UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Rodrigo Prates dos Santos

O EQUILÍBRIO CORRELACIONADO DE AUMANN E AS CONVENÇÕES SOCIAIS

Porto Alegre
2008

Rodrigo Prates dos Santos

O EQUILÍBRIO CORRELACIONADO DE AUMANN E AS CONVENÇÕES SOCIAIS

Orientador: Prof. Dr. Sabino Porto Júnior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Economia.

Porto Alegre
2008

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

S237e Santos, Rodrigo Prates dos

O equilíbrio correlacionado de Aumann e as convenções sociais. Rodrigo Prates dos Santos. – Porto Alegre, 2008.

92 f. : il.

Orientador: Sabino Porto Júnior.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2008.

1. Teoria dos jogos : Tomada de decisão. 2. Teoria dos jogos : Negociação : Simulação. I. Porto Júnior, Sabino. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 519.83

Rodrigo Prates dos Santos

O EQUILÍBRIO CORRELACIONADO DE AUMANN E AS CONVENÇÕES SOCIAIS

Orientador: Prof. Dr. Sabino Porto Júnior

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Economia.

Aprovada em:_____de_______________de 2009.

Prof. Dr. Sabino Porto Júnior
PPGE/UFRGS

Prof. Dr. Cláudio Shikida
IBMEC-MG

Prof. Dr. Sérgio Monteiro
PPGE/UFRGS

Profa. Dra. Silvinha Vasconcelos
UFJF-MG

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que uma convenção social está fortemente relacionada com o conceito de equilíbrio correlacionado. Através da interação de longo prazo e do aprendizado, os agentes podem chegar a um acordo, mesmo com suposições pouco restritivas e que possibilitem uma interpretação mais natural e realista do conceito de equilíbrio em Teoria dos Jogos. Inicialmente a suposição de conhecimento comum é apresentado de maneira formal e informal. O conceito de equilíbrio correlacionado é apresentado com exemplos. Finalmente, a relação entre o equilíbrio correlacionado e a convenção social é analisada.

Palavras-Chave: Conhecimento Comum, *A Priori* Comum, Equilíbrio Correlacionado, Adaptação Heurística, Convenção.

ABSTRACT

The main purpose of this dissertation is to show that a convention can be related to a correlated equilibrium. Through the long run interaction and learning, the players can reach an agreement, even if we relax the traditional assumptions of Game Theory, and we can find a more natural and plausible interpretation of equilibrium. Initially the common knowledge assumption is presented in a formal and informal way. The correlated equilibrium is presented with examples. Finally, the relation between correlated equilibrium and convention is analyzed.

Keywords: Common Knowledge, Common Prior Assumption, Correlated Equilibrium, Adaptive Heuristics, Convention.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é mostrar que uma convenção social tem forte relação com o conceito de equilíbrio correlacionado. Tal equilíbrio surge para resolver algum problema de coordenação ou conflito entre os agentes econômicos. Os problemas de interação social podem ser modelados como um jogo qualquer, onde os agentes tentam alcançar um determinado resultado. Através da interação de longo prazo e do aprendizado, os agentes podem chegar a um acordo, mesmo com suposições pouco restritivas e que possibilitem uma interpretação mais natural e realista do conceito de equilíbrio em Teoria dos Jogos.

A análise que costumamos usar em Teoria dos Jogos pode ser chamada de racional, i.e., cada participante quer obter os resultados que ele mais deseja. Em uma estrutura com *n* jogadores, os resultados dependem não somente das decisões de um jogador mas também das decisões dos outros jogadores. Ou seja, nenhum homem é uma ilha, principalmente em Teoria dos Jogos.

Dizemos que os jogadores são racionais no sentido de que suas expectativas sobre as estratégias dos outros podem ser resumidas por distribuições de probabilidade chamadas crenças, e que suas preferências a respeito de resultados incertos podem ser descritas pela associação entre pagamentos e resultados, de tal forma que os jogadores maximizam os pagamentos esperados, levando-se em conta suas crenças e suas atitudes em relação ao risco.

Obviamente, podemos enumerar várias restrições a um modelo de racionalidade estrita. Em primeiro lugar, vários experimentos levam a conclusões que são bastante diferentes das previsões teóricas. Em segundo lugar, as soluções consideradas como ótimas são geralmente difíceis de alcançar, mesmo por especialistas em Teoria dos Jogos ou até mesmo por máquinas programadas para tal tarefa. Em terceiro lugar, em muitas situações, os agentes nem mesmo querem alcançar as soluções que maximizam seus pagamentos. E finalmente, muitas conclusões entram em conflito direto com a realidade.

Estamos sempre tentando definir qual é a decisão racional ótima em situações de interação estratégica entre vários jogadores, e analisamos tais soluções para poder chegar a uma melhor compreensão de tal interação e uma melhor previsão de ações futuras.

Certamente, o comportamento de cada jogador depende daquilo que ele sabe. Mas também depende daquilo que ele sabe sobre o quê os outros sabem a respeito de suas ações. É também relevante que cada jogador saiba toda essa linha de raciocínio, i.e., cada um sabe o quê o outro sabe sobre o quê cada um sabe, e assim por diante. Mas tal suposição pode ser muito restritiva.

Para analisar tal situação, usamos a noção de conhecimento comum (Aumann (1976), Milgrom (1981), Geanakoplos (1992), Fagin et al. (2003)). Se dois agentes iniciam uma interação com as mesmas crenças prévias, e se suas crenças posteriores (que são baseadas em diferentes informações privadas) sobre um evento específico são de conhecimento comum, então essas crenças posteriores devem necessariamente ser iguais.

Durante os últimos anos a Teoria dos Jogos tem sido usada para modelar a interação estratégica entre os agentes. Uma fonte de dificuldade, existente na tentativa de modelar situações do mundo real, é a existência de equilíbrios múltiplos com diferentes propriedades mesmo nos modelos mais simples. A literatura sobre os refinamentos do equilíbrio de Nash (Selten (1965, 1975), Myerson (1978), Kreps e Wilson (1982), van Damme (1984, 1989), Kalai e Samet (1984), Mertens e Zamir (1985), Kohlberg e Mertens (1986), Banks e Sobel (1987), Cho e Kreps (1987), Cho (1987), Basu e Weibull (1991), Fudenberg e Tirole (1991b), Blume *et al.* (1991), Reny (1992)) tenta fornecer previsões mais precisas, mas o problema de selecionar o refinamento mais adequado para uma determinada situação ainda persiste, e em muitas situações o equilíbrio restante não tem nenhuma fundamentação no mundo real. Diferentes conceitos de refinamento tentam evitar as chamadas ameaças não críveis, tentam restringir os jogadores a seguir crenças razoáveis, tentam tornar as estratégias de equilíbrio mais robustas em resposta a pequenas perturbações, ou tentam tornar o equilíbrio mais auto-executável. Infelizmente, ainda não existe consenso sobre qual a melhor forma de resolver tal impasse. Uma alternativa é levar em consideração os fatores contextuais.

Mesmo que seja relevante, do ponto de vista formal, fazer com que as definições de solução dependam da representação tradicional dos jogos, não há razão para restringir à informação contida nessa representação o critério usado para escolher o equilíbrio. Outros elementos, relacionados com o ambiente onde a interação está ocorrendo, podem servir como pistas para decidir qual equilíbrio ou solução é a mais apropriada. O contexto da interação é relevante. A solução não depende apenas da representação formal do jogo.

Os modelos que representam as interações estratégicas entre os agentes não são apenas representações abstratas matemáticas mas dizem respeito ao mundo real. A Teoria dos Jogos pode ser vista como uma análise dos conceitos usados na interação social quando em situações de coordenação ou conflito. Em certo sentido, é uma tentativa de compreender a lógica e a função das instituições sociais ao nosso redor e compreender os padrões de comportamento. Portanto, um conceito de equilíbrio que possa levar em conta os fatores do ambiente onde estamos interagindo é mais atraente que os refinamentos tradicionais do equilíbrio de Nash.

Embora totalmente conectado com o equilíbrio de Nash, o equilíbrio correlacionado (Aumann (1974, 1987)) pode ser usado em situações que não exijam uma racionalidade estrita, como no caso do equilíbrio de Nash. O equilíbrio correlacionado é um conceito mais geral que o equilíbrio de Nash e podemos também resolver o problema da existência de equilíbrios múltiplos em determinados jogos. Além disso, o equilíbrio correlacionado apresenta resultados que são mais plausíveis em termos aplicados.

Para uma melhor compreensão da lógica do equilíbrio correlacionado, precisamos analisar o conceito de conhecimento comum. Tal conceito nos diz, basicamente, que um agente sabe o quê o outro pode saber, o outro sabe o quê o outro pode saber, o outro sabe o que o outro pode saber sobre o quê ele pode saber, e assim por diante. Embora tal conceito seja restritivo em alguns casos, sua compreensão pode até mesmo nos dizer que ele não é o mais adequado para tentar analisar a lógica do equilíbrio.

A interação entre os agentes pode, e em muitas situações, deve exigir uma relação de longo prazo para que possamos alcançar resultados mais satisfatórios. Entretanto, a modelagem de jogos na forma estratégica, em oposição aos jogos na forma extensiva, pode nos trazer muitas vantagens no que diz respeito uma análise mais simples e objetiva. E além disso, tais jogos podem ser encarados de forma repetida para uma interpretação mais dinâmica. No presente trabalho, usamos exemplos na forma estratégica, mas nada impede que façamos a mesma análise com jogos na forma extensiva. A dinâmica do jogo não está necessariamente relacionada à sua forma mas ao processo de interação.

Portanto, parece natural que o contexto da interação seja considerado como um elemento vital para a resolução de algum problema de coordenação entre os jogadores (Schelling (1960), Crawford (1997), Vanderschraaf (1998), Young (1998), Binmore (2007)). Será que os habitantes de localidades diferentes vão chegar ao mesmo resultado para o mesmo jogo? Ou como podem agentes que nunca interagiram com outros, alcançar um único e mesmo equilíbrio em situações onde temos equilíbrio múltiplos e muitos são semelhantes ou até mesmo iguais? Qual fator determina qual dos equilíbrios múltiplos é o escolhido?

O presente trabalho, além desta introdução e da conclusão, está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 1 apresentamos a formalização dos conceitos de conhecimento comum e de *a priori* comum e mostramos os limites e possibilidades de tais conceitos. Tais definições serão de vital importância para o capítulo sobre equilíbrio correlacionado, bem como para a discussão do conceito de convenção. Inicialmente mostramos as ferramentas necessárias para tal formalização. Muitas das definições do Capítulo 1 são apresentadas de maneira objetiva e sem uma discussão específica, mas tais definições são importantes para os capítulos seguintes. No Capítulo 2 apresentamos brevemente os refinamentos mais importantes e introduzimos o conceito de equilíbrio correlacionado, bem como alguns exemplos. No final do capítulo, apresentamos algumas extensões e aplicações de tal conceito, para demonstrar a sua abrangência em termos práticos e teóricos. No Capítulo 3 apresentamos a discussão referente a uma convenção social. Mostramos os elementos teóricos e práticos relacionados com o processo que leva a uma convenção, bem como definições informais e uma definição mais formal de convenção. Ao longo do capítulo, vários exemplos são apresentados, e a relação com o equilíbrio correlacionado é apresentada de maneira explícita, mostrando que, em situações de equilíbrios múltiplos, não precisamos exigir uma racionalidade estrita por parte dos agentes, e que a solução para uma indeterminação pode surgir de maneira mais simples e natural.

CAPÍTULO 1 CONHECIMENTO COMUM E *A PRIORI* COMUM

1.1 CONHECIMENTO COMUM

Em muitas situações de interação estratégica, não importando quão racionais são os agentes, a situação de informação incompleta é a mais comum. Teoricamente, se os agentes são racionais, eles irão reconhecer sua própria ignorância e refletir cuidadosamente sobre o quê eles sabem e sobre o quê eles não sabem, antes de agir. Além disso, quando esses agentes interagem, eles pensam sobre o quê os outros sabem e não sabem, e o quê os outros sabem sobre o quê eles sabem, antes de escolher como agir. Portanto, conhecimento comum é o limite de uma seqüência de análise, possivelmente infinita, sobre o conhecimento dos agentes. Mas como apontado por Lipman (1994), conhecimento comum da racionalidade pode ser diferente de conhecimento comum de algum fato exógeno porque o quê é racional é uma função do que é conhecido. Ao aumentar o nível de conhecimento mútuo, nós mudamos tanto a quantidade de conhecimento quanto o significado do quê é conhecido. Visto desta maneira, podemos notar porquê a convergência da seqüência de análise que leva ao conhecimento comum pode falhar quando o nível de conhecimento mútuo vai para o infinito.

Uma definição formal de conhecimento comum foi introduzida na literatura econômica por Robert Aumann em 1976. Aumann formaliza a noção de conhecimento comum e mostra que, se dois agentes iniciam com as mesmas crenças a priori[1] e suas crenças a posteriori[2] (sobre um evento específico), que são baseadas em diferentes informações privadas, são de conhecimento comum, então essas crenças a posteriori coincidem.

Podemos imaginar que eventos públicos são os candidatos naturais para conhecimento comum. Mas eventos que os próprios agentes criam, como as regras de um jogo, regras da sociedade ou contratos, também podem ser vistos como conhecimento comum. Algumas vezes, após longa conversação ou observação, o quê as

[1] Característica de conhecimento ou de idéia *anterior* à experiência, ou independente dela.
[2] Característica de conhecimento ou idéia *resultante* de experiência, ou que dela dependa.

pessoas fazem se torna conhecimento comum, embora as razões para suas ações sejam difíceis de compreender.

O conhecimento dos agentes têm sido estudado principalmente de duas maneiras, sintaticamente e semanticamente. O conhecimento sintático é expresso por sentenças de uma comunicação verbal. O conhecimento semântico é expresso por subconjuntos de um estado-espaço. Para uma completa e profunda discussão sobre as duas abordagens, ver Aumann (1999a). Na Economia em geral e especificamente na Teoria dos Jogos, a abordagem semântica tem sido o modo dominante de entender conhecimento e conhecimento comum; por exemplo, a definição semântica de conhecimento comum dada por Aumann (1976). Embora a semântica seja utilizada para modelar a sintaxe da lógica, as duas abordagens estão muito relacionadas. Uma fórmula é de conhecimento comum se todos os agentes conhecem a fórmula, se todos os agentes sabem que todos os agentes conhecem a fórmula, *ad infinitum*. Podemos definir, como proposto por Simon (1999), por exemplo, duas partições do espaço que correspondem ao conhecimento comum sintático e semântico. Para a primeira partição, dois pontos pertencem ao mesmo membro da partição se e somente se eles compartilham as mesmas fórmulas em conhecimento comum. Para a segunda partição, nós tomamos a união das partições de conhecimento para todos os agentes, que é a mesma definição de conhecimento comum introduzida por Aumann (1976). Simon (1999) compara o conhecimento comum sintático e semântico em relação direta de quase equivalência com o conhecimento sintático e semântico. Mas em relação ao conhecimento comum, ele mostra que, diferente do conhecimento, há uma grande discrepância entre o modo sintático e semântico.

Para definir conhecimento comum, devemos primeiro definir os elementos do chamado estado do mundo e mostrar a relação entre as definições. A terminologia que usamos é padrão na literatura. Entretanto, há muitas maneiras diferentes de expressar essas relações. Tentamos usar as mais simples. Todas as definições são relativamente fáceis de definir e são definições básicas em um curso de estatística para graduação. Estas definições não são muito intuitivas mas serão úteis no Capítulo 2. Omitimos algumas provas, mas para detalhes, ver Milgrom (1981) e Fagin et al. (2003).

1.1.1 Partições

Seja Ω um conjunto finito. Os pontos em Ω são interpretados como estados da natureza ou *estados do mundo*, e subconjuntos de Ω podem ser chamados de *eventos*. Uma *partição* de Ω é uma família ρ de subconjuntos não-vazios e disjuntos de Ω cuja união inclui Ω. Ou seja,

P1. $\bigcup \rho = \Omega$

P2. $A, B \in \rho$ e $A \bigcap B \neq \varnothing$ implica $A = B$.

A Propriedade P1 diz que qualquer $\omega \in \Omega$ pertence a pelo menos um elemento da partição enquanto P2 diz que ele pertence a no máximo um elemento. Seja $P(\omega)$ o único elemento de ρ que contém ω. Podemos ver P como uma correspondência entre Ω e subconjuntos de Ω, que denotamos por $P : \Omega \to \Omega$. A correspondência P é chamada a *correspondência de partição* associada com ρ. Claramente a correspondência de partição satisfaz

$$\omega \in P(\omega)$$

para todo ω. Também é imediato que

$$\text{se } \gamma \in P(\omega), \text{ então } \omega \in P(\gamma) \text{ e } P(\gamma) = P(\omega).$$

Estas duas propriedades caracterizam a correspondência de partição. Também podemos afirmar que:

Lema 1.1. *Seja $P : \Omega \to \Omega$ a correspondência de Ω para subconjuntos de Ω. Assuma que para todo $\omega \in \Omega$,*

$$\omega \in P(\omega)$$

e para todo $\omega, \gamma \in \Omega$

$$\gamma \in P(\omega) \Rightarrow \omega \in P(\gamma).$$

Então $\{P(\omega):\omega\in\Omega\}$ *é uma partição de* Ω*, e* P *é sua correspondência de partição.*

1.1.2 Conhecimento e Partições

Vamos dizer que a partição ρ sabe do evento A em ω se $P(\omega)\subset A$. O conjunto de pontos ω no qual ρ sabe A é $K(A)$, i.e.,

$$\omega\in K(A)\Leftrightarrow P(\omega)\subset A. \tag{1}$$

A função K de 2^{Ω} em 2^{Ω} é chamada o operador de conhecimento induzido por ρ. 2^{Ω} é o conjunto de todos os subconjuntos de Ω. A seguinte proposição resume muitas das propriedades de P e K.

Proposição 1.1. *Seja* P *uma correspondência de partição para uma partição* ρ *e seja* K *o operador de conhecimento induzido pela equação (1). Então eles satisfazem as seguintes propriedades.*

1. $K(\Omega)=\Omega$ e $P(\Omega)=\Omega$.
2. $K(\varnothing)=\varnothing$ e $P(\varnothing)=\varnothing$.
3. $K(A)\subset A$ e $A\subset P(A)$.
4. $K(A)\bigcap K(B)=K(A\bigcap B)$ e $P(A)\bigcap P(B)=P(A\bigcap B)$.
5. $P(P(A))=P(A)$ e $P(K(A))=K(A)$.
6. $K(K(A))=K(A)$ e $K(P(A))=P(A)$.
7. $K(A)^{c}=K(K(A)^{c})$ e $P(A)^{c}=P(P(A)^{c})$.
8. $A\subset K(P(A))$ e $P(K(A))\subset A$.
9. Se $A\subset B$, então $K(A)\subset K(B)$ e $P(A)\subset P(B)$.
10. $A=K(A)\Leftrightarrow A=P(A)\Leftrightarrow P(A)=K(A)$.

Omitimos as provas. Para detalhes adicionais, ver Aumann (1976), Milgrom (1981), Geanakoplos (1992), Dekel e Gul (1997), e especialmente Fagin et al. (2003). Podemos dizer que algumas provas são conseqüência imediata das definições, outras são simples, e o resto está um pouco além do objetivo do presente trabalho.

Podemos dizer que um evento A é *auto-evidente* se $A = K(A)$. Então todo conjunto auto-evidente está na coleção de K. Por outro lado, na Proposição 1.1, a Propriedade (6) diz que todo conjunto na coleção de K é auto-evidente. Então:

Corolário 1.1. *A coleção de K é o conjunto de eventos auto-evidentes.*

Corolário 1.2. *A coleção de eventos auto-evidentes (e portanto a coleção de K) coincide com $\mathbb{F}^*(\rho)$, o campo completo gerado por ρ.*

Um campo $\mathbb{F}$ de subconjuntos de Ω é uma família de subconjuntos satisfazendo:

F1. $\varnothing \in \mathbb{F}$ e $\Omega \in \mathbb{F}$.

F2. Se $A \in \mathbb{F}$, então $A^c \in \mathbb{F}$.

F3. $A, B \in \mathbb{F}$, então $A \bigcap B \in \mathbb{F}$ e $A \bigcup B \in \mathbb{F}$.

Um campo completo é um campo fechado sob intersecções e uniões arbitrárias. O conjunto 2^Ω de Ω é um campo completo. Se Ω é finito, todo campo é automaticamente completo.

1.1.3 Conhecimento e Partições: Propriedades

Seja $L : 2^\Omega \to 2^\Omega$. As seguintes propriedades são conhecidas como **S5**.

S5.1 $L(\Omega) = \Omega$. Para todos os eventos A e B. Os jogadores sempre sabem qualquer coisa que é verdade em todos os estados do mundo.

Esta propriedade é algumas vezes chamada de *axioma da percepção*. Ela implica que um jogador sabe que ele está em algum estado do mundo de possibilidades ou, equivalentemente, que ele pode identificar o conjunto de mundos possíveis.

S5.2 $L(A) \bigcap L(B) = L(A \bigcap B)$. Saber A e B é equivalente a saber A e saber B.

Esta propriedade é algumas vezes chamada de *axioma da onisciência.*

S5.3 $L(A) \subset A$. Se os jogadores sabem A então A é verdadeiro.

Um jogador só pode conhecer um evento A se o evento realmente ocorreu, i.e., ele só pode sabe coisas que são verdadeiras. Esta propriedade é algumas vezes chamada de *axioma do conhecimento*. Mas de acordo com Samuelson (2004), nós podemos realmente saber que algo é verdadeiro? Se não, podemos saber aquilo que sabemos?

S5.4 $L(L(A)) = L(A)$. Se i sabe A então i sabe que i sabe A.

Freqüentemente chamada de *axioma da transparência*, esta propriedade nos diz que um jogador não pode saber sobre um evento sem saber que ele sabe sobre esse evento.

S5.5 $L(A)^c = L(L(A)^c)$. Não saber A implica saber que A não é sabido.

Este resultado, referido como *axioma da sabedoria*, é geral. Um jogador sabe aquilo que ele não sabe. Por esta razão, como nota Samuelson (2004), se nós privássemos o jogador de alguns dos axiomas matemáticos, ele não saberia mais quais teoremas são verdadeiros, mas ele poderia elaborar uma lista de todos os possíveis teoremas, dividida entre aqueles que ele sabe e aqueles que ele não sabe.

Segue da Proposição 1.1 que se K é o operador de conhecimento derivado de uma correspondência de partição P, então K satisfaz **S5**. O inverso é verdadeiro—qualquer *L*[3] que satisfaça **S5** é o operador de conhecimento induzido por alguma partição. Ou seja, ao invés de começar com partições, e derivar um operador de conhecimento que satisfaça essas propriedades, nós poderíamos ter começado com tal operador e derivar as partições. As condições de **S5** não são independentes. Por exemplo, **S5.3** e **S5.5** implicam **S5.1.**

[3] Podemos definir o operador de diversas maneiras, só importando a forma inicial que utilizamos.

A seguinte proposição mostra como podemos relacionar partições e eventos.

Proposição 1.2. *Seja* $L: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ *que satisfaz* ***S5****. Então há uma única partição* $\mathbb{S}$ *tal que* L *é um operador de conhecimento induzido por* $\mathbb{S}$.

A prova, que omitimos aqui, faz uso dos seguintes Lemas.

Lema 1.2. *Se* L *satisfaz* ***S5****, então* L *é monótono, i.e.,*

$$A \subset B \Rightarrow L(A) \subset L(B).$$

Podemos dizer que um evento A é auto-evidente se $A = L(A)$. Se L é um operador de conhecimento induzido por uma partição, então tal definição está de acordo com a terminologia usada na definição de evento auto-evidente apresentada acima. Pela propriedade **S5.4**, a coleção de L é a coleção de eventos auto-evidentes.

Lema 1.3. *O complemento de um evento auto-evidente é auto-evidente.*

Lema 1.4. *A união de qualquer família de eventos auto-evidentes é auto-evidente*.

Lema 1.5. *A intersecção de qualquer família de eventos auto-evidentes é auto-evidente.*

1.1.4 Eventos Públicos

Agora consideramos várias partições ρ_i, $i \in I$ e suas respectivas correspondências de partição associadas P_i, e operadores de conhecimento K_i. Há I indivíduos onde cada agente $i \in I$ tem uma partição ρ_i de Ω. Podemos assumir que I é finito ou infinito. Um evento E é publico se ele é auto-evidente para todo $i \in I$. Ou seja, se $K_i(E) = E$ para cada $i \in I$.

Equivalentemente, E é público se e somente se $P_i(E) = E$ para todo $i \in I$. Em outras palavras, pelos Corolários 1.1 e 1.2:

Lema 1.6. Um evento é público se e somente se ele pertence ao campo completo $\bigcap_{i \in I} \mathbb{F}^*(\rho_i)$.

Sabemos que esse campo completo corresponde a alguma partição, então agora podemos identificar sua correspondência de partição:

Para qualquer ω defina o evento $M(\omega)$ por

$$M(\omega) = \bigcup_{i1,\dots,im} P_{i1}(\cdots P_{im}(\omega)\cdots)$$

onde a união é feita sobre todas as seqüências finitas $i_1,\dots,i_m$ em I.

Proposição 1.3. Todo evento $M(\omega)$ é público.

Prova : Precisamos mostrar que $P_i(M(\omega)) = M(\omega)$ para qualquer i. Agora podemos ver que

$$P_i(M(\omega)) = P_i\left(\bigcup_{i1,\dots,im} P_i(\cdots P_{im}(\omega)\cdots)\right)$$

$$= \bigcup_{i1,\dots im} P_i(P_{i1}(\cdots P_{im}(\omega)\cdots))$$

mas $i,i_1,\dots,i_m$ é uma seqüência finita em I, então $P_i(P_{i1}(\cdots P_{im}(\omega)\cdots)) \subset M(\omega)$. Conseqüentemente $P_i(M(\omega)) \subset M(\omega)$, o que implica $P_i(M(\omega)) = M(\omega)$.

Proposição 1.4. *Se E é público e $\omega \in E$, então $M(\omega) \subset E$.*

Prova: Seja A qualquer subconjunto do evento publico E. Claramente $P_i(A) \subset P_i(E) = E$ para qualquer i. Então qualquer $P_{i1}(\cdots P_{im}(\omega)\cdots)$ é um subconjunto de E, e $M(\omega) \subset E$.

Agora precisamos mostrar que M define uma partição[4].

Lema 1.7. *A correspondência M é uma correspondência de partição.*

[4] Precisamos enfatizar novamente que todos os Lemas, Corolários e Proposições têm provas que podem ser encontradas nas referências citadas.

Corolário 1.3. *A correspondência* M *é correspondência de partição para o campo completo* $\bigcap_{i \in I} \mathbb{F}^*(\rho_i)$ *de eventos públicos.*

1.1.5 Conhecimento Comum

O evento E é de conhecimento comum em ω se para toda seqüência finita $i_1,...,i_m$ em I,

$$\omega \in K_{im}(K_{im-1}(\cdots K_{i1}(E)\cdots).$$

Isto corresponde a todo mundo sabe que todo mundo sabe E, etc, que é a noção de conhecimento comum. Pela equação (1), isto é equivalente à condição:

$$P_{i1}(\cdots P_{im}(\omega)\cdots) \subset E$$

Conseqüentemente, temos que:

Lema 1.8. *O evento* E *é de conhecimento comum em* ω *se e somente se* $M(\omega) \subset E$.

Corolário 1.4. *Um evento* E *é de conhecimento comum em* ω *se e somente se há um evento público* A *que satisfaça* $\omega \in A \subset E$.

Prova : Suponha primeiro que E é de conhecimento comum em ω. Então $M(\omega)$ é o evento público desejado. Agora suponha que $A \subset E$ é um evento público contendo ω, então $M(\omega) \subset A \subset E$, assim E é de conhecimento comum em ω.

Aumann (1976) mostrou que em um estado ω o evento E é de conhecimento comum no sentido de que todos os jogadores sabem E, sabem que eles sabem E, etc, se e somente se há um evento A na união das partições com $M(\omega) \subset A \subset E$. Devemos lembrar que ρ_i é a partição para i e M é a correspondência de partição do campo completo que corresponde à partição.

1.1.5.1 Conhecimento Comum - Exemplo

O próximo exemplo, contido em Geanakoplos (1992), é uma demonstração das possibilidades envolvidas na hipótese de conhecimento comum. Imagine três meninas sentadas em um círculo, cada uma usando um chapéu vermelho ou branco. Primeiro suponha que todos os chapéus são vermelhos. Quando a professora pergunta se alguma das meninas pode identificar a cor de seu próprio chapéu, a resposta é sempre negativa, pois nenhuma pode ver seu próprio chapéu. Mas se a professora comenta que há pelo menos um chapéu vermelho na sala, um fato que é de conhecimento de todas, pois cada uma pode ver dois chapéus vermelhos na sala, a resposta muda. A primeira aluna a ser perguntada não pode responder, e a segunda também não. Mas a terceira é capaz de responder com certeza que ela está usando um chapéu vermelho.

Entretanto a pergunta natural é: como? Se os chapéus nas cabeças das meninas dois e três fossem brancos, então o comentário da professora permitiria à primeira menina responder com certeza que seu chapéu era vermelho. Mas ela não pode responder, o que revela para as meninas dois e três que pelo menos uma delas está usando um chapéu vermelho. A terceira menina observa a segunda admitir que não pode responder a cor de seu chapéu, e então seu raciocínio é o seguinte: “Se meu chapéu fosse branco, então a segunda menina teria respondido que ela estava usando um chapéu vermelho, desde que nós duas sabemos que pelo menos uma de nós está usando um chapéu vermelho. Mas a segunda menina não soube responder. Portanto, eu devo estar usando um chapéu vermelho”. De acordo com Geanakoplos (1992) este exemplo é surpreendente pois as estudantes parecem aprender apenas com seu próprio desconhecimento. E é realmente isso que acontece.

O exemplo contém vários elementos importantes: é de conhecimento comum que todos podem ver dois chapéus; as afirmações de desconhecimento são públicas; cada menina conhece a forma de raciocínio das outras. Cada menina tinha conhecimento do fato revelado pela professora de que havia pelo menos um chapéu vermelho na sala mas tal fato não era de conhecimento comum entre elas. Quando tal fato se tornou de conhecimento comum, a segunda e a terceira puderam realizar inferências da resposta da primeira menina, eventualmente possibilitando à terceira menina deduzir a cor de seu chapéu.

Para examinar o papel da hipótese de conhecimento comum, podemos utilizar o conceito de estados do mundo como definido acima de uma maneira mais informal.

O conceito de “estados do mundo” é uma definição extremamente detalhada. Ele especifica o universo físico, passado, presente, e futuro; ele descreve o quê cada agente sabe, e o quê cada agente sabe sobre o quê cada agente sabe, e assim por diante; ele especifica o quê cada agente faz, e o quê cada agente pensa sobre o quê cada agente faz, e o quê cada agente pensa sobre o quê cada agente pensa sobre o quê cada agente faz, e assim por diante; ele especifica a utilidade que cada agente atribui a cada ação, não somente aquelas tomadas naquele estado do mundo, mas também aquelas ações que ele poderia ter tomado, e ele especifica o quê todo mundo pensa sobre a utilidade que todos os outros atribuem a cada ação possível, e assim por diante; ele especifica não somente aquilo que os agentes sabem, mas também quais probabilidades eles atribuem a cada evento, e qual probabilidade eles atribuem para cada outro agente atribuindo alguma probabilidade para cada evento, e assim por diante.

Como mostrado anteriormente, seja Ω o conjunto de todos os possíveis estados do mundo. O conhecimento de cada agente é formalmente descrito por uma coleção de estados do mundo, mutuamente disjuntos, que formam as partições de Ω. Se dois estados do mundo, que podemos chamar de células, estão na mesma partição, então o agente não pode saber a diferença entre eles.

Como outro exemplo, apresentado por Geanakoplos (1992), suponha que Ω é o conjunto de inteiros de 1 a 8, e que a cada agente i é dito se o número verdadeiro é par ou ímpar. A partição do agente i consiste de duas células *(1, 3, 5, 7)* e *(2, 4, 6, 8)*. Se o verdadeiro estado fosse 4, então i iria perceber que um dos estados pares é possível, enquanto nenhum dos ímpares é possível. Para nos lembrar que o quê o agente pensa ser possível depende de qual é o verdadeiro estado do mundo, podemos escrever *Pi(4) = (2, 4, 6, 8)* para denotar a célula de partição *(2, 4, 6, 8)* de estados que i pensa serem possíveis quando o verdadeiro estado do mundo é 4.

Qualquer subconjunto E contido em Ω é chamado um evento. Se o verdadeiro estado do mundo é ω, e se $\omega \in E$, então dizemos que E ocorre ou é verdadeiro. Se cada estado que i pensa ser possível (dado que ω é o verdadeiro estado) acarreta E, que escrevemos como $P_i(\omega) \subset E$, então dizemos que o agente i “conhece” E. Devemos notar que em algum ω, i deve conhecer E, enquanto em outro ω, i não conhece E. Se quando E ocorre i conhece ou sabe E, ou seja, se $P_i(\omega) \subset E$ para todos os estados ω

em E, então dizemos que E é “auto-evidente” para i. Tal evento E não pode acontecer a menos que i saiba. Continuando com o exemplo anterior, seja E = *(1, 2, 3, 5, 7)*. Então em $\omega = 3$ o agente i sabe que ω é um número ímpar entre 1 e 8 e conseqüentemente contido em E. Em $\omega = 2$ o agente i sabe que ω é um número par entre 1 e 8, e portanto não pode dizer se ω está em E, pois 2 está mas 4, 6, e 8 não estão. Portanto E não é auto-evidente para i. Os únicos eventos auto-evidentes para i são *(1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8),* e o próprio Ω.

Naturalmente, podemos definir as partições de vários agentes, digamos i e j, simultaneamente no mesmo estado espaço. Não há razão para que os dois agentes tenham as mesmas partições. Na verdade, pessoas diferentes normalmente têm posições diferentes, e é precisamente essa assimetria de informações que torna o conceito de conhecimento comum relevante. No exemplo anterior, vamos introduzir uma segunda partição *Pj = ((1,2),(3,4,5,6,7,8)).* Repare que o evento E = *(1,2,3,5,7)* também não é auto-evidente para o agente j.

Agora vamos supor que cada agente i conhece a partição de j; ou seja, suponha que i sabe o quê j é capaz de saber e vice-versa. Isto não significa que i sabe o quê j sabe, mas o quê ele é capaz de saber. Por exemplo, em $\omega = 1$, i sabe que E ocorre, e j sabe que E ocorre, mas i não sabe que j sabe que E ocorre, pois i pensa que 3 é possível, e em tal caso j iria pensar que todo elemento de *(3,4,5,6,7,8)* é possível, o quê inclui estados que não estão em E.

Podemos perceber novamente que cada estado ω especifica não somente o universo físico, mas também o quê cada agente sabe sobre esse universo físico, e o quê cada agente sabe sobre o quê cada agente sabe sobre o universo físico, e assim por diante.

Utilizando a definição formal apresentada e as definições mais informais, podemos voltar ao exemplo dos chapéus proposto por Geanakoplos (1992). Um estado ω corresponde a cor do chapéu de cada menina. A Figura 1.1, elaborada por Geanakoplos (1992), mostra os oito possíveis estados do mundo[5]:

5 Para manter a coerência com a formulação original e clássica do exemplo, vamos utilizar as letras *W* (*White*) para Branco e R (*Red*) para Vermelho.

		ESTADOS DO MUNDO							
		a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***
	1	***R***	***R***	***R***	***R***	***W***	***W***	***W***	***W***
JOGADOR	***2***	***R***	***R***	***W***	***W***	***R***	***R***	***W***	***W***
	3	***R***	***W***	***R***	***W***	***R***	***W***	***R***	***W***

Figura 1.1

O conjunto de todos os possíveis estados do mundo Ω pode ser resumido como *{a, b, c, d, e, f, g, h},* onde cada letra designa cada estado. Então, as partições dos três agentes são dadas por: *P1 = {(a, e), (b, f), (c, g), (d, h}, P2 = {(a, c), (b, d), (e, g), (f, h)}, P3 = {(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)}.*

Devemos notar que essas três partições fornecem uma representação factível do quê os agentes poderiam saber no começo da análise. Cada uma pode observar quatro células, com base nos chapéus que as outras estão usando: ambos vermelhos, ambos brancos, ou duas células com um chapéu de cada cor. Nenhuma pode observar seu próprio chapéu, gerando as células em grupos de dois estados. Por exemplo, se o verdadeiro estado do mundo é todos os chapéus vermelhos, i.e., ω *= a = RRR* então o agente 1 é informado que *P1(a) = (a, e),* e então sabe que o verdadeiro estado é *a = RRR*, ou *e = WRR*. No exemplo, o agente i “sabe” a cor de seu chapéu somente se a cor é a mesma em todos os estados ω que esse agente julga serem possíveis.

Agora podemos analisar a evolução da aquisição de informações resultante do anúncio da professora e das respostas das meninas. Quando a professora diz que há pelo menos um chapéu vermelho na sala, isso é equivalente a dizer que o estado não é *WWW*. Agora cada uma das meninas tem uma partição maior do que antes, pois alguns estados que antes eram indistinguíveis se tornaram mais claros. Temos dois elementos principais: um que consiste do estado *WWW* e o resto dos estados.

Se, após ouvir o anúncio da professora, a primeira menina afirma que ela não sabe a cor de seu chapéu, ela revela que o estado não pose ser *RWW*, pois se fosse, ela poderia ser capaz de deduzir tal informação do anúncio da professora e então saberia a cor de seu chapéu.

A afirmação da segunda menina, de que ela ainda não sabe a cor de seu chapéu, revela que o estado não pode ser *WWW*, *RWW*, *RRW,* ou *WRW*, pois estes são os estados, indicados na Figura 1.1., no qual a segunda menina teria a informação (adquirida por dedução como resultado do anúncio da professora e da afirmação da primeira menina) para saber a cor de seu chapéu. Por outro lado, se a segunda menina sabe a cor de seu chapéu, então ela revela que o estado deve ser *WWW, RWW, RRW*, ou *WRW*.

Após ouvir o anúncio da professora e as afirmações da primeira e da segunda menina, a terceira menina sabe a cor de seu chapéu em todos os possíveis estados. Se, após a terceira menina responder que sabe a cor de seu chapéu, a primeira menina é perguntada novamente sobre a cor de seu chapéu, ela ainda não pode responder qual a cor de seu chapéu. E o mesmo acontece com a segunda menina. As respostas se repetem indefinidamente enquanto a pergunta para as meninas é repetida várias e várias vezes. Finalmente, as respostas serão "conhecimento comum": cada menina saberá o quê cada uma das outras irá responder, e cada menina saberá o quê cada outra menina sabe sobre o quê cada uma irá dizer, e assim por diante. Somente usando a lógica as meninas chegam ao conhecimento comum sobre o quê deve acontecer no futuro. Mas devemos notar que no final, as três meninas têm informações diferentes.

O tratamento formal confirma essa análise que pode ser interpretada como heurística[6]. Temos ainda alguns resultados que inicialmente não eram tão claros. Por exemplo, para cada composição inicial de cores, tal como *RWR*, que envolva um chapéu vermelho para a terceira menina, a mesma seqüência de respostas (não, não, sim) irá se repetir indefinidamente. Para composições iniciais como *RRW* ou *WRW*, as respostas serão (não, sim, sim) repetidas indefinidamente. Finalmente, caso o estado seja *WWW* ou *RWW*, após o anúncio da professora cada menina será capaz de identificar a cor de seu próprio chapéu.

No exemplo dos chapéus, a hipótese de que o estado espaço é finito, mesmo que o tempo possa ser infinito, é uma hipótese extremamente forte e em alguns casos injustificável. Mas sem tal hipótese, a suposição de que haverá uma convergência para o conhecimento comum não poder ser considerada como factível. Portanto, precisamos analisar as implicações de um estado espaço infinito.

[6] No Capítulo 3 veremos maiores implicações da análise heurística, bem como uma definição e exemplos.

1.1.6 Estado Espaço Infinito e Conhecimento sobre o Conhecimento no nível *N*

Há duas razões principais que nos levam a considerar a possibilidade de um estado espaço infinito. Primeiro, como mostrado, nós assumimos que cada agente i conhece a partição de qualquer outro agente j. Mas poderíamos imaginar que i não sabe qual das várias partições pertence a j. Essa suposição bastante realista poderia ser incorporada na análise apresentada através da expansão do estado espaço, de maneira que cada novo estado especifique o estado original e também o tipo de partição que pertence a j em relação ao estado espaço original. Ao definir a partição de i nesse estado espaço expandido, nós permitimos não somente que i esteja incerto sobre qual é o estado original, mas também sobre qual é a partição de j no estado espaço original. O mesmo procedimento também pode ser usado se i está incerto sobre a idéia prévia que j tem sobre o estado espaço original. Mas também podemos considerar o caso em que j está incerto sobre qual é a partição de i nesse estado espaço expandido, o quê nos levaria a poder expandir o estado espaço novamente. Na verdade, poderíamos ser forçados a fazer isso infinitas vezes, gerando uma série de complicações adicionais. Porém, em vários artigos, incluindo Mertens e Zamir (1985) e Fagin *et al.* (1999), podemos ver que um número finito de expansões é suficiente para descrever se um evento contido no estado espaço original é de conhecimento comum. Uma segunda razão pra considerar um estado espaço infinito é que em algumas situações as mensagens trocadas ou recebidas pelos agentes podem ser perdidas. Suponha que, como apresentado por Geanakoplos (1992), dois pilotos de avião estão se comunicando através de seus rádios. Se cada mensagem tem uma possibilidade de ser perdida, e se os estados do mundo são descrições completas de tudo que está acontecendo, então podemos ter um número de estados e mensagens equivalente. Se permitirmos um grande número de mensagens, então definitivamente precisamos de um estado espaço infinito. A suposição de que Ω é finito é extremamente importante para garantir que o conhecimento comum seja alcançado. Com um estado espaço infinito, conhecimento comum de algumas ações pode nunca ser alcançado. Devemos lembrar da distinção proposta por Lipman (1994), entre conhecimento comum da racionalidade e conhecimento comum de algum fato exógeno, mas sempre ter em mente que as duas noções estão relacionadas e que a análise proposta não sofre alterações significativas se considerarmos as duas como equivalentes. Robert Aumann em van Damme (1998) efetivamente afirma que o conceito de conhecimento comum da racionalidade é bastante limitado, e em algumas situações, pouco plausível.

Entretanto, mesmo com um estado espaço infinito, se os agentes podem conversar durante tempo suficiente sobre a probabilidade de alguma variável aleatória, que tenha probabilidade finita, então suas opiniões podem convergir, mesmo que elas não se tornem exatamente iguais ao longo do tempo.

1.1.7 Discussão

Como apresentado, a abordagem semântica consiste de uma estrutura de partições: um espaço Ω de estados ω do mundo, juntamente com uma partição de Ω para cada jogador, cujos componentes representam conjuntos de informação desse jogador; claramente Ω também pode ser chamado de universo. Os eventos são subconjuntos de Ω; intuitivamente, um evento está relacionado com o conjunto de todos aqueles estados do mundo no qual o evento prevalece. Portanto um evento E está relacionado com o estado ω se e somente se $\omega \in E$, e um jogador i conhece E em ω se e somente se E inclui o conjunto de informação desse jogador em ω. O fato de i conhecer E também é um evento, que pode ser representado por $K_i E$. Os operadores de conhecimento K_i podem ser associados; por exemplo, $K_j K_i E$ representa o evento "j sabe que i sabe E".

Mas, de acordo com Aumann (1976), para considerar essa interpretação devemos assumir que i conhece a partição de informação de j, pois isso é necessário para interpretar o conjunto de estados $K_j K_i E$ como o conjunto no qual j sabe que i sabe E. Além disso, precisamos assumir que as partições são de conhecimento comum entre os agentes. Uma questão adicional é saber se é realmente aceitável assumir que a estrutura de informações é de conhecimento comum entre os agentes, mesmo que informalmente.

Aumann (1976) argumenta que, se o modelo é completo, e cada estado ω é uma descrição completa dos estados do mundo, então o modelo é de conhecimento comum, pelo menos se considerarmos que Ω é de conhecimento comum. Isto ocorre porque uma completa especificação de um estado determina as partições e crenças de todos os jogadores naquele estado, e portanto se o conjunto de estado é de conhecimento comum então a célula da partição, bem com as crenças correspondentes a essa célula, para cada estado serão de conhecimento comum.

Apesar de tal argumento parecer convincente, não sabemos, por exemplo, se um modelo completo existe, nem mesmo se com uma completa descrição de uma situação que não é de conhecimento comum, um modelo de conhecimento comum pode ser construído. De acordo com Dekel e Gul (1997) compreender a construção do modelo é importante, pois se estamos impondo suposições no modelo construído, devemos saber como interpretar tais suposições no começo da análise, o quê claramente é uma situação de informação incompleta e não um modelo universalmente conhecido.

Em uma abordagem mais crítica do que em Aumann (1976), Aumann (1999a) questiona: o quê os jogadores sabem sobre o formalismo usado? Cada um conhece as partições dos outros? Se a resposta for positiva, de onde deriva tal conhecimento? Se a resposta é negativa, como o formalismo pode indicar o quê cada jogador sabe sobre o conhecimento dos outros? Por exemplo, por quê o evento $K_j K_i E$ deveria significar o conjunto no qual j sabe que i sabe E? As respostas para tais perguntas estão muito além do objetivo do presente trabalho, mas podemos dizer que tal solução está relacionada com a abordagem sintática, que não apresentamos aqui, e que, informalmente, a resposta da maioria dos questionamento acima é negativa, embora formalmente possa ser positiva. Para uma discussão completa, profunda e brilhante, ver Aumann (1999a) e também Fagin *et al.* (2003).

Outro ponto de possível dúvida é a interpretação do conceito “estados do mundo”. Na construção dos modelos teóricos, por exemplo, o estado do mundo ou estado da natureza, geralmente especifica quais são as ações dos jogadores. Mas Aumann (1999a) considera que tal abordagem restringe a liberdade de ação do jogador, ao forçá-lo, caso esteja no estado ω, a escolher a ação que ω especifica para ele. Mas por quê, não seria permitido ao jogador, caso ele queira, escolher outra ação desse estado? Na verdade, a idéia de estados do mundo, e de uma estrutura de partições que reflita precisamente o conhecimento do jogador sobre o quê os outros jogadores sabem, não é muito clara. Quais são os estados? Eles podem ser descritos explicitamente? De onde eles surgem? De onde surgem as partições de informações? Qual a justificativa para utilizar tal modelo, e o quê justifica uma particular estrutura de partição? Podemos também nos questionar sobre as propriedades gerais da estrutura de partições.

1.2 *A PRIORI* COMUM[7]

A abordagem que utiliza modelos em que os agentes têm crenças prévias comuns é algumas vezes chamada de Doutrina Harsanyi. Nessa abordagem, dois agentes cujas informações e experiências são idênticas em cada aspecto imaginável devem ter crenças idênticas. Qualquer diferença nas crenças pode estar relacionada com os efeitos de informações ou experiências que atuam sobre as crenças idênticas, e qualquer uma dessas possibilidades deve aparecer explicitamente no modelo. Conseqüentemente relacionamos as crenças idênticas de agentes efetivamente idênticos com uma a priori comum, e relacionamos todo e qualquer elemento que possa levar a diferentes crenças na forma de revisões das crenças prévias em resposta a mudanças nas informações.

Segundo Aumann (1987) e Aumann e Brandenburger (1995) a *suposição de a priori comum* desempenha um importante papel na Teoria dos Jogos e na Economia da Informação. É a suposição básica por trás das construções teóricas que tentam justificar a noção de equilíbrio em qualquer interação estratégica.

A suposição de a priori comum, como definida inicialmente por Harsanyi (1967, 1968), está presente na maioria dos modelos de informação incompleta. Tal suposição assume que as crenças dos agentes em diferentes estados do mundo são as crenças posteriores que eles formam dada sua informação privada de uma crença a priori que é comum para todos. Morris (1995) apresenta as possíveis justificativas normativas para tal suposição.

Ao escrever, "seja P (ao invés de P_i) a probabilidade de…", já estamos assumindo *a priori* comum. A representação tradicional de jogos na forma extensiva envolve o conceito de "sorte" ou "natureza" onde cada alternativa tem uma única probabilidade comum para todos os jogadores. A formulação tradicional do equilíbrio de Nash usa estratégias mistas com probabilidades comuns para todos os jogadores.

Apresentamos a seguir uma definição e uma breve discussão. Para maiores detalhes, recomendamos Morris (1995), Samet (1990), Dekel e Gul (1997), Samet (1998a), Samet (1998b) e Bonanno e Nehring (1999).

[7] Na definição original, *Common Prior Assumption*. Também traduzido como Hipótese Anterior Comum, ou Hipótese Prévia Comum.

1.2.1 Concordando em Discordar[8]

Suponha que os jogadores A e B (ou i e j se preferir) têm cada um a crença *a priori* de que os estados em Ω são igualmente prováveis, embora os jogadores possam ter partições Pa e Pb diferentes, e portanto informações diferentes. Considere um evento $E \subset \Omega$ e suponha que é de conhecimento comum que A atribui a probabilidade posterior α ao evento E enquanto B atribui a probabilidade posterior β a E.

Se a crença α de A é de conhecimento comum, então A deve atribuir a probabilidade α ao evento E em cada estado ω' no elemento de partição $P(\omega)$ contendo o verdadeiro estado ω. Para que A atribua a probabilidade posterior α ao evento E em qualquer estado ω' dada uma *a priori* uniforme, dever ser porque a fração α dos estados no elemento de partição $Pa(\omega')$ de A está no evento E e a fração $1-\alpha$ dos estados em $Pa(\omega')$ não está em E. Como isso é verdadeiro para cada estado em $P(\omega)$, e como $P(\omega)$ é uma união de elementos da partição de A, a fração α dos estados em $P(\omega)$ está contida no evento E e a fração $1-\alpha$ destes estados não está contida no evento E.

Devemos notar que um argumento similar pode ser aplicado a B, o quê nos permite concluir que a fração β do estado em $P(\omega)$ está contida no evento E. Mas este só pode ser o caso se $\alpha = \beta$.

Agora podemos dizer que se as crenças *a posteriori* de A e B são de conhecimento comum, então elas devem ser idênticas. A caracterização usual desse resultado é que A e B não podem "concordar em discordar". Além disso, suas crenças devem ser as mesmas, ou deve haver diferenças de opinião sobre o quê os jogadores acreditam, no sentido de que ambos não podem saber as crenças dos outros, e saber que eles sabem as crenças dos outros, e assim por diante.

A suposição de que a distribuição prévia de A e B é uniforme simplifica a argumentação mas não influencia o resultado. O que é realmente necessário é que os agentes tenham a mesma *a priori*. Ou seja, se A e B tem a mesma distribuição prévia em

[8] *Agreeing to disagree*, conforme o artigo de Auman (1976).

Ω e as probabilidades *a posteriori* que eles atribuem ao evento E são de conhecimento comum, então estas probabilidades *a posteriori* são iguais.

Por quê devemos considerar uma *a priori* comum importante? Em geral, dado o conhecimento de B sobre as crenças de A, e o conhecimento sobre o conhecimento de A sobre as crenças, e assim por diante, algumas das informações de A ficam acessíveis para B. Finalmente, o conhecimento comum das crenças *a posteriori* torna a informação de cada agente acessível para o outro. Se eles têm crenças prévias idênticas, então eles irão usar a informação resultante para chegar às mesmas conclusões. Se ao invés disso eles têm crenças prévias diferentes, eles irão chegar à conclusões diferentes e portanto irão concordar em discordar. Porém, Samuelson (2004) mostra que pode ser improvável assumir que A e B sabem as informações prévias do outros, mas devemos notar que isso não é o mesmo que assumir que eles têm a mesma *a priori*.

1.2.1.1 Concordando em Discordar – Uma visão pessimista

De acordo com Dekel e Gul (1997) e especialmente Gul (1998) a suposição de a priori comum é uma propriedade matemática cujo conteúdo conceitual não é claro. Tal afirmação deu origem a uma crítica ainda mais radical da suposição, de que ela não tem muito significado em situações de informação incompleta.

O conjunto de mundos possíveis, ou estados, por exemplo, dá origem a uma analogia formal entre situações de informação assimétrica e situações de informação incompleta. Entretanto, enquanto um estado na primeira situação é uma possibilidade real, na segunda situação, de acordo com Gul (1998), é um mecanismo para representar o perfil de hierarquias infinitas de crenças. Como resultado, noções tais como a de *a priori* comum, parecem dar ao estados artificialmente construídos mais significado do que eles realmente têm, segundo Dekel e Gul (1997). Quando as crenças dos agentes podem ser interpretadas como se fossem obtidas através da atualização das crenças prévias comuns com base em alguma informação, elas são chamadas de consistentes no sentido de Harsanyi. Tal consistência é uma propriedade matemática bem definida, mas de acordo com Gul (1998), devido à sua "natureza artificial" em situações de informação incompleta, não podemos saber o quê deve ser levado em conta se aceitamos a suposição de *a priori* comum.

1.2.1.2 Concordando em Discordar – Uma visão otimista

Gul (1998) ataca os fundamentos conceituais da suposição de *a priori* comum, que são importantes para a derivação do equilíbrio correlacionado de Aumann (1987), que veremos no Capítulo 2. Mas Aumann (1998) afirma que não considera “verdadeira” a suposição de *a priori* comum, pois o conceito de verdade não se aplica a essa abordagem. Aumann (1998) argumenta que a suposição de *a priori* comum incorpora uma abordagem útil e razoável para compreender situações de interação estratégica, mas de nenhuma forma a única abordagem. Uma visão semelhante também é proposta por Bonanno e Nehring (1999).

Aumann (1998) afirma que o equilíbrio correlacionado (objetivo) não é uma conseqüência inevitável da abordagem Bayesiana; também se deve levar em conta a suposição de *a priori* comum. Mas mesmo com tal suposição, a visão Bayesiana não é suficiente para considerar o equilíbrio correlacionado, ainda precisamos que os agentes tenham conhecimento comum da visão Bayesiana. Ele sugere que as principais diferenças em relação a Gul (1998) giram em torno da abordagem dinâmica. De acordo com Aumann (1998), Gul (1998) vê a situação de aquisição de informação como uma situação estática, e não considera apropriado questionar que informações os agentes tinham antes de começar a interagir. Aumann concorda com Gul que a suposição de *a priori* comum deve ser essencialmente dinâmica, e que depende da idéia de adquirir informações e usar as mesmas para atualizar as probabilidades.

Aumann (1998) considera que devemos expandir a abordagem usada na suposição de *a priori* comum para que ela fique mais dinâmica, tornando possível que a informação dos jogadores possa mudar. E, segundo Aumann, devemos formular axiomas que levem em consideração os seguintes princípios: (i) os jogadores com a mesma informação devem ter as mesmas probabilidades; e (ii) quando a informação é adquirida, as probabilidades são atualizadas através da regra de Bayes.

De acordo com Aumann (1998), é extremamente útil ser um pouco mais explícito sobre a motivação por trás da suposição de *a priori* comum. Tal suposição expressa a idéia de que diferenças ns probabilidades devem *somente* refletir diferenças na informação. Se levarmos em conta, de maneira detalhada, toda a informação relevante, então a princípio, não há espaço para diferenças nas probabilidades. Quando dizemos toda a informação relevante, queremos dizer *toda*: as escolas que os jogadores freqüentaram, suas experiências na infância, suas universidades, suas experiências profissionais, suas habilidades, seus gostos, mesmo seu genes (que indiretamente refletem a experiência das gerações passadas). Certamente, os jogadores não precisam ter conhecimento de toda essa informação; na verdade, normalmente eles sabem muito pouco. Aumann (1998) argumenta que se as pessoas têm precisamente a *mesma* informação sobre todos esses fatores, então é razoável assumir que eles compartilham as mesmas crenças. Obviamente, em termos práticos é impossível para qualquer pessoa elaborar um modelo explicito que leve em conta todos esses fatores.

Devemos compreender a existência de uma *a priori* comum como apenas uma propriedade do estado espaço usada para modelar a informação incompleta dos jogadores. Heifetz (2006) mostra que essa propriedade não é somente um artifício técnico, mas que está relacionada com as crenças dos jogadores. Ele mostra que quando o estado espaço é compacto, nós temos uma caracterização plausível para a existência de uma *a priori* comum, que requer somente que as crenças mútuas dos agentes sejam baseadas nos fundamentos da interação, como os pagamentos envolvidos nas possíveis ações. Nesse caso, as questões formuladas para os agentes podem ser feitas através de expressões verbais, sem referência a qualquer modelo ou estrutura abstrata.

CAPÍTULO 2 EQUILÍBRIO CORRELACIONADO

2.1 REFINAMENTOS DO EQUILÍBRIO DE NASH – UMA BREVE NOTA

Sabemos que em virtude da existência de equilíbrios múltiplos, seja na forma extensiva ou normal, as previsões que podem ser geradas por tais equilíbrios não são confiáveis. Mas mesmo no caso de um único equilíbrio, devemos notar que o próprio conceito é um critério relativamente frágil em alguns aspectos, e podemos tentar refinar esse critério para obter previsões mais precisas. Os vários refinamentos do equilíbrio de Nash (Selten (1965, 1975), Myerson (1978), Kreps e Wilson (1982), van Damme (1984, 1989), Kalai e Samet (1984), Mertens e Zamir (1985), Kohlberg e Mertens (1986), Banks e Sobel (1987), Cho e Kreps (1987), Cho (1987), Basu e Weibull (1991), Fudenberg e Tirole (1991b), Blume *et al.* (1991), Reny (1992), e muitos, muitos outros) podem ser organizados em dois grupos. Um grupo de refinamentos requer racionalidade seqüencial durante o jogo. Outro grupo tenta garantir credibilidade ao considerar pequenas perturbações no jogo, onde cada contingência ocorre com probabilidade positiva, fato esse que acaba excluindo estratégias fracamente dominadas. Comentamos brevemente as implicações do primeiro grupo.

2.1.1 Indução Retroativa

Sabemos que uma ordem particular na qual as estratégias fracamente dominadas são excluídas é usada para jogos na forma extensiva, o que decompõe o jogo em uma sucessão de subjogos. Neste caso, as estratégias que são fracamente dominadas porque são estritamente dominadas nos subjogos finais são excluídas primeiro, e em seguida aquelas nos penúltimos subjogos, e assim até o começo do jogo. De acordo com Selten (1965, 1975), em jogos com informação perfeita este procedimento utiliza o critério chamado de *indução retroativa* e os equilíbrios que restam estão entre aqueles que são *perfeitos em subjogos*. Em geral, um equilíbrio perfeito em subjogos induz um equilíbrio em cada subjogo do jogo.

Mas em muitos jogos dinâmicos não há nenhum subjogo. Isso pode ocorrer quando algum dos jogadores se move sem saber toda a informação do jogo que é relevante para o futuro. A fonte natural de tal deficiência é que algum agente tem informação privada; i.e., suas próprias preferências ou informações sobre os resultados, ou porque suas ações são observadas imperfeitamente pelos outros.

Adotando o procedimento proposto por Harsanyi (1967, 1968), tais situações podem ser modeladas assumindo que cada jogador pode ser de vários tipos. A distribuição conjunta inicial dos tipos é universalmente conhecida pelos jogadores, mas cada jogador sabe seu próprio tipo, o quê inclui uma especificação de suas estratégias disponíveis, suas preferências sobre os resultados, e principalmente, suas estimativas sobre as probabilidades condicionais sobre os tipos dos outros jogadores, dado o seu próprio tipo. No pôquer, por exemplo, o tipo de um jogador inclui as cartas que ele tem, e tal fato afeta suas crenças sobre as cartas que os outros têm.

Em jogos dinâmicos com informação perfeita, a implementação da indução retroativa é inequívoca porque em cada contingência o jogador sabe exatamente qual é o subjogo seguinte. Ele pode então encontrar sua estratégia ótima, agindo retroativamente das posições finais, através de todas as posições possíveis do jogo.

Por outro lado, em um jogo de informação imperfeita, a informação que o jogador tem pode ser insuficiente para identificar a história prévia do jogo que levou até a situação atual, e conseqüentemente insuficiente para identificar como os outros jogadores irão responder no futuro, mesmo se ele antecipar as estratégias dos outros jogadores. Então, uma distribuição de probabilidade pode ser combinada com as estratégias dos jogadores para fornecer uma previsão probabilística de como os jogadores irão agir em resposta a cada movimentos que o jogador fizer. Usando esse procedimento ele pode construir uma estratégia ótima para agir retroativamente a partir das várias conclusões possíveis do jogo.

Entretanto, ainda há alguns problemas com a indução retroativa. Por exemplo, assim como fizemos vimos no final do Capítulo 1, podemos perguntar: o jogo é de conhecimento comum? Vários artigos apontam os possíveis problemas da indução retroativa, bem como possíveis modificações; ver principalmente Binmore (1987, 1988), Bicchieri (1988, 1989), Basu (1990), Bonanno (1991), Reny (1992a), McKelvey e Palfrey (1992), Samuelson (1992), Börgers e Samuelson (1992), e Aumann (1995). A discussão destas dificuldades está além dos objetivos deste trabalho mas podemos dizer que não há um consenso sobre a resposta à nossa pergunta.

2.1.1.1 Racionalidade Seqüencial

A suposição de que um acordo é irrevogável pode ser inconsistente se o acordo para seguir uma estratégia não é visto como crível pelos outros participantes do jogo. Os acordos podem ser vantajosos, mas se o acordo é possível (i.e., via arranjos contratuais compulsórios) então tal fato deveria ser tratado como uma estratégia adicional. Assim, alguns equilíbrios de Nash são suspeitos pois são implicitamente baseados em promessas ou ameaças que não são críveis. Em tais situações, o objetivo de um refinamento é selecionar um equilíbrio de Nash alternativo que possa antecipar corretamente, por exemplo, que a entrada de um competidor será seguida pela acomodação do competidor já estabelecendo.

O critério de *racionalidade seqüencial* exige que uma estratégia seja ótima em cada contingência e exclui estratégias que não são críveis. Tal procedimento normalmente requer que a estratégia do jogador seja ótima desde o início (como no caso de acordo), e também que em cada contingência seguinte onde o jogador possa atuar sua estratégia permanece ótima, mesmo que o equilíbrio antecipe que tal contingência não possa ocorrer. Três refinamentos relacionados com esse critério são o *seqüencial*, o *Bayesiano perfeito*, e o *lexicográfico*.

Um *equilíbrio seqüencial*, por exemplo, formulado por Kreps e Wilson (1982), requer que o sistema de crenças de cada jogador seja consistente com a estrutura do jogo. Consistência requer que o sistema de crenças de cada jogador seja o limite das probabilidades condicionais geradas pelos jogadores em algum jogo que sofreu alguma perturbação.

Portanto, basicamente, nós temos os critérios (indução retroativa e racionalidade seqüencial) para restringir o número de equilíbrios, e os equilíbrios resultantes (equilíbrio perfeito em subjogos e equilíbrio seqüencial).

2.1.2 Equilíbrio de Nash sem Conhecimento comum

Aumann e Brandenburger (1995) argumentam que conhecimento comum da racionalidade é geralmente descrito como uma implicação (ao invés de condição suficiente) do equilíbrio de Nash. Mas essa implicação é muito forte, pois as melhores respostas de um equilíbrio de Nash são claramente traduzidas como afirmação de racionalidade de cada jogador, e podem ser interpretadas como declarações sobre o conhecimento da racionalidade. Entretanto, Aumann e Brandenburger (1995) afirmam que esse não é o caso, pois podemos supor que os jogadores A e B conhecem suas funções de pagamento, são racionais, e cada um conhece a estratégia do outro, de tal forma que essas estratégias formem um equilíbrio de Nash, embora a racionalidade *não precise ser de conhecimento comum*. Eles citam uma extensa lista de autores (incluindo os próprios Aumann e Brandenburger) que escreveram vários artigos relacionando equilíbrio estratégico e conhecimento comum. Conhecimento comum, a racionalidade dos jogadores e uma *a priori* comum são importantes para caracterizar o equilíbrio correlacionado, portanto tal discussão tem relevância para nosso trabalho.

Mais especificamente, eles mostram que, se os pagamentos dos jogadores são mutuamente conhecidos, sua racionalidade é mutuamente conhecida[9], suas crenças (ou conjecturas) sobre as ações do outro jogador são de conhecimento comum e eles têm uma *a priori* comum, então para cada jogador j, as conjecturas de todos os outros jogadores sobre as ações de j são semelhantes e a n-tupla de tais conjecturas (uma conjectura sobre cada jogador) forma um equilíbrio de Nash quando vista como um perfil de estratégias mistas. Os autores enfatizam um aspecto importante do resultado: este conjunto de condições suficientes para um equilíbrio de Nash *não inclui conhecimento comum da racionalidade*. Estudos anteriores, incluindo alguns de Aumann e de Brandenburger, deixaram a impressão de que conhecimento comum da racionalidade seria essencial. Mas eles afirmam que se nós reforçarmos o conceito de *conhecimento mútuo* dos pagamentos, levando ao conceito de conhecimento comum dos pagamentos, então as condições de Aumann-Brandenburger implicam conhecimento comum da racionalidade. Na verdade, os autores afirmam que, em alguns casos, podemos dispensar outra condição: *não precisamos da suposição de a priori comum*. Na discussão do Capítulo 3 e na definição de equilíbrio correlacionado, tais resultados tornam possível uma abordagem mais realista desses conceitos mas também de toda a Teoria dos Jogos.

As condições de Aumann-Brandenburger implicam que é de conhecimento comum que a ação de cada jogador está entre aquelas ações que maximizam o seu pagamento (mutuamente conhecido) com respeito à sua conjectura (de conhecimento comum) sobre

---

[9] *Conhecimento mútuo* ocorre quando todos sabem algo. *Conhecimento comum* ocorre quando todos sabem que todos sabem que todos sabem, e assim por diante. Um semáforo é um exemplo de conhecimento mútuo, mas parar para que os outros passem e passar enquanto os outros param é conhecimento comum.

as ações do outro jogador. Mas isto não é conhecimento comum da racionalidade. Cada jogador i sabe que cada jogador j sabe que as ações de i estão entre aquelas ações que maximizam seu pagamento (digamos, gi), mas i não necessariamente sabe que j sabe que a função de pagamento de i é gi. Se, entretanto, acrescentarmos que os pagamentos são de conhecimento comum, obtemos conhecimento comum da racionalidade. Normalmente, em jogos de informação completa, está implícito que os pagamentos são de conhecimento comum. Na verdade, essa é geralmente a definição de jogos de informação completa.

O resultado apresentado por Aumann e Brandenburger (1995) mostra que, para jogos de informação completa com *n*-jogadores, considerando conhecimento comum das conjecturas, *conhecimento mútuo da racionalidade* é equivalente a conhecimento comum da racionalidade. Para conseguir condições suficientes para o equilíbrio de Nash em jogos de informação completa com *n*-jogadores, entretanto, precisamos assumir uma *a priori* comum ou assumir que todas as conjecturas dos outros jogadores sobre as ações de cada jogador coincidem e que as conjecturas conjuntas de cada jogador sobre as ações dos outros jogadores são independentes, como proposto por Brandenburger e Dekel (1989).

Segundo Polak (1999), esse resultado pode ajudar a explica porquê muitos pensavam que conhecimento comum da racionalidade fosse essencial para o equilíbrio de Nash. Muitos dos primeiros artigos (incluindo os de Aumann e Brandenburger) assumiam que os pagamentos do jogo fossem de conhecimento comum. Na verdade isso estava implícito na formulação do problema. Tal suposição era natural, considerando que estava relacionada a jogos de informação completa. Então, em certo sentido, tal visão não estava inteiramente incorreta. Em uma abordagem com conhecimento comum dos pagamentos, se a racionalidade não é de conhecimento comum então as conjecturas sobre as ações dos outros jogadores não são de conhecimento comum ou nem mesmo a racionalidade é de conhecimento mútuo.

2.2 EQUILÍBRIO CORRELACIONADO

2.2.1 Jogos Bayesianos – Uma Definição

Ao analisar uma situação de assimetria de informações, como definido no Capítulo 1, podemos começar com um conjunto Ω de estados que é geral para todos os jogadores. Um dos estados em Ω é o verdadeiro estado, mas os jogadores podem não sabem qual é. Então, em cada ω, vamos associar um vetor de ações dos N jogadores a um pagamento para cada agente i. Podemos dizer que cada ω define um jogo entre os N agentes. A estrutura de informações de cada jogador i é representada por uma função $\alpha_i : \Omega \rightarrow \Theta_i$, onde Θ_i é um conjunto de sinais ($\theta = (\theta_1, ...\theta_n) \in \Theta = \Theta_1 \times ... \times \Theta_n$ é uma especificação de tipos para todo jogador). De acordo com α_i, se o verdadeiro estado é ω, o jogador i receberá o sinal $\alpha_i(\omega)$. Refletindo o perfeito entendimento de α_i, após receber um sinal $\theta_i \in \Theta_i$, o jogador i sabe que o verdadeiro estado está no evento $\{\omega \in \Omega : \alpha_i(\omega) = \theta_i\}$, e atualiza suas crenças sobre Ω usando uma distribuição de probabilidade $p(\theta_1, ..., \theta_n)$ prévia a respeito de Θ, utilizando a regra de Bayes $p\left(\theta_{N-i} / \theta_i\right) = \dfrac{p\left(\left[\theta_i, \theta_{N-i}\right]\right)}{p_i\left(\theta_i\right)}$. Esta *a priori* é considerada de conhecimento comum. Assumimos que todas as probabilidade marginais são positivas, i.e., $p_i(\theta_i) > 0, \forall i \in N$.

Supomos, seguindo a tradição Bayesiana, que todo agente tem uma probabilidade *a priori* sobre os estados do mundo em Ω. No equilíbrio correlacionado, por exemplo, para cada jogador i, em resposta a todo sinal θ_i que ocorre com probabilidade positiva, sua estratégia especifica um ação que maximiza o pagamento esperado condicional, em relação às probabilidades posteriores, considerando as regras de decisão dos outros como dadas.

Se a função que relaciona estados a ações satisfaz essa condição de otimização, então nos referimos a toda a estrutura de conhecimento, estados, ações, pagamentos, e crenças *a priori* como um equilíbrio de Nash Bayesiano.

Precisamos enfatizar que a estrutura do equilíbrio de Nash Bayesiano expande a estrutura de epistemologia interativa que desenvolvemos no exemplo da seção 1.1.5.1. Por exemplo, podemos voltar ao problema dos chapéus utilizando uma abordagem Bayesiana ao especificar que o pagamento para o jogador i é 1 se ele adivinha sua cor, e é 0 se ele diz que não sabe sua cor.

2.2.2 Jogos em Forma Estratégica – Definição

Um jogo em forma estratégica (ou normal) é um modelo de tomada de decisão interativa na qual cada tomador de decisão escolhe seu plano de ação para todo o jogo, e tais escolhas são feitas simultaneamente. O modelo consiste de um conjunto finito N de *jogadores* e, para cada jogador i, um conjunto A_i de *ações* e uma *relação de preferências* $\succsim_i$ no conjunto de perfis de ações. Nos referimos a um perfil de ações $a=(a_j)_{j\in N}$ como um resultado, e denotamos por A o conjunto $\times_{j\in N} A_j$ de resultados. O pré-requisito de que as preferências de cada jogador i sejam definidas sobre A, ao invés de A_i, é a característica que diferencia um jogo em forma estratégica de um problema de decisão: cada jogador deve não somente se preocupar com sua própria ação mas também com as ações tomadas pelos outros jogadores. Devemos lembrar que se o conjunto de ações A_i de cada jogador i é finito então o jogo é *finito*.

Em um grande número de situações a relação de preferência $\succsim_i$ do jogador i em uma forma estratégica pode ser representada por uma *função de pagamento* $u_i : A \to \mathbb{R}$ (também chamada *função utilidade*). Nos referimos aos valores de tal função como *pagamentos* (ou *utilidades*). Normalmente especificamos uma relação de preferência do jogador através de uma função de pagamentos. Em tais caso definimos o jogo por $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$.

Em resumo, seguindo a notação usada por Osborne e Rubinstein (1994), nossa definição é a seguinte:

Um jogo em *forma estratégica* consiste de:

- Um conjunto finito N (o conjunto de *jogadores*).
- Para cada jogador $i \in N$ um conjunto não vazio A_i (o conjunto de *ações* disponíveis para o jogador i).
- Para cada jogador $i \in N$ uma relação de preferência $\succsim_i$ sobre $A = \times_{j \in N} A_j$ (a *relação de preferência* do jogador i). Devemos notar que $A = \times_{j \in N} A_j$ é somente $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \cdots A_n$, i.e. o *espaço de ações*.

2.2.3 Equilíbrio Correlacionado

Segundo Foster e Vohra (1997) uma objeção natural ao equilíbrio de Nash tradicional é que ele é inconsistente com uma visão Bayesiana. Um jogador Bayesiano inicia com uma *a priori* sobre o quê seu oponente irá fazer e então escolhe a melhor resposta para tal ação. Argumentar que o jogador Bayesiano deva escolher o equilíbrio de Nash do jogo é insistir que ele deva escolher uma *a priori particular*. Nesse sentido Aumann (1987) argumenta que a solução consistente com a perspectiva Bayesiana não é o equilíbrio de Nash mas sim o equilíbrio correlacionado. Obviamente há muitas objeções a uma visão Bayesiana do mundo; ver Dekel e Gul (1997) e Gul (1998).

O e*quilíbrio correlacionado*, introduzido por Aumann (1974, 1987), que assumiu como finitos os conjuntos de estratégias, e expandido posteriormente para jogos infinitos por Hart e Schmeidler (1989), é inquestionavelmente uma das noções mais naturais de equilíbrio. Um equilíbrio correlacionado é uma distribuição conjunta sobre o conjunto de estratégias dos jogadores. Se, antes de tomar uma decisão, cada jogador recebe uma recomendação de um mediador externo tal que as recomendações são escolhidas aleatoriamente de acordo com a distribuição conjunta, então nenhum jogador tem incentivo para rejeitar a recomendação, dado que os outros jogadores seguiram suas recomendações. Diferentemente do equilíbrio de Nash, as recomendações não precisam ser independentes[10].

Uma notável propriedade do equilíbrio correlacionado, notada por Foster e Vohra (1997), é que se o jogo é repetido infinitas vezes de tal forma que cada jogador jogue de

[10] Em nossa discussão sobre partições no Capítulo 1, os conjuntos disjuntos são mutuamente exclusivos e portanto muito dependentes. Por isso o termo *correlacionado*.

acordo com uma certa estratégia de minimização de arrependimento, então a freqüência empírica do jogo converge para o conjunto de equilíbrios correlacionados; nesse sentido ver também Fudenberg e Levine (1999), Lehrer (1997, 2003) e Hart e Mas-Colell (2000, 2001). Esta propriedade, que terá ainda mais relevância no Capítulo 3, foi inicialmente provada por Foster e Vohra (1997). Nenhuma coordenação é necessária entre os jogadores, e os agentes nem mesmo precisam saber as funções de pagamento dos outros. Hart e Mas-Colell (2003) mostram que o equilíbrio de Nash só satisfaz essa propriedade em jogos que tenham características muito peculiares.

Stoltz e Lugosi (2007) mostram que esse resultado de convergência pode ser estendido a jogos com espaços infinitos de estratégias. Mais especificamente, eles mostram que sob condições gerais, os jogadores podem minimizar (individualmente) seus arrependimentos internos, e que, agindo dessa maneira, as freqüências empíricas do jogo convergem para o conjunto de equilíbrios correlacionados. Portanto, na maioria dos casos, um equilíbrio correlacionado pode ser alcançado sem exigir cooperação entre os jogadores.

2.2.3.1 Arrependimento Interno

A noção de equilíbrio correlacionado está intimamente ligada à noção de *arrependimento interno* (ou condicional). Intuitivamente, o conceito de arrependimento interno diz respeito ao aumento do pagamento do jogador obtido através de simples modificações na estratégia jogada. Se uma simples modificação resulta em uma melhoria substancial então o jogador experimenta um grande arrependimento interno. A definição formal de arrependimento interno é apresentada por Foster e Vohra (1999).

Basicamente, um jogador pode estar arrependido porque jogou de uma maneira ao invés de outra. Podemos quantificar o tamanho de seu arrependimento através da diferença entre o pagamento que ele poderia ter recebido se tivesse jogado de outra maneira, e o pagamento que ele realmente recebeu. Esta diferença entre os pagamentos é chamada de arrependimento.

Hart e Mas-Colell (2000, 2001) desenvolveram um método simples que assegura que a distribuição empírica do jogo deve convergir com probabilidade um para o conjunto de equilíbrios correlacionados. Entretanto, como eles assinalam, este procedimento não é “universalmente e condicionalmente consistente”, i.e., o resultado não é garantido para um jogador a não ser que todos os jogadores joguem de acordo com essa estratégia. Em particular, se somente o jogador i segue o procedimento, não podemos concluir que todos os arrependimentos cheguem a zero. Mas Cahn (2004) fornece condições suficientes impostas sobre os jogadores de tal forma que todos os arrependimentos do jogador i irão necessariamente convergir para zero. A abordagem de Foster e Vohra (1997), chamada calibragem, também utiliza a medida de arrependimento e também leva ao equilíbrio correlacionado.

Foster e Vohra (1997) fornecem uma ligação direta entre as crenças Bayesianas do jogador e a conclusão de que eles irão jogar um equilíbrio correlacionado. Eles mostram que um equilíbrio correlacionado pode ser "aprendido". Eles não fornecem uma regra particular de aprendizagem, mas restringem sua atenção a regras de aprendizagem que possuam a propriedade de calibragem. O principal resultado é que se os jogadores usam *qualquer* regra de previsão com a propriedade de calibragem, então, em jogadas repetidas, o limite da seqüência é um equilíbrio correlacionado. Se os jogadores usam um mecanismo de previsão Bayesiana que é calibrado, então, em jogadas repetidas, Foster e Vohra (1997) mostram que os limites das seqüências de jogadas são equilíbrio correlacionados.

Na verdade, para cada equilíbrio correlacionado há alguma regra de calibragem que os jogadores podem usar em suas jogadas. Então, o conceito estatístico de calibragem está fortemente relacionado com o conceito de equilíbrio correlacionado.

2.2.3.2 Comunicação

Um *mecanismo de correlação* consiste de um conjunto finito de mensagens, um para cada jogador, e uma distribuição de probabilidade sobre o produto destes conjuntos de mensagens. Em qualquer jogo na forma normal (ou estratégica), um jogo expandido induzido por um mecanismo de correlação é um jogo onde primeiro, de acordo com a distribuição de probabilidade, o mecanismo escolhe um perfil de mensagem e diz para cada jogador, de maneira privada, sua mensagem e o jogador joga de acordo com o recomendado, então uma estratégia do jogador no jogo expandido é uma função que relaciona o conjunto de mensagens ao conjunto de ações. Portanto, o equilíbrio correlacionado é um par que consiste de um mecanismo de correlação e um perfil de estratégias de tal forma que o perfil de estratégia forme um equilíbrio de Nash no jogo expandido, gerado pelo mecanismo. A distribuição do equilíbrio correlacionado é uma distribuição sobre o produto dos conjuntos de ações do jogo induzida por um equilíbrio correlacionado (o mecanismo e o perfil de estratégia conjuntamente).

Casos especiais de mecanismo de correlação incluem os mecanismos de comunicação (onde novos sinais dependem das mensagens e dos sinais passados e não da jogada passada), mecanismos autônomos de correlação (onde novos sinais dependem dos sinais passados, mas não da jogada passada, e os jogadores não mandam mensagens para o mecanismo), mecanismos de correlação (onde o mecanismo somente envia o sinal antes do início do jogo, como já mencionado), comunicação entre os jogadores antes do início do jogo (onde os jogadores podem trocar mensagens antes do início do jogo), comunicação direta entre os jogadores ao longo do jogo (onde os jogadores podem trocar mensagens ao longo do jogo), e um mediador (que pode mandar mensagens privadas para os jogadores ao longo do jogo como uma função das jogadas passadas e dos sinais passados que ele mandou). Cada um desses casos mencionados permite um diferente nível de correlação entre os jogadores, e portanto os conjuntos dos equilíbrios podem diferir. Há uma vasta literatura sobre a comunicação nos jogos, incluindo Forges (1986, 1988, 1990), Barany (1992), Lehrer (1996), Lehrer e Sorin (1997), Ben-Porath (1998, 2003), Gossner (1998), Urbano e Vila (2002), e Aumann e Hart (2003).

Na abordagem *a prova de coalizão* (Bernheim *et al.* (1987), Milgrom e Roberts (1996), Moreno e Wooders (1996) e Ray (1996b)), por exemplo, os jogadores se comunicam para chegar a um acordo *antes* da correlação.

Myerson (1986) estuda os jogos com mecanismos de comunicação que podem ser implementados por um mediador central. Em um equilíbrio de comunicação, nenhum jogador espera ganhar ex ante através da manipulação de suas ações. Um equilíbrio seqüencial de comunicação é um equilíbrio de comunicação com um sistema de probabilidade condicional sob o qual nenhum jogador espera ganhar através da manipulação, mesmo após eventos com probabilidade zero.

Quando dizemos que os jogadores podem se comunicar livremente, queremos dizer que eles têm uma grande variedade de ações disponíveis que afetam as informações dos outros mas não afetam os pagamentos, como ocorre no equilíbrio correlacionado. Eles podem mandar mensagens, podem lançar moedas e observar os resultados; eles podem, como no caso do equilíbrio correlacionado, construir uma máquina ou contratar um mediador para mandar mensagens privadas que sejam geradas por qualquer distribuição de probabilidade conjunta. Em princípio, podemos tentar listar todas as possibilidades de comunicação como parte da estrutura explícita do jogo, e então analisar seus equilíbrios de Nash.

Forges (1986) apresenta dois conceitos de solução para jogos com vários estágios: o *equilíbrio correlacionado em forma extensiva*, onde os jogadores podem observar sinais privados não relacionados em cada etapa do jogo e o *equilíbrio de comunicação*, como Myerson (1986), conforme já mencionado, onde os jogadores também podem transmitir informações para um mecanismo apropriado em cada etapa do jogo.

Na abordagem de forma normal, os sinais só podem ser enviados na fase anterior ao início do jogo, e a correspondente solução depende somente da forma normal do jogo; e pode então ser chamado de *equilíbrio correlacionado em forma normal*. Se, como visto acima, o jogo tem alguma duração, podemos expandir o jogo ao adicionar uma loteria em cada etapa (e não somente no início), onde cada jogador recebe um sinal sobre o resultado. Ou de maneira mais descritiva, parece natural que em um jogo de várias etapas o conhecimento dos jogadores possa aumentar ao longo do tempo. Uma noção que generaliza o mecanismo de correlação pode então ser utilizada: o mecanismo autônomo, que seleciona um vetor de sinais, um para cada jogador, em cada etapa do jogo. Um equilíbrio de Nash do jogo expandido através do mecanismo autônomo é chamado de equilíbrio correlacionado em forma extensiva. Mas, se a questão é permitir aos jogadores coordenarem suas estratégias em cada etapa do jogo, podemos acrescentar ao jogo um mecanismo de comunicação, que seleciona mensagens para os jogadores em cada etapa mas também recebe mensagens. De acordo com Forges (1986), tais mecanismos podem ser programados para que os sinais que são enviados dependam somente das mensagens passadas, o quê envolve comunicação antes e durante o jogo.
Mas como Forges (1986) comenta, o uso de mecanismos de comunicação em cada etapa do jogo (incluindo os mecanismos autônomos), embora atraente, é difícil de justificar se as regras do jogo são interpretadas de maneira estrita. Se a interpretação é rigorosa, a única comunicação que parece plausível é a comunicação antes do jogo, correspondendo ao equilíbrio correlacionado em forma normal (ou estratégica). Esta é a principal razão pra se estudar equilíbrios correlacionados em forma normal.

2.2.3.3 Equilíbrio Correlacionado – Definição

Há várias maneiras de definir um equilíbrio correlacionado. Usamos a notação e terminologia apresentada por Aumann (1987) e Osborne e Rubinstein (1994). Podemos definir um equilíbrio correlacionado para jogos assimétricos em forma normal e para jogos em forma extensiva, mas para simplificar a discussão usamos os exemplos para jogos simétricos em forma normal.

Um *equilíbrio correlacionado* de um jogo em forma estratégica $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ consiste de:

- Um espaço de probabilidade finito (Ω, P) (Ω é um conjunto finito de *estados* contendo os elementos ω e onde P é uma *medida de probabilidade* sobre Ω)
- Para cada jogador $i \in N$ uma partição ρ_i de Ω (*partição de informação* de i; se o verdadeiro estado do mundo é $\omega \in P \in \rho_i$, então i sabe que algum elemento de P é o verdadeiro estado, mas ele não sabe qual deles é).
- Para cada jogador $i \in N$ uma *função* $\sigma_i : \Omega \to A_i$ com $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ quando $\omega \in P_i$ e $\omega' \in P_i$ para algum $P_i \in \rho_i$ (σ_i é a *estratégia* do jogador i).

O termo "estados do mundo" implica uma definição específica de todos os parâmetros que podem ser objeto de incerteza por parte de qualquer um dos jogadores. Em particular, cada ω inclui uma especificação de qual ação é escolhida por cada jogador nesse estado ω. Condicional sobre um dado ω, todos sabem tudo; mas em geral ninguém sabe realmente qual é o verdadeiro estado ω. Considerando os átomos de Ω como representação das especificações completas de todas as possíveis variáveis, podemos representar todos os aspectos de incerteza por parte de qualquer jogador, incluindo a incerteza sobre a incerteza dos outros jogadores, através das partições ρ_i.

Agora podemos usar a definição de *a priori* comum da seção 1.2: Todas as *a priori* P_i são as mesmas; isto é, há uma medida de probabilidade P sobre Ω tal que $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$.

Tal suposição não implica que todos os jogadores têm a mesma probabilidade subjetiva. A probabilidade subjetiva de um jogador é a sua *a posteriori* dada sua informação; e elas podem muito bem ser diferentes. A suposição de uma *a priori* comum apenas diz que *diferenças nas estimativas de probabilidade* de diferentes agentes são explicadas por *diferenças na informação e na experiência*.

Então, para todo $i \in N$ e toda função $\tau_i : \Omega \to A_i$ para o qual $\tau_i(\omega) = \tau_i(\omega')$ quando $\omega \in P_i$ e $\omega' \in P_i$ para algum $P_i \in \rho_i$ (i.e. para toda estratégia do jogador i) nós temos o equilíbrio correlacionado definido como:

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u_i(\sigma_{-i}(\omega), \sigma_i(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) u_i(\sigma_{-i}(\omega), \tau_i(\omega)) \qquad (2)$$

Devemos notar que o espaço de probabilidade e a partição de informação são exógenos mas fazem parte do equilíbrio. Devemos notar também que (2) é equivalente à condição de que para todo estado ω que ocorra com probabilidade positiva, a ação $\sigma_i(\omega)$ é ótima dadas as estratégias dos outros jogadores e o conhecimento de i sobre ω. Como notado por Osborne e Rubinstein (1994) esta equivalência depende da suposição de que as preferências dos jogadores obedecem à teoria da utilidade esperada.

Agora podemos mostrar que o conjunto de equilíbrios correlacionados contém o conjunto de estratégias mistas dos equilíbrios de Nash.

Proposição 2.1. *Para todo equilíbrio de Nash* α *em estratégias mistas de um jogo finito* $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ *em forma estratégica há um equilíbrio correlacionado* $\langle (\Omega, P), (\rho_i), (\sigma_i) \rangle$ *onde para cada jogador* $i \in N$ *a distribuição em* A_i *induzida por* σ_i *é* α_i.

Uma prova é apresentada por Osborne e Rubinstein (1994).

Podemos também interpretar o equilíbrio correlacionado da seguinte maneira simplificada: primeiro um mecanismo aleatório público determina qual dos equilíbrios correlacionados K deve ser jogado, e então a variável aleatória correspondente ao kth equilíbrio correlacionado é conhecida.

2.2.4 Equilíbrio Correlacionado – Exemplo

Vamos começar com o clássico exemplo apresentado por Aumann (1974). Vamos usar este jogo em todos os exemplos por simplificação, mas como dito acima, podemos elaborar um exemplo para jogos assimétricos e para jogos em forma extensiva, entretanto, na forma extensiva nós temos algumas dificuldades computacionais para calcular a solução.

Considere inicialmente o jogo no lado esquerdo da Figura 2.1. os equilíbrios de Nash são (2, 7) e (7,2) (estratégias puras) e (4.66, 4.66) (estratégias mistas). O equilíbrio correlacionado abaixo gera um pagamento que está fora do conjunto convexo formado pelos equilíbrios de Nash. Seja $\Omega = \{x, y, z\}$, e $P(x) = P(y) = P(z) = 1/3$; seja $\{(x), (y, z)\}$ a partição do jogador *1* e $\{(x, y), (z)\}$ a partição do jogador *2*. Defina as estratégias da seguinte maneira: $\sigma_1(x) = B$ e $\sigma_1(y) = \sigma_1(z) = T$; $\sigma_2(x) = \sigma \succ_2 (y) = L$ e $\sigma_2(z) = R$. (A relação entre as escolhas e os estados é mostrada no lado direito da Figura 2.1). Então o comportamento do jogador *1* é ótimo dado o comportamento do jogador *2*: no estado x, o jogador *1* sabe que o jogador *2* joga L e então é ótimo para ele jogar *B*; nos estados y e z ele atribui igual probabilidade ao fato de *2* escolher *L* e *R*, então é ótimo para ele jogar *T*. De maneira simétrica, o comportamento do jogador *2* é ótimo dado o comportamento do jogador *1*, e portanto nós temos um equilíbrio correlacionado cujo pagamento é (5, 5). O resultado é claramente superior a todos os equilíbrios de Nash apresentados.

	L	***R***
T	***6, 6***	***2, 7***
B	***7, 2***	***0, 0***

	L	***R***
T	***y***	***z***
B	***x***	***0***

Figura 2.1

A matriz da direita fornece as escolhas dos jogadores como uma função do estado em um equilíbrio correlacionado do jogo.

Este exemplo no qual podemos relacionar o conjunto de estados com o conjunto de resultados, sugere o seguinte resultado:

Proposição 2.2. *Seja* $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ *um jogo finito em forma estratégica. Toda distribuição de probabilidade sobre os resultados que pode ser obtida em um equilíbrio correlacionado de* G *pode ser obtida em um equilíbrio correlacionado no qual o conjunto de estados é* A *e para cada* $i \in N$ *a partição de informação do jogador* i *consiste de todos os conjuntos da forma* $\{a \in A : a_i = b_i\}$ *para alguma ação* $b_i \in A_i$.

Mas devemos nos perguntar: Por quê algum jogador deveria assumir que os outros jogadores irão jogar algum elemento de uma *n*-tupla de estratégias (equilíbrio de Nash), e além disso por quê eles deveriam jogar tais estratégias? De acordo com Aumann (1987) tal fato é bastante curioso quando, como geralmente ocorre, há múltiplos equilíbrios; mas mesmo quando o equilíbrio é único o conceito de equilíbrio de Nash ainda pode ser pouco atraente. Em muitos jogos o equilíbrio de Nash é pouco plausível mesmo que ele seja único, e mesmo em exemplos plausíveis não fica claro por quê os jogadores deveriam jogar até mesmo um único equilíbrio de Nash. Em um jogo com dois jogadores, por exemplo, o jogador 1 irá jogar sua estratégia somente se ele acredita que o jogador 2 irá jogar a sua; mas isto somente é justificado se o jogador 2 acredita que 1 irá jogar sua estratégia; e assim por diante. Entretanto, apesar de parecer consistente, tal argumentação é pouco plausível. Voltaremos a esse na discussão de um experimento que tenta verificar o equilíbrio correlacionado.

O equilíbrio de Nash faz sentido se assumirmos que, por alguma razão específica, cada jogador sabe quais estratégias os outros estão usando. Mas tal suposição parece bastante restritiva. No equilíbrio correlacionado, devemos assumir que é de conhecimento comum que cada jogador escolhe uma estratégia que maximiza sua utilidade esperada dada sua informação.

Entretanto, em geral os jogadores não sabem como os outros estão jogando. Assumimos somente que é de conhecimento comum que os jogadores são maximizadores de utilidade Bayesianos. De acordo com Aumann (1987) tal suposição é suficiente para garantir que o resultado seja um equilíbrio correlacionado.

Outra vantagem do equilíbrio correlacionado é ele não requer aleatorização explícita por parte dos jogadores. Cada jogador sempre escolhe uma estratégia pura específica, sem intenção de aleatorizar. Correlação é uma forma mais geral de aleatorização do que estratégias mistas. Em ambos os caso, os jogadores baseiam suas escolhas na observação de um evento; mas com estratégias mistas, as observações são independentes, enquanto que no equilíbrio correlacionado elas podem ser dependentes.

Assim como no caso das estratégias mistas, as *n*-tuplas das estratégias correlacionadas podem ser identificadas com suas distribuições. Para representar as distribuições podemos inserir as probabilidades apropriadas em cada célula da matriz de pagamentos.

Por exemplo, vamos voltar ao jogo da Figura 2.1, agora na Figura 2.2. Como vimos, é um jogo de duas pessoas com três equilíbrios de Nash, cujos pagamentos são (2, 7), (7, 2), e (4.66, 4.66). A distribuição da Figura 2.2(b) pode ser vista como um equilíbrio correlacionado, cujo pagamento (5, 5) está fora do conjunto convexo dos pagamentos do equilíbrio de Nash. De maneira geral, as distribuições do equilíbrio correlacionado de um dado jogo G constituem um conjunto compacto e convexo.

	L	***R***
T	***6, 6***	***2, 7***
B	***7, 2***	***0, 0***

Figura 2.2(a)

	L	***R***
T	***1/3***	***1/3***
B	***1/3***	***0***

Figura 2.2(b)

Portanto, ao derivar as suas a posteriori sobre as escolhas dos outros jogadores, cada jogador condiciona tal fato à sua própria informação, o quê inclui sua própria escolha. Mas outra questão que pode surgir é: Como pode a própria escolha do jogador ajudá-lo a saber o quê os outros irão fazer?

De acordo com Aumann (1987) o jogador não está realmente condicionando suas ações em relação à sua escolha mas está condicionando em relação à informação que o leva a fazer tal escolha. Esta informação leva a uma *a posteriori* sobre as escolhas dos outros jogadores, o quê por sua vez leva a uma escolha ótima, ou a um conjunto de tais escolhas. Intuitivamente, o fato de que a escolha de um jogador é parte de sua informação não é exatamente usado para derivar sua própria *a posteriori* sobre o quê os outros irão fazer, mas sim para estimar as *a posteriori* dos outros sobre o quê ele irá fazer. Eles não podem simplesmente fazer especulações arbitrárias a respeito disso, mas devem levar em conta que ele está maximizando em virtude de sua própria informação.

Agora podemos também questionar se pode haver incerteza por parte de um dos jogadores sobre as partições de informação ρ_i dos outros jogadores. Segundo Aumann (1987) a resposta é não. Enquanto o jogador 1 pode não saber o quê o jogador 2 sabe, i.e., qual elemento de ρ_2 contém o verdadeiro estado ω do mundo, 1 não pode ter desconhecimento da própria partição ρ_2. Na realidade, ρ_2 é parte da descrição do modelo, e não pode ser objeto de incerteza, ρ_2 deve ser de conhecimento comum.

Aumann (1987) argumenta, e este é o ponto de maior crítica por parte de Gul (1998), que tal afirmação não é uma suposição, mas um teorema, uma tautologia, está implícita no modelo. Como a especificação de cada ω inclui uma descrição completa dos estados do mundo, ela inclui também uma lista de todos os outros estados ω' do mundo que são, para o jogador 2, idênticos a ω.

A descrição dos $\omega's$ não envolve conhecimento real; é somente uma espécie de código. A estrutura de ρ_i também não envolve conhecimento real; ela simplesmente representa métodos diferentes de classificação desse código. Aumann (1999a) apresenta uma visão bastante diferente, como vimos na seção 1.1.7.

A situação com a suposição de *a priori* comum é semelhante. A partir do momento que aceitamos a visão Bayesiana, que cada jogador tem uma *a priori* sobre Ω, então não pode haver incerteza por parte dos jogadores sobre as *a priori* dos outros jogadores. Cada *a priori* dos jogadores deve ser de conhecimento comum entre todos os jogadores. Mas isso não implica que todas as *a priori* sejam iguais.

O motivo que nos leva a concluir que as *a priori* são de conhecimento comum é semelhante ao motivo que nos leva a concluir que as partições ρ_i são de conhecimento comum, pois a *a priori* do jogador 1 para cada estado do mundo é de conhecimento comum.

Além disso, conforme Aumann (1987), as afirmações de que as partições e a a priori são de conhecimento comum não afetam as conclusões do modelo. Cada jogador usa somente sua própria a priori e sua própria partição para tomar uma decisão e não importa se ele conhece a partição e a a priori do outro jogador.

Portanto, sob a suposição de *a priori* comum, diferenças nas probabilidades expressam somente diferenças de informação. Se, abandonarmos a suposição de *a priori* comum, como proposto por Aumann (1987), ainda podemos ter alguns resultados interessantes. Podemos definir um equilíbrio correlacionado subjetivo, por exemplo, substituindo uma única probabilidade por *n* diferentes probabilidades. Mas de acordo com Aumann (1987) o equilíbrio correlacionado subjetivo é um conceito relativamente fraco, fornecendo pouca informação; e apesar de logicamente consistente, ele envolve uma inconsistência conceitual entre os jogadores, o quê distorce e obscurece o conflito existente entre os agentes.

Bernheim (1984) e Pearce (1984) desenvolveram o conceito de racionalizabilidade, que está relacionado com a noção de equilíbrio correlacionado subjetivo e um resultado racionalizável é o resultado que ocorre com probabilidade positiva em tal equilíbrio (ver Brandenburger e Dekel (1987)), mas racionalizabilidade não permite a um jogador perceber as estratégias dos outros jogadores como correlacionadas.

Devemos notar que, Aumann e Brandenburger (1995) e Aumann (1999a), apresentam uma versão menos restritiva de toda essa discussão epistemológica. Portanto, podemos alcançar os mesmos resultados, mas sob condições menos restritivas.

2.2.5 Equilíbrio Correlacionado – Existência e Eficiência

2.2.5.1 Existência

Para jogos na forma estratégica, o equilíbrio correlacionado é relativamente fácil de calcular. Mas o mesmo não ocorre para jogos na forma extensiva. von Stengel (2001) mostra que para um jogo na forma extensiva com dois jogadores que tenham lembrança perfeita das jogadas passadas, e sem movimentos da natureza, é extremamente difícil encontrar um equilíbrio correlacionado.

Como vimos, o equilíbrio correlacionado é jogado de tal forma que um “mediador” recomenda uma estratégia pura para cada jogador. Da recomendação recebida, cada jogador tem uma distribuição *a posteriori* sobre as recomendações dadas para os outros jogadores. A própria estratégia deve ser a resposta ótima. Em um equilíbrio de Nash, essa distribuição *a posteriori* é sempre a mesma, mas no equilíbrio correlacionado ela pode variar com cada estratégia pura. Descrever estas distribuições pra cada estratégia requer um número exponencial de variáveis.

Conseqüentemente, isto sugere que os equilíbrios correlacionados de jogos em forma extensiva podem ser difíceis de calcular. Forges (1986) e von Stengel (2001) propõem o conceito de *equilíbrio correlacionado em forma extensiva*. Tal conceito define as recomendações correlacionadas dos *movimentos* nos conjuntos de informação assim que tais conjuntos são alcançados, ao invés de recomendações de *estratégias* no início do jogo.

Considerando que o equilíbrio correlacionado é mais geral que o equilíbrio de Nash, o conjunto dos equilíbrios correlacionados é maior que o conjunto dos equilíbrios de Nash; ver Evangelista e Raghavan (1996), Myerson (1997), Nau et al. (2003); e sabemos que os equilíbrios correlacionados sempre existem em jogos finitos. Tal fato segue da existência do equilíbrio de Nash (que requer os teoremas do ponto fixo), ou diretamente (através de programação linear; ver Hart e Schmeidler (1989)).

Entretanto, qual é o tamanho do conjunto dos equilíbrios correlacionados? De acordo com Keiding e Peleg (2000), se nós fixarmos o número de jogadores N, os conjuntos de ações, limitarmos os pagamentos possíveis, e escolhermos aleatoriamente (e uniformemente) um jogo e sua distribuição conjunta, então a probabilidade de que essa distribuição seja um equilíbrio correlacionado é no máximo $1/2^N$ (que vai pra zero quando N aumenta).

O conjunto dos equilíbrios correlacionados é um politópio11 convexo das distribuições. Como tal conjunto inclui os equilíbrios de Nash sabemos que ele não é vazio. Hart e Schmeidler (1989) apresentam um prova elementar de tal fato. Mais especificamente, eles associam ao jogo com N jogadores um jogo auxiliar de soma zero com dois jogadores. O conjunto de equilíbrios correlacionados do jogo original corresponde às estratégias maximin do jogador 1 no jogo auxiliar. Neste jogo auxiliar, o jogador 1 escolhe uma distribuição das N-tuplas de ações, e o jogador 2 escolhe um par de estratégias para um dos N jogadores originais. O pagamento para o jogador 2 no jogo auxiliar é o ganho esperado do jogador original se ele segue a mudança sugerida pelo

[11] *Politópios* são figuras geométricas limitadas por linhas, planos ou hiperplanos. Na geometria plana eles são conhecidos como polígonos e incluem figuras como triângulos, quadrados, pentágonos, etc. Na geometria espacial eles são conhecidos como poliedros e incluem figuras como tetraedros, cubos, etc. Os conjuntos convexos mais simples são os *simplexos* e *politópios* convexos. O conjunto convexo de um número finito de pontos *E = (x1, x2,…,xn)* é chamado *politópio* se os pontos são dependentes e *simplexo* se os pontos são independentes.

jogador auxiliar 2. Ou seja, tal pagamento é o arrependimento do jogador original por não desviar.

Basicamente, tal prova da existência dos equilíbrios correlacionados em jogos finitos consiste em mostrar, primeiro, que os equilíbrios de Nash são correlacionados, e segundo, que todo jogo tem pelo menos um equilíbrio de Nash. O primeiro argumento é relativamente trivial (estratégias mistas); o segundo exige a utilização de algum teorema do ponto fixo. Como os equilíbrios correlacionados formam um conjunto convexo, definido por um simples conjunto de desigualdades lineares, é razoável supor a existência de tal prova. Hart e Schmeidler (1989) também expandem a prova de existência para jogos infinitos.

Como comparação, o conjunto das distribuições do equilíbrio de Nash pode não ser convexo; e encontrar tal equilíbrio em jogos com três ou mais jogadores pode requerer otimização não linear ou a solução de um sistema de equações não lineares. A relativa simplicidade matemática do equilíbrio correlacionado sugere que sua existência pode ser provada somente através das técnicas de álgebra linear, ao invés de complexos teoremas do ponto fixo.

A comparação da geometria do equilíbrio de Nash e do equilíbrio correlacioando tem sido estudada por vários autores, e sabemos que em um jogo com dois jogadores, todos os equilíbrios de Nash da superfície do conjunto também são equilíbrios correlacionados (Evangelista e Raghavan (1996), Gomez Canovas et al. (1999)), embora tal resultado não possa ser garantido para mais de dois jogadores. Mais especificamente, em um jogo com dois jogadores, o conjunto das distribuições do equilíbrio de Nash é uma união finita de politópios convexos no espaço de produtos das distribuições de probabilidade marginal das estratégias dos jogadores individuais, como apresentado por Jansen (1981). A prova apresentada por Evangelista e Raghavan (1996), e Gomez Canovas et al. (1999) é que o os pontos extremos do politópio do equilíbrio correlacionado em duas dimensões correspondem aos pontos extremos do politópio do equilíbrio correlacionado no espaço de distribuições de probabilidade conjunta em dimensões maiores. Mas Nau et al. (2003) mostram que em um jogo com três jogadores é possível que nenhum dos pontos extremos do polítópio do equilíbrio correlacionado seja um equilíbrio de Nash.

2.2.5.2 Eficiência

Ray (1996a) apresenta várias definições de eficiência, mas comentamos somente as duas principais definições. Um equilíbrio correlacionado satisfaz a *eficiência clássica*, se, em todos os estados do mundo, ele seleciona resultados que não sejam Pareto dominados, i.e., se ele não seleciona com probabilidade positiva uma célula Pareto dominada. Embora esse seja um critério bastante natural, os jogadores podem não saber se a escolha é eficiente pois podem não conhecer o verdadeiro estado do mundo. Se os jogadores querem escolher algum critério de eficiência, eles só podem usar suas crenças *a posteriori* sobre os tipos, considerando sua própria informação (a recomendação que receberam do mediador). Um equilíbrio correlacionado é *eficiente a posteriori* se ele não é Pareto dominado por nenhum equilíbrio em comunicação..

De acordo com Ray (1996a) a *eficiência clássica* esta relacionada com os resultados obtidos através de algum mecanismo. Um mecanismo tem eficiência no sentido clássico se ele seleciona, em cada estado, uma estratégia de Pareto não dominada.

Considere novamente o jogo da Figura 2.3(a). Para este jogo, considere o equilíbrio correlacionado como mostrado na Figura 2.3(b). Este equilíbrio correlacionado (com pagamento 5, 5) é Pareto dominado pelo equilíbrio correlacionado mostrado na Figura 2.3(c) (com pagamento 5.25, 5.25).

	L	*R*
T	*6, 6*	*2, 7*
B	*7, 2*	*0, 0*

Figura 2.3(a)

	L	*R*
T	*1/3*	*1/3*
B	*1/3*	*0*

Figura 2.3(b)

	L	*R*
T	*1/2*	*1/4*
B	*1/4*	*0*

Figura 2.3(c)

2.2.6 Equilíbrio Correlacionado – Extensões e Aplicações

Como uma generalização natural do equilíbrio de Nash, há muitas extensões e aplicações do equilíbrio correlacionado. Apresentamos somente os exemplos mais significativos.

Como proposto por Fudenberg e Levine (1993a), para cada *equilíbrio autoconfirmado* de um jogo cujos conjuntos de informação sejam ordenados, há um equilíbrio correlacionado em forma extensiva equivalente. Eles mostram que em geral o inverso não é verdadeiro: mesmo o mais simples equilíbrio correlacionado não precisa ser um equilíbrio autoconfirmado, o quê pode ser visto facilmente ao se considerar um jogo simultâneo de um único movimento, onde o equilíbrio autoconfirmado é um equilíbrio de Nash. O equilíbrio correlacionado (*L*, *T*), nos jogos apresentados acima, não é um equilíbrio de Nash em estratégias puras, por exemplo.

Dhillon e Mertens (1996) propõem o conceito de equilíbrio correlacionado perfeito, uma definição relacionada com o equilíbrio perfeito com mãos-trêmulas. Eles também provam que o conjunto das distribuições do equilíbrio correlacionado perfeito é convexo, assim como o conjunto do equilíbrio correlacionado.

Brandenburger et al. (1992) estudam uma extensão do equilíbrio correlacionado que permite aos jogadores cometer erros de processamento da informação através do enfraquecimento da suposição de que os jogadores possuem partições de informação. O principal resultado é permitir diferenças entre as a priori dos jogadores. Quando os jogadores têm partições e compartilham uma a priori comum, o conjunto das distribuições do equilíbrio correlacionado é um conjunto fechado e convexo. Ao permitir os erros de processamento, pode-se expandir o conjunto das distribuições do equilíbrio correlacionado. Diferenças nas a priori podem ser justificadas como uma manifestação de racionalidade limitada por parte dos jogadores.

Ray (1998) mostra que para um mecanismo de correlação ser um *equilíbrio correlacionado forte*, ele deve atribuir probabilidade zero a uma célula que é estritamente dominada por alguma outra célula. Isto implica que um equilíbrio correlacionado forte é também classicamente eficiente como apresentado por Ray (1996a). Ray (1998) caracteriza o conjunto do equilíbrio correlacionado forte para dois jogadores e mostra que este conjunto coincide com o conjunto de equilíbrio correlacionado que é classicamente eficiente. Devemos notar, que, para qualquer jogo em forma estratégica com *n* jogadores, o conjunto dos equilíbrios correlacionados fortes é um subconjunto do conjunto de equilíbrios correlacionados.

Solan (2001) apresenta *jogos estocásticos* que podem ser expandidos através da introdução de um mecanismo geral de comunicação. Primeiro, os jogadores mandam mensagens privadas para o mecanismo. Depois, o mecanismo, como uma função das jogadas passadas, mensagens passadas que recebeu e sinais passados que enviou, manda um sinal privado para cada jogador e então cada jogador escolhe uma ação independentemente de seus oponentes. Finalmente, um novo estado é escolhido de acordo com uma distribuição de probabilidade que depende do estado atual e da combinação de ações escolhidas naquele estado.

Solan e Vohra (2001) mostram que *todo* jogo do tipo pare-prossiga tem um equilíbrio correlacionado, onde o mecanismo de correlação envia um sinal para cada jogador antes do início do jogo. Um jogo do tipo *pare-prossiga* (jogo da centopéia, por exemplo) é um jogo seqüencial no qual cada jogador tem duas ações: parar ou prosseguir. O jogo continua enquanto os jogadores decidem continuar. Quando pelo menos um dos jogadores decide parar, o jogo acaba.

Como apresentado por Cripps (1991) e Weibull (1995), para uma grande variedade de jogos evolucionários, se todas as estratégias são jogadas inicialmente com probabilidade positiva e se a solução do processo dinâmico converge para um ponto, então este ponto é um equilíbrio de Nash. Entretanto, de acordo com Hofbauer e Sigmund (1998), em geral, as soluções de processos dinâmicos evolucionários não precisam convergir para o conjunto do equilíbrio de Nash. Além disso, como mencionado por Viossat (2007), uma conexão geral entre o resultado de um processo evolucionário e o conceito de equilíbrio ainda não é claro. Hart (2005) mostra que existem processos adaptativos que convergem em direção ao conjunto do equilíbrio correlacionado. Embora estes processos (adaptação heurística) sejam diferentes dos processos evolucionários tradicionais, ele sugere que o resultado de um processo evolucionário deve estar mais fortemente relacionado com o equilíbrio correlacionado do que com o equilíbrio de Nash. Por outro lado, Viossat (2007) mostra que o processo evolucionário pode não convergir para o conjunto de equilíbrios correlacionados.

Mailath *et al.* (1997) e especialmente Lenzo e Sarver (2006) estabelecem que o equilíbrio correlacionado é uma solução natural para modelos evolucionários com várias populações, onde cada população inclui múltiplas subpopulações. Eles também mostram que todo equilíbrio correlacionado é equivalente a um estado estacionário de alguma subpopulação.

O modelo de Cripps (1991) mostra que para uma classe de modelos evolucionários, o equilíbrio correlacionado estrito pode ser interpretado em uma estrutura de estabilidade evolucionária. Em particular, o conjunto de estratégias estáveis evolucionárias é idêntico ao conjunto dos equilíbrios correlacionados estritos. O modelo de Cripps é similar ao modelo de subpopulaçõess de Lenzo e Sarver (2006). Estes trabalhos usam jogos na forma normal, que é a maneira tradicional de apresentar modelos evolucionários. Entretanto, como argumenta Cressman (2003), a forma extensiva também deve ser considerada nos modelos evolucionários.

Enquanto Cripps (1991), Mailath *et al.* (1997), Lenzo e Sarver (2006), e outros, formulam seus resultados em termos de modelos evolucionários, outros resultados semelhantes podem ser obtidos em termos de modelos de aprendizagem e adaptação. Hart e Mas-Colell (2000), por exemplo, aplicam o equilíbrio correlacionado aos modelos adaptativos. O resultado é semelhante aos modelos evolucionários na medida que enfatiza os mecanismos dinâmicos que levam à convergência pra o equilíbrio correlacionado. Entretanto, os agentes no modelo de Hart e Mas-Colell demonstram aprendizagem e arrependimento ao comparar suas ações passadas com as possíveis alternativas.

Abreu *et al.* (1986, 1990) investigam *jogos repetidos* infinitamente com *n*-jogadores e com ações observáveis e com um mecanismo de correlação. Tais jogos capturam as situações de interação repetida entre muitos jogadores que escolhem suas ações individuais levando em conta não somente a informação pública mas também a informação privada. Em jogos repetidos com monitoramento público, as jogadas públicas passadas que são relevantes para as jogadas futuras são de conhecimento comum em cada etapa. Abreu *et al.* (1990) mostram que a definição de equilíbrio correlacionado para jogos na forma normal pode ser facilmente entendida para jogos repetidos. Eles provam que todo jogo repetido infinitamente tem um *equilíbrio correlacionado perfeito em subjogos*. Essencialmente, o conceito de equilíbrio perfeito em subjogos é uma combinação do conceito de equilíbrio correlacionado e do conceito de perfeição em subjogos.

De acordo com Cavaliere (2001), a análise estratégica da provisão privada de bens públicos também mostra a existência de múltiplos equilíbrios de Nash. A evidência experimental mostra que a comunicação entre os jogadores é útil pra implementar a cooperação entre os jogadores e que, do ponto de vista teórico, isto é equivalente a jogar um equilíbrio correlacionado. Ele mostra que, a solução para o problema do carona, é implementar um mecanismo de incentivos eficiente e que este mecanismo é equivalente a um equilíbrio correlacionado.

Cason e Sharma (2007) apresentam os resultados de um experimento no qual os agentes jogam um jogo da mesma estrutura simétrica que apresentamos nos exemplos da seção 2.2.4. Eles implementam um equilíbrio correlacionado, através de recomendação privada, com pagamentos que estão fora do conjunto convexo dos pagamentos do equilíbrio de Nash. Eles mostram que alguns participantes são relutantes em seguir certas recomendações. Para investigar o motivo de tal recusa, eles realizam outra seção de jogadas onde os participantes devem jogar com uma máquina. É anunciado que a máquina sempre irá seguir sua estratégia recomendada. Eles observam que nesta situação, os participantes quase sempre seguem suas recomendações. Tal resultado sugere que se os oponentes soubessem que os outros iriam seguir suas recomendações, então é ótimo também seguir as suas recomendações. Alguns agentes não seguem as recomendações quando jogam com outros jogadores humanos pois receiam que seus oponentes não irão seguir suas estratégias recomendadas.

Moreno e Wooders (1998) também observam resultados consistentes com o equilíbrio correlacionado em um jogo com três jogadores. Os jogadores alcançam a coordenação através de comunicação pré-jogo.

Outros experimentos tentam usar instruções específicas para implementar um equilíbrio único em jogos de coordenação com dois jogadores (van Huyck et al. 1992) ou em jogos de contribuição voluntária de quatro jogadores (Seely et al. 2005), e também encontraram dificuldades consideráveis na tentativa de induzir os participantes a seguir as recomendações.

Brandts e MacLeod (1995) usam as recomendações para implementar vários tipos de equilíbrio de Nash (i.e., estratégias dominantes, perfeito e imperfeito em subjogos). Eles também mostram que os participantes não seguem suas recomendações, em especial as recomendações que correspondam a um equilíbrio imperfeito.

Discutimos acima que não existe, a princípio, nenhum motivo teórico para esperar que os agentes sigam suas recomendações. De maneira semelhante, os resultados experimentais também sugerem que pode haver um conjunto de *equilíbrios correlacionados comportamentais* menor do que o conjunto do equilíbrio correlacionado. Cason e Sharma (2007) sugerem que os agentes podem ter uma hierarquia de crenças onde eles acreditam que seus oponentes sigam as recomendações mas cometam erros, como no modelo de Brandenburger *et al.* (1992), e escolhem uma deferente ação com uma certa probabilidade. Considerando tal hierarquia, sob certas condições os agentes são capazes de formar uma crença sobre as jogadas de seus oponentes, de acordo com Brandenburger e Dekel (1993). Dadas estas crenças, os agentes escolhem suas ações ótimas. Baseados nestas ações observadas, os agentes formam uma hierarquia atualizada de crenças com diferentes probabilidades de cometer erros. Esta hierarquia de crenças atualizada determina o período seguinte de escolhas, e assim por diante.

CAPÍTULO 3 CONVENÇÃO

3.1 O PROCESSO – ADAPTAÇÃO HEURÍSTICA

Como vimos no final do capítulo passado, nos experimentos apresentados por Cason e Sharma (2007), alguns agentes são relutantes em aceitar certas recomendações. Outros experimentos usaram instruções específicas para tentar implementar certos equilíbrios em jogos de coordenação com dois jogadores (van Huyck *et al.* (1992)) ou em jogos de contribuição voluntária com quatro jogadores (Seely *et al.* (2005)), e também encontraram certa dificuldade em induzir os participantes a seguir certas recomendações.

Mas ainda restam algumas questões, como nos lembram Cason e Sharma (2007): Por quê esperamos que os agentes acreditem que seus oponentes irão seguir as recomendações? Por quê eles seguem algumas recomendações? E além disso: Estas recomendações são convenções sociais? Qual o papel das convenções para os jogadores? Como eles alcançam tais convenções?

Enquanto a teoria dos jogos evolucionários tenta formular seus resultados em termos da dinâmica da população, sabemos que resultados semelhantes podem ser obtidos se nós aplicarmos as teorias de aprendizagem e outros métodos mais sofisticados de adaptação. Hart e Mas-Colell (2000), por exemplo, aplicam o equilíbrio correlacionado a modelos adaptativos. Seu modelo é similar aos modelos evolucionários ao enfatizar os mecanismos dinâmicos que levam o jogo a convergir para um equilíbrio correlacionado. Entretanto, os agentes no modelo de Hart e Mas-Colell exibem aprendizagem e arrependimento ao longo do jogo. Hart (2005) mostra que há um processo adaptativo convergindo para o conjunto de equilíbrios correlacionados. Embora tal processo (*adaptação heurística*) seja diferente dos modelos de teoria evolucionária, a adaptação heurística também está relacionada com o equilíbrio correlacionado.

3.1.1 Adaptação Heurística – Definição

O processo de aprendizagem é *adaptativo* quando o jogador tem uma expectativa sobre a distribuição de probabilidade das ações futuras do outro jogador de uma maneira analítica no que diz respeito às ações passadas e às suas estimativas iniciais. O exemplo mais tradicional é a jogada fictícia, que estabelece que a ação esperada é igual à freqüência das ações passadas, uma extrapolação média do passado que pode ser aplicada às ações observadas. Em tal processo, cada jogador raciocina implicitamente como se o comportamento do outro fosse estacionário e tenta encontrar a tendência geral, mesmo que esta tendência seja reavaliada em cada período antes da próxima jogada. Por outro lado, a estrutura do jogo pode variar com alguns limites ao longo do processo, pois a tendência das ações observadas irá refletir o processo evolutivo com algum atraso, mesmo se novas ações se tornarem disponíveis e forem progressivamente testadas.

De acordo com Hart (2005) o termo *heurístico* é usado para regras de comportamento que são simples, não sofisticadas, simplistas, e míopes. Estas regras são chamadas de adaptativas se elas induzem um comportamento que reage ao que acontece no jogo, em direções que parecem ter um “melhor” resultado. Tais opções parecem ter um “melhor” resultado pois não termos certeza de qual é o melhor resultado. Então, podemos dizer que, sempre fazer a mesma escolha fixa, e sempre aleatorizar uniformemente sobre todas as escolhas possíveis, são processos heurísticos.

Mas tais processos heurísticos não são adaptativos, pois eles não são uma reação à situação (i.e., ao jogo sendo jogado e ao comportamento dos outros participantes). Em contraste, o jogo fictício (um processo de ajustamento dinâmico que leva ao equilíbrio) é um clássico exemplo de adaptação heurística: em cada etapa cada jogador escolhe uma ação que é ótima se comparada com a freqüência de distribuição das ações passadas dos outros jogadores. Battigalli *et al.* (1992) é uma excelente introdução aos modelos que explicitamente capturam as forças da evolução e da aprendizagem usadas em um jogo fictício, e Fudenberg e Levine (1995) é um trabalho mais avançado sobre jogos fictícios.

Como apresentado por Hart (2005), e Hart e Mas-Colell (2000, 2001), em uma situação onde os agentes interagem repetidamente, uma *adaptação heurística* é uma regra de comportamento se ela é simples, não sofisticada, simplista, e leva a movimentos em direções aparentemente boas. A adaptação heurística pode também ser interpretada como uma forma de racionalidade limitada.

A adaptação heurística normalmente aprece em modelos comportamentais, tais como feedback e estímulo-resposta. Há uma literatura, tanto experimental quanto teórica, sobre os vários modelos que usam a adaptação heurística e seus desempenhos relativos em diferentes ambientes (ver Fudenberg e Levine (1998) para detalhes).

Como mencionado por Hart (2005), outros exemplos de equilíbrios correlacionados que usam a adaptação heurística podem ser encontrados em esportes coletivos, como o futebol. Os times que são vitoriosos em virtude do seu "espírito de equipe" desenvolvem sinais que permitem a correlação entre os membros do time mas não são disponíveis para os oponentes. Por exemplo, considere um sinal que diz aos membros do time se eles devem atacar pela direita ou esquerda, mas não é conhecido ou observado pelo adversário. Na realidade, os sinais estão em todo lugar, sejam eles sinais públicos ou privados, ou uma mistura dos dois tipos. Estes sinais são freqüentemente irrelevantes para o pagamento do jogo que está sendo disputado. Entretanto, é praticamente impossível excluí-los da estrutura de informações do jogo e deixar de considerar sua importância para se alcançar o equilíbrio.

Resumimos abaixo os resultados apresentados por Hart (2005), pois os mesmo são vitais para o prosseguimento do capítulo. Tais resultados já foram apresentados em outros artigos citados, mas o trabalho de Hart é o mais recente e completo sobre o tema. As provas estão além dos objetivos do presente trabalho mas apresentamos as seções do trabalho de Hart onde tais teoremas podem ser encontrados.

1. Existem regras simples de adaptação heurística que *sempre* levam aos equilíbrios correlacionados. (seção 4).
2. Há uma grande classe de regras de adaptação heurística que *sempre* leva aos equilíbrios correlacionados (seção 7).
3. Pode *não haver* adaptação heurística que sempre leve aos equilíbrios de Nash, ou ao conjunto convexo dos equilíbrios de Nash (seção 8).

Tomados em conjunto, estes resultados estabelecem uma conexão entre a abordagem dinâmica da adaptação heurística e a abordagem estática do equilíbrio correlacionado. A adaptação heurística está intimamente relacionada com os modelos comportamentais que tentam explicar o quê as pessoas fazem, enquanto o equilíbrio correlacionado pode englobar considerações totalmente racionais. Como vimos no

Capítulo 2, dois exemplos de mecanismos para implementar o equilíbrio correlacionado são um processo aleatório externo (um mediador, ou outra variável observável) e um comportamento de aprendizagem. Este comportamento de aprendizagem é a adaptação heurística.

Hart (2005) mostra que o comportamento racional, que em muitas ocasiões é bastante ilusório e difícil de encontrar em ações isoladas, pode entretanto ser alcançado no longo prazo. No curto prazo, a adaptação heurística pode servir como uma ponte natural ligando as abordagens racionalista e comportamental. Hart (2005) afirma que a racionalidade deve ser examinada no longo prazo, i.e., atos isolados que não são racionais podem gerar um comportamento de longo prazo que pode ser encarado como sendo racional. No curto prazo, a punição de criminosos, por exemplo, pode ser interpretada como um ato de vingança totalmente irracional, mas no longo prazo pode ser um simples ato de preservação social.

3.2 O RESULTADO – CONVENÇÃO

Conforme mencionado por Crawford (1997), na Teoria dos Jogos tradicional o comportamento em um jogo é determinado totalmente por sua estrutura, que é formada pelos jogadores, pelas decisões que eles devem tomar e a informação que eles têm à sua disposição, pela maneira como suas decisões determinam o resultado, e por suas preferências sobre os resultados. A estrutura incorpora qualquer repetição, mecanismo de correlação, ou oportunidade de comunicação. Algumas teorias permitem que o comportamento seja influenciado por outros fatores, tais como a maneira como o jogo é apresentado ou o ambiente social; tais fatores são chamados de *contexto*.

Crawford (1997) nota que agentes bem informados que participam de experimentos normalmente exibem alguma sofisticação estratégica, mas geralmente não o suficiente para eliminar toda a incerteza estratégica antes do início da interação. Suas crenças são influenciadas por vários princípios de coordenação, normalmente *contextuais* e *indutivos* ao invés de estruturais e dedutivos. Quando as crenças não são perfeitamente coordenadas no início do jogo, a aprendizagem normalmente gera rápida convergência para algum equilíbrio.

Uma maneira de gerar tal convergência é através de uma convenção. Alguns exemplos de convenções são “dirija no lado direito da rua”, “dê passagem para o carro na direita”, sinais de trânsito, ou outro mecanismo natural que coordene as ações das pessoas que estão interagindo. De acordo com Aumann, em van Damme (1998), quando estamos dando algum conselho, nós conhecemos o contexto em que o jogo está inserido, e podemos basear nosso conselho em tal fato. Podemos facilmente escolher diferentes equilíbrios em diferentes contextos. Por exemplo, seja um jogo de dois jogadores onde cada um deve escolher E ou D; cada um ganha 1 se eles escolhem a mesma opção, e zero caso contrário. Vamos supor que um está dirigindo em direção ao outro, e que E e D representem o lado da estrada em que eles dirigem. Se estamos na Inglaterra, deveríamos escolher (E, E); se estamos na Holanda, escolhemos (D, D). Harsanyi e Selten (1988) sugerem resolver tal problema através da utilização de estratégias mistas. Mas segundo Aumann, não há nenhuma boa razão para basear a escolha somente na forma matemática do jogo; o contexto também importa.

Para ver tal abordagem em detalhes vamos imaginar um jogo de direitos de propriedade. Há uma variedade de convenções que podem surgir ao longo do jogo. Cada uma delas irá criar uma ordem específica e é muito provável que cada convenção irá distribuir os benefícios que surgem do estabelecimento dos direitos de propriedade de maneira diferente entre a população. Nesse sentido, há um conflito de interesses entre diferentes grupos da população que interferem na seleção da convenção. Obviamente, se o Estado conscientemente seleciona uma convenção específica, então podemos observar a barganha política que está associada com o exercício do poder. Naturalmente, quando uma convenção surge de forma espontânea, não observamos tal barganha pois não há possibilidade de ocorrência, ainda que o surgimento de uma convenção não seja menos decisivo que uma resolução política consciente para solucionar o conflito de interesses. Basicamente, uma convenção pode ser vista como uma *solução* para um jogo de coordenação, por exemplo, e pode resolver o conflito sobre os direitos de propriedade. Mais explicitamente, uma convenção é um equilíbrio correlacionado.

Entretanto, do ponto de vista normativo, as convenções não "solucionam" nada, pois ainda há um problema de simetria (qual convenção: Esquerda ou direita? Cara ou coroa? Verde ou vermelho[12]?). Na perspectiva evolucionária, onde uma ou mais convenções surgem, qualquer uma é igualmente boa, mas somente uma irá sobreviver de fato. Então na visão evolucionária, a Natureza resolve o problema.

[12] Durante o governo de Mao Tse-Tung, os chineses consideraram a possibilidade de parar no sinal verde e seguir no sinal vermelho, pois esta era a cor do progresso. Após alguma controvérsia a idéia foi abandonada.

Na literatura evolucionária podemos encontrar alguns exemplos de mecanismos usados para implementar um equilíbrio correlacionado: um processo de *mutação,* onde temos o surgimento de novas estratégias mais um processo aleatório externo (lançamento de uma moeda, for exemplo); um processo de *aprendizagem*, i.e., uma revisão de crenças (probabilidade condicionais sobre o quê os outros irão fazer se a moeda resultar cara/coroa, atualizadas de acordo com alguma regra indutiva (por exemplo, teorema de Bayes) baseadas nas ações dos outros jogadores) mais um mecanismo aleatório externo (lançamento de uma moeda, por exemplo).

O processo de aprendizagem é o ponto que nos interessa. Vamos considerar uma interação estratégica entre dois jogadores, onde o jogador 1 é escolhido aleatoriamente em uma população e o jogador 2 é escolhido aleatoriamente de outra população. Por exemplo, tal situação pode ser um jogo de barganha entre um vendedor e um comprador. Agora supomos que essa relação é repetida várias vezes. Se este processo seleciona um perfil de ações, ou seja, se ao longo do tempo as escolhas das ações dos dois jogadores são sempre as mesmas, então podemos encarar esse resultado como uma convenção. Mesmo se os jogadores iniciam com ações arbitrárias, logo que eles relembram as ações dos outros jogadores no passado e escolhem aquelas ações que são as melhores, qualquer convenção social pode corresponder a um equilíbrio de Nash. Se um resultado não é um equilíbrio de Nash, então pelo menos um dos jogadores não está dando a melhor resposta, e cedo ou tarde o jogador irá escolher uma melhor ação que será adotada pelos outros jogadores no futuro. Ou seja, um resultado que não é um equilíbrio de Nash carece de certa estabilidade, e se uma convenção de como se deve jogar ao longo do tempo está por surgir, devemos esperar que essa convenção corresponda a algum equilíbrio de Nash do jogo.

Schelling (1960) considera uma convenção como um mecanismo social cuja função é coordenar nossas ações sobre um equilíbrio particular quando o jogo tem equilíbrios múltiplos. Schelling (1960) conduziu alguns experimentos na década de cinqüenta sobre a maneira como as pessoas resolvem problemas de coordenação. (ver também Kreps (1990)). No experimento mais conhecido, os participantes são perguntados sobre o quê duas pessoas deveriam fazer se elas concordassem em se encontrar em Nova Iorque amanhã sem especificar local e hora. A resposta padrão foi que elas deveriam se encontrar ao meio-dia na Estação Central. Quando as pessoas concordam universalmente em seguir uma resolução para tal problema de coordenação, Schelling diz que tal consenso constitui um *ponto focal*. Se quisermos diferenciar ponto focal de convenção, podemos dizer que um ponto focal é uma convenção que os jogadores não sabem que irão compartilhar ao longo de um jogo de coordenação.

Entretanto, como notado por Binmore (2007), a principal conseqüência de nossa maior compreensão sobre os operadores de conhecimento e sua relação com uma teoria de convenções é trazer à nossa atenção a dificuldade para algo se tornar de conhecimento comum. Com que freqüência temos a oportunidade de observar alguém observando alguma coisa? Segundo Binmore (2007), para um grande número de pessoas a resposta é *nunca*. Como uma linguagem pode se tornar uma convenção se a convenção precisa ser de conhecimento comum? Como o ouro veio a se tornar valioso? Como dirigir na direita ou esquerda[13] se tornou uma convenção?

As convenções podem, em algumas ocasiões, serem aceitas mesmo que os agentes não saibam nada a respeito dos requisitos formais sobre as teorias do conhecimento para se chegar a tal convenção. Por exemplo, como mencionado por Binmore (2007), os sons que certos pássaros emitem podem ser vistos como um fato cultural. Os pássaros jovens aprendem a cantar complicados arranjos ao ouvir os pássaros mais experientes cantando. O som que os pássaros estão emitindo é muito importante pois funciona como um mecanismo de coordenação para o acasalamento. Mas os pássaros não "sabem" nada disso; eles simplesmente fazem[14]. Nesse sentido, para Binmore (2007), uma convenção precisa somente ser de conhecimento mútuo e não de conhecimento comum.

A maioria das convenções surge gradualmente e adquire força de maneira lenta. Ou, nas palavras de Binmore (2007), elas são o produto de um inconsciente e longo processo de evolução cultural. Talvez a palavra "longo" seja forte demais e tenha um caráter muito evolucionário, pois muitas sociedades mudam algumas convenções sociais em um período muito curto em termos de existência humana.

---

[13] Na Europa continental a convenção era dirigir na esquerda. Na época da Revolução Francesa alguns indivíduos começaram a dirigir na direita como uma forma de desafiar a nobreza. Dirigir na direita se tornou a convenção dominante. Posteriormente, Napoleão Bonaparte estabeleceu que as regiões conquistadas também deveriam dirigir na direita.

[14] Obviamente nesse exemplo o aspecto genético é relevante, mas serão as convenções que seguimos um produto de nossa evolução genética? Vários estudos realizados com primatas mostram que a resposta pode ser positiva, mas não entraremos nesse assunto no presente trabalho.

3.2.1 Convenção – Definição

Antes de continuar, precisamos de uma definição mais precisa de convenção. Segundo Young (1993), uma convenção é um padrão de comportamento que é natural, esperado, e auto-executável. Todos seguem, todos esperam que os outros sigam, e todos querem que os outros sigam dado que todos seguem. Os exemplos já citados, como qual lado escolher para dirigir, almoçar ao meio-dia se os outros fazem o mesmo, aceitar notas de dinheiro como forma de pagamento por algo se os outros aceitam, e assim por diante, mostram que as convenções não precisam ser simétricas. Em algumas regiões, os arrendatários de uma fazenda normalmente ficam com um terço da produção e os proprietários ficam com dois terços, enquanto em outras regiões o resultado pode ser inverso. Para cada agente em tais interações assimétricas há um comportamento esperado e habitual, e todos preferem seguir tal comportamento contanto que todos os outros sigam tal comportamento. Em tais circunstâncias dizemos que as pessoas seguem uma convenção. Claramente uma convenção é um equilíbrio que todos esperam. Mas como estabelecemos algum equilíbrio quando há vários equilíbrios?

Podemos dizer que alguns equilíbrios são a princípio mais *razoáveis* do que outros. Como vimos, uma teoria dedutiva para selecionar o equilíbrio é proposta por Harsanyi e Selten (1988). Outra explicação proposta por Schelling (1960), é que os agentes focam sua atenção em um equilíbrio específico porque ele é mais *familiar* ou óbvio do que os outros. Uma terceira explicação é que, ao longo do tempo, as expectativas convergem para um equilíbrio através de estímulos positivos. Vamos supor que um jogo é repetido várias vezes, seja pelos mesmos jogadores ou por jogadores diferentes. As jogadas passadas têm um efeito nas expectativas e no comportamento atuais dos jogadores pois eles prestaram atenção nos movimentos passados. Em determinado momento, um equilíbrio é estabelecido como a convenção a ser seguida, não porque seja familiar ou focal, mas porque a dinâmica do processo seleciona tal equilíbrio. Young (1993) desenvolve um modelo onde os agentes são incapazes de aprender algo para mostrar que a convergência para o equilíbrio pode ocorrer mesmo sem conhecimento comum e com um mínimo de racionalidade por parte dos agentes. Segundo ele, a sociedade pode aprender mesmo que seus membros não aprendam.

Como notado por Young (1998) podemos dizer que as convenções só se mantêm se elas constituem um equilíbrio em um jogo específico. No jogo de ultimato, por exemplo, uma divisão de 50 - 50 pode ser uma convenção porque é um equilíbrio natural e habitual em jogos desse tipo. Obviamente estamos falando de jogos repetidos onde tal convenção pode se estabelecer e devemos considerar que em algum grupo específico em alguma floresta perdida em algum continente perdido, uma diferente convenção pode surgir. Então, podemos dizer que *uma convenção é um comportamento de equilíbrio em um jogo repetido por muitos indivíduos diferentes em uma sociedade, onde tal comportamento é largamente aceito como sendo habitual.* O comportamento não deve somente ser habitual, mas os jogadores devem saber que ele é habitual. Portanto, assim como para Binmore (2007), para Young (1998) uma convenção só precisa ser de conhecimento mútuo.

3.2.2 Convenção – Exemplo

A evidências mais relevantes sobre os experimentos com o jogo de ultimato ou sobre jogos de barganha com informação completa são apresentadas principalmente em Camerer e Thaler (1995) e Roth (1995), além de outros. Nestes jogos, dois jogadores fazem ofertas sobre a melhor maneira de dividir algum prêmio, com o jogador 1 fazendo a primeira oferta. No jogo de ultimato, este processo termina quando o jogador 1 faz sua oferta e o jogador 2 aceita ou rejeita. A aceitação gera um acordo voluntário e a rejeição gera um desacordo. Nos jogos de barganha com ofertas alternadas o processo continua, durante algum período, até que uma oferta seja aceita, o que rende um acordo voluntário. A rejeição gera um custo pois os possíveis acordos futuros têm um menor pagamento.

Com pagamentos puramente monetários, o jogo de ultimato tem um único equilíbrio perfeito em subjogos, no qual a primeira oferta do jogador 1 é dar para 2 o pagamento de zero e 2 aceita, gerando um resultado eficiente. O jogo de ofertas alternadas também tem um único equilíbrio perfeito em subjogos, no qual a primeira oferta do jogador 1 extrai todo o excedente do jogador 2 caso 2 aceite, dado que a melhor alternativa para o jogador 2 é fazer um contra oferta no período seguinte, escolhida da mesma maneira. Nesse equilíbrio o jogador 2 aceita a oferta, gerando novamente um resultado eficiente.

Os resultados dos experimentos para ambos os jogos são bastante diferentes destas previsões. Nos jogos de ultimato, a primeira oferta é, na média, de 40% do prêmio. Em ambos os jogos, ofertas são rejeitadas com freqüência de 15%. (Forsythe *et al.* (1991), Roth (1995)). Nos jogos de ofertas alternadas as rejeições são seguidas por contra ofertas não vantajosas que rendem menos do que as ofertas rejeitadas, com freqüências de 65% - 88% (Roth (1995)).

De particular interesse são os experimentos realizados com o jogo do ultimato, conduzidos em quarto países por Roth *et al.* (1991). Os resultados corroboram o apresentado no parágrafo anterior. Se os desvios do equilíbrio perfeito em subjogos fossem em virtude de falta de sofisticação estratégica, não haveria motivos para esperar que as rejeições do segundo jogador diferissem sistematicamente entre os países, de maneira que países com ofertas mais baixas exibissem mais casos de desacordo. Roth *et al.* (1991) mostram, ao invés disso, que as taxas de rejeição variam juntamente com as ofertas, entre os países, de tal forma que os países com ofertas mais baixas não tiveram mais casos de desacordo

A freqüência de rejeições e contra ofertas desvantajosas no jogo de ultimato e no jogo de ofertas alternadas destes experimentos é geralmente vista como uma evidência de que alguns resultados são influenciados por alguns fatores contextuais ou por algumas convenções. Em um dos grupos estudados por Roth *et al.* (1991), por exemplo, um jogador faz ofertas vantajosas para o outro jogador por saber que agindo de tal forma o outro fica obrigado (por convenção do grupo) a lhe prestar favores futuros.

Em outro experimento clássico, Schelling (1960) solicitou respostas hipotéticas para tentar resolver um problema de coordenação simétrica no qual dois jogadores escolhem entre *n* ações, recebendo pagamento de 1 se eles escolhem as mesmas ações e zero caso contrário. Mehta *et al.* (1994) repetem o experimento de Schelling, e em alguns casos a importância do conhecimento público de algo é claramente visível. No caso de escolha de algum dia do ano, por exemplo, 88 participantes deram 75 respostas diferentes, com aproximadamente 6% de escolhas para o dia 25 de Dezembro, que foi a opção mais votada. No caso da mesma escolha, mas em uma situação de coordenação entre os participantes, 44.4% escolheram o dia 25 de Dezembro; 18.9% escolheram o dia 10 de Dezembro (o dia do experimento); e 8.9% escolheram o dia 1 de Janeiro. Mais uma vez, os resultados fornecem evidências claras de certa sofisticação estratégica simultânea e da importância de fatores contextuais. Podemos dizer que o dia 25 de Dezembro é uma convenção em sociedades ocidentais, mas não necessariamente em outras.

Sanfey *et al.* (2003) realizaram um experimento com 19 participantes usando imagens de ressonância magnética (fMRI), onde cada participante atua no papel de jogador 2 (aceita ou rejeita) no jogo de ultimato. Eles estavam interessados nas reações comportamentais e neurais a ofertas que fossem justas (50% - 50%) ou injustas (o proponente oferece ao jogador 2 uma parte menor que 50%). Segundo os autores, ofertas injustas iriam gerar um comportamento neural associado a aspectos emocionais e cognitivos, e que a magnitude de tal atividade neural poderia explicar o comportamento de aceitar ou rejeitar tais ofertas nas jogadas seguintes. Os resultados comportamentais foram muito similares ao apresentados nos experimentos com jogos de ultimato. Os participantes aceitaram todas as ofertas justas, com taxas decrescentes de aceitação para ofertas mais injustas, sugerindo que os participantes têm uma reação fortemente emocional a ofertas injustas. Portanto, em certo sentido, rejeitar ofertas injustas é uma forma de convenção. Podemos imaginar que tais resultados ocorrem porque as pessoas não querem ser encaradas como maus negociadores ou imaginam que vão interagir com o outro novamente ou não querem demonstrar fraqueza.

Segundo Young (1998) as convenções reduzem os custos de transação ao coordenar as expectativas e reduzir as incertezas. Como já citado, um bom exemplo é o lado da rua que as pessoas escolhem para dirigir. Podemos modelar essa situação como um jogo de coordenação, como mostrado na Figura 3.1:

	Esquerda	***Direita***
Esquerda	***0, 0***	***-1, -1***
Direita	***-1, -1***	***0, 0***

Figura 3.1

A falta de uma convenção significa que as escolhas dos agentes são imprevisíveis, o que leva a colisões. De acordo com Young (1998), o custo de transação mais elevado, i.e., o custo de uma situação onde há uma probabilidade de colisão, ocorre quando os participantes usam estratégias mistas e escolhem 50% Esquerda, 50% Direita, que é um equilíbrio do jogo. Entretanto, em jogos de coordenação, somente equilíbrios em estratégias puras podem resolver tal problema de uma maneira razoável.

No exemplo da Figura 3.1, ambos os equilíbrios em estratégias puras têm as mesmas implicações em termos de bem-estar, portanto a existência de uma convenção em estratégias puras é o aspecto mais relevante do ponto de vista do bem-estar econômico. Em geral, entretanto, os equilíbrios em estratégias puras podem ter diferentes implicações para o bem-estar. Podemos considerar, por exemplo, a evolução de padrões tecnológicos, tais como a competição entre os sistemas operacionais Macintosh e DOS. Podemos representar tal situação como um jogo, conforme mostrado na Figura 3.2:

	MAC	***DOS***
MAC	***9, 9***	***4, 4***
DOS	***4, 4***	***8, 8***

Figura 3.2

Ambos os padrões resolvem o problema dos custos de transação, mas considerando os hipotéticos pagamentos apresentados, o padrão MAC é melhor do que o DOS do ponto de vista do bem-estar econômico. Uma vez que o padrão DOS se torna estabelecido, é muito difícil para a sociedade mudar para o padrão MAC. Outro exemplo, na mesma linha tecnológica, é a escolha de uma ferramenta digital de busca de páginas na Internet; o Google é o padrão aceito, mas nesse caso sabemos que ele pode gerar o maior bem-estar para a sociedade pois tem características que não são encontradas em outras ferramentas.

Se as convenções surgem através de escolhas não coordenadas e descentralizadas de muitos indivíduos, parece não haver nenhuma razão para esperar que tais convenções sejam eficientes. Mas como vimos na seção 2.2.5.2 do Capítulo 2, podemos ter equilíbrios correlacionados mais eficientes que outros.

3.3 CONVENÇÃO E EQUILÍBRIO CORRELACIONADO

Conforme apresentado, diferentemente do equilíbrio de Nash, o equilíbrio correlacionado permite que as estratégias dos jogadores sejam estatisticamente dependentes. Mais precisamente, antes de iniciar um jogo, um jogador recebe um sinal sob o qual ele pode condicionar sua escolha de uma determinada ação. Se os sinais são independentes entre os jogadores então um equilíbrio correlacionado pode ser visto como um equilíbrio de Nash. Mas como os sinais podem ser correlacionados entre os agentes, o conjunto de equilíbrios correlacionados é geralmente maior que o conjunto dos equilíbrios de Nash. O equilíbrio correlacionado pode, portanto, ser interpretado com o resultado de um processo de interação ente os agentes.

Hart (2005) apresenta alguns resultados que mostram como a aprendizagem adaptativa pode levar ao equilíbrio correlacionado. A interpretação usual do equilíbrio correlacionado é imaginar um mecanismo que distribui instruções para os jogadores sobre quais ações eles devem tomar. Claramente, tal mecanismo pode ser uma convenção. Um equilíbrio correlacionado é uma distribuição de probabilidade sobre as instruções de tal forma que seja do interesse de cada jogador obedecer tais instruções. Um interessante aspecto dessa interpretação do equilíbrio correlacionado é que cada jogador usa uma estratégia pura. Em particular, cada jogador tem uma função de estratégias puras relacionadas com ações do tipo "se a instrução diz para jogar a ação x então jogue a ação x". Outro aspecto do equilíbrio correlacionado é que todos os jogadores usam a mesma estratégia pura e seguem as instruções recebidas. Isto sugere que podemos conectar o conceito de equilíbrio correlacionado com uma norma específica de comportamento; cada jogador assume o "papel" que o mecanismo recomenda. Assim, podemos ver que a noção de equilíbrio correlacionado incorpora alguma noção de convenção. Nesse sentido, Shubik (1982) e Skyrms (1990) sugerem que as convenções podem ser definidas com equilíbrios correlacionados, mas não apresentam uma definição formal.

Seguindo a mesma linha, Vanderschraaf (1995, 1998) argumenta que a principal propriedade para que um arranjo social seja uma convenção é que tal arranjo seja condicionalmente auto-executável, ou seja: (i) cada agente tem um motivo para seguir o arranjo dado que ele espera que os outros os façam, (ii) dado um diferente conjunto de expectativas, alguns agentes teriam incentivos para desviar do arranjo e, (iii) tais fatos são de conhecimento comum. Isto nos leva a uma definição de convenção como um *equilíbrio correlacionado estrito* juntamente com condições apropriadas de conhecimento comum.

Vanderschraaf (1998) nota que há duas classes gerais de interações sociais que podem ser analisadas com alguma descrição da convenção usada. A primeira classe é formada pelos problemas de *coordenação*, no qual o interesse de todos os agentes envolvidos coincide perfeitamente, ou no mínimo quase perfeitamente. A segunda classe é formada por problemas de *conflito parcial*. Em situações de conflito parcial, alguns agentes ganham se os outros, de maneira unilateral, fazem certos sacrifícios. O fato de que as pessoas seguem as normas de justiça, tais como respeitar os direitos de propriedade dos outros, na presença de conflitos de interesse, é a principal fonte para se definir uma convenção. Nesse ponto, Vanderschraaf parece ter uma visão de convenção como um processo mais consciente, se comparada com a visão de Young e Binmore. Entretanto, devemos enfatizar que, embora o processo de surgimento da convenção como um processo não planejado seja importante, a existência da convenção como um processo consciente parece mais plausível em outras situações.

Os agentes que seguem uma convenção sabem que se algum deles desviar, então nenhum pode melhorar sua condição. Esta propriedade não é, em geral, vital pra uma descrição de convenção, embora seja característica de problemas de coordenação. Para ser uma convenção, um arranjo social precisa somente ser *estritamente auto-executável*, no sentido de que cada agente tem uma razão decisiva para seguir o arranjo se os outros o fazem. Tal fato motiva uma definição de convenção como um *equilíbrio estrito* que depende de que os agentes tenham um conhecimento comum da conformidade geral a respeito deste equilíbrio.

As regras de propriedade são convenções, ou seja, os agentes seguem estas regras com a condição de que esperam que os outros com quem interagem também sigam tais regras. Os agentes podem de fato ter boas razões para seguir as regras da sociedade se todos reconhecem que tais regras existem para beneficiar a todos e que tais regras são o resultado de um consenso entre os agentes.

Para ilustrar uma convenção em uma situação de conflito parcial, considere o jogo da Figura 3.3. Novamente, este é o nosso tradicional exemplo do Capítulo 2. Cada agente pode escolher ser conciliador (C) ou agressivo (A). Cada agente se sente tentado a ser forte e escolher A se ele pensa que o outro irá demonstrar covardia[15] e escolher C, mas o pior resultado para ambos ocorre se os dois jogadores escolhem A.

[15] No jogo original, o termo para covardia é “*chicken out*”, e como já foi percebido, esse é o famoso “*Chicken Game*”. Tal jogo se refere à situação em que dois carros seguem na mesma rua em direções opostas e o primeiro que desviar é o perdedor (ou talvez o vencedor, pois permaneceu vivo). Obviamente, se os dois desviam temos o melhor resultado possível segundo os pagamentos apresentados, mas a reputação dos dois participantes pode ficar totalmente debilitada perante os espectadores. Tal perda de reputação é um fator que incentiva cada um a pensar na alternativa A. Considerando somente os pagamentos apresentados, como 7 > 6, a questão da reputação pode ser desconsiderada.

	C	***A***
C	***6, 6***	***2, 7***
A	***7, 2***	***0, 0***

Figura 3.3

Autores como Vanderschraaf (1998) e Skyrms (1996) usam tal jogo para modelar certos problemas relacionados à aquisição de propriedade. Suponha dois agentes, cada um querendo adquirir algum bem. Cada um pode se dispor a dividir o bem com o outro, ou pode querer exclusividade sobre o bem, o que corresponde a jogar *C* e *A*, respectivamente. Se ambos escolhem *C*, então eles dividem o bem. Se um deles escolhe *A*, quem escolheu *C* imediatamente permite a quem escolheu *A* a posse absoluta do bem. Mas se ambos escolhem *A*, então uma disputa se inicia. O jogo tem dois equilíbrios de Nash estritos, (*C, A*) e (*A, C*). Por definição, em cada um desses equilíbrios cada agente tem um motivo para seguir o equilíbrio dado que espera que o outro também o faça. Estes equilíbrios também dependem das expectativas recíprocas dos agentes, ou seja, os agentes sabem que se suas crenças sobre o outro fossem diferentes, eles não teriam seguido tal equilíbrio. Por exemplo, se os agentes tem conhecimento comum de que eles são racionais, de que eles conhecem a estrutura do jogo apresentado, e de que cada um espera que o outro siga o equilíbrio (*C*, *A*), então cada um tem razões suficientes para também seguir (*C*, *A*). Entretanto, de seu conhecimento comum da estrutura de pagamentos do jogo, eles sabem que se o agente 1 acreditou com probabilidade suficientemente elevada que o agente 2 iria escolher *C*, então o agente 1 teria escolhido *A*. De maneira semelhante, eles sabem que se as crenças do agente 2 sobre o agente 1 fossem diferentes, o agente 2 teria desviado de (*C, A*). Segundo Vanderschraaf (1998), um equilíbrio de Nash estrito do jogo juntamente com as condições a respeito do conhecimento comum *parecem* ser um exemplo paradigmático de uma convenção.

Mas nenhum destes equilíbrios de Nash estritos pode ser uma convenção. Em cada um destes equilíbrios, o agente que escolhe *C* iria referir que o outro também escolhesse *C*. Conseqüentemente, o agente que escolhe *C* percebe que ele poderia obter alguma vantagem com a ruptura do conhecimento dos dois jogadores. Se o agente que escolhe *C* pudesse convencer o agente que escolhe *A* que, diferente do ocorrido, ele será agressivo, o agente que escolhe *A* teria uma boa razão para desviar do equilíbrio estrito. Obviamente, se tal trapaça fosse bem sucedida, os agentes não precisariam seguir uma convenção, pois a covardia mútua é um resultado instável do jogo. Ou seja, a convenção surge justamente para coordenar tais escolhas de uma maneira estável e confiável.

Uma convenção histórica e universalmente aceita para estabelecer a propriedade sobre algum bem por parte um novo proprietário é a *primogenitura*, i.e., a propriedade ou controle vai para o filho mais velho do antigo proprietário. Primogenitura é um exemplo de uma convenção que resolve um problema de conflito entre um conjunto de agentes que desejam tomar a posse do mesmo bem, e também é uma maneira que os agentes têm para correlacionar suas expectativas sobre o que os outros irão fazer.

Então, podemos dizer que a convenção da primogenitura é um equilíbrio correlacionado. Obviamente, a primogenitura é uma convenção dentre muitas convenções possíveis que uma população reconhece como forma de transmitir a posse de uma propriedade.

Como mencionado acima, uma descrição de cada estado do mundo possível inclui uma descrição de todos os objetos de incerteza que os agentes têm em relação ao jogo. Além disso, a suposição de que a estrutura de informação de cada agente é uma *partição* finita de Ω, garante que o jogo, as a priori dos agentes sobre Ω, suas partições de informação privada, e as ações escolhidas por cada agente em ω são todas de conhecimento comum. Tal suposição é recorrente na literatura sobre conhecimento comum, mais especificamente em Aumann (1987). Mas segundo Vanderschraaf (1998), o modelo de conhecimento dos agentes na forma de partições é adequado? O conhecimento dos agentes é realmente formalizado dessa maneira? Conforme Aumann (1999a) podemos questionar vários aspectos de tal modelagem. Se quisermos compreender a relação entre uma convenção e o conhecimento comum (ou não) envolvido, o modelo de partições, que revela a informação dos agentes sobre o fato de os outros seguirem uma convenção, é o mais adequado?

Vanderschraaf (1998) argumenta que tal modelagem não é adequada na maioria dos casos. Para ver tal argumento de maneira mais clara, vamos considerar um espaço infinito de possíveis mundos correspondendo a alguma variável aleatória absolutamente contínua, i.e., uma variável aleatória *X* com distribuição uniforme no intervalo [0, 1]. Assumindo que um agente pode observar o valor de *X* com algum grau de precisão, fica claro que o conhecimento privado desse agente é melhor modelado por uma estrutura melhor adaptada a um mundo contínuo, tal como uma σ-álgebra, do que por uma partição. É possível desenvolver modelos de conhecimento, e conhecimento comum, que permitem aos indivíduos ter estruturas de conhecimentos privado mais complexas do que partições. Aumann (1974) desenvolve uma descrição generalizada do equilíbrio correlacionado na qual os agentes condicionam suas expectativas sobre as σ-álgebras, ao invés de partições. Vários autores, incluindo Vanderschraaf (1995), expandiram a definição de conhecimento comum proposta por Aumann para casos no qual os operadores de conhecimento dos agentes precisam apenas satisfazer as propriedades (**S5.1**)–(**S5.4**), de tal forma que as estruturas de informação privada não precisem ser partições.

De acordo com Vanderschraaf (1998), a princípio, seria possível desenvolver uma definição mais geral de convenção, que relaxa a suposição de que a estrutura de conhecimento privado dos agentes é uma partição finita. Porém, para construir tais definições, precisaríamos introduzir várias dificuldades matemáticas no modelo que não necessariamente aumentariam nossa compreensão sobre as convenções que os agentes do mundo real seguem. O modelo de conhecimento com partições reflete de maneira precisa o que os agentes nos exemplos dados neste trabalho sabem quando eles seguem uma convenção, e estes exemplos são uma representação dos vários tipos de convenções que podem ser modeladas com um jogo. Em todos estes casos, os agentes ou seguem um equilíbrio de Nash, que corresponde à existência de apenas um possível mundo (mundo em que eles seguem o equilíbrio de Nash), ou correlacionam suas ações sabendo o quê cada agente pode deduzir sobre a situação em cada contingência. Para tais casos, faz sentido modelar o conjunto de possíveis mundos como um conjunto finito Ω que corresponde às possíveis contingências, e modelar as estruturas de conhecimento privado dos agentes como partições de Ω. Ainda assim, pode ser plausível considerar algumas convenções nas quais os agentes correlacionem suas estratégias de acordo com um contínuo de contingências possíveis.

Definir as origens das convenções, e o requisito de conhecimento comum, é um exemplo de seleção do equilíbrio geral. O conhecimento comum dos agentes sobre certos estados pode levá-los a observar um certo equilíbrio como o equilíbrio familiar em um contexto específico, de tal forma que eles sigam este equilíbrio correlacionado como uma descrição de suas expectativas, e como conseqüência sigam uma convenção. Entretanto, tal noção parece envolver os agentes em um problema de coordenação ainda mais complexo. Tal fato pressupõe que os agentes reconheçam um equilíbrio correlacionado como familiar pois faz parte de seu conhecimento comum. Segundo Vanderschraaf (1998), uma descrição satisfatória de uma convenção deveria incluir uma descrição de *como* os agentes entram em acordo a respeito de uma convenção e que não pressuponha um alto nível de coordenação.

A abordagem mais adequada para elaborar tal descrição é introduzir um modelo do *processo* (*adaptação heurística*) através do qual os agentes que não estão inicialmente em equilíbrio *aprendem* sobre a situação e sobre os outros. Se eles aprendem de maneira *indutiva* através de jogadas repetidas de tentativa e erro, e em interações de longo prazo, então suas crenças podem *convergir* de maneira que eles tenham o *conhecimento comum (ou mútuo)* que caracteriza uma *convenção*. Esta convenção, por sua vez, é um *equilíbrio correlacionado*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No começo de nossa curta, mas intrigante viagem, verificamos que embora em certo sentido bastante restritivo, o conceito de conhecimento comum pode ser considerado como uma tentativa válida para formalizar aquilo que os agentes sabem em uma interação estratégica. Buscamos apresentar os elementos de um estado espaço finito, mas também verificamos que a construção de estados infinitos é bastante plausível e pode ser reduzida novamente a um estado espaço finito. Considerando uma situação de interação de longo prazo entre os agentes, até mesmo em um estado espaço infinito as opiniões podem convergir.

Obviamente toda a formalização que envolve a construção do conceito de conhecimento comum pode não encontrar reflexo no mundo real. Na verdade, os agentes podem até mesmo não saber absolutamente nada sobre essa formalização utilizada.

A suposição de *a priori* comum, embora formalmente justificada e amplamente utilizada na Economia, também sofre severas críticas principalmente por ser improvável assumir que os agentes sabem as informações prévias do outros, mas devemos notar que isso não é o mesmo que assumir que eles têm a mesma *a priori*. Entretanto, há um certo consenso no sentido de que tal suposição deve levar em conta o processo dinâmico que leva os agentes a adquirirem suas crenças a respeito dos outros e que torne possível que a informação dos jogadores possa mudar.

Devemos sempre enfatizar que a suposição de *a priori* comum expressa a idéia de que diferenças ns probabilidades devem *somente* refletir diferenças na informação. Se levarmos em conta, de maneira detalhada, toda a informação relevante, então a princípio, não há espaço para diferenças nas probabilidades. Devemos compreender a existência de uma *a priori* comum como apenas uma propriedade do estado espaço usada para modelar a informação incompleta dos jogadores.

Porém, se formos além e tentarmos tornar toda a formalização ainda menos restritiva, podemos utilizar o conceito de conhecimento mútuo como uma forma simples de compreender aquilo que os agentes fazem. Voltaremos a esse ponto depois.

Uma objeção natural ao equilíbrio de Nash é que ele é inconsistente com uma visão Bayesiana. Um jogador Bayesiano inicia com uma *a priori* sobre o quê seu oponente irá fazer e então escolhe a melhor resposta para tal ação. Argumentar que o jogador Bayesiano deva escolher o equilíbrio de Nash do jogo é insistir que ele deva escolher uma *a priori particular*. Nesse sentido, a solução consistente com a perspectiva Bayesiana não é o equilíbrio de Nash mas sim o equilíbrio correlacionado.

O equilíbrio correlacionado, inicialmente apresentado para conjuntos de estratégias finitos e expandido posteriormente para jogos infinitos, é inquestionavelmente uma das noções mais naturais de equilíbrio. Um equilíbrio correlacionado é uma distribuição conjunta sobre o conjunto de estratégias dos jogadores. Se, antes de tomar uma decisão, cada jogador recebe uma recomendação de um mediador externo tal que as recomendações são escolhidas aleatoriamente de acordo com a distribuição conjunta, então nenhum jogador tem incentivo para rejeitar a recomendação, dado que os outros jogadores seguiram suas recomendações. Diferentemente do equilíbrio de Nash, as recomendações não precisam ser independentes.

Uma notável propriedade do equilíbrio correlacionado é que se o jogo é repetido infinitas vezes de tal forma que cada jogador jogue de acordo com uma certa estratégia de minimização de arrependimento, então a freqüência empírica do jogo converge para o conjunto de equilíbrios correlacionados. Ou seja, a interação de longo prazo naturalmente leva ao equilíbrio correlacionado, mas esse equilíbrio pode ser menos eficiente que outros equilíbrios correlacionados.

O mediador externo pode ser qualquer fator que possa entrar em contato com os dois jogadores, como uma regra, lei, ou convenção. Mas por quê devemos esperar que os jogadores sigam a recomendação desse mediador externo? Em vários experimentos realizados, realmente se verificou que muitos agentes não seguem as recomendações por receio de que os outros não o façam. Tal situação também ocorre no Dilema dos Prisioneiros e é recorrente na literatura sobre contribuição de bens públicos, dando origem ao problema do carona (*free-rider*).

Portanto, se não existe garantia de que os participantes irão seguir a recomendação, não existe garantia de que eles irão alcançar o equilíbrio correlacionado e continuamos com o velho problema dos equilíbrios múltiplos. Entretanto, temos a possibilidade de encontrar uma maneira alternativa e bastante natural para resolver tal impasse.

Vimos que existe uma sólida conexão entre a abordagem dinâmica da adaptação heurística e a abordagem estática do equilíbrio correlacionado. A adaptação heurística está intimamente relacionada com os modelos comportamentais que tentam explicar o quê as pessoas fazem, enquanto o equilíbrio correlacionado pode englobar considerações totalmente racionais. Como vimos, dois exemplos de mecanismos para implementar o equilíbrio correlacionado são um processo aleatório externo (um mediador, ou outra variável observável) e um comportamento de aprendizagem. Este comportamento de aprendizagem é a adaptação heurística.

Os agentes que participam de experimentos normalmente exibem alguma sofisticação estratégica, mas geralmente não o suficiente para eliminar toda a incerteza estratégica antes do início da interação. Suas crenças são influenciadas por vários princípios de coordenação, normalmente contextuais e indutivos ao invés de estruturais e dedutivos. Quando as crenças não são perfeitamente coordenadas no início do jogo, a aprendizagem normalmente gera rápida convergência para algum equilíbrio. Uma maneira de gerar tal convergência é através de uma convenção.

Uma convenção pode ser entendida como um mecanismo social cuja função é coordenar nossas ações sobre um equilíbrio particular quando o jogo tem equilíbrios múltiplos. A maioria das convenções surge gradualmente e adquire força de maneira lenta.

Uma convenção é um padrão de comportamento que é natural, esperado, e auto-executável. Todos seguem, todos esperam que os outros sigam, e todos querem que os outros sigam dado que todos seguem. Os exemplos citados, como qual lado escolher para dirigir, almoçar ao meio-dia se os outros fazem o mesmo, aceitar notas de dinheiro como forma de pagamento por algo se os outros aceitam, e assim por diante, mostram que as convenções não precisam ser simétricas. Claramente uma convenção é um equilíbrio que todos esperam. Mas como estabelecemos algum equilíbrio quando há vários equilíbrios? Podemos dizer que alguns equilíbrios são a princípio mais *razoáveis* do que outros.

Podemos pensar que ao longo do tempo, as expectativas convergem para um equilíbrio através de estímulos positivos. Vamos supor que um jogo é repetido várias vezes, seja pelos mesmos jogadores ou por jogadores diferentes. As jogadas passadas têm um efeito nas expectativas e no comportamento atuais dos jogadores pois eles prestaram atenção nos movimentos passados. Em determinado momento, um equilíbrio é estabelecido como a convenção a ser seguida, não porque seja familiar ou focal, mas porque a dinâmica do processo seleciona tal equilíbrio. Mas as convenções só se mantêm se elas constituem um equilíbrio em um jogo específico. Podemos considerar que tal convenção não precisa ser de conhecimento comum (um conceito até certo ponto restritivo) mas apenas de conhecimento mútuo.

A principal propriedade para que um arranjo social seja uma convenção é que tal arranjo seja condicionalmente auto-executável. Isto nos leva a uma definição de convenção como um equilíbrio correlacionado. Os agentes que seguem uma convenção sabem que se algum deles desviar, então nenhum pode melhorar sua condição.

Vimos que em muitos experimentos os agentes não seguem a recomendação e não chegam ao equilíbrio correlacionado. Tal fato decorre da falta de confiança no outro jogador. Mas os agentes só podem adquirir confiança para não desviar da recomendação (convenção) após um longo processo de interação. Claramente o inverso também pode ocorrer, ou seja, após um longo processo de interação um indivíduo percebe as convenções que as pessoas seguem e tenta tirar vantagem de tal situação.

Podemos dizer que a convenção evita que os agentes desviem do equilíbrio correlacionado. Mas para que isso ocorra, precisa haver interação de longo prazo entre os agentes.

Tal processo de interação entre os agentes pode ser melhor compreendido através da elaboração de um modelo do processo, que como vimos é a adaptação heurística, que mostra a maneira mais simples possível de interação entre as pessoas. Através da adaptação heurística os agentes que não estão inicialmente em equilíbrio aprendem sobre a situação e sobre os outros.

Se eles aprendem de maneira indutiva através de jogadas repetidas de tentativa e erro, e em interações de longo prazo, então suas crenças podem convergir de maneira que eles tenham o conhecimento comum, ou no mínimo conhecimento mútuo, que caracteriza uma convenção. Esta convenção, por sua vez, é uma forma bastante natural e sistemática de garantir que os agentes alcancem o equilíbrio correlacionado e obtenham um resultado melhor do que os equilíbrios de Nash possíveis.

As pesquisas futuras sobre a elaboração desse processo que gera uma convenção devem incluir a construção de experimentos que tentem levar em conta os aspectos contextuais da interação entre os agentes, bem como os aspectos culturais envolvidos.

REFERÊNCIAS

Abreu, D., D. Pearce, and E. Stacchetti (1986). Optimal Cartel Equilibria with Imperfect Monitoring. *Journal of Economic Theory* 39, 251-269.

Abreu, D., D. Pearce, and E. Stacchetti (1990). Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring. *Econometrica* 58, 1041-1063.

Aumann, R. J. (1974). Subjectivity and correlation in randomized strategies. Journal of Mathematical Economics, 1(1). 67–96, 1974.

Aumann, R. J. (1976). Agreeing to disagree. *Annals of Statistics* 4(6). 1236–1239.

Aumann R. J. (1987). Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica* 55:1-18

Aumann, R. J. (1996). Reply to Binmore and Samuelson. In: Arrow, K.J., Colombatto, E., Perlman, M., Schmidt, C. (Eds.), *The Rational Foundations of Economic Behavior*. MacMillan, London.

Aumann R. J., Brandenburger A (1995). Epistemic Conditions for Nash Equilibrium. *Econometrica* 63:1161–1180

Aumann, R. J. (1995). Backward Induction and Common Knowledge of Rationality. *Games and Economic Behavior,* 8, 6–19.

Aumann, R. J. (1998). Common Priors: A Reply to Gul. *Econometrica*, Vol. 66, No. 4. (Jul., 1998)., pp. 929-938.

Aumann, R. J. (1999a). Interactive epistemology I: Knowledge. *International Journal of Game Theory* 28:263-300.

Aumann R. J. (1999b). Interactive epistemology II: Probability. *International Journal of Game Theory* 28:301-314.

Aumann, R. J. and S. Hart (2003). Long cheap talk. *Econometrica*, 71, 1619-1660.

Aumann, R. J. (1985). What is game theory trying to accomplish? In: K. Arrow and S. Honkapohja (eds.), *Frontiers of Economics,* Oxford: Blackwell.

Aumann, R. J. (1989). Game theory. In: J. Eatwell, M. Milgate, and P. Newman (eds.), *The New Palgrave: a Dictionary of Economics*, London: Macmillan.

Banks, J., and Sobel, J. (1987). Equilibrium Selection in Signaling Games. *Econometrica* 55, 647-661.

Barany, I. (1992). Fair distribution protocols or how players replace fortune, *Mathematics of Operations Research*, 17, 327-340.

Basu K. (1990). On the existence of a rationality definition for extensive games. *International Journal of Game Theory* 19: 33–44.

Basu, K., and Weibull, J. W. (1991). Strategy Subsets Closed under Rational Behavior. E*conomic Letters*. 36, 141-146.

Battigalli, P.; M. Gilli, and M. C. Molinari (1992). Learning and Convergence to Equilibrium in Repeated Strategic Interactions: An Introductory Survey. *Ricerche Economiche* 46, 335-377.

Bernheim, Douglas (1984). Rationalizable Strategic Behavior. *Econometrica*, Vol. 52, No. 4. (Jul., 1984), pp. 1007-1028.

Bernheim, B.; Peleg, B.; Whinston, M. (1987). Coalition-Proof Nash Equilibria I: Concepts. *Journal of Economic Theory*, 42, 1-12.

Ben-Porath, Elchanan (1997). Rationality, Nash Equilibrium and Backwards Induction in Perfect- Information Games. *The Review of Economic Studies*, Vol. 64, No. 1. pp. 23-46.

Ben-Porath, Elchanan (1998). Correlation without mediation: expanding the set of equilibrium outcomes by cheap pre-play procedures, *Journal of Economic Theory*, 80, 108-122.

Ben-Porath, Elchanan (2003). Cheap talk in games with incomplete information, *Journal of Economic Theory*, 108, 45-71.

Bicchieri, Cristina (1988). Backward Induction without Common Knowledge. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Volume Two: Symposia and Invited Papers, pp. 329-343.

Bicchieri C (1989). Self-refuting theories of strategic interaction: a paradox of common knowledge. *Erkenntnis* 30:69–85.

Binmore, K., Shaked, A. and Sutton, J. (1985). Testing Noncooperative Bargaining Theory: A Preliminary Study. *American Economic Review* 75, 1178-1180.

Binmore, Ken (2007). Do Conventions Need To Be Common Knowledge? Working Paper. Disponível em: http://else.econ.ucl.ac.uk/newweb/papers.php, em 24/05/2008.

Binmore, Ken (1987-1988). Modeling rational players: parts I and II. *Economics and Philosophy*, 3, 179--214 and 4, 9--55.

Blume, L., Brandenburger, A., and Dekel, E. (1991). Lexicographic Probabilities and Equilibrium Refinements. *Econometrica* 59, 81-98.

Bonanno G (1991). The logic of rational play in games of perfect information. *Econ Philos* 7:37-65.

Bonanno, G., Nehring, K., (1999). How to make sense of the common prior assumption under incomplete information. *International Journal of Game Theory* 28, 409–434.

Börgers T, Samuelson L (1992). Cautious utility maximization and iterated weak dominance. *International Journal of Game Theory* 21:13–25.

Brandenburger, Adam; Eddie Dekel (1989). The role of common knowledge assumptions in Game Theory. In: *The Economics of Missing Markets, Information and Games*, ed. By Frank Hahn. Oxford: Oxford University Press.

Brandenburger, Adam (1992). Knowledge and Equilibrium in Games. *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, No. 4, pp. 83-101.

Brandenburger, Adam; Eddie Dekel; John Geanakoplos (1992). Correlated Equilibrium with Generalized Information Structures. *Games and Economic Behavior*, 4, 182-201.

Brandenburger, A., Dekel, E. (1993). Hierarchies of beliefs and common knowledge. *Journal of Economic Theory* 59, 189–198.

Brandenburger, A., Dekel, E., (1987). Rationalizability and correlated equilibria. *Econometrica* 55, 1391–1402.

Brandenburger, Adam (2007). The power of paradox: some recent developments in interactive epistemology. *International Journal of Game Theory* 35:465–492.

Brandts, J., MacLeod, W. B. (1995). Equilibrium selection in experimental games with recommended play. *Games and Economic Behavior* 11, 36–63.

Cahn, Amotz (2004). General procedures leading to correlated equilibria. *International Journal of Game Theory* 33: 21–40.

Camerer, C. and H. Thaler (1995). Anomalies: Ultimatum, dictators and manners. *Journal of Economic Perspectives*, 9,209-19.

Camerer, C. and K. Weigelt (1988). Experimental tests of a sequential equilibrium reputational model. *Econometrica*, 56, 1--36.

Cartwright, Edward; Myrna Wooders (2005). Correlated Equilibrium and Behavioral Conformity. Working Paper No. 05-W26. Department of Economics, Vanderbilt University, Nashville, TN 37235.

Cason, Timothy N.; Tridib Sharma. (2007). Recommended play and correlated equilibria: an experimental study. *Economic Theory* 33: 11–27.

Cavaliere, Albert (2001). Coordination and the provision of discrete public goods by correlated equilibria. *Journal of Public Economic Theory*, 3(3)., 235-255.

Cho, I., and Kreps, D. (1987). Signaling Games and Stable Equilibria. *Quarterly Journal of Economics* 102, 179-221.

Cho, I. (1987). A refinement of the sequential equilibrium concept. *Econometrica*, 55, 1367-89.

Crawford, Vincent (1997). Theory and experiments in the analysis of strategic interaction. In: *Advances in economics and econometrics: Theory and applications*, Seventh World Congress, Volume 1, Econometric Society Monographs, no. 26, David M. Kreps and Kenneth F. Wallis, (eds.). Cambridge, New York and Melbourne: Cambridge University Press, 87-172.

Cressman, R., (2003). *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. MIT Press, Cambridge.

Cripps, M., (1991). Correlated equilibria and evolutionary stability. *Journal of Economic Theory* 55, 428–434.

Dekel, Eddie and Faruk Gul (1997). Rationality and Knowledge in Game Theory. In: *Advances in economics and econometrics: Theory and applications*, Seventh World Congress, Volume 1, Econometric Society Monographs, no. 26, David M. Kreps and Kenneth F. Wallis, (eds.). Cambridge, New York and Melbourne: Cambridge University Press, 87-172.

Dhillon, Amrita; Jean François Mertens (1996). Perfect Correlated Equilibria. *Journal of Economic Theory* 68, 279-302.

Evangelista, F.; and T. Raghavan (1996). A note on Correlated Equilibrium. *International Journal of Game Theory*, 25, 35-41.

Fagin R, Geanakoplos J, Halpern YJ, Vardi MY (1999). The hierarchical approach to modeling knowledge and common knowledge. *International Journal of Game Theory* 28:331-365.

Fagin, Ronald; Joseph Y. Halpern, Yoram Moses and Moshe Y. Vardi (2003). *Reasoning About Knowledge*. The MIT Press. (517 pages).

Feinberg, Y., (2000). Characterizing common priors in the form of posteriors. *Journal of Economic Theory* 91, 127–179.

Forges, Françoise (1990). Correlated Equilibrium in Two-Person Zero-Sum Games. *Econometrica*, Vol. 58, No. 2. (Mar., 1990), p. 515.

Forges F (1988). Communication equilibria in repeated games with incomplete information. *Mathematics of Operation Research* 13:191–231.

Forges, Françoise (1986). An Approach to Communication Equilibria. *Econometrica*, Vol. 54, No. 6. (Nov., 1986), pp. 1375-1385.

Forges, F. (1990). Universal mechanisms. *Econometrica*, 58, 1341–64.

Forges, F. (2006). Correlated equilibrium in games with incomplete information revisited. *Theory and Decision* 61:329–344.

Forsythe, Robert; Kennan, John; Sopher, Barry (1991). An experiment analysis of strikes in bargaining games with one-sided private information. *American Economic Review*, 81: 253-70.

Foster, Dean P.; Rakesh V. Vohra (1997).. Calibrated Learning and Correlated Equilibrium. *Games and Economic Behavior* 21, 40-55.

Foster, Dean P.; Rakesh V. Vohra (1999). Regret in the on-line decision problem. *Games and Economic Behavior*. 29, 7–36.

Fudenberg, D.; D. Levine (1998). *Theory of Learning in Games*. Cambridge, MA: MIT Press.

Fudenberg, D., Levine, D., (1999). Universal conditional consistency. *Games and Economic Behavior*. 29, 104–130.

Fudenberg, D. and J. Tirole (1991a). *Game Theory*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Fudenberg, D. and D. K. Levine (1993a). Self-Confirming Equilibrium, *Econometrica*, 61: 523-546.

Fudenberg, D. and D. K. Levine (1993b). Steady State Learning and Nash Equilibrium, Econometrica, 61 (May): 547-573.

Fudenberg, Drew; Levine, David (1995).. Universal consistency and cautious fictitious play. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19: 1065-89.

Fudenberg, D., and Tirole, J. (1991b). Perfect Bayesian Equilibrium And Sequential Equilibrium. *Journal of Economic Theory* 53, 236-260.

Geanakoplos, John (1992).. Common Knowledge**.** *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, No. 4. (Autumn, 1992), pp. 53-82.

Geanakoplos John, Polemarchakis M (1982). We can't disagree for ever. *Journal of Economic Theory* 26:363-390.

Gomez Canovas S, Hansen P and Jaumard B (1999). Nash Equilibria from the correlated equilibria viewpoint, *International Game Theory Review* 1:33–44.

Gossner, O. (1998). Secure protocols or how communication generates correlation, *Journal of Economic Theory*, 83, 69-89.

Gul, Farak (1998). A Comment on Aumann's Bayesian View. *Econometrica*, Vol. 66, No. 4, pp. 923-927.

Harsanyi, J. C. (1967-1968). Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, *Management Science*, 14, November 1967, 459–62; 15 January 1968, 320–34; March 1968, 486–502.

Harsanyi, John C. and Reinhard Selten (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge MA.

Hart, S., Mas-Colell, A., (2003). Uncoupled dynamics do not lead to Nash equilibrium. *American Economic Review* 93, 1830–1836.

Hart, Sergiu; David Schmeidler (1989). Existence of Correlated Equilibria. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 14, No. 1. (Feb., 1989). pp. 18-25.
Hart, Sergiu (2005). Adaptive Heuristics. *Econometrica*, Vol. 73, No. 5. (Sep., 2005), pp. 1401 1430.

Hart, S.; A. Mas-Colell (2000). A Simple Adaptive Procedure Leading to Correlated Equilibrium. *Econometrica*, 68, 1127-1150.

Hart, S.; A. Mas-Colell (2001). A General Class of Adaptive Strategies. *Journal of Economic Theory*, 98, 26-54.

Heifetz, Aviad (2006).. The positive foundation of the common prior assumption. *Games and Economic Behavior* 56 (2006) 105–120.

Hofbauer, Josef and Karl Sigmund. (1998). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge: Cambridge U. Press.

Jansen, M. J. M. (1981). Regularity and stability of equilibrium points of bimatrix games. *Mathematics of Operations Research* 6:18–25.

Kalai, E.; E. Lehrer (1993). Rational Learning Leads to Nash Equilibrium. *Econometrica*, 61, 1019-1045.

Kalai, E. and Samet, D. (1984). Persistent Equilibria, *International Journal of Game Theory* 13, 129-144.

Kalai, Ehud; Lehrer, Ehud (1995). Subjective games and equilibria. *Games and Economic Behavior*, 8: 123-63.

Keiding, H.; B. Peleg (2000). Correlated Equilibria of Games with Many Players. *International Journal of Game Theory*, 29, 375-389.

Kohlberg, E. (1990). Refinement of Nash Equilibrium: The Main Ideas. In: *Game Theory and Applications*, edited by T. Ichiishi, A. Neyman, and Y. Tauman. San Diego: Academic Press.

Kohlberg, E., and Mertens, J-F. (1986). On the Strategic Stability of Equilibria. *Econometrica* 54, 1003-1038.

Kreps, D. (1990). *Game Theory and Economic Modeling*. New York: Oxford University Press.

Kreps, D., and Wilson, R. (1982). Sequential Equilibria. *Econometrica* 50, 863-894.

Kreps, David M.; Garey Ramey (1987). Structural Consistency, Consistency, and Sequential Rationality. *Econometrica*, Vol. 55, No. 6. (Nov., 1987), pp. 1331-1348.

Lehrer, E., (1997). Approachability in infinite dimensional spaces. *International Journal of Game Theory* 31, 255–270.

Lehrer, E. (2003). A wide range no-regret theorem. *Games and Economic Behavior*. 42, 101-115.

Lehrer, E. (1996). Mediated talk, *International Journal of Game Theory*, 25, 177-188.
Lehrer, E. and S. Sorin (1997). One-shot public mediated talk, *Games and Economic Behavior*, 20, 131-148.

Lenzo, Justin; Todd Sarver (2006). Correlated equilibrium in evolutionary models with Subpopulations. *Games and Economic Behavior* 56 271–284

Lipman, Barton (2003). Finite order implications of common priors. *Econometrica* 71, 1255-68.

Lipman Barton (1991). How to decide how to decide how to . . . *Econometrica* 59:1105-1126.

Lipman, Barton (1994). A note on the implications of common knowledge of rationality. *Games and Economic Behavior* 6, 114-129.

Mailath, George J.; Larry Samuelson, and Avner Shaked (1997). Correlated equilibria and local interactions. *Economic Theory* 9, 551-556;

Mehta, J., C. Starmer and R. Sugden (1994). Focal Points in Pure Co-ordination Games: An experimental investigation. *Theory and Decision*, 36, 163-85.

McKelvey, R. and T. Palfrey (1992). An experimental study of the centipede game. *Econometrica*, 60, 803--36.

Mckelvey, R., And T. Page (1986). Common Knowledge, Consensus, and Aggregate Information. *Econometrica*, 54, 109-127.

Mertens, J-F., and Zamir, S. (1985). Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information. *International Journal of Game Theory* 14, 1-29.

Milgron, P.; Roberts, J. (1996). Coalition-Proofness and Correlation with Arbitrary Communication Possibilities. *Games and Economic Behavior*, 17, 113-128.

Milgrom, Paul (1981).. An Axiomatic Characterization of Common Knowledge *Econometrica*, Vol. 49, No. 1. (Jan., 1981), pp. 219-222.

Moreno, D., Wooders, J. (1998). An experimental study of communication and coordination in noncooperative games. *Games and Economic Behavior* 24, 47–76.

Moreno, D.; Wooders, J. (1996). Coalition-Proof Equilibrium. *Games and Economic Behavior*, 17, 80-112.

Morris, S. (1995). The Common Prior Assumption in Economic Theory. *Economics and Philosophy*, 11(2), 227–53.

Myerson, R. (1986). Multistage Games with Communication. *Econometrica*, 54,323-358.

Myerson, R. (1997). Dual Reduction and Elementary Games. *Games and Economic Behavior*, 21, 183-202.

Myerson, R. (1978). Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, 7, 73-80.

Nau, Robert; Sabrina Gomez Canovas and Pierre Hansen (2003). On the geometry of Nash equilibria and correlated Equilibria. *International Journal of Game Theory*, 32: 443–453

Osborne, M. and A. Rubinstein (1994). *A Course in Game Theory*, Cambridge: MIT Press.

Pearce, D. (1984). Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection, *Econometrica*, 52, 1029–50.

Polak, Ben (1999). Epistemic Conditions for Nash Equilibrium, and Common Knowledge of Rationality. *Econometrica*, Vol. 67, No. 3. (May, 1999), pp. 673-676.

Ray, Indrajit (1996a). Efficiency in correlated equilibrium. *Mathematical Social Sciences* 32 157-178.

Ray, Indrajit (1996b). Coalition-Proof Correlated Equilibrium: A Definition. *Games and Economic Behavior* 17, 56-79.

Ray, I. (1998). Correlated Equilibrium as a Stable Standard of Behavior, *Review of Economic Design*, 3, 257-269.

Reny, Philip J. (1992a). Backwards Induction, Normal Form Perfection and Explicable Equilibria, *Econometrica* 60, 627-649.

Roth, A. E.; V. Prasnikar; M. Okuno-Fujiwara; S. Zamir (1991). Bargaining Market Behavior in Jerusalem, Ljubljana, Pittsburgh, and Tokyo: An Experimental Study, *American Economic Review*, 81, 1068-1095.

Roth, Alvin (1995). Bargaining experiments. In: Kagel, John; Roth, Alvin (eds.).. *Handbook of experimental economics*. Princeton: Princeton University Press.

Rubinstein, A. (1989). The Electronic Mail Game: Strategic Behavior Under ‘Almost Common Knowledge,’ *American Economic Review*, 79, 385–91.

Rubinstein, A. (1991). Comments on the Interpretation of Game Theory, *Econometrica*, 59, 909-924.

Rubinstein, A. and A. Wolinsky (1994). Rationalizable Conjectural Equilibrium: Between Nash and Rationalizability, *Games and Economic Behavior*, 6: 299-311.

Samet, D. (1990). Ignoring ignorance and agreeing to disagree. *Journal of Economic Theory* 52:190-207.

Samet, D. (1998a). Common priors and separation of convex sets. *Games and Economic Behavior* 24:172-174.

Samet, D. (1998b). Iterated expectations and common priors. *Games and Economic Behavior* 24:131-141.

Samuelson, L. (1992). Dominated strategies and common knowledge. *Games and Economic Behavior* 4:284–313.

Samuelson, Larry (2004). Modeling Knowledge in Economic Analysis**.** *Journal of Economic Literature,* Vol. 42, No. 2. (Jun., 2004), pp. 367-403.

Sanfey, Alan G.; James K. Rilling, Jessica A. Aronson, Leigh E. Nystrom, Jonathan D. Cohen (2003). The Neural Basis of Economic Decision-Making in the Ultimatum Game. *SCIENCE* VOL 300 13 JUNE 2003.

Schelling, T. C. (1960). *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press.

Seesly, B., Van Huyck, J., Battalio, R. (2005). Credible assignments can improve efficiency in laboratory public goods games. *Journal of Public Economics* 89, 1437–1455

Selten, R. (1975). Re-examination of the perfectness concept for equilibrium in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4, 22-55.

Selten, R. (1965). Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit. Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft 121, 301-324, 667-689.

Shubik, Martin (1982). *Game Theory in the Social Sciences*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Simon, Robert Samuel (1999). The difference between common knowledge of formulas and sets. *International Journal of Game Theory* 28:367-384

Skyrms, Brian (1990). *The Dynamics of Rational Deliberation*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Skyrms, Brian (1996). *Evolution of the Social Contract*. Cambridge University Press,

Solan, Eilon; R. V. Vohra (2001). Correlated Equilibrium in Quitting Games. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 26, No. 3, pp. 601-610.

Solan, Eilon (2001). Characterization of correlated equilibria in stochastic games. *International Journal of Game Theory* 30:259–277.

Stoltz, Gilles; Gábor Lugosi (2007). Learning correlated equilibria in games with compact sets of strategies. *Games and Economic Behavior* 59 (2007). 187–208.

Tan, T.; S. R. C. Werlang (1992). On Aumann’s notion of common knowledge: An alternative approach. *Revista Brasileira de Economia*, 46, 151-166.

Urbano, A. and J. E. Vila (2002). Computational complexity and communication: coordination in two-player games. *Econometrica*, 70, 1893-1927.

van Damme, E. (1984). A Relation Between Perfect Equilibria in Extensive Form Games and Proper Equilibria in Normal Form Games. *International Journal of Game Theory* 13, 1-13.

van Damme, E. (1989). Stable Equilibria and Forward Induction. *Journal of Economic Theory* 48, 476-496.

van Damme, Eric (Interviewer). (1998). On the State of the Art in Game Theory: An Interview with Robert Aumann. *Games and Economic Behavior* 24, 181-210.

van Huyck, J., Gillette, A., Battalio, R. (1992). Credible assignments in coordination games. *Games and Economic Behavior* 4, 606–626.

van Huyck, J., R. Battalio and F. Rankin (1997). On the origin of convention: evidence from coordination games, *Economic Journal*, 107, 576-96.

Vanderschraaf, Peter (1998). Knowledge, Equilibrium and Convention. *Erkenntnis* 49: 337–369.

Vanderschraaf, Peter (1995). Convention as Correlated Equilibrium. *Erkenntnis* 42, 65–87.

Viossat, Yannick (2007). The replicator dynamics does not lead to correlated equilibria. *Games and Economic Behavior* 59 397–407.

von Stengel, Bernhard (2001). Computational complexity of correlated equilibria for extensive games. CDAM Research Report LSE-CDAM-2001-03

von Stengel B. (1996). Efficient computation of behavior strategies. *Games and Economic Behavior* 14, 220–246.

Warneryd, K. (1994). Transaction cost, institutions, and evolution. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 25, 219-239.

Weibull, J. (1995). *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.

Young, P. (1993). The Evolution of Conventions, *Econometrica*, 61: 57-83.

Young, P. (1998). Social norms and economic welfare. *European Economic Review* 42, 821-830.