para modelos não lineares e/ou com ruídos não Gaussianos não existe solução analítica para os problemas de estimação de estado ou identificação de parâmetros. Assim, precisamos utilizar algum método numérico de aproximação como por exemplo o filtro de Kalman estendido, *unscented Kalman filter* (RAWLINGS; BAKSHI, 2006), *point of mass filter*, filtro de partículas (GUSTAFSSON, 2010) para o problema de estimação de estados, e algoritmo EM (*Expectation Maximization algorithm*) (DEMPSTER; LAIRD; RUBIN, 1977), (MCLACHLAN; KRISHNAN, 2007) para o problema de identificação de parâmetros. Na próxima seção trataremos do problema de estimação de estados de modelos não lineares utilizando filtro de partículas.

## 5 FILTRO DE PARTÍCULAS

O método sequencial de Monte Carlo (SMC) ou filtro de partículas foi introduzido em (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993) como uma aproximação numérica para o problema de estimação de estados não linear. Os filtros de partículas utilizam o método chamado *Sequential Importance Sampling (SIS)* para aproximar de forma sequencial uma determinada distribuição do estado, sem restrições sobre o modelo do estado. O modelo pode ser não-linear e os estados iniciais e sinais de ruído podem ter qualquer distribuição, desde que conhecidas.

De modo geral, o filtro de partículas amostra de forma sequencial realizações de uma certa distribuição alvo  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$ , onde cada distribuição é definida como

$$\pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \frac{\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t})}{Z_t}, \quad (5.1)$$

$$Z_t = \int \bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t}, \quad (5.2)$$

onde  $\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $Z_t$  é uma constante de normalização que pode ser desconhecida. Chamamos de distribuição alvo a distribuição que desejamos aproximar. O filtro de partículas fornece uma aproximação de  $\pi_1(\mathbf{x}_1)$  e uma estimativa de  $Z_1$  no tempo  $t = 1$ , então uma aproximação de  $\pi_2(\mathbf{x}_{1:2})$  e uma estimativa de  $Z_2$  em  $t = 2$  e assim sucessivamente. No contexto do problema de estimação de estado como o de (4.12), a distribuição alvo é a distribuição  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) = p_\theta(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$  dada por

$$p_\theta(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_\theta(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_\theta(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}{p_\theta(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})}. \quad (5.3)$$

Deste modo, podemos definir  $\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) = p_\theta(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_\theta(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$  e  $Z_t = p_\theta(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1})$ . Como apresentado na Seção 4.1.1, apenas para alguns casos é possível determinar uma forma analítica para a distribuição  $p_\theta(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . O filtro de partículas fornece uma aproximação numérica para esta pdf.

Nesta seção iremos apresentar duas implementações do filtro de partículas que foram utilizadas neste trabalho. Primeiramente, iremos introduzir o método de Monte Carlo e então apresentar o método *Sequential Importance Sampling (SIS)* que é a base para todos os filtros de partículas, e por fim, apresentar os filtros de partículas utilizados neste trabalho.

### 5.1 Método de Monte Carlo

Inicialmente, considere o problema genérico de aproximar a pdf  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$  para algum  $t$  fixo. Se gerarmos  $M$  trajetórias de  $\mathbf{x}_{1:t}$ , denotado como  $\left\{ \mathbf{x}_{1:t}^{(i)} \right\}_{i=1}^M$ , tal que

$\mathbf{x}_{1:t}^{(i)} \sim \pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$ , então o Método de Monte Carlo aproxima  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$  pelo estimador

$$\widehat{\pi}(\mathbf{x}_{1:t}) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_{1:t} - \mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^{(i)}) \dots \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^{(i)}) \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

onde  $\delta(\cdot)$  é a delta de Dirac. Assim, baseado nesta aproximação, podemos aproximar qualquer distribuição marginal, como por exemplo  $\pi_t(\mathbf{x}_t)$ , utilizando

$$\widehat{\pi}(\mathbf{x}_t) = \int \pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t-1} \quad (5.7)$$

$$\approx \int \widehat{\pi}(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t-1} \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^{(i)}) \quad (5.9)$$

Do mesmo modo, podemos estimar o valor esperado de qualquer função teste  $\phi(\mathbf{x}_{1:t})$  (e.g., média, variância)

$$\widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t}) \triangleq \mathbf{E}[\phi(\mathbf{x}_{1:t})] = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \phi(\mathbf{x}_{1:t}) \pi(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t} \quad (5.10)$$

$$\approx \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \phi(\mathbf{x}_{1:t}) \widehat{\pi}(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t} \quad (5.11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \phi(\mathbf{x}_{1:t}) \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\mathbf{x}_{1:t} - \mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) d\mathbf{x}_{1:t} \quad (5.12)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \phi(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) \quad (5.13)$$

onde  $\mathbf{E}[\cdot]$  denota o operador valor esperado. O estimador (5.13) é o estimador de Monte Carlo  $\widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t})$  da função teste  $\phi(\mathbf{x}_{1:t})$ . Este estimador possui diversas propriedades importantes (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000)

1. Estimador não tendencioso, o valor esperado da estimativa  $\widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t})$  é igual ao valor real do parâmetro

$$\mathbf{E}[\widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t})] = \mathbf{E}[\phi(\mathbf{x}_{1:t})]$$

2. Estimador consistente, a estimativa tende ao valor real quando o número de amostras tende a infinito,  $\widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t}) \rightarrow \mathbf{E}[\phi(\mathbf{x}_{1:t})]$  quando  $M \rightarrow \infty$ ;
3. Se a variância de  $\phi(\mathbf{x}_{1:t})$  for finita,  $\sigma_{\phi(\mathbf{x}_{1:t})}^2 \triangleq \text{Var}[\phi(\mathbf{x}_{1:t})] < \infty$ , então, pelo teorema do limite central

$$\sqrt{M} \left( \widehat{\phi}_{MC}(\mathbf{x}_{1:t}) - \mathbf{E}[\phi(\mathbf{x}_{1:t})] \right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_{n_x}), \quad M \rightarrow \infty,$$

onde  $\xrightarrow{D}$  representa a convergência para a distribuição,  $I_{n_x} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o vetor nulo.

## 5.2 Importance Sampling (IS)

Para que possamos utilizar o estimador de Monte Carlo precisamos gerar amostras independentes da distribuição alvo  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$ . Porém dificilmente será possível gerar amostras com a distribuição desejada devido a dois problemas. Primeiro, normalmente, não se conhece a constante de normalização  $Z_t$  (5.2). Segundo, mesmo se  $Z_t$  for conhecida, existem poucas distribuições para as quais é simples de obter amostras, principalmente em dimensões elevadas.

No filtro de partículas utilizamos o método chamado *Importance Sampling* (KAHN; HARRIS, 1951) para amostrar da distribuição alvo  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$ . Propomos uma distribuição  $q_t(x_{1:t})$  para a qual seja simples de gerar amostras; cada amostra gerada é chamada de partícula<sup>1</sup>. Para cada uma das partículas geradas atribui-se um peso dependendo de quão bem a partícula descreve a função alvo. Ou seja, a partir de (5.1) e (5.2) e utilizando  $q_t(x_{1:t})$  temos que

$$\pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \frac{W_t(\mathbf{x}_{1:t})q_t(\mathbf{x}_{1:t})}{Z_t}, \quad (5.14a)$$

$$W_t(\mathbf{x}_{1:t}) \triangleq \frac{\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t})}{q_t(\mathbf{x}_{1:t})}, \quad (5.14b)$$

$$Z_t = \int W_t(\mathbf{x}_{1:t})q_t(\mathbf{x}_{1:t})d\mathbf{x}_{1:t}, \quad (5.14c)$$

onde  $W_t(\mathbf{x}_{1:t})$  são os pesos não normalizados que ponderam cada amostra gerada. A figura 5.1 apresenta um exemplo ilustrativo. Imagine que desejamos obter amostrar da distribuição

$$\pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \frac{\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t})}{Z_t} \quad (5.15)$$

$$= \frac{1}{Z} \exp(0.4(x - 0.4)^2 - 0.08x^4). \quad (5.16)$$

Para tal função é fácil calcular o valor da função para um dado um valor  $x$ , a Figura 5.1 apresenta o gráfico de tal função. Porém, isso não significa que possamos amostrar tal distribuição, ou seja, não significa que exista uma função analítica que forneça amostras segundo essa distribuição. No *importance sampling*, escolhemos  $q_t(\mathbf{x}_{1:t})$  que seja fácil de amostrar. Na Figura 5.1 apresentamos uma proposta de distribuição para a função alvo (5.16) dada por

$$q_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; -1.3, 3).$$

Para a  $i$ -ésima trajetória  $\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}$  podemos calcular

$$q_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^{(i)}; -1.3, 3)$$

e

$$\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) = \exp(0.4(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)} - 0.4)^2 - 0.08(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)})^4)$$

---

<sup>1</sup>Na literatura, esta distribuição é chamada de *proposal distribution*. Já a distribuição alvo é chamada de *target distribution*

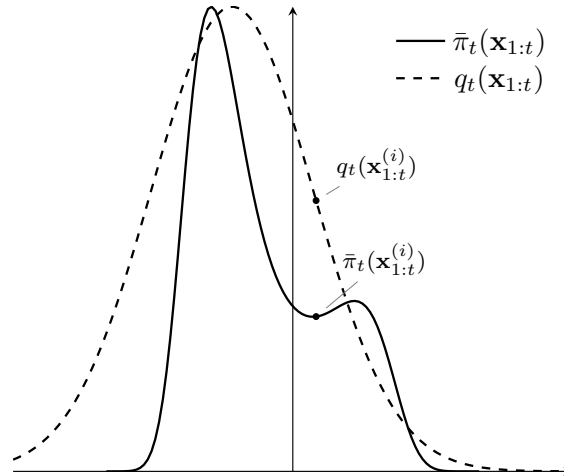


Figura 5.1: Função  $\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \exp(0.4(x-0.4)^2 - 0.08x^4)$  e função proposta  $q_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{1:t}; -1.3, 3)$  para a função alvo  $\bar{\pi}(\mathbf{x}_{1:t})$

Estes dois pontos estão marcados na Figura 5.1. O peso  $W_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)})$  da  $i$ -ésima partícula pode ser então calculado por

$$W_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) = \frac{\bar{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)})}{q_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)})}.$$

De modo geral, assumindo que foram amostradas independentemente  $M$  trajetórias  $\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}$ ,  $i, \dots, M$ , tal que  $\mathbf{x}_{1:t}^{(i)} \sim q_t(\mathbf{x}_{1:t})$ , então utilizando a aproximação de  $q_t(\mathbf{x}_{1:t})$  em (5.14) temos

$$\hat{\pi}_t(\mathbf{x}_{1:t}) = \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \delta(\mathbf{x}_{1:t} - \mathbf{x}_{1:t}^{(i)}) \quad (5.17a)$$

$$\hat{Z}_t = \sum_{i=1}^M W_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}), \quad (5.17b)$$

onde

$$w_t^{(i)} = \frac{W_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)})}{\sum_{j=1}^M W_t(\mathbf{x}_{1:t}^{(j)})}$$

são os pesos relativos normalizados. Observe que o conjunto  $\{w_t^{(i)}, \mathbf{x}_{1:t}^{(i)}\}_{i=1}^M$  define uma distribuição empírica da distribuição alvo  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t})$ . Se estivermos interessados em calcular o valor esperado de qualquer função teste  $\phi(\mathbf{x}_{1:t})$  temos

$$\hat{\phi}_{IS}(\mathbf{x}_{1:t}) = \int \phi(\mathbf{x}_{1:t}) \hat{\pi}(\mathbf{x}_{1:t}) d\mathbf{x}_{1:t} \quad (5.18)$$

$$= \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \phi(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}). \quad (5.19)$$

Diferentemente do estimador de Monte Carlo (5.13), o estimador  $\hat{\phi}_{IS}(\mathbf{x}_{1:t})$  é tendencioso para  $M$  finito, porém é consistente. Isto é, a estimativa converge assintoticamente para o valor real quando  $M \rightarrow \infty$  (MERWE et al., 2000), (Doucet, Arnaud Freitas, Nando de Gordon, 2001).

### 5.3 Filtro de Partículas

O filtro de partículas implementa o método IS de forma sequencial. Na estimação de estados recursiva, queremos obter uma aproximação para a distribuição  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ ,  $t = 1, \dots, T$  de forma sequencial. Para isso, aplicamos o método apresentado anteriormente para a sequência de distribuições alvo  $\pi_t(\mathbf{x}_{1:t}) = p_{\theta}(x_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$ .

Utilizando a propriedade Markoviana do estado (Definição 2.3.1), podemos encontrar a seguinte recursão

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) &\propto p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_{1:t}, \mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t-1}) \\ &= p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}) \\ &= p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{1:t-1})p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Vale observar que se o modelo for Markoviano  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{1:t-1}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$  devido à propriedade Markoviana do estado (Definição 2.3.1). Porém o filtro de partículas pode ser utilizado para modelos mais gerais. Por esse motivo iremos derivar o filtro de partículas para o caso mais geral. Utilizando IS, podemos amostrar partículas de forma que  $\mathbf{x}_{1:t}^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$ , obtendo os pesos

$$W_t^{(i)} \propto \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^{(i)})p_{\theta}(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)})p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t})}. \quad (5.21)$$

No SIS, assume-se que

$$q(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t}) = q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t})q(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1}),$$

então (5.21) pode ser escrita como

$$W_t^{(i)} \propto \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^{(i)})p_{\theta}(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})} \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t-1})}. \quad (5.22)$$

Assumindo que em  $t-1$  já existam um conjunto de trajetórias  $\{\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}\}_{i=1}^M$  amostradas da distribuição  $q(\mathbf{x}_{1:t-1}|\mathbf{y}_{1:t-1})$  com os respectivos pesos  $W_{t-1}^{(i)}$ , então em  $t$ , podemos amostrar  $\mathbf{x}_{1:t}^{(i)}$  da distribuição  $q(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$  amostrando as novas partículas no tempo  $t$  como  $\mathbf{x}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})$ . Os pesos no tempo  $t-1$  são proporcionais ao termo mais à direita de (5.22)

$$W_{t-1}^{(i)} \propto \frac{p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}|\mathbf{y}_{1:t-1})}.$$

Assim obtemos a seguinte recursão

$$W_t^{(i)} \propto \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^{(i)})p_{\theta}(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})} w_{t-1}^{(i)}, \quad (5.23)$$

onde  $w_{t-1}^{(i)}$  são os pesos relativos normalizados,

$$w_{t-1}^{(i)} \triangleq \frac{W_{t-1}^{(i)}}{\sum_{j=1}^M W_{t-1}^{(j)}}.$$



Por fim, o conjunto  $\{w_t^{(i)}, \mathbf{x}_{1:t}^{(i)}\}$  é uma aproximação da pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_{1:t}|\mathbf{y}_{1:t})$ , assim como  $\{w_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(i)}\}$  forma uma aproximação para a pdf  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ . Uma estimativa para o estado em  $t$  é

$$\widehat{\mathbf{x}}_t^{PF} = \int \mathbf{x}_t p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (5.24)$$

$$\approx \int \mathbf{x}_t \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \delta(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^{(i)}) d\mathbf{x}_t \quad (5.25)$$

$$= \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \mathbf{x}_t^{(i)}. \quad (5.26)$$

A forma geral do filtro de partículas para estimação de estados recursiva é apresentada no Algoritmo 5.1.

---

**Algoritmo 5.1** Filtro de Partículas recursivo

---

**Inicialização das partículas:**  $t = 0$

- 1:  $\{\mathbf{x}_0^{(i)}\}_{i=1}^M \sim p_{\theta}(\mathbf{x}_0)$
  - 2:  $\{w_0^{(i)}\}_{i=1}^M \leftarrow \frac{1}{M}$
  - 3: **for**  $t = 1$  **to**  $t$  **do**  
*Amostrar segundo proposta*
  - 4:  $\mathbf{x}_t^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t})$   
*Cálculo dos pesos relativos*
  - 5:  $w_t \leftarrow \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t^{(i)})p_{\theta}(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)})}{q(\mathbf{x}_t^{(i)}|\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}, \mathbf{y}_{1:t})} w_{t-1}^{(i)}$
  - 6:  $w_t^{(i)} \leftarrow \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^M w_t^{(j)}}$   
*Estimativa do estado*
  - 7:  $\widehat{\mathbf{x}}_t^{PF} \leftarrow \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \mathbf{x}_t^{(i)}$
  - 8: **end for**
  - 9: **Retorna:**  $\{w_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(i)}\}_{i=1}^M$  e  $\widehat{\mathbf{x}}_t^{PF}$
- 

Existe, no entanto, um problema inerente ao método do filtro de partículas. A qualidade dos pesos  $w_t^{(i)}$  obtidos, e por consequência a qualidade da distribuição estimada, se deteriora com o tempo. De fato, pode-se mostrar que a variância dos pesos  $w_t^{(i)}$  aumenta com o tempo, fazendo com que a estimativa divirja (SCHÖN, 2003), (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000). Como resultado, os pesos relativos de cada partícula ou tendem a zero ou a um após algumas iterações (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993). Este processo é chamado de “degeneração ou depleção da partícula”.

### 5.3.1 Reamostragem

A reamostragem é utilizada para contornar o problema da qualidade das estimativas obtidas pelo filtro de partículas. A ideia da reamostragem é eliminar as partículas que tenham pesos relativos pequenos (baixa probabilidade) e clonar partículas com pesos relativos altos (alta probabilidade). A Figura 5.2 ilustra a operação de reamostragem, onde as partículas com baixa probabilidade são eliminadas e as partículas

com alta probabilidade são clonadas. Vale observar que após a reamostragem todas as partículas tem pesos relativos iguais. Reamostrar as partículas introduz uma informação a mais sobre a observação, assim as partículas que representam melhor a trajetória real do estado irão se propagar. Existem diversos métodos de realizar a reamostragem das partículas (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993), (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000), (GUSTAFSSON, 2010). Um exemplo é o apresentado em (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993) e pode ser resumido no Algoritmo 5.2.

Como mencionado anteriormente, sem a reamostragem pode ocorrer a degeneração das partículas, isto significa que após um tempo a maioria das partículas terá pesos nulos. A reamostragem corrige este problema, porém cria um outro problema. Inevitavelmente ela correlaciona as partículas, aumentando a correlação entre as amostras perdemos informação sobre o sistema resultando no aumento da variância das estimativas (GUSTAFSSON, 2010). Assim, é de interesse iniciar o processo de reamostragem apenas quando for realmente necessário. Em (GUSTAFSSON, 2010) podemos encontrar duas opções de quando utilizar a reamostragem. O método mais comum é utilizando o número de partículas efetivas  $N_{eff}$  definido por

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M (w_t^{(i)})^2}.$$

Neste método, se  $N_{eff}$  for menor que um certo valor predeterminado realizamos a reamostragem.

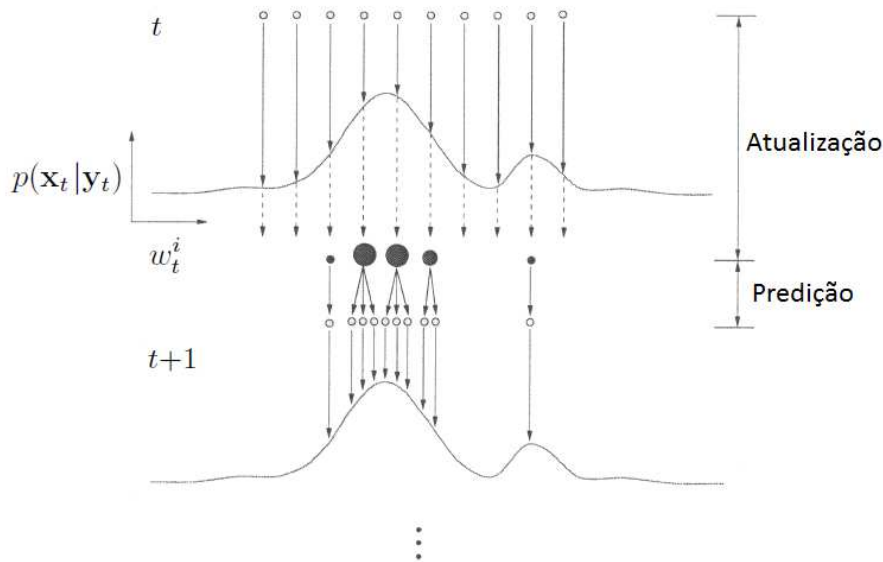


Figura 5.2: As partículas são propagadas cada uma com sua probabilidade  $w_t^i$ . O tamanho do círculo indica a probabilidade da partícula. Na reamostragem as partículas com maior probabilidade são “clonadas” e as com menor são eliminadas. Imagem retirada de (FREITAS et al., 2000)

### 5.3.2 Escolha da Proposta

A distribuição proposta  $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t})$  é o que, na maioria das vezes, diferencia as diferentes implementações do filtro de partícula. Nesta seção iremos apresentar

---

**Algoritmo 5.2** Reamostragem
 

---

- 1: **Entrada:**  $\left\{w_t^{(i)}, \widehat{\mathbf{x}}_t^{(i)}\right\}_{i=1}^{(M)}$
  - 2: **for**  $i = 1$  to  $M$  **do**  
     *Geramos um número aleatório uniformemente distribuído entre  $[0, 1]$*
  - 3:      $r \sim \mathcal{U}[0, 1]$
  - 4:      $k \leftarrow j$  tal que
 
$$\sum_{m=1}^{j-1} w_t^{(m)} < r \quad \text{mas} \quad \sum_{m=1}^j w_t^{(m)} \geq r$$
  - 5:      $\widehat{\mathbf{x}}_t^{(i)} \leftarrow \widehat{\mathbf{x}}_t^{(k)}$
  - 6:      $w_t^{(i)} \leftarrow \frac{1}{M}$
  - 7: **end for**
  - 8: **Retorna:**  $\left\{w_t^{(i)}, \widehat{\mathbf{x}}_t^{(i)}\right\}_{i=1}^{(M)}$
- 

duas propostas diferentes. A proposta clássica, que utiliza a equação de estados, e a proposta calculada utilizando o filtro de Kalman estendido. O filtro de partículas clássico apresentado por (GORDON; SALMOND; SMITH, 1993) conhecido como *bootstrap particle filter* assume que  $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ , *i.e.*, é dada pela probabilidade de transição de estado, que como apresentado em (3.4a), depende da função de transição do estado  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t)$  e da distribuição do ruído  $\boldsymbol{\omega}_t$ , *e.g.*, (3.4a). Assim, para  $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ , reescrevendo (5.23) em função da proposta  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$  temos

$$W_t^{(i)} \propto p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) w_{t-1}^{(i)}. \quad (5.27)$$

Está é a implementação mais simples do filtro de partículas. Porém, quando utilizamos  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$  como proposta para amostrar  $\mathbf{x}_t^{(i)}$  não estamos considerando a informação contida na medida mais recente do sistema  $\mathbf{y}_t$ , resultando em poucas partículas com pesos relativos significativos quando calculamos  $p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$ . Ou seja, as partículas irão degenerar rapidamente. Por este motivo se utiliza a reamostragem em todas as iterações do algoritmo. O *bootstrap particle filter* é apresentado no Algoritmo 5.3 para o modelo

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (5.28a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t) + \boldsymbol{\nu}_t. \quad (5.28b)$$

onde  $p_{\boldsymbol{\omega}}(\cdot)$  e  $p_{\boldsymbol{\nu}}(\cdot)$  são as pdfs dos ruídos  $\boldsymbol{\omega}_t$  e  $\boldsymbol{\nu}_t$ .

Uma maneira de diminuir a variância dos pesos relativos é escolhendo uma proposta para a distribuição alvo de forma a minimizar a variância dos pesos  $w_t^{(i)}$  condicionado à trajetória das partículas  $\mathbf{x}_{1:t-1}^{(i)}$  e às medidas  $\mathbf{y}_{1:t}$ . Podemos mostrar que a proposta de distribuição que minimiza tal variância dos pesos  $w_t^{(i)}$  é (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000)

$$q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t}) = p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t}) \quad (5.29)$$

onde explicitamente mostramos que a distribuição é condicionada a  $\mathbf{x}_{1:t-1}$  e  $\mathbf{y}_{1:t}$ . Na maioria dos casos, não é possível amostrar da distribuição ótima acima. Existem

---

**Algoritmo 5.3** Bootstrap particle filter
 

---

- Inicialização das partículas:**  $t = 0$
- 1:  $\{\mathbf{x}_0^{(i)}\}_{i=1}^M \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_0)$
  - 2:  $\{w_0^{(i)}\}_{i=1}^M \leftarrow \frac{1}{M}$
  - 3: **for**  $t = 1$  to  $T$  **do**  
*Amostrar segundo proposta*  $\mathbf{x}_t^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$
  - 4:  $\boldsymbol{\omega}_{t-1}^{(i)} \sim p_{\boldsymbol{\omega}}(\cdot)$
  - 5:  $\mathbf{x}_t^{(i)} \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}, t-1) + \boldsymbol{\omega}_{t-1}^{(i)}$   
*Cálculo dos pesos relativos*
  - 6:  $w_t^{(i)} \leftarrow p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) = p_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\mathbf{x}_t^{(i)}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}, t))$
  - 7:  $w_t^{(i)} \leftarrow \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^M w_t^{(j)}}$   
*Estimativa do estado*
  - 8:  $\hat{\mathbf{x}}_t^{PF} \leftarrow \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \mathbf{x}_t^{(i)}$   
*Reamostragem*
  - 9: **Algoritmo 5.2**
  - 10: **end for**
  - 11: **Retorna:**  $\{w_t^{(i)}, \mathbf{x}_t^{(i)}\}_{i=1}^M$  e  $\hat{\mathbf{x}}_t^{PF}$
- 

diferentes métodos na literatura para projetar propostas de distribuições “eficientes” para aproximar  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t})$ . Em particular, os estimadores de estado sub-ótimos como o Filtro de Kalman estendido ou o *unscented Kalman filter* são muito utilizados (MERWE et al., 2000), (ARULAMPALAM et al., 2002). Estes métodos aproximam localmente as pdfs  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$  e  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$  e assumem que os ruídos são Gaussianos.

O filtro de Kalman estendido, como o nome sugere, é uma extensão do filtro de Kalman (Teorema 5) para modelos não lineares como

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\omega}_t, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (5.30a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\nu}_t, \boldsymbol{\theta}, t). \quad (5.30b)$$

apresentados em (3.1b). As funções  $\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{h}(\cdot)$  são expandidas em série de Taylor no entorno da estimativa  $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$  respectivamente. A ideia então é aproximar a pdf  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  por distribuições Gaussianas tal que

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}).$$

Utilizando apenas os termos lineares da expansão, podemos mostrar que (SÄRKKÄ, 2013)

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}, \mathbf{u}_t, 0, \boldsymbol{\theta}, t)), \quad (5.31a)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1}, \quad (5.31b)$$

$$S_t = H_t P_{t|t-1} H_t^T + U_t R U_t^T, \quad (5.31c)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H_t^T S_t^{-1} H_t P_{t|t-1}, \quad (5.31d)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}, \mathbf{u}_t, 0, \boldsymbol{\theta}, t), \quad (5.31e)$$

$$P_{t+1|t} = F_t P_{t|t} F_t^T + G_t Q G_t^T, \quad (5.31f)$$

onde  $K_t$  é o ganho do filtro de Kalman,  $Q$  e  $R$  são as variâncias dos ruídos de estado e de saída, respectivamente, que assume-se serem Gaussianos com média zero;  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $U$  são as matrizes Jacobinas tal que

$$F_t = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_{t-1}=0} \quad (5.32)$$

$$G_t = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\omega}_t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \boldsymbol{\omega}_{t-1}=0} \quad (5.33)$$

$$H_t = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\cdot)}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \boldsymbol{\nu}_{t-1}=0} \quad (5.34)$$

$$U_t = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}_t} \right|_{\tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \boldsymbol{\nu}_{t-1}=0} \quad (5.35)$$

A vantagem de utilizar o filtro de Kalman estendido frente a outros métodos de estimação de estados para modelos não lineares como o filtro de partículas é a sua simplicidade. A linearização é uma forma muito comum de aproximar sistemas não lineares, porém a aproximação do comportamento do sistema por linearização local pode ser pouco precisa.

Por sua simplicidade de implementação, muitos filtros de partículas utilizam a aproximação da pdf  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  encontrada no filtro de Kalman estendido como uma proposta de distribuição  $q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t-1}, \mathbf{y}_{1:t})$ . Como esta aproximação é uma aproximação local da pdf  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  e agrega a informação da medida no instante de tempo  $t$ , ela é uma excelente aproximação para a proposta ótima (5.29). O Algoritmo 5.4 apresenta o algoritmo para o filtro de partículas onde a distribuição proposta é dada utilizando o filtro de Kalman estendido. Este filtro de partículas será chamado de *Extended Kalman Particle Filter* (EKPF).

## 5.4 Filtro de Partículas Marginalizado

Como apresentado anteriormente, o filtro de partículas fornece uma aproximação numérica para o problema da estimação de estados. Esta estimativa tende à solução ótima quando o número de partículas tende ao infinito (DOUCET; GODSILL; ANDRIEU, 2000), (Doucet, Arnaud Freitas, Nando de Gordon, 2001). Um problema inerente ao filtro de partículas é o seu custo computacional. Quanto maior a dimensão do estado, maior o número de partículas necessárias para a obtenção de uma boa estimativa do estado. Porém, para uma grande gama de problemas é possível particionar o modelo em uma parte linear e uma parte não linear. Assim, na parte do modelo com dinâmica linear utilizamos o filtro de Kalman para encontrar a solução ótima do problema, enquanto o filtro de partículas é utilizado na partição com dinâmica não linear. Esta é a ideia do filtro de partículas marginalizado, ou ainda *Rao-Blackwellised particle filter* apresentado por (DOUCET et al., 2000) e (SCHÖN; GUSTAFSSON; NORDLUND, 2005).

A ideia básica do filtro de partículas marginalizado é particionar a equação de estado do modelo em parte linear e parte não linear (SCHÖN; GUSTAFSSON;

NORDLUND, 2005)

$$\mathbf{x}_{t+1}^n = \mathbf{f}_t^n(\mathbf{x}_t^n) + A_t^n(\mathbf{x}_t^n)\mathbf{x}_t^l + G_t^n(\mathbf{x}_t^n)\boldsymbol{\omega}_t^n \quad (5.36a)$$

$$\mathbf{x}_{t+1}^l = \mathbf{f}_t^l(\mathbf{x}_t^n) + A_t^l(\mathbf{x}_t^n)\mathbf{x}_t^l + G_t^l(\mathbf{x}_t^n)\boldsymbol{\omega}_t^l \quad (5.36b)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^n) + C_t(\mathbf{x}_t^n)\mathbf{x}_t^l + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (5.36c)$$

onde

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^l \\ \mathbf{x}_t^n \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$\mathbf{x}_t^l$  são as componentes do estado que apresentam dinâmica linear e  $\mathbf{x}_t^n$  são as componentes do estado com dinâmica não linear. Assumimos que o ruído do estado e o ruído da saída são ruídos brancos Gaussianos

$$\boldsymbol{\omega}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_t^l \\ \boldsymbol{\omega}_t^n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q), \quad Q = \begin{bmatrix} Q^l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q^n \end{bmatrix},$$

e

$$\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, R).$$

E ainda,  $\mathbf{x}_0^l \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0^l, \bar{P}_0)$ , e  $\mathbf{x}_0^n$  pode ser arbitrário. Vale ressaltar que a notação  $A_t^n(\mathbf{x}_t^n)$  em (5.36) significa que a matriz depende da variável  $\mathbf{x}_t^n$  explicitamente. Para simplificar a notação iremos utilizar  $A_t^n$  ao invés de  $A_t^n(\mathbf{x}_t^n)$ .

Um exemplo de modelo que pode ser escrito desta maneira são os modelos afins por partes como o (3.10) dado por

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} \Phi^\top \mathbf{x}_t \\ f(\eta_t) + \boldsymbol{\phi}^\top \mathbf{z}_t \\ F \mathbf{x}_t \end{bmatrix} + B \mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (5.38a)$$

$$\mathbf{y}_t = C \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (5.38b)$$

Neste caso temos que  $\mathbf{x}_t^n = \eta_t$ ,  $\mathbf{x}_t^l = \mathbf{z}_t$ ,  $\mathbf{f}_t^n = [\Phi^\top]_1$ ,  $A_t^n = [\Phi^\top]_{2:n_x}$ ,  $\mathbf{f}_t^l = [f(\eta_t) \quad [F]_{(1:n_x-2,1)}^\top]^\top$  e  $A_t^l = [\boldsymbol{\phi}^\top \quad [F]_{(1:n_x-2,2:n_x)}]^\top$ , onde a  $[F]_{(1:i,1:j)}$  significa a submatriz de  $F$  formada pelas linhas 1 até a  $i$ -ésima linha de  $F$  e pelas colunas 1 até a  $j$ -ésima coluna de  $F$ .

Analogamente ao que foi feito para derivar a distribuição do estimador de estado para o modelo não linear (3.2), é possível mostrar que para o modelo (5.37) a distribuição *a posteriori*  $p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  pode ser escrita como (SCHÖN; GUSTAFSSON; NORDLUND, 2005)

$$p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = p_\theta(\mathbf{x}_t^l, \mathbf{x}_{1:t}^n | \mathbf{y}_{1:t}) \quad (5.39)$$

$$= p_\theta(\mathbf{x}_t^l | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t}) p_\theta(\mathbf{x}_{1:t}^n | \mathbf{y}_{1:t}), \quad (5.40)$$

onde  $p_\theta(\mathbf{x}_t^l | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t})$  é obtida de forma analítica através do filtro de Kalman com

$$p_\theta(\mathbf{x}_t^l | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^l; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^l, P_{t|t}) \quad (5.41a)$$

$$p_\theta(\mathbf{x}_{t+1}^l | \mathbf{x}_{t+1}^n, \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}^l; \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^l, P_{t+1|t}), \quad (5.41b)$$

onde

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^l = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^l + K_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^n) - C_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^l) \quad (5.42a)$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t S_t K_t^\top \quad (5.42b)$$

$$S_t = C_t P_{t|t-1} C_t^\top + R \quad (5.42c)$$

$$K_t = P_{t|t-1} C_t^\top S_t^{-1} \quad (5.42d)$$

e

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_{t+1}^n - \mathbf{f}_t^n(\mathbf{x}_t^n) \quad (5.43a)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^l = A_t^l \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^l + \mathbf{f}_t^l(\mathbf{x}_t^n) + L_t(\mathbf{z}_t - A_t^n \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^l) \quad (5.43b)$$

$$P_{t+1|t} = A_t^l P_{t+1|t} [A_t^l]^\top + G_t^l Q_t^l [G_t^l]^\top - L_t N_t L_t^\top \quad (5.43c)$$

$$N_t = A_t^n P_{t|t} [A_t^n]^\top + G_t^n Q_t^n [G_t^n]^\top \quad (5.43d)$$

$$L_t = A_t^l P_{t|t} [A_t^n]^\top N_t^{-1}, \quad (5.43e)$$

$$p_\theta(\mathbf{x}_{1:t}^n | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t-1}) p_\theta(\mathbf{x}_t^n | \mathbf{x}_{1:t-1}^n, \mathbf{y}_{1:t-1})}{p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})} p(\mathbf{x}_{1:t-1}^n | \mathbf{y}_{1:t-1}),$$

onde

$$p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t^n) + C_t \widehat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^l, C_t P_{t|t-1} C_t^\top + R) \quad (5.44a)$$

$$p_\theta(\mathbf{x}_{t+1}^n | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}^n; \mathbf{f}_t^n(\mathbf{x}_t^n) + A_t^n \widehat{\mathbf{x}}_{t|t}^l, A_t^n P_{t|t} [A_t^n]^\top + G_t^n Q_t^n [G_t^n]^\top). \quad (5.44b)$$

A proposta de distribuição para o filtro de partículas marginalizado será

$$q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t}^n, Y_t) = p_\theta(\mathbf{x}_t^n | \mathbf{x}_{1:t}^n, Y_t).$$

Pode-se mostrar que se utilizarmos o mesmo número de partículas no filtro de partículas convencional e no filtro de partículas marginalizado, o marginalizado irá resultar em estimativas com menor variância (DOUCET; GORDON; KROSHNA-MURTHY, 2001), principalmente para sistemas com dimensão elevadas (DOUCET et al., 2000). O custo computacional também é reduzido, já que a dimensão da pdf  $p(\mathbf{x}_t^n | \mathbf{y}_{1:t})$  será menor que a dimensão do problema completo  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  (SCHÖN; GUSTAFSSON; NORDLUND, 2005). Este método vem sendo amplamente utilizado para a estimação de estados em sistema de dimensão elevada como em sistemas de navegação e rastreamento como os apresentados em (SCHÖN; GUSTAFSSON; NORDLUND, 2005) e (OZKAN et al., 2013). O algoritmo 5.5 apresenta uma implementação do filtro de partículas marginalizado (MPF).

## 5.5 Considerações Finais

Neste capítulo apresentamos três implementações do filtro de partículas. Iremos utilizar o *bootstrap particle filter* e o filtro de partículas marginalizado como referência para avaliar o estimador de estado proposto neste trabalho, visto que quando o número de partículas tende a infinito o filtro de partículas obtém a solução ótima para o problema de estimação de estados. No próximo capítulo será apresentado o estimador de estado proposto para a estimação de estados para modelos PWASS como (3.9).

---

**Algoritmo 5.4** Extended Kalman Particle Filter - EKPF
 

---

**Inicialização das partículas:**  $t = 0$

$$1: \left\{ \mathbf{x}_0^{(i)} \right\}_{i=1}^M \sim p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_0)$$

$$2: \left\{ w_0^{(i)} \right\}_{i=1}^M \leftarrow \frac{1}{M}$$

3: **for**  $t = 1$  to  $T$  **do**

*Calcular as matrizes Jacobianas*

$$4: F_t^{(i)} \leftarrow \frac{\delta \mathbf{f}(\cdot)}{\delta \mathbf{x}_t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\omega}_t=0}$$

$$5: G_t^{(i)} \leftarrow \frac{\delta \mathbf{f}(\cdot)}{\delta \boldsymbol{\omega}_t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\omega}_t=0}$$

$$6: H_t^{(i)} \leftarrow \frac{\delta \mathbf{h}(\cdot)}{\delta \mathbf{x}_t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\nu}_t=0}$$

$$7: U_t^{(i)} \leftarrow \frac{\delta \mathbf{h}(\cdot)}{\delta \boldsymbol{\nu}_t} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\nu}_t=0}$$

*Atualização das partículas com o filtro de Kalman estendido*

$$8: \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} \leftarrow \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{t-1}, 0, \boldsymbol{\theta}, t-1)$$

$$9: P_{t|t-1}^{(i)} \leftarrow F_t^{(i)} P_{t-1|t-1}^{(i)} [F_t^{(i)}]^T + G_t^{(i)} Q [G_t^{(i)}]^T$$

$$10: K_t^{(i)} \leftarrow P_{t|t-1}^{(i)} [H_t^{(i)}]^T [S_t^{(i)}]^{-1}$$

$$11: S_t^{(i)} \leftarrow H_t^{(i)} P_{t|t-1}^{(i)} [H_t^{(i)}]^T + U_t^{(i)} R [U_t^{(i)}]^T$$

$$12: \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)} + K_t^{(i)} (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{(i)}, \mathbf{u}_t, 0, \boldsymbol{\theta}, t))$$

$$13: P_{t|t}^{(i)} \leftarrow P_{t|t-1}^{(i)} - P_{t|t-1}^{(i)} [H_t^{(i)}]^T [S_t^{(i)}]^{-1} H_t^{(i)} P_{t|t-1}^{(i)}$$

*Amostrar da proposta*

$$14: \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} \sim q(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}, P_{t|t}^{(i)})$$

*Cálculo dos pesos relativos*

$$15: w_t^{(i)} \leftarrow \frac{p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t | \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}) p_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} | \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)})}{q(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} | \mathbf{y}_{1:t})}$$

$$16: w_t^{(i)} \leftarrow \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^M w_t^{(j)}}$$

*Estimativa do estado*

$$17: \hat{\mathbf{x}}_t^{EKPF} \leftarrow \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)}$$

*Reamostragem*

18: **Algoritmo 5.2**

19: **end for**

20: **Retorna:**  $\left\{ w_t^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(i)} \right\}_{i=1}^M$  e  $\hat{\mathbf{x}}_t^{EKPF}$

---



---

**Algoritmo 5.5** Filtro de partículas marginalizado (MPF)
 

---

**Inicialização das partículas:**  $t = 0$

$$1: \left\{ \mathbf{x}_0^{n,(i)} \right\}_{i=1}^M \sim p_{\theta}(\mathbf{x}_0^n)$$

$$2: \left\{ w_0^{(i)} \right\}_{i=1}^M \leftarrow \frac{1}{M}$$

$$3: \left\{ \mathbf{x}_0^{l,(i)} \right\}_{i=1}^M = \bar{\mathbf{x}}_0$$

4: **for**  $t = 1$  to  $T$  **do**

*Cálculo dos pesos relativos*

$$5: w_t^{(i)} \leftarrow \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t-1}) p(\mathbf{x}_t^n | \mathbf{x}_{1:t-1}^n, \mathbf{y}_{1:t-1})}{q(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{1:t}^n, \mathbf{y}_{1:t})} w_{t-1}^{(i)}$$

$$6: w_t^{(i)} \leftarrow \frac{w_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^M w_t^{(j)}}$$

*Estimativa do estado – Partição não linear*

$$7: \hat{\mathbf{x}}_t^{n,MPF} \leftarrow \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{n,(i)}$$

*Reamostragem*

8: **Algoritmo 5.2**

*Filtro de Kalman – Atualização*

$$9: S_t \leftarrow C_t P_{t|t-1} C_t^T + R$$

$$10: K_t \leftarrow P_{t|t-1} C_t^T S_t^{-1}$$

$$11: \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{l,(i)} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^l + K_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t|t-1}^{n,(i)}) - C_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^{l,(i)})$$

$$12: P_{t|t} \leftarrow P_{t|t-1} - K_t S_t K_t^T$$

*Estimativa do estado – Partição linear*

$$13: \hat{\mathbf{x}}_t^{l,MPF} \leftarrow \sum_{i=1}^M w_t^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{l,(i)}$$

*Amostrar da proposta*

$$14: \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{n,(i)} \sim p(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^n | \mathbf{x}_{1:t}^{n,(i)}, \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{f}_t^n(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{n,(i)}) + A_t^n \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^l, A_t^n P_{t|t} [A_t^n]^T + G_t^n Q_t^n [G_t^n]^T)$$

*Filtro de Kalman – Predição*

$$15: N_t \leftarrow A_t^n P_{t|t} [A_t^n]^T + G_t^n Q_t^n [G_t^n]^T$$

$$16: L_t \leftarrow A_t^l P_{t|t} [A_t^n]^T N_t^{-1}$$

$$17: \mathbf{z}_t^{(i)} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{n,(i)} - \mathbf{f}_t^n(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{n,(i)})$$

$$18: \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t}^{l,(i)} \leftarrow A_t^l \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{l,(i)} + \mathbf{f}_t^l(\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{n,(i)}) + L_t (\mathbf{z}_t^{(i)} - A_t^n \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{l,(i)})$$

$$19: P_{t+1|t} \leftarrow A_t^l P_{t+1|t} [A_t^l]^T + G_t^l Q_t^l [G_t^l]^T - L_t N_t L_t^T$$

20: **end for**

$$21: \mathbf{Retorna:} \hat{\mathbf{x}}_t^{MPF} = [\hat{\mathbf{x}}_t^{n,MPF}, \hat{\mathbf{x}}_t^{l,MPF}]$$


---

## 6 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS DE MODELOS AFINS POR PARTES

Neste capítulo propomos um estimador de estado recursivo para os modelos afins por partes como (3.10) dado por

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathcal{F}(\mathbf{x}_t) + B\mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (6.1b)$$

onde

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}_t) = \begin{bmatrix} \overbrace{\Phi^\top}^{A_i} \\ [a_i \ \phi^\top] \\ F \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{0}}^{\mathbf{b}_i} \\ b_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$= A_i \mathbf{x}_t + \mathbf{b}_i, \quad (6.3)$$

$\mathbf{x}_t = [\eta_t, \zeta_t, \boldsymbol{\chi}_t^\top]^\top$ ,  $p_\theta(\mathbf{x}_0) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0)$ . Para uma dada região  $\mathcal{R}_i = \{\mathbf{x}_t : l_i < \eta_t \leq l_{i+1}\}$  temos o seguinte submodelo de (6.1)

$$\mathbf{x}_{t+1} = A_i \mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (6.4a)$$

$$\mathbf{y}_t = C\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t. \quad (6.4b)$$

O objetivo do problema de estimação de estado é encontrar a pdf *a posteriori*  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  de forma recursiva. Como veremos, a solução exata deste problema é a soma de distribuições Gaussianas truncadas, onde o quantidade de componentes cresce exponencialmente com o tempo. O modelo 6.1 é não linear, porém condicionado a uma região, *i.e.*, para uma dada região, ele se torna afim (6.4). Deste modo, uma alternativa simples seria utilizar o filtro de Kalman estendido para estimar o estado localmente, ou seja, para cada submodelo. Porém, quando utilizamos o filtro de Kalman nestes modelos, a função afim é aproximada por uma única reta, como mostrado na Figura 6.1. Isto se torna um problema quando o estado está próximo aos limites das regiões, ou ainda, o ruído do estado é alto quando comparado ao tamanho das regiões que formam a função, isto é, a incerteza na posição do estado é maior ou da mesma ordem de magnitude do domínio de cada submodelo. Propomos um algoritmo que utiliza o filtro de Kalman para cada região, evitando o problema da linearização. No estimador proposto, utilizamos a distribuição cumulativa para calcular a distribuição *a posteriori* do estado, assim como a probabilidade do estado estar em cada região (área sombreada em Fig. 6.1).

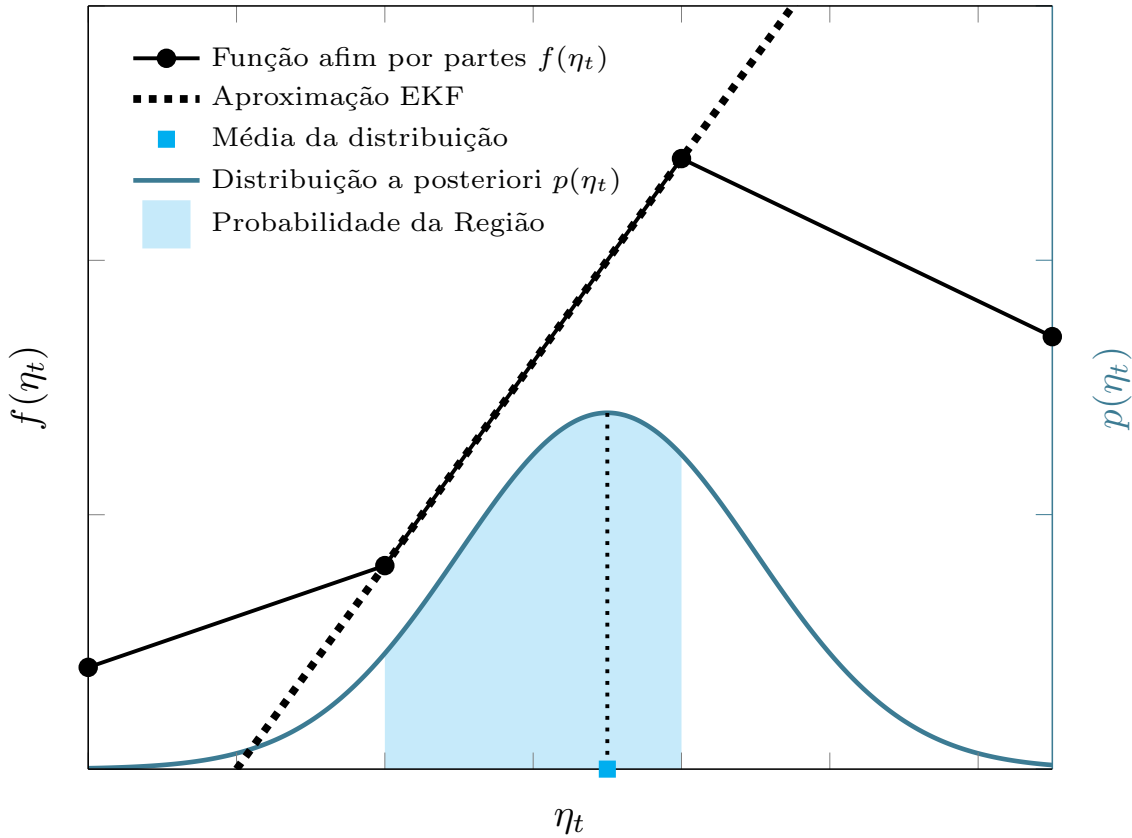


Figura 6.1: A função afim  $f(\eta_t)$  é localmente aproximada por uma reta (linha pontilhada) na região definida pela média da distribuição. A área sombreada representa a probabilidade do estado estar em uma certa região do domínio da função.

## 6.1 Algoritmo Proposto

Primeiramente assumimos que no instante de tempo  $t$  a seguinte função distribuição de  $\mathbf{x}_t$  está disponível

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}), \quad (6.5)$$

ou seja, é Gaussiana com média  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  e covariância  $P_{t|t}$ . O objetivo é propagar  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  de forma a encontrar  $p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t+1})$ . Podemos reescrever (6.5) utilizando a função indicadora como

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}), \quad (6.6)$$

onde  $N_r$  é o número de regiões e,

$$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathcal{A}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Após obtida a medida  $\mathbf{y}_{t+1}$ , queremos propagar  $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$  de forma a encontrar a pdf  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$ . Para isso, partimos da distribuição conjunta

$$p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t})p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (6.8)$$

$$= p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (6.9)$$

$$= p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t})p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (6.10)$$

$$= p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}). \quad (6.11)$$

Utilizando (6.1), a função densidade de transição de estado  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t)$  e a função *likelihood* de saída  $p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1})$  podem ser escritas como

$$p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A_i\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i, Q), \quad (6.12a)$$

$$p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_{t+1}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; C\mathbf{x}_{t+1}, R). \quad (6.12b)$$

Vale observar que (6.12a) é condicionada à região  $i$  que o estado se encontra. Deste modo, utilizando (6.12) e (6.6) podemos reescrever (6.11) como

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) &= \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A_i\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i, Q) \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; C\mathbf{x}_{t+1}, R). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Expandindo as funções  $\mathcal{N}(\cdot)$  encontramos a seguinte forma matricial para (6.13)

$$p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top, \mathbf{y}_{t+1}^\top]^\top; \boldsymbol{\mu}_{t,i}, \Sigma_{t,i}), \quad (6.14)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu}_{t,i} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{1i} \\ \boldsymbol{\mu}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \\ \frac{A_i\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i}{CA_i\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + C(B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i)} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

e

$$\Sigma_{t,i} \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{11i} & \Sigma_{12i} \\ \Sigma_{21i} & \Sigma_{22i} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$= \begin{bmatrix} P_{t|t} & P_{t|t}A_i^\top & (P_{t|t}A_i^\top)C^\top \\ A_iP_{t|t} & A_iP_{t|t}A_i^\top + Q & (A_iP_{t|t}A_i^\top + Q)^\top C^\top \\ C(A_iP_{t|t}) & C(A_iP_{t|t}A_i^\top + Q) & C(A_iP_{t|t}A_i^\top + Q)C^\top + R \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Utilizando o Teorema de Bayes (Teorema 4) em (6.14)

$$p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t})p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (6.18)$$

$$= p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) \quad (6.19)$$

ou seja, a distribuição condicional de probabilidades de  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t+1}$  dado  $\mathbf{y}_{t+1}$  será

$$p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1}) = \frac{p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})}{p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})} \quad (6.20)$$

$$= \frac{p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})}{Z_t} \quad (6.21)$$

$$= \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top, \mathbf{y}_{t+1}^\top]^\top; \boldsymbol{\mu}_{t,i}, \Sigma_{t,i}), \quad (6.22)$$

---

**Algoritmo 6.1** Moment Matching
 

---

- 1: **Entrada:**  $w_i, \boldsymbol{\mu}_i, P_i$
  - 2:  $\bar{\boldsymbol{\mu}} \leftarrow \sum_{i=1}^N w_i \boldsymbol{\mu}_i$
  - 3:  $\bar{P} \leftarrow \sum_{i=1}^N w_i (P_i + (\boldsymbol{\mu}_i - \bar{\boldsymbol{\mu}})(\boldsymbol{\mu}_i - \bar{\boldsymbol{\mu}})^\top)$
  - 4: **Retorna:**  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  e  $\bar{P}$
- 

onde  $Z_t \triangleq p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})$  é a constante de normalização. Utilizando o Lema 4.1 em (6.14) e substituindo em (6.22) temos

$$p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1}) = \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top, \mathbf{y}_{t+1}^\top]^\top; \boldsymbol{\mu}_{t,i}, \Sigma_{t,i}) \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{N_r} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \overbrace{\mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i})}^{p(\mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{1:t})} \overbrace{\mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i, \tilde{\Sigma}_i)}^{p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t})}, \quad (6.24)$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i} \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{2i} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}_{1i} + \Sigma_{21i}^\top \Sigma_{22i}^{-1} (\mathbf{y}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}_{2i}), \quad (6.25)$$

$$\tilde{\Sigma}_i \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11i} & \tilde{\Sigma}_{12i} \\ \tilde{\Sigma}_{21i} & \tilde{\Sigma}_{22i} \end{bmatrix} = \Sigma_{11i} - \Sigma_{21i}^\top \Sigma_{22i}^{-1} \Sigma_{21i}. \quad (6.26)$$

A distribuição do estimador de estado  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  pode ser encontrada marginalizando  $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  em  $\mathbf{x}_t$ , *i.e.*, através da integral

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1}) &= \frac{1}{Z_t} \int p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{y}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (6.27) \\ &= \frac{1}{Z_t} \sum_{i=1}^{N_r} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \int_{\mathcal{R}_i} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i, \tilde{\Sigma}_i) d\mathbf{x}_t. \end{aligned} \quad (6.28)$$

A integral em (6.28) é uma “doubly truncated multivariate normal distribution” (DTMND), ou seja, uma distribuição normal multivariável, onde uma das componentes é truncada em ambos os lados. Deste modo  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  é a soma de DTMNDs, *i.e.*, uma *mixture* de DTMNDs. A Figura 6.2 apresenta a pdf  $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  para o caso unidimensional, onde a distribuição é truncada na origem. Neste caso a pdf  $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  é composta por duas DTMND, representadas pelas superfícies em laranja (região 1) e verde (região 2). As linhas tracejadas na projeção são os dois termos que formam a soma em (6.28). A curva em preto é a soma destes termos, ou seja, é a pdf  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  exata.

De forma a obter um algoritmo recursivo, iremos aproximar (6.28) por uma distribuição normal de média  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$  e covariância  $P_{t+1|t+1}$ . Como mostrado acima, a distribuição *a posteriori* (6.28) é uma *mixture* de DTMNDs. A média e covariância de uma *mixture distribution* pode ser calculada utilizando a média e covariância das componentes que a formam utilizando o método de *moment matching* (RUNNALLS, 2007). O Algoritmo 6.1 apresenta como calcular a média  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  e covariância  $\bar{P}$  de uma *mixture distribution* definida por

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_i, P_i), \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

a partir da média  $\boldsymbol{\mu}_i$  e covariância  $P_i$  de cada componente que formam a distribuição. No caso de modelos PWASS temos

$$w_i \propto \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}), \quad i = 1, \dots, N_r.$$

Assim, o problema se resume em calcular a média  $E[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}]$  e covariância  $\mathbb{V}[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}]$  da DTMND (RUI et al., 2016). Para a região  $i$ , temos que a média  $E[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}]$  e a covariância  $\mathbb{V}[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}]$  da DTMND em (6.28) serão

$$E[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] = \iint_{\mathcal{R}_i} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) [\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i, \tilde{\Sigma}_i) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t+1} \quad (6.29)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] &= \iint_{\mathcal{R}_i} \mathbf{1}_{\mathcal{R}_i}(\mathbf{x}_t) \left( [\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top - E[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] \right) \left( [\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top - E[\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}] \right)^\top \\ &\quad \times \mathcal{N}([\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{x}_{t+1}^\top]^\top; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i, \tilde{\Sigma}_i) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t+1} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Na Figura 6.2, a curva em azul apresenta a aproximação da pdf  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$  utilizando Moment Matching. Propomos uma maneira alternativa para calcular analiticamente (6.29) e (6.30) para cada uma das DTMND que formam a pdf  $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$ .

**Lema 6.1.** *Média e Covariância de uma DTMND.*

*Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  uma variável aleatória cuja pdf é*

$$p(\mathbf{x}) \propto \mathcal{N}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) \cdot \mathbf{1}_{[l_1, l_2]}([\mathbf{x}]_1), \quad (6.31)$$

onde  $\mathbf{1}_{[l_1, l_2]}$  é a função indicadora,  $[\mathbf{x}]_1$  é a primeira componente do vetor  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz quadrada definida positiva, e  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  são os limites da DTMND (6.31). Além disso, seja  $\Lambda$  a matriz triangular inferior tal que  $\Sigma = \Lambda \Lambda^\top$  e cuja diagonal é estritamente positiva<sup>1</sup>.

Então, o valor esperado e a covariância de  $\mathbf{x}$  são

$$E[\mathbf{x}] = \Lambda \begin{bmatrix} m^* \\ \mathbf{0}_{n-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\mu} \quad (6.32)$$

$$\mathbb{V}[\mathbf{x}] = \Lambda \begin{bmatrix} s^* & \mathbf{0}_{n-1}^\top \\ \mathbf{0}_{n-1} & I_{n-1} \end{bmatrix} \Lambda^\top \quad (6.33)$$

onde

$$m^* = \frac{\mathcal{N}(\lambda_1; 0, 1) - \mathcal{N}(\lambda_2; 0, 1)}{\mathcal{Z}}, \quad (6.34)$$

$$s^* = 1 + \frac{\lambda_1 \mathcal{N}(\lambda_1; 0, 1) - \lambda_2 \mathcal{N}(\lambda_2; 0, 1)}{\mathcal{Z}} - (m^*)^2, \quad (6.35)$$

$$\lambda_1 = \frac{l_1 - [\boldsymbol{\mu}]_1}{[\Lambda]_{(1,1)}}, \quad (6.36)$$

$$\lambda_2 = \frac{l_2 - [\boldsymbol{\mu}]_1}{[\Lambda]_{(1,1)}}, \quad (6.37)$$

$$\mathcal{Z} = \text{erf}\left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.38)$$

<sup>1</sup>Este tipo de matriz pode ser obtida utilizando a decomposição de Cholesky (BJÖRCK, 1996, Ch. 2.2.2)

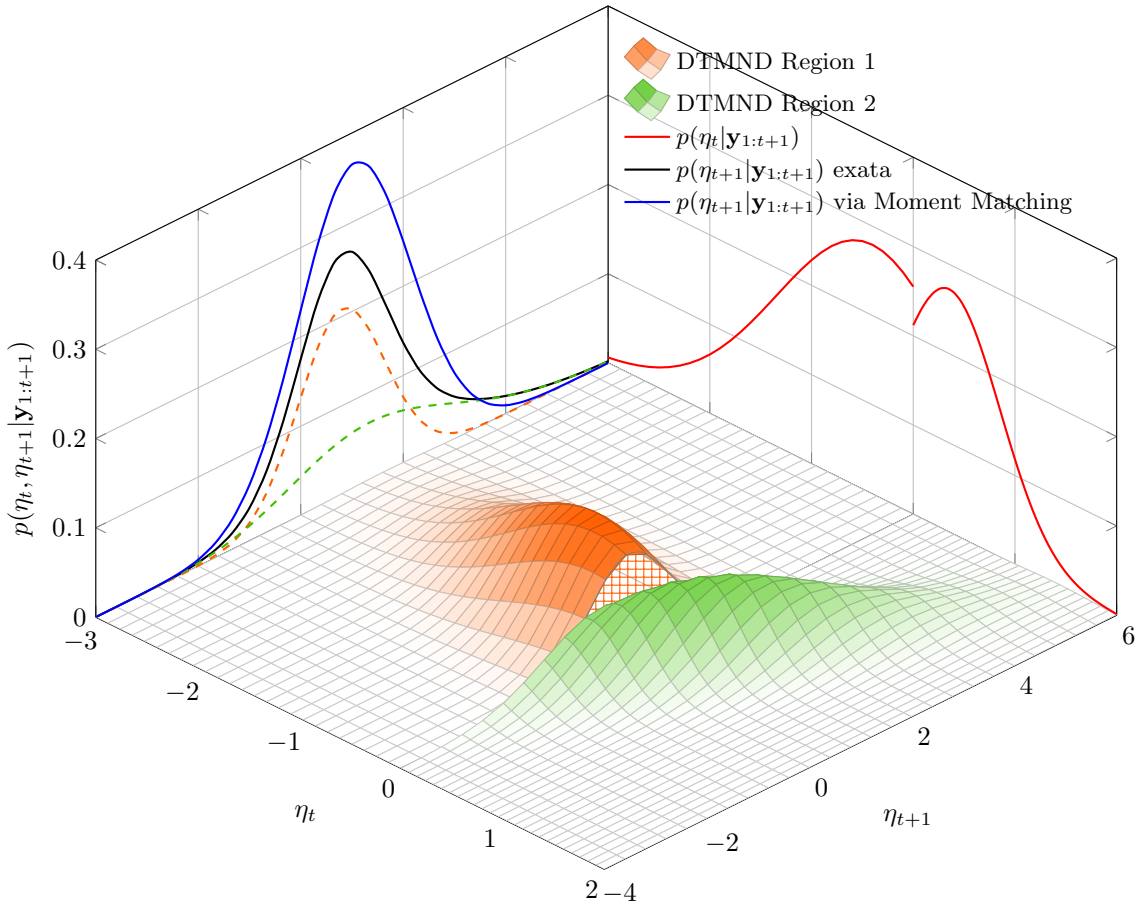


Figura 6.2: Doubly truncated multivariate normal distributions (DTMND).

onde  $\text{erf}(\cdot)$  é a função erro

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

**Prova.** Seja  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  uma DTMND com pdf

$$p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) \propto \mathcal{N}(\mathbf{y}; \mathbf{0}, I_n) \cdot \mathbf{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]}([\mathbf{y}]_1),$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade. As componentes de  $\mathbf{y}$  são independentes, então a média e covariância de  $\mathbf{y}$  são obtidas utilizando as fórmulas padrão de uma distribuição normal truncada

([JOHNSON; KOTZ; BALAKRISHNAN, 1994, Ch. 10.1](#))

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} m^* \\ \mathbf{0}_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

$$\mathbb{V}[\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} s^* & \mathbf{0}_{n-1}^T \\ \mathbf{0}_{n-1} & I_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

onde  $m^*$  e  $s^*$  foram definidos em (6.34) e (6.35), respectivamente. Consideremos agora,  $\mathbf{z} = \Lambda \mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}$ . A pdf de  $\mathbf{z}$  será ([PAPOULIS; PILLAI, 2002](#))

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = p_{\mathbf{y}}(\Lambda^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})) \cdot \det\left(\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{z}}\right). \quad (6.41)$$

Como  $\Lambda$  é triangular inferior,

$$[\Lambda^{-1}]_{1,1:n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{[\Lambda]_{(1,1)}} & \mathbf{0}_{n-1}^\top \end{bmatrix},$$

assim

$$[\mathbf{y}]_1 = \frac{[\mathbf{z}]_1 - [\boldsymbol{\mu}]_1}{[\Lambda]_{(1,1)}}.$$

Reescrevendo (6.43),

$$p_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \propto \mathcal{N}(\Lambda^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}); \mathbf{0}, I) \cdot \mathbf{1}_{[\lambda_1, \lambda_2]} \left( \frac{[\mathbf{z}]_1 - [\boldsymbol{\mu}]_1}{[\Lambda]_{(1,1)}} \right) \cdot \det(\Lambda)^{-1} \quad (6.42)$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) \cdot \mathbf{1}_{[l_1, l_2]}([\mathbf{z}]_1), \quad (6.43)$$

onde utilizamos o fato que  $\Lambda \Lambda^\top = \Sigma$ ,  $l_i = [\Lambda]_{(1,1)} \lambda_i + [\boldsymbol{\mu}]_1$  para  $k \in \{1, 2\}$  e  $[\Lambda]_{(1,1)}$  é positivo. De (6.43) podemos dizer que  $\mathbf{z}$  tem a mesma distribuição que  $\mathbf{x}$ , então o valor esperado e a covariância de  $\mathbf{x}$  são

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\mathbf{z}] = \Lambda \mathbb{E}[\mathbf{y}] + \boldsymbol{\mu} \quad (6.44)$$

$$\mathbb{V}[\mathbf{x}] = \mathbb{V}[\mathbf{z}] = \Lambda \mathbb{V}[\mathbf{y}] \Lambda^\top. \quad (6.45)$$

Substituindo (6.39) e (6.40) em (6.44) e (6.45), respectivamente, encontramos (6.32) e (6.33).

•

O Lema 6.1 fornece uma maneira de calcular a média e covariância de cada termo da distribuição (6.28). Então, utilizando o Algoritmo 6.1 podemos calcular a média e covariância da *mixture distribution*, onde os pesos que ponderam cada elemento da distribuição são

$$w_i = \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}), \quad i = 1, \dots, N_r$$

e ainda, podemos calcular  $\Pr(\mathbf{x}_t \in \mathcal{R}_i | \mathbf{y}_{1:t+1})$  para  $i = 1 \dots N_r$  assim como a constante  $Z_t$  através da integral de  $p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t+1})$

$$\begin{aligned} \Pr(\mathbf{x}_t \in \mathcal{R}_i | \mathbf{y}_{1:t+1}) &= \frac{1}{Z_t} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \int_{\mathcal{R}_i} p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t+1}) \, d\mathbf{x}_t \, d\mathbf{x}_{t+1} \\ &= \frac{1}{Z_t} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \int_{\mathcal{R}_i} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}, \tilde{\Sigma}_{11i}) \, d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$= \frac{1}{Z_t} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \int_{l_i < \eta_t \leq l_{i+1}} \mathcal{N}(\eta_t; [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}, [\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}) \, d\eta_t \quad (6.47)$$

$$= \frac{1}{Z_t} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \left( \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{l_{i+1} - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{l_i - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right) \right), \quad (6.48)$$



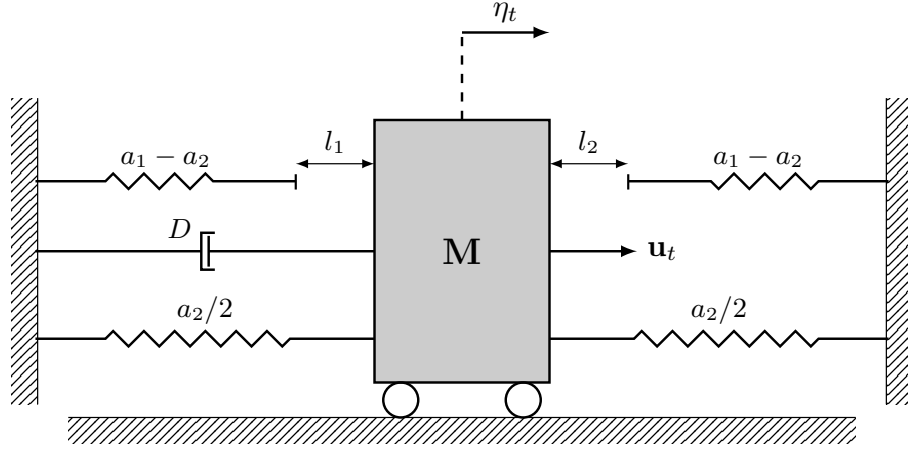


Figura 6.3: Modelo de um sistema massa mola com um grau de liberdade.

onde  $\text{erf}(\cdot)$  é a função erro,  $[\Sigma]_{(i,j)}$  é o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\Sigma$ , e

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_r} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \int_{\mathcal{R}_i} p(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t+1}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t+1} \quad (6.49)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_r} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \left( \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{l_{i+1} - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right) - \frac{1}{2} \text{erf} \left( \frac{l_i - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right) \right). \quad (6.50)$$

A probabilidade  $\Pr(\mathbf{x}_t \in \mathcal{R}_i | \mathbf{y}_{1:t+1})$  representa a probabilidade que o estado esteja na região  $\mathcal{R}_i$  no tempo  $t$  dada toda informação disponível até o tempo  $t+1$ . A Figura 6.1 apresenta a probabilidade do estado estar na segunda região de um modelo afim por partes particionado por três regiões. O filtro proposto será chamado de PAKF (*Piecewise Affine Kalman Filter*). O algoritmo 6.2 apresenta uma iteração do algoritmo proposto.

## 6.2 Exemplos Ilustrativos

Para avaliar o estimador de estado proposto foram realizadas simulações, onde comparamos o PAKF ao filtro de Kalman estendido EKF, filtro de partículas bootstrap (PF – Algoritmo 5.3) e o filtro de partículas marginalizado (MPF – Algoritmo 5.5). No estimador utilizando o filtro de Kalman estendido utilizamos as expressões do filtro de Kalman, linhas 3-9 do Algoritmo 6.2, onde estas são utilizadas apenas para a região em que  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  se encontra, ou seja, aproximação local do modelo. Os filtros de partículas são utilizados para encontrar a solução “ótima” do problema de estimação, visto que quando o número de partículas tende a infinito a solução encontrada utilizando este método tende a solução ótima. Todas as simulações foram realizadas utilizando o MATLAB em um notebook Core i7 3.2GHz com 8GB de memória RAM.

O modelo utilizado para avaliar o estimador proposto é o modelo não linear para vibrações causadas por folgas. Este problema pode ser modelado por um sistema massa-mola com um grau de liberdade, onde a constante elástica da mola é modelada por uma função afim por partes (MAHFOUZ; BADRAKHAN, 1990). A Figura 6.3

---

**Algoritmo 6.2** Um passo do estimador de estado proposto para modelos afins por partes.

---

1: **Entrada:**  $A_i, \mathbf{b}_i, l_i, i = 1 \dots, N_r, B, C, Q, R, \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_{t+1}, \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}$

2: **for**  $i = 1$  to  $N_r$  **do**

*Filtro de Kalman - predição*

3:  $\boldsymbol{\mu}_{1i} \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \\ A_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B \mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i \end{bmatrix}$   
 4:  $\boldsymbol{\mu}_{2i} \leftarrow C A_i \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + C(B \mathbf{u}_t + \mathbf{b}_i)$   
 5:  $\Sigma_{11i} \leftarrow \begin{bmatrix} P_{t|t} & P_{t|t} A_i^T \\ A_i P_{t|t} & A_i P_{t|t} A_i^T + Q \end{bmatrix}$   
 6:  $\Sigma_{22i} \leftarrow C(A_i P_{t|t} A_i^T + Q) C^T + R$   
 7:  $\Sigma_{21i} \leftarrow [C(A_i P_{t|t}) \quad C(A_i P_{t|t} A_i^T + Q)]$

*Filtro de Kalman - atualização*

8:  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i \leftarrow \boldsymbol{\mu}_{1i} + \Sigma_{21i}^T \Sigma_{22i}^{-1} (\mathbf{y}_{t+1} - \boldsymbol{\mu}_{2i})$   
 9:  $\tilde{\Sigma}_i \leftarrow \Sigma_{11i} - \Sigma_{21i}^T \Sigma_{22i}^{-1} \Sigma_{21i}$

*Calculando integral (6.48)*

10:  $w_i \leftarrow \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{l_{i+1} - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{l_i - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{1i}]_{(1,1)}}{\sqrt{2[\tilde{\Sigma}_{11i}]_{(1,1)}}} \right)$

11:  $w_i \leftarrow \mathcal{N}(\mathbf{y}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{2i}, \Sigma_{22i}) \times w_i$

*Média e covariância de um DTMND*

12:  $\Lambda \leftarrow \operatorname{chol}(\tilde{\Sigma}_i, 'lower')$

▷ (Decomposição de Cholesky)

13:  $\lambda_1 \leftarrow \frac{l_i - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i]_{(1,1)}}{[\Lambda]_{(1,1)}}$

14:  $\lambda_2 \leftarrow \frac{l_{i+1} - [\tilde{\boldsymbol{\mu}}_i]_{(1,1)}}{[\Lambda]_{(1,1)}}$

15:  $\mathcal{Z} \leftarrow \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \right)$

16:  $m_{i1} \leftarrow \frac{\mathcal{N}(\lambda_1, 0, 1) - \mathcal{N}(\lambda_2, 0, 1)}{\mathcal{Z}}$

17:  $s_{i1} \leftarrow 1 + \frac{\lambda_1 \mathcal{N}(\lambda_1, 0, 1) - \lambda_2 \mathcal{N}(\lambda_2, 0, 1)}{\mathcal{Z}} - (m_{i1})^2$

18:  $\mathbf{m}_i \leftarrow \Lambda \begin{bmatrix} m_{i1} \\ \mathbf{0}_{2n_x-1} \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i$

19:  $S_i \leftarrow \Lambda \begin{bmatrix} s_{i1} & \mathbf{0}_{2n_x-1}^T \\ \mathbf{0}_{2n_x-1} & I_{2n_x-1} \end{bmatrix} \Lambda^T$

20: **end for**

*Constante de normalização (6.50)*

21:  $Z_t \leftarrow \sum_{i=1}^{N_r} w_i$

22:  $w_i \leftarrow \frac{w_i}{Z_t}$

*Moment matching*

23:  $\hat{\mathbf{m}}_t \leftarrow \sum_{i=1}^{N_r} w_i \mathbf{m}_i$

24:  $P_t \leftarrow \sum_{i=1}^{N_r} w_i (S_i + (\mathbf{m}_i - \hat{\mathbf{m}}_t)(\mathbf{m}_i - \hat{\mathbf{m}}_t)^T)$

25:  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} \leftarrow [\hat{\mathbf{m}}_t]_{n_x+1:2n_x}$

26:  $P_{t+1|t+1} \leftarrow [P_t]_{n_x+1:2n_x, n_x+1:2n_x}$

27: **Retorna:**  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1}$  e  $P_{t+1|t+1}$

---

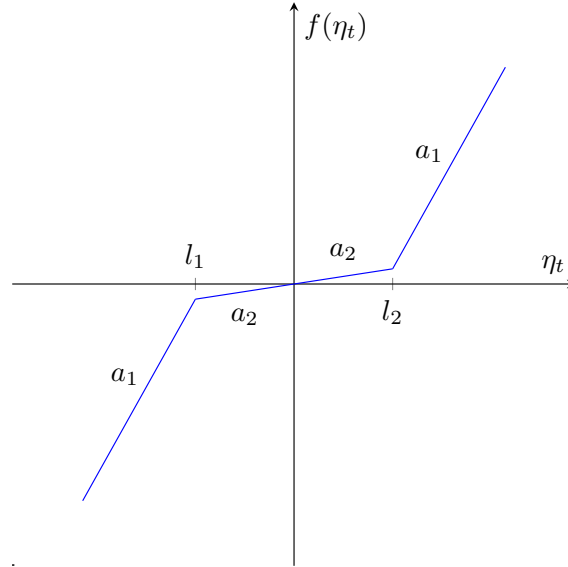


Figura 6.4: Característica não linear da mola do sistema da Fig. 6.3 .

apresenta o sistema físico do modelo e a Figura 6.4 apresenta a característica elástica da mola. O modelo afim por partes para este sistema pode ser escrito como

$$\mathbf{x}_{t+1} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{t+1} \\ \zeta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_t + \Delta t \zeta_t \\ -\frac{\Delta t}{M} f(\eta_t) + \zeta_t - \frac{\Delta t D}{M} \zeta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{M} \end{bmatrix} \mathbf{u}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (6.51a)$$

$$\mathbf{y}_t = C \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (6.51b)$$

onde  $\eta_t$  e  $\zeta_t$  são a posição em [mm] e a velocidade em [mm/s] da massa  $M$ , respectivamente,  $\Delta t$  é o tempo de amostragem,  $D$  é o coeficiente de amortecimento, e

$$f(\eta_t) = \begin{cases} f_1 = a_1 \eta_t + b_1 & \text{if } -\infty < \eta_t \leq l_1 \\ f_2 = a_2 \eta_t + b_2 & \text{if } l_1 < \eta_t \leq l_2 \\ f_3 = a_3 \eta_t + b_3 & \text{if } l_2 < \eta_t < +\infty \end{cases} \quad (6.52)$$

com  $a_3 = a_1$ ,  $b_1 = l_1(a_2 - a_1)$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_3 = l_2(a_2 - a_3)$ . Os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são os coeficientes elásticos da mola. Para avaliar como a estimativa depende da medida da saída, iremos utilizar dois valores para a matriz de saída  $C$ ,  $C_1 = [1 \ 0]$  e  $C_2 = [0 \ 1]$ .

Para a região  $i$ , podemos reescrever (6.51) como

$$\mathbf{x}_{t+1} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_{t+1} \\ \zeta_{t+1} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\frac{a_i \Delta t}{M} & 1 - \frac{\Delta t D}{M} \end{bmatrix}}^{A_i} \mathbf{x}_t + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{M} \end{bmatrix}}^B \mathbf{u}_t + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b_i \Delta t}{M} \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}_i} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (6.53a)$$

$$\mathbf{y}_t = C \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t. \quad (6.53b)$$

Utilizaremos o erro médio quadrático (RMSE) entre o estado simulado e o estimado para cada um dos estimadores de estado:

$$\text{RMSE}(\mathbf{x}^{(j)}) = \sqrt{\frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \left( (\eta_t^{(j)} - \hat{\eta}_{t|t}^{(j)})^2 + (\zeta_t^{(j)} - \hat{\zeta}_{t|t}^{(j)})^2 \right)}, \quad (6.54)$$

Tabela 6.1: Parâmetros do modelo SDOFS

Param.	$\Delta t$ (s)	$D$ (N·s/mm)	$M$ (t)	$a$ (N/mm)	$l_1, l_2$ (mm)
Valor	0.01	1	1	[50 5 50]	1

Tabela 6.2: Média (ARMSE), desvio padrão (STD) do RMSE para os filtros de partículas utilizando diferentes número de partículas. Caso  $C_1 = [1 \ 0]$ 

Partículas	MPF		PF	
	ARMSE	STD	ARMSE	STD
500	0.84204	0.28042	0.84421	0.27824
2 000	0.83799	0.27679	0.83737	0.27485
5 000	0.83609	0.27577	0.83592	0.27466
10 000	0.83556	0.27546	0.83554	0.27435
50 000	0.83539	0.27548	0.83509	0.27402

onde  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}^{(j)} = [\hat{\eta}_{t|t}^{(j)} \ \hat{\zeta}_{t|t}^{(j)}]^\top$  e  $\mathbf{x}_t^{(j)} = [\eta_t^{(j)} \ \zeta_t^{(j)}]^\top$  são a média estimada para o estado  $\mathbf{x}_t$  e seu valor simulado na  $j$ -ésima simulação, respectivamente.

Primeiramente comparamos o PAKF com os dois filtros de partículas e o filtro de Kalman estendido utilizando  $C_1 = [1 \ 0]$  como matriz de saída. Simulamos o modelo (6.51) para  $T = 400$  passos de tempo. Os parâmetros utilizados são os da Tabela 6.1. Assumimos que  $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_2)$ ,  $\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}([0 \ 0]^\top, \text{diag}[0.01, 0.01])$  e  $\mathbf{u}_t \sim \mathcal{N}(0, 5^2)$ . Realizamos  $N_s = 5\,000$  simulações diferentes para garantir diferentes comportamentos do sistema. Para cada filtro de partículas realizamos a estimação de estado utilizando 500, 2 000, 5 000, 10 000, 50 000 partículas. A Tabela 6.2 apresenta a média (ARMSE) e desvio padrão (STD) do RMSE sobre as  $N_s$  simulações do sistema para os filtros de partículas. Como esperado, o RMSE diminui conforme o número de partículas aumenta para ambos os filtros de partículas. Podemos observar que a diferença entre o MPF e o PF é mínima quando o número de partículas é maior que 2 000.

A Tabela 6.3 apresenta o RMSE para o PAKF, EKF e o MPF com 50 000 partículas, assim como o menor e maior RMSE encontrado nas diferentes simulações. Observamos que o valor médio do RMSE (ARMSE) para o PAKF é 5.02% menor que o ARMSE para o EKF, e ainda, o ARMSE para o MPF é 0.17% menor que o encontrado para PAKF. Observamos também que, o EKF obteve o maior desvio entre o menor e maior valores para o RMSE, resultando em uma maior dispersão dos valores. A Figura 6.5 apresenta a média do RMSE entre o estado simulado e o estimado para o PAKF, EKF e MPF (50 000 partículas) em função do tempo para cada componente do estado, ou seja

$$\text{ARMSE}(\eta_t) = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \left( \eta_t^{(j)} - \hat{\eta}_{t|t}^{(j)} \right)^2}, \quad (6.55a)$$

$$\text{ARMSE}(\zeta_t) = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \left( \zeta_t^{(j)} - \hat{\zeta}_{t|t}^{(j)} \right)^2}. \quad (6.55b)$$

Observe que o ARMSE em função do tempo para a componente  $\eta_t$  (Figura superior) é praticamente o mesmo para os três filtros, porém como podemos observar na figura

Tabela 6.3: Média (ARMSE), desvio padrão (STD) do RMSE para EKF, PAKF e MPF com 50 000 partículas, assim como o menor e maior valor RMSE dentre as 5 000 simulações. Caso  $C_1 = [1 \ 0]$

Estimador	ARMSE	STD	min. RMSE	max. RMSE
EKF	0.88075	0.30199	0.3053	2.5513
PAKF	0.83649	0.27552	0.3018	2.4726
MPF (50k)	0.83539	0.27548	0.2978	2.4847

ampliada a curva para o EKF está sempre acima das curvas do MPF e PAKF. Por outro lado, na figura inferior, referente ao ARMSE da componente  $\zeta_t$  do estado, observamos que a diferença entre EKF e o PAKF é bastante acentuada. A pequena diferença no RMSE para a componente  $\eta_t$  aparece já que esta componente apresenta uma dinâmica linear no modelo (6.51), ou seja, o filtro de Kalman é a solução ótima para o problema de estimação, e ainda, neste caso, estamos considerando a medida direta de  $\eta_t$ , *i.e.*,  $C_1 = [1 \ 0]$ .

Para verificar como a medida influencia na estimativa de cada estimador de estado iremos realizar o mesmo estudo acima, porém assumindo  $C = [0 \ 1]$  em (6.51b), ou seja medida do estado com dinâmica afim por partes. Foram realizadas 5 000 simulações, para o mesmo conjunto de parâmetros utilizados no exemplo anterior, isto é, mesmo sinal de entrada, mesmas condições iniciais e mesma realização do ruído. A Tabela 6.4 apresenta o comparativo do ARMSE entre os filtros de partículas para diferentes número de partículas. Já a Tabela 6.5 apresenta o RMSE para o PAKF, EKF e o MPF com 50000 partículas, assim como o menor e maior RMSE encontrado nas diferentes simulações. Observamos que, neste caso, o PAKF obteve em média RMSE 4.32% menor que o EKF e o MPF obteve em média RMSE 0.44% menor que o PAKF. Vale notar que o ARMSE para todas as estimativas diminuíram pela metade quando comparadas ao caso anterior. Neste caso, o estado foi estimado utilizando a medida da velocidade da massa (componente  $\zeta_t$  do estado). A velocidade da massa é o estado com dinâmica afim por partes no modelo (6.51). Assim muito mais informação sobre a dinâmica não linear do sistema é obtida através da medida, fazendo com que o erro final na estimativa diminua. No caso anterior, a componente do estado medido é a posição da massa, ou seja, componente com dinâmica linear. Esta medida não traz informação sobre a dinâmica afim por partes do sistema, por isso o RMSE para este caso é maior.

A Figura 6.6 apresenta a média do RMSE entre o estado simulado e o estimado para o PAKF, EKF e MPF (50 000 partículas) em função do tempo para cada componente do estado. Neste caso, com a medida direta de  $\zeta_t$ ,  $C_2 = [0 \ 1]$ , observamos que o ARMSE em função do tempo do estado  $\eta_t$  para o EKF tem uma diferença significativa comparado com o ARMSE do PAKF (Figura 6.6 superior). Diferentemente do caso apresentado na Figura 6.5. Isto já era esperado visto que neste caso a estimativa de  $\eta_t$  é obtida indiretamente a partir da medida de  $\zeta_t$ .

### 6.3 Considerações Finais

O estimador proposto (PAKF) obteve erros na estimativa próximos aos da solução ótima (MPF) para a classe de modelos PWASS como (6.1). Observamos que mesmo quando mediamos diretamente o estado com a dinâmica afim o estimador

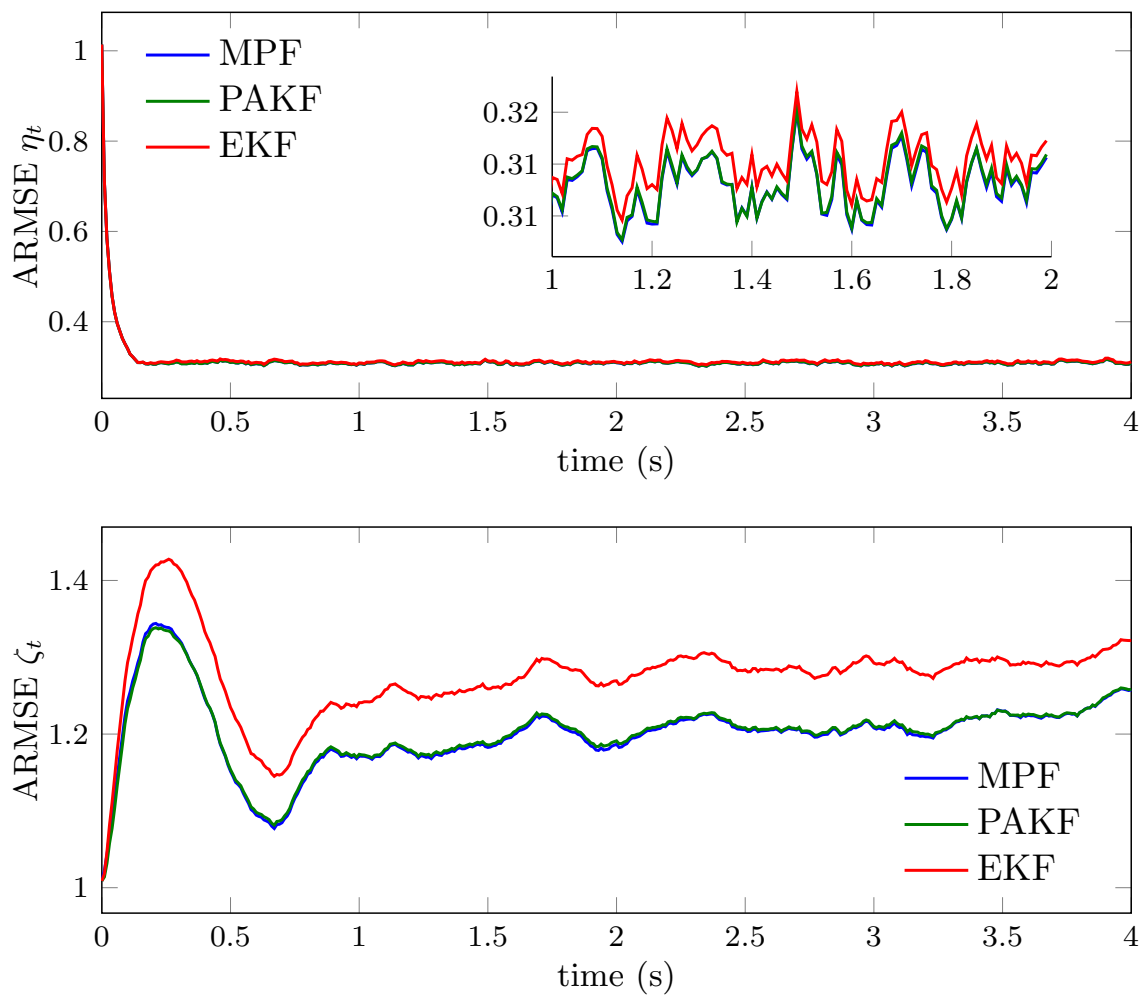


Figura 6.5: Média do RMSE em função do tempo para cada estimador de estado, caso  $C_1 = [1 \ 0]$ . Figura superior componente  $\eta_t$ , inferior  $\zeta_t$ .

Tabela 6.4: Comparação entre os filtros de partículas para diferentes número de partículas. Caso  $C_2 = [0 \ 1]$ .

Partículas	MPF		PF	
	ARMSE	STD	ARMSE	STD
500	0.42789	0.0411	0.43014	0.04297
2 000	0.42653	0.04031	0.42695	0.04074
5 000	0.42631	0.04014	0.42634	0.04030
10 000	0.42618	0.04009	0.42615	0.04017
50 000	0.42611	0.04005	0.42598	0.04008

Tabela 6.5: Média, desvio padrão do RMSE para EKF, PAKF e MPF com 50 000 partículas, assim como o menor e maior valor RMSE dentre as 5 000 simulações. Caso  $C_2 = [0 \ 1]$ .

Estimador	ARMSE	STD	min. RMSE	max. RMSE
EKF	0.44731	0.05038	0.2948	0.6934
PAKF	0.42799	0.04090	0.2867	0.6151
MPF (50k)	0.42611	0.04005	0.2902	0.5980

proposto obteve resultados melhores que o EKF e similares ao estimador ótimo MPF. Vale observar que mesmo utilizando o filtro de partículas marginalizado o custo computacional para este filtro é bastante elevado comparado ao estimador proposto e ao filtro de Kalman estendidos. O filtro de Kalman estendido apresenta o menor custo computacional dentre os três estimadores. Neste filtro, a região em que o estado se encontra é aproximada utilizando a estimativa *a posteriori* do estado no tempo  $t$  ( $p(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t})$ ) e o filtro de Kalman é utilizado para aproximar ( $p(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t+1})$ ). O filtro proposto, basicamente, utiliza um filtro de Kalman para cada região do espaço de estados para propagar a estimativa no instante de tempo  $t$  para o instante de tempo  $t + 1$ , e então, colapsa as estimativas (uma para cada região) por uma única distribuição utilizando a probabilidade do estado estar em cada uma dessas regiões. O filtro de partículas por sua vez, simula o sistema inúmeras vezes, uma para cada partículas. Em uma implementação paralela do filtro de partículas marginalizado rodando em uma máquina quad-core, o MPF (50 000 partículas) leva cerca de 23 vezes mais tempo que o PAKF para completar uma única simulação como apresentada acima.

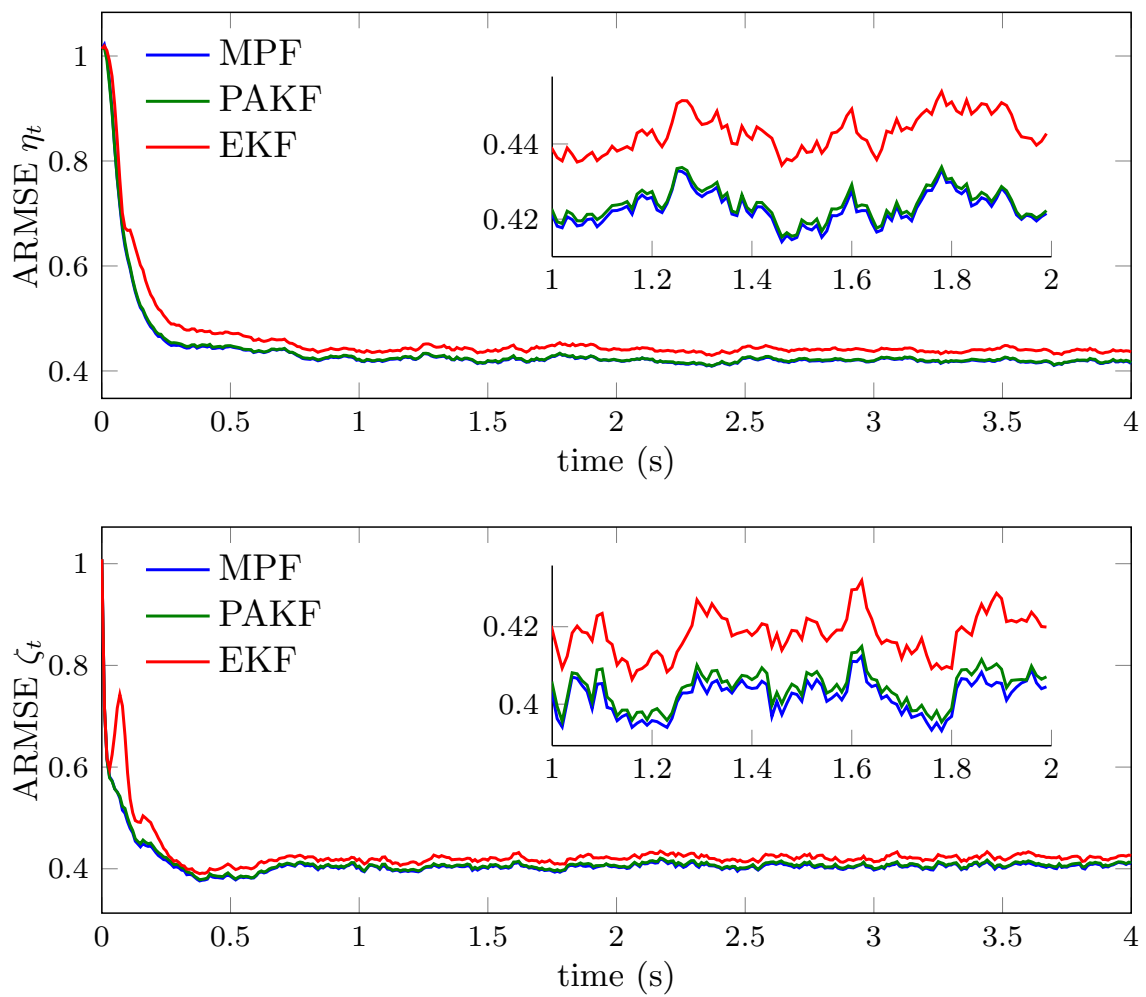


Figura 6.6: Média do RMSE em função do tempo para cada estimador de estado, caso  $C_2 = [0 \ 1]$ . Figura superior componente  $\eta_t$ , inferior  $\zeta_t$ .



## 7 ALGORITMO EM PARA MODELOS AFINS POR PARTES

Neste capítulo será apresentada uma proposta para a identificação de modelos PWASS como (3.10) utilizando o algoritmo EM (RUI; ARDESHIRI; BAZANELLA, 2016). O problema de identificação tratado aqui consiste em estimar os parâmetros

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq \left\{ \{a_i\}_{i=1}^{N_r}, \{b_i\}_{i=1}^{N_r}, F, \Phi, \phi, B \right\} \quad (7.1)$$

de (3.16) com base nas medidas  $\mathbf{y}_{1:T}$  (e  $\mathbf{u}_{1:T}$ ), onde  $\mathbf{y}_{1:T}$  é a coleção de  $T$  observações. No problema de identificação de parâmetros de modelos PWASS podemos ainda identificar os limites de cada região que formam a função afim, porém neste trabalho assumiremos que os limites de cada região são conhecidos, ou seja  $l_i, i = 1, \dots, N_r$  são conhecidos. No algoritmo EM proposto, utilizamos a distribuição cumulativa para calcular a probabilidade de ocorrência de cada submodelo do sistema, dada a medida. Deste modo, dado o submodelo os estados são estimados utilizando o filtro de Kalman suavizado. Por fim, os parâmetros são estimados utilizando uma função substituta para a função *likelihood*.

Vale observar que se a função afim  $f(\eta_t)$  for contínua, como a da Figura 7.1, os parâmetros  $a_i$  e  $b_i$  serão correlacionados. Ou seja, para garantir a continuidade da função temos que:

$$a_i l_{i+1} + b_i = a_{i+1} l_{i+1} + b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N_r - 1,$$

onde  $l_i$  é o limite da  $i$ -ésima região. Desta forma, podemos escrever cada  $f_i$  como

$$f_1 = a_1 \eta_t + b_1, \quad (7.2)$$

$$f_i = a_i \eta_t + b_i, \quad i = 2, \dots, N_r, \quad (7.3)$$

onde

$$b_i = -a_i l_i + b_1 + a_1 l_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j (l_{j+1} - l_j), \quad (7.4)$$

ou seja, uma função afim contínua pode ser parametrizada por  $N_r + 1$  parâmetros ( $\{a_i\}_{i=1}^{N_r}, b_1$ ), enquanto para uma função afim descontínua são necessários  $2N_r$  ( $\{a_i\}_{i=1}^{N_r}, \{b_i\}_{i=1}^{N_r}$ ). Assim, para o caso em que a função afim é contínua o problema de identificação consiste em identificar

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq \left\{ \{a_i\}_{i=1}^{N_r}, b_1, F, \Phi, \phi \right\}. \quad (7.5)$$

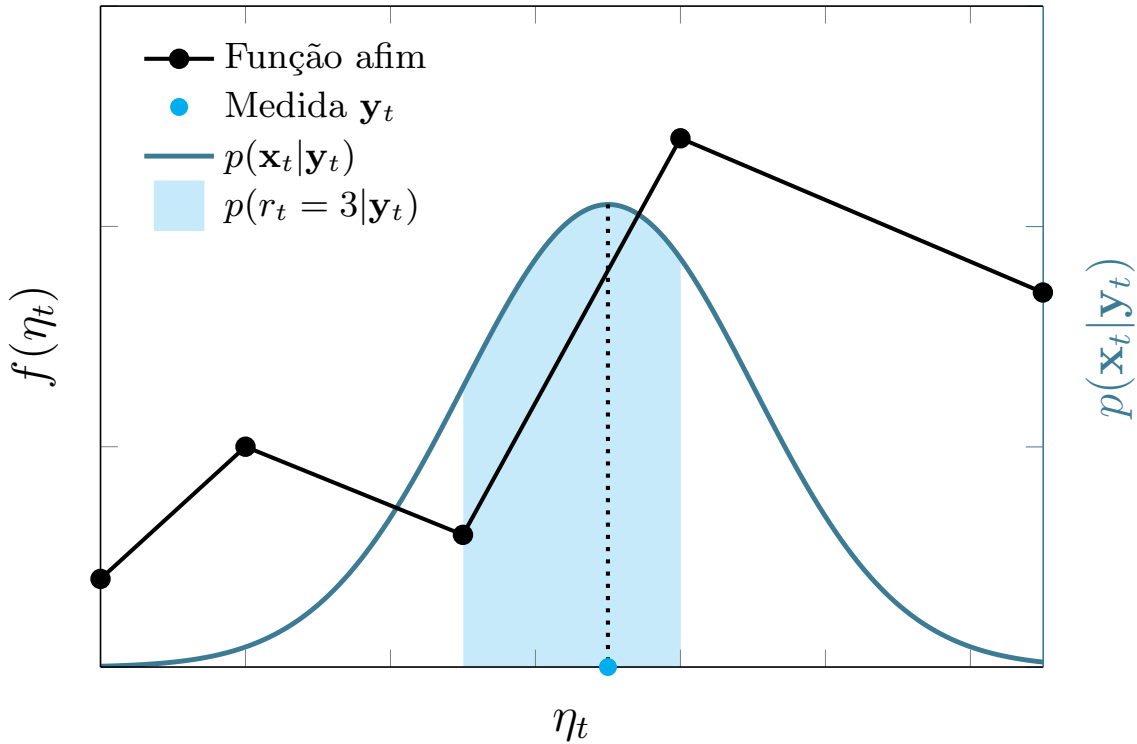


Figura 7.1: A área sombreada representa a probabilidade do sistema estar em uma determinada região delimitada pela função afim.

## 7.1 Algoritmo Proposto

Como vimos na Seção 4.2.2, o algoritmo EM é um algoritmo iterativo que pode ser utilizado para obter uma aproximação do estimador de máxima verossimilhança (4.54) definido por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}). \quad (7.6)$$

A ideia principal do algoritmo EM é calcular uma função substituta  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  da função *likelihood*  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T})$ . Como apresentado anteriormente, essa função substituta é função da função *likelihood* “completa”  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$ . Para o modelo (3.10) não existe forma analítica para  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$  devido às não linearidades na equação de estado do modelo. Porém, como o modelo é afim quando a região  $\mathcal{R}_i$  é conhecida, iremos utilizar uma variável discreta  $r_t$  para representar o submodelo ativo no instante de tempo  $t$ . Ou seja, podemos reescrever o submodelo (3.16) utilizando esta variável como

$$\mathbf{x}_{t+1} = A_{r_t} \mathbf{x}_t + B \mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t} + \boldsymbol{\omega}_t \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{y}_t = C \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t, \quad (7.7b)$$

onde  $r_t \in \{1, 2, \dots, N_r\}$  tal que

$$r_t = \begin{cases} 1, & l_1 < \eta_t \leq l_2 \\ 2, & l_2 < \eta_t \leq l_3 \\ \vdots & \\ N_r, & l_{N_r} < \eta_t < l_{N_r+1}. \end{cases}$$

A pdf de  $r_t$  pode ser escrita como

$$p(r_t) = \iint_{\eta_t \in \mathcal{R}_i} p(\mathbf{x}_t) d\eta_t d\mathbf{z}_t, \quad (7.8)$$

onde  $\mathbf{x}_t = [\eta_t \mathbf{z}_t^\top]^\top$ . Assim,  $r_t$  é uma variável aleatória categórica (*categorical random variable*), ou seja, é uma variável aleatória que pode assumir apenas um valor entre um certo conjunto finito de valores. Definimos  $r_{1:t} = \{r_1, \dots, r_t\}$  como a trajetória dos submodelos até o tempo  $t$ , ou seja, qual submodelo está ativo para cada instante de tempo.

Ao invés de utilizar uma função substituta que seja função de  $p_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$ , propomos utilizar a seguinte função

$$\mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k) = \mathbf{E}[L_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) | \mathbf{y}_{1:T}, \hat{\theta}_k] \quad (7.9)$$

$$= \iint \log p_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_{1:T}, r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_{1:T} dr_{1:T}, \quad (7.10)$$

onde

$$L_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) \triangleq \log p_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}). \quad (7.11)$$

Neste caso, (7.9) é o valor esperado da função  $L_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$  com respeito a  $\mathbf{x}_{1:T}$  e  $r_{1:T}$  condicionado às medidas  $\mathbf{y}_{1:T}$  e à estimativa  $\hat{\theta}_k$  obtida na  $k$ -ésima iteração do algoritmo EM. Podemos calcular a distribuição a posteriori de  $r_t$  dada às medidas  $\mathbf{y}_t$  através da seguinte marginalização

$$p(r_t | \mathbf{y}_t) \propto \iint_{\eta_t \in \mathcal{R}_i} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{x}_t) d\eta_t d\mathbf{z}_t. \quad (7.12)$$

Iremos fazer duas hipóteses para calcular (7.12):

1. a distribuição *a priori*  $\mathbf{x}_t$  não acrescenta nenhuma informação dada a medida  $\mathbf{y}_t$ , *i.e.*,

$$p(r_t | \mathbf{y}_t) \propto \iint_{\eta_t \in \mathcal{R}_i} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) d\eta_t d\mathbf{z}_t. \quad (7.13)$$

2.  $\eta_t$  é diretamente medido, onde a medida correspondente é denotada por  $y_t$ .

Como o ruído de medida é Gaussiano e devido às duas suposições podemos escrever a seguinte distribuição *a posteriori* de  $r_t$ :

$$\begin{aligned} p(r_t | \mathbf{y}_t) &= p(r_t = i | \mathbf{y}_t), & i &= 1, \dots, N_r \\ &= \int_{\eta_t \in \mathcal{R}_i} \mathcal{N}(\eta_t; y_t, [R]_{(1,1)}) d\eta_t, & i &= 1, \dots, N_r \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde  $[R]_{(1,1)}$  é o elemento da primeira linha e primeira coluna de  $R$ . A Figura 7.1 apresenta a pdf  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t)$  e uma função afim por partes com 4 regiões. A área sombreada representa a probabilidade que o estado se encontre na região três dada à medida  $\mathbf{y}_t$ , *i.e.*,  $p(r_t = 3 | \mathbf{y}_t)$ . Como mencionado anteriormente, iremos utilizar a distribuição  $p_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$  ao invés da  $p_\theta(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T})$  para calcular a função

substituta  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$ . Assim, utilizando o Teorema de Bayes (Teorema 3) podemos escrever  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$  como:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) &= p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}, \mathbf{x}_{1:T})p_{\boldsymbol{\theta}}(r_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}, \mathbf{x}_{1:T}) \\ &= p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T})p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{1:T})p_{\boldsymbol{\theta}}(r_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}, \mathbf{x}_{1:T}). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Como assumimos que dada a medida o estado  $\mathbf{x}_t$  não traz nenhuma informação nova para o sistema (hipótese 1) temos que

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(r_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}, \mathbf{x}_{1:T}) \approx p_{\boldsymbol{\theta}}(r_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}).$$

Reescrevendo (7.15) utilizando a aproximação acima e ainda como o sistema é Markoviano (Definição 2.3.1) obtemos

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) \approx p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_{1:T})p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_{1:T}|\mathbf{x}_{1:T})p_{\boldsymbol{\theta}}(r_{1:T}|\mathbf{y}_{1:T}) \quad (7.16)$$

$$= p(\mathbf{x}_1)p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_1|\mathbf{x}_1)p_{\boldsymbol{\theta}}(r_1|\mathbf{y}_1) \prod_{t=2}^T p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})p_{\boldsymbol{\theta}}(r_t|\mathbf{y}_t)p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t), \quad (7.17)$$

onde  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; C\mathbf{x}_t, R)$  e, utilizando (7.7) para uma dada região,

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; A_{r_{t-1}}\mathbf{x}_{t-1} + B\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}, Q).$$

Vale observar que o único termo que depende do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  em (7.17) é  $p_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$ . Como estamos interessados em encontrar  $\boldsymbol{\theta}$  que maximize  $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_k)$  iremos omitir termos constantes e que não dependam de  $\boldsymbol{\theta}$  em  $L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$ . Assim, podemos reescrever (7.11) omitindo termos independentes de  $\boldsymbol{\theta}$  (denotado por  $\pm$ ) como <sup>1</sup>

$$L_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) \stackrel{\pm}{=} \sum_{t=2}^T \log \mathcal{N}(\mathbf{x}_t | A_{r_{t-1}}\mathbf{x}_{t-1} + B\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}, Q) \quad (7.18)$$

$$= \sum_{t=2}^T \langle \Psi_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta}), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \rangle + \Xi_{r_{t-1}}(\boldsymbol{\theta}), \quad (7.19)$$

onde  $\langle a, b \rangle \triangleq \text{tr}(a^\top b) = a^\top \cdot b$  denota produto interno e

$$\Psi_{r_t}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \begin{bmatrix} A_{r_t}^\top Q^{-1} \\ (B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t})^\top Q^{-1} \\ -\frac{1}{2}A_{r_t}^\top Q^{-1}A_{r_t} \\ -(B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t})^\top Q^{-1}A_{r_t} \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

$$s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1}^\top \\ \mathbf{x}_{t-1}^\top \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Temos que  $\Psi_{r_t}(\boldsymbol{\theta})$  e  $s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1})$  são chamados de *natural parameter* e *sufficient statistic* (OZKAN et al., 2015), respectivamente. Além disso,

$$\Xi_{r_t}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq -\frac{1}{2}\mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1}B\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1}\mathbf{b}_{r_t} - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{r_t}^\top Q^{-1}\mathbf{b}_{r_t} \quad (7.22)$$

<sup>1</sup>Derivação de (7.19) pode ser encontrada no Apêndice B

denota a chamada *log-partition function* (OZKAN et al., 2015). Para poder calcular  $\mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k)$ , precisamos calcular o valor esperado (7.9). Observe que (7.19) só depende do estado em  $t$  e  $t - 1$ , deste modo, o valor esperado de  $L_\theta(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$  com respeito a  $\mathbf{x}_{1:T}$  e  $r_{1:T}$  pode ser calculado por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k) &\stackrel{\pm}{=} \iiint \left( \sum_{t=2}^T \langle \Psi_{r_{t-1}}(\theta), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \rangle + \Xi_{r_{t-1}}(\theta) \right) \\ &\quad \times p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} dr_{1:T}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Então, precisamos calcular  $p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T})$ . Utilizando o teorema de Bayes obtemos a seguinte relação

$$p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) = p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) p_\theta(r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) \quad (7.24)$$

$$\approx p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) \prod_{t=1}^T p_\theta(r_t | \mathbf{y}_t), \quad (7.25)$$

onde assumimos que

$$p_\theta(r_{1:T} | \mathbf{y}_{1:T}) \approx \prod_{t=1}^T p_\theta(r_t | \mathbf{y}_t). \quad (7.26)$$

Assim, reescrevendo (7.23) utilizando (7.25) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k) &\stackrel{\pm}{=} \iiint \left( \sum_{t=2}^T \langle \Psi_{r_{t-1}}(\theta), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \rangle + \Xi_{r_{t-1}}(\theta) \right) \\ &\quad \times p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) \prod_{t=1}^T p_\theta(r_t | \mathbf{y}_t) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} dr_{1:T}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

onde  $p_\theta(r_t | \mathbf{y}_t)$  foi calculado em (7.14). Observe que, como  $r_1, \dots, r_T \in \{1, 2, \dots, N_r\}$ , o número de trajetórias possíveis até o tempo  $T$  é  $N_r^T$ , *i.e.*, para cada instante de tempo o estado pode estar em uma das  $N_r$  regiões. Isso significa que o número de elementos à direita de (7.25) cresce exponencialmente com o tempo, consequentemente o número de elementos da integral (7.27) cresce exponencialmente com o tempo. Calcular a integral para todas as trajetórias possíveis se torna inviável devido ao seu crescimento exponencial, por isso, para calcular a integral na variável  $r_{1:T}$  em (7.27) iremos utilizar o método de Monte Carlo, de modo que não seja necessário calcular a integral para todas as  $N_r^T$  trajetórias. No método de Monte Carlo, as amostras são geradas a partir da pdf  $p(r_t | \mathbf{y}_t)$  que neste caso é conhecida (7.14);

$$r_t^{(i)} \sim p(r_t | \mathbf{y}_t). \quad (7.28)$$

Para cada instante de tempo amostramos  $M$  partículas formando ao final  $M$  trajetórias da variável  $r_t$  que denotamos como

$$r_{1:T}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Assim, a integral em  $dr_{1:T}$  em (7.27) pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k) &\approx \frac{1}{M} \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^M \iint \left( \langle \Psi_{r_{t-1}^{(i)}}(\theta), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \rangle + \Xi_{r_{t-1}^{(i)}}(\theta) \right) \\ &\quad \times p_{\hat{\theta}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1}, \end{aligned} \quad (7.29)$$

ou seja, a média sobre todas as trajetórias amostradas. Os termos  $\Xi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta})$  e  $\Psi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta})$  em (7.29) não dependem de  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t-1}$ , assim para a  $i$ -ésima trajetória temos

$$\begin{aligned} \iint \Xi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta}) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} &= \Xi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta}) \iint p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \Xi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (7.30)$$

e

$$\begin{aligned} &\iint \left\langle \Psi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta}), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \right\rangle p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \left\langle \Psi_{r_{t-1}^{(i)}}(\boldsymbol{\theta}), \iint s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observe que  $p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)})$  é a distribuição suavizada de  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{x}_{t-1}$ . Como condicionado à trajetória o modelo é linear, dado por (7.7), esta pdf será Gaussiana e pode ser obtida utilizando o filtro de Kalman Suavizado apresentado na seção 4.1.3, onde

$$p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) = \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(i)}; \tilde{P}^{(i)} \right), \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)} + G_{t-1}^{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(i)} - A_{r_{t-1}} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^{(i)} - \mathbf{b}_{r_{t-1}} - \mathbf{B}\mathbf{u}_{t-1}) \end{bmatrix} \\ \tilde{P}^{(i)} &= \begin{bmatrix} \hat{P}_{t|1:T}^{(i)} & \hat{P}_{t|1:T}^{(i)} [G_{t-1}^{(i)}]^\top \\ G_{t-1}^{(i)} \hat{P}_{t|1:T}^{(i)} & \hat{P}_{t-1|t-1}^{(i)} + G_{t-1}^{(i)} (\hat{P}_{t|1:T}^{(i)} - \hat{P}_{t-1|t-1}^{(i)}) [G_{t-1}^{(i)}]^\top \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e  $\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(i)}$ ,  $\hat{P}_{t|1:T}^{(i)}$  e  $G_t^{(i)}$  são dados pelo filtro de Kalman suavizado (Teorema 6). Assim, podemos reescrever a integral em (7.31) utilizando (7.32) e (7.21) como

$$\begin{aligned} &\iint s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) p_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}^{(i)}) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \\ &= \iint s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(i)}; \tilde{P}^{(i)} \right) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$= \iint \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}^\top \\ \mathbf{x}_{t-1}^\top \end{bmatrix} \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{(i)}; \tilde{P}^{(i)} \right) d\mathbf{x}_t d\mathbf{x}_{t-1} \quad (7.34)$$

A integral (7.34) tem solução analítica (SÄRKKÄ, 2013) dada por

$$S_t^{(i)} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(i)} (\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(i)})^\top + \hat{P}_{t,t-1|1:T}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(i)} (\hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(i)})^\top + \hat{P}_{t-1|1:T}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Para finalizar, substituindo (7.30) e (7.34) em (7.29) obtemos a expressão final para  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k) \stackrel{\pm}{=} \frac{1}{M} \sum_{t=2}^T \sum_{j=1}^M \left( \left\langle \Psi_{r_t^{(j)}}(\boldsymbol{\theta}), S_t^{(j)} \right\rangle + \Xi_{r_t^{(j)}}(\boldsymbol{\theta}) \right). \quad (7.36)$$

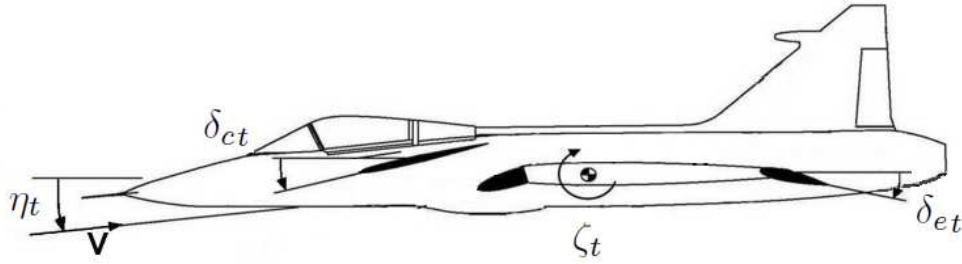


Figura 7.2: Jato JAS 39 Gripen, (LARSSON, 2013)

O passo M consiste em maximizar a função (7.36). Podemos calcular analiticamente o gradiente e a Hessiana de (7.36) com relação à  $\theta$  e utilizá-los com, por exemplo, método de Newton para encontrar o máximo de  $\mathbf{Q}(\theta, \hat{\theta}_k)$ . O Algoritmo 7.1 apresenta uma iteração do algoritmo EM proposto.

## 7.2 Exemplos Ilustrativos

Para testar o algoritmo EM proposto iremos identificar o modelo simplificado da dinâmica longitudinal do jato Gripen JAS 39 e ainda modelo não linear para vibrações causadas por folgas (6.51) apresentado na seção 6.

### 7.2.1 Identificação do Jato Gripen JAS 39

Este modelo é um modelo afim por partes dado por (LARSSON, 2013)

$$\begin{bmatrix} \eta_{t+1} \\ \zeta_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_t + \Delta t Z_\eta \eta_t + \Delta t Z_\zeta \zeta_t \\ \Delta t f(\eta_t) + \Delta t M_\zeta \zeta_t + \zeta_t \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & Z_{\delta_c} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{et} \\ \delta_{ct} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_t, \quad (7.37a)$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{bmatrix} + \mathbf{v}_t, \quad (7.37b)$$

onde  $\Delta t$  é o período de amostragem, o ruído de processo  $\mathbf{w}_t$  e o ruído de medida  $\mathbf{v}_t$  são Gaussianos com média e variância conhecidas,  $\eta_t$  é o ângulo de ataque,  $\zeta_t$  o ângulo de *pitch*,  $\delta_{et}$  e  $\delta_{ct}$  são os controles do *elevator* e *canard* da aeronave. A Figura 7.2 ilustra estas variáveis. A função  $f(\eta_t)$  é uma função afim contínua, onde os limites de cada região são conhecidos

$$\begin{aligned} l &= [l_1, \dots, l_5] \\ &= [-1^\circ, 4^\circ, 7^\circ, 12^\circ, 16^\circ]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Assim, para uma dada região  $r_t$  podemos reescrever (7.37) como

$$\mathbf{x}_{t+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 + Z_\eta \Delta t & Z_\zeta \Delta t \\ a_{r_t} \Delta t & M_\zeta \Delta t + 1 \end{bmatrix}}_{A_{r_t}} \mathbf{x}_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_{r_t} \Delta t \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{r_t}} + \Delta t \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & Z_{\delta_c} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_c} \end{bmatrix}}_B \mathbf{u}_t + \mathbf{w}_t, \quad (7.39)$$

onde  $b_{r_t}$  é dado por (7.4),  $\mathbf{x}_t = [\eta_t \ \zeta_t]^\top$  e  $\mathbf{u}_t = [\delta_{et} \ \delta_{ct}]^\top$ . O sistema é simulado para  $T = 1800$  e o tempo de amostragem é  $\Delta t = 1/60s$ . Vale ressaltar que o modelo é instável, assim um controlador linear quadrático LQR é utilizado. Este controlador irá correlacionar o sinal de medida com o ruído de processo e o ruído de estado. Vale

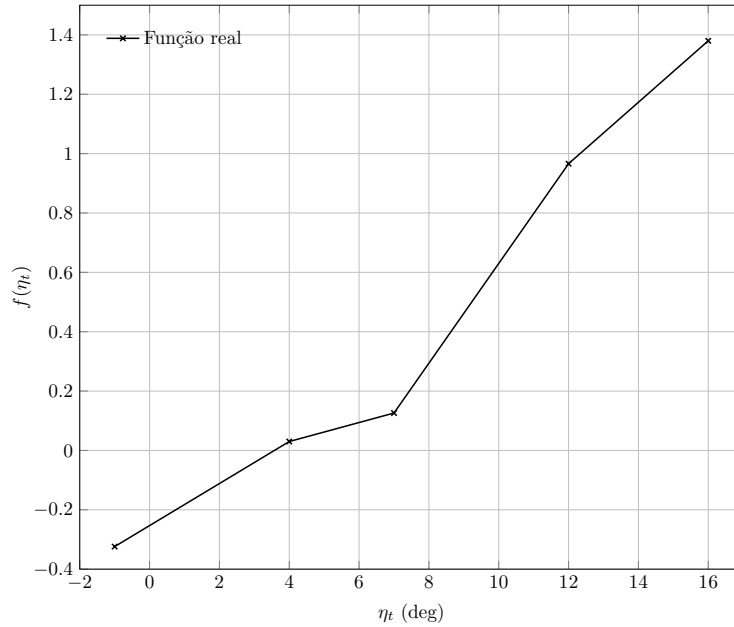


Figura 7.3: Função afim por partes Gripen.

Tabela 7.1: Parâmetros do modelo

Param.	$Z_\eta$	$Z_\zeta$	$M_\zeta$	$Z_{\delta_e}$	$Z_{\delta_c}$	$M_{\delta_e}$	$M_{\delta_c}$
Valor	-0.9759	1.174	-1.2616	0.3043	0.0289	-31.0898	8.2557

observar que o sinal  $u_t$  em (7.39) é o sinal proveniente do controlador LQR. O sinal de referência do controlador é projetado de forma que todos os submodelos sejam excitados.

Primeiramente, iremos tentar identificar

$$\theta = [\{f(l_i)\}_{i=1}^{N_r+1} \quad Z_\eta \quad Z_\zeta \quad M_\zeta \quad Z_{\delta_e} \quad Z_{\delta_c} \quad M_{\delta_e} \quad M_{\delta_c}]$$

onde

$$[\{f(l_i)\}_{i=1}^{N_r+1}] = [-0.3240 \quad 0.0300 \quad 0.1260 \quad 0.9660 \quad 1.3800]$$

são os valores da função afim por partes calculados nos limites de cada região. A Figura 7.3 apresenta a função afim que queremos identificar. Os demais parâmetros são apresentados na Tabela 7.1.

Utilizamos (7.28) para amostrar  $M = 300$  trajetórias  $r_{1:T}$  e então calcular (7.36). Para maximizar esta função utilizamos a função `fminunc` do MATLAB. As Figuras 7.4 e 7.5 apresentam a identificação do modelo (7.37) para 240 realizações do sistema e para 100 iterações do algoritmo EM proposto. Ou seja, simulamos o sistema 240 vezes e para cada simulação rodamos 100 iterações do algoritmo EM proposto. O palpite inicial do vetor de parâmetros  $\theta$  é tal que cada componente do vetor pertença ao intervalo de  $\pm 40\%$  do valor correspondente do vetor de parâmetros utilizado para simular o sistema. Temos ainda que  $\omega_t \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[0.06^\circ, 0.06^\circ])$ ,  $\nu_t \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[0.6^\circ, 0.6^\circ])$  e  $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[0.06^\circ, 0.06^\circ])$ .

Na Figura 7.4 são apresentados os resultados da identificação dos parâmetros  $\{f(l_i)\}_{i=1}^{N_r+1}$ ,  $Z_\eta$ ,  $Z_\zeta$  e  $M_\zeta$  para as 240 realizações do sistema. A linha tracejada é o valor utilizado para simular o sistema e a linha cheia é a média da estimativa em função das iterações do algoritmo EM proposto. A Figura 7.5 apresenta o mesmo que



Tabela 7.2: Erro em % entre o valor real do parâmetro e a média da estimativa na centésima iteração do algoritmo EM.

Param.	Erro %	Param	Erro %	Param	Erro %
$f(l_1)$	1.57	$f(l_5)$	0.18	$Z_{\delta_e}$	Divergiu
$f(l_2)$	27.35	$Z_\eta$	1.27	$Z_{\delta_c}$	Divergiu
$f(l_3)$	13.51	$Z_\zeta$	1.80	$M_{\delta_e}$	1.36
$f(l_4)$	1.40	$M_\zeta$	0.29	$M_{\delta_c}$	12.06

Tabela 7.3: Erro em % entre o valor real do parâmetro e a média da estimativa na centésima iteração do algoritmo EM.

Param.	Erro %	Param	Erro %	Param	Erro %
$f(l_1)$	1.44	$f(l_5)$	0.02	$Z_{\delta_e}$	Conhecido
$f(l_2)$	25.97	$Z_\eta$	0.29	$Z_{\delta_c}$	Conhecido
$f(l_3)$	13.71	$Z_\zeta$	0.39	$M_{\delta_e}$	0.47
$f(l_4)$	1.30	$M_\zeta$	0.07	$M_{\delta_c}$	1.25

a Figura 7.4 para os parâmetros  $Z_{\delta_e}$ ,  $Z_{\delta_c}$ ,  $M_{\delta_e}$  e  $M_{\delta_c}$ . Observe que as estimativas dos parâmetros  $f(l_2)$ ,  $f(l_3)$  e  $M_{\delta_c}$  são polarizadas, e ainda que não foi possível identificar os parâmetros  $Z_{\delta_e}$  e  $Z_{\delta_c}$ . A Tabela 7.2 apresenta o erro entre o valor real e a média do valor encontrada na última iteração do algoritmo EM para todos os parâmetros do modelo.

Iremos considerar agora que os parâmetros que não convergiram  $Z_{\delta_e}$  e  $Z_{\delta_c}$  são conhecidos e tentaremos identificar os demais parâmetros. Neste caso realizamos 240 identificações diferentes utilizando a mesma configuração utilizada no caso anterior. Na Figura 7.6 são apresentados os parâmetros  $\{f(l_i)\}_{i=1}^{N_r+1}$ ,  $Z_\eta$ ,  $Z_\zeta$  e  $M_\zeta$  e na Figura 7.7 são os parâmetros  $M_{\delta_e}$  e  $M_{\delta_c}$ . A linha tracejada é o valor utilizado para simular o sistema e a linha cheia é a média dos parâmetros estimados em função das iterações do algoritmo EM. A Tabela 7.3 apresenta o erro entre o valor real e a média do valor encontrada na última iteração do algoritmo EM. Observe que neste caso o erro na estimativa do parâmetro  $M_{\delta_c}$  é quase 10 vezes menor que o encontrado no caso anterior (Tabela 7.2). Em geral, todas as estimativas apresentaram uma melhora, porém as estimativas dos parâmetros  $f(l_2)$  e  $f(l_3)$  continuam polarizadas. A figura 7.8 apresenta uma identificação dentre as 240 da função afim  $f(\eta_t)$ . Neste caso, os erros entre os valores reais e os estimados para os parâmetros  $f(l_2)$  e  $f(l_3)$  são de 35.91% e 13.60% respectivamente. Observe que, mesmo com estes erros podemos observar que a função afim estimada consegue descrever a função real.

O modelo (7.37) é instável, por isso utilizamos um controlador LQR para estabilizar o sistema. A utilização de um controlador pode fazer com que algum dos parâmetros do modelo não sejam identificáveis. Para verificar se a polarização e a não convergência da estimativa é proveniente do controlador LQR utilizado, iremos realizar a identificação do modelo massa-mola apresentado na seção anterior que é estável.

---

**Algoritmo 7.1** Uma iteraçã do algoritmo EM proposto.

---

1: **Entrada:**  $A_i, \mathbf{b}_i, l_i, i = 1 \dots, N_r, B, C, Q, R, \mathbf{u}_{1:T}, \mathbf{y}_{1:T}, \hat{\mathbf{x}}_{1|0}, P_{1|0}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_k$

*Passo E*

2: **for**  $j = 1$  to  $M$  **do**

3:  $\hat{\mathbf{x}}_{1|1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{1|0}$

4:  $P_{1|1} \leftarrow P_{1|0}$

5: **for**  $t = 1$  to  $T - 1$  **do**

*Amostrar trajetória  $r_{1:T}$*

6:  $r_t^{(j)} \sim \int_{l_i}^{l_i+1} \mathcal{N}(\eta_t; y_t, [R]_{(1,1)}) d\eta_t, \quad i = 1, \dots, N_r$

*Filtro de Kalman - Prediçã*

7:  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} \leftarrow A_{r_t^{(j)}} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t^{(j)}}$

8:  $P_{t+1|t} \leftarrow A_{r_t^{(j)}} P_{t|t} A_{r_t^{(j)}}^\top + Q$

*Filtro de Kalman - Atualizaçã*

9:  $\Sigma_{t+1} \leftarrow C P_{t+1|t} C^\top + R$

10:  $K_{t+1} \leftarrow P_{t+1|t} C^\top \Sigma_{t+1}^{-1}$

11:  $\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t} + K_{t+1}(\mathbf{y}_{t+1} - C\hat{\mathbf{x}}_{t+1|t})$

12:  $P_{t+1|t+1} \leftarrow P_{t+1|t} - P_{t+1|t} C^\top \Sigma_{t+1}^{-1} C P_{t+1|t}$

13: **end for**

*Filtro de Kalman Suavizado*

14:  $P_{T|1:T} \leftarrow P_{T|T}$

15:  $\hat{\mathbf{x}}_{T|1:T} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{T|T}$

16: **for**  $t = T - 1$  to  $1$  **do**

17:  $G_t \leftarrow P_{t|t} A_{r_t}^\top [P_{t+1|t}]^{-1}$

18:  $\hat{P}_{t,t-1|T}^{(j)} \leftarrow \hat{P}_{t+1|T} G_t^\top$

19:  $\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(j)} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + G_t(\hat{\mathbf{x}}_{t+1|1:T} - \hat{\mathbf{x}}_{t+1|t})$

20:  $\hat{P}_{t|1:T}^{(j)} \leftarrow P_{t|t} + G_t(\hat{P}_{t+1|1:T} - P_{t+1|t}) G_t^\top$

21:  $S_t^{(i)} \leftarrow \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(j)} (\hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(j)})^\top + \hat{P}_{t,t-1|1:T}^{(j)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t|1:T}^{(j)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(j)} (\hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(j)})^\top + \hat{P}_{t-1|1:T}^{(j)} \\ \hat{\mathbf{x}}_{t-1|1:T}^{(j)} \end{bmatrix}$

22: **end for**

*Cálculo dos natural parameters e log-partition function*

23:  $\Psi_{r_t}^{(i)}(\boldsymbol{\theta}) \leftarrow \begin{bmatrix} A_{r_t}^\top Q^{-1} \\ (B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t})^\top Q^{-1} \\ -\frac{1}{2} A_{r_t}^\top Q^{-1} A_{r_t} \\ - (B\mathbf{u}_t + \mathbf{b}_{r_t})^\top Q^{-1} A_{r_t} \end{bmatrix}$

24:  $\Xi_{r_t}^{(i)}(\boldsymbol{\theta}) \leftarrow -\frac{1}{2} \mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1} B \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1} \mathbf{b}_{r_t} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{r_t}^\top Q^{-1} \mathbf{b}_{r_t}$

25:  $r_{1:T}^{(j)} \leftarrow \{r_t^{(j)}\}, t = 1, \dots, T$

26: **end for**

*Passo M*

27:  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} \leftarrow \arg \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \frac{1}{M} \sum_{t=2}^T \sum_{j=1}^M \left( \langle \Psi_{r_t}^{(j)}(\boldsymbol{\theta}), S_t^{(j)} \rangle + \Xi_{r_t}^{(j)}(\boldsymbol{\theta}) \right)$

28: **Retorna:**  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}$

---

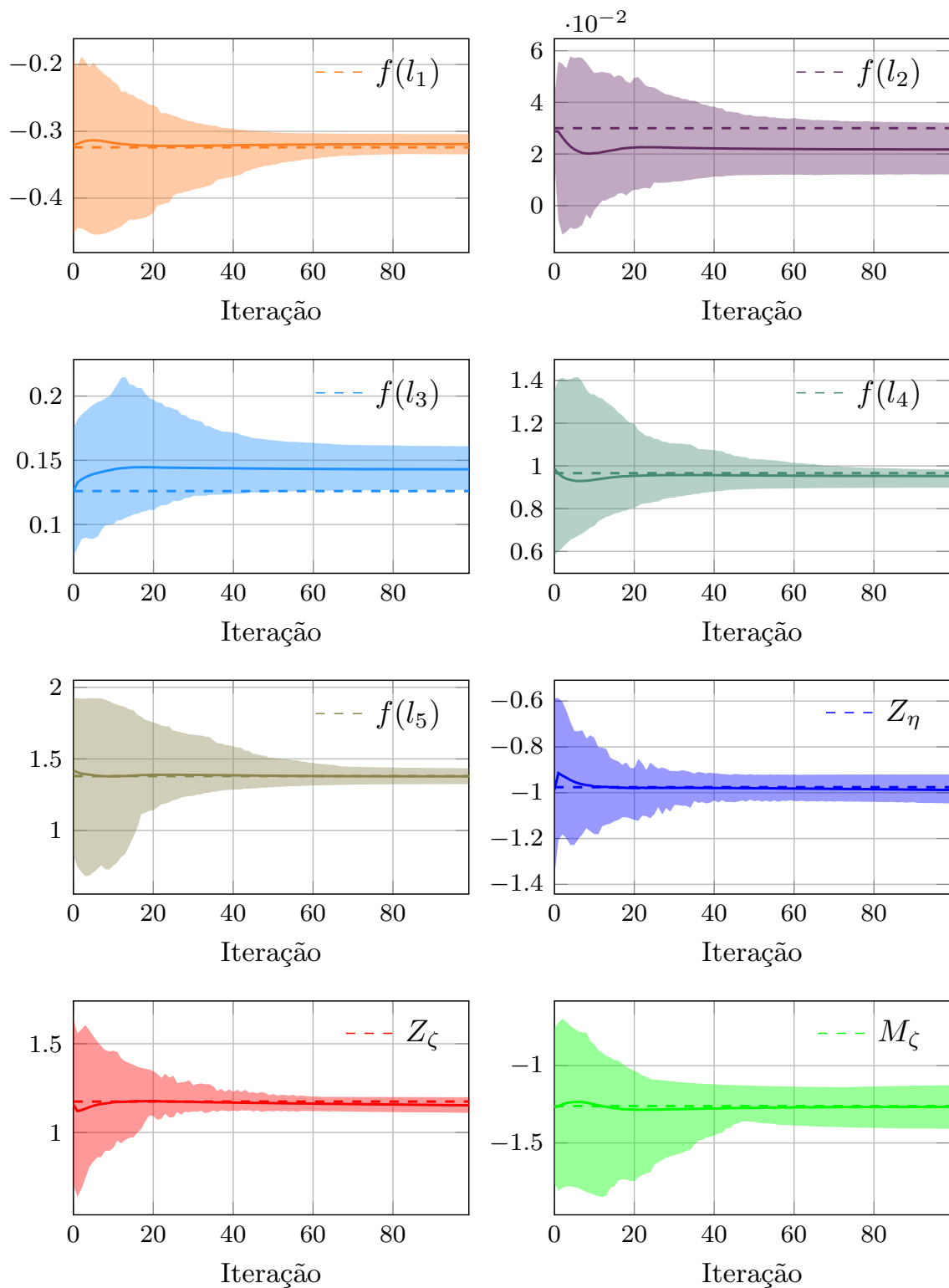


Figura 7.4: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do modelo (7.37) e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes.

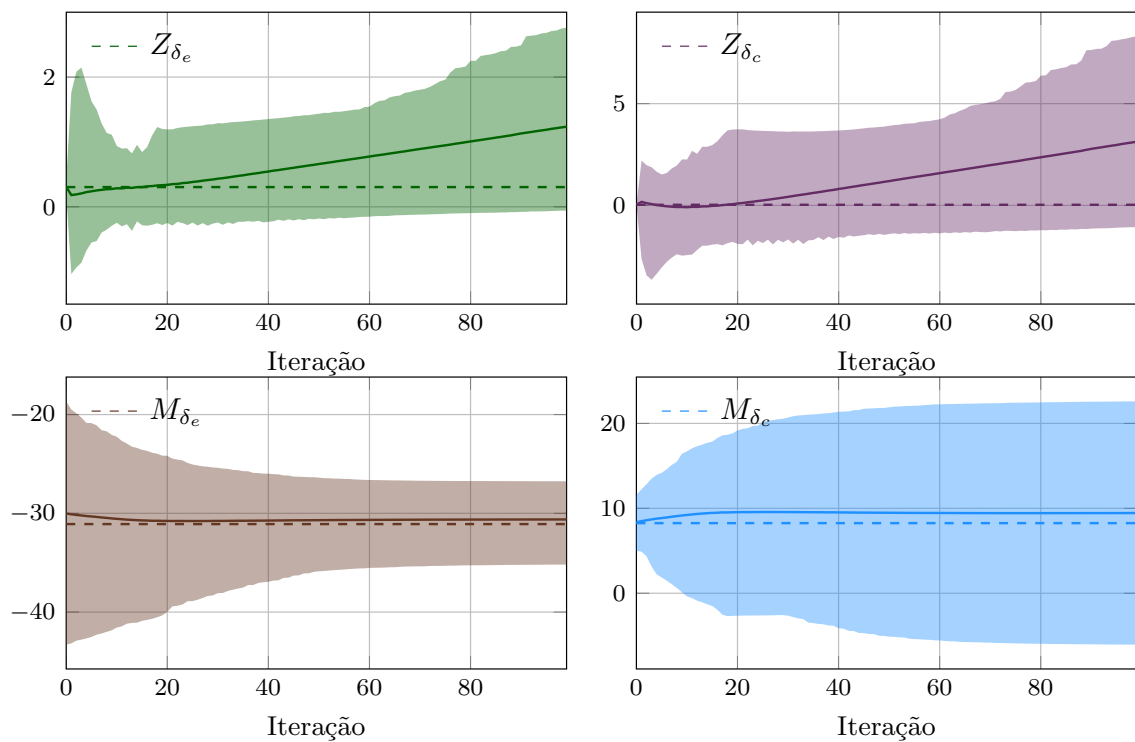


Figura 7.5: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do modelo (7.37) e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes.

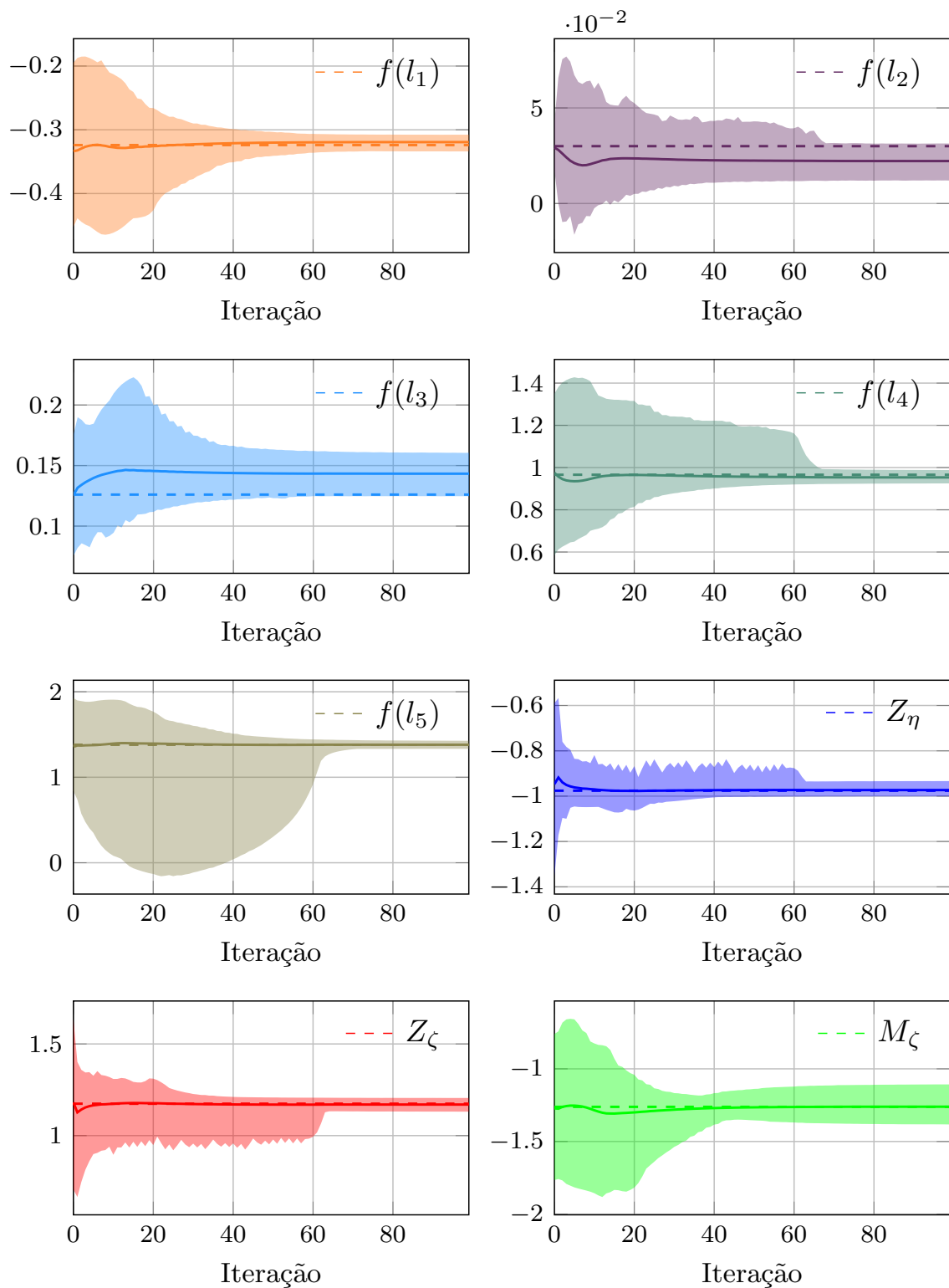


Figura 7.6: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do sistema e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes.

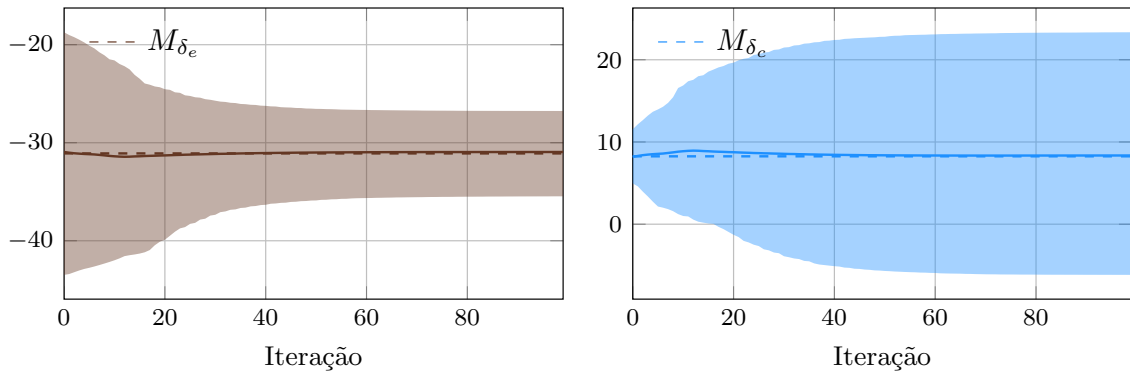


Figura 7.7: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM. A linha cheia é a média sobre 240 realizações do sistema e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 240 realizações diferentes.

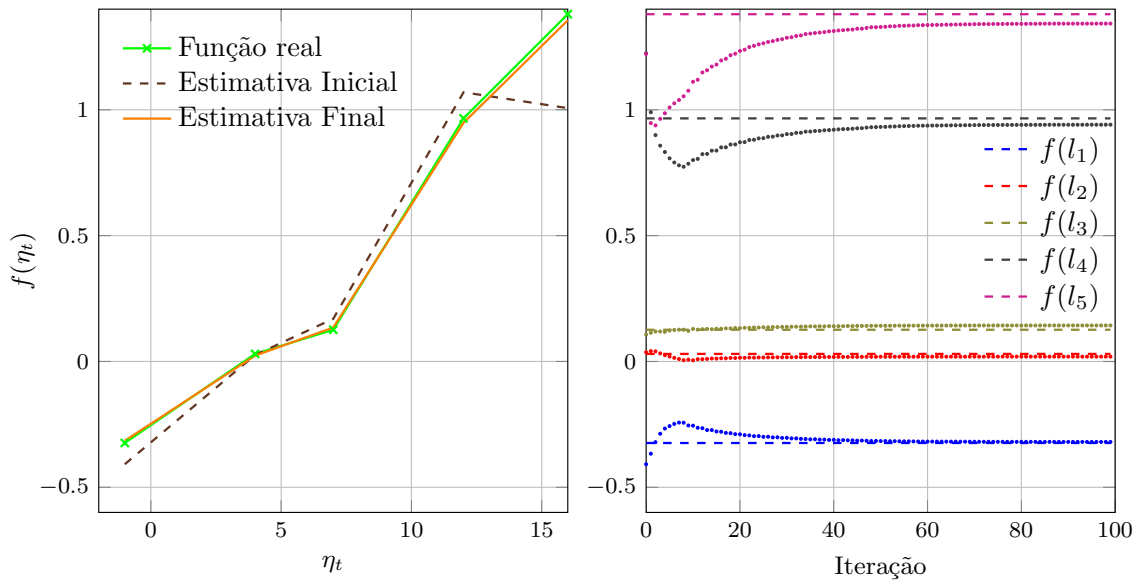


Figura 7.8: Estimativa da função afim para uma das 240 realizações. A linha tracejada é representada a função afim por partes utilizada para inicializar o algoritmo EM, a linha laranja é a estimativa final encontrada após 100 iterações do algoritmo EM.

Tabela 7.4: Parâmetros do modelo SDOFS

Param.	$\Delta t$ (s)	$D$ (N·s/mm)	$M$ (t)	$a$ (N/mm)	$l_1, l_2$ (mm)
Valor	0.01	0.5	1	[50 5 50]	1

Tabela 7.5: Erro médio das estimativas, média sobre 300 realizações.

Param.	$a_1$	$a_2$	$D$	$M$
Valor médio	44.6820	8.6374	0.5061	1.0013
Erro médio %	10.64	72.75	1.22	0.13

### 7.2.2 Identificação do Sistema Massa-Mola

O problema consiste em identificar

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \ a_2 \ D \ M]$$

do modelo (6.51) introduzido na Seção 6. Os valores utilizados para simular o sistema são apresentados na Tabela 7.4. Utilizamos (7.28) para amostrar  $M = 600$  trajetórias  $r_{1:T}$  e então calcular (7.36). Para maximizar esta função utilizamos a função `fminunc` do MATLAB. A Figura 7.9 apresenta a identificação do modelo (6.51) para 300 realizações do sistema e para 100 iterações do algoritmo EM proposto. Para cada realização o valor inicial do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  é tal que cada componente do vetor pertença ao intervalo de  $\pm 40\%$  do valor correspondente do vetor de parâmetros utilizado para simular o sistema. Temos ainda que  $\boldsymbol{\omega}_t \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[0.01, 0.01])$ ,  $\boldsymbol{\nu}_t \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[0.1, 0.1])$ ,  $\mathbf{x}_1 \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}[1, 1])$  e a matriz  $C$  em (6.51) é a matriz identidade.

Na Figura 7.9 é apresentada a identificação dos parâmetros  $a_1, a_2, D$  e  $M$ , onde a linha tracejada é o valor utilizado para simular o sistema e a linha cheia é a média dos parâmetros estimados em função das iterações do algoritmo EM proposto. Observe que as estimativas dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  são polarizadas. A Tabela 7.5 apresenta o erro entre o valor real e a média do valor encontrado na última iteração do algoritmo EM assim como o valor médio estimado.

A polarização nos parâmetros encontrada pode ser devido ao número de trajetórias amostradas. O método de integração utilizado no algoritmo proposto se assemelha ao algoritmo de *Importance Sampling* apresentado na Seção 5.2. Como apresentado, este estimador é tendencioso, porém consistente, *i.e.*, a estimativa converge assintoticamente para o valor real quando, neste caso, o número de trajetórias amostradas tende a infinito. Uma maneira de testar se a polarização é resultado do número de trajetórias amostradas seria aumentando o número de trajetórias amostradas. Porém, o custo computacional para isso cresce rapidamente. Assim, para contornar este problema realizamos a identificação assumindo que a trajetória  $r_{1:T}$  é conhecida, ou seja, assumimos que para cada instante de tempo o submodelo ativo é conhecido.

A Figura 7.10 apresenta a identificação dos parâmetros  $a_1, a_2, D$  e  $M$  para 350 realizações do sistema e para 100 iterações do algoritmo EM considerando a trajetória  $r_{1:T}$  conhecida. Para cada realização o valor inicial do parâmetro  $\boldsymbol{\theta}$  é tal que cada componente do vetor pertença ao intervalo de  $\pm 40\%$  do valor correspondente do vetor de parâmetros utilizado para simular o sistema. A linha tracejada é o valor utilizado para simular o sistema e a linha cheia é a média dos parâmetros estimados

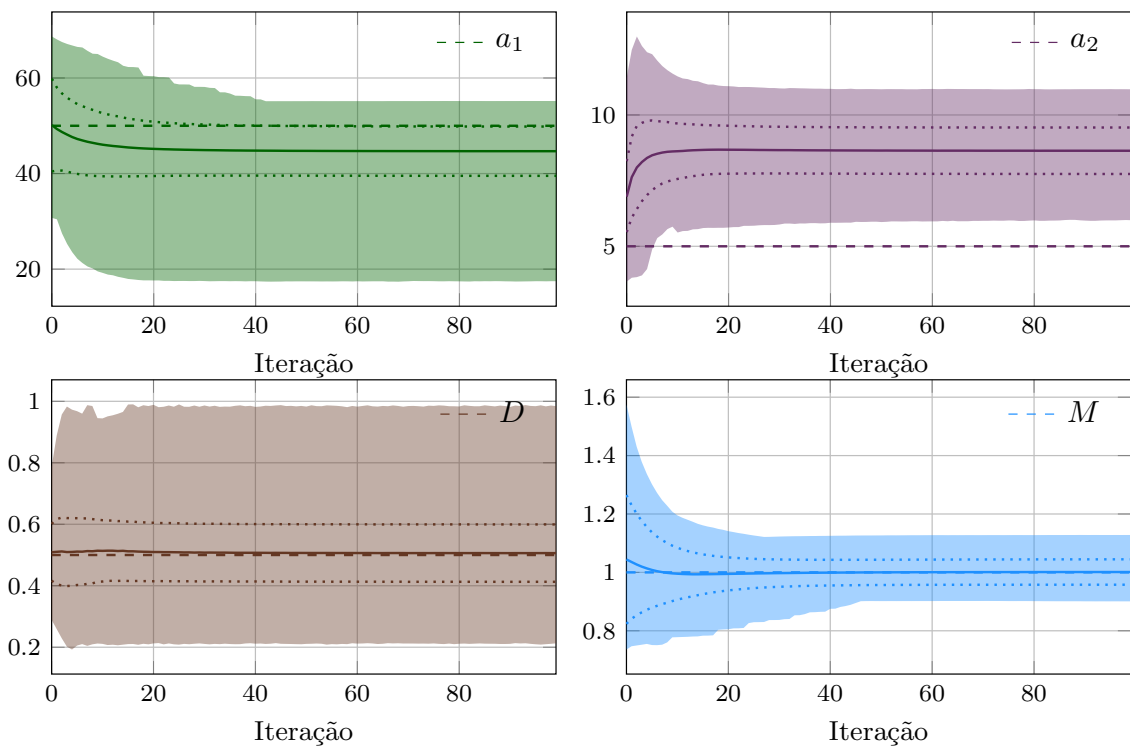


Figura 7.9: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM,  $M = 600$  trajetórias  $r_{1:T}$ . A linha cheia é a média sobre 300 realizações do sistema, a linha pontilhada é média  $\pm$  desvio padrão e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 300 realizações diferentes.



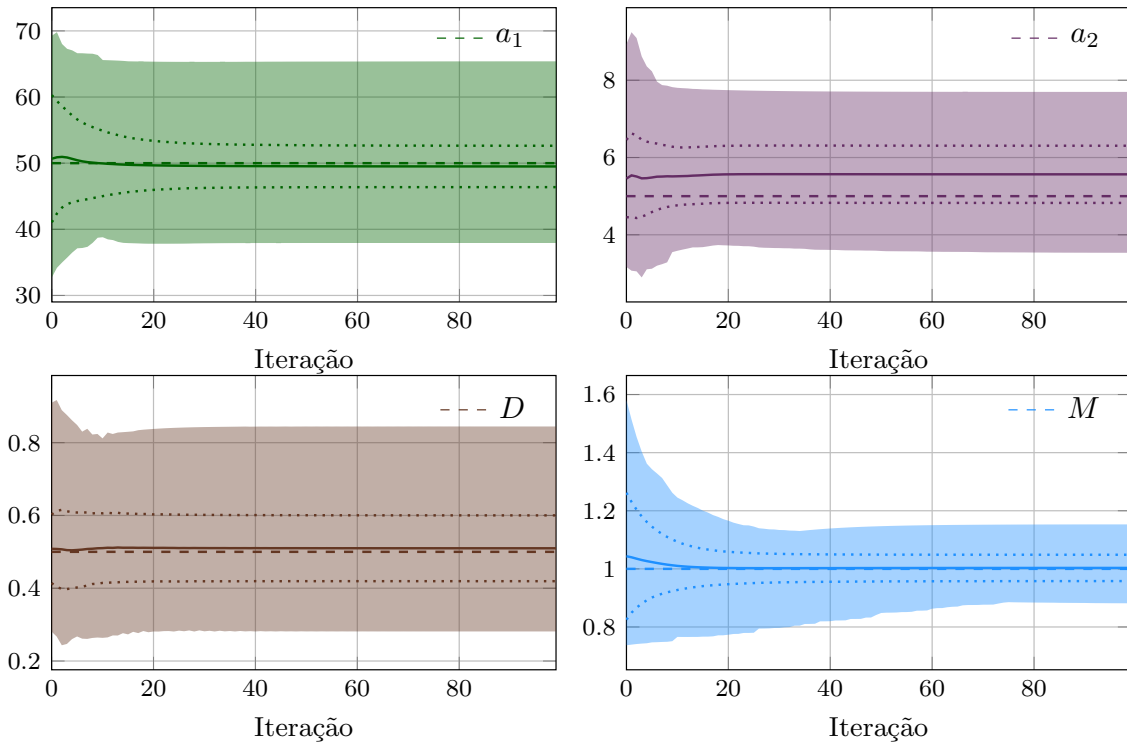


Figura 7.10: Estimativa dos parâmetros em função das iterações do algoritmo EM assumindo que a trajetória real é conhecida. A linha cheia é a média sobre 350 realizações do sistema, a linha pontilhada é média  $\pm$  desvio padrão e a linha tracejada é o valor real do parâmetros. A área sombreada representa os limites superior e inferior sobre as 350 realizações diferentes.

em função das iterações do algoritmo EM. A Tabela 7.6 apresenta o erro entre o valor real e a média do valor encontrada na última iteração do algoritmo EM assim como o valor médio estimado. Observe que o erro na estimativa do parâmetros  $a_1$  passou de 10.64% no caso anterior para 0.99% quando utilizamos a trajetória real. Já para parâmetro  $a_2$ , o erro passa de 72.75% para o primeiro caso para 11.30%. Apesar do erro na estimativa para o parâmetros  $a_2$  ter diminuído, este continua polarizado. Esta polarização pode ser intrínseca do algoritmo EM. Podemos observar que na maioria dos trabalhos que utilizam o algoritmo EM para a identificação de sistemas não lineares apresentam alguma polarização nos parâmetros (OZKAN et al., 2015), (HARTMANN; VINGA; LEMOS, 2013), (WILLS; SCHÖN; NINNESS, 2008), (OLSSON; WESTERBORN, 2015). Tal polarização pode ser resultado de alguma aproximação utilizada no algoritmo EM, assim como da convergência das estimativas dos parâmetros para um mínimo local da função *likelihood*.

Tabela 7.6: Erro médio das estimativas, trajetória conhecida. Média sobre 350 realizações.

Param.	$a_1$	$a_2$	$D$	$M$
Valor médio	49.5052	5.5648	0.5098	1.0033
Erro médio %	0.99	11.30	1.96	0.33

## 8 CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho apresentamos um estimador de estados recursivo e um algoritmo de identificação de parâmetros para uma classe de modelos afins por partes.

No estimador de estado proposto, calculamos a distribuição *a posteriori* do estado de forma analítica. O número de elementos desta distribuição cresce exponencialmente com o tempo. Para contornar este problema, aproximamos a distribuição *a posteriori* por uma única distribuição Gaussiana utilizando *Moment Matching*. Obtivemos resultados similares aos do filtro de partículas marginalizado que fornece a solução ótima para o problema. A vantagem do algoritmo proposto frente ao filtro de partículas é que ele exige muito menos poder computacional e ainda é de fácil implementação. O filtro de partículas depende, também, de uma série de parâmetros de projeto a serem escolhidos pelo usuário, como por exemplo, o número de partículas, proposta a ser utilizada, algoritmo de reamostragem, quando realizar a reamostragem. Por outro lado, o estimador proposto apresenta uma solução simples e de fácil implementação. Enquanto o filtro de partículas simula o sistema inúmeras vezes, o filtro proposto consiste, essencialmente, em executar um filtro de Kalman para cada região do espaço de estados e calcular a função distribuição de probabilidades para cada região.

Comparamos ainda o estimador proposto com o muito utilizado filtro de Kalman estendido. Com o estimador proposto, obtivemos resultados que superaram o filtro de Kalman estendido. O filtro de Kalman estendido utiliza uma aproximação local da equação de estado, o que afeta a estimativa quando o estado está próximo aos limites que formam cada região da função afim por partes, ou ainda se a incerteza na posição do estado é maior ou da mesma ordem de magnitude do domínio de cada submodelo.

A partir dos resultados obtidos, uma extensão direta a este trabalho seria estudar um estimador de estado suavizado para a classe de modelos afins utilizadas neste trabalho. O estimador de estado suavizado é o estimador que considera toda informação disponível do sistema para calcular a estimativa e pode ser utilizado com o algoritmo EM clássico para realizar a identificação dos parâmetros do modelo. Uma extensão não tão direta, mas de grande relevância é generalizar o estimador de estados para abranger diferentes classes de modelos afins por partes, tais como modelos onde mais de um estado, a saída, ou ainda, o ruído, possuam dinâmica afim que dependam do estado. Nestes casos, o problema está em calcular a distribuição a posteriori (6.28) cuja a solução analítica não existe e por isso teria que ser aproximada.

Quanto ao algoritmo de identificação proposto, utilizamos a função distribuição cumulativa para calcular a probabilidade do estado estar em cada região que delimita

a função afim e então amostrar regiões prováveis para o estado para todo tempo. Os resultados de identificação apresentaram um erro de estimação pequeno, porém a estimativa de alguns parâmetros da função afim eram polarizadas. Vale ressaltar que o algoritmo EM pode resultar em estimativas polarizadas como pode ser observado em diversos trabalhos encontrados na literatura.

Consideramos que as regiões da função afim por partes que descrevem a dinâmica do estado eram conhecidas. Um complemento a este trabalho seria realizar a identificação destas regiões, assim como o número de regiões da função afim por partes. Como consideramos a medida direta do estado com dinâmica afim, uma maneira para identificar as regiões e também o número de regiões seria, primeiramente, identificar as regiões utilizando a medida através de algum algoritmo de classificação, e então utilizar o algoritmo EM proposto para identificar os demais parâmetros. A identificação de classes de modelos afim por partes mais genéricas também é um trabalho bastante relevante e que para a representação por variáveis de estados apresenta muitos pontos ainda a serem estudados.

## APÊNDICE A FILTRO DE KALMAN

### A.1 Prova Bayesiana para o Filtro de Kalman

Suponha que

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, P_{t|t-1}), \quad (\text{A.1})$$

onde a média  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$  e covariância  $P_{t|t-1}$  são conhecidos. Isto é verdade para  $t = 1$  e será mostrado por indução que será válido para todo  $t$ .

A pdf *a posteriori* (4.12) é obtida por

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t} \quad (\text{A.2})$$

onde o denominador é uma constante de normalização. Como o modelo é linear Gaussiano temos que

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} |R|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t)^T R^{-1}(\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t)\right). \quad (\text{A.3})$$

assim podemos reescrever o numerador de (A.2) utilizando (A.1) e (A.3)

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{y}_t | C\mathbf{x}_t, R) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \\ &= [(2\pi)^{n_x+n_y} |R| |P_{t|t-1}|]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t)^T R^{-1}(\mathbf{y}_t - C\mathbf{x}_t) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T P_{t|t-1}^{-1}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})\right) \\ &= [(2\pi)^{n_x+n_y} |R| |P_{t|t-1}|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})^T P_{t|t}^{-1}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})\right) \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_t^T R^{-1} \mathbf{y}_t + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T P_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^T P_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t})\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$P_{t|t}^{-1} \triangleq (C^T R^{-1} C + P_{t|t-1}^{-1})$$

e

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} \triangleq (P_{t|t} C^T R^{-1}(\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})$$

Rescrevendo (A.4) em termos da distribuição normal

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n_y} |P_{t|t}^{-1}| |R| |P_{t|t-1}|} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \mathbf{y}_t^T R^{-1} \mathbf{y}_t + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T P_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^T P_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \right) \right) \quad (\text{A.5})$$

utilizando a identidade  $|X + AB| = |X| |I + BX^{-1}A|$  na definição de  $P_{t|t}^{-1}$  obtemos

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}_t|C\mathbf{x}_t, R)\mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) = \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n_y} |P_{t|t-1}^{-1}| |I + CP_{t|t-1}C^T| |R| |P_{t|t-1}|} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \mathbf{y}_t^T R^{-1} \mathbf{y}_t + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T P_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^T P_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \right) \right) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \\ = \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n_y} |R + CP_{t|t-1}C^T|} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \mathbf{y}_t^T R^{-1} \mathbf{y}_t + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T P_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^T P_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \right) \right) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (\text{A.6})$$

Reescrevendo o expoente da exponencial em (A.6) utilizando a definição de  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  e  $P_{t|t}^{-1}$

$$\mathbf{y}_t^T R^{-1} \mathbf{y}_t + \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T P_{t|t-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}^T P_{t|t}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{t|t} \\ = (\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T (R^{-1} - R^{-1}CP_{t|t}C^TR^{-1})(\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a identidade de Woodbury,  $(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$  em (A.7)

$$(\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T (R^{-1} - R^{-1}CP_{t|t}C^TR^{-1})(\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \\ = (\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T (R + CP_{t|t-1}C^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) \quad (\text{A.8})$$

Por fim, o numerador de (A.2) será, substituindo (A.8) em (A.6),

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) \quad (\text{A.9})$$

$$= \left[ \frac{1}{(2\pi)^{n_y} |R + CP_{t|t-1}C^T|} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})^T (R + CP_{t|t-1}C^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})]} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \\ = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, R + CP_{t|t-1}C^T) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (\text{A.10})$$

O denominador de (A.2) é a integral de (A.10) com respeito a  $\mathbf{x}_t$

$$p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p_{\theta}(\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t)p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t \\ = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, R + CP_{t|t-1}C^T) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \\ = \mathcal{N}(\mathbf{y}_t; C\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, R + CP_{t|t-1}C^T), \quad (\text{A.11})$$

Assim, dividindo (A.6) por (A.11)

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) \quad (\text{A.12})$$

Deste modo, a *posterior* de  $\mathbf{x}_t$  é Gaussiana com média  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  e covariância  $P_{t|t}$ . A distribuição *a priori* da medida  $\mathbf{y}_t$  é (A.11) Para finalizar, precisamos mostrar que  $p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$ , completando a recursão

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) &= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \\ &= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_{1:t}) p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \\ &= \int p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) p_{\theta}(\mathbf{x}_t|\mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Como o modelo é linear e Gaussiano temos que

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{x}_t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t, Q),$$

assim

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t, Q) \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \hat{\mathbf{x}}_{t|t}, P_{t|t}) d\mathbf{x}_t \quad (\text{A.14})$$

Expandindo os termos a direita de (A.14), onde  $\Sigma^{-1} \triangleq A^T Q^{-1} A + P_{t|t}^{-1}$  e  $M \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{t|t} + \Sigma A^T Q^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - (A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t))$  obtemos

$$\begin{aligned} p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - M)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_t - M)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{t+1} - (A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t))^T [Q^{-1} - Q^{-1} A \Sigma A^T Q^{-1}] (\mathbf{x}_{t+1} - (A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t))\right) d\mathbf{x}_t \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Utilizando a identidade de Woodbury

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left(P_{t|t}^{-1} + A^T Q^{-1} A\right)^{-1} \\ &= P_{t|t} - P_{t|t} A^T (Q + A P_{t|t} A^T)^{-1} A P_{t|t}, \\ P_{t|t} &= \left(P_{t|t-1}^{-1} + C^T R^{-1} C\right)^{-1} \\ &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} C^T (R + C P_{t|t-1} C^T)^{-1} C P_{t|t-1} \end{aligned}$$

e

$$(Q^{-1} - Q^{-1} A \Sigma A^T Q^{-1})^{-1} = Q + A P_{t|t} A^T.$$

Desta forma,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = \left[\frac{|\Sigma| |Q + A P_{t|t} A^T|}{|Q| |P_{t|t}|}\right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t, Q + A P_{t|t} A^T) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; M, \Sigma) d\mathbf{x}_t \quad (\text{A.16})$$

Temos que

$$\frac{|\Sigma| |Q + AP_{t|t}A^T|}{|Q| |P_{t|t}|} = \frac{|Q + AP_{t|t}A^T|}{|\Sigma^{-1}| |Q| |P_{t|t}|},$$

utilizando a relação  $|X + AB| = |X| |I + BX^{-1}A|$  em  $|\Sigma^{-1}|$

$$|\Sigma^{-1}| = |P_{t|t}^{-1}| |I + AP_{t|t}A^TQ^{-1}|$$

que significa

$$\frac{|Q + AP_{t|t}^{-1}A^T|}{|\Sigma^{-1}| |Q| |P_{t|t}|} = \frac{|Q + AP_{t|t}^{-1}A^T|}{|P_{t|t}^{-1}| |I + AP_{t|t}A^TQ^{-1}| |Q| |P_{t|t}|} = \frac{|Q + AP_{t|t}^{-1}A^T|}{|Q + AP_{t|t}^{-1}A^T|} = 1$$

Por fim,

$$p_{\theta}(\mathbf{x}_{t+1}|\mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t, Q + AP_{t|t}A^T) \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; M, \Sigma) d\mathbf{x}_t \quad (\text{A.17})$$

$$= \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t+1}; A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t, Q + AP_{t|t}A^T) \quad (\text{A.18})$$

O que significa que a distribuição *a posteriori* de  $\mathbf{x}_{t+1}$  dado  $\mathbf{y}_{1:t}$  é Gaussiana com média  $A\hat{\mathbf{x}}_{t|t} + B\mathbf{u}_t$  e covariância  $Q + AP_{t|t}A^T$ .

## APÊNDICE B ALGORITMO EM

### B.1 Derivação de $L_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T})$

Retomando (7.19),

$$L_{\theta}(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:T}, r_{1:T}) = \sum_{t=2}^T \log \mathcal{N}(\mathbf{x}_t | A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} + B \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}, Q). \quad (\text{B.1})$$

Para dado  $t$  temos

$$\log \mathcal{N}(\mathbf{x}_t | A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} + B \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}, Q) \quad (\text{B.2})$$

$$= \log \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_x}{2}} |Q|^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$- \frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} - B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{b}_{r_{t-1}})^{\top} Q^{-1} (\mathbf{x}_t - A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} - B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{b}_{r_{t-1}}) \quad (\text{B.4})$$

Definindo

$$\mathcal{L}_1 \triangleq - \frac{1}{2} (\mathbf{x}_t - A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} - B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{b}_{r_{t-1}})^{\top} Q^{-1} (\mathbf{x}_t - A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} - B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{b}_{r_{t-1}}) \quad (\text{B.5})$$

e expandindo (B.5) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & - \frac{1}{2} \mathbf{x}_t^{\top} Q^{-1} \mathbf{x}_t + \mathbf{x}_t^{\top} Q^{-1} A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{x}_t^{\top} Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{x}_t^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{t-1}^{\top} A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}^{\top} A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1}^{\top} A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{u}_{t-1}^{\top} B^{\top} Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-1}^{\top} B^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Note que todos os termo em (B.6) são escalares. Como o traço de uma variável escalar é ela mesma temos que (omitindo os termos que não dependem de  $\theta$  definido por  $\pm$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \pm & \text{tr} (Q^{-1} A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_t^{\top}) + \text{tr} (Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{x}_t^{\top}) + \text{tr} (Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \mathbf{x}_t^{\top}) \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} (A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} A_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}^{\top}) - \text{tr} (A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}^{\top}) - \text{tr} (A_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \mathbf{x}_{t-1}^{\top}) \\ & - \frac{1}{2} \text{tr} (B^{\top} Q^{-1} B \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}_{t-1}^{\top}) - \text{tr} (B^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \mathbf{u}_{t-1}^{\top}) - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{r_{t-1}}^{\top} Q^{-1} \mathbf{b}_{r_{t-1}} \end{aligned}$$



onde utilizamos a propriedade  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ . Escrevendo na forma  $\langle a, b \rangle \triangleq \text{tr}(a^\top b) = a^\top \cdot b$  obtemos

$$\mathcal{L}_1 \stackrel{\pm}{=} \langle \Psi_{r_{t-1}}(\theta), s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \rangle + \Xi_{r_{t-1}}(\theta),$$

onde

$$\Psi_{r_{t-1}}(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} Q^{-1}A_{r_{t-1}} \\ Q^{-1}(B\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}) \\ -\frac{1}{2}A_{r_{t-1}}^\top Q^{-1}A_{r_{t-1}} \\ -A_{r_{t-1}}^\top Q^{-1}(B\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{b}_{r_{t-1}}) \end{bmatrix}, \quad s(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_t^\top \\ \mathbf{x}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1}^\top \\ \mathbf{x}_{t-1}^\top \end{bmatrix}$$

e

$$\Xi_{r_{t-1}}(\theta) \triangleq -\frac{1}{2}\mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1}B\mathbf{u}_{t-1} - \mathbf{u}_{t-1}^\top B^\top Q^{-1}\mathbf{b}_{r_{t-1}} - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{r_{t-1}}^\top Q^{-1}\mathbf{b}_{r_{t-1}} \quad (\text{B.7})$$

## REFERÊNCIAS

- ALDRICH, J. R.A. Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922. **Statistical Science**, Beachwood,USA, v.12, n.3, p.162–176, Sept. 1997.
- ALSPACH, D. L.; SORENSON, H. W. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York,USA, v.17, n.4, p.439–448, Aug. 1972.
- ANDREA, G. A Survey on Switched and Piecewise Affine System Identification. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION, 16., 2012, Brussels, Belgium. **Anais...** Luxemburg: Elsevier, 2012. p.344–355.
- ARULAMPALAM, M. S. et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.50, n.2, p.174–188, 2002.
- BAKO, L. et al. Identification of Switched Linear State Space Models without Dwell Time. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION, 15., 2009, Saint-Malo, France. **Anais...** Luxemburg: Elsevier, 2009. p.569–574.
- BAKO, L.; LAUER, F.; BLOCH, G. Identification of MIMO switched state-space models. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2013, Washington, USA. **Anais...** Laxemburg: Elsevier, 2013. n.1, p.71–76.
- BARBER, D. Expectation correction for smoothed inference in switching linear dynamical systems. **Journal of Machine Learning Research**, Vancouver, v.7, p.2515–2540, 2006.
- BARBER, D.; MESOT, B. A Novel Gaussian Sum Smoother for Approximate Inference in Switching Linear Dynamical Systems. In: ADVANCES IN NEURAL INFORMATION PROCESSING SYSTEMS, 18., 2007, Vancouver. **Anais...** London: MIT Press, 2007. p.4–11.
- BAYES, M.; PRICE, M. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, London, v.53, p.370–418, Jan. 1763.
- BERGMAN, N. **Recursive Bayesian Estimation Navigation and Tracking Applications**. 1999. 203 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Linköping University, 1999.

BJÖRCK, Å. **Numerical Methods for Least Squares Problems**. Pennsylvania, USA: SIAM, 1996.

BORGES, J. et al. A switching detection method based on projected subspace classification. In: **IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL**, 44., 2005, Seville, Spain. **Anais...** New York: IEEE, 2005. v.6, n.1, p.344–349.

DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. **Journal of the Royal Statistical Society**. . . . , New Jersey, USA, v.39, n.1, p.1–38, 1977.

DOUCET, A. et al. Rao-Blackwellised Particle Filtering for Dynamic Bayesian Networks. In: **CONFERENCE ON UNCERTAINTY IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE**, 16., 2000, Stanford, USA. **Proceedings...** Luxemburg: Elsevier, 2000. p.176–183.

DOUCET, A.; GODSILL, S.; ANDRIEU, C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. **Statistics and computing**, New York, Springer, v.10, n.3, p.197–208, 2000.

DOUCET, A.; GORDON, N. J.; KROSHNAMURTHY, V. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.49, n.3, p.613–624, Mar. 2001.

DOUCET, A.; FREITAS, N.; GORDON, N. (Ed.). **Sequential Monte Carlo Methods in Practice**. New York: New York, Springer, 2001.

FLURY, T.; SHEPHARD, N. Bayesian Inference Based Only on Simulated Likelihood: particle filter analysis of dynamic economic models. **Econometric Theory**, New York, USA, v.27, n.05, p.933–956, May 2011.

FREITAS, J. F. G. de et al. Sequential monte carlo methods To train neural network models. **Neural computation**, Cambridge, USA, v.12, n.4, p.955–93, Apr. 2000.

GHAHRAMANI, Z.; HINTON, G. E. Variational Learning for Switching State-Space Models. **Neural Computation**, Cambridge, USA, v.12, n.4, p.831–864, Apr. 2000.

GORDON, N. J.; SALMOND, D. J.; SMITH, A. F. M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. **IEE Proceedings F (Radar and Signal ...)**, New York, v.140, n.2, p.107–113, 1993.

GUSTAFSSON, F. Statistical signal processing approaches to fault detection. **Annual Reviews in Control**, Tarrytown, v.31, n.1, p.41–54, 2007.

GUSTAFSSON, F. Particle filter theory and practice with positioning applications. **IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine**, New York, v.25, n.7, p.53–82, Jul. 2010.

HARTMANN, A. et al. Identification of switched ARX models via convex optimization and expectation maximization. **Journal of Process Control**, Tarrytown, v.28, p.9–16, Apr. 2015.

- HARTMANN, A.; VINGA, S.; LEMOS, J. M. Hybrid identification of time-varying parameter with particle filtering and expectation maximization. In: **MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION**, 21., 2013, Plata-nias-Chania, Crete. **Anais. . .** New York: IEEE, 2013. p.884–889.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; BALAKRISHNAN, N. **Continuous Univariate Distributions**. 2.ed. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1994. v.1.
- KAHN, H.; HARRIS, T. E. Estimation of particle transmission by random sampling. **National Bureau of Standards applied mathematics series**, Gaithersburg, v.12, p.27–30, 1951.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering**, New York, USA, v.82, n.Series D, p.35–45, 1960.
- LARSSON, R. **System Identification of Flight Mechanical Characteristics**. 2013. 138 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Linkoping University, 2013.
- LJUNG, L. **System Identification: theory for the user**. 2.ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1999.
- LOGOTHETIS, A.; KRISHNAMURTHY, V. Expectation maximization algorithms for MAP estimation of jump Markov linear systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.47, n.8, p.2139–2156, 1999.
- MAHFOUZ, I.; BADRAKHAN, F. Chaotic behaviour of some piecewise-linear systems, part II: systems with clearance. **Journal of Sound and Vibration**, Tarrytown, v.143, n.2, p.289–328, Dec. 1990.
- MCLACHLAN, G.; KRISHNAN, T. **The EM algorithm and extensions**. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2007. v.382.
- MERWE, R. van der et al. **The Unscented Particle Filter**. London: Cambridge University Engineering Department, 2000.
- MESOT, B. **Inference in Switching Linear Dynamical Systems Applied to Noise Robust Speech Recognition of Isolated Digits**. 2008. 112 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — École polytechnique fédérale de Lausanne EPFL, 2008.
- MURPHY, K. P. **Switching Kalman Filters**. Vancouver, Canada: [s.n.], 1998. 1–18 p.
- NINNESS, B.; WILLS, A.; SCHON, T. B. Estimation of general nonlinear state-space systems. In: **IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)**, 49., 2010, Atlanta, GA. **Anais. . .** New York: IEEE, 2010. p.6371–6376.
- OLSSON, J.; WESTERBORN, J. An efficient particle-based online EM algorithm for general state-space models\*\*This work is supported by the Swedish Research Council, Grant 2011-5577. **IFAC-PapersOnLine**, Laxemburg, Elsevier, v.48, n.28, p.963–968, feb 2015.

OZKAN, E. et al. Marginalized adaptive particle filtering for nonlinear models with unknown time-varying noise parameters. **Automatica**, Tarrytown, v.49, n.6, p.1566–1575, Jun 2013.

OZKAN, E. et al. Recursive Maximum Likelihood Identification of Jump Markov Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.63, n.3, p.754–765, Feb. 2015.

PAOLETTI, S. et al. Identification of Hybrid Systems A Tutorial. **European Journal of Control**, Tarrytown, v.13, n.2-3, p.242–260, Jan. 2007.

PAOLETTI, S. et al. A necessary and sufficient condition for input-output realization of switched affine state space models. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 47., 2008. **Anais. . .** New York: IEEE, 2008. p.935–940.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. Londres, Reino Unido: McGraw-Hill, 2002.

PORRECA, R. et al. Identification of parameters and structure of piecewise affine models of genetic networks. **IFAC Proceedings Volumes**, Laxemburg, Elsevier, v.42, n.10, p.587–592, 2009.

RAUCH, H. E.; STRIEBEL, C. T.; TUNG, F. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. **AIAA Journal**, Virginia, USA, v.3, n.8, p.1445–1450, Aug. 1965.

RAWLINGS, J. B.; BAKSHI, B. R. Particle filtering and moving horizon estimation. **Computers & Chemical Engineering**, Tarrytown, v.30, n.10-12, p.1529–1541, Sep. 2006.

RUI, R.; ARDESHIRI, T.; BAZANELLA, A. Identification of Piecewise Affine State-Space Models Via Expectation Maximization. In: IEEE MULTI-CONFERENCE ON SYSTEMS AND CONTROL, 2016, Buenos Aires. **Anais. . .** New York: IEEE, 2016.

RUI, R. et al. State Estimation for Piecewise Affine State-Space Models. **Submitted to IEEE Signal Processing Letters**, New York, USA, 2016.

RUNNALLS, A. Kullback-Leibler Approach to Gaussian Mixture Reduction. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, New York, v.43, n.3, p.989–999, Jul. 2007.

SÄRKKÄ, S. **Bayesian Filtering and Smoothing**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 254 p.

SCHÖN, T. B. **On Computational Methods for Nonlinear Estimation**. 2003. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Linköping University, 2003.

SCHÖN, T. B.; WILLS, A.; NINNESS, B. System identification of nonlinear state-space models. **Automatica**, Tarrytown, v.47, n.1, p.39–49, Jan. 2011.

SCHÖN, T.; GUSTAFSSON, F.; NORDLUND, P.-J. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models. **IEEE Transactions on Signal Processing**, New York, v.53, n.7, p.2279–2289, Jul. 2005.

SEAH, C. E.; HWANG, I. State Estimation for Stochastic Linear Hybrid Systems with Continuous-State-Dependent Transitions: an imm approach. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, New York, v.45, n.1, p.376–392, 2009.

SIMON, D. **Optimal State Estimation: kalman, h infinity, and nonlinear approaches**. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006.

TANNER, M. A.; WONG, W. H. The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation. **Journal of the American Statistical Association**, [S.l.], v.82, n.398, p.528, Jun. 1987.

VERDULT, V.; VERHAEGEN, M. Subspace identification of piecewise linear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 43., 2004, Paradise Island, Bahamas. **Anais. . .** New York: IEEE, 2004. p.3838–3843.

VIDAL, R.; MA, Y. A Unified Algebraic Approach to 2-D and 3-D Motion Segmentation and Estimation. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, London, v.25, n.3, p.403–421, Oct. 2006.

WAGNER, a. Identification of hybrid linear time-invariant systems via subspace embedding and segmentation (SES). In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 43., 2004. **Anais. . .** New York: IEEE, 2004. v.3, p.3227–3234.

WEILAND, S.; JULOSKI, a. L.; VET, B. On the equivalence of switched affine models and switched ARX models. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 45., 2006. **Proceedings. . .** New York: IEEE, 2006. n.1, p.2614–2618.

WILLS, A.; SCHÖN, T. B.; NINNESS, B. Parameter Estimation for Discrete-Time Nonlinear Systems Using EM. **IFAC Proceedings Volumes**, Laxemburg, Elsevier, v.41, n.2, p.4012–4017, jul 2008.