

Um Problema Inverso de Reconstrução de Fonte de Radiação

Oliver Hung Buo Tso¹
Liliane Basso Barichello²

1: Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional, UFRGS
2: Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS

XXVIII Salão de Iniciação Científica 2016



paz no plural

Introdução

Um problema de interesse em aplicações que envolvem transporte de radiação é caracterizar, a partir de dados conhecidos da intensidade de radiação, o meio onde ela se propaga, como em modelagem da tomografia óptica. De outra forma, por exemplo em problemas de blindagem, se procura estimar uma fonte que gerou tal intensidade.

Problemas como este fazem parte de uma classe de problemas conhecidos como *problemas inversos*. Tais problemas, em geral, são mal postos e a solução pode sofrer uma grande variação a partir de mudanças pequenas nos dados experimentais.

Objetivo

Dada a equação de transferência radiativa,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{\varpi}{2} \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' + Q(x, \mu),$$

deseja-se reconstruir a fonte externa, dada pelo termo Q , e o parâmetro L , que indica o grau de espalhamento da radiação no meio. Na equação, o parâmetro ϖ , chamado de albedo, indica a razão entre radiação incidente e refletida pela superfície do corpo; $\tau \in (0, \tau_f)$ é a variável espacial, sendo τ_f a espessura óptica do meio; $\mu \in [-1, 1]$ é a variável angular, o cosseno do ângulo polar θ formado entre a direção do feixe de radiação e o eixo τ ; e, $I(\tau, \mu)$ é a intensidade radiativa na posição τ , segundo a direção μ .

Metodologia

Várias técnicas para solução de problemas inversos envolvem a solução do problema direto. Neste trabalho, o problema inverso é tratado como um problema de otimização, ou seja, busca-se minimizar a soma dos resíduos quadrados entre valores calculados e dados experimentais. Para reconstrução da fonte no caso de funções constantes, foram utilizados o método de *Levenberg-Marquardt*[1][4][5] e o método dos *Gradientes Conjugados*[2][4], estudado neste trabalho.

Os próprios resultados gerados a partir dos problemas diretos, com inclusão de ruídos aleatórios, foram tomados como dados experimentais nos problemas inversos. A solução direta foi estabelecida a partir do método de *ordenadas discretas analítico*[3].

Os programas computacionais, implementados neste trabalho, foram utilizados para realização de testes de reconstrução da fonte em diferentes casos, variando os parâmetros ϖ e τ_f .

Problemas Teste

- Métodos: Levenberg-Marquardt(LM), Gradientes Conjugados(GC);
- Dados experimentais: radiação incidente (resultado do problema direto com ruídos aleatórios);
- Ruídos: multiplicação por números aleatórios entre 0.99 e 1.01;
- Parâmetros conhecidos: condições de contorno, ϖ , τ_f ;
- Reconstrução: $L = 6$, $Q = 5$;
- Estimativas iniciais: $L = 3$, $Q = 0$.

Caso 1 $\varpi = 0.99$, $\tau_f = 5$:

Teste	Levenberg-Marquardt			Gradientes Conjugados		
	L	Q	Iter.	L	Q	Iter.
1	6.20820528	5.02161598	6	6.20820533	5.02161598	14
2	6.16792645	5.01025702	6	6.16792627	5.01025698	13
3	5.81010875	4.98588695	6	5.81010883	4.98588694	12
4	5.72638471	4.98136385	6	5.72638464	4.98136385	12
5	5.78066517	4.97752683	6	5.78066546	4.97752681	12

Caso 2 $\varpi = 0.3$, $\tau_f = 50$:

Teste	Levenberg-Marquardt			Gradientes Conjugados		
	L	Q	Iter.	L	Q	Iter.
1	3.88451697	4.99959794	7	3.88451692	4.99959794	9
2	5.30506076	4.99731574	7	5.30506065	4.99731574	10
3	4.70095304	5.00159053	7	4.70095210	5.00159053	10
4	7.69922205	5.00515236	8	7.69922207	5.00515236	12
5	11.1101089	4.99853453	9	11.1101089	4.99853453	14

Conclusões

- Conseguiu-se reproduzir os resultados prévios para os tipos de testes feitos no trabalho anterior, utilizando o método dos GC;
- Obteve-se sucesso sempre que a reconstrução foi baseada em dados exatos. O mesmo não ocorreu com a inclusão dos ruídos;
- Os ruídos adicionados nos dados experimentais não influenciaram muito nos números de iterações dos algoritmos implementados;
- Em geral, o método de LM necessitou um número menor de iterações e tempo de execução do que o método dos GC para obtenção de estimativas com mesma precisão;
- O aumento no número de dados conhecidos não resulta necessariamente em melhores resultados para a estimativa, enquanto a escolha de dados em posições uniformemente distribuídas no domínio apresenta maior importância;
- Para um meio mais absorvedor com espessura maior, os métodos parecem ser mais sensíveis aos ruídos adicionados.

Trabalhos Futuros

Uma análise mais ampla de outras formas de consideração de ruídos ou mesmo de regularização dos dados é importante para uma conclusão mais detalhada. Tais questões podem ser tratadas na continuidade do estudo.

Referências

- [1] A. J. da Silva Neto e F. D. Moura Neto, *Problema Inverso: Conceitos Fundamentais e Aplicações*, EdUERJ, 2005. v. 1. 82p.
- [2] J. R. Shewchuk, *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, August 4, 1994.
- [3] L. B. Barichello, *Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems*, In: Helcio R. B. Orlande; O. Fudyin; D. Maillat; R. M. Cotta. (Org.). *Thermal Measurements and Inverse Techniques*. Boca Raton: CRC Press, 2011, p. 541-562.
- [4] M. N. Ozisik e Helcio R. B. Orlande, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, Inc.
- [5] O. Tso, *Salão de Iniciação Científica*, UFRGS, 2015.