Estudo da Teoria Extremal de Grafos

Yuri Wladimir Pitthan, Orientador: Carlos Hoppen

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

Um grafo G é uma estrutura matemática que pode ser representada por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, de forma mais precisa, dize-se:

Definição 1. *Um grafo é um par $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e $E \subset \binom{V}{2}$ é o conjunto de arestas.*

Na Teoria Extremal de Grafos o interesse é determinar a relação entre algum invariante do grafo, como por exemplo, ordem, tamanho, número cromático que garanta uma certa propriedade. De forma genérica, dada uma propriedade $\mathcal{P}$ e uma invariante μ para uma classe $\mathcal{H}$ de grafos, deseja-se determinar o menor valor m para o qual cada grafo G em $\mathcal{H}$ com $\mu(G) > m$ possua a propriedade $\mathcal{P}$. Os grafos G em $\mathcal{H}$ com a propriedade $\mathcal{P}$ e com $\mu(G) = m$ são chamados de *grafos extremais* para o problema.

Uma exemplificação do tipo de problema descrito acima, também conhecida como Problema de Turán, consiste em determinar o número extremal, $ex(n, G)$, que é definido como o maior número de arestas de um grafo H, tal que, H possui exatamente n vértices e G não está contido em H. Neste caso, diz-se que G é um grafo proibido. Ocorre que determinar $ex(n, G)$ é uma tarefa em aberto, porém algumas famílias especiais de grafos possuem solução conhecida.

Definição 2. *Um **grafo completo** é um grafo no qual cada um de seus vértice é adjacente a todos os outros vértices. O grafo completo de r vértices é denotado por K^r.*

Definição 3. *O **grafo de Turán** $T^j(n)$ é o grafo com n vértices e todas as possíveis arestas entre as j partes de uma partição do conjunto de vértices cujas partes diferem por no máximo uma unidade.*

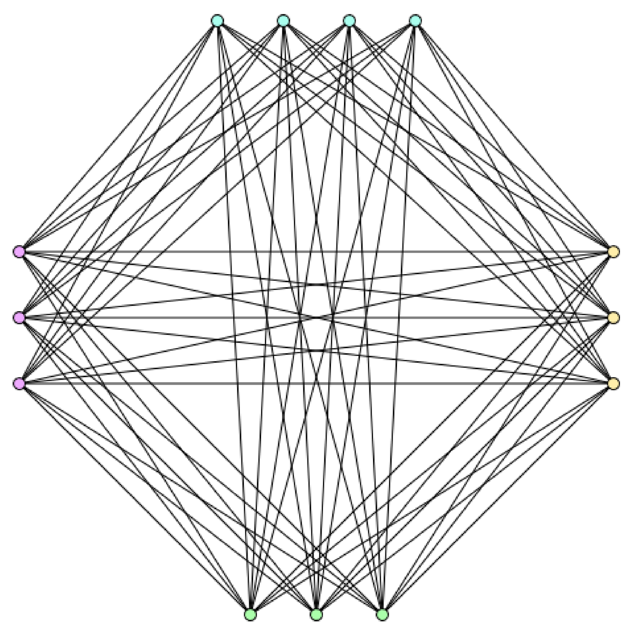

Figura 1: Grafo de Turán $T^4(13)$

O seguinte resultado é considerado como um dos resultados precursores da Teoria Extremal.

Teorema 1. *(Turán 1941) Para todos inteiros r, n com $r > 1$, cada grafo G que contém K^r e que possui n vértices e $ex(n, G)$ arestas é $T^{r-1}(n)$.*

Contudo o resultado diz respeito apenas a uma família de grafos. Um dos teoremas que ajuda a estabelecer cotas e é tido como um dos mais importantes da Teoria de Grafos é o Lema da Regularidade de Szemerédi.

Definição 4. *(Densidade) Denote por $||X, Y||$ o número de arestas entre os subconjuntos X e Y contidos nos vértices de G. Define-se como a densidade do par X, Y o número*

$$d(X, Y) = \frac{||X, Y||}{|X||Y|}$$

Definição 5. *(ϵ-regularidade) Dado $\epsilon > 0$, um par A,B de conjuntos disjuntos é dito ϵ-regular se para todo $X \subset A$ e $Y \subset B$ com $|X| \geq \epsilon A$ e $|Y| \geq \epsilon B$ satisfizer:*

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \epsilon$$

De posse das definições podemos enunciar o teorema.

Teorema 2. *(Lema da Regularidade de Szemerédi 1975) Para todo $\epsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo com $n \geq m$ vértices admite uma partição ϵ-regular $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ com $m \leq k \leq M$.*

O Lema da Regularidade pode ser visto como um teorema de estrutura para grafos densos, pois aproxima tais grafos com a exatidão desejada por objetos cuja complexidade é limitada independentemente do número de vértices do grafo original. O Lema ainda possui diversas aplicações em Teoria dos Números, Ciência da Computação, Geometria Discreta e Combinatória Aditiva.

Um resultado clássico que pode ser derivado do Lema da Regularidade é o Teorema de Erdös e Stone.

Definição 6. *(Número Cromático) Uma k-coloração dos vértices de um grafo é uma função $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $c(v) \neq c(w)$ sempre que v e w forem adjacentes. O número cromático, denotado por $\chi(H)$, é o menor k tal que H admite uma k-coloração dos vértices.*

Teorema 3. *(Erdös e Stone 1946) Todo grafo H com pelo menos uma arestas satisfaz,*

$$\lim_{n\to\infty} ex(n, H)\binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(H) - 2}{\chi(H) - 1}$$

Referências

[1] Béla Bollobás. *Extremal graph theory*. Courier Corporation, 2004.

[2] Reinhard Diestel. *Graph theory {graduate texts in mathematics; 173}*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & amp, 2000.