

# UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

## INSTITUTO DE MATEMÁTICA

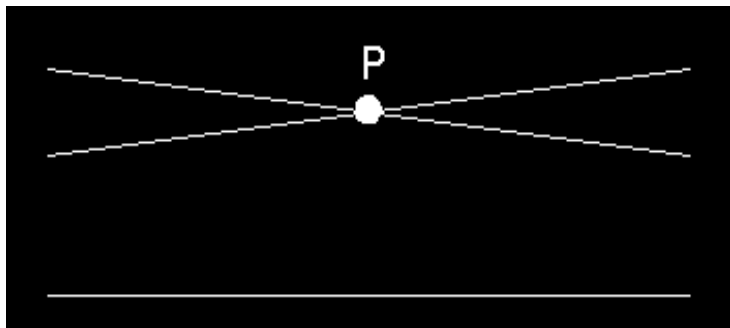
### Polígonos na Geometria Hiperbólica

Bruno Capoani

Professora Orientadora: Miriam Telichevesky

#### A Geometria Hiperbólica

Quinto postulado da geometria hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada.



#### Retas Paralelas

Dados uma reta  $n$  e um ponto  $P$  fora desta reta, existem exatamente duas retas  $m$  e  $m'$  que passam pelo ponto  $P$  e que separam o conjunto das retas que interceptam  $n$  do conjunto das que não interceptam  $n$ .

Essas são as retas paralelas a  $n$  passando por  $P$  em uma determinada direção. Estas retas formam ângulos iguais com a perpendicular baixada de  $P$  à reta  $n$ . Além disso, o ângulo mencionado é agudo.

#### O Ponto Ideal

É um ponto antes de todos os pontos de uma reta ou um ponto depois de todos os pontos desta mesma reta. Retas paralelas têm em comum um ponto ideal na direção do paralelismo.

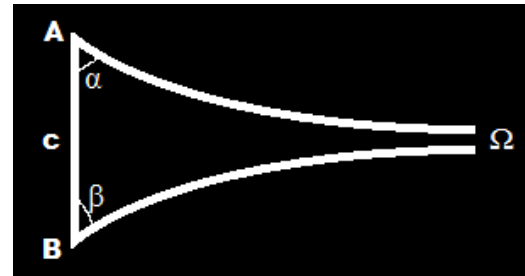
#### O Ponto Ultra-Ideal

Em uma reta  $n$ , serão acrescentados os pontos ultra-ideais  $\Gamma_m$ , onde  $m$  é qualquer reta perpendicular a  $n$ . Duas retas que não se interceptam têm em comum um único ponto ultra-ideal.

#### Polígonos na Geometria Hiperbólica

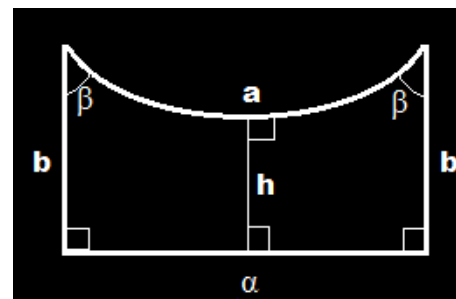
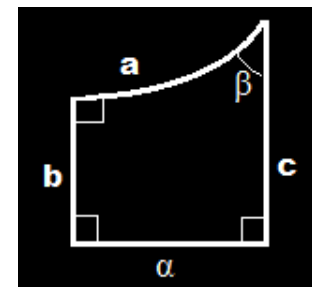
Uma particularidade da geometria hiperbólica é a possibilidade de utilizar tais pontos (ideais e ultra-ideais) para construir polígonos com características interessantes, tais como: triângulos cujos lados são retas paralelas, quadriláteros com soma de ângulos internos menor que  $360^\circ$ , pentágonos e hexágonos com mais de quatro ângulos retos, entre outros.

O estudo das características e propriedades de tais polígonos será o foco da apresentação.



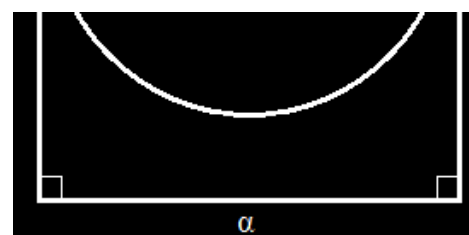
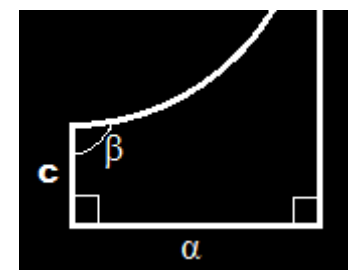
Triângulo Generalizado

Quadrilátero Birretângulo Retângulo



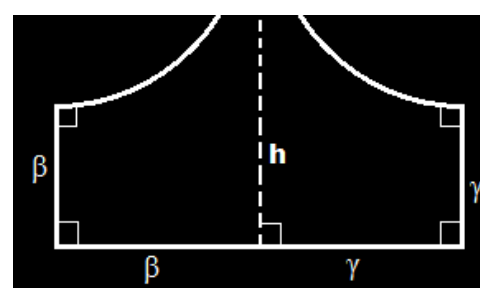
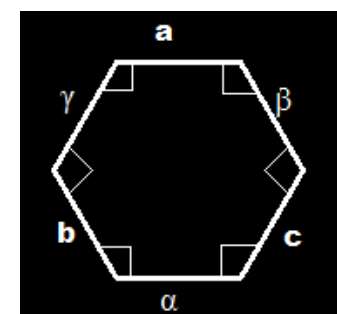
Quadrilátero Birretângulo Isósceles

Quadrilátero Birretângulo Assintótico



Quadrilátero Retângulo Duplamente Assintótico

Hexágono Retângulo



Pentágono Retângulo Simplesmente Assintótico

#### Referências

ROCHA, Luiz Fernando Carvalho da. Introdução à geometria hiperbólica plana. Rio de Janeiro, IMPA, 1987.