O Problema de Kakeya em Corpos Finitos

Vinicius Medeiros Gomes da Silveira
Lucas da Silva Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
XXVIII SIC
Salão UFRGS 2016 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO
paz no plural
UFRGS PROPESQ

Revisão Histórica

A Origem do Problema

O problema de Kakeya foi proposto pela primeira vez por Sōichi Kakeya [Kak17][FK17], em 1917, e consiste da seguinte questão:

Problema 1. *Qual o conjunto do plano com menor área no qual pode ser rotado completa e continuamente, em seu interior, um segmento de reta unitário?*

Kakeya conjectura que a solução é o deltoide gerado por um círculo de raio $\frac{1}{4}$ rolando (sem deslizamento) sobre o interior de um círculo de raio $\frac{3}{4}$, que possui área $\frac{\pi}{8}$.

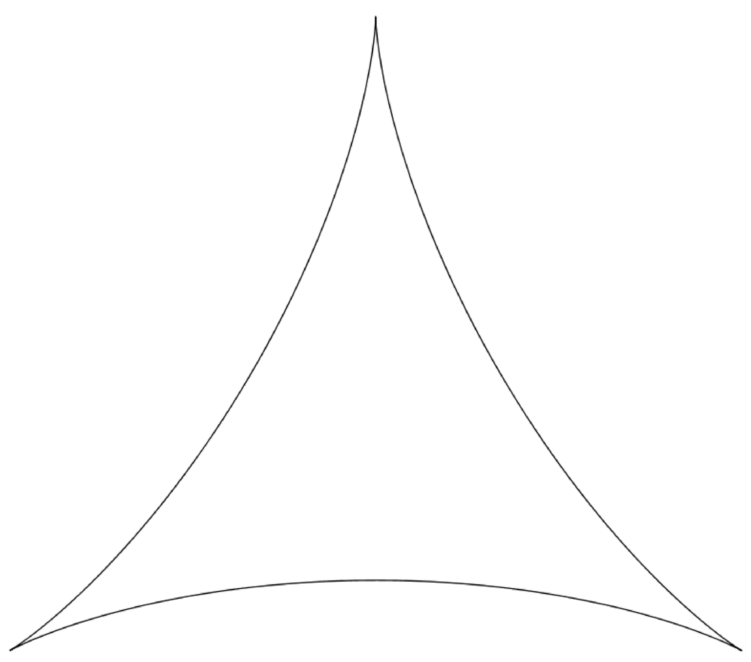

Figura 1: Deltoide

Em 1919, Abraham S. Besicovitch [Bes19] propõe um problema similar, no contexto do estudo de problemas de integração sobre retas no plano:

Problema 2. *Existe um conjunto que contém segmentos unitários em todas as direções e tem medida de Jordan (ou, equivalentemente, medida de Lebesgue) 0?*

Tal pergunta dá origem à seguinte definição:

Definição. $K \subset \mathbb{R}^n$ *é dito um* conjunto de Kakeya em $\mathbb{R}^n$ *(ou* conjunto de Besicovitch em $\mathbb{R}^n$*) se cumpre a seguinte condição:*

$$\forall \mathbf{e} \in S^{n-1} \exists a \in \mathbb{R}^n \forall t \in [0,1] : a + t\mathbf{e} \in K$$

Besicovitch dá a resposta para essa pergunta, apresentando a construção de um conjunto que satisfaz essas condições.

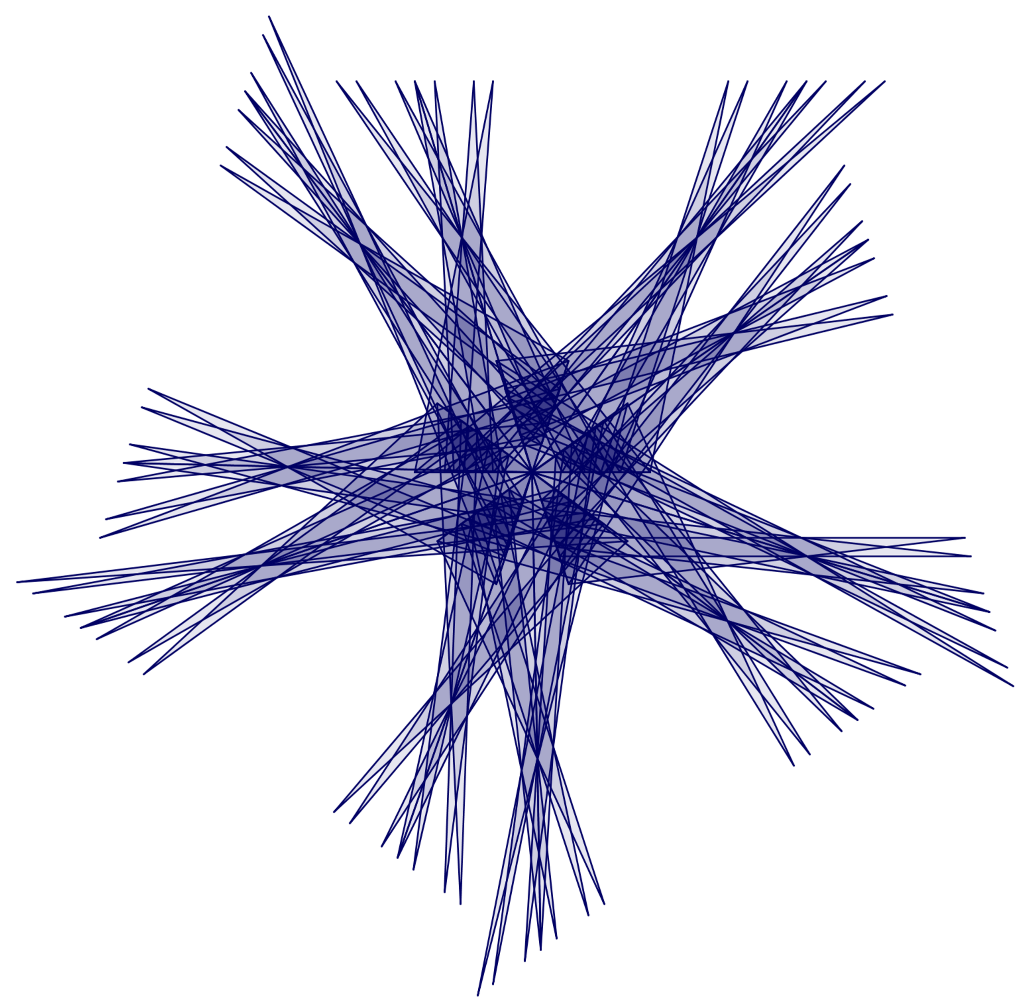

Figura 2: Uma iteração na construção de um conjunto de Besicovitch, utilizando o método das árvores de Perron

Resultados e a Conjectura de Kakeya

Ao longo do século XX foram descobertas diversas propriedades dos conjuntos de Kakeya. Um breve compilado é apresentado a seguir:

- (1920) J. Pál [Pál20] prova que a resposta para o problema 1 com a hipotese extra de convexidade sobre o conjunto é o triângulo equilatero de altura 1.
- (1942) H. J. van Alphen [Alp42] demonstra a existência de conjuntos de Kakeya limitados pelo disco de raio $2 + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.
- (1971) F. Cunningham [Cun71] mostra a existência de conjuntos de Kakeya conexos de medida $\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, no qual a rotação do segmento pode ser executada continuamente e dá um limite inferior não nulo para a medida de um conjunto de Kakeya *star-shaped*.
- (1971) R. Davies [Dav71] prova que todo conjunto de Kakeya em $\mathbb{R}^2$ tem dimensão de Hausdorff 2.

O resultado de Davies, contraintuitivo e contrastante com a existência de conjuntos de Kakeya de medida zero, leva à questão conhecida como a *Conjectura de Kakeya* [Wol99][Fur08].

Problema (Conjectura de Kakeya)**.** *Todo conjunto de Kakeya em $\mathbb{R}^n$ deve ter medida de Hausdorff igual a n?*

O estudo dessa conjectura levou a resultados interessantes no campo da Análise Harmônica e progressos na direção da sua prova, sumarizados no que segue:

- (1971) C. Fefferman [Fef71] dá uma solução para o problema dos multiplicadores no disco.
- (1977) A. Córdoba [Cor77] e J. Bourgain [Bour94] (na década de 1990) provam resultados relacionados a integrais oscilatórias.
- (1991) J. Bourgain [Bour91] introduz o argumento dos "bushes" e T. Wolff [Wol95] (em 1995) introduz o argumento dos "hairbrushes" para a determinação da dimensionalidade de conjuntos de Kakeya.
- (1995) T. Wolff [Wol95] prova o limite inferior de $\frac{n+2}{2}$ para a medida de Hausdorff.
- (2002) N. H. Katz e T. Tao [KT02] demonstram o limite inferior de $\left(2 - \sqrt{2}\right)(n-4) + 3$ para a medida de Hausdorff.
- (2008) T. Tao [Tao08] prova que não é possível executar a rotação do segmento continuamente em um conjunto de Kakeya em $\mathbb{R}^2$ de área nula.

A Conjectura em Corpos Finitos

A Proposta

Em 1996, Thomas Wolff [Wol99] propõe uma conjectura análoga, em corpos finitos.

Seja $\mathbb{F}_q^n$ um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{F}_q$, um corpo com $q \in \mathbb{N}$ elementos. Então, temos a seguinte definição:

Definição. $K \subset \mathbb{F}_q^n$ *é dito* conjunto de Kakeya em $\mathbb{F}_q^n$ *se cumpre a seguinte condição:*

$$\forall \mathbf{e} \in \mathbb{F}_q^n - \{0\} \, \exists a \in \mathbb{F}_q^n \forall t \in \mathbb{F}_q : a + t\mathbf{e} \in K$$

Essa condição pode ser visualizada se construirmos um reticulado com q^n elementos em que identificamos o hiperplano $x_k = q$ com o hiperplano $x_k = 0$.

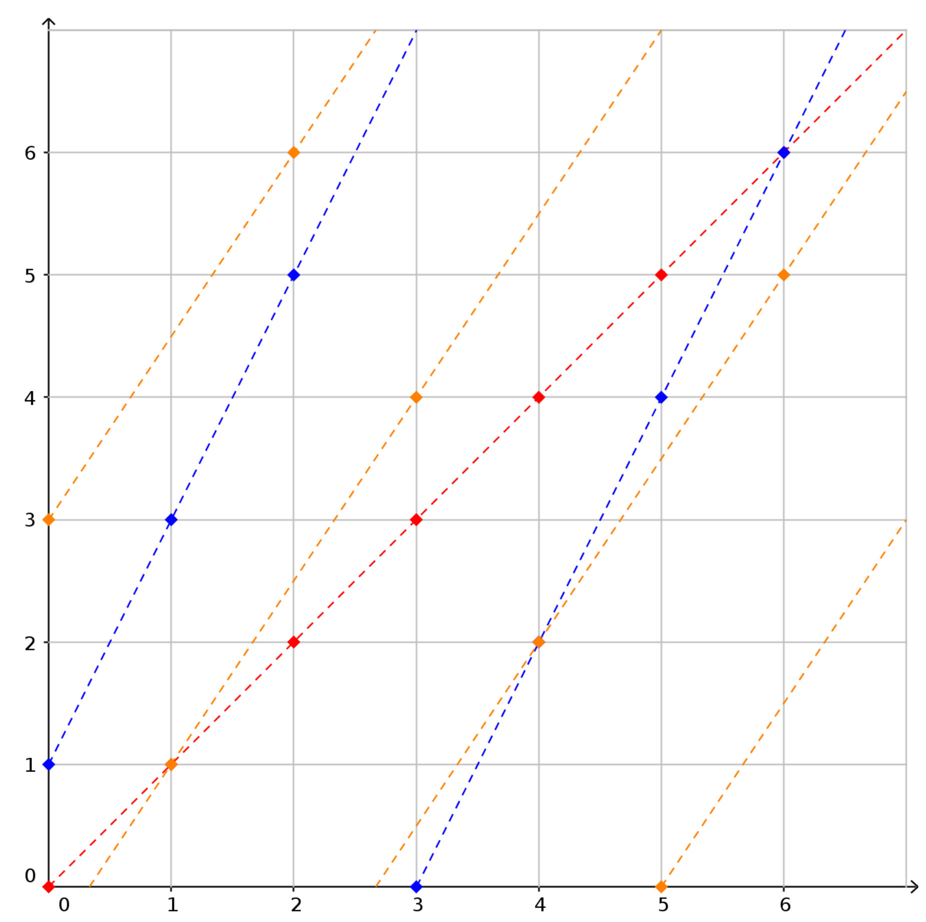

Figura 3: Reticulado representando $\mathbb{F}_7^2$, com as retas $t(1,1)$ (em vermelho), $(0,1) + t(1,2)$ (em azul) e $(1,1) + t(2,3)$ (em laranja).

O seguinte problema é, então, proposto:

Problema (Conjectura de Kakeya em Corpos Finitos)**.** *Todo conjunto de Kakeya em $\mathbb{F}_q^n$ deve ter cardinalidade maior ou igual a $C_n q^n$, onde C_n depende n mas não de q?*

Wolff prova, utilizando argumentos similares ao do caso em $\mathbb{R}^n$, o limite inferior $|K| \geq C_n q^{\frac{n+2}{2}}$.

A Solução

Em 2008, Zeev Dvir [Dvi09] apresenta a prova do resultado que dá um limite inferior de $|K| \geq C_n q^{n-\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$, utilizando um método polinomial surpreendentemente simples. Uma pequena modificação de seu argumento, devida a Terance Tao e Nagoa Alon (encontrada na última seção do artigo de Dvir [Dvi09]), é suficiente para provar a conjectura.

Na prova será utilizado o seguinte lema [Zip79][Sch80]:

Lema (Schwartz-Zippel)**.** *Seja $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ o espaço dos polinômios sobre $\mathbb{F}_q$ e $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio não nulo de grau menor que d. Então:*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{F}_q^n : f(x) = 0\right\}\right| \leq d q^{n-1}.$$

Também será utilizado um simples resultado de combinatória acerca da dimensionalidade do espaço vetorial de polinômios de n variaveis e de grau d, ${}^d\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\dim\left({}^d\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]\right) = \binom{d+n}{n}.$$

Teorema (Dvir)**.** *Seja $K \subset \mathbb{F}_q^n$ um conjunto de Kakeya. Então*

$$|K| \geq \binom{q+n-1}{n} = \frac{q^n}{n!} + \mathcal{O}_n\left(q^{n-1}\right).$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que

$$|K| < \binom{q+n-1}{n}.$$

Então, existe um polinômio não-nulo $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$, de grau $d \leq q - 1$ tal que $g(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in K$, devido à cardinalidade de K. Seja $\bar{g} \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ a parte homogênea de grau d de g. Claramente, $\bar{g}$ é não-nula. Para cada $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_q^n$ fixo, existe $a \in \mathbb{F}_q^n$ tal que a linha $\{a + t\mathbf{e} : t \in \mathbb{F}_q\}$ está contida em K. Definimos $P_{\mathbf{e},a} \in \mathbb{F}_q[t]$ da seguinte forma:

$$P_{\mathbf{e},a}(t) \coloneqq g(a + t\mathbf{e})$$

Então, para todo $t \in \mathbb{F}_q$, $P_{\mathbf{e},a}(t) = 0$. Como $P_{\mathbf{e},a}$ é um polinômio univariado, pelo Lema de de Schwartz-Zippel, $P_{\mathbf{e},a}$ é identicamente nulo, pois é nulo em q pontos. Portanto, o coeficiente do monômio t^d é nulo. Esse coeficiente é, entretanto, $\bar{g}(\mathbf{e})$. Visto que esse argumento é válido para todo $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_q^n$, $\bar{g}$ é identicamente nula. Assim, temos uma contradição, visto que assumimos g não-nulo e de grau d.

$\square$

Referências

[Kak17] KAKEYA, S. Some problems on minima and maxima regarding ovals. *Tōhoku Scientific Reports*, v. 6, p. 71-88, 1917

[FK17] FUJIWARA, M.; KAKEYA, S. On some problems of maxima and minima for the curve of constant breadth an the in-revolvable curve of the equilateral triangle. *Tōhoku Mathematical Journal*, v. 11, p. 92-110, 1917

[Bes19] BESICOVITCH, A. S. Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions. *Journal de la Société de Physique et de Mathematique de l'Universite de Perm*, v. 2, p. 105-123, 1919

[Pál20] PÁL, J. Ein Minimumproblem für Ovale. *Mathematische Annalen*, v.83, p. 311-319, 1920.

[Alp42] ALPHEN, H. J. Uitbreiding van Stelling von Besicovitch. *Mathematica Zutphen*, v.10, p. 144-157, 1942.

[Cun71] CUNNINGHAM, F. The Kakeya Problem for Simply Connected and for Star-shaped Sets. *American Mathematical Monthly*, v.78, p. 114-129, 1971.

[Dav71] DAVIES, R. Some Remarks on the Kakeya Problem. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v.69, p. 417-421, 1971.

[Wol99] WOLFF, T. (1996) *Recent work connected with the Kakeya problem*. In: ROSSI, H. *Prospects in Mathematics*: Invited Talks on the Occasion of the 250th Anniversary of Princeton University. Providence: American Mathematical Society, 1999. p. 129-162.

[Fur08] FURTNER, M. *The Kakeya Problem*. 2008. f.59. Tese (Doutorado em Matemática) - Mathematisches Institut, Ludwig-Maximilians-Universitat München, Munique. 2008.

[Fef71] FEFFERMAN, C. The Multiplier Problem for the Ball. *Annals of Mathematics*, v.94, p. 330-336, 1971.

[Cor77] CÓRDOBA, A. The Kakeya Maximal Function and Spherical Summation Multipliers. *American Journal of Mathematics*, v.99, p. 1-22, 1977.

[Bour94] BOURGAIN, J. *Some New Estimates for Oscillatory Integrals*. In: FEFFERMAN, C.; FEFFERMAN, R.; WAINGER, S. (Eds.) *Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein*. Princeton: Princeton University Press, 1994. p. 83-112.

[Bour91] BOURGAIN, J. Besicovitch Type Maximal Operators and Applications to Fourier Analysis. *Geometric and Functional Analysis*, v.1, n.1, p. 147-187, 1991.

[Wol95] WOLFF, T. An Improved Bound for Kakeya type Maximal Functions. *Revista Matemática Iberoamericana*, v.11, n.3, p. 651-674, 1995.

[KT02] KATZ, N.; TAO, T. New Bounds for Kakeya Problems. *Journal d'Analyse Mathematique*, v.87, p. 231-263, 2002.

[Tao08] TAO, T. *A Remark on the Kakeya Needle Problem*. Disponível em <https://terrytao.wordpress.com/2008/12/31/a-remark-on-the-kakeya-needle-problem/>. Acesso em 1 de ago. 2016.

[KT02] KATZ, N.; TAO, T. New Bounds for Kakeya Problems. *Journal d'Analyse Mathematique*, v.87, p. 231-263, 2002.

[Dvi09] DVIR, Z. On the Size of Kakeya Sets in Finite Fields. *Journal of the American Mathematical Society*, v.22, p. 1093-1097, 2009.

[Zip79] ZIPPEL, R. Probabilistic Algorithms for Sparse Polynomials. In: *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. Berlim: Springer-Verlag, 1979. p. 212-226

[Sch80] SCHWARTZ, J. T. Fast Probabilistic Algorithms for Verification of Polynomial Identities. *Journal of the American Computational Society*, v.27, n.4, p. 701-717, 1980.