

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO NUMÉRICO DE PLACAS FINAS DE AÇO COM PERFURAÇÃO,
SUBMETIDAS À FLAMBAGEM ELÁSTICA E ELASTO-PLÁSTICA, APLICANDO-SE
O MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

por

Daniel Helbig

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, dezembro de 2016

ESTUDO NUMÉRICO DE PLACAS FINAS DE AÇO COM PERFURAÇÃO,
SUBMETIDAS À FLAMBAGEM ELÁSTICA E ELASTO-PLÁSTICA, APLICANDO-SE
O MÉTODO DESIGN CONSTRUTAL

por

Daniel Helbig
Mestre em Engenharia de Estruturas

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários a obtenção para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Co-orientador: Prof. Dr. Liércio André Isoldi

Aprovado por:

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real, Escola de Engenharia/FURG

Profa. Dra. Flávia Schwarz Franceschini Zinani, PPGEM/UNISINOS

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz, PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 19 de dezembro de 2016

AGRADECIMENTOS

À FURG por conceder o afastamento para a realização do doutorado, sem o qual não seria possível dedicação integral ao desenvolvimento do trabalho.

À UFRGS por oferecer o curso de doutorado.

Aos professores do PROMEC pela dedicação e competência.

Ao Conselho de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ, pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Luiz pela orientação, paciência e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Liércio pela co-orientação, paciência e incentivo ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

À Banca Examinadora pela disposição e contribuição para o desenvolvimento do trabalho.

“A distinção entre passado, presente e futuro é apenas uma ilusão teimosamente persistente.”

Albert Einstein

RESUMO

Elementos estruturais como as placas finas fazem parte de um grande número de aplicações nas mais diversas áreas da engenharia e são de grande importância para a engenharia naval e aeronáutica, na construção de cascos de embarcações e estruturas offshore, e na construção de fuselagens de aviões. Por constituírem-se em um elemento estrutural esbelto, estão sujeitas a um comportamento mecânico diferenciado denominado de flambagem, proveniente de um carregamento de compressão uniaxial. O fenômeno da flambagem pode ser dividido em flambagem elástica e elasto-plástica, sendo dependente de aspectos dimensionais, construtivos e/ou operacionais. A inclusão de perfurações em placas provoca uma redistribuição de suas tensões internas, afetando não apenas a sua resistência, mas também as suas características de flambagem. Neste trabalho, desenvolveu-se a análise do comportamento mecânico de placas finas perfuradas de aço, simplesmente apoiadas em suas bordas, e submetidas à compressão. Serão analisados dois graus de liberdade: H/L e H_0/L_0 . Para H/L , serão analisadas placas com $H/L = 1,00$ e $H/L = 0,50$, sendo que H e L representam, respectivamente, a largura e o comprimento da placa. Para H_0/L_0 , serão analisadas infinitas possibilidades, sendo que H_0 e L_0 representam, respectivamente, a largura e o comprimento da perfuração. As placas utilizadas possuem espessura (h) de 10,00 mm e perfuração centralizada. Quanto às perfurações, estas serão dos tipos: oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. Ainda em relação às perfurações, serão consideradas as seguintes frações $\phi = 0,08; 0,10; 0,15; 0,20$ e $0,25$, sendo que (ϕ) corresponde ao volume da perfuração. Para a determinação das cargas crítica e última de flambagem, foi utilizada a simulação numérica com o auxílio do software Ansys®, que é baseado no método dos elementos finitos. A aplicação do método Design Construtal, possibilitou a determinação das geometrias ótimas para todos os tipos de perfurações, todos os valores de (ϕ) e para todas as relações de H/L . Os resultados obtidos mostram que há influência do tipo, da forma e do tamanho da perfuração na definição das curvas limites à flambagem e das curvas à flambagem elasto-plástica. Foi possível definir, para cada tipo de perfuração e para todos os valores de (ϕ), os pontos de transição entre a flambagem elástica e à elasto-plástica, assim como os pontos que definem os valores máximos para o fator $TLLN_{Máx}$ (tensão limite normalizadora).

Palavras-chave: Flambagem de Placas; Flambagem Elástica; Flambagem Elasto-Plástica; Placas com Perfuração; Simulação Numérica.

ABSTRACT

Structural elements such as thin plates are part of a large number of applications in various areas of engineering and are of great importance for marine and aerospace engineering, construction and offshore structures hulls, and the construction of airplane fuselages. Being a slender structural element, they are subject to a different mechanical behavior known as buckling, caused by a compressive loading. The phenomenon of buckling can be divided in elastic and elasto-plastic buckling, being dependent dimensional, construction and / or operational aspects. The inclusion of perforations in plates causes a redistribution of its internal stress, affecting not only their resistance but also their buckling characteristics. In this work it was performed the analysis of the mechanical behavior of thin perforated steel plates, simply supported on its edges, and subjected to compression. In the analysis it was considered two degrees of freedom: H/L and H_0/L_0 . For H/L will be analyzed plates with $H/L = 1.00$ and $H/L = 0.50$, wherein H and L represent respectively the width and length of the plate. There are endless possibilities for the relation H_0/L_0 . The studied plates have a thickness (h) of 10.00 mm and centralized perforation. The following types of perforation will be used: longitudinal oblong, transverse oblong, elliptical, rectangular, diamond, longitudinal hexagonal and transverse hexagonal. Also in relation to perforations, it will be considered the following fractions ($\phi = 0.08; 0.10; 0.15; 0.20$ and 0.25), wherein (ϕ) corresponds to the volume ratio of the perforation. For determining the critical and ultimate buckling loads it was utilized numerical simulation with the assistance of Ansys® software, which is based on the finite element method. The application of the Constructal Design method of this study made it possible to determine the optimal geometries for all types of perforations, for all values of (ϕ) and all the relations H/L . The results show that there is an influence of the perforation type, shape and size, in defining the limit curves of the buckling and the curves of the elasto-plastic buckling. It was also possible to define, for each type of perforation and for all (ϕ) values, the transition points between elastic and elasto-plastic buckling; as well as the points that define the maximum values for the TLN_{Max} factor (normalized limit stress).

Keywords: Plate Buckling; Linear Elastic Buckling; Elasto-Plastic Buckling; Perforated Plate; Numerical Simulation.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Estado da Arte	6
1.2	Objetivos Geral e Específicos	9
1.2.1	Objetivos específicos	9
1.3	Organização do Trabalho	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
2.1	Estudo de Placas	12
2.2	Estudo da Flambagem Elástica e Elasto-Plástica	13
2.3	Aplicação do Método dos Elementos Finitos no Estudo de Placas.....	14
2.4	Método Design Construtal Aplicado ao Estudo de Placas e Colunas	16
2.5	Estudo de Aplicações Gerais do Método Design Construtal	17
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	19
3.1	Teoria de Placas	19
3.1.1	Teoria Clássica de Placas Finas	19
3.1.2	Sistema de coordenadas e convenção de sinais.....	20
3.1.3	Equilíbrio de um elemento de placa	21
3.1.4	Equações de compatibilidade.....	24
3.1.5	Equações constitutivas.....	26
3.1.6	Relações esforço resultante-deslocamento	28
3.1.7	Condições de contorno	30
3.1.8	Solução da Equação Diferencial	35
3.2	Teoria de Flambagem de Placas.....	36
3.2.1	Estabilidade de equilíbrio	37
3.2.2	Estabilidade e instabilidade estrutural	39
3.2.3	Flambagem de Placas	40
3.2.4	Determinação da Carga Crítica de Placas: o Método do Equilíbrio.....	44
3.2.5	Cálculo da Carga e da Tensão Crítica em uma Placa Retangular, Simplesmente Apoiada e submetida a carregamento de Compressão Uniaxial	49
3.2.6	Flambagem em placas com perfurações	56
3.2.7	Comportamento pós-flambagem de placas finas	57

3.2.8	Características da Flambagem Elástica e Elasto-plástica	65
3.2.9	Análise do problema de Flambagem Linear	65
3.2.10	Análise do problema de Flambagem Não Linear.....	66
3.2.11	Efeito das Imperfeições Geométricas Iniciais.....	66
3.3	Simulação Numérica.....	68
3.3.1	Método dos Elementos Finitos.....	69
3.3.2	Fundamentos do MEF	69
3.3.3	Convergência do MEF	77
3.4	Teoria Construtal.....	78
3.4.1	Relação entre o <i>design</i> e a evolução em seres animados e inanimados	82
3.4.2	Relação entre a Teoria Construtal e o <i>design</i> final.....	84
3.4.3	Aplicações Gerais da Teoria Construtal	85
3.4.4	Aplicações da Teoria Construtal na Engenharia	86
4	METODOLOGIA.....	93
4.1	Métodos Analíticos na Análise de Placas	93
4.2	Flambagem elástica e elasto-plástica no Ansys®	94
4.3	Modelos Computacionais	95
4.3.1	Flambagem elástica	96
4.3.2	Flambagem Elasto-Plástica.....	98
4.3.3	Critério de convergência no Ansys®.....	99
4.3.4	Verificação dos modelos.....	100
4.3.5	Validação dos modelos	102
4.4	Aplicação do método Design Construtal	103
5	RESULTADOS.....	109
5.1	Normalização das Tensões.....	110
5.2	Flambagem Elástica e Elasto-Plástica	111
5.3	Flambagem Elasto-Plástica.....	126
5.4	Análise comparativa entre as curvas limites à flambagem e as curvas à flambagem elasto-plástica	139
6.	CONCLUSÕES	146
6.1	Proposta de Continuidade	148
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	150
	APÊNDICE A - Teste de convergência para o elemento <i>Shell</i>.....	158

APÊNDICE B – Trabalhos publicados	162
--	------------

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Aplicação de placas finas de aço na fuselagem de aeronaves, [Adaptada de: http://aviacao-world.blogspot.com.br/2009/04/a380.html].	1
Figura 1.2	Utilização de placas finas de aço na construção de cascos de navios, [Adaptada de: http://viagem.uol.com.br/cruzeiros/noticias/redacao/2013/12/30/msc-vai-reformar-linha-de-navios-lirica.htm].	2
Figura 1.3	Deformação gerada pela ação de esforços transversais, [Okumoto et al., 2009].	3
Figura 1.4	Colapso global de um navio na condição de alquebramento, [Chujutalli, 2010].	4
Figura 3.1	Modelo de placa utilizado para o estudo da equação diferencial linear de placas finas: (a) Características geométricas, sistema de coordenadas e carregamento de superfície; (b) Componentes de tensões do elemento infinitesimal, [Szilard, 2004].	20
Figura 3.2	Esforços resultantes atuantes em um elemento de placa, [Szilard, 2004].	22
Figura 3.3	Equilíbrio de um elemento de superfície média da placa, [Szilard, 2004].	23
Figura 3.4	Forma fletida da placa na direção do eixo x , [Szilard, 2004].	25
Figura 3.5	Tensões em um elemento de placa, [Szilard, 2004].	27
Figura 3.6	Condições de contorno para placas, [Szilard, 2004].	31
Figura 3.7	Placa engastada nas quatro bordas, [Adaptada de: Soares, 2004].	32
Figura 3.8	Placa simplesmente apoiada nos quatro bordos, [Adaptada de: Soares, 2004].	32
Figura 3.9	Efeito de bordo do momento torçor na placa, [Szilard, 2004].	33
Figura 3.10	Forças levantando os cantos da placa, [Szilard, 2004].	34
Figura 3.11	Placa fina submetida a um carregamento de compressão uniaxial, [Adaptada de: Åkesson, 2007].	37
Figura 3.12	Estabilidade de equilíbrio de uma esfera, [Adaptada de: Yoo e Lee, 2011].	38
Figura 3.13	Bifurcação do modo de deformação da placa, [Szilard, 2004].	39
Figura 3.14	Elemento de placa submetido a um sistema de forças coplanares, [Szilard, 2004].	41
Figura 3.15	Forças de membrana em um elemento de placa deformado, [Szilard, 2004].	43
Figura 3.16	Placa submetida a forças distribuídas em seus bordos, [Szilard, 2004].	45
Figura 3.17	Flambagem para uma faixa unitária de placa, [Szilard, 2004].	47

Figura 3.18	Flambagem em placa simplesmente apoiada sob compressão, [Szilard, 2004].....	50
Figura 3.19	Placa carregada em sua configuração de flambagem.....	52
Figura 3.20	Coeficientes de flambagem para placas retangulares simplesmente apoiadas.	52
Figura 3.21	Primeiro modo de flambagem de uma placa simplesmente apoiada, formado por: (a) uma semionda, e (b) duas semiondas.	53
Figura 3.22	Coeficientes de flambagem para diferentes condições de contorno, em placas com apoios nas quatro bordas, [Åkesson, 2007].	54
Figura 3.23	Coeficientes de flambagem para diferentes condições de contorno, em placas com apoios em três bordas, [Åkesson, 2007].	55
Figura 3.24	Coeficiente de flambagem para diferentes condições de carregamento, em placas com apoios nas quatro bordas, [Åkesson, 2007].	55
Figura 3.25	Placa submetida a cisalhamento, [Åkesson, 2007]	56
Figura 3.26	Comportamento de pós-flambagem em placas elásticas esbeltas, [Adaptada de: Trahair e Bradford, 1988].....	57
Figura 3.27	Diagrama carga/deslocamento na extensão pós-crítica, [Åkesson, 2007].	58
Figura 3.28	Redistribuição das tensões no estado crítico de pós-flambagem, [Åkesson, 2007].....	59
Figura 3.29	Distribuição não linear das tensões e larguras efetivas de uma placa.....	60
Figura 3.30	Determinação experimental da largura efetiva, [Yu, 2000]	62
Figura 3.31	Resultados de ensaios de Sechler e Winter, para elementos comprimidos enrijecidos, [Adaptada de: Yu, 2000].	64
Figura 3.32	Tipos de distorção, [Amante, 2006].....	68
Figura 3.33	Discretização de elementos finitos triangulares em uma placa, [Szilard, 2004].....	71
Figura 3.34	Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos. Elementos finitos: unidimensional, bidimensionais e tridimensionais, adaptada de: [Adaptada de: Madenci e Guven, 2006].	72
Figura 3.35	Discretização do domínio: elemento e numeração dos nós, [Adaptada de: Madenci e Guven, 2006].	72
Figura 3.36	Exemplo de sistemas de fluxo naturais: (a) formação de raios, (b) rios e afluentes, (c) leito seco de rio, e (d) ramificações de uma árvore, [Adaptado de: https://oloboeocordeiro.files.wordpress.com/2011/04/amora-11.jpg?w=300&h=197;	78

Figura 3.37	Tráfego nas cidades “Cidade de Boa Vista – Capital de Roraima”, [Adaptada de: http://cidadesemfotos.blogspot.com.br/2012/02/boa-vista-rr.html].	79
Figura 3.38	Exemplo da cópia de estruturas naturais pela engenharia, e a proposta de dedução de tais formas por um princípio, [Adaptada de: Bejan, 2006].	80
Figura 3.39	Os maiores são mais eficientes, mais rápidos, vivem mais e viajam mais longe: veículos, animais, rios e ventos, [Bejan e Lorente, 2013].	83
Figura 3.40	Feixe de luz atravessando dois meios distintos.	87
Figura 3.41	(a) Fluxo de fluido através de um duto com estrangulamento; (b) fluxo de tensão análogo através de uma barra de seção transversal não uniforme, [Lorente et al., 2010].	88
Figura 3.42	Estrutura sólida bifurcada com igual resistência à flambagem sob compressão em todos os elementos, [Lorente et al., 2010].	89
Figura 3.43	Placa fina com espessura não uniforme e com camada adesiva, [Lorente et al., 2010].	90
Figura 3.44	Modelo com tensão longitudinal constante na folha, e tensão de cisalhamento constante na camada adesiva, [Lorente et al., 2010].	90
Figura 3.45	Modelo com duas folhas e duas camadas adesivas, ambas com tensão uniforme, [Lorente et al., 2010].	91
Figura 4.1	Curvas de flambagem: (a) elasto-plástica; (b) elástica, [Ansys® User’s Manual, 2005].	95
Figura 4.2	Placa fina de aço submetida a um carregamento de compressão uniaxial.	100
Figura 4.3	Modelo de referência para a adimensionalização dos parâmetros da placa e das perfurações.	103
Figura 4.4	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração oblonga longitudinal.	105
Figura 4.5	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração oblonga transversal.	106
Figura 4.6	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração elíptica.	106
Figura 4.7	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração retangular.	106
Figura 4.8	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração losangular.	107
Figura 4.9	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração hexagonal longitudinal.	107
Figura 4.10	Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração hexagonal transversal.	107
Figura 5.1	Curvas à flambagem elástica e à elasto-plástica em placas com perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.	111

Figura 5.2	Curva limite à flambagem em placas com perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	112
Figura 5.3	Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,08$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	113
Figura 5.4	Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,10$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	113
Figura 5.5	Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,15$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	113
Figura 5.6	Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,20$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	114
Figura 5.7	Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,25$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	114
Figura 5.8	Geometria ótima para cada tipo de perfuração e geometria ótima para o conjunto das perfurações, para cada fração (ϕ) do volume da perfuração.	118
Figura 5.9	Desempenho mecânico das placas à flambagem, para cada tipo de perfuração, cada fração (ϕ) do volume da perfuração e para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	121
Figura 5.10	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	122
Figura 5.11	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	123
Figura 5.12	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	123
Figura 5.13	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	123
Figura 5.14	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	124

Figura 5.15	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	124
Figura 5.16	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	124
Figura 5.17	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	125
Figura 5.18	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	125
Figura 5.19	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.	125
Figura 5.20	Curva à flambagem elasto-plástica em placas com perfuração elíptica e $\phi = 0,20$, para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	126
Figura 5.21	Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,08$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	126
Figura 5.22	Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,10$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	127
Figura 5.23	Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,15$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	127
Figura 5.24	Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,20$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	127
Figura 5.25	Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,25$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	128
Figura 5.26	Desempenho mecânico das placas à flambagem elasto-plástica, para cada tipo de perfuração, cada fração (ϕ) do volume da perfuração, e para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	134
Figura 5.27	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	135

Figura 5.28	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	136
Figura 5.29	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	136
Figura 5.30	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações, e (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	136
Figura 5.31	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	137
Figura 5.32	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), melhores; (b, d, f, h, j, l, n), piores.....	137
Figura 5.33	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), melhores; (b, d, f, h, j, l, n), piores.....	137
Figura 5.34	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	138
Figura 5.35	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.	138
Figura 5.36	Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.....	138
Figura 5.37	Distribuição das imperfeições em placas perfuradas de aço submetidas à flambagem elasto-plástica, observando-se o comportamento das tensões de von Mises para uma placa com $H/L = 1,0$ e para $\phi = 0,20$	139
Figura 5.38	$TLN_{Máx}$ para os casos A e B em placas com: (a) $H/L = 1,0$; e (b) $H/L = 0,5$..	140
Figura 5.39	$TLN_{Máx}$ para as geometrias otimizadas, para os casos A e B, em placas: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$	143

Figura 5.40	$(H_0/L_0)_{oo}$ para os casos A e B em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.	144
Figura 5.41	Geometrias otimizadas para as placas com $H/L = 1,0$, sendo: (a, c, e, g, i) caso A; (b, d, f, h, j) caso B.....	144
Figura 5.42	Geometrias otimizadas para as placas com $H/L = 0,5$, sendo: (a, c, e, g, i) caso A; (b, d, f, h, j) caso B.....	145
Figura A.1	Elemento <i>Shell181</i> , [Ansys®,2005].....	158
Figura A.2	Elemento <i>Shell93</i> , [Ansys®, 2005].	159
Figura A.3	Testes de convergência para os elementos <i>Shell181</i> e <i>Shell93</i>	161

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Descrição da numeração do elemento em função dos nós.	73
Tabela 4.1	Valor da carga crítica para os diversos tamanhos da malha quadricular.	101
Tabela 4.2	Valor da carga última para os diversos tamanhos da malha quadriculada.	102
Tabela 5.1	Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 1,0$, para cada tipo de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.	116
Tabela 5.2	Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 0,5$, para cada tipo de perfuração e para todos os valores de (ϕ).....	117
Tabela 5.3	Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfurações e todos os valores de (ϕ).	119
Tabela 5.4	Comparação percentual para o desempenho mecânico à flambagem em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfurações e todos os valores de (ϕ).	120
Tabela 5.5	Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.	129
Tabela 5.6	Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.	130
Tabela 5.7	Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem elasto-plástica em placas $H/L = 1,0$, todos os tipos de perfuração e para todas as frações de (ϕ)....	132
Tabela 5.8	Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem elasto-plástica em placas $H/L = 0,5$, todos os tipos de perfuração e para todas as frações de (ϕ)....	133
Tabela 5.9	Melhores geometrias para os casos A e B, para placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para cada tipo de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.....	141
Tabela 5.10	Geometrias otimizadas para os casos A e B, para placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações e para todos os tipos de perfurações.....	142
Tabela A.1	Características da placa modelo para os testes de convergência do elemento.....	159
Tabela A.2	Casos analisados para a convergência.....	160
Tabela A.3	Teste de convergência do tipo de elemento.....	160

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AISI	American Iron and Steel Institute
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
MEF	Método dos Elementos Finitos
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
TLN	Tensão Limite Normalizada
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UNISINOS	Universidade do Vale do Rio dos Sinos

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

A	Área da seção transversal em colunas, m^2
A_m	Constante de integração
a	Comprimento, mm
B_m	Constante de integração
b	Largura, mm
b_e	Largura efetiva
C_m	Constante de integração
D	Módulo de rigidez à flexão da placa
d	Diâmetro, mm
D_i	Diâmetro de tubulações
D_m	Constante de integração
det	Determinante
E	Módulo de Young, Pa
E_t	Módulo de elasticidade tangente do aço, Pa
H	Largura da placa, mm
h	Espessura da placa, mm
H_0	Largura da perfuração, mm
$(H_0/L_0)_o$	Geometria ótima
$(H_0/L_0)_p$	Pior geometria
$(H_0/L_0)_{oo}$	Geometria otimizada
I	Momento de inércia da área da seção transversal, m^4
$[I]$	Matriz identidade
k	Coefficiente de flambagem da placa
k_x, k_y, k_{xy}	Curvaturas e empenamento da placa
$[K]$	Matriz de rigidez global de uma placa
$[K_E]$	Matriz de rigidez de pequenas deformações do elemento
$[K_G]$	Matriz de rigidez geométrica
$[K_t]$	Matriz de rigidez tangente atualizada
L	Comprimento da placa, mm

L_0	Comprimento da perfuração, mm
M_x, M_y	Momentos fletores
M_{xy}, M_{yx}	Momentos torçores
m	Número de meias ondas na direção longitudinal da placa
m_x, m_y	Momentos fletores por unidade de comprimento
m_{xy}, m_{yx}	Momentos torçores por unidade de comprimento
n_x, n_y	Esforços normais por unidade de comprimento
n_{xy}, n_{yx}	Esforços tangenciais por unidade de comprimento
$\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_{xy}$	Forças coplanares aplicadas na borda da placa
Q_x, Q_y	Esforços cortantes na direção dos eixos x, y, z
q_x, q_y	Esforços cortantes por unidade de comprimento
P_{cr}	Carga crítica de flambagem, N/m
p_0	Carregamento uniforme distribuído
$\{P_0\}$	Passo de carga
p_z	Carga distribuída sobre a placa
P_u	Carga pós-crítica ou última, N/m
r	Raio de giração
R_0	Força resultante
t	espessura, mm
$TLN_{Máx}$	Tensão limite normalizadora máxima
TLN_{Min}	Tensão limite normalizadora mínima
u	Deslocamento na direção do eixo x
v	Deslocamento na direção do eixo y
w	Deslocamento na direção do eixo z
$\{U\}$	Vetor de deslocamento total
$\{R\}$	Vetor residual
R_{ref} e U_{ref}	Valores de referência para a convergência
v_x, v_y	Esforços cortantes
W_{ext}	Trabalho externo realizado pelas forças nodais
W_{int}	Trabalho interno total realizado pelas forças internas
$w_H(x, y)$	Solução homogênea da equação diferencial
$w_P(x, y)$	Solução particular da equação diferencial
z	Braço de alavanca

Letras Gregas

α, β	Constantes
∇^2	Operador Laplaciano
$\{\Delta U\}$	Vetor de deslocamentos incrementais
$\{\Delta U_i\}$	Vetor de incremento dos deslocamentos
γ_{xy}	Deformação de cisalhamento
γ_{xz}, γ_{yz}	Deformações
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Esforços normais na direção dos eixos principais
θ_x, θ_y	Rotações sobre os eixos x e y
λ	Fator de carga
λ_{cr}	Fator de carga crítica
λ_i	Autovalores
π	Constante matemática
ν	Coefficiente de Poisson
σ_{max}	Tensão máxima
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Tensões normais e de cisalhamento no plano
σ_{cr}	Tensão crítica de flambagem, Pa
σ_{esc}	Tensão de escoamento proveniente da carga de escoamento, Pa
σ_u	Tensão última ou de ruptura, Pa
σ_y	Tensão de escoamento do material, Pa
$\sum_{m=1}^{\infty}$	Somatório, e neste caso a variável m representa o contador
$\sqrt{\tau}$	Fator de redução na flambagem elasto-plástica
φ	Autovetor
ϕ_x, ϕ_y	Deformações médias por distorção da seção transversal
ϕ	Fração do volume da perfuração
$\Phi(x, y)$	Funções de tensão de Airy
$\{\psi\}$	Vetor de carga fora do equilíbrio

1 INTRODUÇÃO

A crescente utilização do aço em estruturas, ou em parte destas, está diretamente relacionada com as vantagens que este tipo de elemento possui quando comparado com outras formas de construção, dentre as quais se destacam, segundo Bellei, 2008:

- Alta resistência do material aos diversos estados de tensão (tração, compressão, etc.), o que possibilita aos elementos estruturais o suporte a grandes esforços, apesar de possuírem em suas seções áreas relativamente pequenas, o que as torna mais leves.

- Os elementos de aço oferecem uma grande margem de segurança no trabalho, visto que o material é único e homogêneo, tendo seu limite de escoamento, de ruptura e o módulo de elasticidade bem definidos.

- A confecção dos elementos normalmente é feita em oficinas, de preferência seriados, e sua montagem é bem mecanizada, o que permite a diminuição no prazo final da construção.

- A facilidade no desmonte e na substituição dos elementos de aço, o que possibilita o reforço ou a substituição de diversos elementos da estrutura.

- A possibilidade de reaproveitamento do material não utilizado.

Quanto às placas finas de aço, objeto principal deste trabalho, são elementos estruturais muito utilizados na indústria naval, aérea, automobilística e também na construção civil. Nesta, normalmente são utilizadas como componentes estruturais na construção de pontes e de edificações. Na indústria aeronáutica, destaca-se a sua utilização na composição da fuselagem de aeronaves, conforme a Figura 1.1.



Figura 1.1 - Aplicação de placas finas de aço na fuselagem de aeronaves, [Adaptada de: <http://aviacao-world.blogspot.com.br/2009/04/a380.html>].

No que se refere à indústria naval e oceânica, há grande aporte financeiro de setores diretamente ligados ao governo federal para o desenvolvimento no país de estruturas direcionadas a esta área. Plataformas de petróleo, pórticos de estaleiros, comportas, docas flutuantes e embarcações de pequeno porte fazem uso de placas finas de aço em sua composição estrutural. Devido ao grande número de aplicações, torna-se de importância singular o estudo do comportamento mecânico de placas finas de aço para o desenvolvimento tecnológico industrial. Há também, em função de elevada demanda, forte estímulo para o aperfeiçoamento de estudos acadêmicos relacionados ao comportamento mecânico de placas finas de aço. A Figura 1.2 mostra a utilização de placas finas de aço na construção de cascos de navios.



Figura 1.2 – Utilização de placas finas de aço na construção de cascos de navios, [Adaptada de: <http://viagem.uol.com.br/cruzeiros/noticias/redacao/2013/12/30/msc-vai-reformar-linha-de-navios-lirica.htm>].

De acordo com Silva, 2012, o processo que envolve a fabricação de placas de aço compreende o aproveitamento do ferro através de eliminação progressiva de suas impurezas. O processo decorre de uma série de transformações metalúrgicas realizadas em siderúrgicas, onde há também a conformação mecânica ou laminação. Em síntese, o aço em seu estado bruto é transformado em chapas esbeltas por meio de compressão entre cilindros metálicos.

Normalmente, como critério, adota-se para definir placas finas com pequenas deformações que a razão entre a espessura e o menor comprimento da placa deve ser menor

do que $(1/20)$, e os deslocamentos verticais devem ser menores do que $(1/5)$ da espessura da placa, [Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959].

Uma das principais características das placas finas de aço refere-se a sua esbelteza, ou seja, a espessura da placa é muito pequena se comparada com as demais dimensões, respectivamente, o comprimento e a largura.

As placas finas são muito utilizadas em estruturas por possuírem excelente desempenho mecânico às solicitações impostas, com capacidade de resistência adequada ao peso reduzido de seus elementos, e se for adicionado às placas cromo, níquel ou zinco, possuirão também grande resistência à corrosão [Silva, 2012].

Alguns fatores devem ser analisados com extremo cuidado no projeto de estruturas navais e *offshore*. Destaca-se o dimensionamento da estrutura, que deve levar em consideração elementos como o casco e as demais partes integrantes da embarcação, de forma que estes elementos possam resistir à ação de cargas internas e externas, para diferentes solicitações mecânicas, em função do tipo de sua utilização [Okumoto et al., 2009].

Quando uma placa está submetida a esforços transversais ou axiais, estará sujeita a desenvolver tensões de cisalhamento, flexão e de torção [Ventsel e Krauthammer, 2001].

A Figura 1.3 mostra o efeito da pressão hidrostática nos cascos de embarcações, o peso da carga de trabalho e da água de lastro na parte inferior da estrutura. Estes, segundo Okumoto et al., 2009, são fatores predominantes na ocorrência de solicitações transversais em embarcações.

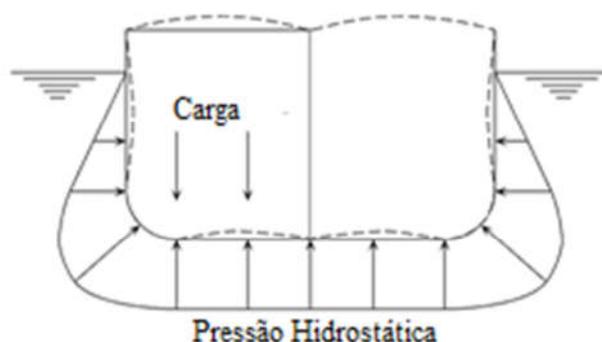


Figura 1.3 – Deformação gerada pela ação de esforços transversais, [Okumoto et al., 2009].

Ainda de acordo com Okumoto et al., 2009, as tensões de cisalhamento ocorrem comumente quando uma placa é submetida a esforços axiais de tração, enquanto que esforços axiais de compressão podem gerar grandes deformações por flexão ou torção. Os

carregamentos axiais são de extrema importância em se tratando de estruturas navais e oceânicas, visto que solicitações acima das admissíveis podem ocasionar a ruptura por cisalhamento ou flexão das placas que formam os cascos destas estruturas.

De acordo com Chujutalli, 2010, painéis enrijecidos longitudinalmente estão continuamente sujeitos a carregamento axial, o que pode causar a flambagem destes, caso as cargas de compressão ultrapassem a capacidade de resistência à flambagem. A Figura 1.4 mostra o caso do colapso global de um navio na condição de alquebramento devido ao colapso de seus elementos estruturais do fundo. Diz-se que o navio está na condição de alquebramento quando a crista da onda está coincidente com a seção central do navio e nas extremidades os cavados da onda, causando tração na região acima da superfície neutra, como no convés, e compressão abaixo da superfície neutra, como no fundo.



Figura 1.4 - Colapso global de um navio na condição de alquebramento, [Chujutalli, 2010].

A idealização e o projeto de um componente estrutural necessitam satisfazer requisitos específicos de resistência, rigidez e estabilidade. Em sua maioria, estruturas como as embarcações são formadas basicamente pela associação de vigas e pilares, os quais normalmente estão submetidos a esforços de compressão. Neste contexto, quando um componente estrutural está submetido a esforço de compressão, poderá haver a ocorrência de um fenômeno extremamente importante denominado de flambagem, ou seja, tornando o elemento suscetível à instabilidade [Cheng e Zhao, 2010].

Projetistas devem observar com muito cuidado a existência de perfurações em placas. Estas placas podem ser utilizadas com o objetivo de diminuição do peso total da estrutura, ou para possibilitar o acesso de pessoas a determinados setores ou a serviços ou, ainda, como elementos com finalidade estética. Entretanto, a inclusão de perfurações em placas ocasiona uma redistribuição de suas tensões, podendo inclusive acarretar modificações em sua

resistência mecânica e também nas características de flambagem [Cheng e Zhao, 2010]. Devem ser consideradas ainda outras características relacionadas às perfurações, tais como a geometria, a dimensão e o posicionamento da perfuração, pois estas características possuem influência direta no desempenho mecânico de uma placa submetida à compressão uniaxial [Chow e Narayanan, 1984].

Outra característica importante e que deve ser considerada no estudo de placas relaciona-se a sua espessura. Em função desta, as placas classificam-se em placas finas ou placas espessas e, de acordo com Helbig et al., 2013, a espessura define o comportamento mecânico da placa em relação à flambagem. Os resultados de seus estudos, em placas de aço quadradas e retangulares e com perfuração elíptica, demonstraram que em placas espessas há o rompimento do componente estrutural por esmagamento do material antes destes alcançarem a tensão crítica, ou seja, o elemento está sob o regime elasto-plástico. No caso das placas finas, para pequenas relações entre a largura e o comprimento da perfuração, há o predomínio da flambagem elástica, e para grandes relações, o da flambagem elasto-plástica. Portanto, a espessura da placa possui importância relevante para o estudo do comportamento mecânico de placas sob a influência da flambagem.

Existe um número significativo de trabalhos científicos direcionados ao estudo da flambagem elástica de placas, porém um número muito reduzido no que se refere à flambagem elasto-plástica. Este trabalho propõe estudar o comportamento mecânico de placas finas de aço, com perfurações, e submetidas à flambagem elástica e à elasto-plástica. O trabalho fará uso de modelos computacionais, associados ao método Design Construtal, para a geração das curvas limítrofes à ocorrência da flambagem elástica e elasto-plástica. Os parâmetros necessários à definição das curvas limítrofes serão estabelecidos *a posteriori*, assim como a definição do ponto comum entre a flambagem elástica e a elasto-plástica. Neste contexto, o tipo, a forma e o tamanho da perfuração são elementos essenciais para o desenvolvimento do trabalho.

Justifica-se a escolha do tema proposto, dentre várias outras razões, em função do aumento significativo no consumo de placas de aço. No setor naval, para a construção de embarcações e estruturas *offshore*, na indústria aeronáutica, para a construção de fuselagens de aviões e, também, na construção de estruturas, principais ou auxiliares, em outras áreas da engenharia.

Há também, como justificativa, a busca pela otimização do elemento estrutural. Com frequência, observa-se que a utilização de mão de obra, equipamentos e materiais não

adequados são alguns dos fatores que contribuem para o aumento no custo operacional de um projeto. Neste sentido, este trabalho trará importante contribuição, porque busca aperfeiçoar o elemento estrutural, utilizando-se de método científico específico, de forma a reduzir significativamente o volume final de material e, por consequência, da estrutura.

Será também de grande importância ao setor acadêmico, principalmente para as áreas das engenharias mecânica, naval, aeronáutica e civil, pois instigará pesquisadores ao desenvolvimento de novos estudos e de pesquisas complementares à proposta neste trabalho.

1.1 Estado da Arte

No contexto global, há um número significativo de estudos científicos relacionados à flambagem elástica em placas finas perfuradas de aço, porém bastante reduzido quanto à flambagem elasto-plástica. Neste sentido, far-se-á uma breve descrição de alguns desses estudos, com o objetivo de mostrar que, no geral, estes estão diretamente relacionados à flambagem elástica ou à flambagem elasto-plástica, sendo, portanto, poucos ou quase inexistentes os que inter-relacionam o fenômeno da flambagem.

Shakerley e Brown, 1996, analisaram através da flambagem elástica o efeito da excentricidade em placas quadradas com perfurações quadradas. Concluíram que o centro de uma pequena perfuração quadrada deve estar localizado longe do centro do elemento principal e, por outro lado, o centro de uma grande perfuração quadrada deve situar-se sobre o centro da estrutura. Como ressalva, observaram a necessidade de extremo cuidado na análise deste tipo de perfuração, visto que se espera como decorrência a diminuição do valor da tensão última do elemento.

El-Sawy e Nazmy, 2001, utilizaram o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o associaram à modelagem computacional com a finalidade de determinar a carga de flambagem elástica em placas retangulares perfuradas, isotrópicas e submetidas à compressão uniaxial. Analisaram em seus estudos dois tipos de perfuração: um circular e outro retangular formado por vértices arredondados. Consideraram também, como condição de contorno, que as placas estavam simplesmente apoiadas nas quatro bordas. Os resultados encontrados mostraram que a utilização de placas com perfuração retangular, considerando a menor dimensão posicionada ao longo do eixo longitudinal da placa, apresenta melhores respostas do que aquelas com perfuração circular.

El-Sawy e Martini, 2007, utilizando o MEF, determinaram os valores das cargas críticas de flambagem em placas retangulares, com perfurações centralizadas, e submetidas a carregamento biaxial.

Moen e Schafer, 2009, desenvolveram expressões analíticas validadas e resumidas, cuja finalidade era a de estimar a influência de perfurações únicas ou múltiplas, na determinação do valor da carga crítica de flambagem de placas na flexão ou na compressão.

Singh et al., 2012, estudaram o comportamento da flambagem elástica em placas isotrópicas, quadradas e retangulares, com perfurações circulares centralizadas e submetidas a diferentes tipos de carregamentos uniaxiais de compressão. Utilizaram elementos finitos e, com o auxílio do *software* Ansys®, demonstraram que as placas perfuradas apresentavam uma redução da carga crítica, em comparação com as placas sem perfuração. Verificaram que a carga crítica, para as placas quadradas, sofre maior influência dos carregamentos parciais de compressão do que a das placas retangulares.

Falkowicz et al., 2015, estudaram o comportamento mecânico à flambagem não linear de chapas retangulares finas de aço, com perfurações retangulares e vértices arredondados, submetidas à compressão uniforme. Concluíram que a capacidade máxima de carregamento em uma placa está diretamente relacionada às variáveis que definem a área da perfuração. As cargas que causam a deformação plástica na placa diminuem com o aumento da área de perfuração. Identificaram que as regiões localizadas próximas aos cantos da área perfurada são as mais propensas à deformação plástica, sendo estas, portanto, que determinam a capacidade de carregamento a que a placa pode ser submetida.

Quanto à Teoria Construtal e a aplicação do Design Construtal, Silveira et al., 2012, estudaram a otimização geométrica de placas com enrijecedores submetidos à flexão. Utilizaram o MEF para calcular os valores da deflexão resultante de cargas de flexão sobre a placa. Fizeram uso da Teoria Construtal, através do método Design Construtal, para a otimização da geometria da placa enrijecida. Concluíram que é possível a obtenção de deflexões que apresentam melhoria de aproximadamente 84% em relação às placas sem enrijecedores.

Rocha et al., 2013, utilizaram a modelagem computacional e o método Design Construtal para a otimização geométrica de perfurações em placas finas retangulares, simplesmente apoiadas e submetidas à flambagem elástica. Foram utilizadas perfurações elípticas, retangulares e losangulares, levando em consideração diversos valores para a relação entre os volumes da perfuração e da placa ϕ . Os resultados encontrados mostraram que, para

valores baixos de ϕ , a geometria ideal de perfuração é a losangular, enquanto para valores intermediários e altos, as perfurações elípticas e retangulares apresentaram melhor desempenho, ou seja, houve a maximização da carga crítica de flambagem.

Helbig et al., 2014, estudaram o comportamento da flambagem linear e não linear, em placas simplesmente apoiadas, submetidas à compressão uniaxial. Utilizaram o método Design Construtal para garantir uma comparação consistente dos resultados para placas com perfurações elípticas, retangulares e losangulares. Obtiveram resultados gráficos para a flambagem linear e a não linear, considerando diversas relações para cada geometria da perfuração, e obtendo-as através da utilização de um valor fixo para a relação entre os volumes da perfuração e da placa $\phi = 0,20$. Concluíram que o melhor desempenho estrutural para cada geometria de perfuração está localizado sobre o ponto de intersecção entre as curvas que definem a flambagem elástica e a elasto-plástica.

Lorenzini et al., 2015, aplicaram o método Design Construtal para analisar a influência mecânica da forma e do tipo de perfuração, em placas quadradas e retangulares, com diferentes tipos de perfuração, simplesmente apoiadas e submetidas à flambagem. Utilizaram perfuração elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal, hexagonal transversal e uma fração de 20% para o volume da perfuração. Concluíram que não há uma geometria ótima global, dependendo da relação entre a dimensão vertical e a horizontal da perfuração, tem-se uma geometria ótima local. E que, no geral, as placas quadradas e as retangulares possuem comportamento mecânico similar na flambagem, porém as placas retangulares perfuradas podem suportar tensões mais elevadas, ou seja, possuem maior capacidade de carregamento. Portanto, para placas com o mesmo volume de perfuração, recomendam a utilização de placas retangulares perfuradas.

Helbig et al., 2015, em análise numérica de placas de aço perfuradas submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica, utilizando o método Design Construtal, estudaram o comportamento mecânico de placas quadradas e retangulares, perfuradas, utilizando 15% do volume total da placa como volume da perfuração. Utilizaram perfuração elíptica, retangular, losangular e hexagonal, sendo a geometria da perfuração definida em função do método Design Construtal. Concluíram que existem intervalos, para a relação entre a dimensão vertical e a horizontal da perfuração, onde ocorre a predominância de um tipo de perfuração em relação aos demais. Contudo, no geral, embora as placas quadradas e as retangulares possuam comportamento mecânico similar à flambagem, recomendaram a utilização de placas retangulares perfuradas por possuírem maior capacidade de carregamento.

Silva et al., 2015, estudaram o comportamento mecânico à flambagem de placas de aço quadradas e retangulares perfuradas. Na análise, consideraram perfuração elíptica, retangular, losangular e hexagonal, com o volume da perfuração definido em 10% do volume total da placa. Concluíram que os conceitos do método Design Construtal associado à modelagem computacional, mostra que o tipo de furo e a forma da perfuração são fundamentais para a definição do comportamento da flambagem em placas perfuradas. Verificaram, comparando os valores máximos das tensões, para as melhores e as piores geometrias, que há um acréscimo no desempenho mecânico das placas entre 78% e 106%.

Helbig et al., 2016, estudaram o comportamento de placas finas perfuradas de aço submetidas à flambagem. Associaram a modelagem computacional com o método Design Construtal para avaliar a influência da configuração geométrica em placas submetidas à flambagem e, para tanto, utilizaram um método de busca exaustiva para determinar as geometrias que conduzem a melhor performance mecânica das placas. Modelos numéricos foram utilizados para resolver o problema da flambagem elástica e da elasto-plástica. Foram utilizadas perfurações centradas e dos tipos: oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. Foram definidas as curvas limites para evitar a ocorrência do fenômeno da flambagem. Também definiram as melhores geometrias, para as quais constataram melhorias no desempenho mecânico das placas superior a 107%.

1.2 Objetivos Geral e Específicos

Este trabalho possui como objetivo geral aliar a simulação numérica e o método Design Construtal para avaliar a influência da configuração geométrica no comportamento mecânico de placas finas de aço, com perfuração centrada, sob a ação da flambagem elástica e da flambagem elasto-plástica.

1.2.1 Objetivos específicos

Para que o objetivo principal seja atingido, apresentam-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Analisar numericamente o comportamento mecânico à flambagem elástica e à elasto-plástica em placas com perfuração centrada dos tipos oblonga longitudinal,

- oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal, em função do grau de liberdade H_0/L_0 , onde H_0 e L_0 representam, respectivamente, a largura e o comprimento da perfuração, e do parâmetro (ϕ), fator que relaciona o volume da perfuração com o volume da placa;
- b) Definir as curvas limites para a ocorrência da flambagem;
 - c) Definir sobre as curvas limites os pontos que representam a mudança de comportamento à flambagem, ou seja, o valor do grau de liberdade H_0/L_0 que define a transição entre a flambagem elástica e a elasto-plástica;
 - d) Definir as curvas à flambagem elasto-plástica e seus respectivos pontos máximos;
 - e) Para cada fração (ϕ) do volume da perfuração e para cada tipo de perfuração, analisar a distribuição ótima das imperfeições através do grau de liberdade H_0/L_0 ;
 - f) Avaliar para cada tipo de perfuração a influência da forma da perfuração através do grau de liberdade H_0/L_0 ;
 - g) Desenvolver o exposto nos itens anteriores, para todos os tipos de perfurações, para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações e para as relações $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, onde H representa a largura da placa, e L , o respectivo comprimento.

1.3 Organização do Trabalho

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica abordando o estudo de placas finas, o estudo de placas finas submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica, a utilização do método dos elementos finitos para a resolução de problemas envolvendo placas finas e aplicações do método Design Construtal.

O capítulo 3 traz a fundamentação teórica para o desenvolvimento desta proposta de trabalho. Envolve a teoria de placas finas desenvolvida por Kirchhoff, a teoria da flambagem de placas, simulação numérica e a Teoria Construtal.

A metodologia aplicada é apresentada no capítulo 4. Apresentam-se o modelo analítico para a resolução do problema da flambagem elástica em placas sem perfuração e os modelos computacionais para a resolução do problema da flambagem elástica e da elasto-plástica em placas com perfurações. Aos modelos computacionais, associa-se o método Design Construtal, para garantir de forma adequada a melhor distribuição das imperfeições sobre a placa.

No decorrer do capítulo 5 são apresentados os resultados. Primeiro referentes à flambagem elástica e à elasto-plástica e, na sequência, apenas à flambagem elasto-plástica. São identificados, fazendo-se uso do método Design Construtal, os intervalos onde cada tipo de perfuração se sobressai em relação às demais, as melhores e as piores geometrias, para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, para todos os tipos de perfurações e para placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$. Neste capítulo, faz-se também uma análise comparativa entre as duas abordagens acima citadas.

Por fim, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões e também uma proposta de continuidade após a conclusão da tese.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica analisada para este trabalho compreende: o estudo de placas, o estudo da flambagem elástica e da elasto-plástica, o método dos elementos finitos e a aplicação do método Design Construtal.

2.1 Estudo de Placas

Egípcios, gregos e romanos utilizavam placas em suas construções, em forma de lajes de pedra ou lápides. Uma das principais diferenças entre as aplicações utilizadas em placas por estes povos em relação à era moderna refere-se à utilização de regras empíricas, para estabelecer as dimensões e a capacidade de carga das placas. Na atualidade, encontram-se disponíveis métodos científicos para avaliar o comportamento mecânico e o dimensionamento de placas [Szilard, 2004].

Segundo Lisboa, 2009, Euler formulou em 1766 a primeira aproximação matemática da teoria de membrana para placas finas. Resolveu o problema de vibrações livres em membranas elásticas retangulares, triangulares e circulares utilizando como analogia sistemas perpendiculares de molas estiradas. Em 1789, Jacques Bernoulli aprofundou os estudos de Euler, em sua analogia adicionou vigas em substituição às molas e, dessa forma, conseguiu descobrir o valor de sua rigidez no comportamento à flexão. Em seus estudos, detectou semelhanças entre as teorias existentes e os dados experimentais. Uma solução para a vibração de placas, considerada realista, foi elaborada pelo físico alemão Chladni, em 1809. Este, que trabalhava com acústica, desenvolveu diversos experimentos relacionados com vibrações de placas. Em um desses experimentos, aplicou uma fina camada de areia sobre a superfície da placa e determinou as linhas nodais para os vários modos e suas correspondentes frequências.

O imperador Napoleão Bonaparte, incentivado pelos resultados experimentais obtidos por Chladni, propôs a Academia Francesa que esta oferecesse um prêmio ao pesquisador que desenvolvesse a teoria de placas e que comparasse seus resultados teóricos com os obtidos por Chladni. Houve apenas um candidato inscrito, a matemática francesa Marie-Sophie Germain. Germain procedeu de forma semelhante à Euler em relação às curvas elásticas, ou seja, utilizou o cálculo variacional para solucionar as equações diferenciais oriundas da integral que representava a energia de deformação de flexão. Considerou que a energia de deformação

da placa era função das curvaturas principais da placa, deformada. Germain cometeu um erro e não conseguiu obter corretamente a equação diferencial. Lagrange, seu mentor e um dos juizes da competição, analisou o trabalho de Germain e detectou o erro e, com algumas correções, obteve a primeira equação geral de placas, definida como equação geral de placas de Germain-Lagrange [Lisbôa, 2009].

A falta de uma explicação física para a expressão utilizada por Germain-Lagrange para o cálculo da energia de deformação em função das curvaturas principais impulsionou novas pesquisas. Dentre as quais se destaca a desenvolvida por Poisson, em 1814, o qual resolveu o problema propondo que a superfície média da placa seria composta por partículas sobre as quais estariam atuando forças moleculares. Poisson chegou à mesma equação proposta por Germain-Lagrange utilizando o equilíbrio do sistema de partículas. Porém, por considerar que todas as partículas pertenciam à superfície média da placa, a constante de rigidez de flexão de placa obtida por Poisson era proporcional ao quadrado da espessura da placa e não ao cubo, como deveria ser. Navier, em continuação aos estudos de Poisson, considerou que a placa seria composta por partículas e que estas estariam distribuídas também na direção da espessura e, dessa forma, encontrou e publicou em 1823 a equação diferencial para qualquer carregamento transversal. Além do que, obteve a rigidez de flexão de placa correta, isto é, cubicamente proporcional à espessura da placa. Em 1828, Poisson ampliou seus estudos utilizando as equações encontradas por Navier, porém estes eram válidos apenas para o caso de placas espessas [Lisbôa, 2009].

2.2 Estudo da Flambagem Elástica e Elasto-Plástica

O primeiro estudo da flambagem em placas, considerado significativo, data de 1800. Em 1822, Navier, considerando os estudos de Kirchhoff, derivou a equação da estabilidade de placas submetidas a carregamento lateral. Saint-Venant, em 1883, alterou esta equação adicionando nas bordas da placa forças axiais e de cisalhamento. Esta modificação permitiu embasamento teórico para a geração de estudos envolvendo a estabilidade de placas submetidas a diversos carregamentos e condições de contorno. A forma mais elementar de problemas de flambagem em placas é caracterizada por uma placa simplesmente apoiada submetida a carregamento de compressão uniaxial. Bryan, em 1891, foi o primeiro a obter os valores das cargas críticas utilizando o método da energia, para isso assumiu que a flambagem da superfície fletida da placa poderia ser representada por uma série dupla de Fourier. Já em

1925, Timoshenko resolveu o mesmo problema utilizando outro método, assumiu que a flexão da placa formava meias ondas senoidais na direção comprimida.

As formulações das equações que identificam o estado de deformação onde há o início da flambagem, ou seja, o estado de equilíbrio neutro, estado crítico ou estado de flambagem inicial, surgiram na teoria da elasticidade no início do século XX, por exemplo, com Von Karman, em 1910. Em termos gerais, algumas destas primeiras formulações eram baseadas no estado de deformação elasto-plástico da estrutura. As equações resultantes apresentavam um problema de autovalor, em que a solução determinava a carga de flambagem e os modos de flambagem que governavam o processo inicial da flambagem. Este problema foi discutido em diversas bibliografias, como [Timoshenko e Gere, 1961] e [Brush e Almroth, 1975]. Bushnell, 1985, investigou de forma quantitativa, para vários tipos de estruturas de paredes finas, sobre a definição, tipos de instabilidades, aplicações e linhas de pesquisa que abrangessem informações publicadas até 1985.

2.3 Aplicação do Método dos Elementos Finitos no Estudo de Placas

Quanto ao método dos elementos finitos (MEF), no geral, os pesquisadores utilizam-no associado ao Modelo dos Deslocamentos, para definirem o valor da carga crítica na flambagem elástica em placas de aço perfuradas. O termo Elementos Finitos, do método dos elementos finitos, foi utilizado pela primeira vez na literatura por Ray Clough, em 1960, em um artigo de engenharia sobre a análise de problemas de elasticidade em estado plano de tensão. Além de estabelecer a nomenclatura que viria a se tornar a escolhida para o método proposto, estabelece, no seu artigo original, os procedimentos sistemáticos que estão na base da implementação computacional do MEF para resolver problemas naturalmente discretos [Teixeira Dias et al., 2010].

No entanto, a ideia fundamental do método vinha sendo utilizada há vários anos por matemáticos, físicos e engenheiros. Dentre os primeiros trabalhos relacionados à área da mecânica estrutural que fizeram uso da análise por elementos finitos, encontram-se os de Hrennikoff, em 1941, e McHenry, em 1943, que desenvolveram uma analogia entre elementos discretos e a correspondente porção de um sólido contínuo. Foram aplicadas nestes trabalhos técnicas semi-analíticas, muito utilizadas na indústria aeronáutica na década de 40. Courant, 1943, apresentou exemplos de metodologias de discretização de meios contínuos em elementos triangulares, para resolver numericamente problemas variacionais genéricos e

analisar problemas de torção em particular, [Samuelsson e Zienkiewicz, 2006]. Entretanto, a falta de computadores necessários à geração e a resolução de um grande número de equações algébricas simultâneas, tornou esta forma de resolução inadequada ao momento. Polya, 1952, e Weinberger, 1956, apresentaram trabalhos semelhantes. Greenstadt, 1959, determina a solução de funções matemáticas através da discretização do domínio de funções em subdomínios contíguos, sendo que cada subdomínio é caracterizado por funções de aproximação próprias. As soluções obtidas para cada subdomínio são compatibilizadas entre si através da imposição de condições de continuidade entre as mesmas [Teixeira Dias et al., 2010].

Em 1956, Turner et al. apresentaram a matriz de rigidez para o elemento triangular e também um método de acoplamento das matrizes de rigidez dos elementos. Uma aproximação direta, baseada no princípio dos trabalhos virtuais, foi dada por Kelsey, 1960, e Argyris, 1964, em uma série de artigos técnicos [Logan, 2007].

Archer, 1963, introduziu o conceito da matriz de massa para a resolução de problemas dinâmicos. A partir do qual, problemas envolvendo vibração, como os estudados por Zienkiewicz et al., 1965, e problemas transientes, estudados por Koenig e Davids, 1969, começaram a surgir na literatura.

Embora a base matemática do MEF, no início da década de sessenta, ainda não estivesse definitivamente desenvolvida, o método já estava sendo utilizado por engenheiros para a solução de uma grande quantidade de problemas estruturais [Davies, 1980]. A expansão da teoria de problemas bidimensionais de Argyris tornou possível a solução para problemas tridimensionais.

Na área da matemática, Birkhoff et al., 1968, publicaram a prova de convergência do MEF e erros de discretização do contorno do domínio de alguns problemas. Entretanto, a primeira prova da convergência do método na área da engenharia foi apresentada por Melosh, 1963, que utilizou o princípio da energia potencial mínima. Este teve seu trabalho complementado por Jones, 1964, fazendo uso do princípio variacional de Reissner.

O MEF começou a utilizar o já conhecido método dos resíduos ponderados, desenvolvido por Szabo e Lee, 1969, possibilitando a solução de problemas nos quais o princípio variacional não as oferecia, ou onde as suas soluções eram mais complexas. Dentre os exemplos, podem ser mencionados: escoamentos de fluidos viscosos Connor e Brebbia, 1976, e problemas não lineares em eletromagnetismo [Zienkiewicz et al., 1977].

De forma simultânea ao desenvolvimento do método na área da engenharia, diversos trabalhos foram realizados e publicados por pesquisadores matemáticos, porém como raramente havia a integração entre grupos de pesquisadores de diferentes áreas, o conteúdo desses trabalhos ficava restrito ao conhecimento dos componentes do grupo [Cook, 1995].

O avanço computacional e tecnológico, a partir dos anos setenta, contribuiu de forma significativa para o crescimento da aplicação do MEF no meio científico. O método representa uma poderosa ferramenta para a análise numérica nas áreas da engenharia, física e matemática. O aperfeiçoamento do MEF passa pela divulgação de trabalhos nessas áreas [Kenneth e Thornton, 1995].

Estudos relacionados a não linearidade, física ou geométrica, começam a tomar forma no início dos anos sessenta. A técnica do incremento para solucionar problemas geometricamente não lineares foi apresentada em [Turner, 1960]. Ainda nessa área, Martin, 1965, analisou problemas envolvendo estabilidade. Problemas envolvendo material com comportamento não linear foram modelados por [Gallagher, 1962]. Zienkiewicz et al., 1968, aplicaram o MEF para a solução de problemas de viscoelasticidade. Oden, 1972, fez uma análise detalhada da utilização das aplicações do método, aplicado a problemas não lineares.

Shanmugam et al., 1999, utilizaram o MEF para analisar o comportamento à flambagem não linear de placas quadradas com perfurações centralizadas, quadradas e circulares. Concluíram que a capacidade de carga das placas é afetada significativamente pelo tamanho das perfurações e pela esbeltez da placa. Também concluíram que placas com perfurações circulares, de forma geral, possuem tensões últimas maiores, se comparadas às placas com perfurações quadradas.

2.4 Método Design Construtal Aplicado ao Estudo de Placas e Colunas

O método Design Construtal, apresentado no estado da arte para evidenciar aplicações relacionadas ao estudo das tensões em placas finas de aço, também pode ser utilizado em finalidades das mais diversas. Por exemplo, Helbig et al., 2014, desenvolveram análise numérica da flambagem térmica em placas finas de aço. Empregaram um modelo computacional baseado no MEF e, com o auxílio do *software* Ansys®, determinaram a temperatura crítica que causa a flambagem térmica em placas. Os resultados encontrados indicaram que o aumento da variação crítica de temperatura está relacionado tanto ao aumento da relação do comprimento com a largura da placa, quanto ao aumento da espessura da placa.

Michaello et al., 2015, analisaram o comportamento mecânico de colunas de aço perfuradas submetidas à flambagem térmica. Utilizaram um estudo de caso com o emprego do método Design Construtal, e desenvolveram uma análise computacional com o *software* Ansys®, para determinar a influência na variação crítica de temperatura em uma coluna de aço perfurada. Variaram o tipo e a forma da perfuração, porém mantiveram fixo o volume da perfuração. Concluíram que o método Design Construtal possibilita a determinação de geometrias otimizadas, que conduzem a performances superiores, para os componentes estruturais analisados.

2.5 Estudo de Aplicações Gerais do Método Design Construtal

Uma das áreas que também se beneficia da aplicação do método Design Construtal e que possui um grande número de publicações é a de transferência de calor entre aletas e cavidades. Neste sentido, existem diversos estudos que buscam otimizar geometricamente cavidades, dos mais diversos tipos, inseridas em superfícies sólidas, para a geração uniforme de calor e de fluxo constante nas superfícies das cavidades. Por exemplo, Biserni et al., 2007, estudaram o comportamento de cavidades com forma geométrica H em um meio condutivo. Lorenzini e Rocha, 2009, analisaram a otimização de cavidades geométricas em forma de T e Y. Seguindo esta linha de análise, Xie et al., 2010, abordaram a otimização geométrica de aletas em forma de Y, com dois níveis de bifurcação. Horbach, 2013, utilizou o método Design Construtal para desenvolver o estudo numérico da configuração de materiais de alta condutividade térmica em forma de Y que minimiza a resistência ao fluxo de calor, quando áreas ocupadas pelos materiais de alta e baixa condutividade são mantidas constantes.

O método Design Construtal também foi utilizado na área de distribuição de água. Bieupoude et al., 2013, utilizaram o método Design Construtal com o objetivo de otimizar o uso da energia em redes de abastecimento de água, para a minimização do sistema de bombeamento. O processo foi viabilizado através da otimização da geometria da rede de distribuição.

Tem-se também em Bejan, 2000, aplicações na área da economia, tais como a minimização do custo operacional de transporte, através da otimização das rotas de transporte de bens e produtos, de forma a obter a menor distância e a maior facilidade para o transporte.

Na medicina, uma de suas aplicações está voltada ao tratamento do câncer. A propagação do câncer pode ser controlada mantendo-se a temperatura do tecido normal

circundante ao tumor abaixo de determinado limite, de forma a não danificar o tecido. Wang e Wang, 2007, apresentam um modelo e um método numérico, baseado na Teoria Construtal, para a obtenção de uma distribuição da temperatura ideal numa estrutura de três camadas de pele encaixada com vasos sanguíneos multi-nível [Lara, 2015].

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo da flambagem em placas finas baseia-se em diversos assuntos, comumente estudados nas áreas da engenharia estrutural e da mecânica dos sólidos. Neste capítulo, serão desenvolvidos os conteúdos pertinentes ao estudo do comportamento mecânico de placas finas de aço.

3.1 Teoria de Placas

Segundo Szilard, 2004, placas podem ser consideradas como sendo elementos estruturais inicialmente planos em que uma das dimensões, a espessura, é muito menor do que as outras duas dimensões, respectivamente, o comprimento e a largura. Vários são os exemplos que podem ser enquadrados na família de placas, tais como tampas de mesas, tampões de bueiros, discos de turbinas, lajes na construção civil, elementos na confecção das fuselagens de aviões e de cascos em embarcações, nas plataformas de petróleo, dentre outros.

Diversos são os problemas práticos de engenharia que se situam nas categorias de estudos relacionados ao comportamento de placas. Para o cálculo das tensões, as placas normalmente são divididas em duas partes iguais na direção da espessura, através de um plano paralelo às suas faces, sendo este denominado de plano médio. A espessura da placa é tomada na direção normal ao plano médio. Quanto à flexão da placa, suas propriedades dependem muito da relação entre a espessura e as demais dimensões [Ventsel e Krauthammer, 2001].

De acordo com Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959, o estudo de placas pode ser dividido em três grupos: placas finas com pequenas deformações, placas finas com grandes deformações e placas espessas.

Neste trabalho, estar-se-á estudando o comportamento mecânico de placas finas com pequenas e com grandes deformações, sendo o material da placa homogêneo, linear e isotrópico. As forças externas atuantes podem ser classificadas como forças de superfície.

3.1.1 Teoria Clássica de Placas Finas

O desenvolvimento da teoria de placas finas, para pequenos deslocamentos, normalmente é atribuído a Kirchhoff e a Love. No entanto, existem outras importantes contribuições, destacando-se as de Bernoulli, Lagrange, Navier, Poisson e Saint-Venant.

Apresentam-se, na sequência, os procedimentos básicos necessários à obtenção da equação diferencial que governa o comportamento de placas finas de material elástico linear, para o regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos. O texto está de acordo com as referências [Bloom e Coffin, 2000; Ventsel e Krauthammer, 2001; Szilard, 2004 e Wang et al., 2004].

3.1.2 Sistema de coordenadas e convenção de sinais

Na Figura 3.1 apresentam-se as principais características geométricas, o sistema de coordenadas de referência e o carregamento de superfície em uma placa.

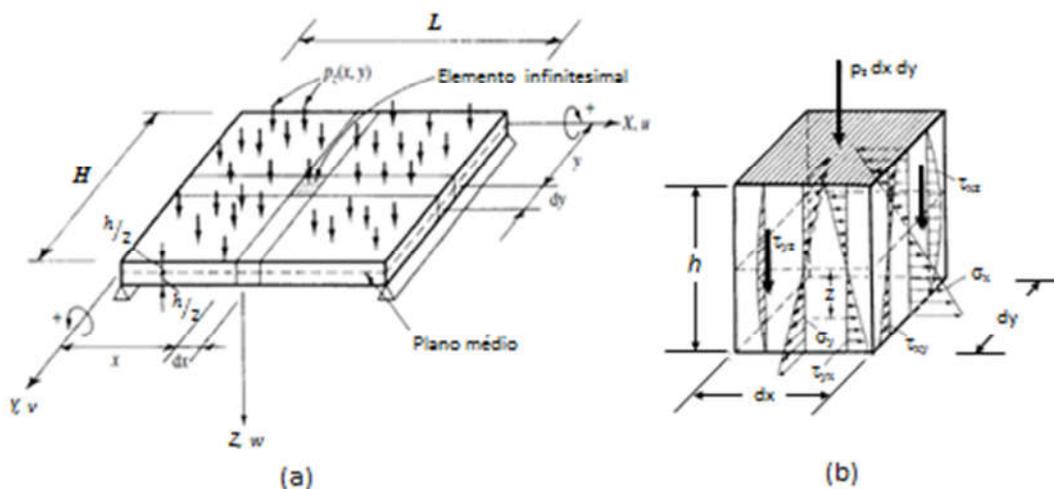


Figura 3.1 – Modelo de placa utilizado para o estudo da equação diferencial linear de placas finas: (a) Características geométricas, sistema de coordenadas e carregamento de superfície; (b) Componentes de tensões do elemento infinitesimal, [Szilard, 2004].

A geometria de uma placa pode ser definida através do seu plano médio, o qual corta a espessura da placa ao meio em cada ponto. A utilização de um sistema de referência, com coordenadas cartesianas, é a forma mais indicada para o trabalho com placas quadradas e retangulares. Consideram-se as componentes (u, v, w) , referentes aos deslocamentos, e as das forças internas e externas como positivas, quando estas estiverem direcionadas para o sentido positivo dos eixos de coordenadas x, y e z . Será adotada a convenção usualmente utilizada nas engenharias; se os momentos fletores tracionarem as fibras inferiores da placa, terão sinal positivo, caso as comprimam, terão sinal negativo.

Para a determinação da equação diferencial de uma placa fina, devem ser observadas as seguintes hipóteses:

1. O material da placa é homogêneo, isotrópico e linear elástico, isto é, comporta-se segundo a lei de Hooke;
2. A placa inicialmente é plana;
3. A superfície média da placa permanecerá livre de tensões durante a flexão;
4. A espessura h da placa é constante e pequena, se comparada às demais dimensões; deve-se admitir a relação $\left(\frac{H}{h} \geq 10\right)$, onde H representa a dimensão que corresponde ao valor do menor lado da placa;
5. Os deslocamentos transversais $w(x, y)$ são pequenos, se comparados à espessura da placa. Considera-se válida a teoria de placas finas para pequenos deslocamentos, obedecendo-se as relações $\left(\frac{w}{h} \leq 0,10\right)$;
6. As rotações da superfície média da placa são pequenas, se comparadas à unidade;
7. As seções planas e normais à superfície média da placa, antes da deformação, permanecem planas e normais à superfície média, após a deformação. Ou seja, é desprezado o efeito de empenamento que as deformações por cisalhamento exercem sobre a seção transversal;
8. As tensões normais σ_z , na direção transversal da superfície da placa, podem ser desprezadas.

Com o auxílio destas hipóteses, os problemas de tensões originalmente tridimensionais na elasticidade ficam reduzidos a problemas bidimensionais. A teoria fundamental de vigas também utiliza algumas das hipóteses acima expostas. Um número significativo de experimentos, em pequena e em grande escala, para a análise exata tridimensional das tensões, provou a validade das hipóteses simplificadoras acima definidas.

3.1.3 Equilíbrio de um elemento de placa

No processo de derivação da equação diferencial que governa as placas finas, será empregado método semelhante ao utilizado na teoria elementar de vigas. Por exemplo, alternativas como a utilização de uma abordagem variacional ou até mesmo a simplificação das equações diferenciais tridimensionais da elasticidade, não serão consideradas.

A Figura 3.2 apresenta os esforços solicitantes resultantes, que atuam sobre um elemento na forma de um paralelepípedo extraído do interior da placa submetida a carregamento transversal. Aos esforços que atuam sobre as faces positivas do elemento foram atribuídos sinais positivos, enquanto aos esforços que atuam sobre as faces negativas do elemento foram atribuídos sinais negativos. Na forma de notação empregada, o primeiro índice corresponde à direção da normal ao plano, onde o esforço atua, e o segundo índice, à direção em que o esforço atua.

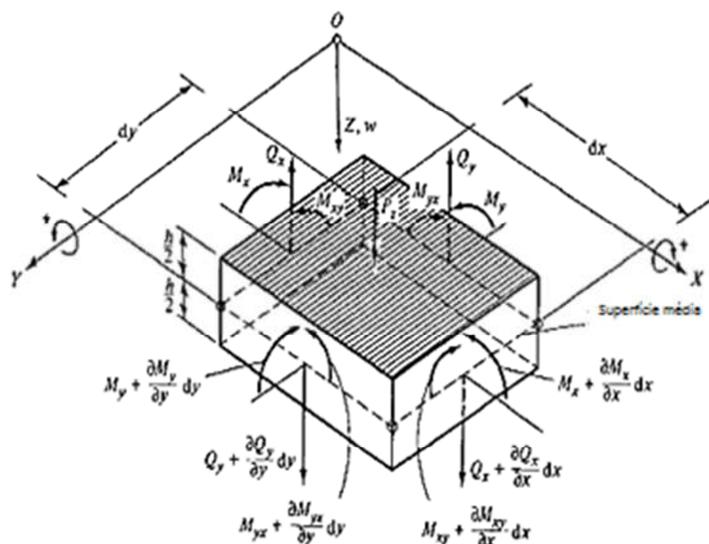


Figura 3.2 - Esforços resultantes atuantes em um elemento de placa, [Szilard, 2004].

Pode-se comparar o comportamento de uma placa com o de uma malha de vigas ortogonais, em que a carga externa P_z , é equilibrada pela ação dos esforços cortantes Q_x e Q_y , além dos momentos fletores M_x e M_y . A diferença está na existência de momentos torçores M_{xy} e M_{yx} sobre a placa, que também contribuem para a resistência ao carregamento externo.

É usual, na teoria de placas, a utilização de esforços solicitantes por unidade de comprimento da superfície média. De forma a possibilitar a diferenciação entre os esforços distribuídos e os esforços resultantes, adota-se como notação para os esforços por unidade de comprimento: q_x , q_y , m_x , m_y , m_{xy} e m_{yx} . Um elemento de superfície média em equilíbrio, sob a ação de uma carga distribuída p_z , por unidade de superfície, é apresentado na Figura 3.3.

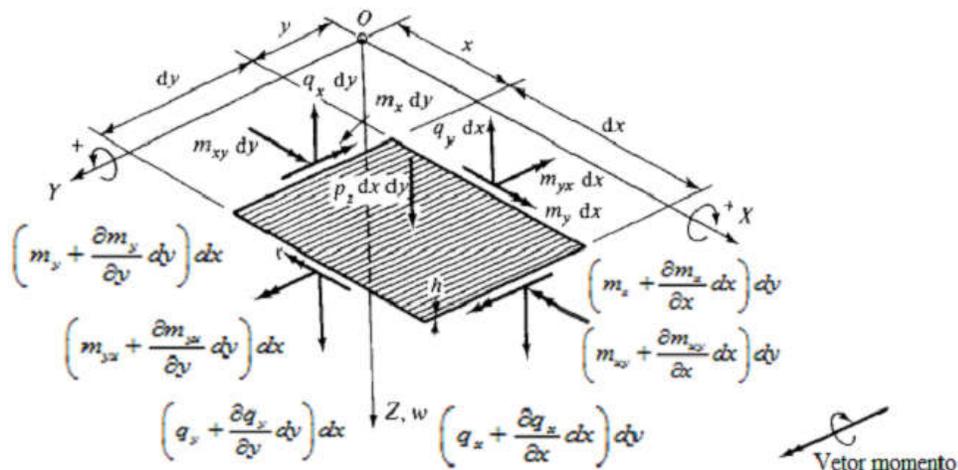


Figura 3.3 - Equilíbrio de um elemento de superfície média da placa, [Szilard, 2004].

Considerando-se que o elemento de placa esteja submetido apenas a cargas distribuídas transversais, das seis equações de equilíbrio fundamentais, apenas três podem ser utilizadas:

$$\sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad e \quad \sum F_z = 0 \quad (3.1)$$

Inicialmente, deve ser estabelecido o equilíbrio de momentos em relação ao eixo y , supondo que o mesmo passe pelo centro do elemento:

$$\begin{aligned} \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx\right) dy - m_x dy + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - m_{yx} dx \\ - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx\right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Expandindo-se e simplificando-se a Eq. (3.2) e, em seguida, desprezando-se os infinitésimos de ordem superior, resulta:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0 \quad (3.3)$$

Dividindo-se por $dx dy$ e isolando-se q_x , vem:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (3.4)$$

Aplicando-se o mesmo procedimento, agora para o equilíbrio de momentos em torno do eixo x , resulta:

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} = q_y \quad (3.5)$$

Fazendo-se o equilíbrio de forças na direção do eixo z , vem:

$$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy - q_x dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - q_y dx + p_z dx dy = 0 \quad (3.6)$$

Expandindo-se e simplificando-se a Eq. (3.6), e depois se dividindo por $dx dy$, resulta:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z \quad (3.7)$$

Substituindo-se as Eq. (3.4) e (3.5) na Eq. (3.7), e observando-se que pela reciprocidade das tensões de cisalhamento $m_{xy} = m_{yx}$, resulta em uma única equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (3.8)$$

3.1.4 Equações de compatibilidade

Estas equações de compatibilidade relacionam deformações e deslocamentos. Considerando-se por hipótese que as deformações γ_{xz} e γ_{yz} e a deformação normal ε_z podem ser desprezadas, em um elemento de placa somente poderão ocorrer as deformações normais ε_x e ε_y , e a deformação de cisalhamento γ_{xy} .

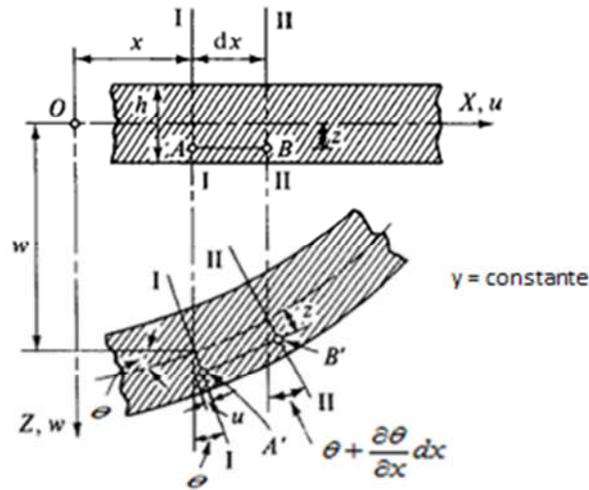


Figura 3.4 - Forma fletida da placa na direção do eixo x , [Szilard, 2004].

A configuração fletida de uma seção transversal da placa paralela ao eixo x , exposta na Figura 3.4, observando-se as hipóteses preestabelecidas, permite concluir que o deslocamento axial μ no ponto A' pode ser calculado através da expressão:

$$\mu = -z \cdot \theta = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.9)$$

E, de forma análoga, o deslocamento v , é definido como:

$$v = -z \cdot \theta = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.10)$$

Substituindo-se a definição do deslocamento axial μ , na relação deformação/deslocamento clássica da Mecânica dos Sólidos, chega-se a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

Utilizando-se de procedimento semelhante, para a deflexão da placa na direção y chega-se a:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.12)$$

A deformação de cisalhamento, γ_{xy} , está relacionada com os deslocamentos axiais u e v , através de:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.13)$$

Substituindo-se as Eq. (3.9) e (3.10) na Eq. (3.13), resulta:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

A definição das curvaturas da placa nas direções x e y , e do seu empenamento, podem ser obtidas a partir das expressões:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad e \quad k_{xy} = \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.15)$$

Finalmente, as deformações podem ser expressas como:

$$\varepsilon_x = k_x z, \quad \varepsilon_y = k_y z \quad e \quad \gamma_{xy} = 2k_{xy} z \quad (3.16)$$

3.1.5 Equações constitutivas

Estas equações constitutivas relacionam as tensões e as deformações. Considerando-se as hipóteses preestabelecidas, uma lâmina de material, situada a uma distância z do plano médio da placa, estará submetida a um estado de tensão conforme pode ser observado na Figura 3.5.

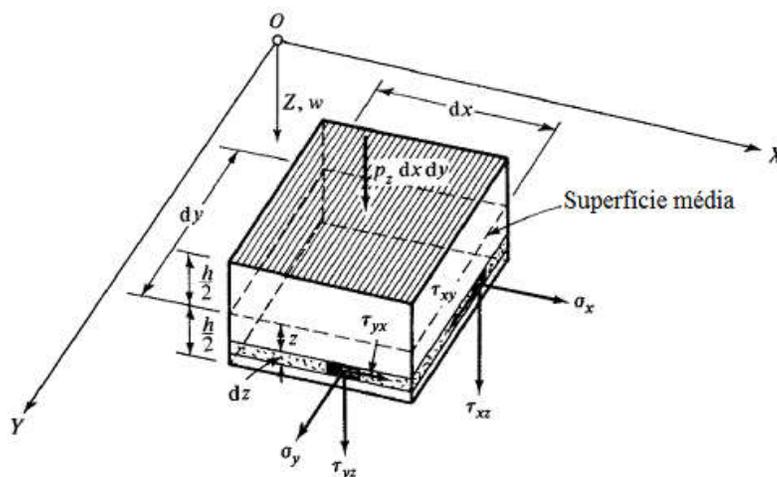


Figura 3.5 - Tensões em um elemento de placa, [Szilard, 2004].

As componentes das tensões no plano xOy podem ser definidas, levando-se em consideração as deformações através do emprego da Lei de Hooke, em um estado plano de tensões, a partir das expressões:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (3.17)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (3.18)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.19)$$

onde E e G representam o módulo de elasticidade longitudinal e transversal do material, e ν o coeficiente de Poisson.

Observa-se que a partir das hipóteses iniciais, as deformações de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} podem ser desprezadas, portanto as tensões τ_{xy} e τ_{yx} não podem ser calculadas através da Lei de Hooke. Esta é uma inconsistência da Teoria de Placas Finas, que, contudo, não impede a sua aplicação na solução de problemas práticos de Engenharia.

Substituindo-se as Eq. (3.11), (3.12) e (3.14) nas Eq. (3.17), (3.18) e (3.19), se têm as relações tensão-deslocamento para placas finas:

$$\sigma_x = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.20)$$

$$\sigma_y = -\frac{zE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.21)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{zE}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.22)$$

Finalmente, as tensões podem ser escritas em função das curvaturas, como:

$$\sigma_x = \frac{zE}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \quad (3.23)$$

$$\sigma_y = \frac{zE}{1-\nu^2} (k_y + \nu k_x) \quad (3.24)$$

$$\tau_{xy} = \frac{zE}{1+\nu} k_{xy} \quad (3.25)$$

3.1.6 Relações esforço resultante-deslocamento

De forma similar à teoria de vigas, na teoria de placas finas é possível determinar-se os momentos fletores a partir da integração das tensões normais ao longo da espessura da placa, multiplicadas pela sua distância z até a superfície média. Desta forma, os momentos fletores m_x e m_y , por unidade de comprimento, podem ser obtidos a partir de:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad e \quad m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (3.26)$$

Igualmente, os momentos torçores m_{xy} e m_{yx} podem ser calculados a partir da integração das tensões de cisalhamento, τ_{xy} e τ_{yx} , multiplicadas pela sua distância até a superfície média, na forma:

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad e \quad m_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (3.27)$$

Por simetria do tensor de tensões, e sabendo-se que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, necessariamente $m_{xy} = m_{yx}$.

Substituindo-se as Eq. (3.20), (3.21) e (3.22) nas Eq. (3.26) e (3.27), e realizando-se a integração ao longo da espessura da placa, chega-se às relações entre os esforços solicitantes e os deslocamentos, para placas finas, na forma:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(k_x + \nu k_y) \quad (3.28)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D(k_y + \nu k_x) \quad (3.29)$$

$$m_{xy} = -(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1 - \nu)Dk_{xy} \quad (3.30)$$

sendo, a rigidez à flexão de uma placa dada pela Eq. (3.31).

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.31)$$

Ao se comparar a Eq. (3.31) com a rigidez à flexão EI de uma viga com largura unitária, observa-se que a placa apresenta rigidez superior devido ao efeito do coeficiente de Poisson.

Finalmente, substituindo as Eq. (3.28), (3.29) e (3.30) na Eq. (3.8), chega-se à equação diferencial que rege o problema de uma placa fina, de material elástico linear, no regime de pequenos deslocamentos, submetida a um carregamento transversal na forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (3.32)$$

Fazendo-se uso do Operador Laplaciano, vem:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (3.33)$$

logo, a Eq. (3.32), pode ser reescrita na forma:

$$D\nabla^2\nabla^2w = p_z \quad (3.34)$$

A Eq. (3.32) é uma equação diferencial parcial de quarta ordem, não homogênea do tipo elíptica, com coeficientes constantes, que é frequentemente chamada de equação bi-harmônica não homogênea. Esta equação é do tipo linear, pois os expoentes das derivadas parciais de w não são superiores a um.

Os esforços cortantes também podem ser expressos em função do deslocamento transversal w . Para isto, devem-se substituir as Eq. (3.28), (3.29) e (3.30) nas Eq. (3.3) e (3.4), resultando:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (3.35)$$

$$q_y = \frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (3.36)$$

A solução do problema, para uma placa fina submetida a um carregamento transversal, consiste em encontrar uma função $w(x,y)$ que satisfaça a Eq. (3.32) e as condições de contorno.

3.1.7 Condições de contorno

As condições de contorno da equação diferencial de equilíbrio dependem das condições de vínculo existentes no contorno da placa. Portanto, a solução exata para placas finas com carregamento transversal deve satisfazer a equação diferencial e também as condições de contorno. Por tratar-se de equação diferencial de quarta ordem, para cada borda e cada direção, devem ser satisfeitas duas condições de contorno: condições de contorno

geométricas em função dos deslocamentos, condições estáticas de contorno em relação aos esforços internos ou, ainda, através da combinação destas duas condições.

Na Figura 3.6, podem ser observadas as principais condições de contorno para placas finas. Também há a possibilidade da ocorrência de apoios elásticos sobre as bordas da placa, seja para deslocamento transversal ou para a rotação.

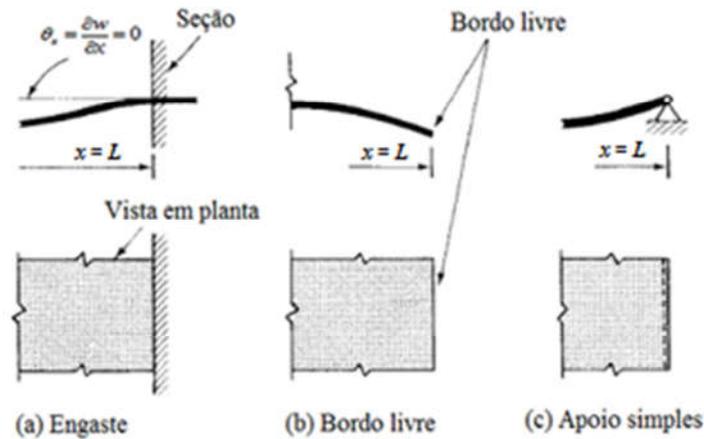


Figura 3.6 - Condições de contorno para placas, [Szilard, 2004].

3.1.7.1 Condições de contorno geométricas

Pode-se aplicar uma condição de contorno geométrica em um dos bordos da placa, fixando-se o valor do deslocamento transversal ou da inclinação da placa na direção normal à borda. É possível mencionar como exemplo o caso de uma placa engastada nos quatro bordos, Figura 3.7, e, neste caso, as condições de contorno para o problema seriam:

$$w = 0 \quad e \quad \theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad em \quad x = 0 \quad e \quad x = L \quad (3.37)$$

$$w = 0 \quad e \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad em \quad y = 0 \quad e \quad y = H \quad (3.38)$$

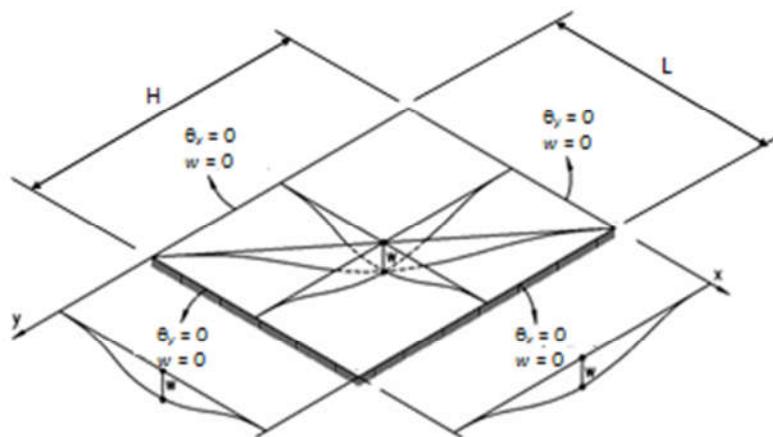


Figura 3.7 - Placa engastada nas quatro bordas, [Adaptada de: Soares, 2004].

Ou então, ver Figura 3.8, considerando-se uma placa apoiada nos quatro bordos, tem-se:

$$w = 0 \quad e \quad m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad em \quad x = 0 \quad e \quad x = L \quad (3.39)$$

$$w = 0 \quad e \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad em \quad y = 0 \quad e \quad y = H \quad (3.40)$$

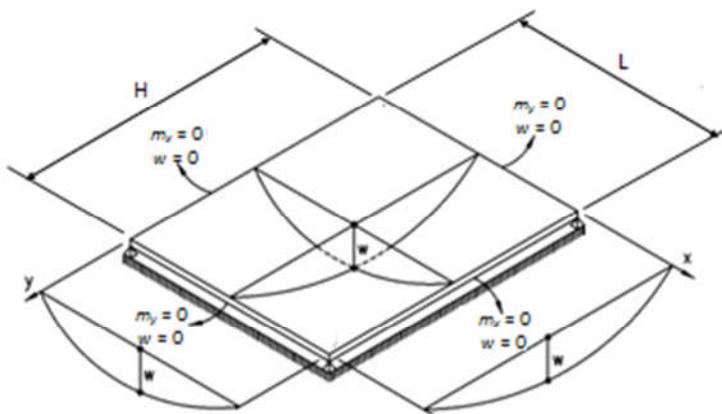


Figura 3.8 - Placa simplesmente apoiada nos quatro bordos, [Adaptada de: Soares, 2004].

3.1.7.2 Condições de contorno estáticas

Se a placa possuir um dos bordos completamente livre, em termos de deslocamento e que esteja sem carregamento, neste caso, as condições de contorno para o bordo serão estáticas, ou seja, não haverá esforço cortante e momento fletor neste bordo. Condições que podem ser expressas a partir de:

$$v_x = m_x = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = L \quad (3.41)$$

$$v_y = m_y = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = H \quad (3.42)$$

Em uma placa, atuam três esforços solicitantes: o esforço cortante, o momento fletor e o momento torçor. Para o caso de um bordo livre, seriam necessárias três condições de contorno, uma para cada esforço cortante, e não apenas duas. Para resolver este problema, Kirchhoff transformou o efeito do momento torçor nos bordos em uma força cortante adicional, conforme está representado na Figura 3.9.

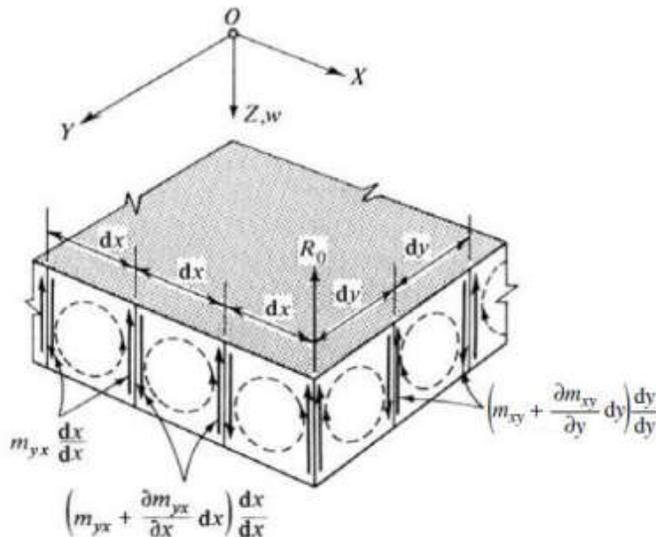


Figura 3.9 - Efeito de bordo do momento torçor na placa, [Szilard, 2004].

Neste caso, o esforço cortante nos bordos da placa será acrescido de uma parcela adicional, dado pelas expressões, para os bordos em que a direção normal seja x ou y , respectivamente:

$$v_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (3.43)$$

$$v_y = q_y + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad (3.44)$$

Desta forma, as condições de contorno no bordo livre ficam reduzidas de três para duas, podendo ser expressas como:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = L \quad (3.45)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = H \quad (3.46)$$

Deve-se levar em consideração que no caso de uma placa simplesmente apoiada, as forças cortantes adicionais nos cantos, produzidas pelo efeito do momento torçor, não serão canceladas, e sim somadas, o que produzirá no canto da placa uma força resultante R_0 , a qual tenderá a erguer os cantos da placa, conforme pode ser observado na Figura 3.10. Esta força resultante pode ser expressa como:

$$R_0 = 2m_{xy} = -2(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.47)$$

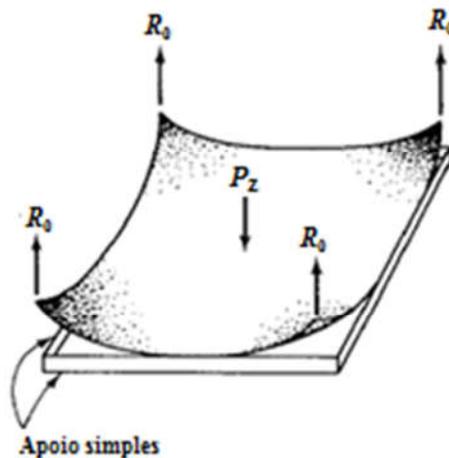


Figura 3.10 - Forças levantando os cantos da placa, [Szilard, 2004].

3.1.7.3 Condições de contorno mistas

As condições de contorno mistas ocorrem, por exemplo, em um bordo simplesmente apoiado, onde simultaneamente as condições de deslocamento transversal e de momento fletor são nulas na direção normal ao bordo, quando o mesmo está sob a condição de carregamento nulo. De forma matemática, podem ser expressas:

$$w = 0 \text{ e } m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ em } x = 0 \text{ ou } x = L \quad (3.48)$$

$$w = 0 \text{ e } m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \text{ em } y = 0 \text{ ou } y = H \quad (3.49)$$

3.1.8 Solução da Equação Diferencial

A solução da equação diferencial deve ser dada em função de $w(x, y)$, e deverá satisfazer também a Eq. (3.32) e as condições de contorno inerentes ao problema. Entretanto, este tipo de solução é apenas possível para os casos muito simples, em termos de carregamento e de condições de contorno.

De forma geral, linearizando-se a Eq. (3.32), pode-se obter uma solução para o problema, através da sobreposição de duas soluções: uma homogênea $w_H(x, y)$, que satisfaça as condições de contorno ao longo dos bordos da placa, e uma solução particular $w_P(x, y)$, que satisfaça o equilíbrio do carregamento externo ao longo da superfície da placa. Dessa forma, a solução geral será dada conforme:

$$w(x, y) = w_H(x, y) + w_P(x, y) \quad (3.50)$$

Como nem sempre é possível encontrar uma função $w(x, y)$ que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio e as condições de contorno, para uma placa de forma e apoios quaisquer, submetida a uma carga $p(x, y)$, recorre-se a soluções aproximadas.

Navier desenvolveu uma forma alternativa para a solução deste problema, onde a função $w(x, y)$ e o carregamento transversal $p_z(x, y)$ foram representados por séries duplas

de Fourier, sendo que os coeficientes devem ser determinados de forma a satisfazerem as condições de contorno do problema e garantir o equilíbrio do carregamento aplicado.

Lévy também emprega as séries simples de Fourier para resolver o problema, porém considera que pelo menos dois dos bordos paralelos da placa sejam simplesmente apoiados. Esta solução converge com maior rapidez do que a apresentada por Navier. Entretanto, para casos com geometrias, condições de contorno e carregamento mais complexos, podem ser necessárias aplicações de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, para a obtenção da solução do problema.

3.2 Teoria de Flambagem de Placas

Segundo Okumoto et al., 2009, as partes que integram uma estrutura naval, em sua maioria, são compostas por placas e vigas e, em diversas situações, estas são submetidas a esforços de compressão. Elementos estruturais, como as placas, quando submetidas a esforços de compressão ou de tração, possuem comportamento bem diferenciado. Placas submetidas a esforços axiais de tração desenvolvem tensões de cisalhamento, por outro lado, quando submetidas a esforços de compressão, há uma deflexão lateral do elemento, denominado de flambagem. Portanto, é de suma importância que o fenômeno de flambagem seja considerado nos procedimentos que envolvem o cálculo estrutural de estruturas navais e *offshore*. Obviamente, este procedimento deve ser utilizado para qualquer tipo de elemento que esteja sob a influência do fenômeno de flambagem.

A Figura 3.11 mostra uma placa fina de comprimento L , largura H e espessura h , submetida a um carregamento uniaxial de compressão ao longo da direção perpendicular ao comprimento da placa, considerando os bordos carregados como engastados e os não carregados como livres de vinculação [Åkesson, 2007].

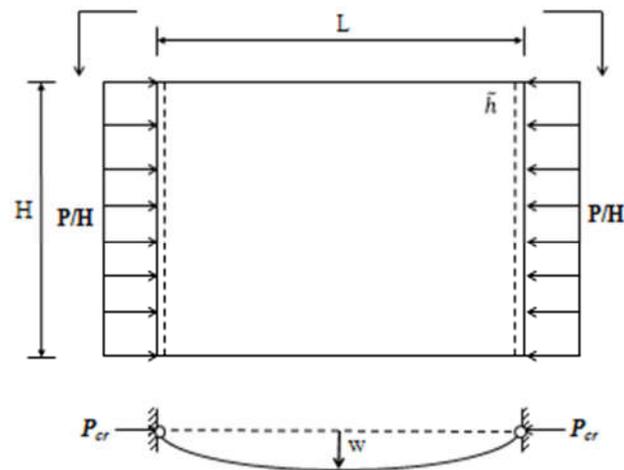


Figura 3.11 – Placa fina submetida a um carregamento de compressão uniaxial, [Adaptada de: Åkesson, 2007].

Quando o carregamento atinge o valor crítico, P_{cr} , a placa sofre uma deformação de forma repentina (na Figura 3.11, representada pelo deslocamento w), e pode perder sua capacidade de suportar o carregamento, o que resultaria no colapso da estrutura [Wang e Wang, 2007]. A deformação lateral, apresentada na Figura 3.11, é curvilínea e mostra graficamente o fenômeno da flambagem. A carga responsável por esse fenômeno é denominada de Carga Crítica. De acordo com Åkesson, 2007, a aplicação de uma carga de compressão, porém inferior ao valor da carga crítica, não acarretará a formação do fenômeno de flambagem. Neste caso, a carga aplicada provocará na placa uma deformação curvilínea, mas com a retirada desta, a placa voltará a sua configuração inicial. No entanto, ao menor acréscimo de carga à carga crítica, ocorrerá um grande deslocamento na estrutura, podendo inclusive haver a ocorrência do colapso desta.

3.2.1 Estabilidade de equilíbrio

De acordo com Yoo e Lee, 2011, frequentemente explica-se o conceito de estabilidade através da análise do equilíbrio de uma esfera rígida em várias posições, conforme pode ser observado na Figura 3.12.

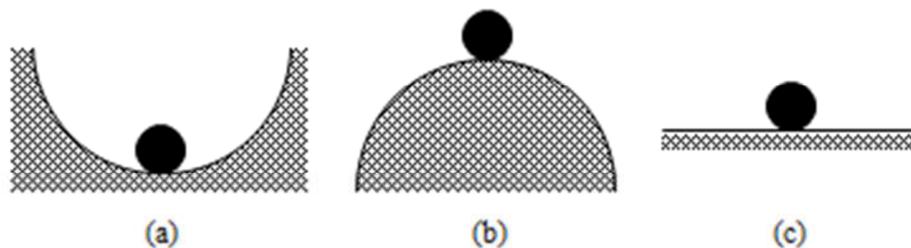


Figura 3.12 – Estabilidade de equilíbrio de uma esfera, [Adaptada de: Yoo e Lee, 2011].

Inicialmente, observa-se que a esfera está em equilíbrio nas três posições, porém uma análise mais detalhada mostra diferenças importantes para as situações consideradas. Analisando-se a esfera posicionada sobre uma superfície côncava (a), se esta for deslocada ligeiramente de sua posição original de equilíbrio, na retirada da força perturbadora, a esfera voltará a sua posição inicial. Neste caso, o corpo que se comporta desta forma está em equilíbrio estável. Considerando-se o item (b), esfera sobre uma superfície convexa, da Figura 3.12, ao deslocar-se a esfera de sua posição de equilíbrio, esta não retornará novamente a sua posição de equilíbrio, e sim continuará a mover-se cada vez mais distante da posição inicial. Neste caso, o equilíbrio da esfera é muito precário e a mesma está em equilíbrio instável. Para a posição (c), Figura 3.12, esfera sobre uma superfície plana, a esfera, ao ser deslocada de sua posição original, deixará a posição de repouso e também não retornará à posição inicial, porém, cessado o efeito da aplicação do esforço, está assumirá outra posição de equilíbrio, o chamado equilíbrio neutro.

É importante observar que na teoria clássica da flambagem uma estrutura somente poderá passar da condição de equilíbrio estável para a condição de equilíbrio instável se assumir, temporariamente, o estado de equilíbrio neutro. Esta condição permitirá a determinação matemática da carga crítica de uma estrutura [Szilard, 2004].

No problema da estabilidade elástica de placas, justamente no estado de equilíbrio neutro, tem-se uma bifurcação no modo de deformação da placa. A partir da condição de equilíbrio neutro, para qualquer pequeno acréscimo de carga, a placa assumirá a configuração deformada de uma superfície curva, chamada de modo de flambagem, cujo fenômeno ocorre com o material ainda dentro do regime elástico linear, ou seja, obedece à lei de Hooke.

O fenômeno que caracteriza a bifurcação do modo de deformação da placa, após a ocorrência da carga crítica, é apresentado na Figura 3.13.

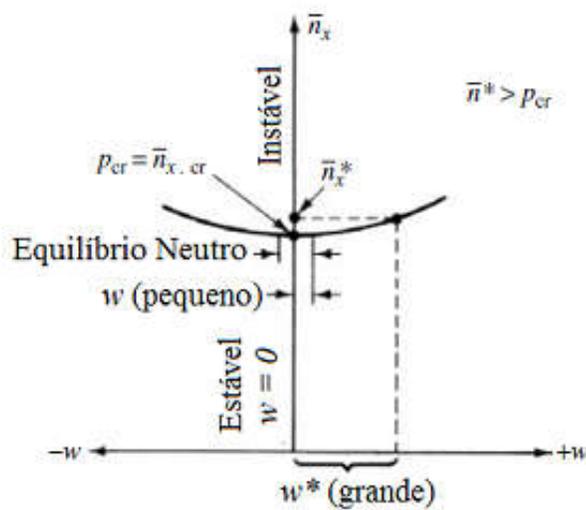


Figura 3.13 - Bifurcação do modo de deformação da placa, [Szilard, 2004].

3.2.2 Estabilidade e instabilidade estrutural

O estudo da estabilidade não se restringe à Mecânica de Estruturas, é amplo e pode ser observado em diversas outras áreas da ciência, como na área da Economia, por exemplo. Em Bazant e Cedolin, 2010, encontra-se uma definição matemática de estabilidade, sendo esta atribuída ao matemático e físico russo, Lyapunov (1892).

Dirichlet, em 1853, definiu que o equilíbrio de um sistema mecânico é estável se, ao se deslocar os pontos do sistema de suas posições de equilíbrio de um valor infinitesimal, e se, for dada a cada ponto uma pequena velocidade inicial, os deslocamentos dos diferentes pontos do sistema se mantiverem contidos dentro de pequenos limites prescritos durante todo o movimento.

De acordo com Felippa, 2001, uma estrutura elástica é considerada como estável em uma posição de equilíbrio se esta retornar à posição inicial após ter sido perturbada por uma ação qualquer. Segundo Bazant e Cedolin, 2010, a estrutura é considerada estável se, para uma pequena mudança nas condições iniciais da estrutura, houver uma pequena mudança na resposta da estrutura. Deste modo, a escolha natural para o estudo da estabilidade de uma estrutura recai sobre a análise dinâmica. Contudo, Falzon e Hitchings, 2006, e Bazant e Cedolin, 2010, indicam que a análise dinâmica de sistemas pode ser substituída por uma análise estática dos estados de equilíbrio, em inúmeros casos considerados na prática.

Alternativa que permite uma verificação qualitativa da estabilidade, com grandes vantagens, tais como uma maior simplicidade e um menor consumo de recursos.

O estudo da estabilidade, em uma análise estrutural, é aplicado nas situações onde ocorrem tensões de compressão. Os fenômenos que envolvem os conceitos de estabilidade são definidos como fenômenos de instabilidade estrutural ou de flambagem, segundo Reis e Camotim, 2001, pois ocorre a perda da forma original como resultado da deformação.

As placas submetidas à compressão axial perdem a estabilidade pela troca repentina do modo de deformação e são exemplos de flambagem bifurcacional. Inicialmente, sofrem um encurtamento devido à compressão axial, o modo de pré-flambagem, e então, sob a ação da carga crítica, sofrem subitamente uma translação normal ao seu plano médio, o modo de flambagem. Em princípio, este novo modo de deformação não parece compatível com as solicitações. São também exemplo de estruturas com curva de pós-flambagem estável. Conforme a placa começa a flambar, as deformações da flambagem fazem surgir tensões de tração de membrana que aumentam a rigidez da placa, fornecendo capacidade resistiva para o aumento da carga. As placas continuam a resistir ao acréscimo de carga acima da carga crítica, e o colapso da estrutura ocorre apenas após o início do escoamento do material.

De acordo com Da Cunha, 2005, a instabilidade em uma estrutura ou em um elemento estrutural pode ser originada em função da falta ou insuficiência de vínculos externos, ou ainda pelo elevado grau de esbeltez da estrutura. O estudo da instabilidade foi o foco de muitos pesquisadores, como [Timoshenko e Gere, 1961; Brush e Almroth, 1975; Allen e Bulson, 1980; Bazante e Cedolin, 1991; e Reis e Camotim, 2001]. Aspectos práticos, relativos ao projeto destas estruturas quanto à estabilidade, podem ser encontrados na referência [Galambos, 1998].

A flambagem é um tipo de colapso resultante da instabilidade estrutural, devido à ação de esforços externos de compressão sobre o elemento. De forma geral, ocorre de modo inesperado e é de ação catastrófica. A carga para a qual a instabilidade ocorre é chamada de carga crítica (P_{cr}) e a tensão, oriunda desta carga, de tensão crítica (σ_{cr}).

3.2.3 Flambagem de Placas

O procedimento para a obtenção da equação diferencial que governa o comportamento de placas finas formada por material elástico linear, em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, sob a ação de cargas contidas em sua superfície média, será

apresentado na sequência e adotará as seguintes referências: [Szilard, 2004; Chajes, 1974; e Ventsel e Krauthammer, 2001].

De acordo com Ventsel e Krauthammer, 2001, o carregamento contido no próprio plano médio da placa poderá ser produzido através da ação de forças coplanares aplicadas nas bordas da placa, ou através da variação de temperatura.

As restrições aos deslocamentos u e v , no plano da placa, fazem surgir forças de reação nos bordos da placa. No entanto, este efeito pode ser desconsiderado, caso os deslocamentos transversais da placa, w , sejam pequenos.

Para a obtenção da equação diferencial de uma placa sob a ação de carregamento em seu plano, deve-se estabelecer o equilíbrio de um elemento de placa $dxdy$, de espessura h , conforme o sistema de coordenadas, Figura. 3.14.

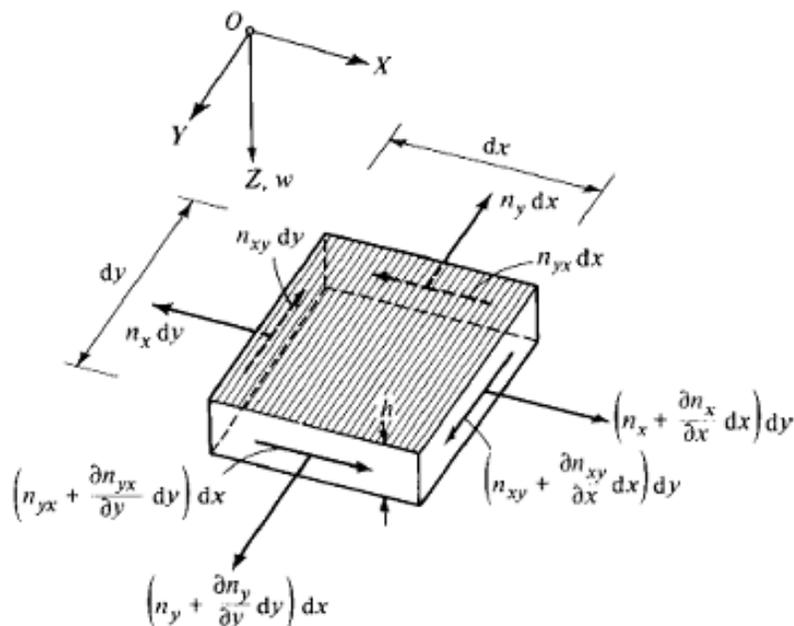


Figura 3.14 - Elemento de placa submetido a um sistema de forças coplanares, [Szilard, 2004].

O elemento $dxdy$ considerado encontra-se submetido a um sistema de forças coplanares, por unidade de comprimento n_x , n_y , $n_{xy} = n_{yx}$. Estes esforços normais e tangenciais são também comumente chamados de esforços de membrana. Os incrementos destas forças nas faces positivas do elemento podem ser obtidos através de sua expansão em série de Taylor, considerando-se a série até o segundo termo. Considera-se a não existência de forças de volume sobre o elemento nas direções X e Y .

Fazendo-se o equilíbrio das forças na direção do eixo dos X , vem:

$$\left(n + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx\right) dy - n_x dy + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - n_{yx} dx = 0 \quad (3.51)$$

que, após simplificações, resulta em:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (3.52)$$

De forma similar, fazendo-se o equilíbrio das forças segundo o eixo dos Y , vem:

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = 0 \quad (3.53)$$

As Eq. (3.52) e (3.53) formam um sistema de equações diferenciais homogêneas. Para a resolução deste sistema, podem ser utilizadas as funções de tensão de Airy $\Phi(x, y)$, de forma que:

$$n_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad n_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad e \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.54)$$

Dessa forma, o sistema de equações diferenciais em regime de pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais, poderá ser resolvido de forma independente da equação diferencial da placa, podendo ser considerada em separado.

Para o equilíbrio das forças na direção do eixo Z , será considerado que a placa está inicialmente fletida, conforme pode ser observado na Figura 3.15. Visando facilitar o processo de deduções, as bordas anteriores da placa serão consideradas fixas e contidas no plano XY .

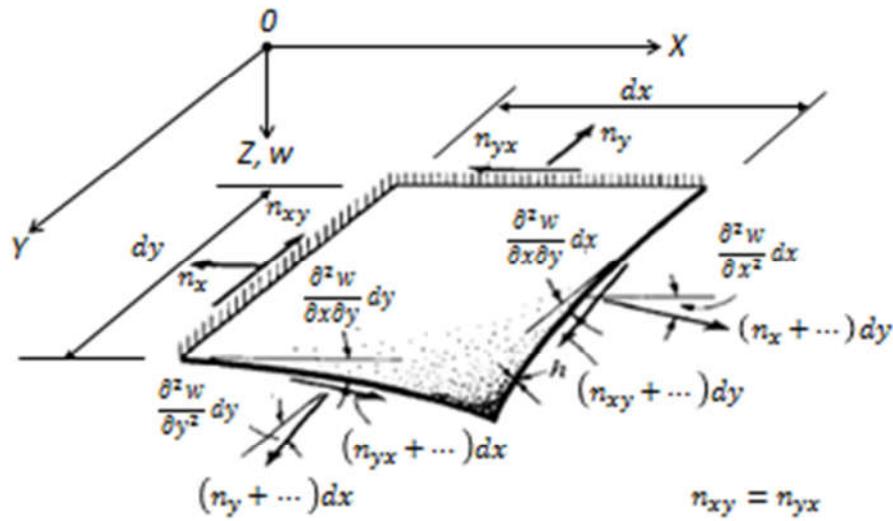


Figura 3.15 - Forças de membrana em um elemento de placa deformado, [Szilard, 2004].

Fazendo-se o somatório das componentes de força na direção do eixo Z, vem:

$$\begin{aligned} \sum F_Z = & \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \\ & + \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \\ & + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \end{aligned} \quad (3.55)$$

que após algumas simplificações, e desconsiderando-se termos de ordem superior, transforma-se em:

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p_z^*(x, y) \quad (3.56)$$

Ou seja, o efeito das forças no plano pode ser considerado como o de uma carga lateral fictícia $p_z^*(x, y)$ atuando sobre a placa. Acrescentando-se esta parcela de carga fictícia na Eq. (3.32), resulta em:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = p_z(x, y) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.57)$$

Sendo os esforços de membrana n_x , n_y e n_{xy} constantes e conhecidos ao longo da superfície da placa, a Eq. (3.57) poderá ser resolvida de forma semelhante à utilizada para a equação diferencial da placa, empregando-se os métodos de Navier ou de Lévy.

Porém, se houver a variação destes esforços ao longo da placa, deve-se empregar a função de tensão de Airy, definida pela Eq. (3.54), o que resulta:

$$D\nabla^2\nabla^2w(x,y) = p_z(x,y) + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} \quad (3.58)$$

Para que a Eq. (3.58) possa ser resolvida, é necessária a utilização de uma equação diferencial adicional que relacione a função de tensão de Airy, $\Phi(x,y)$ com a função que define os deslocamentos transversais $w(x,y)$. Se isto não for possível, deve-se utilizar algum método numérico, como o método dos elementos finitos, por exemplo.

Se a placa possuir uma curvatura inicial $w_0(x,y)$, a Eq. (3.57) assumirá a forma:

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2w(x,y) = p_z(x,y) + n_x \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial y^2} \\ + 2n_{xy} \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x\partial y} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Deve-se observar que as imperfeições geométricas iniciais acima mencionadas podem possuir importante influência para a determinação do valor da carga crítica em uma placa fina.

3.2.4 Determinação da Carga Crítica de Placas: o Método do Equilíbrio

Far-se-á a abordagem através do uso do método do equilíbrio, do estudo para a determinação da carga crítica em placas finas retangulares, conforme [Szilard, 2004]. Considerar-se-á uma placa retangular inicialmente plana de lados, L paralelo ao eixo x e H paralelo ao eixo y , sob a ação de forças coplanares \bar{n}_x , \bar{n}_y e \bar{n}_{xy} aplicadas em suas bordas, conforme pode ser observado na Figura 3.16.

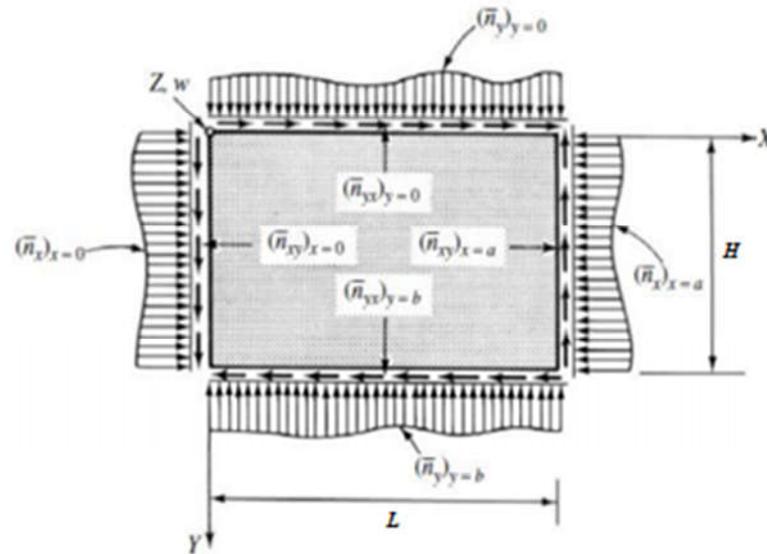


Figura 3.16 - Placa submetida a forças distribuídas em seus bordos, [Szilard, 2004].

A representação das forças atuantes nas bordas poderá ser feita como resultado da multiplicação de um escalar λ , chamado de fator de carga, por um valor de referência \bar{n}_0 , conforme:

$$\bar{n}_x = -\lambda \bar{n}_{x0}, \quad \bar{n}_y = -\lambda \bar{n}_{y0} \text{ e } \bar{n}_{xy} = -\lambda \bar{n}_{xy0} \quad (3.60)$$

nesta expressão, a adoção do sinal negativo indica que as forças normais atuantes são de compressão, e que no caso de forças de cisalhamento, teriam orientação contrária a dos eixos coordenados nas bordas positivas da placa.

Dessa forma, acrescentando-se o valor do fator de carga λ , há o conseqüente acréscimo das forças coplanares \bar{n}_x , \bar{n}_y e \bar{n}_{xy} . O aumento do valor do fator λ propiciará um valor limite, para o qual o equilíbrio da placa deixará de ser estável, alcançando-se o equilíbrio neutro. No estado de equilíbrio neutro, ocorre uma bifurcação no modo de deformação da placa. Sendo assim, a partir desse ponto, é possível a ocorrência de deslocamentos transversais w , mesmo sem a presença de carregamento transversal p_z , e a superfície média inicialmente plana passa a ser uma superfície curva.

Se considerado o carregamento transversal nulo, a Eq. (3.57), para o estado de equilíbrio neutro, transformar-se-á numa equação diferencial homogênea conforme:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(\bar{n}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{n}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \bar{n}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.61)$$

A Eq. (3.61) é a equação diferencial que governa o problema da flambagem em placas retangulares para material elástico, linear, homogêneo e isotrópico.

A equação diferencial que rege a instabilidade elástica em placas, partindo-se das definições de forças nas bordas, conforme a Eq. (3.60), poderá assumir a forma:

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D} \left(\bar{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \bar{n}_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \bar{n}_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.62)$$

Assim, o problema para a determinação da carga crítica em uma placa retangular passa a ser a definição do menor valor que pode ser imposto ao fator de carga λ , valor capaz de propiciar o estado de equilíbrio neutro na placa. Como no estado de equilíbrio neutro ocorre a bifurcação do modo de deformação da placa, esta poderá atingir seu equilíbrio na forma de uma superfície com leve curvatura.

A Eq. (3.62) é uma equação diferencial linear homogênea, em que o fator de carga λ é utilizado apenas para multiplicar as derivadas de ordem inferior. A solução para este tipo de equação, segundo preceitos da matemática, dar-se-á a partir da solução de um problema de autovalores. A solução rigorosa do problema impõe que a Eq. (3.62) seja satisfeita, assim como também devem ser satisfeitas as condições de contorno do problema.

Entretanto, como não existe carregamento transversal p_z ao longo da superfície da placa (equação diferencial homogênea), e também não existem momentos aplicados nas bordas da placa (condição de contorno homogênea), a ordem de grandeza dos deslocamentos transversais resulta indeterminada.

Se uma dada função $w(x,y)$ representa uma solução para o problema, qualquer função que seja igual ao produto de um escalar por w , também será uma solução possível. Resultando em que a forma da superfície deformada da placa, ou seja, o seu modo de flambagem, pode ser estabelecida, no entanto, os valores exatos dos deslocamentos em cada ponto não podem ser determinados.

Estando a placa sob a ação de um carregamento combinado, formado por forças normais e por forças de cisalhamento atuando simultaneamente, é usual que se estabeleçam relações entre estas forças através da utilização de razões constantes. Dessa forma, caso o

efeito dominante do problema seja o de uma força normal atuante na direção do eixo X , ou seja, \bar{n}_{x0} poderá ser utilizado às relações:

$$\bar{n}_{y0} = \alpha \bar{n}_{x0} \text{ e } \bar{n}_{xy0} = \beta \bar{n}_{x0} \quad (3.63)$$

onde as constantes α e β definem as proporções entre \bar{n}_{y0} e \bar{n}_{x0} e entre \bar{n}_{xy0} e \bar{n}_{x0} , respectivamente. Deste modo, determinado o valor crítico para a força normal na direção X , ou seja, $(\bar{n}_x)_{cr} = -\lambda_{cr} \bar{n}_{x0}$, os valores críticos para as demais forças serão dadas por:

$$(\bar{n}_y)_{cr} = -\lambda_{cr} \alpha \bar{n}_{x0}, \text{ e } (\bar{n}_{xy})_{cr} = -\lambda_{cr} \beta \bar{n}_{x0} \quad (3.64)$$

Uma forma simplificada para a resolução do problema consiste na tomada do valor de referência da carga crítica de Euler, para uma faixa da placa com largura unitária, analisando-a como uma coluna isolada. De tal modo, para a placa com carregamento apresentada na Figura 3.17, tem-se:

$$\bar{n}_{x0} = \frac{\pi^2 D}{L^2} = \frac{\pi^2 E h^3}{12(1 - \nu^2) L^2} \quad (3.65)$$

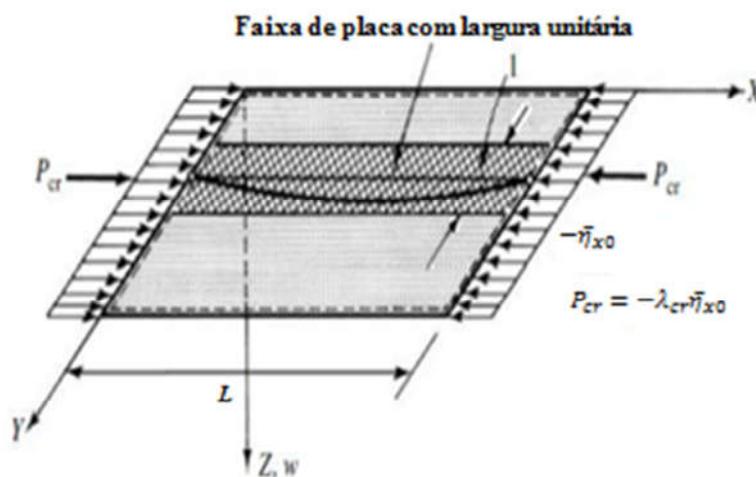


Figura 3.17 - Flambagem para uma faixa unitária de placa, [Szilard, 2004].

A solução para o problema da flambagem em placas, em geral, pode ser expressa na forma:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.66)$$

Substituindo-se a Eq. (3.66) na Eq. (3.62) e atribuindo-se como condição que a solução não seja trivial, tem-se como resultado a equação característica do problema, a qual permite a determinação do valor crítico de λ , isto é, λ_{cr} . O valor a ser considerado para λ_{cr} deverá ser o menor valor possível para λ , tal que satisfaça de forma exata a equação característica do problema. Então, a carga crítica a ser considerada para a placa será:

$$P_{cr} = (\bar{\eta}_x)_{cr} = \lambda_{cr} \bar{n}_{x0} \quad (3.67)$$

Considerando-se placas simplesmente apoiadas em suas bordas, e que não possuam a ação de forças de cisalhamento ($\bar{n}_{xy} = 0$), a solução para o problema poderá ser posta na forma:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{H}, \text{ para } m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.68)$$

Nestas condições, a minimização da equação característica do problema definirá o valor crítico do fator de carga λ_{cr} .

No entanto, a obtenção da carga crítica, levando-se em consideração outras condições de contorno, é mais complexa. Assim, se as forças cisalhantes nas bordas forem nulas para placas com duas bordas paralelas simplesmente apoiadas, pode-se utilizar para a solução do problema o método de Lévy. Considerando-se que as bordas simplesmente apoiadas estejam posicionadas em ($x = 0$) e em ($x = L$), o modo de flambagem para a placa poderá ser expresso através de uma função, conforme:

$$w(x, y) = \sum_m Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (3.69)$$

A continuidade no procedimento de solução para este tipo de problema é similar ao apresentado e analisado no item 3.1.1, observando-se que as equações algébricas resultantes

da aplicação das condições de contorno passam a ser homogêneas. Portanto, deve-se obter a solução não trivial para as constantes de integração A_m , B_m , C_m e D_m , igualando-se o determinante do sistema de equações algébricas que envolvem estas constantes a zero. Para finalizar, deve-se ter clareza de que as operações matemáticas que possibilitam chegar à equação característica e à definição do menor valor para λ_{cr} são extremamente trabalhosas.

O parágrafo acima expõe as dificuldades na determinação de uma solução exata para a carga crítica em placas, tornando inviável, ou praticamente impossível, a sua determinação. Para suprir estas dificuldades, outras técnicas devem ser utilizadas, dentre as quais pode se destacar o uso de métodos numéricos aproximados, como o método dos elementos finitos, por exemplo.

3.2.5 Cálculo da Carga e da Tensão Crítica em uma Placa Retangular, Simplesmente Apoiada e submetida a carregamento de Compressão Uniaxial

O problema em questão refere-se à determinação do valor da carga crítica de flambagem em uma placa retangular, simplesmente apoiada em suas bordas, sob a ação de carregamento de compressão uniformemente distribuído segundo a direção X , $\bar{n}_x = -\lambda\bar{n}_{x0}$, considerando-se $x = 0$ e $x = L$, conforme mostra a Figura 3.18. Será utilizado como referência [Szilard, 2004].

A equação diferencial que governa o problema poderá ser obtida em função da Eq. (3.62), aplicando-se $\bar{n}_{y0} = 0$ e $\bar{n}_{xy0} = 0$, o que resulta:

$$\nabla^4 w + \frac{\lambda}{D} \bar{n}_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.70)$$

onde:

$$\bar{n}_x = -\lambda\bar{n}_{x0} = -\lambda \frac{\pi^2 D}{L^2} = -\lambda \frac{\pi^2 E h^3}{12(1 - \nu^2)L^2} \quad (3.71)$$

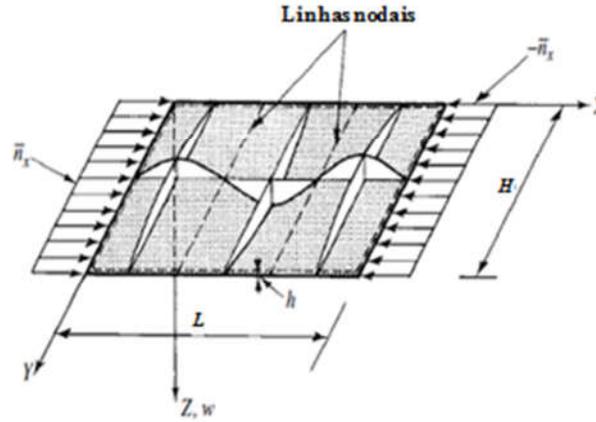


Figura 3.18 - Flambagem em placa simplesmente apoiada sob compressão, [Szilard, 2004].

Sendo a placa simplesmente apoiada em suas bordas, a configuração deformada poderá ser expressa na forma:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \alpha_m \sin \beta_n \quad (3.72)$$

Sendo os coeficientes α e β , dados conforme:

$$\alpha_m = \frac{m\pi x}{L} \quad e \quad \beta_n = \frac{n\pi y}{H} \quad (3.73)$$

Substituindo-se a Eq. (3.72) na Eq. (3.70), vem:

$$\sum_m \sum_n \left[\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2} \right)^2 - \lambda \left(\frac{\bar{n}_0}{D\pi^2} \frac{m^2}{L^2} \right) \right] W_{mn} \sin \alpha_m \sin \beta_n = 0, \quad (3.74)$$

para $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$

No estado de equilíbrio neutro, procura-se por uma solução que seja não trivial, isto é, busca-se estabelecer o equilíbrio da placa com uma configuração levemente deformada para valores específicos de m e n , o que deverá necessariamente satisfazer a:

$$\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2} \right)^2 - \lambda \left(\frac{\bar{\eta}_0}{D\pi^2} \frac{m^2}{L^2} \right) = 0 \quad (3.75)$$

com,

$$(\bar{n}_x)_{cr} = \lambda \bar{n}_{x0} = \pi^2 D \frac{\left[\left(\frac{m}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{H} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{L} \right)^2} = \left(m + \frac{n^2 L^2}{m H^2} \right) \frac{\pi^2 D}{L^2} \quad (3.76)$$

Lembrando-se que o fator de carga λ , expresso na Eq. (3.72), corresponde a:

$$\lambda = \left(m + \frac{n^2 L^2}{m H^2} \right) \quad (3.77)$$

Analisando-se a Eq. (3.77), pode-se concluir que o valor mínimo a ser obtido para o fator de carga λ deve ser obtido para $n = 1$, ou seja, quando houver a formação de apenas uma semionda na direção do eixo Y , o que resulta em:

$$\lambda = \left(m + \frac{1 L^2}{m H^2} \right) \quad (3.78)$$

Desta forma, para uma dada relação entre os lados da placa L/H , a determinação da carga crítica far-se-á a partir do valor do parâmetro m que produza o menor valor para o fator λ , na Eq. (3.78). Multiplicando-se a Eq. (3.76) por H^2 e dividindo-a por este mesmo fator, após algumas transformações algébricas, a carga crítica para uma placa retangular com as bordas simplesmente apoiadas e submetida à compressão uniaxial na direção do eixo X , poderá ser expressa como:

$$P_{cr} = (\bar{n}_x)_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{H^2} \quad (3.79)$$

sendo, D o módulo de rigidez à flexão da placa, definido como:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.80)$$

O coeficiente de flambagem, k , será dado por:

$$k = \left(m \frac{H}{L} + \frac{1}{m} \frac{L}{H} \right)^2 \quad (3.81)$$

A Figura 3.19 mostra uma placa carregada em sua configuração de flambagem, com duas semiondas na direção paralela ao eixo x .

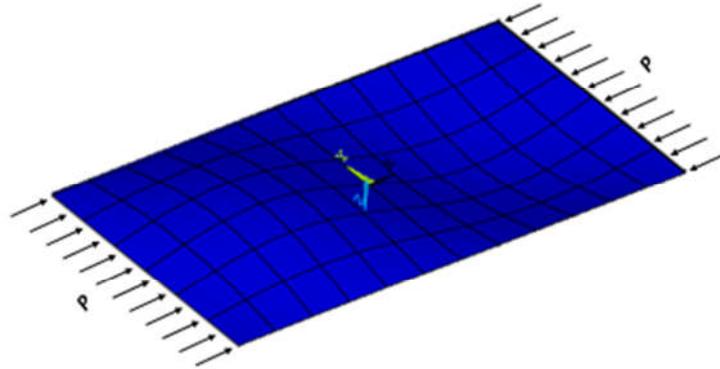


Figura 3.19 - Placa carregada em sua configuração de flambagem.

Se fixar-se o valor do parâmetro m , e liberar-se a relação L/H para variar entre 0 e 5, por exemplo, pode-se determinar os valores das cargas críticas para diversas placas com as bordas simplesmente apoiadas sob a ação de compressão uniaxial na direção do eixo X , conforme pode ser observado na Figura 3.20.

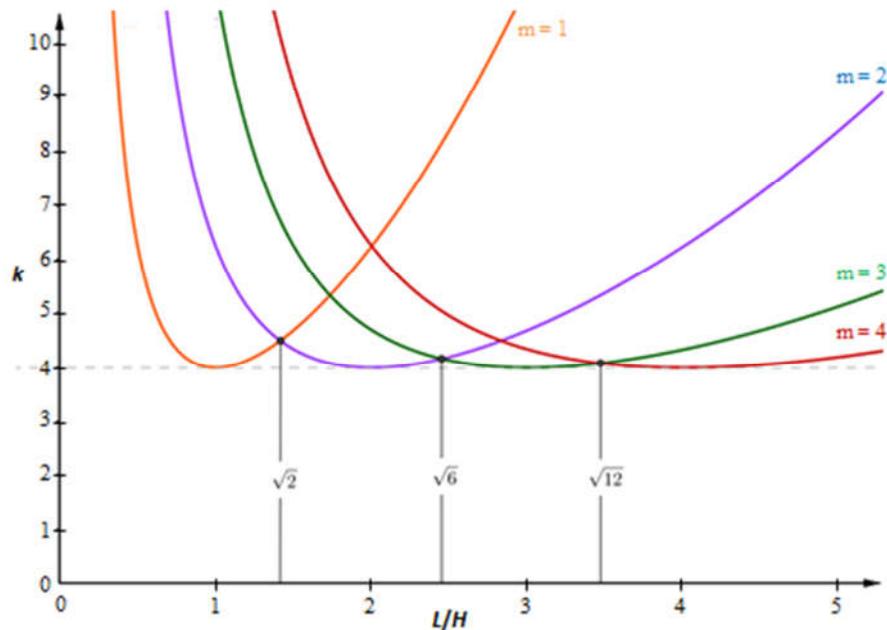


Figura 3.20 - Coeficientes de flambagem para placas retangulares simplesmente apoiadas.

Para cada valor da relação L/H , conforme mostra a Figura 3.20, há diversos valores para o parâmetro k , dado pela Eq. (3.81), e que depende do valor atribuído ao parâmetro m . No entanto, para a análise na engenharia, o interesse restringe-se ao menor valor possível para o parâmetro k .

Com o aumento da relação L/H , há também o aumento do número de semiondas do primeiro modo de flambagem na direção do eixo X . A transição de m para $m + 1$ entre as curvas das semiondas, ocorre onde existe a igualdade entre as ordenadas, ou seja, há a ocorrência de apenas uma semionda na direção do eixo das abcissas até que $L/H = \sqrt{2}$, duas semiondas para $\sqrt{2} < L/H < \sqrt{6}$, três semiondas para $\sqrt{6} < L/H < \sqrt{12}$, e assim sucessivamente para ($m = 1, 2$ e 3), respectivamente.

Na Figura 3.21 observa-se, para as relações $L/H = 1$ e $L/H = 2$, o primeiro modo de flambagem para uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas. Neste caso, o número de semiondas na direção X corresponde a $m = 1$ e $m = 2$, respectivamente.

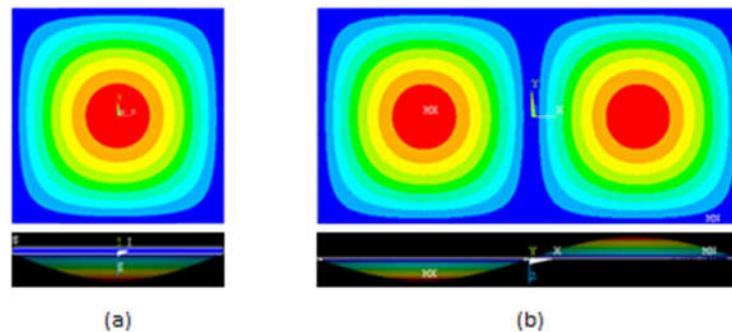


Figura 3.21 - Primeiro modo de flambagem de uma placa simplesmente apoiada, formado por:
(a) uma semionda, e (b) duas semiondas.

A carga crítica por unidade de comprimento, definida na Eq. (3.79), pode ser transformada em tensão crítica, conforme:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{h} = k \frac{\pi^2 D}{H^2 h} = k \frac{\pi^2 E h^2}{12(1 - \nu^2) H^2} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2) \left(\frac{H}{h}\right)^2} \quad (3.82)$$

A Eq. (3.82) pode ser comparada com a Eq. (3.83), que define a tensão crítica em uma coluna, e pode ser expressa genericamente como:

$$\sigma_{cr} = C_c \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (3.83)$$

onde, a variável C_c corresponde a uma constante, que depende apenas das condições de contorno da coluna.

Verifica-se que as tensões, para colunas e para placas, são diretamente proporcionais ao módulo de elasticidade E do material. Verifica-se, também, que a tensão crítica atuante em uma placa é inversamente proporcional ao quadrado da relação de esbeltez H/h , da mesma forma que na coluna, a tensão crítica é inversamente proporcional ao quadrado do índice de esbeltez L/r . Todavia, enquanto a tensão crítica em uma coluna depende de seu comprimento L , em uma placa, a tensão crítica depende apenas da largura H , não dependendo, portanto, do comprimento L da placa, [Chajes, 1974].

A esbeltez de uma placa é fator de grande influência na forma como o elemento estrutural irá sofrer a flambagem, definindo se esta será elástica ou elásto-plástica, além de determinar a carga de ruptura. Quanto mais robusta for a placa, ou seja, quanto menor for o valor para a relação H/h , mais resistente a flambagem a placa será.

Em algumas situações, é necessária a utilização de placas sem apoios simples, podendo estes serem fixos ou livres. Ainda, poderá ocorrer variação na distribuição de tensões, ou seja, a distribuição de tensões não se manifestando de maneira uniformemente distribuída. Assim, as condições de contorno e a distribuição de tensões interferem no valor do coeficiente de flambagem k , [Åkesson, 2007].

As Figuras 3.22, 3.23 e 3.24 apresentam o valor mínimo para o coeficiente de flambagem de placas, para diferentes condições de contorno e de carga.

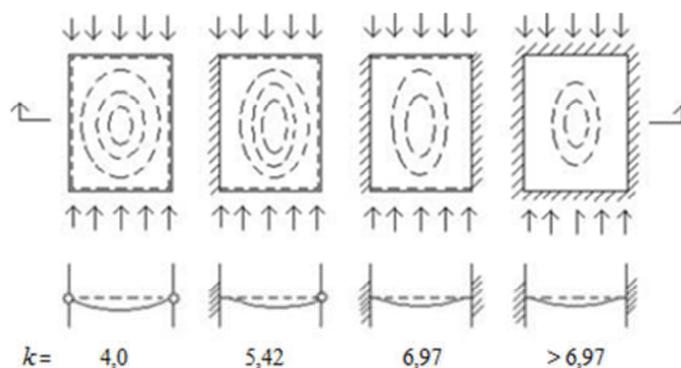


Figura 3.22 - Coeficientes de flambagem para diferentes condições de contorno, em placas com apoios nas quatro bordas, [Åkesson, 2007].

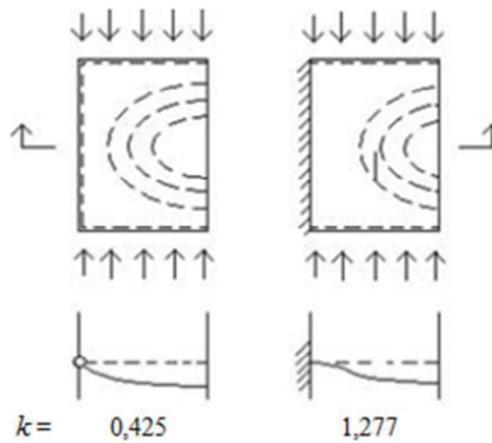


Figura 3.23- Coeficientes de flambagem para diferentes condições de contorno, em placas com apoios em três bordas, [Åkesson, 2007].

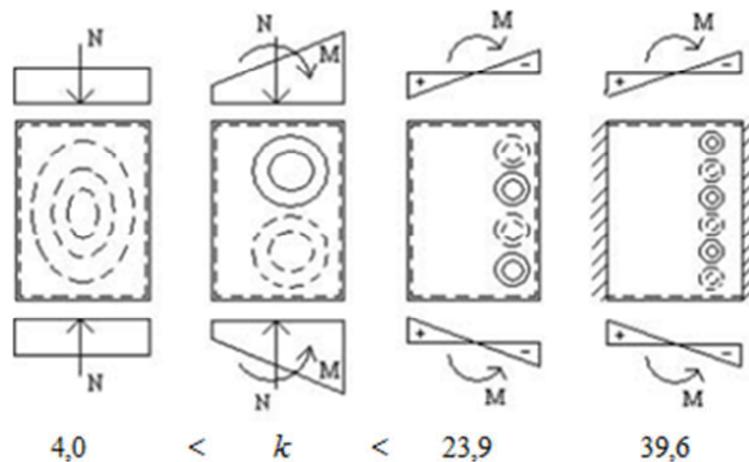


Figura 3.24 - Coeficiente de flambagem para diferentes condições de carregamento, em placas com apoios nas quatro bordas, [Åkesson, 2007].

Para placas submetidas ao cisalhamento, o coeficiente de flambagem k_τ varia de acordo com o valor atribuído para a relação L/H da placa, sendo a tensão crítica de cisalhamento dada por:

$$\tau_{cr} = k_\tau \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2) \left(\frac{H}{h}\right)^2} \quad (3.84)$$

O coeficiente de flambagem para a carga de cisalhamento k_τ é dado conforme:

$$k_\tau = 5,34 + \frac{4}{\left(\frac{L}{H}\right)^2} \quad \left[\frac{L}{H} \geq 1,0\right] \quad (3.85)$$

$$k_\tau = 4 + \frac{5,34}{\left(\frac{L}{H}\right)^2} \quad \left[\frac{L}{H} \leq 1,0\right] \quad (3.86)$$

Neste tipo de carregamento, ver Figura 3.25, observa-se que as forças de cisalhamento em um elemento submetido à flexão são também acompanhadas de momentos de flexão, que devem ser levados em consideração.

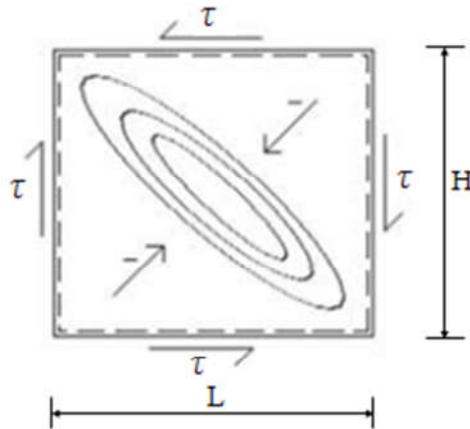


Figura 3.25 - Placa submetida a cisalhamento, [Åkesson, 2007]

3.2.6 Flambagem em placas com perfurações

É comum a utilização de perfurações em placas de aço, seja como elementos de inspeção e manutenção, para efeitos estéticos, ou para diminuir o peso próprio da estrutura. No entanto, a presença destas perfurações, sua geometria e seu tamanho modificam significativamente o desempenho mecânico do elemento estrutural. Nestes casos, com a presença destas perfurações, há uma redistribuição das tensões sobre a placa, o que pode causar mudanças na sua resistência e nas características de flambagem, [Narayanan e Chow, 1984].

3.2.7 Comportamento pós-flambagem de placas finas

Uma placa elástica esbelta não entra em colapso logo após a ocorrência da flambagem, pode suportar cargas significativamente maiores do que sua carga crítica sem se deformar excessivamente. O comportamento das placas difere do esperado quando se considera o comportamento de barras elásticas comprimidas, que suportam apenas um pequeno acréscimo de carga antes que ocorra a deformação excessiva da barra, ver Figura 3.26. A resistência adicional de pós-flambagem de placas finas está relacionada a diversos fatores, no entanto, o principal é que a forma deformada da placa flambada não pode ser desenvolvida a partir da configuração de pré-flambagem, sem que haja uma redistribuição das tensões no plano médio ao longo da placa. Essa redistribuição, que é ignorada na teoria de pequenos deslocamentos para a flambagem elástica, normalmente favorece as regiões menos rígidas da placa, e causa um aumento de eficiência da placa. Uma das causas mais comuns dessa redistribuição está associada com as condições de contorno no plano das bordas carregadas da placa, [Chajes, 1974].

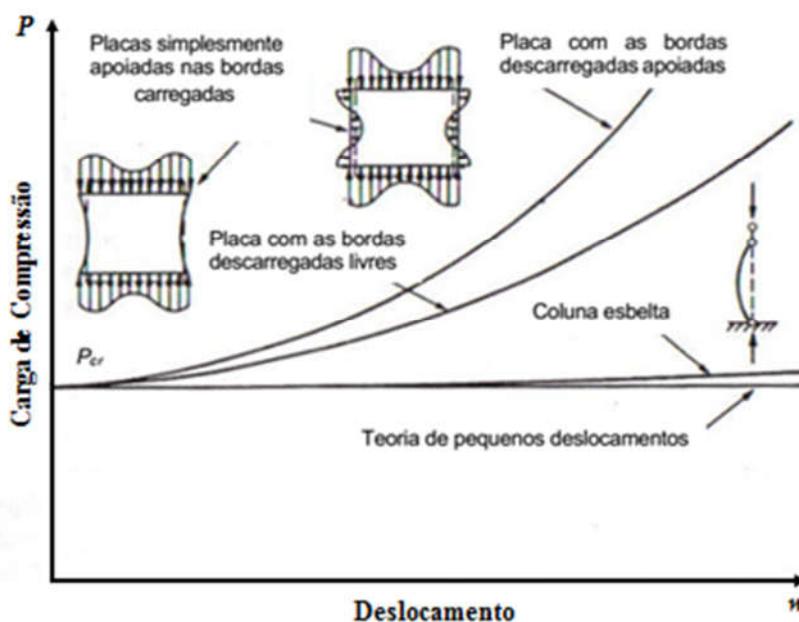


Figura 3.26 – Comportamento de pós-flambagem em placas elásticas esbeltas, [Adaptada de: Trahair e Bradford, 1988].

De acordo com Roorda, 1980, o avanço nas pesquisas relacionadas à área aeronáutica, principalmente após a década de trinta, possibilitou a descoberta de que as placas apresentam

um comportamento mecânico de pós-flambagem que o difere completamente ao de outras estruturas, como estruturas em forma de barras esbeltas, por exemplo. O mínimo acréscimo ao valor da carga crítica em uma barra produzirá o colapso total dessa estrutura, o que não se verifica para o caso de placas, ou seja, estas em estado de flambagem linear apresentam cargas últimas bem mais elevadas do que o valor da carga crítica. Fato que pode ser explicado em função do efeito de grandes deslocamentos que ocorrem na estrutura na fase de pós-flambagem. Segundo Ventsel e Krauthammer, 2001, as condições de vinculação da placa também favorecem o aumento do valor das cargas últimas, pois evitam que ocorra acréscimo dos deslocamentos laterais, quando relacionados a cargas menores do que às cargas últimas.

A carga que define o colapso de uma placa, em seu comportamento elasto-plástico, é denominada de pós-crítica ou última (P_u). A Figura 3.27 mostra que a capacidade final de carga de uma placa não está restrita à ocorrência da flambagem elástica, ou seja, as placas suportam carregamentos superiores à carga crítica, o que possibilita acréscimo de carga após a ocorrência da flambagem elástica [Åkesson, 2007].

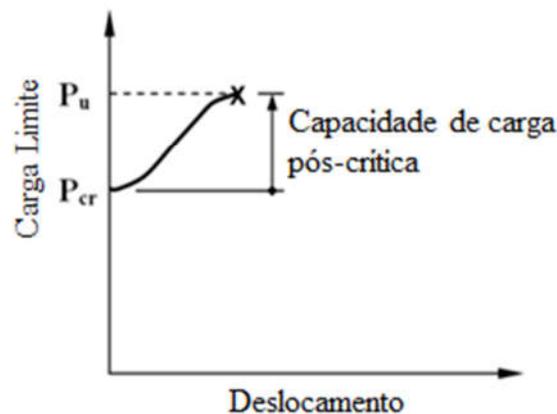


Figura 3.27 - Diagrama carga/deslocamento na extensão pós-crítica, [Åkesson, 2007].

Ainda de acordo com Åkesson, 2007, Figura 3.28, a capacidade das placas suportarem um acréscimo de carga está associada à formação de uma membrana que estabiliza o deslocamento através de uma tensão transversal. Quando se aumenta a carga externa de forma a provocar a flambagem da placa, o que ocorre é uma distribuição não uniforme das tensões provocadas pela carga externa. Isso proporciona um aumento de resistência, o qual se deve ao fato das fibras transversais serem tracionadas após a flambagem, tendendo a estabilizar as fibras longitudinais.

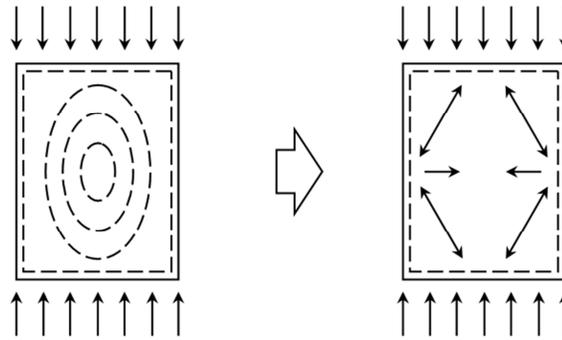


Figura 3.28 - Redistribuição das tensões no estado crítico de pós-flambagem, [Åkesson, 2007].

Ventsel e Krauthammer, 2001, acrescentam que o fenômeno de pós-flambagem em placas não se caracteriza apenas pelo efeito da flexão, argumentam que há também a ação direta das tensões no plano. Assim, as placas possuem uma capacidade de carga pós-flambagem que permite um acréscimo de carga após a ocorrência da deflexão lateral. Em resumo, o colapso da placa não ocorre em função do limite definido pela carga crítica de flambagem, mas para uma carga bem superior a este limite.

Conforme descrito acima, diferentemente do comportamento de barras, as placas apresentam resistência significativa após a ocorrência da flambagem. Se essa resistência pós-crítica for totalmente utilizada, um projeto estrutural eficiente e econômico poderá ser obtido [Mulligan e Peköz, 1983]. Segundo Von Karman et al., 1932, essa reserva pós-crítica de carga não é ilimitada e, de acordo com resultados experimentais, a placa atinge a ruptura quando a tensão de compressão máxima nos bordos não carregados atingir o limite elástico.

Bleich, 1924, propôs a seguinte equação diferencial para a flambagem de placas no regime elasto-plástico:

$$\tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_x h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.87)$$

sendo $\tau = E_t/E$, e E_t corresponde ao módulo de elasticidade tangente do aço.

Logo, a expressão para o cálculo da tensão de flambagem em placas no regime elasto-plástico pode ser representada conforme:

$$\sigma_{EL} = k \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{H}\right)^2 \quad (3.88)$$

O termo $\sqrt{\tau}$ é o fator de redução plástica de uma placa submetida à tensão de compressão uniforme em uma direção, sendo este fator variável, com o tipo de solicitação e as condições de contorno da placa.

A análise da equação diferencial proposta por Von Karman, 1910, e depois por Bleich, 1924, para a análise elasto-plástica é bastante complexa, devendo-se recorrer a métodos numéricos e computacionais.

De acordo com Pérez, 2003, o comportamento pós-crítico de placas finas é representado por um sistema de equações diferenciais de equilíbrio, em que a solução numérica leva a um problema não linear. A solução deste tipo de problema é bastante complexa, o que proporcionou o desenvolvimento de métodos simplificados e aproximados para o tratamento de placas em regime pós-crítico. Um destes métodos, que possui grande aceitação e que é amplamente utilizado pela maioria das normas técnicas de projeto, é o Método das Larguras Efetivas.

Assim, visando simplificar o tratamento das placas finas em regime pós-crítico, Von Karman propôs, em 1932, o Método das Larguras Efetivas. O método mostra que a distribuição de tensões σ , ao longo da largura H , apresenta um andamento claramente não linear, caracterizado por valores baixos na parte central e pela ocorrência de tensões máximas, de valor σ_{max} , junto às bordas longitudinais, [Reis e Camotim, 2001].

A largura efetiva foi definida como uma largura fictícia de placa sobre a qual uma distribuição uniforme de tensão tem a mesma resultante que a distribuição real de tensão sobre toda a largura da placa, Figura 3.29.

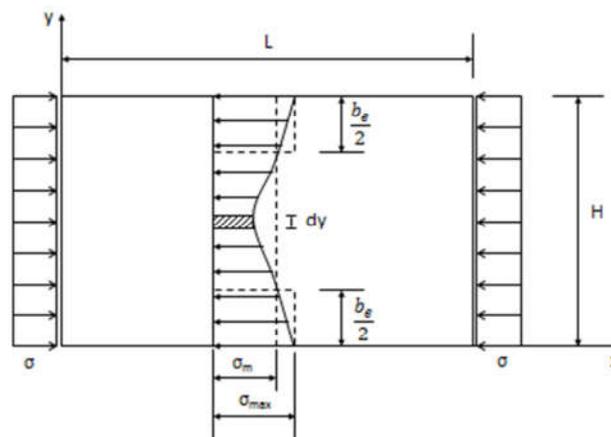


Figura 3.29 - Distribuição não linear das tensões e larguras efetivas de uma placa.

Sendo a tensão máxima σ_{max} , tem-se:

$$\int_0^H \sigma dy = b_e \sigma_{max} \quad (3.89)$$

Considera-se também que a largura efetiva b_e representa uma largura particular da placa, em que ocorre a flambagem, quando a tensão de compressão atinge o limite de escoamento do aço. Então, o valor teórico de b_e para uma placa longa apoiada nas quatro bordas e sujeita à tensão uniforme de compressão, pode ser determinada conforme:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_e}\right)^2 \quad (3.90)$$

Isolando-se b_e , e considerando-se $k = 4$, vem:

$$b_e = C t \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} = 1,9 t \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} \quad (3.91)$$

Onde:

$$C = \frac{\pi}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1,9 \quad \text{e} \quad \nu = 0,3 \quad (3.92)$$

A Eq. (3.91) é a equação clássica de Von Karman para o cálculo da largura efetiva de elementos comprimidos enrijecidos, obtida em 1932.

Com base em resultados experimentais, Winter mostrou que a Eq. (3.91) também é aplicável a placas em que a tensão máxima é menor do que o limite de escoamento do aço. Desta forma, a Eq. (3.91) pode ser reescrita como:

$$b_e = C t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (3.93)$$

onde, σ_{max} é a tensão nas bordas da placa, que pode ser menor do que o limite de escoamento do aço.

Resultados experimentais obtidos por Sechler e Winter e apresentados por Yu, 2000, indicaram que o termo usado na Eq. (3.93) depende de um parâmetro adimensional, conforme:

$$\sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \left(\frac{t}{H}\right) \quad (3.94)$$

Ainda com base em resultados experimentais apresentados em Yu, 2000, Winter desenvolveu a seguinte equação para o cálculo do termo C :

$$C = 1,9 \left[1 - 0,475 \left(\frac{t}{H}\right) \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \right] \quad (3.95)$$

O valor inicial de C , para o caso extremo de grandes relações H/t , ou seja, para placas esbeltas sujeitas a tensões muito altas, coincide com o valor de 1,9, dado pela Eq. (3.92).

A Figura 3.30 mostra a variação de C como função do parâmetro adimensional dado pela Eq. (3.95).

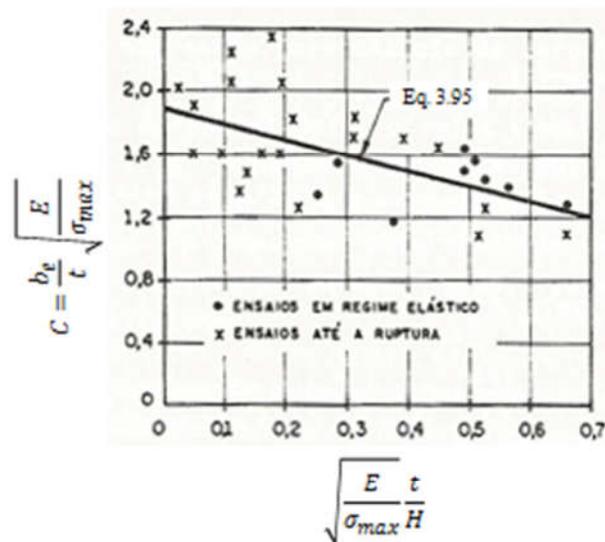


Figura 3.30 - Determinação experimental da largura efetiva, [Yu, 2000].

Como consequência desses resultados experimentais, em 1946, Winter apresentou a expressão modificada para o cálculo da largura efetiva, b_e , de uma placa longa apoiada nas quatro bordas e sujeita à compressão uniforme:

$$b_e = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \left[1 - 0,475 \left(\frac{t}{H} \right) \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \right] \quad (3.96)$$

Na Eq. (3.96), observa-se que a largura efetiva depende não apenas da tensão máxima, mas também da relação H/t . Pode-se obter o valor limite da relação H/t , onde para valores de H/t menores do que este limite, a largura efetiva, b_e , coincide com a largura real H , conforme:

$$\left(\frac{H}{t} \right)_{lim} = 0,95 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (3.97)$$

Considera-se, que a Eq. (3.96) é uma generalização da Eq. (3.91), em dois aspectos: primeiro, pela introdução da tensão máxima em lugar da tensão de escoamento do aço, permitindo, dessa forma, o uso desta equação tanto para tensões de serviço, quanto para a tensão de escoamento do aço (estado limite último); segundo, pela introdução de fatores empíricos.

Entre 1946 e 1968, as normas do AISI adotavam a Eq. (3.96) para o cálculo de elementos enrijecidos. Atualmente, a Eq. (3.96) foi substituída pela Eq. (3.97), por apresentar resultados mais próximos dos encontrados em ensaios, sendo a Eq. (3.98) dada conforme:

$$b_e = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \left[1 - 0,415 \left(\frac{t}{H} \right) \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \right] \quad (3.98)$$

Resultando, para a expressão limite da relação H/t :

$$\left(\frac{H}{t} \right)_{lim} = 1,287 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{max}}} \quad (3.99)$$

A Figura 3.31 mostra a correlação existente entre a Eq. (3.98) e os resultados dos ensaios conduzidos por Sechler e Winter, [Yu, 2000].

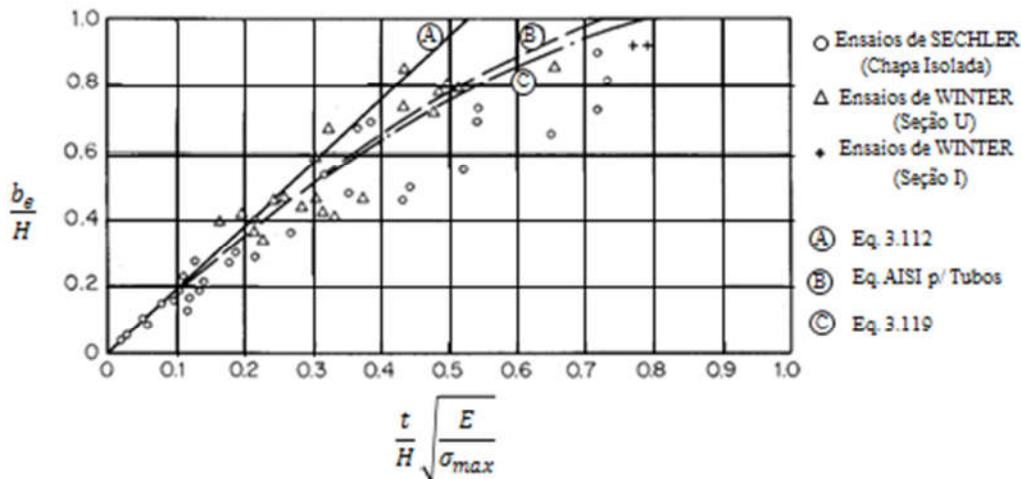


Figura 3.31 - Resultados de ensaios de Sechler e Winter, para elementos comprimidos enrijecidos, [Adaptada de: Yu, 2000].

A Eq. (3.98) se aplica muito bem aos elementos enrijecidos uniformemente comprimidos, com pequena ou nenhuma restrição ao giro nas bordas longitudinais, ou seja, para $k = 4$. Contudo, esta equação pode ser utilizada para elementos com outras condições de borda, ou seja, para valores quaisquer do coeficiente de flambagem k :

$$b_e = 0,95t \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{max}}} \left[1 - 0,208 \left(\frac{t}{H} \right) \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{max}}} \right] \quad (3.100)$$

Segundo Yoo e Lee, 2011, a grandeza relativa à resistência de pós-flambagem está condicionada a diversos fatores, tais como as suas propriedades dimensionais, as condições de contorno impostas, os tipos de carregamento, a relação entre a tensão à flambagem e a tensão que define o limite de escoamento. Portanto, o estudo da teoria de flambagem elasto-pástica é muito complexo e também de difícil aplicação, o que torna necessário recorrer à utilização de métodos computacionais para a resolução destes tipos de problemas.

3.2.8 Características da Flambagem Elástica e Elasto-plástica

O estudo da flambagem elástica e elasto-plástica de placas de aço permite compará-las considerando-se suas características físicas. Segundo diversos pesquisadores, dentre os quais El-Sawy et al., 2004, placas submetidas à compressão uniaxial podem entrar em colapso em função da falha do material, ou devido a um deslocamento lateral da placa para fora do plano.

Em placas finas, ou seja, placas com a espessura muito pequena quando comparada com as demais dimensões, a instabilidade estrutural ocorre para uma tensão crítica (σ_{cr}) bem inferior à tensão de escoamento (σ_y) do material.

3.2.9 Análise do problema de Flambagem Linear

A análise da flambagem elástica linear em componentes estruturais é considerada a forma mais simples e elementar de flambagem, sendo o seu estudo fundamental para a compreensão do fenômeno da flambagem em estruturas mais complexas, incluindo-se as estruturas sujeitas à flambagem elasto-plástica, ou aquelas que apresentam imperfeições como as geométricas e as residuais, por exemplo [Wang e Wang, 2007].

Ainda segundo Wang e Wang, 2007, a carga crítica que provoca o surgimento da deformação elástica lateral é de grande importância, visto que fornecerá a base para a modelagem matemática relativa à flambagem, as quais são normalmente utilizadas na verificação em soluções numéricas e na modelagem computacional.

Para Vinson, 2005, a análise elástica da flambagem em placas envolve a solução de equações diferenciais parciais, através da transformação destas em equações algébricas lineares e homogêneas. Como se assume que a estrutura possui um comportamento elástico linear, as cargas de flambagem estão superestimadas. Uma vez que a carga de flambagem não é conhecida, *a priori*, as equações de equilíbrio do elemento finito, para este tipo de análise, envolvem a solução de equações algébricas homogêneas, cujo valor próprio mais baixo corresponde à carga de flambagem, e o vetor próprio associado representa o primeiro modo de flambagem.

3.2.10 Análise do problema de Flambagem Não Linear

Segundo Chajes, 1974, levando-se em consideração o material do elemento estrutural, assume-se uma relação de linearidade entre as tensões e as deformações para as tensões que antecedem a tensão crítica, o que acarreta uma resistência extra da placa em relação às deformações iniciais. Se isto não ocorrer, deve-se substituir a teoria para a flambagem elástica linear, por uma análise que envolva o comportamento não linear para a relação entre as tensões e as deformações existentes. Também menciona que toda a análise é realizada levando-se em consideração uma geometria inicial da estrutura indeformada, porém, na ausência desta hipótese, a análise passa a ser designada como não linear geométrica.

Então, devido à grande complexidade que envolve o estudo e a resolução de problemas não lineares em placas de aço perfuradas, torna-se necessária a aplicação de métodos computacionais e a utilização de algoritmos específicos para uma análise não linear física [Madenci e Guven, 2006].

3.2.11 Efeito das Imperfeições Geométricas Iniciais

Diversos pesquisadores têm analisado a influência das imperfeições iniciais na integridade estrutural de placas. Por exemplo, Carlsen e Czujko, 1978, concluíram que a presença de imperfeições poderá ser benéfica ou não, conforme a sua forma e o modo dominante. Mansour et al., 1990, concluíram que, como o aumento de resistência é muito sensível a qualquer deformação local da placa, as deformações iniciais não devem ser incorporadas ao projeto. Segundo Pasqualino et al., 2001, diferentes níveis de carga, condições de contorno e a magnitude das imperfeições iniciais são fatores de grande importância e de influência na resistência à flambagem.

Segundo Gordo e Guedes Soares, 2014, os elementos de placa presentes em construções navais, e de forma especial na construção de navios, apresentam diversas imperfeições iniciais que são resultantes do processo de fabricação nas siderúrgicas, do processamento em caldeirarias e dos esforços a que são sujeitos nas operações de montagem. O autor menciona que diversos estudos, alguns relacionados à construção naval e outros às estruturas de engenharia civil, quantificaram o nível das imperfeições em placas finas de forma a correlacioná-los com as características da placa. Conclui que a presença dessas

imperfeições nesses elementos os torna diferenciados, quando solicitados à tração ou à compressão.

Quando a placa está submetida à tração, a característica dominante consiste na variação do módulo secante inicial. Devido à presença das imperfeições, o módulo tangente inicial apresenta um valor ligeiramente inferior ao módulo tangente da placa perfeita, em igualdade de circunstâncias das condições de contorno. Como consequência, as placas submetidas à tração na seção de um navio terão sua rigidez diminuída e, inevitavelmente, também a rigidez do casco será diminuída. No entanto, para níveis normais de imperfeições, esta característica é irrelevante e pode ser desprezada. Porém, quando submetidas à compressão, as consequências das imperfeições tornam-se muito mais acentuadas. De fato, a presença de imperfeições em elementos placa faz com que as curvas de tensão-deformação possuam um melhor comportamento próximo do colapso, deixando de fazer sentido falar-se em carga crítica. Em outras palavras, o colapso súbito que caracteriza as placas quase perfeitas desaparece, e quanto maior a amplitude das imperfeições geométricas iniciais, mais suave será a representação das curvas tensão-deformação [Gordo e Guedes Soares, 2014].

Por outro lado, a forma e a amplitude das imperfeições ao longo de uma placa influenciam o modo de colapso, provocando variações na resistência última da placa, sendo estas normalmente negativas. Daí a necessidade de quantificação da forma e amplitude das imperfeições características da placa [Gordo e Guedes Soares, 2014].

Já Amante, 2006, explica que as distorções oriundas de um processo de fabricação, também denominadas de imperfeições geométricas iniciais, são deformações dimensionais permanentes que ocorrem na estrutura e representam quantitativamente o afastamento da superfície real em relação à superfície idealizada na concepção do projeto. Este tipo de imperfeição, caracterizado pela forma e magnitude de sua distribuição, é a principal causa da obtenção de cargas de colapso distintas, em componentes laminares nominalmente idênticos. Diversos são os fatores que podem gerar distorções, dentre os quais se encontram a forma de fabricação do produto, o transporte e a estocagem do produto, porém o principal fator está associado aos processos térmicos de fabricação, sendo o processo de soldagem o principal.

De acordo com Masubuchi, 1980, as distorções são bem caracterizadas em relação ao seu tipo e podem ser classificadas como: contração transversal, distorção angular, distorção rotacional, contração longitudinal, distorção de flambagem e distorção de flexão, Figura 3.32.

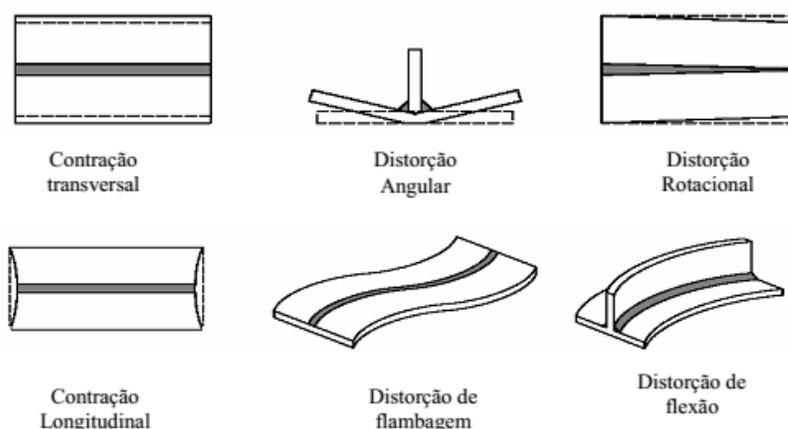


Figura 3.32 – Tipos de distorção, [Amante, 2006].

Ainda segundo Amante, 2006, essas distorções resultam em vários problemas na construção naval e *offshore*. Os principais efeitos provenientes destas distorções são: desalinhamento de componentes estruturais, dificuldade de automação dos processos de fabricação, grande quantidade de trabalho manual, aumento de tempos e custos de produção, redução de eficiência dos processos de fabricação, imprecisão do produto final e perda de resistência estrutural.

As distorções adicionadas aos elementos estruturais nos processos de fabricação, e que estão presentes em construções navais e *offshore*, possuem efeito negativo em relação à resistência limite das estruturas oceânicas. Com a presença dessas distorções em placas e nos demais elementos estruturais, há o aumento de chance de falha por flambagem dessas estruturas. A falha por flambagem ocorre por instabilidade estrutural, quando é alcançada uma carga crítica em compressão axial [Amante, 2006].

3.3 Simulação Numérica

Em todas as etapas que envolvem o processo de preparação de uma simulação numérica, deve ter-se em conta que os métodos numéricos, tal como o método dos elementos finitos, por exemplo, são métodos de aproximação. Por este motivo, a realização de uma simulação numérica é sempre um modo aproximado para se resolver um problema complexo. Consequentemente, a utilização destes métodos deve ser evitada sempre que existam abordagens ou soluções analíticas de pequena complexidade para o problema que se pretende resolver. Adicionalmente, quando se recorre à utilização de métodos aproximados para

resolver problemas de engenharia, é extremamente importante desenvolver a capacidade de não só identificar as possíveis fontes de erros de aproximação, mas também estimar a magnitude destes erros. Em todo o processo de preparação e resolução numérica de um problema de engenharia, é de vital importância dominar todos os procedimentos de modelagem, isto é, de definição de todas as componentes geométricas, das propriedades dos materiais e dos meios envolvidos, das condições de contorno e das solicitações a que o sistema a simular se encontra sujeito. A qualidade e o rigor com que estas etapas são definidas irão influenciar de forma determinante o resultado final a ser obtido [Teixeira Dias et al., 2010].

3.3.1 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais utilizados e, provavelmente, um dos mais difundidos no meio acadêmico e científico. É um método utilizado em diversas áreas do conhecimento, sendo de grande aplicação nas áreas da engenharia e da matemática.

No passado, de acordo com Galambos, 1968, e Bushnell, 1974, o método das diferenças finitas era amplamente utilizado na análise de flambagem. Afirmaram que este foi substituído pelo MEF em função de sua versatilidade [Castro e Silva, 2006].

Considerando uma aplicação específica para análise de tensões em placas, o MEF pode ser dividido em duas categorias, envolvendo problemas de valor de contorno: problemas relacionados ao equilíbrio e problemas de autovalores. Os problemas de equilíbrio buscam verificar os deslocamentos e a distribuição de tensões no estado estacionário. Os problemas de autovalores podem ser considerados como uma extensão dos problemas de equilíbrio, onde certos parâmetros, como os valores críticos das cargas de flambagem, são determinados além das configurações de estado estacionário [Rao, 2005].

3.3.2 Fundamentos do MEF

Atualmente, o MEF é aplicado à análise e ao estudo de fenômenos e problemas dos mais diversos, desde o estudo de sistemas vibratórios, análise do comportamento de materiais, resolução de problemas de condução de calor e da mecânica dos fluidos, eletricidade e magnetismo, impacto, conformação plástica de materiais, estruturas metálicas e/ou não

metálicas, dimensionamento de grandes estruturas (por exemplo, barragens e pontes), hidrodinâmica e aerodinâmica, dentre outras. Na modelação do comportamento de materiais, o MEF permite considerar uma grande diversidade de comportamentos e modelos constitutivos, tais como elasticidade linear (lei de Hooke), plasticidade, viscoplasticidade, hiperelasticidade, termoelasticidade, dentre outros [Teixeira Dias et al., 2010].

Segundo alguns pesquisadores, pode-se definir o MEF como um poderoso método matemático de análise e resolução, quase sempre aproximada, de problemas científicos e de engenharia. De forma geral, é utilizado na busca de soluções de problemas complexos nas diversas áreas do conhecimento, para as quais não se conhece uma solução exata que possa ser expressa de forma analítica. Portanto, o MEF é um método numérico e não um método analítico.

Como ferramenta auxiliar de projeto em problemas de engenharia, O MEF pode ser analisado de duas formas completamente diferentes: uma sobre o ponto de vista do usuário, que recorre ao uso de um programa comercial de simulação numérica, baseado no MEF, para resolver problemas de engenharia, e o outro, do ponto de vista do programador, que desenvolve o programa propriamente dito. Neste contexto, este trabalho será desenvolvido com o auxílio do MEF do ponto do usuário, ou seja, será utilizado para a resolução dos problemas de engenharia, que serão apresentados nos próximos tópicos, um programa comercial, o *software* Ansys®. Ainda sobre o ponto de vista do usuário, é importante que o mesmo domine os processos físicos e/ou mecânicos que pretende analisar, assim como todas as características e especificidades de utilização do MEF relativamente ao problema a ser analisado. Observando-se que o MEF é um método computacional com o qual é possível realizar a análise e o estudo não do modelo físico real, mas, sim, de um modelo virtual criado pelo próprio usuário, isto é, a existência de erros grosseiros na modelagem do problema conduzirá a resultados numéricos que, apesar de estarem de acordo com o modelo virtual, poderão estar desajustados em relação ao problema real a ser resolvido. Portanto, o usuário necessita, além do completo conhecimento das características físicas e geométricas do problema, ter experiência e espírito crítico para perceber não apenas as potencialidades do *software* utilizado, mas, sobretudo, as suas limitações [Teixeira Dias et al., 2010].

Sendo assim, é possível empregar genericamente o MEF para resolver numericamente um problema que envolva soluções analíticas complicadas, conforme descrito a seguir:

3.3.2.1 Discretização do domínio em Elementos Finitos

O MEF é, essencialmente, um método de discretização. Pode ser aplicado para a resolução de problemas unidimensionais, mas, mais frequentemente, pretende-se determinar a solução numa área ou volume tridimensional genérico. Independentemente do caso considerado, deve-se representar o domínio do sistema ou uma simplificação viável deste. Inicialmente, e em função do tipo de problema a ser resolvido, o domínio que se pretende estudar é dividido em um número finito de segmentos, áreas ou volumes menores, chamados de elementos finitos. A esta etapa, dá-se o nome de discretização, [Teixeira Dias et al., 2010]. No caso de uma placa, esta será dividida em um número finito de elementos, não sobrepostos e conectados entre si através dos pontos nodais, conforme Figura 3.33.

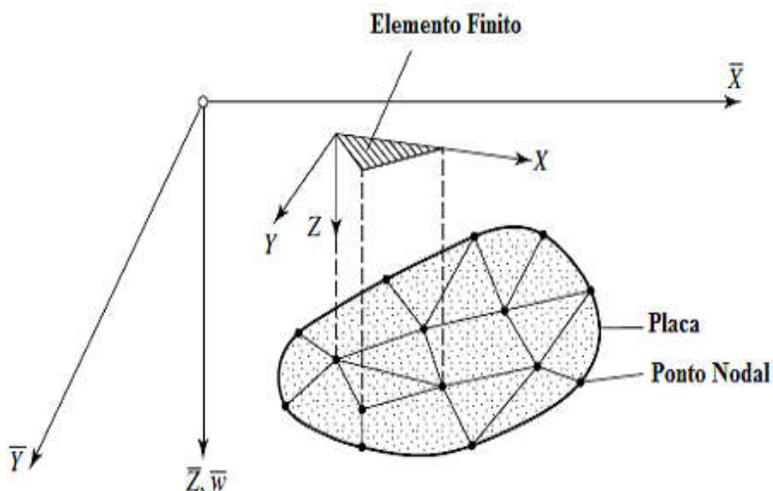


Figura 3.33 – Discretização de elementos finitos triangulares em uma placa, [Szilard, 2004].

Segundo Madenci e Guven, 2006, um nó define a localização de coordenadas no espaço onde existem graus de liberdade e as ações do problema físico. Variáveis nodais atribuídas a um elemento são chamadas de graus de liberdade do elemento. Os graus de liberdade de um nó são ditados pela natureza física do problema e pelo tipo de elemento.

Os elementos finitos podem assumir diversas formas geométricas. Para a resolução de problemas unidimensionais, ou formados por componentes unidimensionais, utilizam-se elementos finitos em forma de segmento de reta, curva ou barra. Para os bidimensionais, normalmente são utilizados elementos de área na forma quadrada ou triangular. Para problemas tridimensionais, elementos na forma de hexaedros, tetraedros ou pentaedros, Figura 3.34, [Madenci e Guven, 2006].

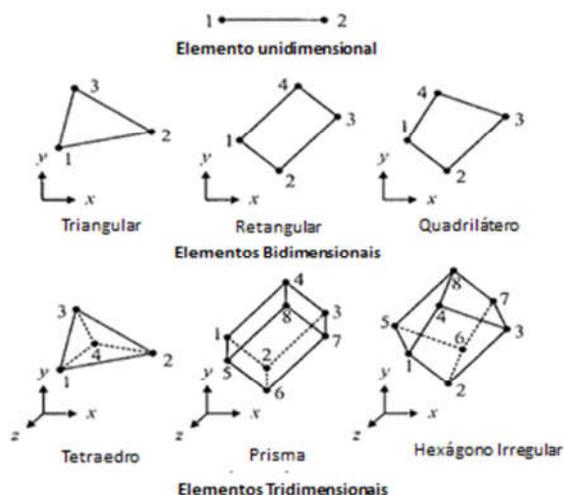


Figura 3.34 – Algumas formas geométricas possíveis para elementos finitos. Elementos finitos: unidimensional, bidimensionais e tridimensionais, adaptada de: [Adaptada de: Madenci e Guven, 2006].

Geralmente, os nós, de acordo com Madenci e Guven, 2006, e conforme pode ser observado na Figura 3.34, estão posicionados nos vértices dos elementos, no entanto, dependendo do tipo de formulação adotada para o elemento finito, estes também poderão estar situados no meio entre duas arestas, em suas faces ou, ainda, no seu interior.

Cada elemento, identificado pelo número do elemento, é definido por uma sequência específica global de numeração dos nós, chamada de conectividade. Para a sequência específica, usualmente inicia-se a numeração a partir da esquerda e numeram-se os nós no sentido anti-horário, obedecendo ao nível de posicionamento do nó, [Madenci e Guven, 2006]. A Figura 3.35 apresenta um exemplo de discretização do domínio.

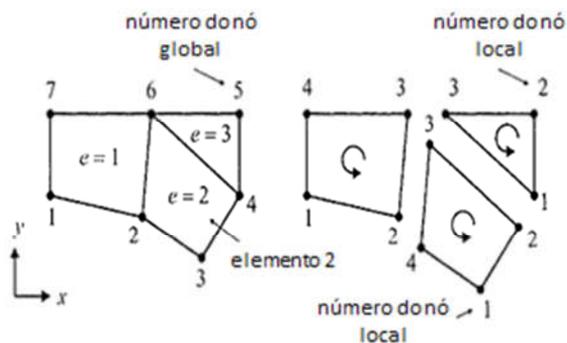


Figura 3.35 – Discretização do domínio: elemento e numeração dos nós, [Adaptada de: Madenci e Guven, 2006].

A Tabela 3.1 descreve e posiciona os elementos apresentados na Figura 3.35.

Tabela 3.1 – Descrição da numeração do elemento em função dos nós.

Número do elemento	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
1	1	2	6	7
2	3	4	6	2
3	4	5	6	-

3.3.2.2 Sistema Global de Equações

O comportamento da placa, em uma abordagem utilizando o MEF, é definido por uma função deslocamento variável segundo a normal ao plano da placa. Devem ser considerados, além do deslocamento vertical dos nós, os giros destes em torno das duas direções do plano. Assim, cada nó possui três graus de liberdade. Desta forma, desenvolvem-se as matrizes correspondentes aos elementos das placas.

Neste item, serão utilizadas como base para a elaboração do texto as seguintes referências: [Alves Filho, 2000; Wunderlich e Pilkey, 2002; e Ugural e Fenster, 2003].

O uso do MEF para a análise de uma placa, com solução em deslocamentos, requer a descrição do campo de deslocamentos no interior do elemento em função dos deslocamentos dos pontos nodais. Considera-se para um elemento finito de placa usual os graus de liberdade nodais, sendo estes o deslocamento transversal (w) e as rotações (θ_x) e (θ_y).

Utilizando-se de notação matricial, pode-se escrever:

$$\{u\} = [N]\{U^e\} \quad (3.101)$$

Na Eq. (3.101), $[N]$ representa a matriz que contém as funções de interpolação $N_i(x, y)$, que estão associadas a cada nó do elemento. O vetor deslocamento, em um ponto qualquer no interior do elemento, é dado conforme:

$$\{u\} = \{w, \theta_x, \theta_y\}^T \quad (3.102)$$

e o vetor de deslocamentos nodais:

$$\{U^e\} = \{w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \dots, w_n, \theta_{xn}, \theta_{yn}\}^T \quad (3.103)$$

onde, n corresponde ao número de nós do elemento.

A determinação das deformações generalizadas ou curvaturas dá-se a partir das derivadas das funções de interpolação, sob a forma:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U^e\} \quad (3.104)$$

sendo que, $[B]$ representa a matriz que contém as derivadas das funções de interpolação do elemento, e o vetor das curvaturas, em um ponto qualquer do elemento, é dado conforme:

$$\{\varepsilon\} = \{\kappa_x, \kappa_y, \chi\}^T \quad (3.105)$$

A determinação das tensões generalizadas ou dos momentos fletores e torçores, pode ser definida a partir das curvaturas, de acordo com:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (3.106)$$

em que, $[D]$ representa a matriz das constantes elásticas para o problema da flexão em placas, e o vetor das tensões generalizadas, em um ponto qualquer do elemento, é dado conforme:

$$\{\sigma\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T \quad (3.107)$$

Para determinar as equações de equilíbrio de um elemento, pode-se utilizar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (*PTV*). Impõe-se, primeiramente, um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente compatíveis com o elemento, sob a forma:

$$\delta\{u\} = [N]\delta\{U^e\} \quad (3.108)$$

que, por sua vez, produzirá um campo de deformações virtuais compatíveis, dado por:

$$\delta\{\varepsilon\} = [B]\delta\{U^e\} \quad (3.109)$$

Caso o elemento esteja submetido, em cada ponto, a um carregamento externo, conforme:

$$\{q\} = \{p_z, 0, 0\}^T \quad (3.110)$$

e, sendo as forças nodais generalizadas, dadas de acordo com:

$$\{F^e\} = \{F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, \dots, F_{zn}, M_{xn}, M_{yn}\} \quad (3.111)$$

o *PTV* afirma que, durante qualquer deslocamento virtual imposto ao elemento, o trabalho externo total realizado pelas forças nodais deve ser igual ao trabalho interno total realizado pelas forças internas, ou seja:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (3.112)$$

A Eq. (3.112) pode ser reescrita, em função das definições anteriores, da seguinte forma, observando-se que as integrais são aplicadas ao domínio da área do elemento A_e :

$$\int_{A_e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = \int_{A_e} \delta\{u\}^T \{q\} dA \quad (3.113)$$

Substituindo-se as Eq. (3.101) a (3.109) na Eq. (3.113), resulta:

$$\delta\{U^e\}^T \int_{A_e} [B]^T [D] [B] dA \{U^e\} = \delta\{U^e\}^T \int_{A_e} [N]^T \{q\} dA \quad (3.114)$$

Eliminando-se os deslocamentos virtuais na Eq. (3.114), tem-se:

$$\int_{A_e} [B]^T [D] [B] dA \{U^e\} = \int_{A_e} [N]^T \{q\} dA \quad (3.115)$$

A Eq. (3.115) corresponde ao sistema de equações de equilíbrio do elemento, podendo ser reescrita na forma:

$$\{P^e\} = [K^e] \{U^e\} \quad (3.116)$$

onde:

$$[K^e] = \int_{A_e} [B]^T [D] [B] dA \quad (3.117)$$

representa a matriz de rigidez do elemento de placa, e:

$$\{P^e\} = \int_{A_e} [N]^T \{q\} dA \quad (3.118)$$

é o vetor das forças nodais equivalentes do elemento, dado por:

$$\{P^e\} = \{F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, \dots, F_{zn}, M_{xn}, M_{yn}\}^T \quad (3.119)$$

Aplicando-se em cada nó da estrutura as equações de equilíbrio de forças e momentos, e considerando-se as contribuições de todos os elementos que concorrem em um mesmo nó, tem-se:

$$\{P\} = [K] \{U\} \quad (3.120)$$

onde, $\{P\}$ é o vetor das forças nodais global da placa, $[K]$ é a matriz de rigidez global da placa, e $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos nodais global da placa.

Após a aplicação das condições de contorno, a Eq. (3.120), que representa o sistema de equações de equilíbrio da placa, poderá ser resolvida e fornecerá os deslocamentos nodais da placa. Através dos deslocamentos globais, constrói-se o vetor de deslocamentos nodais de cada elemento $\{U^e\}$. Pode-se, então, calcular as deformações ε e as tensões σ na placa, empregando-se as Eq. (3.104) e (3.106), respectivamente.

3.3.3 Convergência do MEF

A convergência do método dos elementos finitos está diretamente relacionada ao número de nós do elemento, à qualidade das funções de interpolação empregadas, e ao refinamento da malha de elementos finitos utilizada. No geral, para elementos mais complexos, onde há um maior número de nós, exige-se uma malha menos refinada para a obtenção de um resultado com boa precisão.

As funções utilizadas para a interpolação precisam garantir a continuidade dos deslocamentos e das rotações no interior do elemento, além de garantir a continuidade na interface entre dois elementos. Na teoria de Kirchhoff para placas finas, as rotações são obtidas a partir da derivada do deslocamento transversal e, dessa forma, torna-se extremamente difícil a continuidade das rotações no cruzamento entre duas interfaces, porque para cada linha da interface, ter-se-á deslocamentos transversais diferentes.

De acordo com Hinton e Owen, 1986, este inconveniente na análise de placas finas através do método dos elementos finitos poderá ser evitado empregando-se a teoria de placas de Mindlin, que leva em consideração a deformação em função do corte, e na qual são consideradas as seguintes relações:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \varphi_x \quad (3.121)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \varphi_y \quad (3.122)$$

em que, ϕ_x e ϕ_y correspondem às deformações médias por distorção da seção transversal, ou seja, deformação por corte segundo as direções x e y , respectivamente.

A partir da teoria de Mindlin, as rotações podem ser interpoladas de forma independente dos deslocamentos e, assim, a continuidade das rotações pode ser assegurada na interface entre os elementos.

3.4 Teoria Construtal

É fácil perceber porque um dos temas mais comentados na atualidade, e que está entre um dos principais em análise pela ciência, refere-se ao estudo do *design* na natureza. Um dos objetivos da ciência é o de dar sentido ao que não pode ser facilmente discernido pelo ser humano e, neste sentido, são executadas numerosas observações que tendem a armazenar de forma compacta fenômenos e, mais à frente, mais compacta ainda, leis que passam a representar estes fenômenos [Bejan, 2000].

Neste contexto de atualidade e de percepção da importância do *design* de estruturas naturais, destaca-se a Teoria Construtal. Sua base está fundamentada na percepção de que o *design* de estruturas naturais são consequências de um fenômeno físico, que ocorre em sistemas de pequeno e de grande porte, como os flocos de neve, os raios, os rios, os tecidos vivos vascularizados, o tráfego nas cidades, a difusão de novas ideias, dentre outros. Suas diretrizes e seus principais avanços na ciência estão diretamente relacionados com os estudos desenvolvidos por seu idealizador, o engenheiro de origem romena e radicado nos Estados Unidos, Adrian Bejan.

A Figura 3.36 mostra alguns exemplos do *design* de estruturas naturais presentes no cotidiano das pessoas e que representam configurações que podem ser associadas à Teoria Construtal.



Figura 3.36 – Exemplo de sistemas de fluxo naturais: (a) formação de raios, (b) rios e afluentes, (c) leito seco de rio, e (d) ramificações de uma árvore, [Adaptado de: <https://oloboeocordeiro.files.wordpress.com/2011/04/amora-11.jpg?w=300&h=197;> [http://www.rogeriobastos.com.br/2010/07/geografia-rs-hidrografia.html;](http://www.rogeriobastos.com.br/2010/07/geografia-rs-hidrografia.html) <http://politicanapauta.blogspot.com.br/search?updated-max=2016-02-15T09%3A13%3A00-03%3A00&max-results=30;> <http://vocesabiapergunteaqui.blogspot.com.br/2015/03/10-incriveis-curiosidades-sobre-as.html>].

Na Figura 3.37, apresenta-se um dos inúmeros exemplos que pode ser proveniente da observação humana para com os elementos da natureza, e que reflete as ideias propostas pela Teoria Construtal.



Figura 3.37 - Tráfego nas cidades “Cidade de Boa Vista – Capital de Roraima”, [Adaptada de: <http://cidadesemfotos.blogspot.com.br/2012/02/boa-vista-rr.html>].

O estudo da Teoria Construtal pressupõe alguns questionamentos. Qual é a base fundamental para a hierarquia, a evolução no tempo, a complexidade e o ritmo para as estruturas denominadas de naturais? Há algum princípio físico único que seja suficiente para deduzir a forma e o ritmo no qual as estruturas naturais são construídas, sem a utilização de processos empíricos? Por que a geometria caracteriza os sistemas naturais de escoamento? [Bejan, 2006].

Estes são alguns dos muitos questionamentos há muito expressos por cientistas e pesquisadores, onde normalmente as respostas obtidas são não determinísticas. Demócrito (460-370 a.C.), filósofo grego, expôs em seus estudos que as formas geométricas encontradas na natureza estavam relacionadas à mudança e à necessidade. Essa linha de raciocínio, em que as formas provenientes da natureza são aceitas, observadas e copiadas, continua presente na atualidade.

Entretanto, a Teoria Construtal, de acordo com Bejan et al., 2008, ver Figura 3.38, propõe a inversão deste pensamento, ou seja, inicialmente invoca-se a lei construtal e, com isso, teoricamente, deduz-se a arquitetura da forma. Em seguida, compara-se a configuração teórica obtida na dedução com a dos fenômenos naturais; e o acordo entre as geometrias é o que validará a lei construtal.

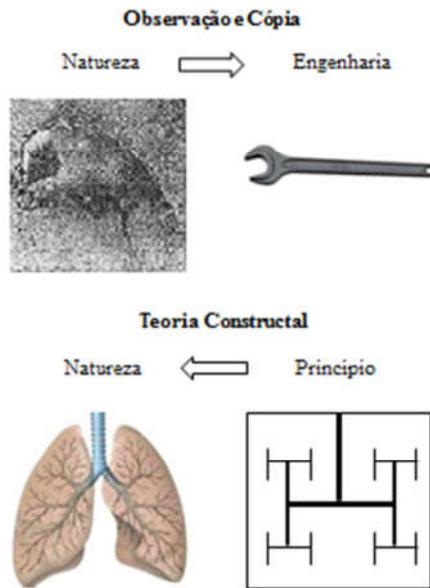


Figura 3.38 - Exemplo da cópia de estruturas naturais pela engenharia, e a proposta de dedução de tais formas por um princípio, [Adaptada de: Bejan, 2006].

Quatro observações empíricas baseiam o raciocínio desenvolvido por [Bejan, 2000]:

- 1 - A forma geométrica é gerada em sistemas naturais que, internamente, possuem a necessidade de escoar e são orientados por gradientes, como temperatura e pressão;
- 2 - São suficientes três formatos para que se possa cobrir o mundo vivo ao nosso redor: rede de distribuição em forma de árvore, como os pulmões e as bacias hidrográficas, cortes transversais em que a geometria é aproximadamente circular, como as veias, e cortes transversais cuja geometria aproximada é a semicircular, como nos rios. A Teoria Construtal não relaciona o estudo da forma esférica, porque neste sistema não há escoamento interno;
- 3 - As formas podem ter mesmo formato, porém jamais serão idênticas; são exclusivas para cada situação;
- 4 - As formas mencionadas são poucas e podem ser observadas livremente na natureza; estas aparecem tanto nos sistemas de escoamento inanimados, quanto nos sistemas animados.

Se existir um único princípio, responsável pela geração de todas estas formas, este se manifestará em todos os lugares. Este princípio é chamado na Teoria Construtal de Lei

Construtal; para a geração e configuração de escoamento. Diz que, “para que um sistema de volume fixo possa persistir no tempo, isto é sobreviver, sua configuração deve evoluir de tal forma que possibilite maior e maior acesso para as correntes que fluem através dele” [Bejan, 2000]. Essa lei corresponde à base da Teoria Construtal e representa uma nova extensão da termodinâmica: a termodinâmica de sistemas fora do equilíbrio e com configurações. Pela Teoria Construtal, parâmetros geométricos são utilizados como critério para a maximização e a minimização em um sistema de escoamento.

Diversos são os exemplos e as áreas onde este princípio pode ser empregado, tais como os encontrados na biofísica, na geofísica e em sistemas naturais, em que as geometrias se modificam de forma a atingirem um objetivo específico, como a minimização da resistência global para as correntes internas, por exemplo [Bejan, 2009].

De forma geral, percebe-se que existe semelhança no formato estrutural dos escoamentos que ocorrem na natureza. Sua semelhança está relacionada à tendência universal que possuem os sistemas abertos que escoam, que é de maximizar o acesso ao fluxo ou minimizar a resistência ao escoamento.

Pepe, 2008, afirma que é possível perceber que existe uma tendência natural dos rios se deslocarem em direção ao oceano, das veias em direção ao coração, e das pessoas para os seus locais de trabalho, sempre em função de um menor consumo de energia. Sistemas suscetíveis a modificações ou ao movimento são sistemas onde há escoamento. Nestes sistemas, existem resistências ao escoamento e o seu movimento tem como objetivo a maximização do fluxo em função das resistências impostas pelo sistema. Ao longo do tempo, no seu ritmo, o *design* vai sendo aperfeiçoado de forma natural. Deve-se observar também que o movimento não age de forma isolada, há a integração com todos os demais elementos e sistemas que estejam ao seu redor, ou seja, há evolução no tempo para a minimização das resistências ao escoamento, de forma a equilibrar o sistema local e o global.

Formas e estruturas mais complexas, que fazem parte do nosso cotidiano, evoluem e se aperfeiçoam ao longo do tempo, e a lei construtal mostra esse procedimento. A percepção e a observação do *design* de projetos, oriundos de sistemas naturais, podem servir como ponto de partida para a geração de novos *designs* e projetos e, até mesmo, para a reformulação de projetos existentes, pois os sistemas naturais apresentam em seus *designs* processo evolutivo e de seleção natural ao longo do tempo.

Bejan, 2000 e Bejan et al., 2008, afirmam que a Teoria Construtal é fundamentada em um princípio de configuração, geração e evolução no tempo, na direção do maior acesso de fluxo global em sistemas cujas geometrias podem variar livremente.

Uma das melhores formas de conectar-se um componente a vários componentes é a forma em árvore (*tree-shaped network*), pois assim, pode-se conectar um ponto a infinitos pontos, [Bejan e Zane, 2012].

Também é importante o estudo de estruturas onde existe escoamento com mais de um objetivo, pois suas descobertas assemelham-se ao chamado animal *design*. Estas estruturas são obtidas invocando-se um princípio, a Lei Construtal, e não copiando-se a natureza (mimetismo).

Um nome adequado para a miniaturização é a chamada vascularização (termo utilizado para definir múltiplos caminhos). Cada estrutura sólida multi-escala que deva ser resfriada, aquecida ou utilizada pelas correntes de fluido, deve ser vascularizada. Isto significa árvores, espaços e paredes sólidas, com cada detalhe geométrico especificado e posicionado no lugar correto do espaço disponível. Estas serão estruturas sólido-líquido com múltiplas escalas que serão distribuídas não uniformemente através do volume, sendo a distribuição tão não uniforme que o *design* poderá ser confundido como randômico. Essa não uniformidade é o que pode ser chamada de impressão digital da Lei Construtal, [Bejan e Zane, 2012].

Bejan e Zane, 2012, definem duas razões para que o futuro pertença à vascularização:

- a) Geométrica: nossas mãos são poucas (correntes, entradas e saídas), mas elas devem alcançar infinito número de pontos do volume de material que nos serve (artefatos, aparelhos domésticos), extensões criadas pela engenharia que são extensões do nosso próprio corpo;
- b) Existe hoje teoria suficiente e grande poder computacional para a geração de projetos de sistemas altamente complexos.

A prova das afirmações acima expostas está coerente com os sistemas hoje projetados, ou seja, cada vez mais estes sistemas se aproximam dos sistemas naturais: sistemas de distribuição, árvores, vascularização.

3.4.1 Relação entre o *design* e a evolução em seres animados e inanimados

Segundo Bejan et al., 2008, a lei construtal do *design* na natureza constitui uma visão unificada da evolução do *design*. Ela prevê a evolução em todos os domínios em que são

observados fenômenos evolutivos, registrados e estudados cientificamente: *design* de animais, bacias hidrográficas, fluxo turbulento, movimento de animais, atletismo, evolução tecnológica e *design* global, dentre outros. Alguns dos sistemas, animados e inanimados, mais comuns que podem ser previstos com a lei construtal estão esboçados na Figura 3.39.

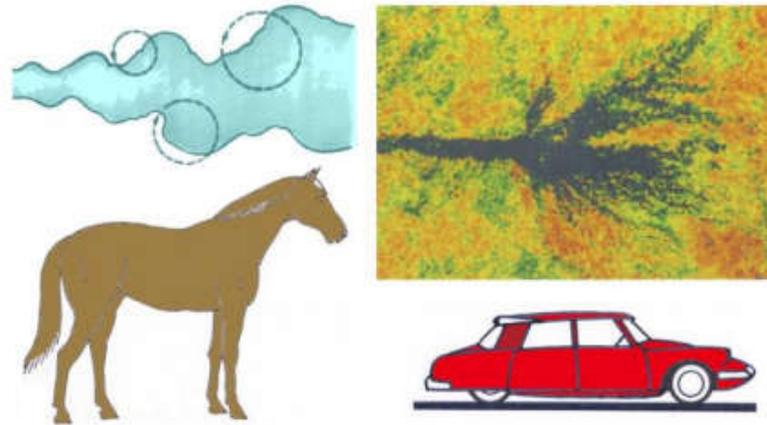


Figura 3.39 - Os maiores são mais eficientes, mais rápidos, vivem mais e viajam mais longe: veículos, animais, rios e ventos, [Bejan e Lorente, 2013].

Bejan et al., 2008, definem evolução como o ato, processo ou efeito de evoluir. Na Teoria Construtal, a evolução está associada às modificações que ocorrem nos *designs* em função do tempo. Como estas modificações ocorrem são os mecanismos, e estes, não devem ser confundidos com a lei construtal. Por exemplo, na evolução do *design* biológico, o mecanismo refere-se às mutações, à seleção biológica e à sobrevivência. No *design* geofísico, o mecanismo está associado à erosão do solo, à dinâmica das rochas, à interação entre a água e a vegetação, e ao arrasto do vento. Nos esportes, o mecanismo refere-se ao treinamento, ao recrutamento, à orientação, à seleção e a retribuições. Na tecnologia, o mecanismo está associado à liberdade, à liberdade da questão, à inovação, à educação, ao intercâmbio, ao alcance e à emigração.

O que flui através de um *design* que evolui, não é algo tão singular na física como a forma como esse sistema de fluxo gera sua configuração no tempo. O “como” é o princípio físico – a lei construtal. O “o que” representa os mecanismos, e estes são tão diversos quanto os próprios sistemas de escoamento. Ou seja, o “que” representa muitos, e “como” é um deles [Bejan et al., 2008].

A ocorrência de impacto sobre o meio ambiente configura-se em sinônimo de *design* na natureza. Para fluir, é necessário obter meios de verificar os arredores fora do caminho.

Toda e qualquer parte da natureza oferece resistência aos fluxos e aos movimentos impostos. Movimento significa penetração e seu nome assume conotações diferentes dependendo da direção em que o fenômeno é observado. Para o observador de bacias hidrográficas, o fenômeno é o surgimento e a evolução da vascularização ramificada. Para o observador da paisagem, o fenômeno é a erosão e a reformulação ou reorganização da crosta terrestre. Esta visualização mental da geração de *design* e impacto ambiental, como um projeto único na natureza, é universalmente aplicável [Bejan e Lorente, 2013].

De acordo com Bejan e Lorente, 2013, a locomoção animal com *design* representa "movimento guiado", ou seja, é eficiente, econômica, segura, rápida e em linha reta. O movimento do peso corporal, alternando-se as pernas, equivale ao caminhar e correr como se este estivesse "caindo para frente". Neste sentido, as pernas dos seres humanos representam dois raios, ou seja, faltariam outros dois raios para completar a roda humana, e esta falta torna a roda dos animais mais leve.

3.4.2 Relação entre a Teoria Construtal e o *design* final

A Lei Construtal não é uma afirmação de otimização, minimização, ou qualquer outra imagem mental de "*design* final" ou "destino". A lei construtal é sobre a direção da evolução no tempo e o fato de que o *design* na natureza não é estático, e sim dinâmico, em constante mutação, como as imagens em um filme no cinema. Isto é o que o *design* e a evolução são na natureza, e a lei construtal captura-os completamente. A evolução nunca termina [Bejan e Lorente, 2013].

Diversas foram as propostas de "*design* final" na ciência, porém cada uma aborda um domínio muito estreito e, como consequência, a afirmação de *design* ótimo é autocontraditória, e a afirmação de que cada uma representa um princípio geral é facilmente refutada. Mesmo que as declarações de *design* ótimo sejam contraditórias, locais, e não interligadas no mapa do *design* na natureza, estas demonstram que o interesse da colocação de fenômenos determinísticos na ciência é velho, amplo e próspero. Um exemplo é o fenômeno do fluxo de tensões, que explica o surgimento da forma sólida e da estrutura da vegetação, o *design* do esqueleto e a tecnologia. O fluxo de tensões é uma parte integral do fenômeno de geração do *design* de mais massa em movimento e mais facilmente sobre a paisagem [Bejan e Lorente, 2013].

A lei construtal confere poderes à mente para avançar o processo de evolução do *design*. Este é, de fato, o que a mente humana faz com qualquer lei da física - a mente usa a lei para prever características de fenômenos futuros. Saber com antecedência é também uma expressão da lei construtal, porque todo *design* animal está prestes a se mover mais e mais facilmente na paisagem, e isso inclui o fenômeno da cognição - o desejo de ficar mais esperto, entender e lembrar mais rápido, de modo que o animal pode ir e colocar-se fora de perigo. Baseando-se na direção da lei construtal para evoluir, o *design* será útil [Bejan, 2009].

3.4.3 Aplicações Gerais da Teoria Construtal

De acordo com Bejan et al., 2008, a aplicação da Lei Construtal se dá através do Método Construtal, denominado Design Construtal, e serve para prever muitos fenômenos na natureza e *designs* em engenharia. Este método é empregado para a obtenção de configurações que aperfeiçoam os sistemas de fluxo, através da distribuição ótima das imperfeições.

Diversos são os exemplos, oriundos da natureza, que demonstram a busca pelo melhor desempenho, dentre os quais, as mudanças ocorridas no *design* do leito de rios, de forma a possibilitarem melhor e mais fácil o escoamento de suas águas, e a bifurcação de veias dispostas nos corpos de animais, com o objetivo de otimizar o fluxo sanguíneo nos tecidos. O corpo humano e sua evolução é um dos exemplos que podem ser observados, assim como aplicações das mais diversas nas áreas da engenharia, em organizações sociais, entre outras, [Bejan e Zane, 2012].

O método Design Construtal guia o projetista no tempo, na direção de arquiteturas do escoamento que possuam maior desempenho global, para condições de acesso específicas do escoamento (fluidos, calor, tensões). Quanto ao *design*, deve-se ter em mente que a arquitetura descoberta para um conjunto de condições se refere à configuração constructal para estas condições específicas. Para outro conjunto de condições, ter-se-á nova configuração constructal. De outra forma, a configuração desenvolvida para um conjunto de condições não é, necessariamente, a configuração recomendada para outro conjunto de soluções. A configuração constructal não é universal, não representa a solução para outros problemas de *design*. Universal é a Lei Construtal, não um de seus *designs* [Bejan, 2000; Bejan et al., 2008].

O Design Construtal, para animais e para a locomoção humana, é completamente oposto ao movimento Browniano, ou seja, ao movimento aleatório das partículas nos fluidos. O Design Construtal da locomoção animal é muito mais complicado e aperfeiçoado do que apenas equilibrar dois esforços de trabalho na termodinâmica, um na vertical (levantamento de peso) e outro na horizontal (desconsiderando-se o meio ambiente), o que possibilitou a descoberta da relação alométrica, entre todas as velocidades dos animais, frequências e massas corporais [Bejan e Lorente, 2013].

O Design Construtal de todo movimento urbano é tal que em todas as escalas de comprimento, o tempo necessário para um trajeto curto e lento é aproximadamente o mesmo para um trajeto longo e rápido. A necessidade de um "trajeto curto e longo" para mover-se por um território (área, volume) foi o exemplo com o qual a Teoria Construtal de *design* na natureza começou, em 1996. Continuou com a explicação da eficiência do *design* do aeroporto de Atlanta, e porque os novos projetos evoluem na direção do *design* de Atlanta [Bejan, 2006].

3.4.4 Aplicações da Teoria Construtal na Engenharia

Inicialmente, para ilustrar a aplicação da Teoria Construtal, pode-se utilizar como exemplo a dedução da lei de Snell-Descartes, que descreve a relação entre os ângulos de incidência e de refração, quando a luz ou outras ondas passam através de uma fronteira entre dois meios isotrópicos diferentes.

Para tanto, considere um feixe de luz percorrendo o caminho *ACB*, Figura 3.40, onde a luz possui velocidades diferentes em cada meio.

O tempo total, para percorrer o caminho *AB*, é dado por:

$$t = \frac{1}{V_0} [L^2 + (L + x)^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{V_1} [L^2 + (L - x)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.123)$$

que pode ser reescrita na forma adimensional, como:

$$\frac{tV_0}{L} = [1 + (1 + \xi)^2]^{\frac{1}{2}} + \frac{V_0}{V_1} [1 + (1 - \xi)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.124)$$

onde:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.125)$$

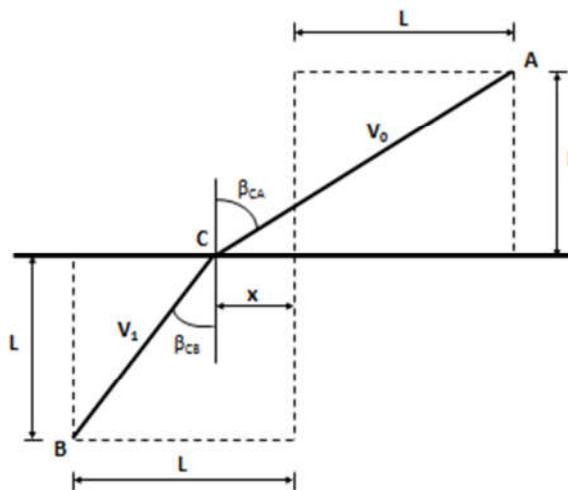


Figura 3.40 - Feixe de luz atravessando dois meios distintos.

Para minimizar o tempo necessário a percorrer o trecho, deriva-se a Eq. (3.124), ou seja:

$$\frac{\partial \left(\frac{tV_0}{L} \right)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.126)$$

logo, tem-se:

$$\frac{1 + \xi}{[1 + (1 + \xi)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{V_0}{V_1} \frac{1 - \xi}{[1 + (1 - \xi)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.127)$$

Na sequência, devem ser introduzidas as definições geométricas do problema:

$$\sin \beta_{CA} = \frac{L + x}{[L^2 + (L + x)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.128)$$

$$\sin\beta_{CB} = \frac{L - x}{[L^2 + (L - x)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.129)$$

Combinando-se as Eq. (3.128) e (3.129) com a Eq. (3.127), chega-se a Eq. (3.130), que representa a lei de Snell-Descartes:

$$\frac{\sin\beta_{CA}}{\sin\beta_{CB}} = \frac{V_0}{V_1} \quad (3.130)$$

Lorente et al., 2010, realizaram análise do fluxo de tensão mecânica, utilizando uma analogia com o fluxo de energia térmica e o fluxo de massa. Nestes estudos, foram analisadas três situações: o estrangulamento geométrico, a bifurcação geométrica e o escoamento sobre placas. Para a primeira situação, ou seja, para o estudo do estrangulamento geométrico, os autores utilizaram como ponto de partida que a presença de um estrangulamento geométrico representa maior dificuldade para o desenvolvimento do fluxo. Considerando-se o fluxo de massa, sabe-se que para uma vazão mássica constante com comprimento e volumes fixos, o valor da perda de carga local é intensificado na região onde ocorre a redução da área transversal. Este tipo de comportamento também pode ser observado para a intensidade da tensão mecânica em um corpo de prova submetido à tração axial. A região de menor área transversal estará submetida a tensões maiores, devido à alta concentração das linhas imaginárias de fluxo de tensão, Figura 3.41.

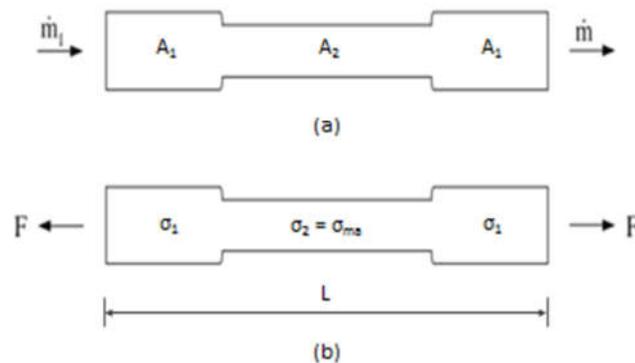


Figura 3.41 - (a) Fluxo de fluido através de um duto com estrangulamento; (b) fluxo de tensão análogo através de uma barra de seção transversal não uniforme, [Lorente et al., 2010].

Para a segunda situação, ou seja, considerando-se a bifurcação geométrica, os autores utilizaram uma analogia com o fluxo de fluido em uma tubulação “Y”, Figura 3.42. Sabe-se, de acordo com a lei de Hess-Murray, que a geometria ótima altera-se em função do regime de escoamento. Para o regime de Poiseuille, a relação ótima entre os diâmetros da tubulação expostos na Figura 3.42 corresponde a $\frac{D_1}{D_2} = 2^{\frac{1}{3}}$, e para o regime turbulento, a $\frac{D_1}{D_2} = 2^{\frac{3}{7}}$.

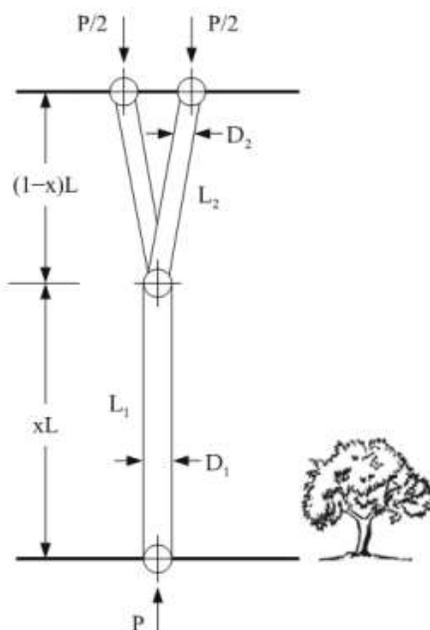


Figura 3.42 - Estrutura sólida bifurcada com igual resistência à flambagem sob compressão em todos os elementos, [Lorente et al., 2010].

Levando-se em consideração a tensão mecânica, para colunas submetidas a esforços axiais, há dois tipos de falhas que são importantes e devem ser analisadas: a falha por compressão e a falha por flambagem. Para a falha por esforço de compressão, a geometria ótima apresenta o formato de “V”, enquanto para a falha por flambagem, a geometria ótima corresponde ao formato “Y”, Figura 3.42. Ainda, os autores observaram que o menor volume necessário para suportar a solicitação seria obtido quando a relação entre os diâmetros fosse $\frac{D_1}{D_2} = 2^{\frac{1}{2}}$, o que equivale à relação obtida por Leonardo da Vinci para a botânica.

Para a terceira situação, ou seja, a de escoamento sobre placas, o objetivo dos autores foi o de obter a forma ótima da camada adesiva que faz a junção entre a folha e o corpo rígido. A camada adesiva fica submetida a cisalhamento puro, Figura 3.43.

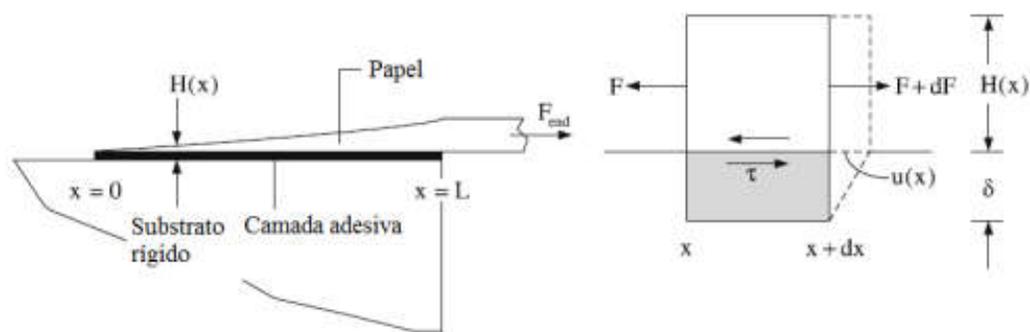


Figura 3.43 - Placa fina com espessura não uniforme e com camada adesiva, [Lorente et al., 2010].

A resistência da folha tem influência diferente na geometria da folha e do adesivo. Uma folha mais resistente possibilita a utilização de uma folha de menor espessura e uma camada de adesivo mais espessa, porém uma folha com menor resistência precisa de uma folha mais espessa e uma camada adesiva menos espessa. Para a otimização, a camada de adesivo foi remodelada de forma a receber uma tensão de cisalhamento uniforme, Figura 3.44.

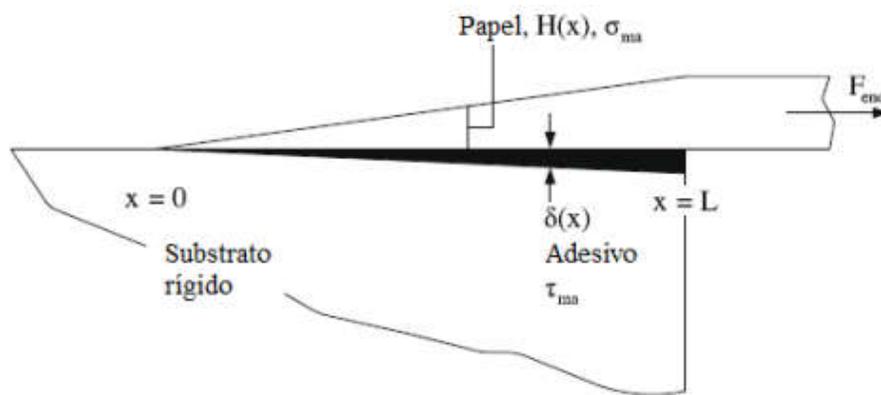


Figura 3.44 - Modelo com tensão longitudinal constante na folha, e tensão de cisalhamento constante na camada adesiva, [Lorente et al., 2010].

Para essa nova configuração, Figura 3.44, a geometria ótima apresentou uma redução de 25% na folha e de 87,5% na camada adesiva.

Para finalizar, os autores utilizaram uma terceira configuração, Figura 3.45, com a adição do adesivo entre duas folhas de papel, para que ocorra tensão uniforme nas folhas e que a tensão cisalhante na camada adesiva também seja uniforme.

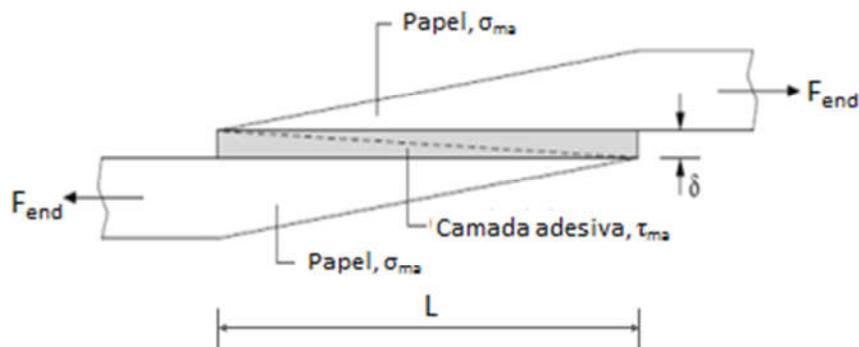


Figura 3.45 - Modelo com duas folhas e duas camadas adesivas, ambas com tensão uniforme, [Lorente et al., 2010].

Neste caso, o resultado obtido para a tensão ótima foi idêntico ao encontrado na configuração da Figura 3.45.

Isoldi et al., 2013, utilizaram o método Design Construtal para definir as melhores geometrias em placas finas perfuradas submetidas a um carregamento uniaxial de tração e compressão. Aplicaram os princípios da Teoria Construtal para otimizar a geometria de placas finas perfuradas submetidas a carregamento longitudinal uniforme, causando tensões de tração ou de compressão. O objetivo era obter a geometria ideal que minimizasse a concentração das tensões máximas ou maximizasse a carga crítica de flambagem em placas perfuradas retangulares, com $H/L = 0,5$, para três diferentes tipos de furo: elíptico, retangular e losangular. Para minimizar a concentração das tensões máximas ou maximizar a carga crítica, otimizaram o grau de liberdade H_0/L_0 , relação entre a largura e o comprimento do furo, considerando vários valores para a fração (ϕ) do volume do furo. Para desenvolver o trabalho, os autores tomaram como ponto de partida a semelhança entre o fluxo de um fluido irrotacional ideal e o fluxo de tensões. A resolução do problema se deu através do uso de modelos computacionais baseados no método dos elementos finitos. Os resultados encontrados mostraram que o método Design Construtal pode ser aplicado não apenas para a otimização de problemas envolvendo fluxos de calor ou de escoamento de fluidos, mas também para a otimização geométrica do fluxo de tensões em problemas na mecânica dos materiais. Observaram que a melhor forma geométrica para as placas tracionadas é a que possui furo elíptico, sendo que esta é 39,81% e 12,96% superior as melhores formas geométricas para furo retangular e losangular, considerando o menor valor para a fração (ϕ) do volume do furo. Por outro lado, as placas com furo retangular possuem a melhor geometria para minimizar a concentração das tensões para valores mais elevados da fração (ϕ) do

volume do furo. Verificaram que para $\phi \leq 0,20$, as geometrias ótimas para as placas submetidas à compressão alcançaram para a carga crítica de flambagem valores 80,0%, 21,5% e 17,4% superior à carga crítica para as placas sem furo, com furo elíptico e com furo retangular, respectivamente. As placas com furos elíptico e retangular, nesta ordem, alcançaram o melhor desempenho para valores intermediários e mais elevados da fração (ϕ) do volume do furo.

4 METODOLOGIA

A metodologia utilizada neste trabalho tem como objetivo a determinação de modelos computacionais para solucionar o problema da flambagem elástica e da elasto-plástica em placas finas perfuradas de aço. A solução analítica, para o problema da flambagem em placas finas de aço submetidas à compressão uniaxial, está restrita à flambagem elástica e a placas sem perfuração, sendo inviável sua aplicação à flambagem elasto-plástica, em função de soluções matemáticas complexas. Quanto à solução numérica, os modelos computacionais podem ser utilizados para a obtenção da solução para o problema da flambagem elástica e elasto-plástica em placas com e sem perfuração.

A análise da flambagem elástica será utilizada para a verificação dos modelos computacionais; esta será realizada comparando-se o resultado obtido para a carga crítica com a aplicação de um dos modelos computacionais e o obtido através da resolução do modelo analítico, em placas finas de aço sem perfuração.

Para a validação dos modelos computacionais será utilizada a análise elasto-plástica; neste caso, será comparado o valor obtido para a carga última com a aplicação de um dos modelos computacionais e o obtido em [El-Sawy et al., 2004].

4.1 Métodos Analíticos na Análise de Placas

Os métodos analíticos clássicos possibilitam o cálculo exato dos deslocamentos, das deformações e das tensões, na estrutura em todos os seus pontos, ou seja, nos infinitos pontos que formam a estrutura. Porém estas soluções são conhecidas apenas para alguns casos específicos em que os sistemas possuem geometria simples, e estão submetidos a condições de carregamento e de contorno, bem comportadas. Como exemplo, Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959, apresentam o cálculo analítico de placas circulares.

Dentre os métodos analíticos utilizados para a resolução de placas, encontram-se: a solução proposta por Navier, para placas simplesmente apoiadas; o método de Levy, para placas apoiadas em dois lados opostos; e os métodos de Ritz e de Galerkin.

Convém observar que as estruturas usuais analisadas nas engenharias, em sua maioria, não podem ser resolvidas utilizando-se as chamadas expressões analíticas fechadas, tornando-se necessária, em função da complexidade destas estruturas, a utilização de métodos computacionais.

4.2 Flambagem elástica e elasto-plástica no Ansys®

O aplicativo Ansys® é um *software* comercial de elementos finitos que possui grande aplicação em problemas de análise estrutural, assim como em outras áreas da engenharia. Neste trabalho, o Ansys® será utilizado para a análise da flambagem elástica e elasto-plástica em placas finas perfuradas de aço, simplesmente apoiadas em suas bordas, e submetidas à compressão uniaxial.

O Ansys® utiliza o MEF de deslocamentos baseado no ponto de vista Lagrangiano, ou seja, cada ponto material do corpo é analisado, sendo uma função do tempo e de suas coordenadas, e as equações de equilíbrio são obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Estes métodos estão bem documentados em [Zienkiewicz, 1971]. Os resultados obtidos para essas soluções são: primeiro, os deslocamentos nodais e, em seguida, são obtidas as derivadas desses valores, ou seja, as deformações, as tensões, etc., que formam a solução dos elementos.

O método padrão utilizado pelo Ansys®, para a resolução de equações simultâneas, para todas as análises, é o método de solução direta de equações esparsas (*Sparse Direct method*).

A análise da flambagem é uma técnica que possui como objetivo a determinação da carga crítica que torna a estrutura instável, e também determina a forma do modo de flambagem, isto é, associa a forma característica com a resposta de flambagem da estrutura. Com o Ansys®, é possível realizar-se a análise da flambagem elástica e da elasto-plástica.

A análise da flambagem elástica é feita através da análise por autovalores, que prevê a força teórica de flambagem para uma estrutura linear elástica ideal, ver Figura 4.1a. Este método corresponde à formulação clássica de Euler para a análise da flambagem elástica. A metodologia para este tipo de análise consiste em descobrir um autovalor que representa um fator de carga que corresponde à carga crítica de flambagem, e os autovetores são os modos obtidos, [Ansys® User's Manual, 2005].

Um dos métodos utilizado pelo Ansys® para resolver os problemas de extração de autovalores, e que foi utilizado neste trabalho, é o método numérico de Lanczos.

Como mencionado anteriormente, a análise de flambagem elasto-plástica é geralmente uma abordagem mais precisa e, portanto, a mais recomendada para ser utilizada em projetos ou avaliações de estruturas reais. Esta técnica utiliza uma análise não linear estática, com

crescimento gradual do carregamento, de modo a procurar o valor de carga em que a estrutura se torna instável, conforme representado na Figura 4.1b. Na Figura 4.1, as variáveis F e u representam o carregamento e o deslocamento, respectivamente.

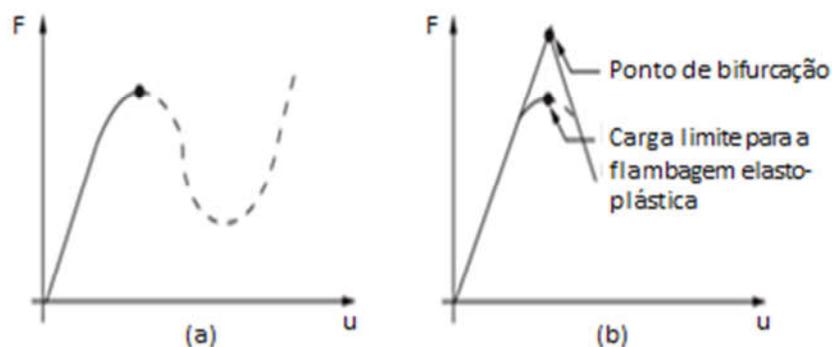


Figura 4.1 – Curvas de flambagem: (a) elasto-plástica; (b) elástica, [Ansys® User's Manual, 2005].

A análise não linear, desenvolvida no Ansys®, permite a inclusão de diversos recursos adicionais, tais como imperfeições iniciais, plasticidade, grandes deslocamentos, hiperelasticidade, superfícies de contato, fissuração, podendo também ser avaliado o desempenho pós-flambagem da estrutura.

4.3 Modelos Computacionais

Para estruturas complexas, em função da dificuldade do equacionamento e da solução matemática através das equações diferenciais e, em alguns casos, pela impossibilidade de resolução analítica, são utilizadas em grande escala e com elevado grau de confiabilidade, soluções aproximadas. Dentre elas destacam-se os métodos semi-analíticos e os métodos numéricos. Os métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin encontram-se dentre os semi-analíticos, enquanto os métodos das diferenças finitas, dos elementos finitos, dos elementos de contorno e dos sem malha (*meshless*), estão entre os métodos numéricos.

Na sequência serão utilizadas equações matriciais, cuja base está fundamentada no MEF, para a análise da flambagem elástica e da elasto-plástica em placas empregadas no presente estudo.

4.3.1 Flambagem elástica

O procedimento numérico utilizado para o cálculo da carga que provoca a flambagem elástica é baseado em uma análise de autovalores e autovetores. Uma vez assumido que a estrutura apresenta um comportamento elástico linear, uma instabilidade estrutural é prevista, sendo a verificação da carga que provoca a flambagem elástica no componente estrutural o enfoque do estudo. Para este tipo de análise, que envolve as condições de equilíbrio das equações de elementos finitos, é necessária a solução de equações algébricas homogêneas, cujo menor autovalor e autovetor correspondem, respectivamente, à carga crítica de flambagem e ao modo de deformação elástico da estrutura [Madenci e Guven, 2006].

Uma das formas que pode ser utilizada para a resolução do problema da flambagem elástica em estruturas passa pela extração de seus autovalores. A carga de flambagem é obtida como um multiplicador da carga de perturbação, a qual é adicionada ao conjunto de cargas externas aplicadas à estrutura no estado inicial da análise. A formulação que será utilizada na análise à flambagem é apresentada na forma matricial, e inclui termos lineares e não lineares.

Segundo Ando, 2008 o problema padrão de autovalor é apresentado sob a forma:

$$[K]\varphi = \lambda\varphi \quad (4.1)$$

onde $[K]$ corresponde a uma matriz quadrada, φ é o autovetor, e λ é o autovalor.

A solução para este tipo de problema pode ser obtida através da determinação das raízes do polinômio característico da matriz, expressa como:

$$\det([K] - \lambda[I]) = 0 \quad (4.2)$$

onde $[I]$ representa a matriz identidade, cuja ordem deve ser compatível com a matriz $[K]$.

Para a determinação dos coeficientes do polinômio característico, cujas matrizes possuem ordem elevada, é necessário elevado esforço computacional. De acordo com Golub e Van Der Vorst, 2000, mesmo que os coeficientes do polinômio característico sejam determinados, o teorema de Abel-Ruffini demonstra que não há método analítico para obter as raízes de polinômios cujo grau seja superior a quatro. Assim, uma solução analítica para o problema de autovalor fica descartada quando se trabalha com matrizes de ordem superior a quatro e, nestes casos, devem ser utilizados métodos numéricos específicos.

A matriz de rigidez global $[K]$ de uma placa é obtida através da soma de uma matriz de rigidez responsável pelas pequenas deformações no elemento $[K_E]$ com outra matriz, $[K_G]$, chamada matriz de rigidez geométrica [Przemieniecki, 1985]. Esta matriz, não depende apenas da geometria do elemento, mas também das tensões existentes no início do carregamento da placa, definido pelo passo de carga $\{P_0\}$.

Quando a carga atinge o valor dado por:

$$\{P\} = \lambda\{P_0\}, \quad (4.3)$$

onde λ é um escalar, a matriz de rigidez passa a ser definida como:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \quad (4.4)$$

Dessa forma, as equações de equilíbrio que governam o comportamento da placa podem ser escritas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (4.5)$$

onde $\{U\}$ representa o vetor de deslocamento total que pode, portanto, ser determinado a partir de:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1} \lambda\{P_0\} \quad (4.6)$$

Na flambagem, a placa apresenta um grande crescimento dos deslocamentos sem acréscimo da carga. Por definição matemática, é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes, então os deslocamentos $\{U\}$ tendem ao infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (4.7)$$

A Eq. (4.7) representa um problema de autovalores e, quando resolvida, gera o menor autovalor λ_1 , que corresponde à carga crítica, expressa pela Eq. (4.8):

$$\{P_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\} \quad (4.8)$$

em que ocorre a flambagem. Além disso, o vetor de deslocamento associado $\{U\}$ define a forma do modo de flambagem.

4.3.2 Flambagem Elasto-Plástica

A análise por elementos finitos da flambagem elasto-plástica ou do colapso da estrutura é uma abordagem mais precisa, porque possui a capacidade de analisar estruturas reais com imperfeições. Esta forma de abordagem é altamente recomendada para o projeto e para a avaliação de estruturas reais. Esta técnica utiliza uma análise não linear estática com cargas gradualmente crescente, de modo a procurar o nível de carga em que a estrutura se torna instável. Na análise não linear, podem ser incluídos recursos como imperfeições iniciais, comportamento plástico e grandes deslocamentos, podendo ser avaliado também, o desempenho pós-flambagem da estrutura. Ainda, considera-se nesta análise a inclusão das não linearidades geométricas e dos materiais. Diz-se que uma casca se comporta de forma não linear se a deformação em qualquer ponto não for proporcional à grandeza da carga aplicada [Budiansky, 1968]. A não linearidade geométrica é o resultado da não linearidade entre as relações das deformações e os deslocamentos, e a não linearidade do material é o resultado da não linearidade das relações entre as tensões e as deformações. As não linearidades do material também podem ser definidas em razão de diferentes procedimentos utilizados no encruamento [Avner, 1997].

Na análise não linear, adota-se um valor inicial pequeno para as imperfeições. Esta consideração é necessária em função do problema de pós-flambagem exata não possibilitar uma análise diretamente, devido a problemas de descontinuidades de resposta no ponto de bifurcação. El-Sawy et al., 2004, em seus estudos, definiram que o valor máximo a ser assumido para a imperfeição inicial deve obedecer à relação $H/2000$, onde H representa a largura da placa.

A carga última atuante sobre a placa pode ser encontrada utilizando-se como referência ($P_y = \sigma_y h$), onde σ_y representa a tensão de escoamento do material, aplicando-se pequenos incrementos de carga sobre a placa na direção paralela ao eixo x . Para cada incremento de carga, aplica-se o método de Newton-Raphson para a determinação dos deslocamentos que correspondem à configuração de equilíbrio da placa, através das equações:

$$\{P\}_{i+1} = \{P\}_i + \{\Delta P\} \quad (4.9)$$

$$\{\psi\} = \{P\}_{i+1} - \{F_{NL}\} \quad (4.10)$$

$$[K_t]\{\Delta U\} = \{\psi\} \quad (4.11)$$

$$\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \{\Delta U\} \quad (4.12)$$

onde $[K_t]$ é a matriz de rigidez tangente atualizada, $\{\Delta U\}$ corresponde ao vetor de deslocamentos incrementais necessários para alcançar a configuração de equilíbrio, $\{F_{NL}\}$ representa o vetor das forças nodais não lineares internas, e $\{\psi\}$ é o vetor de forças desequilibradas. Os vetores $\{U\}_i$ e $\{U\}_{i+1}$ correspondem aos deslocamentos, enquanto os vetores $\{P\}_i$ e $\{P\}_{i+1}$ correspondem às cargas externas aplicadas, para duas sucessivas configurações de equilíbrio da estrutura.

Em um determinado estágio de carga, a convergência não poderá ser alcançada, ou seja, um incremento finito de deslocamento não pode ser determinado de modo que o vetor de forças desequilibradas $\{\psi\}$ seja anulado, isso significa que a carga última da estrutura foi atingida. Isso ocorre porque não importa o valor que possa ser atingido pelas deformações e pelos deslocamentos, as tensões e as forças internas não podem aumentar da forma que seria necessário para equilibrar as cargas externas. Neste caso, o material atingiu sua capacidade máxima de resistência.

4.3.3 Critério de convergência no Ansys®

O processo iterativo, aplicado para a obtenção da solução para as equações diferenciais parciais, quando de uma análise não linear, é realizado até que este processo atinja a convergência. O usuário do aplicativo é quem define o número máximo de iterações a serem realizadas para obter a convergência de equilíbrio. A convergência será atingida, quando as condições apresentadas nas Eq. (4.13) e (4.14) forem alcançadas:

$$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref} \quad (4.13)$$

$$\|\{\Delta U_i\}\| < \varepsilon_U U_{ref} \quad (4.14)$$

sendo:

$$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\} \quad (4.15)$$

onde $\{R\}$ é o vetor residual que representa o balanço das forças obtidas entre os passos de carregamento, considerado na Eq. (4.11) de Newton-Raphson; $\{\Delta U_i\}$ o vetor de incrementos dos deslocamentos; ε_R e ε_U são as tolerâncias desejadas; R_{ref} e U_{ref} são os valores de referência a serem definidos para o controle da convergência.

A convergência é, portanto, obtida quando o tamanho do resíduo $\{R\}$ for menor do que a tolerância vezes um valor de referência, e/ou quando o tamanho do incremento $\{\Delta U_i\}$ for menor do que a tolerância vezes um valor de referência.

4.3.4 Verificação dos modelos

Para a verificação dos modelos computacionais, foi utilizada uma placa fina de aço A-36, sem perfuração e submetida à compressão uniaxial, conforme mostra a Figura 4.2. A placa possui as dimensões ($H = 1000,00$ mm; $L = 2000,00$ mm e $h = 10,00$ mm), respectivamente, para largura, comprimento e espessura. Como condições de contorno, as placas possuem todas as bordas simplesmente apoiadas, ou seja, todos os nós ao longo das quatro bordas estão restringidos à deflexão ao longo do eixo z . Adicionou-se também, Figura 4.2, os nós 1, 2, 3 e 4, para restringir as placas ao movimento em relação aos eixos x e y .

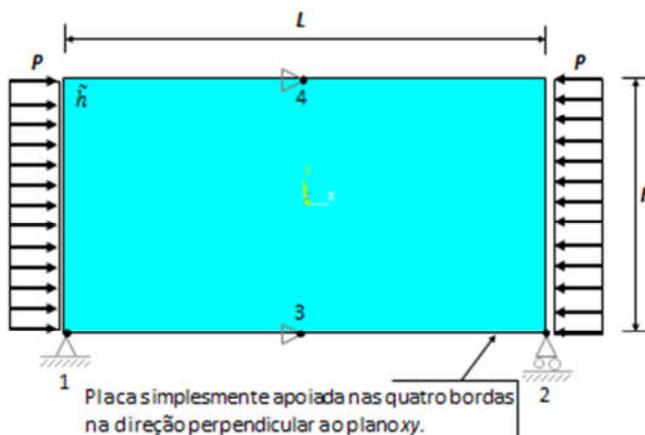


Figura 4.2 - Placa fina de aço submetida a um carregamento de compressão uniaxial.

O material considerado para a análise não linear apresenta comportamento elasto-plástico perfeito, ou seja, a tensão solicitante não ultrapassa a tensão de escoamento e quando essa é atingida e mantida, todo o acréscimo de deformação é unicamente de natureza plástica. Quanto à carga de referência, utilizada para a determinação da carga última, esta foi dividida em 100 incrementos com, no máximo, 200 iterações para cada passo de carga. Foram consideradas as seguintes propriedades mecânicas: $\sigma_y = 250$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, respectivamente, para a tensão de escoamento, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson.

De acordo com a Eq. (3.82), o valor analítico da carga crítica de flambagem é de:

$$P_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{H^2} = 4 \frac{\pi^2 \cdot 19230769,23}{1000^2} = 759,20 \text{ kN/m}$$

O valor para a carga crítica de flambagem, utilizando-se o modelo computacional desenvolvido no Ansys® e empregando-se o elemento *Shell93*, para os diversos tamanhos da malha quadrangular, é apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valor da carga crítica para os diversos tamanhos da malha quadrangular.

Tamanho da malha (mm)	Número de elementos	P_{cr} (kN/m)	Diferença (%)
200	50	746,70	1,65
100	200	752,36	0,90
50	2000	753,75	0,72
20	5000	753,74	0,72
10	20000	753,74	0,72

De acordo com os dados apresentados na Tabela 4.1, a verificação do modelo computacional para a flambagem elástica é satisfeita para malhas quadrangulares de tamanho menor ou igual a 50,00 mm. Neste caso, a diferença encontrada para a carga crítica, entre o valor analítico e o numérico, é de apenas 0,72%. No entanto, para a definição final do tamanho da malha quadrangular que será utilizada neste trabalho, levou-se em consideração não apenas os resultados obtidos para a verificação, mas também os resultados obtidos para a validação do modelo computacional.

4.3.5 Validação dos modelos

A validação dos modelos computacionais numéricos, para a resolução do problema da flambagem elasto-plástica, utilizou como referência os resultados obtidos por El-Sawy et al., 2004, os quais foram validados através da comparação com os resultados experimentais obtidos em [Narayanan e Chow, 1984]. Foram analisadas placas com $H/L = 1,0$, simplesmente apoiadas nas quatro bordas e com perfurações circulares centralizadas. As placas possuem as dimensões ($H = L = 1000,00$ mm e $h = 20,00$ mm), para largura, comprimento e espessura, e o diâmetro da perfuração corresponde a 300,00 mm. Outros dados considerados são: $\sigma_y = 350$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$, respectivamente para tensão de escoamento, módulo de Young e coeficiente de Poisson. Como critério de plastificação, considerou-se o critério de von Mises. Os resultados numéricos alcançados com a utilização do elemento *Shell93* são apresentados na Tabela 4.2. Foram considerados três diferentes tamanhos para a formação da malha quadriculada: 50, 20 e 10 mm.

Tabela 4.2 – Valor da carga última para os diversos tamanhos da malha quadriculada.

Tamanho da malha (mm)	Número de elementos	P_u (kN/m)	σ_u (MPa)	Erro Relativo (%)
50	400	4368,00	218,40	2,29
20	2500	4340,00	217,00	1,64
10	10000	4340,00	217,00	1,64

Os resultados apresentados na Tabela 4.2 mostram que para uma malha quadriculada de tamanho 20 mm, a margem de erro detectada é de aproximadamente 1,64% superior ao valor da tensão última encontrada por El-Sawy et al., 2004, que foi de 213,50 MPa. Esta pequena margem de erro permite a validação do modelo computacional numérico proposto.

A partir dos resultados obtidos e apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, definiu-se o tamanho padrão da malha quadricular a ser utilizado no desenvolvimento deste trabalho, que será de 20,00 mm.

4.4 Aplicação do método Design Construtal

A aplicação do método Design Construtal está condicionada à existência de um ou mais graus de liberdade e de restrições, para que a função objetivo possa ser satisfeita. Neste sentido, o estudo proposto considera dois graus de liberdade para o sistema: H/L e H_0/L_0 . Conforme definido anteriormente, H representa a largura, L o comprimento da placa, H_0 a largura da perfuração, e L_0 o respectivo comprimento da perfuração. Considerando-se os dois graus de liberdade, observa-se que existem infinitas possibilidades de configurações para as dimensões da placa, bem como para as dimensões da perfuração.

Considerando-se o grau de liberdade H/L , serão analisadas duas configurações: $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$. Para ambas as relações de H/L e para placas sem perfuração, manteve-se constante o volume da placa, sendo este de $20 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Para o grau de liberdade H_0/L_0 , existem inúmeras possibilidades, observando-se que os limites das perfurações estão posicionados a 100,00 mm de distância das bordas da placa. A Figura 4.3 mostra o modelo de referência, placa com perfuração elíptica, que será utilizado para a adimensionalização dos parâmetros L e H das placas, e L_0 e H_0 , das perfurações.

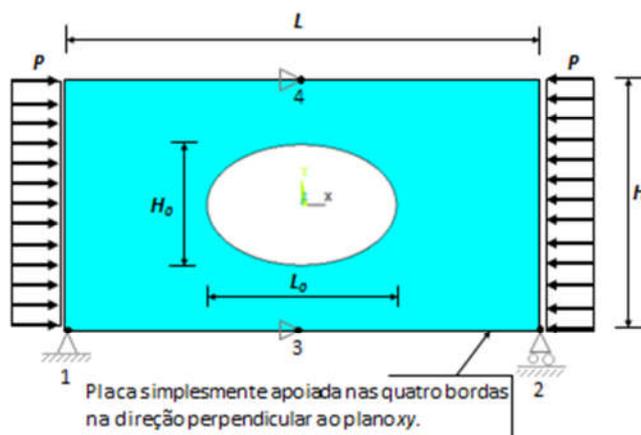


Figura 4.3 - Modelo de referência para a adimensionalização dos parâmetros da placa e das perfurações.

A Figura 4.3 apresenta duas restrições geométricas, sendo uma em relação ao volume total da placa, e a outra, em relação ao volume da perfuração.

O volume total da placa e o volume total da perfuração equivalem, respectivamente, a:

$$V_p = V = HLh \quad (4.16)$$

$$V_{elip} = V_0 = \frac{\pi}{4} L_0 H_0 h \quad (4.17)$$

sendo L_0 a dimensão do comprimento da perfuração na direção do eixo x , e H_0 a dimensão da largura da perfuração na direção do eixo y .

As variáveis serão adimensionalizadas conforme:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{H}_0, \tilde{L}_0 = \frac{x, y, H, L, H_0, L_0}{\sqrt{A}} \quad (4.18)$$

Adimensionalizando-se a Eq. (4.16), tem-se:

$$\tilde{H}\tilde{L} = 1 \quad (4.19)$$

O fator (ϕ), que representará o volume a ser considerado para a perfuração, relaciona o volume da perfuração com o volume total da placa, e será expresso como:

$$\Phi_{elip} = \frac{\pi L_0 H_0}{4HL} \quad (4.20)$$

Dividindo-se o numerador e o denominador da Eq. (4.20) pelo volume da placa, a fração (ϕ) do volume pode ser expressa na forma adimensional:

$$\Phi_{elip} = \frac{\pi \tilde{L}_0 \tilde{H}_0}{4} \quad (4.21)$$

O sistema formado pelas Eq. (4.16) e (4.17) é considerado como um sistema aberto, ou seja, possui quatro variáveis e apenas duas equações e necessita, portanto, de dois graus de liberdade para o fechamento do problema. Os graus de liberdade considerados serão as relações: $\left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}}\right)$ e $\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{L}_0}\right)$.

Utilizando-se a relação $\left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}}\right)$ na Eq. (4.19), chega-se a:

$$\tilde{L} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\tilde{H}}{\tilde{L}}\right)}} \quad (4.22)$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{\tilde{L}} \quad (4.23)$$

e utilizando-se a relação $\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{L}_0}\right)$ na Eq. (4.21), vem:

$$\tilde{L}_0 = \sqrt{\frac{4\phi}{\pi\left(\frac{\tilde{H}_0}{\tilde{L}_0}\right)}} \quad (4.24)$$

$$\tilde{H}_0 = \frac{4\phi}{\pi\tilde{L}_0} \quad (4.25)$$

Conforme mencionado, o procedimento acima apresentado será utilizado como referência para a adimensionalização dos demais modelos computacionais. As Figuras 4.4 a 4.10 mostram todos os tipos de perfurações que serão estudados neste trabalho.

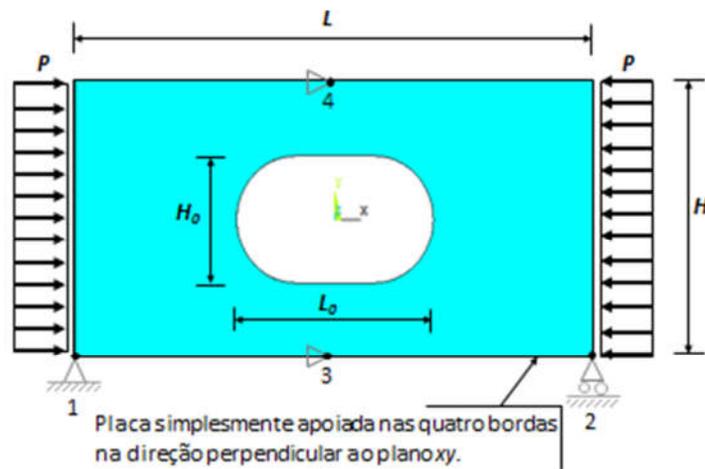


Figura 4.4 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração oblonga longitudinal.

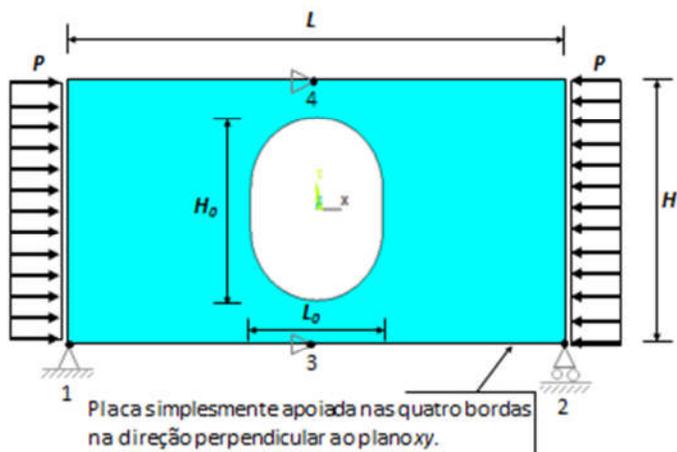


Figura 4.5 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração oblonga transversal.

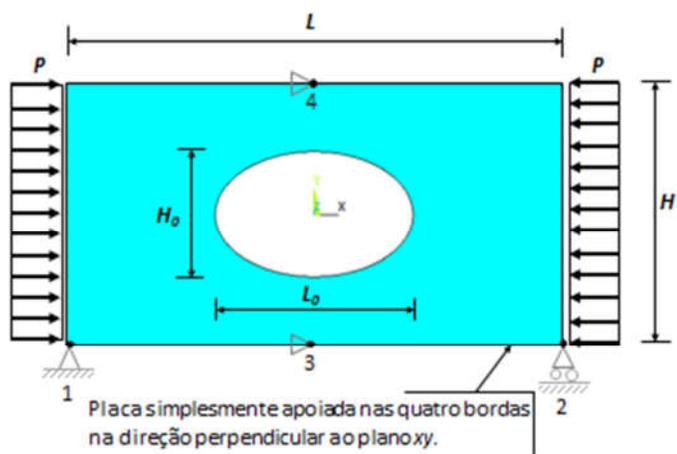


Figura 4.6 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração elíptica.

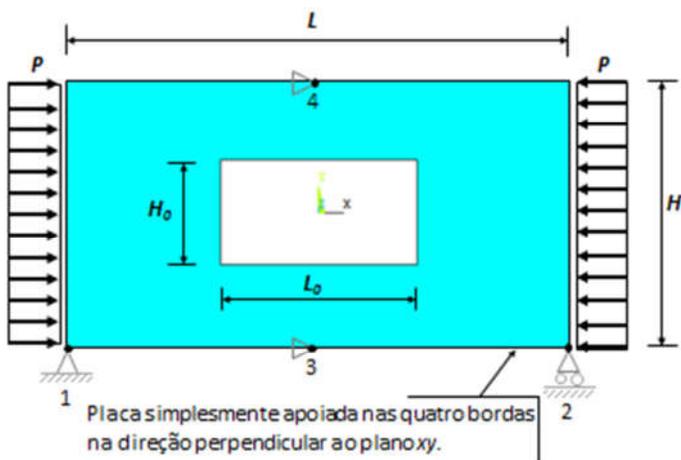


Figura 4.7 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração retangular.

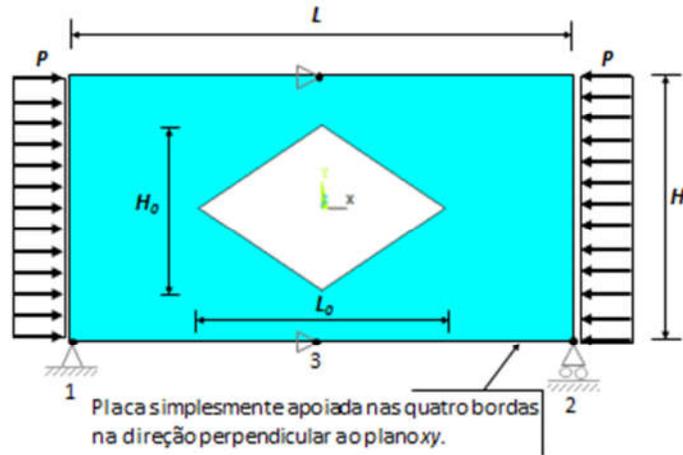


Figura 4.8 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração losangular.

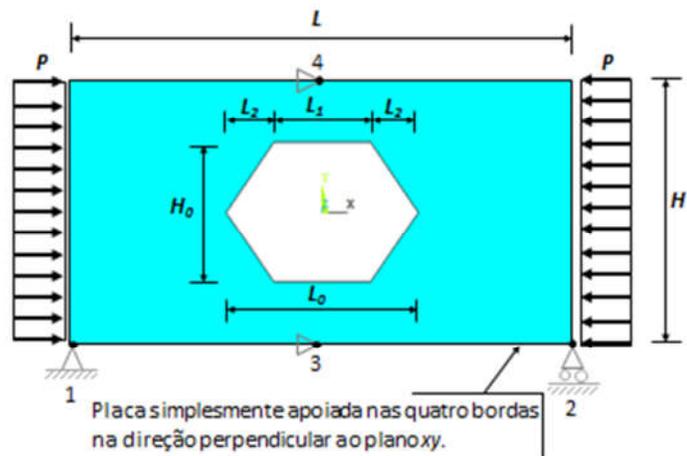


Figura 4.9 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração hexagonal longitudinal.

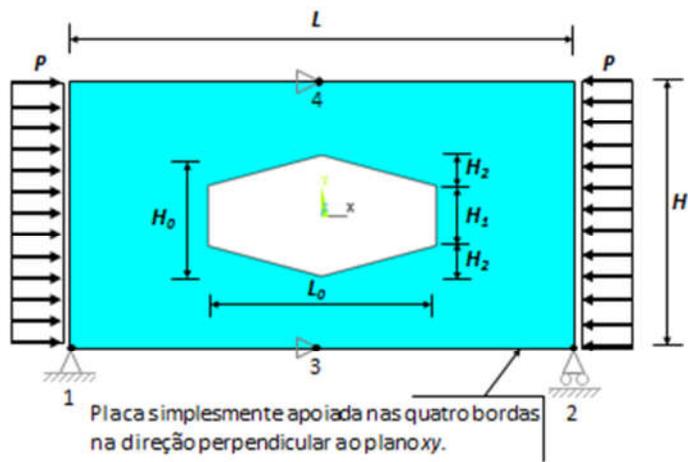


Figura 4.10 – Placas com $H/L = 1,0$, $H/L = 0,5$ e perfuração hexagonal transversal.

Assim, as equações que representam as frações (ϕ) do volume das perfurações para as placas, são dadas pelas Eq. (4.26), (4.27), (4.28), (4.29), (4.30), (4.31) e (4.32), para perfurações dos tipos: oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal, respectivamente.

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(L_0 - H_0)H_0 + \frac{\pi}{4}H_0^2}{HL} \quad (4.26)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(H_0 - L_0)L_0 + \frac{\pi}{4}H_0^2}{HL} \quad (4.27)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(\pi H_0 L_0 h)/4}{HLh} = \frac{\pi H_0 L_0}{4HL} \quad (4.28)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0 L_0 h}{HLh} = \frac{H_0 L_0}{HL} \quad (4.29)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{(H_0 L_0 h)/2}{HLh} = \frac{H_0 L_0}{2HL} \quad (4.30)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0(L_1 + L_2)h}{HLh} = \frac{H_0(L_1 + L_2)}{HL} \quad (4.31)$$

$$\phi = \frac{V_0}{V} = \frac{H_0(L_1 + L_2)h}{HLh} = \frac{L_0(H_1 + H_2)}{HL} \quad (4.32)$$

5 RESULTADOS

Os modelos computacionais, previamente definidos, foram utilizados para determinar o valor da carga crítica (P_{cr}) para a flambagem elástica, e o valor da carga última (P_u) para a flambagem elasto-plástica, em placas finas perfuradas de aço submetidas à compressão. Foram analisadas placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para as frações do volume das perfurações $\phi = 0,08; 0,10; 0,15; 0,20$ e $0,25$, e para os seguintes tipos de perfuração: oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. As placas possuem espessura $h = 10,00$ mm. Para $H/L = 1,0$, tem-se: $H = L = 1414,21$ mm, e para $H/L = 0,5$, $H = 1000,00$ mm e $L = 2000,00$ mm, sendo que estes valores foram adotados para manter constante o volume das placas. Quanto ao posicionamento das perfurações, estas estarão centradas na placa.

Para a análise à flambagem elástica e à elasto-plástica, foram considerados os seguintes parâmetros: Aço A-36, módulo de Young ($E = 210$ GPa), coeficiente de Poisson ($\nu = 0,30$) e a tensão de escoamento do material ($\sigma_y = 250$ MPa), [Hibbeler, 2004]. Foi considerado também que o material que compõe a placa é isotrópico e possui comportamento elástico linear. Quanto à vinculação, as placas são simplesmente apoiadas em todas as bordas, ou seja, há o impedimento dos deslocamentos na direção do eixo z . Para a simulação numérica, foram adicionados dois pontos de apoio com a finalidade de impedir o deslocamento da placa na direção vertical, e dois pontos de apoio para impedir o deslocamento da placa na direção horizontal (ver Figura 4.2).

Com o objetivo de estudar o comportamento mecânico das placas em relação ao fenômeno da flambagem, serão consideradas duas abordagens: uma relacionada à flambagem elástica e à elasto-plástica e outra restrita à flambagem elasto-plástica. Para simplificar, será utilizado como nomenclatura para a flambagem elástica e elasto-plástica o termo flambagem. Para o primeiro caso, as curvas limites à flambagem são geradas a partir da definição das cargas crítica e última. Para o segundo, as curvas referem-se à flambagem elasto-plástica, ou seja, estão diretamente relacionadas à tensão última (σ_u) da estrutura. A definição das curvas limites à flambagem e das curvas à flambagem elasto-plástica, para todos os casos propostos, levou em consideração o tipo de placa, o tipo de perfuração e o valor da fração do volume (ϕ) para a perfuração. Finalmente, com a utilização do método Design Construtal, foi possível comparar adequadamente o desempenho mecânico das placas em função da distribuição de

suas imperfeições, definindo-se, dessa forma, a melhor geometria para cada tipo de perfuração, para cada fração (ϕ) do volume da perfuração e para cada geometria de placa.

5.1 Normalização das Tensões

A normalização das tensões será utilizada para a padronização de todos os gráficos necessários à execução deste trabalho. Na sequência, apresenta-se o processo de normalização das tensões, utilizando-se para isso o fator TLN , abreviatura de tensão limite normalizadora.

Conhecendo-se os valores das cargas crítica (P_{cr}) e última (P_u), é possível obter os valores das tensões crítica (σ_{cr}) e última (σ_u) utilizando-se, respectivamente, as Eqs. (5.1) e (5.2):

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{h} \quad (5.1)$$

$$\sigma_u = \frac{P_u}{h} \quad (5.2)$$

onde h representa a espessura da placa.

A obtenção dos valores do fator TLN para a flambagem elástica e para a flambagem elasto-plástica ocorre dividindo-se as tensões crítica e última pela tensão de escoamento do material, através das Eqs. (5.3) e (5.4):

$$TLN = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \quad (5.3)$$

$$TLN = \frac{\sigma_u}{\sigma_y} \quad (5.4)$$

Como exemplo a Figura 5.1 mostra o comportamento do fator TLN para as duas relações de H/L em placas com perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$.

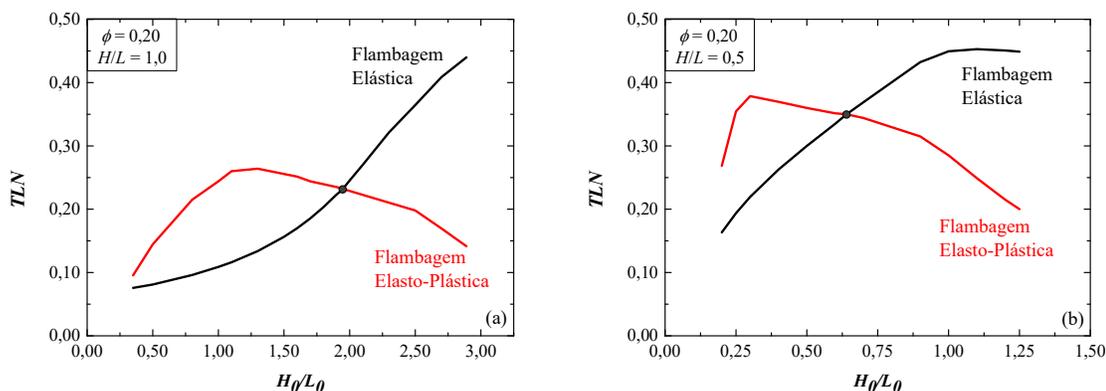


Figura 5.1- Curvas à flambagem elástica e à elasto-plástica em placas com perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Observa-se na Figura 5.1, para a flambagem elástica, que o aumento no valor do grau de liberdade H_0/L_0 provoca o aumento no fator TLN exceto para as relações ($H_0/L_0 > 1,10$), onde o valor do fator TLN decresce. Quanto à flambagem elasto-plástica, o fator TLN cresce para ($H_0/L_0 \leq 1,30$) e ($H_0/L_0 \leq 0,30$), e decresce para ($H_0/L_0 > 1,30$) e ($H_0/L_0 > 0,30$), respectivamente, para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$.

5.2 Flambagem Elástica e Elasto-Plástica

A Figura 5.1 mostra a existência de um ponto comum para as curvas à flambagem elástica e à elasto-plástica. Este ponto foi denominado de ($TLN_{Máx}$), Figura 5.2, definindo o ponto que representa a transição entre a flambagem elástica e à elasto-plástica. Para a curva limite à flambagem, à esquerda do ponto de transição, o componente estrutural poderá assumir valores maiores do que o da carga crítica, sem que isso implique no colapso do elemento estrutural, porém o componente estrutural estará submetido à flambagem elástica. Por outro lado, à direita do ponto de transição, o componente estrutural não alcança a carga limite à flambagem elástica, por isto haverá o colapso da estrutura da placa.

A Figura 5.2 apresenta o fator TLN em função do grau de liberdade H_0/L_0 , para a curva limite à flambagem em placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$. A Figura 5.2 também apresenta o posicionamento gráfico dos fatores $TLN_{Máx}$ e TLN_{Min} .

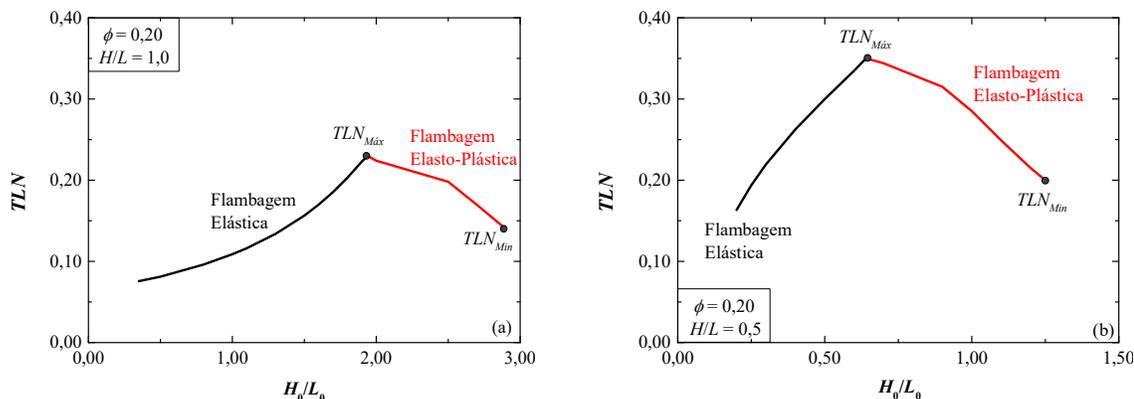


Figura 5.2 - Curva limite à flambagem em placas com perfuração elíptica e para $\phi = 0,20$: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

A definição e o conhecimento da curva limite à flambagem são de grande importância aos projetistas. Os pontos posicionados abaixo da linha limite à flambagem representam soluções que impedem a ocorrência da flambagem elástica e o colapso da estrutura. A esquerda do ponto de transição, para os pontos acima da linha limite à flambagem, a placa poderá suportar tensões maiores e terá como limite o definido pela tensão de última da placa.

O procedimento apresentado para a geração da Figura 5.2 foi também utilizado para o desenvolvimento das demais figuras contidas neste trabalho. Foram consideradas placas com perfurações dos tipos: oblonga longitudinal, oblonga transversal, retangular, losangular, hexagonal longitudinal, e hexagonal transversal, para as duas relações de H/L e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

Nas Figuras 5.3 a 5.7, são apresentadas as curvas limites à flambagem para as frações do volume das perfurações ($\phi = 0,08; 0,10; 0,15; 0,20$ e $0,25$), para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, e para todos os tipos de perfurações. Cabe destacar que a partir daqui serão utilizadas as seguintes abreviaturas para a representação das curvas limites à flambagem: (OL) para as placas com perfuração oblonga longitudinal, (OT) para as placas com perfuração oblonga transversal, (E) para as placas com perfuração elíptica, (R) para as placas com perfuração retangular, (L) para as placas com perfuração losangular, (HL) para as placas com perfuração hexagonal longitudinal e (HT) para as placas com perfuração hexagonal transversal. Para a representação gráfica dos intervalos sobre as curvas limites que configuram as melhores relações para o grau de liberdade H_0/L_0 , foram utilizadas linhas verticais tracejadas.

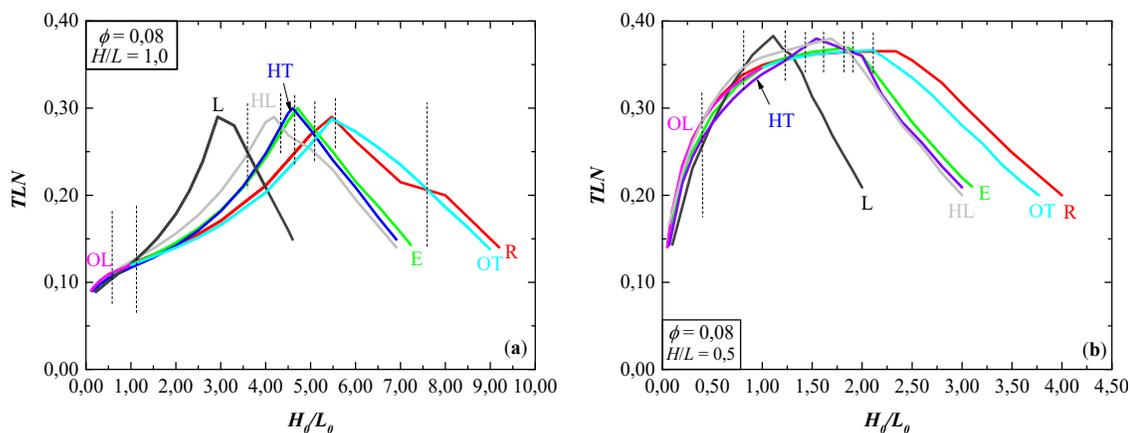


Figura 5.3 – Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,08$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

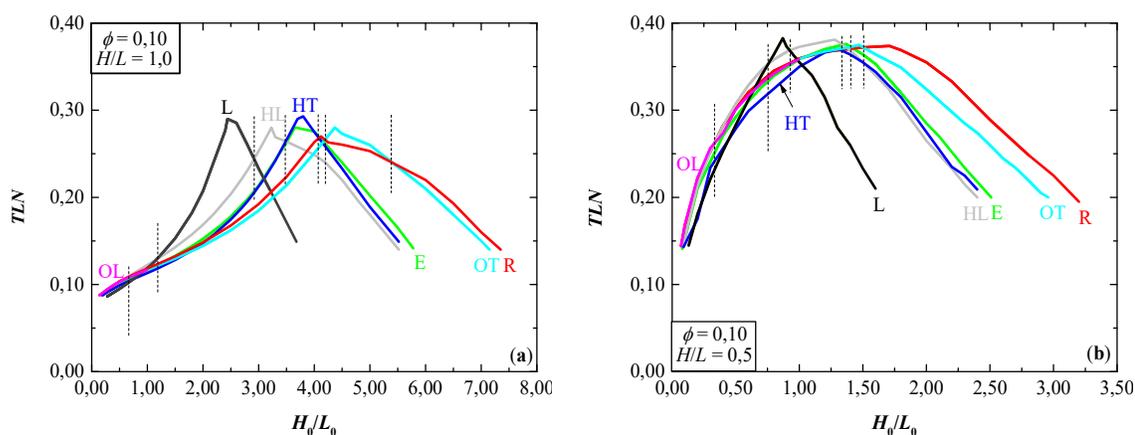


Figura 5.4 – Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,10$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

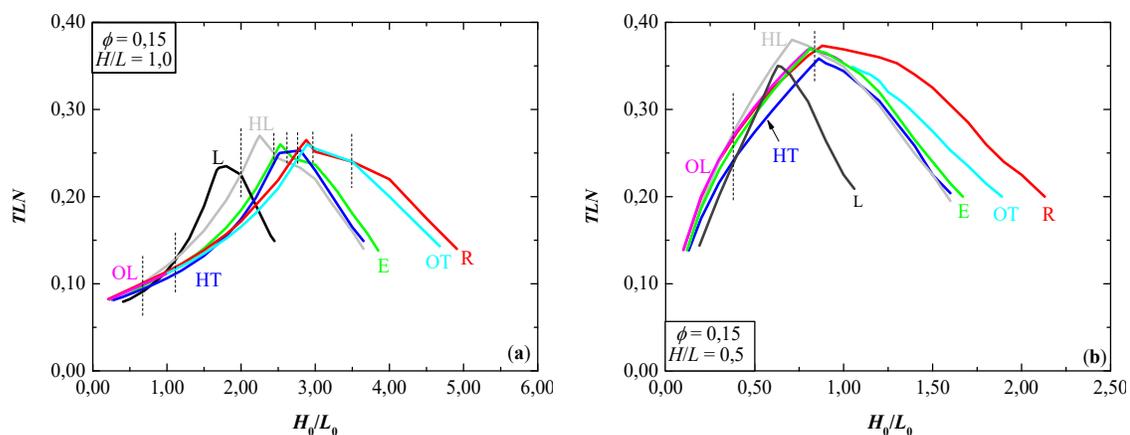


Figura 5.5 – Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,15$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

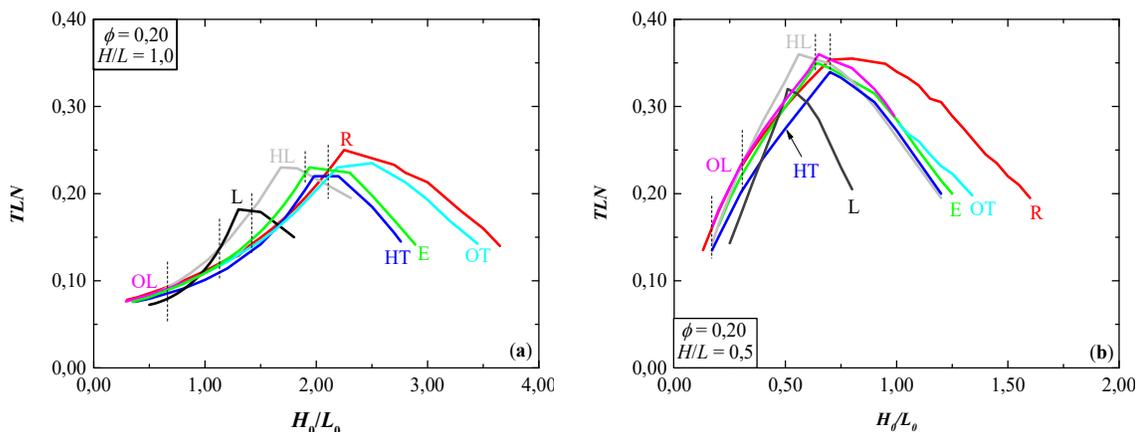


Figura 5.6 – Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,20$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

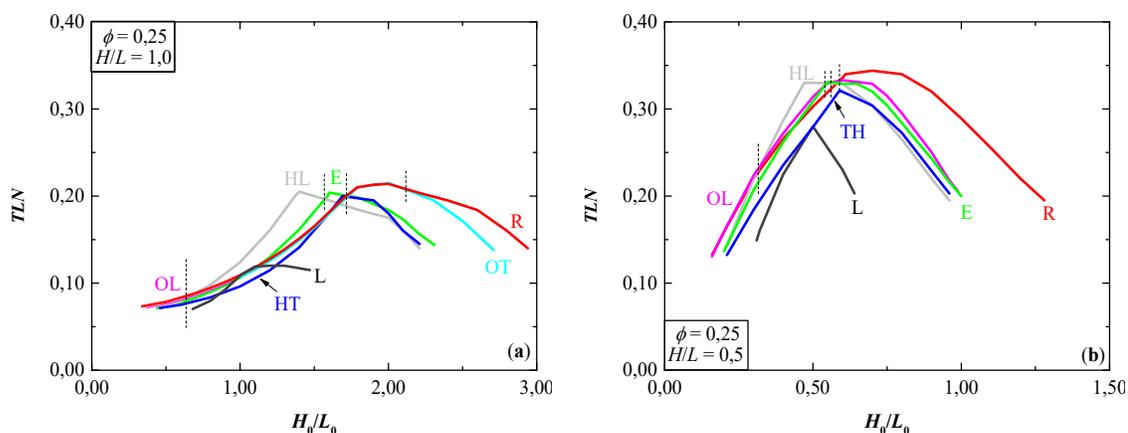


Figura 5.7 – Curvas limites à flambagem, para $\phi = 0,25$ e em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Analisando-se as Figuras 5.3 a 5.7, verifica-se a existência de alguns fatores recorrentes, dentre os quais é possível destacar: Primeiro, as placas com perfuração retangular (R) são as que apresentam a maior amplitude para o grau de liberdade H_0/L_0 , em contrapartida, a menor amplitude está associada às placas com perfuração losangular (L). Segundo, as placas com perfuração hexagonal transversal (HT), hexagonal longitudinal (HL) e elíptica (E) possuem valores muito próximos para os limites máximos do grau de liberdade H_0/L_0 . Terceiro, os valores máximos de TLN são encontrados para relações maiores de H_0/L_0 para as placas com $H/L = 1,0$, quando comparadas às placas com $H/L = 0,5$. Quarto, as placas com $H/L = 1,0$ suportam tensões menores em comparação às placas com $H/L = 0,5$, ou seja, as

placas com $H/L = 0,5$ podem ser submetidas a um carregamento de compressão maior. Quinto, não há um tipo específico de perfuração que gere a melhor configuração mecânica geral para o grau de liberdade H_0/L_0 ; existem intervalos em que um tipo de perfuração possui melhores resultados em comparação aos demais. Por exemplo, para as placas com $H/L = 0,5$ e $\phi = 0,20$, Figura 5.6b, no intervalo $(0,30 \leq H_0/L_0 \leq 0,63)$, a melhor configuração geométrica corresponde às placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL). Finalmente, a forma da perfuração possui importância significativa no fenômeno da flambagem, pois sua variação define o ponto de transição entre a flambagem elástica e a elasto-plástica.

Visando quantificar o acréscimo de resistência das placas à flambagem elástica e à elasto-plástica, em função da melhoria do seu desempenho mecânico, as Tabelas 5.1 e 5.2 apresentam as melhores e as piores configurações geométricas para todos os casos estudados.

Para a quantificação dos resultados, foram considerados os valores máximos e mínimos do fator TLN . O fator $TLN_{Máx}$ corresponde ao ponto de maior valor nominal de TLN e refere-se, normalmente, ao ponto de intersecção entre as curvas limites à flambagem elástica e à elasto-plástica. Quanto ao fator TLN_{Min} , para as curvas limites à flambagem este está posicionado à direita sobre a curva limite à flambagem elasto-plástica. Como exceção à regra, o fator $TLN_{Máx}$ não corresponde ao ponto de intersecção entre as curvas limites à flambagem elástica e à elasto-plástica em placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para $\phi = 0,25$ e perfuração losangular e, neste caso, este se encontra no regime elasto-plástico.

Nas Tabelas 5.1 e 5.2, a geometria ótima está relacionada ao grau de liberdade $(H_0/L_0)_o$, e a pior geometria, ao grau de liberdade $(H_0/L_0)_p$.

Salienta-se, como informação, que a presença do símbolo de asterisco (*) na Tabela 5.1 para $H/L = 1,0$ e na Tabela 5.2 para $H/L = 0,5$ possui como objetivo indicar que o fator $TLN_{Máx}$ para aquele tipo específico de perfuração encontra-se no regime elasto-plástico.

Tabela 5.1 – Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 1,0$, para cada tipo de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

ϕ	Perfuração	$H/L = 1,0$				
		$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	TLN_{Min}	Diferença %
0,08	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	5,38	0,2878	8,99	0,1368	110,38
	Elíptica	4,60	0,3000	7,23	0,1423	110,82
	Retangular	5,47	0,2900	9,20	0,1399	107,29
	Losangular	2,92	0,2900	4,60	0,1486	95,15
	Hexagonal Longitudinal	4,19	0,2900	6,91	0,1384	109,54
	Hexagonal Transversal	4,52	0,3000	6,91	0,1486	101,88
0,10	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	4,35	0,2800	7,15	0,1392	101,15
	Elíptica	3,67	0,2824	5,78	0,1415	99,58
	Retangular	4,20	0,2655	7,35	0,1399	89,78
	Losangular	2,44	0,2843	3,68	0,1463	94,33
	Hexagonal Longitudinal	3,15	0,2800	5,52	0,1384	102,31
	Hexagonal Transversal	3,70	0,2890	5,52	0,1486	94,48
0,15	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	2,89	0,2600	4,68	0,1423	82,71
	Elíptica	2,53	0,2600	3,85	0,1368	90,06
	Retangular	2,82	0,2650	4,91	0,1392	90,37
	Losangular	1,67	0,2350	2,45	0,1500	56,67
	Hexagonal Longitudinal	2,25	0,2700	3,65	0,1384	95,09
	Hexagonal Transversal	2,52	0,2530	3,65	0,1486	70,26
0,20	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	2,19	0,2343	3,45	0,1425	64,42
	Elíptica	1,94	0,2317	2,89	0,1415	63,75
	Retangular	2,25	0,2500	3,65	0,1400	78,57
	Losangular	1,30	0,1819	1,80	0,1500	21,27
	Hexagonal Longitudinal	1,68	0,2338	2,31	0,1950	19,90
	Hexagonal Transversal	1,98	0,2222	2,76	0,1450	53,24
0,25	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	1,80	0,2150	2,71	0,1380	55,80
	Elíptica	1,59	0,2040	2,31	0,1438	41,86
	Retangular	1,82	0,2140	2,94	0,1400	52,86
	Losangular	1,15 *	0,1200	1,47	0,1150	4,35
	Hexagonal Longitudinal	1,38	0,2050	2,21	0,1400	46,43
	Hexagonal Transversal	1,69	0,2000	2,21	0,1450	37,93

Tabela 5.2 – Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 0,5$, para cada tipo de perfuração e para todos os valores de (ϕ) .

ϕ	Perfuração	$H/L = 0,5$				Diferença %
		$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	TLN_{Min}	
0,08	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	2,10	0,3630	3,77	0,2000	81,50
	Elíptica	1,86	0,3682	3,10	0,2050	79,61
	Retangular	2,34	0,3690	4,00	0,2000	84,50
	Losangular	1,11	0,3800	2,00	0,2090	81,82
	Hexagonal Longitudinal	1,69	0,3706	3,00	0,2000	85,30
	Hexagonal Transversal	1,54	0,3656	3,00	0,2090	74,93
0,10	Oblonga Longitudinal	-	-	-	-	-
	Oblonga Transversal	1,47	0,3750	2,96	0,2000	87,50
	Elíptica	1,37	0,3753	2,51	0,2000	87,65
	Retangular	1,71	0,3780	3,20	0,1950	93,85
	Losangular	0,87	0,3778	1,60	0,2100	79,90
	Hexagonal Longitudinal	1,28	0,3840	2,40	0,2000	92,00
	Hexagonal Transversal	1,31	0,3690	2,40	0,2090	76,56
0,15	Oblonga Longitudinal	0,82	0,3713	-	-	-
	Oblonga Transversal	-	-	1,89	0,2000	85,65
	Elíptica	0,82	0,3687	1,67	0,2000	84,35
	Retangular	0,88	0,3730	2,13	0,2000	86,50
	Losangular	0,63	0,3509	1,06	0,2090	67,89
	Hexagonal Longitudinal	0,71	0,3800	1,60	0,1950	94,87
	Hexagonal Transversal	0,86	0,3600	1,60	0,2040	76,47
0,20	Oblonga Longitudinal	0,65	0,3556	-	-	-
	Oblonga Transversal	-	-	1,34	0,1980	79,60
	Elíptica	0,64	0,3487	1,25	0,2000	74,35
	Retangular	0,70	0,3530	1,60	0,1950	81,03
	Losangular	0,51	0,3200	0,80	0,2040	56,86
	Hexagonal Longitudinal	0,56	0,3530	1,20	0,1950	81,03
	Hexagonal Transversal	0,70	0,3380	1,20	0,2000	69,00
0,25	Oblonga Longitudinal	0,55	0,3330	0,99	0,2050	62,44
	Oblonga Transversal	-	-	-	-	-
	Elíptica	0,55	0,3290	1,00	0,2000	64,50
	Retangular	0,61	0,3400	1,28	0,1950	74,36
	Losangular	0,50 *	0,2800	0,64	0,2030	37,93
	Hexagonal Longitudinal	0,47	0,3250	0,96	0,1950	66,67
	Hexagonal Transversal	0,59	0,3180	0,96	0,2030	56,65

A Tabela 5.1 mostra que os melhores resultados para a melhoria no desempenho mecânico das placas com $H/L = 1,0$ estão entre 55,80% e 110,82% para as placas com perfuração oblonga transversal (OT) e $\phi = 0,25$, e para as placas com perfuração elíptica (E) e $\phi = 0,08$. Por outro lado, o pior resultado encontrado é de 4,35% para as placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$.

Já, na Tabela 5.2, observa-se que os melhores resultados para a melhoria do desempenho mecânico para as placas com $H/L = 0,5$ correspondem a 66,67% e 94,87%, respectivamente, para as placas com perfuração hexagonal transversal (HT) e $\phi = 0,25$, e para as placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL) e $\phi = 0,15$. O pior desempenho mecânico refere-se às placas com perfuração losangular e $\phi = 0,25$, sendo este de 37,93%.

A Figura 5.8 apresenta, como exemplo, uma placa com $H/L = 1,0$ e para $\phi = 0,08$, onde a melhor geometria para cada tipo de perfuração é definida por $(H_0/L_0)_o$, e a melhor geometria para o conjunto das perfurações é definida por $(H_0/L_0)_{oo}$. Esta explicação é necessária para a elaboração das Tabelas 5.3 e 5.4.

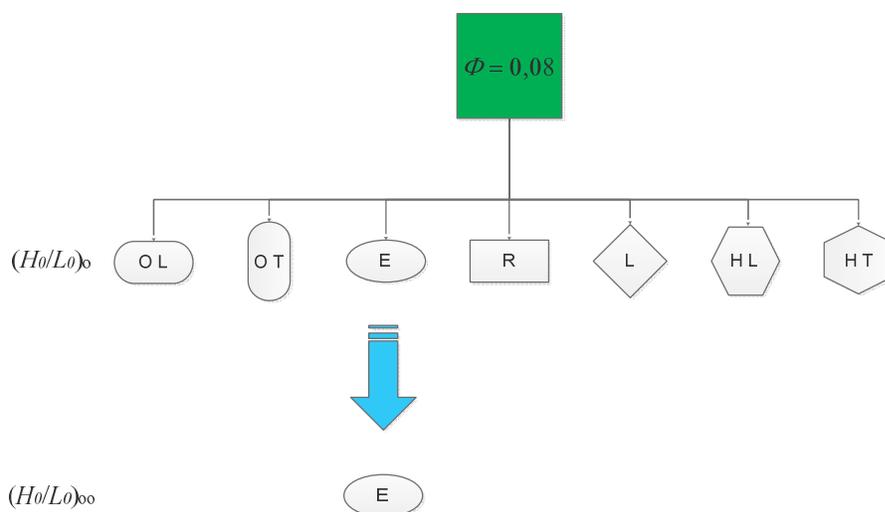


Figura 5.8 - Geometria ótima para cada tipo de perfuração e geometria ótima para o conjunto das perfurações, para cada fração (ϕ) do volume da perfuração.

Nas Tabelas 5.3 e 5.4, far-se-á uma análise percentual comparando-se a melhor geometria para o conjunto das perfurações, para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, e a melhor geometria para cada tipo de perfuração. Serão consideradas placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

Tabela 5.3 - Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfurações e todos os valores de (ϕ) .

ϕ	$H/L = 1,0$				
	Geometria Ótimizada $(H_0/L_0)_{00}$	Acréscimo no desempenho mecânico (%)	Geometria para comparação $(H_0/L_0)_o$	(%)	Diferença (%)
0,08	Elíptica	110,82	Oblonga Transversal	110,38	-0,40
			Retangular	107,29	-3,19
			Losangular	95,15	-14,14
			Hexagonal Longitudinal	109,54	-1,16
			Hexagonal Transversal	101,88	-8,07
0,10	Hexagonal Longitudinal	102,31	Oblonga Transversal	101,15	-1,13
			Elíptica	99,58	-2,67
			Retangular	89,78	-12,25
			Losangular	94,33	-7,80
			Hexagonal Transversal	94,48	-7,65
0,15	Hexagonal Longitudinal	95,09	Oblonga Transversal	82,71	-13,02
			Elíptica	90,06	-5,29
			Retangular	90,37	-4,96
			Losangular	56,67	-40,41
			Hexagonal Transversal	70,26	-26,11
0,20	Retangular	78,57	Oblonga Transversal	64,42	-18,01
			Elíptica	63,75	-18,87
			Losangular	21,27	-72,93
			Hexagonal Longitudinal	19,90	-74,68
			Hexagonal Transversal	53,24	-32,24
0,25	Oblonga Transversal	55,80	Elíptica	41,86	-24,98
			Retangular	52,86	-5,27
			Losangular	4,35	-92,21
			Hexagonal Longitudinal	46,43	-16,79
			Hexagonal Transversal	37,93	-32,02

Tabela 5.4 - Comparação percentual para o desempenho mecânico à flambagem em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfurações e todos os valores de (ϕ) .

ϕ	$H/L = 0,5$				
	Geometria Ótimizada $(H_0/L_0)_{00}$	Acréscimo no desempenho mecânico (%)	Geometria para comparação $(H_0/L_0)_o$	(%)	Diferença (%)
0,08	Hexagonal Longitudinal	85,30	Oblonga Transversal	81,50	-4,45
			Elíptica	79,61	-6,67
			Retangular	84,50	-0,94
			Losangular	81,82	-4,08
			Hexagonal Transversal	74,93	-12,16
0,10	Retangular	93,85	Oblonga Transversal	87,50	-6,77
			Elíptica	87,65	-6,61
			Losangular	79,90	-14,86
			Hexagonal Longitudinal	92,00	-1,97
			Hexagonal Transversal	76,56	-18,43
0,15	Hexagonal Longitudinal	94,87	Oblonga Longitudinal	85,65	-9,72
			Oblonga Transversal		
			Elíptica	84,35	-11,09
			Retangular	86,50	-8,82
			Losangular	67,89	-28,43
			Hexagonal Transversal	76,47	-19,39
0,20	Retangular; Hexagonal Longitudinal	81,03	Oblonga Longitudinal	79,60	-1,76
			Oblonga Transversal		
			Elíptica	74,35	-8,24
			Losangular	56,86	-29,83
			Hexagonal Transversal	69,00	-14,85
0,25	Retangular	74,36	Oblonga Longitudinal	62,44	-16,03
			Elíptica	64,50	-13,26
			Losangular	37,93	-48,99
			Hexagonal Longitudinal	66,67	-10,34
			Hexagonal Transversal	56,65	-23,82

De acordo com os dados das Tabelas 5.3 e 5.4, os melhores resultados para a melhoria do desempenho mecânico em placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$ referem-se, respectivamente, às placas com perfuração oblonga transversal (OT) e retangular (R) e para $\phi = 0,08$. Neste sentido, as placas possuem 99,60% e 99,06% do desempenho das placas que possuem as configurações ótimas. Por outro lado, os piores desempenhos mecânicos para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$ referem-se às placas com perfuração losangular (L) e para $\phi = 0,25$. Correspondem, respectivamente, a 7,79% e 51,01% do valor encontrado para a configuração ótima.

Em função do acima exposto e com o objetivo de apresentar quantitativamente os resultados obtidos para a melhoria no comportamento mecânico das placas à flambagem, fez-se a comparação dos resultados, entre as melhores e as piores geometrias, definidos pelos fatores TLN_{Max} e TLN_{Min} . Assim, a Figura 5.9 mostra a melhoria no desempenho mecânico para as geometrias ótimas em placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$ submetidas à flambagem, para cada tipo de perfuração e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração.

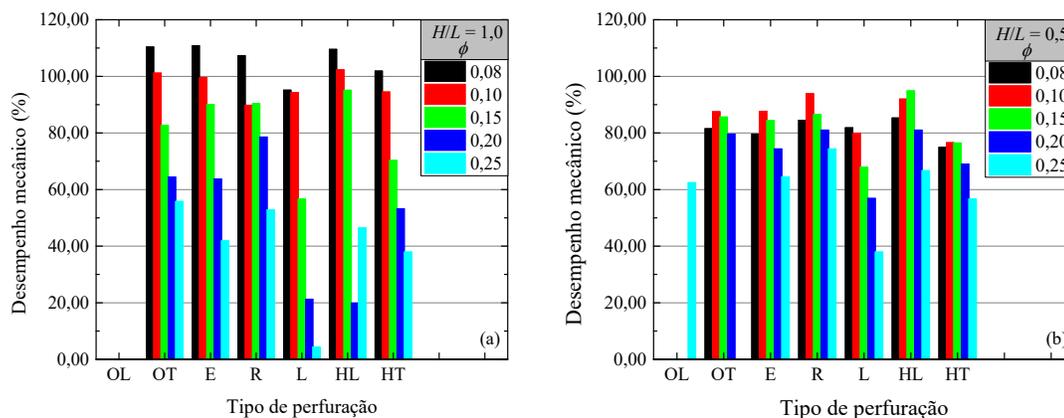


Figura 5.9 – Desempenho mecânico das placas à flambagem, para cada tipo de perfuração, cada fração (ϕ) do volume da perfuração e para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Em geral, para $H/L = 1,0$, Figura 5.9a, quanto menor a fração do volume (ϕ) da perfuração, maior será a melhoria do desempenho mecânico. Essa melhoria, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,08$ é superior a 100,00%, exceto para as placas com perfuração losangular (L), que é de 95,15%. O menor valor encontrado para a melhoria do desempenho mecânico de placas com $\phi = 0,10$ é de 89,78% para as placas com perfuração retangular (R), e o maior valor de 102,31% para as placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL). Para $\phi = 0,20$ e em placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL) e

losangular (L), as placas possuem baixa melhoria mecânica, respectivamente, 21,70% e 19,90%. Os piores resultados encontrados para a melhoria mecânica foram para as placas com $\phi = 0,25$, exceto para as placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL).

Já, o melhor desempenho mecânico para as placas com $H/L = 0,5$, Figura 5.9b, corresponde às placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL) e $\phi = 0,15$, e o pior refere-se às placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$, respectivamente, 94,87% e 37,93%. Em geral, as placas com $\phi = 0,10$ e $\phi = 0,15$ possuem melhor desempenho mecânico, se comparadas às placas com $\phi = 0,08$.

Comparando-se a melhoria do desempenho mecânico das placas, verifica-se que há uma relação entre o tamanho da perfuração e sua performance mecânica, de maior intensidade para as placas com $H/L = 1,0$ e de menor intensidade para as placas com $H/L = 0,5$.

O método Design Construtal será utilizado para comparar de forma adequada a distribuição das tensões de von Mises sobre a placa. As Figuras 5.9 a 5.18 mostram que a melhor distribuição das imperfeições conduz para a placa que possui o melhor desempenho mecânico, ou seja, está de acordo com “o princípio da distribuição ótima das imperfeições”, o que ilustra a aplicação do método à flambagem em placas finas perfuradas.

As Figuras 5.10 a 5.14 apresentam a distribuição das tensões de von Mises para as melhores e as piores configurações geométricas em placas com $H/L = 1,0$, considerando-se todos os tipos de perfuração e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações. A distribuição das tensões de von Mises refere-se aos dados apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2.

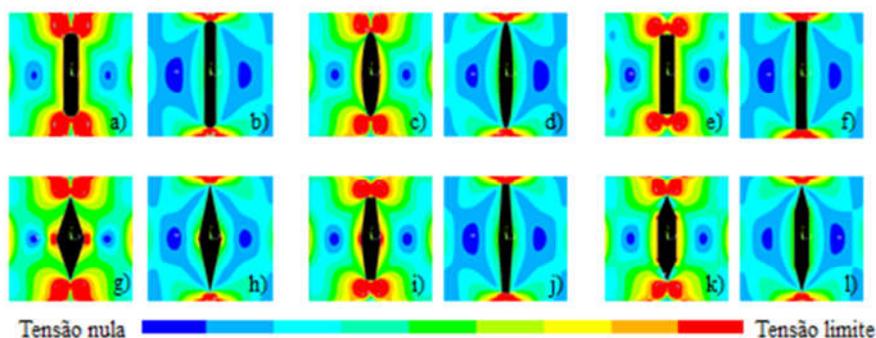


Figura 5.10 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

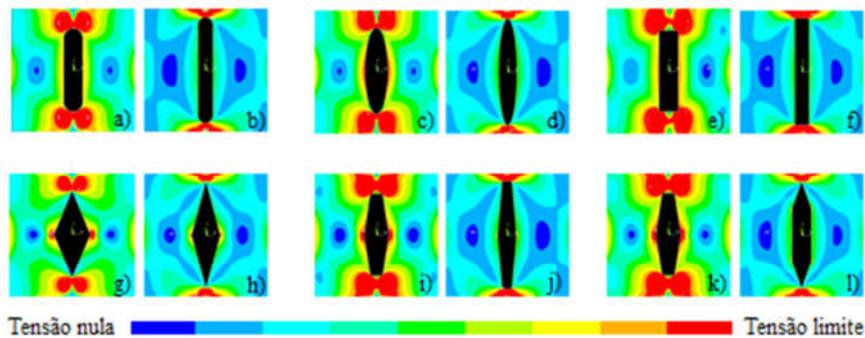


Figura 5.11 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

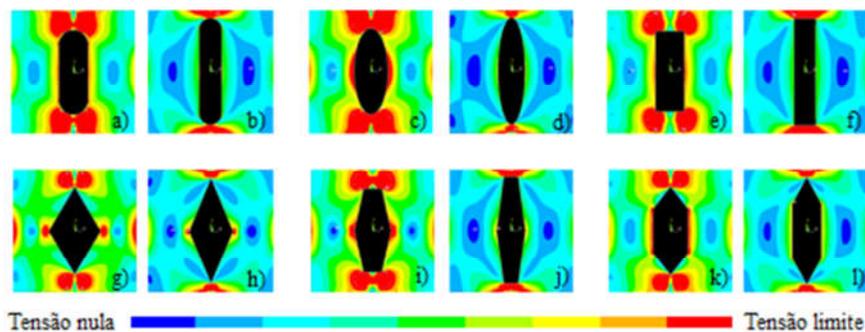


Figura 5.12 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

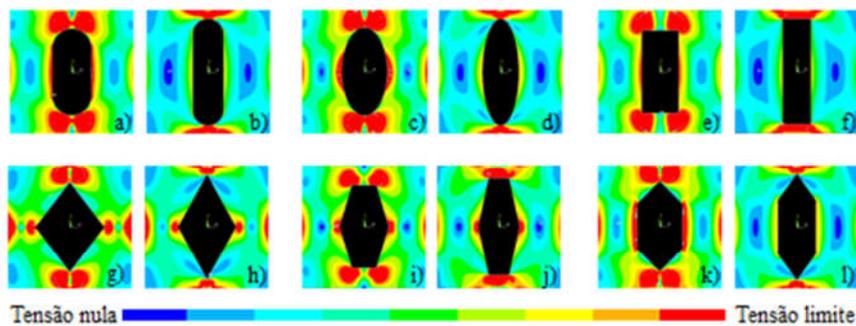


Figura 5.13 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

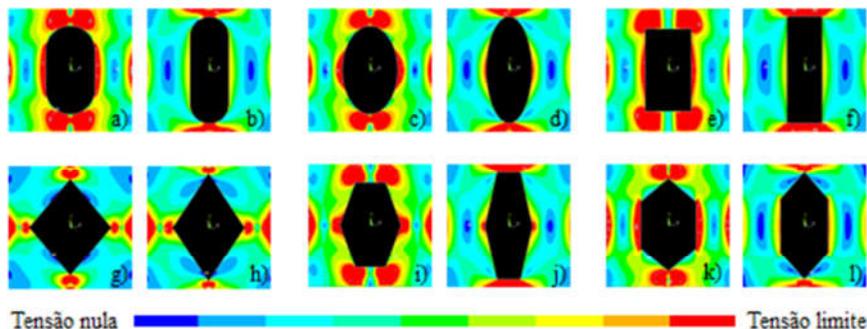


Figura 5.14 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

As Figuras 5.15 a 5.19 apresentam a distribuição das tensões de von Mises para as melhores e as piores configurações geométricas em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

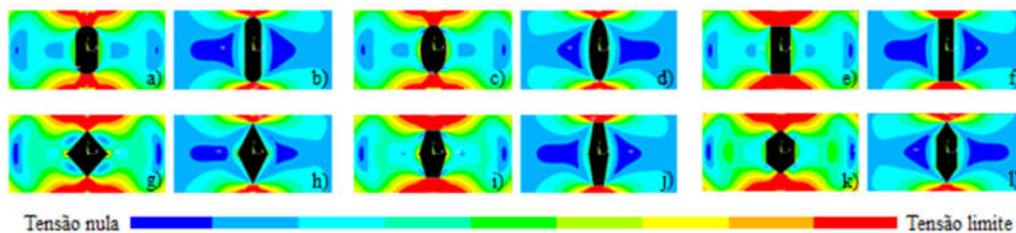


Figura 5.15 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

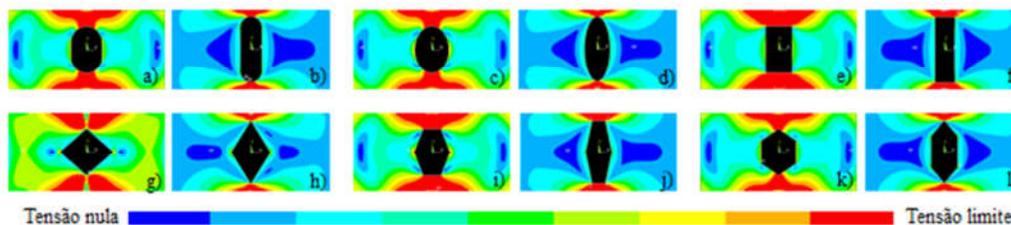


Figura 5.16 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

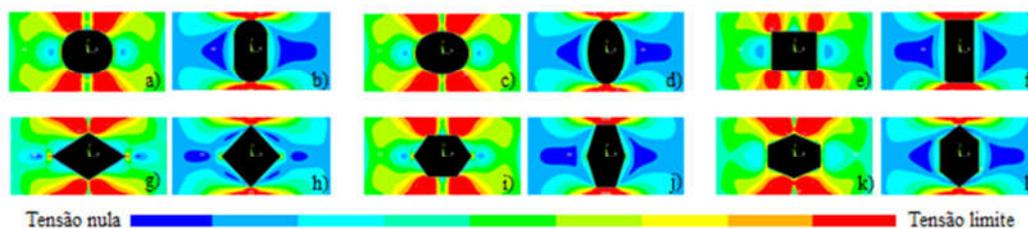


Figura 5.17 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

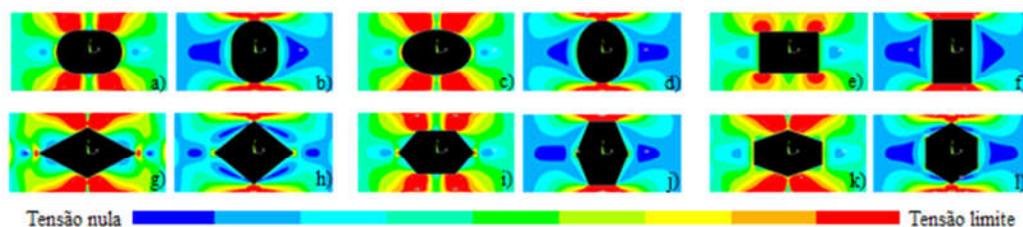


Figura 5.18 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

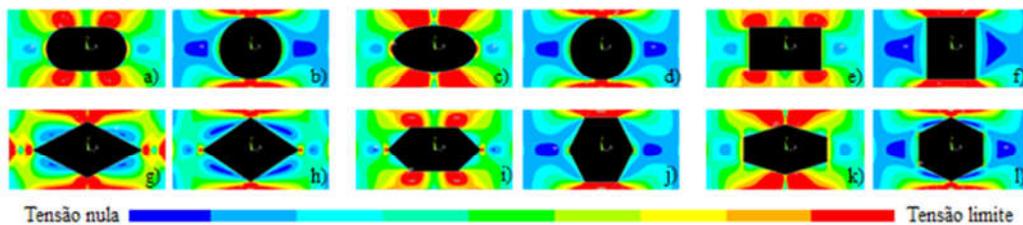


Figura 5.19 - Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

As Figuras 5.10 a 5.19 mostram, para uma análise à flambagem, que as melhores geometrias para cada tipo de perfuração, quando comparadas às piores, apresentam sobre a placa uma melhor distribuição da tensão limite do material, ou seja, das imperfeições. Por outro lado, as piores geometrias possuem uma pequena concentração desta tensão limite.

5.3 Flambagem Elasto-Plástica

A geração das curvas à flambagem elasto-plástica para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$ será feita conforme o exposto a seguir. A Figura 5.20 mostra como exemplo a curva à flambagem elasto-plástica e os seus respectivos fatores TLN_{Max} e TLN_{Min} , para placas com perfuração elíptica e $\phi = 0,20$. Os fatores TLN_{Max} e TLN_{Min} , posicionados sobre a curva, representam para o exemplo considerado, respectivamente, os valores máximo e mínimo do fator TLN .

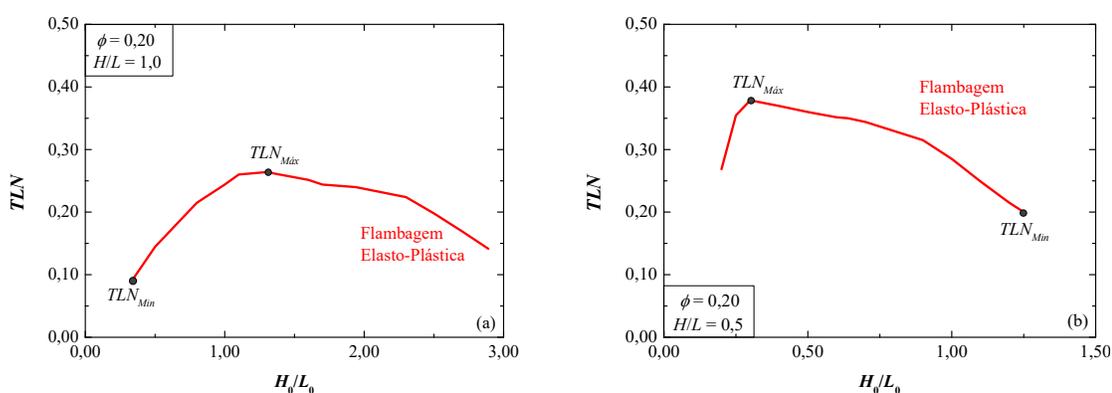


Figura 5.20 - Curva à flambagem elasto-plástica em placas com perfuração elíptica e $\phi = 0,20$, para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

As Figuras 5.21 a 5.25 mostram as curvas à flambagem elasto-plástica para todos os casos considerados neste trabalho.

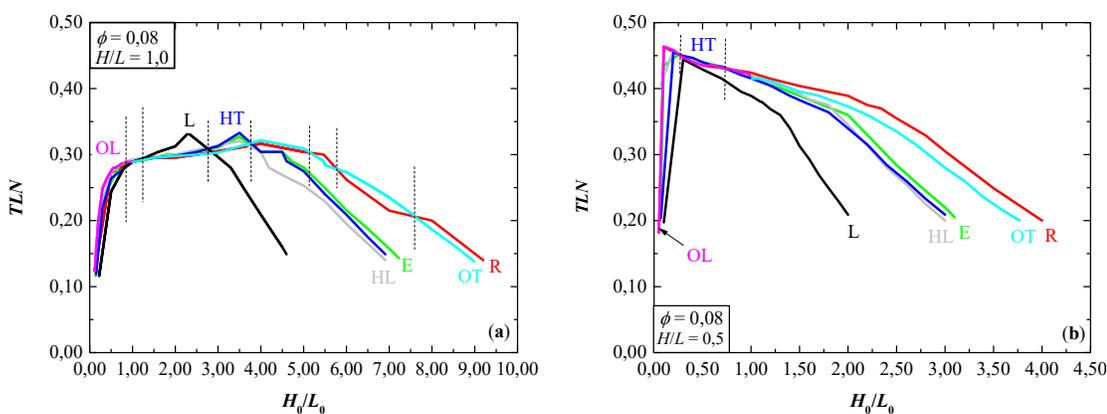


Figura 5.21 – Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,08$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

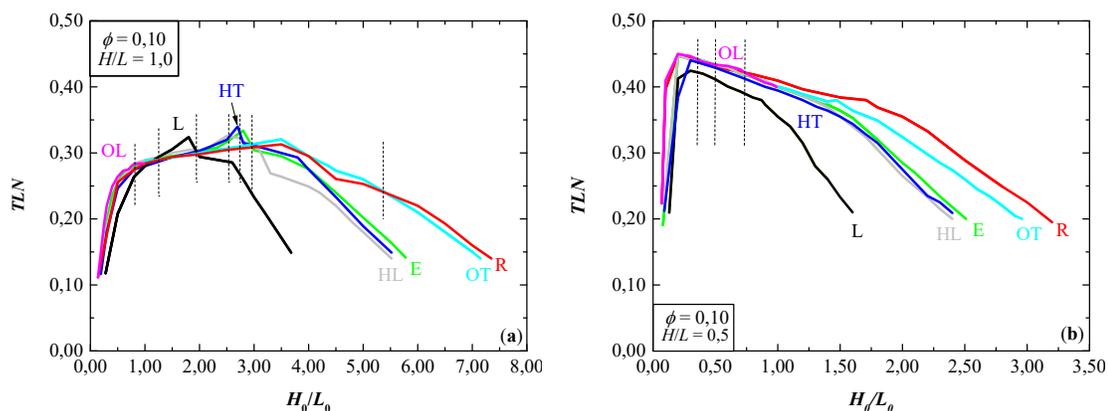


Figura 5.22 – Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,10$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

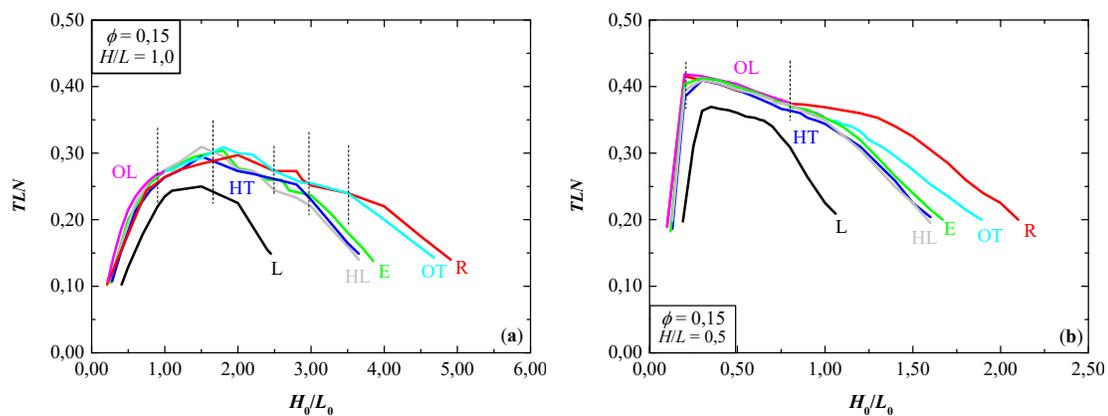


Figura 5.23 – Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,15$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

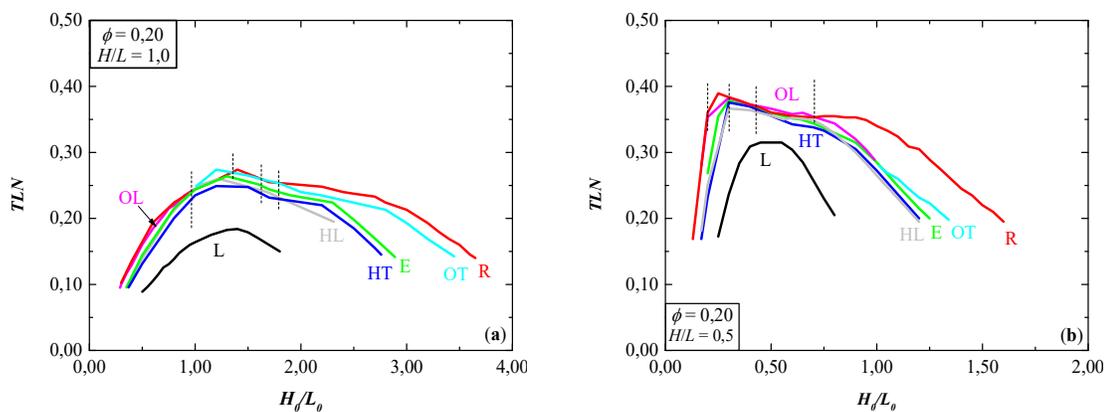


Figura 5.24 – Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,20$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

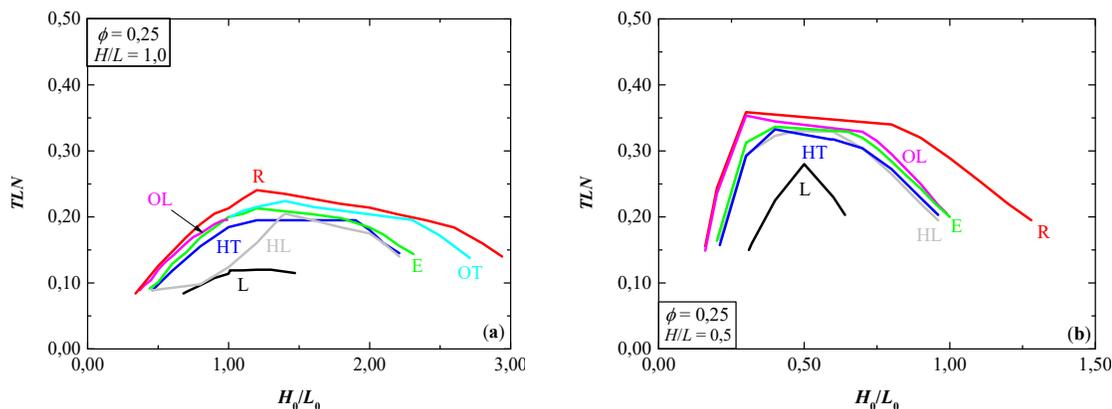


Figura 5.25 – Curvas à flambagem elasto-plástica para $\phi = 0,25$, em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Assim como verificado para as curvas limites à flambagem, as Figuras 5.21 a 5.25 mostram para as curvas à flambagem elasto-plástica algumas similaridades. Primeiro, a maior abrangência para a variação do grau de liberdade H_0/L_0 refere-se às placas com perfuração retangular (R), e a menor, às placas com perfuração losangular (L). Segundo, as placas com perfuração hexagonal transversal (HT), hexagonal longitudinal (HL) e elíptica (E) possuem valores limites próximos para o grau de liberdade H_0/L_0 . Terceiro, os valores máximos do fator TLN para as placas com $H/L = 1,0$ são encontrados para valores maiores de H_0/L_0 se comparados às placas com $H/L = 0,5$. Quarto, as placas com $H/L = 0,5$ suportam tensões maiores em comparação às placas $H/L = 1,0$, ou seja, sua capacidade de carregamento é maior. Quinto, há intervalos onde um tipo de perfuração prevalece em relação aos demais, por exemplo, para as placas com $H/L = 0,5$ e $\phi = 0,20$, Figura 5.24b, no intervalo $(0,44 \leq H_0/L_0 \leq 0,70)$, a melhor configuração geométrica corresponde às placas com perfuração retangular (R). Finalmente, observa-se no traçado das curvas que há uma relação entre o tipo de perfuração e sua variação geométrica sobre os eixos horizontal e vertical que implica na melhoria da performance mecânica da placa.

Visando quantificar a melhoria do desempenho mecânico das placas submetidas à flambagem elasto-plástica, as Tabelas 5.5 e 5.6 apresentam, as melhores e as piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações. Para a quantificação, foram considerados os valores máximos e mínimos do fator TLN , respectivamente, $TLN_{Máx}$ e TLN_{Min} .

Tabela 5.5 – Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

ϕ	Perfuração	$H/L = 1,0$				
		$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	TLN_{Min}	Diferença %
0,08	Oblonga Longitudinal	0,99	0,2890	0,12	0,1227	135,53
	Oblonga Transversal	4,00	0,3215	8,99	0,1380	132,97
	Elíptica	3,50	0,3271	0,14	0,1165	180,77
	Retangular	4,00	0,3165	0,12	0,1253	152,59
	Losangular	2,30	0,3325	0,22	0,1165	185,41
	Hexagonal Longitudinal	3,50	0,3205	0,15	0,1227	161,21
	Hexagonal Transversal	3,50	0,3330	0,15	0,1190	179,83
0,10	Oblonga Longitudinal	0,99	0,2840	0,14	0,1115	154,71
	Oblonga Transversal	3,50	0,3250	7,15	0,1400	132,14
	Elíptica	2,80	0,3340	0,18	0,1178	183,53
	Retangular	3,50	0,3130	0,14	0,1115	180,72
	Losangular	1,80	0,3240	0,28	0,1177	175,28
	Hexagonal Longitudinal	2,50	0,3255	0,19	0,1203	170,57
	Hexagonal Transversal	2,70	0,3400	0,19	0,1165	191,85
0,15	Oblonga Longitudinal	0,99	0,2730	0,22	0,1075	153,95
	Oblonga Transversal	1,80	0,3090	4,68	0,1430	116,08
	Elíptica	1,80	0,3040	0,26	0,1050	189,52
	Retangular	2,00	0,2971	0,21	0,1025	189,85
	Losangular	1,50	0,2500	0,41	0,1025	143,90
	Hexagonal Longitudinal	1,50	0,3095	0,28	0,1075	187,91
	Hexagonal Transversal	1,50	0,2950	0,28	0,1075	174,42
0,20	Oblonga Longitudinal	0,99	0,2440	0,29	0,0950	156,84
	Oblonga Transversal	1,60	0,2740	3,45	0,1425	92,28
	Elíptica	1,30	0,2640	0,35	0,0955	176,44
	Retangular	1,40	0,2740	0,30	0,1025	167,32
	Losangular	1,30	0,1840	0,55	0,0890	106,74
	Hexagonal Longitudinal	1,20	0,2600	0,37	0,1000	160,00
	Hexagonal Transversal	1,50	0,2490	0,37	0,0955	160,73
0,25	Oblonga Longitudinal	0,99	0,1955	0,37	0,0890	119,66
	Oblonga Transversal	1,20	0,2240	2,71	0,1380	62,32
	Elíptica	1,20	0,2130	0,44	0,0915	132,79
	Retangular	1,20	0,2405	0,34	0,0840	186,31
	Losangular	1,01	0,1200	0,68	0,0840	42,86
	Hexagonal Longitudinal	1,40	0,2050	0,46	0,0890	130,34
	Hexagonal Transversal	1,40	0,1950	0,46	0,0890	119,10

Tabela 5.6 – Melhores e piores configurações geométricas para as placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

ϕ	Perfuração	$H/L = 0,5$				
		$(H_0/L_0)_o$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_p$	TLN_{Min}	Diferença %
0,08	Oblonga Longitudinal	0,10	0,4636	0,05	0,1825	154,03
	Oblonga Transversal	1,01	0,4150	3,77	0,2000	107,50
	Elíptica	0,25	0,4515	3,10	0,2050	120,24
	Retangular	0,10	0,4636	0,05	0,1813	155,71
	Losangular	0,30	0,4440	0,10	0,1972	125,15
	Hexagonal Longitudinal	0,20	0,4581	3,00	0,2000	129,05
	Hexagonal Transversal	0,20	0,4555	0,07	0,2036	123,72
0,10	Oblonga Longitudinal	0,20	0,4496	0,07	0,2236	101,07
	Oblonga Transversal	1,01	0,4000	2,96	0,2000	100,00
	Elíptica	0,20	0,4465	0,08	0,1906	134,26
	Retangular	0,20	0,4495	3,20	0,1950	130,51
	Losangular	0,30	0,4245	1,60	0,2096	102,53
	Hexagonal Longitudinal	0,20	0,4476	2,40	0,2000	123,80
	Hexagonal Transversal	0,30	0,4405	2,40	0,2090	110,77
0,15	Oblonga Longitudinal	0,20	0,4186	0,10	0,1889	121,60
	Oblonga Transversal	1,05	0,3490	1,89	0,2000	74,50
	Elíptica	0,30	0,4130	0,12	0,1825	126,30
	Retangular	0,20	0,4155	0,10	0,1906	118,00
	Losangular	0,35	0,3695	0,19	0,1972	87,37
	Hexagonal Longitudinal	0,20	0,4096	1,60	0,1986	106,24
	Hexagonal Transversal	0,30	0,4096	0,13	0,1863	119,86
0,20	Oblonga Longitudinal	0,30	0,3830	0,17	0,2805	36,54
	Oblonga Transversal	1,01	0,2800	1,34	0,1980	41,41
	Elíptica	0,30	0,3786	1,25	0,2000	89,30
	Retangular	0,25	0,3895	0,13	0,1687	130,88
	Losangular	0,45	0,3150	0,25	0,1725	82,61
	Hexagonal Longitudinal	0,30	0,3665	0,17	0,1813	102,15
	Hexagonal Transversal	0,30	0,3756	0,17	0,1687	122,64
0,25	Oblonga Longitudinal	0,30	0,3535	0,16	0,1490	137,25
	Oblonga Transversal	-	-	-	-	-
	Elíptica	0,40	0,3365	0,20	0,1640	105,18
	Retangular	0,30	0,3586	0,16	0,1555	130,61
	Losangular	0,50	0,2800	0,31	0,1500	86,67
	Hexagonal Longitudinal	0,47	0,3300	0,21	0,1650	100,00
	Hexagonal Transversal	0,40	0,3326	0,21	0,1573	111,44

De acordo com os dados das Tabelas 5.5 e 5.6, a melhoria no desempenho mecânico é de 191,85% para as placas com $H/L = 1,0$, perfuração hexagonal transversal (HT) e $\phi = 0,10$, e de 155,71% para as placas com $H/L = 0,5$, perfuração retangular (R) e $\phi = 0,08$. Por outro lado, o pior rendimento mecânico é de 42,86% para as placas com $H/L = 1,0$, perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$, e de 36,54% para as placas com $H/L = 0,5$, perfuração oblonga longitudinal e $\phi = 0,20$.

Considerando-se, respectivamente, o melhor e o pior resultado para a melhoria do rendimento mecânico das placas, a Tabela 5.5 mostra rendimentos de: 185,41% e 132,97% para $\phi = 0,08$ e em placas com perfuração losangular (L) e oblonga longitudinal (OL); 191,85% e 132,14% para $\phi = 0,10$ e em placas com perfuração hexagonal transversal (HT) e oblonga transversal (OT); 189,85% e 116,08% para $\phi = 0,15$ e em placas com perfuração retangular (R) e oblonga transversal (OT); 176,44% e 92,28% para $\phi = 0,20$ e em placas com perfuração elíptica (E) e oblonga transversal (OT); 186,31% e 42,86% para $\phi = 0,25$ e em placas com perfuração retangular (R) e losangular (L).

Utilizando-se o mesmo raciocínio exposto acima, a Tabela 5.6 mostra rendimentos de: 155,71% e 107,50% para $\phi = 0,08$ e em placas com perfuração retangular (R) e oblonga transversal (OT); 134,26% e 100,00% para $\phi = 0,10$ e em placas com perfuração elíptica (E) e oblonga transversal (OT); 126,30% e 74,50% para $\phi = 0,15$ e em placas com perfuração elíptica (E) e oblonga transversal (OT); 130,88% e 36,54% para $\phi = 0,20$ e em placas com perfuração retangular (R) e oblonga longitudinal (OL); 130,61% e 86,67% para $\phi = 0,25$ e em placas com perfuração retangular (R) e losangular (L).

Nas Tabelas 5.7 e 5.8, serão efetuadas análises percentuais comparando-se a melhor geometria para o conjunto das perfurações em função de cada fração (ϕ) do volume da perfuração, ou seja, a geometria otimizada, e a melhor geometria (ótima) para cada tipo de perfuração. Nestas tabelas serão consideradas placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, todas as frações (ϕ) para o volume das perfurações e todos os tipos de perfuração.

Tabela 5.7 - Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem elasto-plástica em placas $H/L = 1,0$, todos os tipos de perfuração e para todas as frações de (ϕ) .

ϕ	$H/L = 1,0$				
	Geometria Otimizada $(H_0/L_0)_{00}$	Acréscimo no desempenho mecânico (%)	Perfuração para comparação $(H_0/L_0)_o$	(%)	Diferença (%)
0,08	Losangular	185,41	Oblonga Longitudinal	135,53	-26,90
			Oblonga Transversal	132,97	-28,28
			Elíptica	180,77	-2,50
			Retangular	152,59	-17,70
			Hexagonal Longitudinal	161,21	-13,05
			Hexagonal Transversal	179,83	-3,01
0,10	Hexagonal Transversal	191,85	Oblonga Longitudinal	154,71	-19,36
			Oblonga Transversal	132,14	-31,12
			Elíptica	183,53	-4,34
			Retangular	180,72	-5,80
			Losangular	175,28	-8,64
			Hexagonal Longitudinal	170,57	-11,09
0,15	Retangular	189,85	Oblonga Longitudinal	153,95	-18,91
			Oblonga Transversal	116,08	-38,86
			Elíptica	189,52	-0,17
			Losangular	143,90	-24,20
			Hexagonal Longitudinal	187,91	-1,02
			Hexagonal Transversal	174,42	-8,13
0,20	Elíptica	176,44	Oblonga Longitudinal	156,84	-11,11
			Oblonga Transversal	92,28	-47,70
			Retangular	167,32	-5,17
			Losangular	106,74	-39,50
			Hexagonal Longitudinal	160,00	-9,32
			Hexagonal Transversal	160,73	-8,90
0,25	Retangular	186,31	Oblonga Longitudinal	119,66	-35,77
			Oblonga Transversal	62,32	-66,55
			Elíptica	132,79	-28,73
			Losangular	42,86	-77,00
			Hexagonal Longitudinal	130,34	-30,04
			Hexagonal Transversal	119,10	-36,07

Tabela 5.8 - Comparativo percentual para o desempenho mecânico à flambagem elasto-plástica em placas $H/L = 0,5$, todos os tipos de perfuração e para todas as frações de (ϕ) .

ϕ	$H/L = 0,5$				
	Geometria Otimizada $(H_0/L_0)_{oo}$	Acréscimo no desempenho mecânico (%)	Perfuração para comparação $(H_0/L_0)_o$	(%)	Diferença (%)
0,08	Retangular	155,71	Oblonga Longitudinal	154,03	-1,08
			Oblonga Transversal	107,50	-30,96
			Elíptica	120,24	-22,78
			Losangular	125,15	-19,63
			Hexagonal Longitudinal	129,05	-17,12
			Hexagonal Transversal	123,72	-20,54
0,10	Elíptica	134,26	Oblonga Longitudinal	101,07	-24,72
			Oblonga Transversal	100,00	-25,52
			Retangular	130,51	-2,79
			Losangular	102,53	-23,63
			Hexagonal Longitudinal	123,80	-7,79
			Hexagonal Transversal	110,77	-17,50
0,15	Elíptica	126,30	Oblonga Longitudinal	121,60	-3,72
			Oblonga Transversal	74,50	-41,01
			Retangular	118,00	-6,57
			Losangular	87,37	-30,82
			Hexagonal Longitudinal	106,24	-15,88
			Hexagonal Transversal	119,86	-5,10
0,20	Retangular	130,88	Oblonga Longitudinal	36,54	-72,08
			Oblonga Transversal	41,41	-68,36
			Elíptica	89,30	-31,77
			Losangular	82,61	-36,88
			Hexagonal Longitudinal	102,15	-21,95
			Hexagonal Transversal	122,64	-6,30
0,25	Oblonga Longitudinal	137,25	Oblonga Longitudinal	-	-
			Elíptica	105,18	-23,37
			Retangular	130,61	-4,84
			Losangular	86,67	-36,85
			Hexagonal Longitudinal	100,00	-27,14
			Hexagonal Transversal	111,44	-18,81

De acordo com os dados da Tabela 5.7, o pior desempenho mecânico para as placas com $H/L = 1,0$ e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, quando comparado ao desempenho mecânico da geometria otimizada, corresponde às placas com perfurações dos tipos: oblonga transversal (OT), para $\phi = 0,08$; $0,10$; $0,15$ e $0,20$, e losangular (L), para $\phi = 0,25$. Neste sentido, o pior desempenho para $H/L = 1,0$ refere-se às placas que possuem perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$, sendo que este corresponde a 23,00% do valor encontrado para a configuração otimizada. Por outro lado, para $\phi = 0,15$, as placas com perfuração elíptica (E) possuem 99,83% do desempenho mecânico ótimo, sendo esta a segunda melhor configuração para as placas $H/L = 1,0$ submetidas à flambagem elasto-plástica.

Utilizando-se a mesma forma de análise acima exposta, a Tabela 5.8 mostra que o pior desempenho mecânico para as placas $H/L = 0,5$ e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, quando comparado ao desempenho mecânico da geometria otimizada, corresponde às placas com perfuração oblonga transversal (OT) para $\phi = 0,08$; $0,10$ e $0,15$, oblonga longitudinal (OL) para $\phi = 0,20$ e losangular (L) para $\phi = 0,25$. Assim, o pior desempenho para as placas com $H/L = 0,5$, refere-se às com perfuração oblonga longitudinal (OL) e para $\phi = 0,20$, sendo que este corresponde a 27,92% do valor encontrado para a configuração otimizada. Por outro lado, para $\phi = 0,08$ as placas com perfuração oblonga longitudinal (OL) possuem 98,92% do desempenho mecânico ótimo, sendo esta a segunda melhor configuração para as placas com $H/L = 0,5$ submetidas à flambagem elasto-plástica.

A Figura 5.26 mostra para todos os casos estudados, o desempenho mecânico ótimo para cada tipo de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

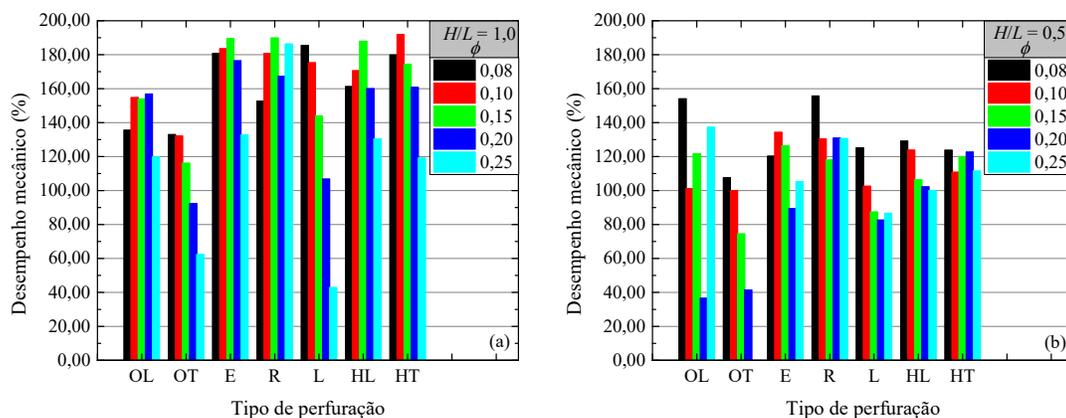


Figura 5.26 – Desempenho mecânico das placas à flambagem elasto-plástica, para cada tipo de perfuração, cada fração (ϕ) do volume da perfuração, e para: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Para as placas com $H/L = 1,0$, Figura 5.26a, o melhor desempenho mecânico refere-se às placas com perfuração hexagonal transversal (HT) e $\phi = 0,10$, e o pior, às placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$, respectivamente, 191,85% e 42,86%. Percebe-se que o aumento no tamanho da fração (ϕ) da perfuração para as placas com perfuração losangular (L) e oblonga transversal (OT) conduz a uma redução na performance mecânica das placas. O melhor desempenho mecânico verificado para as placas com $\phi = 0,15$ é de 189,52%, 189,75% e 187,91%, nesta ordem, para as placas com perfuração elíptica (E), retangular (R) e hexagonal longitudinal (HL).

A Figura 5.26b mostra que o melhor desempenho mecânico em placas com $H/L = 0,5$ refere-se às placas com $\phi = 0,08$, exceto para as placas com perfuração elíptica (L). Assim, o melhor desempenho mecânico corresponde às placas com perfuração retangular (R) e $\phi = 0,08$, e o pior, às placas com perfuração oblonga transversal (OT) e $\phi = 0,20$, respectivamente, 155,71% e 36,54%. Percebe-se também que as placas com perfuração retangular (R) apresentam desempenhos mecânicos muito próximos para $\phi = 0,10$; 0,20 e 0,25.

O método Design Construtal, assim como no item 5.2, aqui também será utilizado para comparar de forma adequada a distribuição das tensões de von Mises sobre a placa. Neste sentido, as Figuras 5.27 a 5.31, mostram que a melhor distribuição das imperfeições conduz para a placa que possui o melhor desempenho mecânico, ilustrando a aplicação do método à flambagem elasto-plástica.

As Figuras 5.27 a 5.31 apresentam as tensões de von Mises para as melhores e as piores configurações geométricas em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfurações e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações. Os dados para a geração das figuras referem-se às Tabelas 5.5 e 5.6.

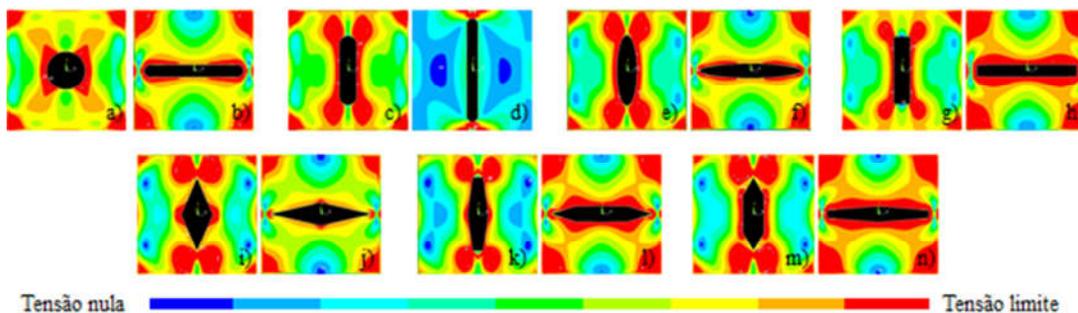


Figura 5.27 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

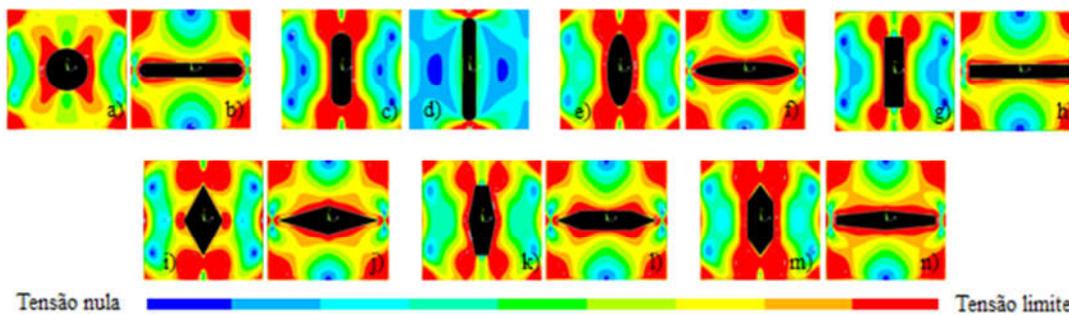


Figura 5.28 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

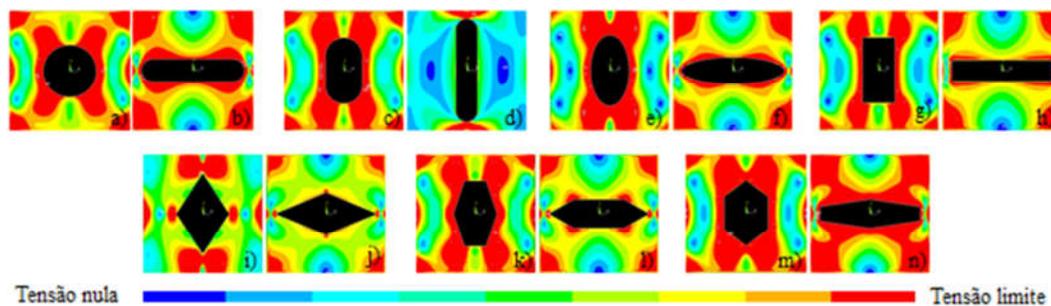


Figura 5.29 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

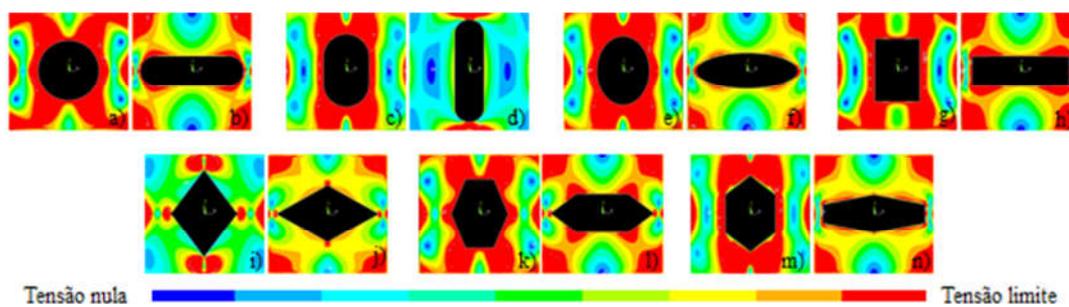


Figura 5.30 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações, e (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

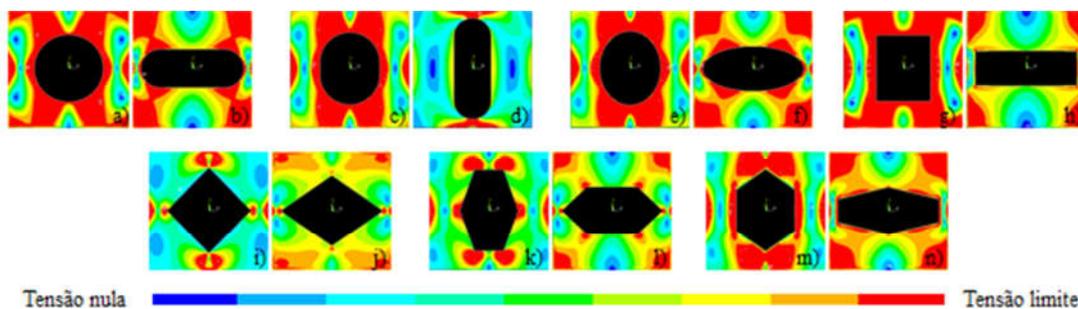


Figura 5.31 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 1,0$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

As Figuras 5.32 a 5.36 apresentam a distribuição das tensões de von Mises para as melhores e as piores configurações geométricas em placas com $H/L = 0,5$, considerando-se todos os tipos de perfuração, e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

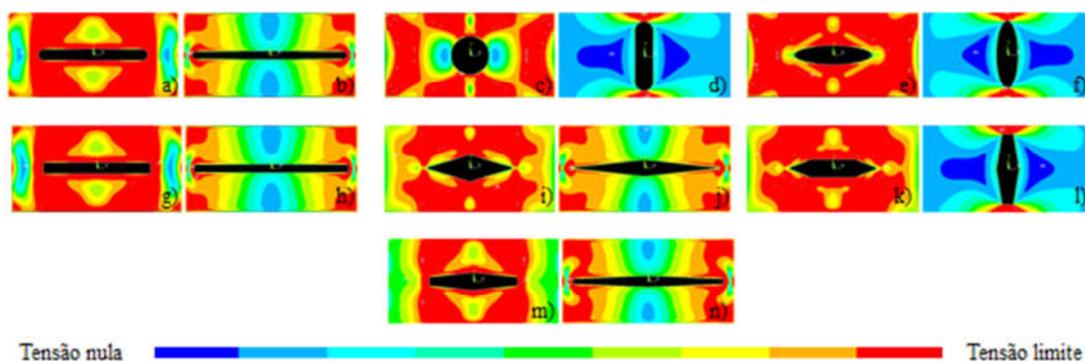


Figura 5.32 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,08$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), melhores; (b, d, f, h, j, l, n), piores.

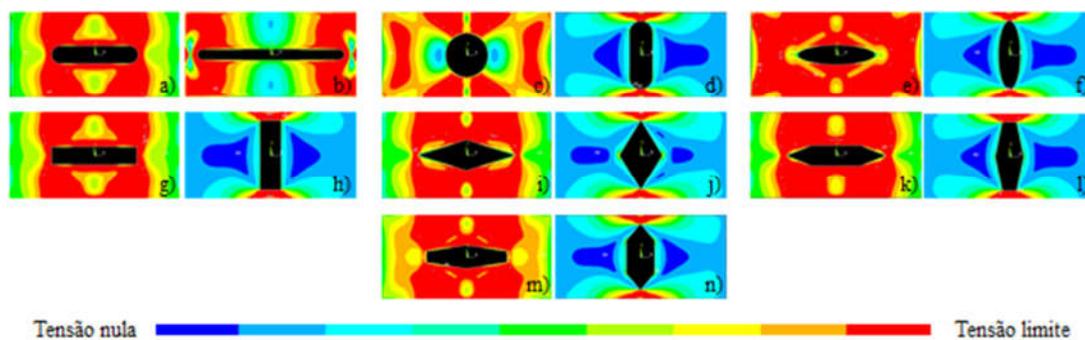


Figura 5.33 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,10$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), melhores; (b, d, f, h, j, l, n), piores.

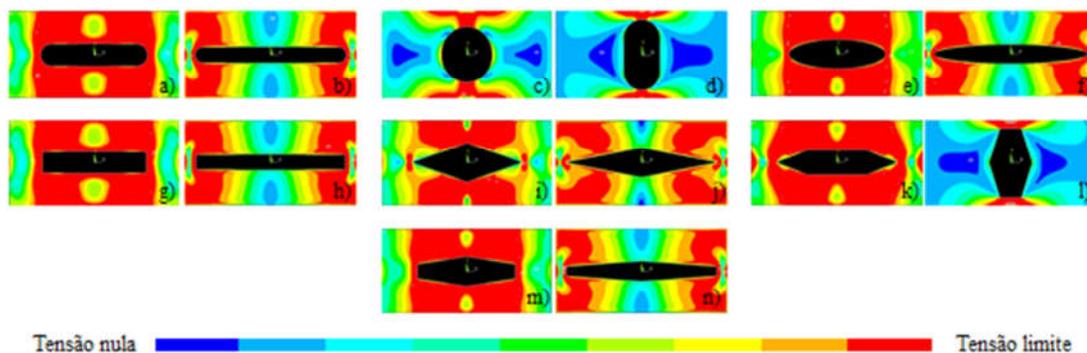


Figura 5.34 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,15$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

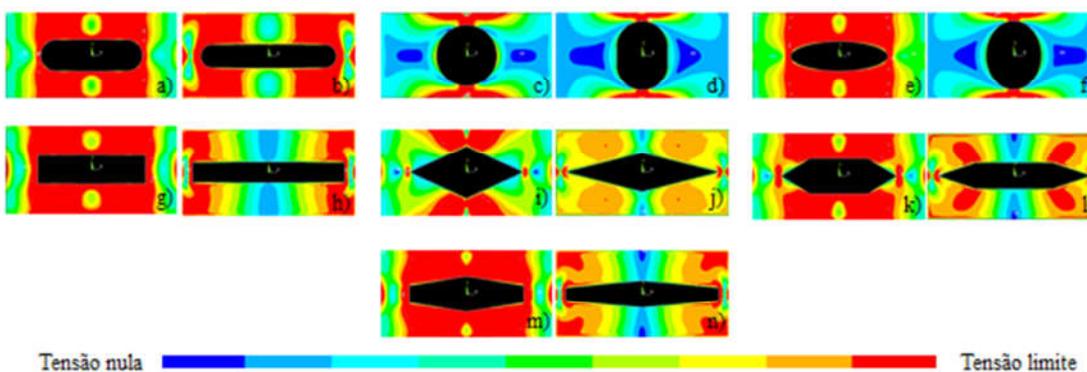


Figura 5.35 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,20$, sendo: (a, c, e, g, i, k, m), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l, n), as piores configurações.

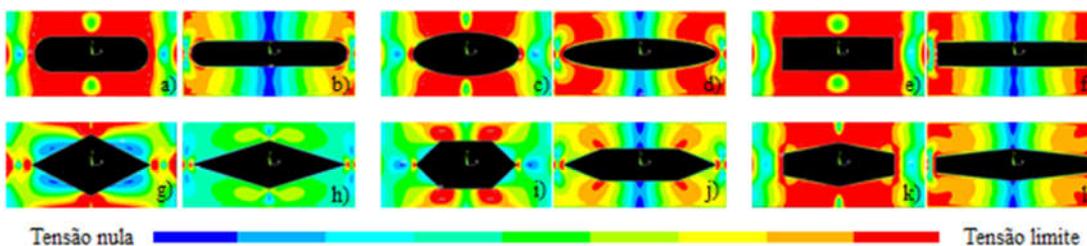


Figura 5.36 – Distribuição das tensões de von Mises em placas com $H/L = 0,5$, para todos os tipos de perfuração e $\phi = 0,25$, sendo: (a, c, e, g, i, k), as melhores configurações; (b, d, f, h, j, l), as piores configurações.

De acordo com as Figuras 5.26 a 5.35, para todos os casos estudados, pode-se observar que as melhores geometrias apresentam uma maior concentração da tensão limite, pontos representados nas figuras na cor vermelha, em comparação com as piores geometrias.

A Figura 5.37 mostra, utilizando-se como exemplo uma placa com $H/L = 1,0$ e $\phi = 0,20$, como ocorre a distribuição das imperfeições em placas finas perfuradas de aço, observando-se o comportamento das tensões de von Mises para os pontos posicionados sob a curva à flambagem elasto-plástica.

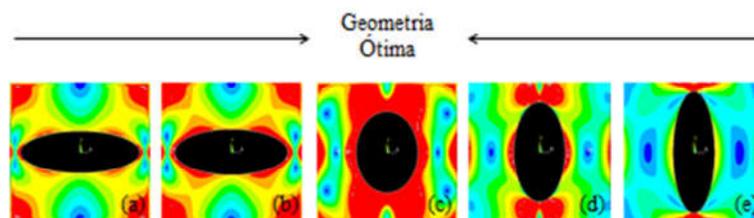


Figura 5.37 - Distribuição das imperfeições em placas perfuradas de aço submetidas à flambagem elasto-plástica, observando-se o comportamento das tensões de von Mises para uma placa com $H/L = 1,0$ e para $\phi = 0,20$.

No exemplo apresentado na Figura 5.37, a distribuição das imperfeições cresce de (a) para (b), chegando a uma distribuição ótima das imperfeições em (c) e, após, decresce de (d) para (e). Na Figura 5.37 (de a até e), foram analisadas duas situações para o grau de liberdade H_0/L_0 que antecedem a geometria ótima e duas após a geometria ótima, todas no regime elasto-plástico.

5.4 Análise comparativa entre as curvas limites à flambagem e as curvas à flambagem elasto-plástica

Neste item será realizada uma análise comparativa tomando-se como referência os resultados obtidos nos itens 5.2 e 5.3. Para o seu desenvolvimento, será utilizada a seguinte nomenclatura: caso A, para as placas submetidas à flambagem elástica e elasto-plástica (definida ao longo do texto como à flambagem), e caso B, para as placas submetidas à flambagem elasto-plástica.

A comparação dos resultados dar-se-á analisando-se os valores do fator $TLN_{Máx}$ para as duas relações de H/L , para todos os tipos de perfurações e para todas as frações (ϕ) do volume

das perfurações. Para exemplificar o procedimento, tomar-se-á como exemplo o traçado das curvas limites à flambagem (Figura 5.38a) e das curvas à flambagem elasto-plástica (Figura 5.38b) para as placas com perfuração retangular e para $\phi = 0,20$.

A Figura 5.38 mostra os valores máximos do fator TLN , como função da variação do grau de liberdade H_0/L_0 para os casos A e B, para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, perfuração retangular e para $\phi = 0,20$.

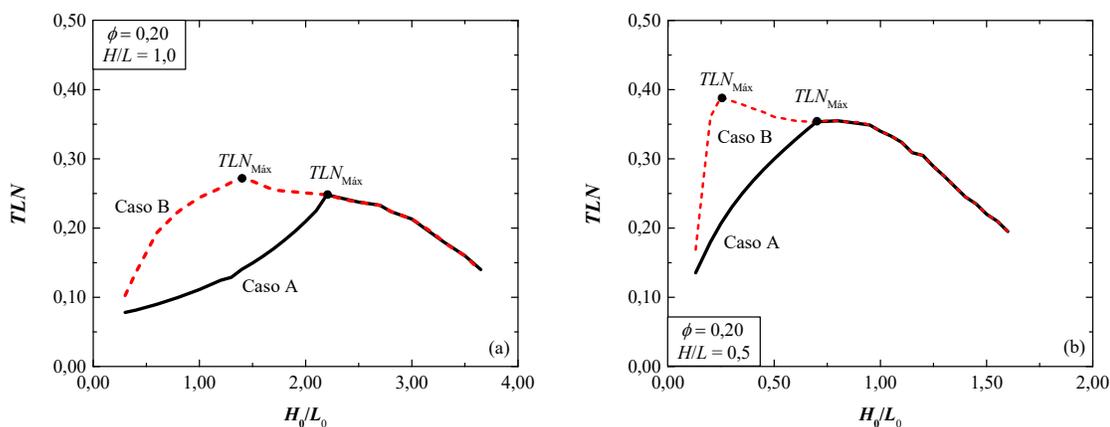


Figura 5.38 – $TLN_{Máx}$ para os casos A e B em placas com: (a) $H/L = 1,0$; e (b) $H/L = 0,5$.

Inicialmente, observa-se na Figura 5.38 que o fator $TLN_{Máx}$ para os dois casos mencionados, assume valores maiores para as placas submetidas ao caso B do que para as placas submetidas ao caso A. Outra consideração importante, refere-se à posição ocupada pelo fator $TLN_{Máx}$ em relação ao grau de liberdade H_0/L_0 : este, assume valores menores para as placas submetidas ao caso B. Estas observações, aqui particularizadas para as placas com perfuração retangular, $\phi = 0,20$ e para $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, podem ser estendidas a todos os casos analisados neste trabalho.

Partindo-se do exposto acima e com o objetivo de quantificar a melhoria do desempenho mecânico das placas, elaborou-se a Tabela 5.9. Nesta, apresenta-se a diferença percentual (Dif.) que as placas submetidas à flambagem elasto-plástica possuem em relação às placas submetidas à flambagem, respectivamente, casos B e A, considerando-se para o desenvolvimento da mesma as melhores geometrias para cada tipo de perfuração, para as duas relações de H/L e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

Tabela 5.9 - Melhores geometrias para os casos A e B, para placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para cada tipo de perfuração e para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

ϕ	Perfuração	$H/L = 1,0$					$H/L = 0,5$				
		Caso A		Caso B		Dif. %	Caso A		Caso B		Dif. %
		$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_o$	$TLN_{Máx}$	$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_o$	$TLN_{Máx}$		$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_o$	$TLN_{Máx}$	$\left(\frac{H_0}{L_0}\right)_o$	$TLN_{Máx}$	
$\phi = 0,08$	OL	-	-	0,99	0,2890	-	-	-	0,10	0,4636	-
	OT	5,38	0,2878	4,00	0,3215	11,71	2,10	0,3630	1,01	0,4150	14,33
	E	4,60	0,3000	3,50	0,3271	9,03	1,86	0,3682	0,25	0,4515	22,62
	R	5,47	0,2900	4,00	0,3165	9,14	2,34	0,3690	0,10	0,4636	25,64
	L	2,92	0,2900	2,30	0,3325	14,66	1,11	0,3800	0,30	0,4440	16,84
	HL	4,19	0,2900	3,50	0,3205	10,52	1,69	0,3706	0,20	0,4581	23,61
	HT	4,52	0,3000	3,50	0,3330	11,00	1,54	0,3656	0,20	0,4555	24,59
$\phi = 0,10$	OL	-	-	0,99	0,2840	-	-	-	0,20	0,4496	-
	OT	4,35	0,2800	3,50	0,3250	16,07	1,47	0,3750	1,01	0,4000	6,67
	E	3,67	0,2824	2,80	0,3340	18,27	1,37	0,3753	0,20	0,4465	18,97
	R	4,20	0,2655	3,50	0,3130	17,89	1,71	0,3780	0,20	0,4495	18,92
	L	2,44	0,2843	1,80	0,3240	13,96	0,87	0,3778	0,30	0,4245	12,36
	HL	3,15	0,2800	2,50	0,3255	16,25	1,28	0,3840	0,20	0,4476	16,56
	HT	3,70	0,2890	2,70	0,3400	17,65	1,31	0,3690	0,30	0,4405	19,38
$\phi = 0,15$	OL	-	-	0,99	0,2730	-	0,82	0,3713	0,20	0,4186	12,74
	OT	2,89	0,2600	1,80	0,3090	18,85	-	-	1,05	0,3490	-
	E	2,53	0,2600	1,80	0,3040	16,92	0,82	0,3687	0,30	0,4130	12,02
	R	2,82	0,2650	2,00	0,2971	12,11	0,88	0,3730	0,20	0,4155	11,39
	L	1,67	0,2350	1,50	0,2500	6,38	0,63	0,3509	0,35	0,3695	5,30
	HL	2,25	0,2700	1,50	0,3095	14,63	0,71	0,3800	0,20	0,4096	7,79
	HT	2,52	0,2530	1,50	0,2950	16,60	0,86	0,3600	0,30	0,4096	13,78
$\phi = 0,20$	OL	-	-	0,99	0,2440	-	0,65	0,3556	0,30	0,3830	7,71
	OT	2,19	0,2343	1,60	0,2740	16,94	-	-	1,01	0,2800	-
	E	1,94	0,2317	1,30	0,2640	13,94	0,64	0,3487	0,30	0,3786	8,57
	R	2,25	0,2500	1,40	0,2740	9,60	0,70	0,3530	0,25	0,3895	10,34
	L	1,30	0,1819	1,30	0,1840	1,15	0,51	0,3200	0,45	0,3150	-1,56
	HL	1,68	0,2338	1,20	0,2600	11,21	0,56	0,3530	0,30	0,3665	3,82
	HT	1,98	0,2222	1,50	0,2490	12,06	0,70	0,3380	0,30	0,3756	11,12
$\phi = 0,25$	OL	-	-	0,99	0,1955	-	0,55	0,3330	0,30	0,3535	6,16
	OT	1,80	0,2150	1,20	0,2240	4,19	-	-	-	-	-
	E	1,59	0,2040	1,20	0,2130	4,41	0,55	0,3290	0,40	0,3365	2,28
	R	1,82	0,2140	1,20	0,2405	12,38	0,61	0,3400	0,30	0,3586	5,47
	L	1,15	0,1200	1,01	0,1200	0,00	0,50	0,2800	0,50	0,2800	0,00
	HL	1,38	0,2050	1,40	0,2050	0,00	0,47	0,3250	0,47	0,3300	1,54
	HT	1,69	0,2000	1,40	0,1950	-2,50	0,59	0,3180	0,40	0,3326	4,59

De acordo com os dados da Tabela 5.9, a melhoria no desempenho mecânico das placas submetidas ao caso B é superior as do caso A, para as duas relações de H/L , para todos os tipos de perfuração e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações, exceto para as placas com $H/L = 1,0$, perfuração hexagonal transversal (HL) e $\phi = 0,25$, e para as placas com $H/L = 0,5$, perfuração losangular (L) e $\phi = 0,20$. Observa-se também, a existência de três ocorrências em que o fator $TLN_{Máx}$ assume o mesmo valor, ou seja, onde não há melhoria no desempenho mecânico relacionando-se os casos A e B: para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$; e para as placas com $H/L = 1,0$, perfuração hexagonal longitudinal (HL) e $\phi = 0,25$. Os melhores resultados para a melhoria do desempenho mecânico das placas, considerando-se o caso B em relação ao caso A, correspondem a 18,85% para as placas com $H/L = 1,0$, perfuração oblonga transversal (OT) e $\phi = 0,15$, e a 25,64% para as placas com $H/L = 0,5$, perfuração retangular (R) e $\phi = 0,08$. Há dois eventos em que o valor do fator $TLN_{Máx}$ para o caso A é superior ao das placas submetidas ao caso B. Estes eventos referem-se às placas com perfuração hexagonal transversal (HT) e $\phi = 0,25$ e para às placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,20$, respectivamente, para $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$.

A Tabela 5.10 mostra a melhoria no desempenho mecânico das placas para os casos A e B considerando as geometrias otimizadas $(H_0/L_0)_{oo}$ para cada fração (ϕ) do volume das perfurações e para as duas relações de H/L .

Tabela 5.10 – Geometrias otimizadas para os casos A e B, para placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações e para todos os tipos de perfurações.

H/L	ϕ	Tipo de Perfuração		Caso A		Caso B		Dif. %
		Caso A	Caso B	$(H_0/L_0)_{oo}$	$TLN_{Máx}$	$(H_0/L_0)_{oo}$	$TLN_{Máx}$	
$H/L = 1,0$	0,08	E	L	4,60	0,3000	2,30	0,3325	10,83
	0,10	HL	HT	3,15	0,2800	2,70	0,3400	21,43
	0,15	HL	R	2,25	0,2700	2,00	0,2971	10,04
	0,20	R	E	2,25	0,2500	1,30	0,2640	5,6
	0,25	OT	R	1,82	0,2140	1,20	0,2405	12,38
$H/L = 0,5$	0,08	HL	R	1,69	0,3706	0,10	0,4636	25,09
	0,10	R	E	1,71	0,3780	0,20	0,4465	18,12
	0,15	HL	E	0,71	0,3800	0,30	0,4130	8,68
	0,20	R	R	0,70	0,3530	0,25	0,3895	10,34
	0,25	R	OL	0,61	0,3400	0,30	0,3535	3,97

A Tabela 5.10 mostra, para as duas relações de H/L , que os valores de $TLN_{Máx}$ para o caso B são superiores aos do caso A. A maior diferença observada para as placas com $H/L = 1,0$ é de 21,43%; refere-se à comparação entre as geometrias otimizadas para as placas com $\phi = 0,10$, considerando perfuração hexagonal longitudinal (HL) para o caso A e perfuração hexagonal transversal (HT) para o caso B. Para as placas com $H/L = 0,5$, a maior diferença é de 25,09% para $\phi = 0,08$; as geometrias otimizadas para a comparação correspondem, respectivamente, às placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL) para o caso A e com perfuração retangular (R) para o caso B.

A Figura 5.39 mostra a variação do fator $TLN_{Máx}$ em função da fração (ϕ) do volume da perfuração para as duas relações de H/L . Os dados representados referem-se à Tabela 5.10.

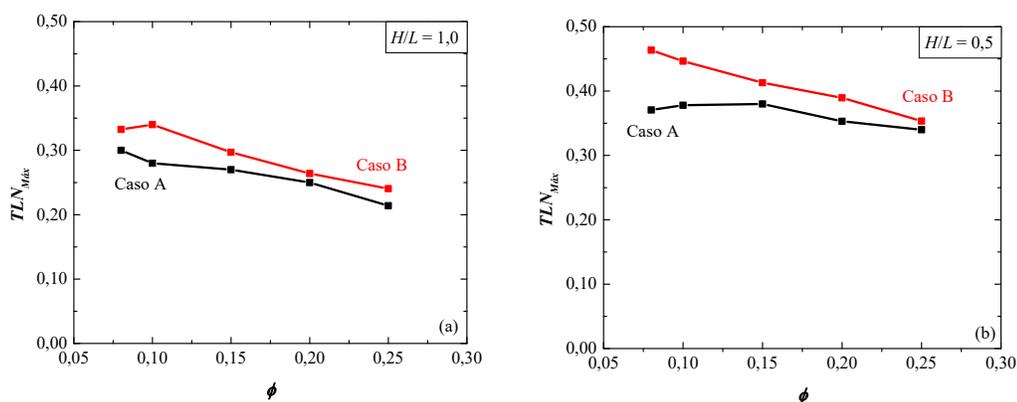


Figura 5.39 – $TLN_{Máx}$ para as geometrias otimizadas, para os casos A e B, em placas: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

Quanto ao fator $TLN_{Máx}$, a Figura 5.39 mostra que há uma relação inversa entre o valor de $TLN_{Máx}$ e o valor da fração (ϕ) do volume da perfuração, para o caso A e em placas com $H/L = 1,0$ e para o caso B e em placas com $H/L = 0,5$, ou seja, cresce o valor da fração (ϕ) e decresce o valor de $TLN_{Máx}$. Por outro lado, para o caso B e em placas com $H/L = 1,0$, o fator $TLN_{Máx}$ cresce para $0,08 \leq \phi \leq 0,10$ e decresce para $0,10 < \phi \leq 0,25$; e para as placas com $H/L = 0,5$ e submetidas ao caso A, o valor de $TLN_{Máx}$ cresce para $0,08 \leq \phi \leq 0,15$ e decresce para $0,15 < \phi \leq 0,25$. Observa-se que a menor diferença para $TLN_{Máx}$ corresponde às placas com $\phi = 0,20$ e $\phi = 0,25$, respectivamente para as placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$.

Outra análise importante, refere-se à posição do grau de liberdade otimizado $(H_0/L_0)_{oo}$ para os casos A e B. Neste sentido, a Fig. 5.40 mostra a variação de $(H_0/L_0)_{oo}$ para os casos A e B de placas com $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$, para todas as frações (ϕ) do volume das perfurações.

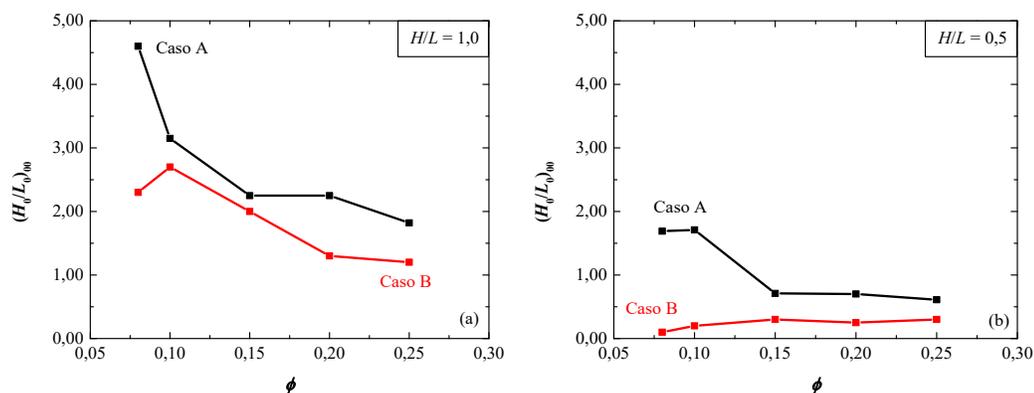


Figura 5.40 – $(H_0/L_0)_{oo}$ para os casos A e B em placas com: (a) $H/L = 1,0$; (b) $H/L = 0,5$.

A Figura 5.40 mostra uma diferença significativa entre os valores otimizados de H_0/L_0 para as duas relações de H/L , superior para as placas com $H/L = 1,0$. Para as placas com $H/L = 1,0$, como tendência, quanto maior o valor da fração (ϕ) do volume da perfuração menor será o valor de H_0/L_0 . Já, para as placas com $H/L = 0,5$, essa tendência se confirma para o caso A, exceto para as placas com $\phi = 0,10$. Para o caso B, entretanto, essa tendência não se confirma; neste caso, se cresce o valor da fração (ϕ) do volume da perfuração, cresce também o valor do grau de liberdade H_0/L_0 .

O método Design Construtal foi utilizado nos itens 5.2 e 5.3 para analisar o comportamento das tensões de von Mises. Neste sentido, far-se-á neste item o mesmo tipo de análise, observando-se que aqui se estará comparando não as geometrias ótimas para cada tipo de perfuração, mas as geometrias otimizadas para cada fração (ϕ) do volume das perfurações.

As Figuras 5.41 e 5.42 mostram o comportamento das tensões de von Mises para as duas relações de H/L considerando-se os dados apresentados na Tabela 5.10.

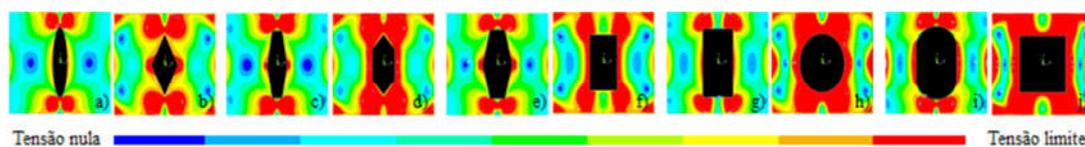


Figura 5.41 – Geometrias otimizadas para as placas com $H/L = 1,0$, sendo: (a, c, e, g, i) caso A; (b, d, f, h, j) caso B.

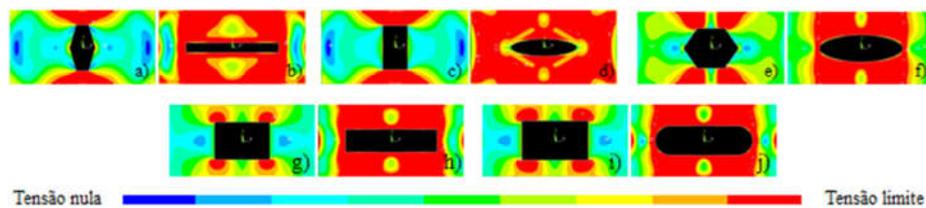


Figura 5.42 – Geometrias otimizadas para as placas com $H/L = 0,5$, sendo: (a, c, e, g, i) caso A; (b, d, f, h, j) caso B.

Observando-se a distribuição das tensões de von Mises para as placas perfuradas otimizadas, Figuras 5.40 e 5.41, verifica-se que as placas submetidas à flambagem elasto-plástica apresentam uma melhor distribuição das tensões limites, superior a determinada na flambagem elástica e elasto-plástica.

Assim sendo, a melhor performance mecânica observada nas melhores geometrias otimizadas justificam os princípios definidos pela Teoria Construtal, através da ótima distribuição das imperfeições, [Bejan e Zane, 2012].

6. CONCLUSÕES

No presente trabalho, foram utilizados modelos computacionais, associados ao método Design Construtal, para analisar a influência do tipo, da forma e do tamanho da perfuração, no comportamento mecânico de placas finas submetidas à flambagem elástica e à elasto-plástica. Os modelos computacionais foram empregados, inicialmente, para a obtenção do valor das cargas crítica e última, e em seguida, para a representação gráfica das tensões de von Mises.

O volume total de material da placa sem perfuração foi mantido constante para as duas relações de H/L , sendo este de $20 \times 10^6 \text{ mm}^3$. Foi utilizada perfuração centrada dos tipos oblonga longitudinal, oblonga transversal, elíptica, retangular, losangular, hexagonal longitudinal e hexagonal transversal. Para a fração (ϕ) do volume da perfuração, foram considerados os seguintes valores: 0,08; 0,10; 0,15; 0,20 e 0,25.

Quanto ao desenvolvimento do trabalho, este considerou duas abordagens: a primeira dedicou-se ao estudo simultâneo da flambagem elástica e elasto-plástica, e a segunda ficou restrita à análise da flambagem elasto-plástica. Na primeira análise, foram definidas as curvas limites para a flambagem; na segunda, as curvas para a flambagem elasto-plástica. Para ambas as análises, variou-se o grau de liberdade H_0/L_0 .

As curvas limites para a flambagem são de grande importância aos projetistas, apresentam um ponto de transição, $TLN_{Máx}$, entre a flambagem elástica e a elasto-plástica. Estas curvas definem o limite de ocorrência do fenômeno da flambagem em placas finas perfuradas de aço. À esquerda do ponto de transição, $TLN_{Máx}$, os limites estão relacionados à flambagem elástica, já a sua direita, à flambagem elasto-plástica.

A geração das curvas de flambagem elasto-plástica definidas na segunda abordagem são importantes para limitar o colapso das placas por esmagamento em função da tensão limite do material. Para todas as curvas foram definidos os valores máximos do fator TLN . Para esta abordagem, deve-se observar que, para diversos valores do grau de liberdade H_0/L_0 , as placas analisadas estarão submetidas à flambagem elástica.

Foi possível verificar através do emprego da modelagem computacional, associada ao método Design Construtal, a importância que a variação geométrica da forma das placas, associadas à variação da forma geométrica da perfuração e ao tipo de perfuração, possui para a definição das curvas limites à flambagem e para as curvas à flambagem elasto-plástica. Neste contexto, o método aplicado proporcionou comparar de forma adequada os resultados obtidos para todos os casos considerados. Neste sentido, o método Design Construtal foi

utilizado para definir, através da análise da distribuição das imperfeições, a geometria ótima para cada relação de H/L , para cada fração (ϕ) de volume da perfuração e para cada tipo de perfuração.

Com o desenvolvimento do trabalho, para ambas as análises, foi possível observar claramente para uma dada esbelteza que a simples variação do grau de liberdade H_0/L_0 , independente do tipo de perfuração e da relação H/L , é suficiente para estabelecer o fenômeno da flambagem em placas finas perfuradas de aço.

As melhores geometrias para cada fração (ϕ) do volume da perfuração mostraram uma melhoria no desempenho mecânico das placas de 55,80% a 110,82% para as placas com $H/L = 1,0$ e de 74,36% a 94,87% para as placas com $H/L = 0,5$. Para a flambagem elasto-plástica, a melhoria é de 176,44% a 191,85% para $H/L = 1,0$, e de 126,30% a 155,71% para $H/L = 0,5$. Observa-se, portanto, uma melhoria significativa no desempenho mecânico das placas submetidas à flambagem elasto-plástica.

Quanto aos resultados otimizados obtidos para as curvas limites à flambagem, observou-se que, para todos os casos considerados, há uma tendência no comportamento do grau de liberdade $(H_0/L_0)_{oo}$ em relação ao tamanho da perfuração: quanto menor for o valor da fração (ϕ), maior será o valor de $(H_0/L_0)_{oo}$, exceto para $H/L = 0,5$ e $\phi = 0,10$. Em relação ao fator TLN , o valor máximo encontrado para as placas com $H/L = 1,0$ foi de 0,3000 para as placas com $\phi = 0,08$, para perfuração elíptica (E) e hexagonal transversal (HT), e o mínimo de 0,1200 para as placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$. Já para as placas com $H/L = 0,5$, o valor máximo corresponde a 0,3840 para as placas com perfuração hexagonal longitudinal (HL) e $\phi = 0,10$, e o mínimo equivale a 0,2800 para as placas com perfuração losangular (L) e $\phi = 0,25$. Estas são as melhores e as piores geometrias para as placas com $H/L = 1,0$ considerando-se o fator TLN .

Em relação à segunda abordagem, verifica-se que o aumento no valor do grau de liberdade $(H_0/L_0)_{oo}$, para as placas com $H/L = 1,0$, está relacionado à diminuição da fração (ϕ) do volume da perfuração. Para $H/L = 0,5$, o crescimento da fração (ϕ) do volume da perfuração implica no crescimento de $(H_0/L_0)_{oo}$. Quanto ao fator TLN , o valor máximo para as placas com $H/L = 1,0$ é de 0,3400 para as placas com perfuração hexagonal transversal (HT) e para $\phi = 0,10$, e de 0,4636 para as placas com $H/L = 0,5$, considerando-se para este caso placas com perfuração retangular (R) e com perfuração oblonga longitudinal (OL) e $\phi = 0,08$. O valor mínimo de TLN para as placas com $H/L = 1,0$ é de 0,1200 para $\phi = 0,25$ e perfuração losangular (L), e de 0,2800 para as placas com $H/L = 0,5$, $\phi = 0,20$ e perfuração oblonga

transversal (OT) e para $\phi = 0,25$ e perfuração losangular (L). Estas são, considerando-se o fator TLN , as melhores e as piores geometrias para a segunda abordagem.

Todas as referências utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho analisaram o comportamento de placas submetidas exclusivamente à flambagem elástica ou à flambagem elasto-plástica. Não há, em nenhuma destas referências, a análise conjunta da flambagem elástica e da elasto-plástica quanto à geração das curvas limites à flambagem. Deste modo, o ponto que define a transição entre a flambagem elástica e a elasto-plástica, definido neste trabalho pelo fator $TLN_{Máx}$, para cada tipo de placa, cada tipo de perfuração e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, é uma importante contribuição científica.

Os estudos mostraram para a segunda abordagem, para uma dada esbelteza, que a simples variação do grau de liberdade H_0/L_0 possibilitou definir a curva à flambagem elasto-plástica considerando-se a tensão limite da placa, para cada tipo de placa, cada tipo de perfuração e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração. Neste caso, foi possível identificar o ponto, em cada curva, que define a geometria ótima, $TLN_{Máx}$, para a flambagem elasto-plástica. Logo, a definição da curva para a flambagem elasto-plástica, para cada tipo de perfuração e para cada fração (ϕ) do volume da perfuração, é também, uma importante contribuição científica.

Verificou-se ainda que as geometrias ótimas e as otimizadas, definidas nos gráficos em função do fator $TLN_{Máx}$, estão de acordo com o mencionado em Bejan e Zane, 2012: “A melhor performance mecânica observada nas geometrias ótimas justificam os princípios definidos pela Teoria Construtal, através da ótima distribuição das imperfeições.”

Para finalizar, o trabalho mostra que a Teoria Construtal, utilizada em diversas áreas da ciência, também pode ser aplicada à área da mecânica dos sólidos. Neste caso, o método Design Construtal foi a ferramenta que possibilitou a definição das geometrias ótimas e das otimizadas para as duas relações de H/L , todos os tipos de perfuração e todas as frações (ϕ) do volume das perfurações. Assim, esta também é uma importante contribuição científica.

6.1 Proposta de Continuidade

Como sugestão, propõem-se os seguintes tópicos para a continuidade deste:

1. Analisar o comportamento mecânico das placas à flambagem utilizando outros tipos de perfurações, mantendo as relações $H/L = 1,0$ e $H/L = 0,5$;

2. Analisar o comportamento mecânico das placas à flambagem utilizando outras relações para o grau de liberdade H/L , mas mantendo constante a área da placa;
3. Analisar o comportamento mecânico de placas submetidas à compressão biaxial;
4. Analisar o comportamento mecânico de placas para outras condições de contorno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Åkesson, B. **Plate Buckling in Bridges and other Structures.** Taylor & Francis Group, London, 2007.

Alves Filho, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE.** Editora Érica, São Paulo, 2000. ISBN 8571947414.

Amante, D. a. M. **Imperfeições de Fabricação na Construção Naval e Offshore.** 2006. 86 p. (Bacharel em Engenharia Naval). Engenharia Naval, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Ando, J. K. **Análise da Estabilidade de Estruturas Metálicas com Comportamento Não-Linear.** 2008. Universidade Federal Fluminense

Avner, S. H. **Introduction to Physical Metallurgy.** Tata McGraw-Hill, 1997.

Bazant, Z. P.; Cedolin, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories.** World Scientific, Singapore, 2010. ISBN 9814317020.

Bejan, A. **Shape and Structure, From Engineering to Nature.** Cambridge University Press, Cambridge, 2000. ISBN 0521793882.

Bejan, A. **Advanced Engineering Thermodynamics.** 3rd Edition. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2006. ISBN 978-0-471-67763-5.

Bejan, A. The Golden Ratio Predicted: Vision, Cognition and Locomotion as a Single Design in Nature. **Int. J. Design & Nature and Ecodynamics**, v. 4, n. 2, p. 97-104, 2009.

Bejan, A.; Lorente, S. Constructal Law of Design and Evolution: Physics, Biology, Technology, and Society. **Journal of Applied Physics**, v. 113, n. 15, p. 151-301, 2013. ISSN 0021-8979.

Bejan, A.; Lorente, S.; Lee, J. Unifying Constructal Theory of Tree Roots, Canopies and Forests. **Journal of Theoretical Biology**, v. 254, n. 3, p. 529-540, 2008. ISSN 0022-5193.

Bejan, A.; Zane, J. P. **Design in Nature. How the Constructal Law Governs Evolution in Biology, Physics, and Social Organization.** New York, Doubleday, 2012.

Bellei, I. H. **Edifícios Industriais em Aço: Projeto e Cálculo.** Pini, São Paulo, 2008. ISBN 8572661565.

Bieupoude, P.; Azoumah, Y.; Neveu, P. Constructal Design of T-Shaped Water Distribution Networks. In: (Ed.). **Constructal Law and the Unifying Principle of Design:** Springer, 2013. p.113-130. ISBN 1461450489.

Birkhoff, G.; Schultz, M. H.; Varga, R. S. Piecewise Hermite Interpolation in One and Two Variables with Applications to Partial Differential Equations. **Numerische Mathematik**, v. 11, n. 3, p. 232-256, 1968. ISSN 0029-599X.

Biserni, C.; Rocha, L.; Stanescu, G.; Lorenzini, E. Constructal H-Shaped Cavities According to Bejan's Theory. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50, n. 11, p. 2132-2138, 2007. ISSN 0017-9310.

Bloom, F.; Coffin, D. **Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling**. CRC Press, 2000. ISBN 1420035657.

Brush, D. O.; Almroth, B. O. **Buckling of Bars, Plates, and Shells**. McGraw-Hill, New York, 1975.

Budiansky, B. Notes on Nonlinear Shell Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, n. 2, p. 393-401, 1968. ISSN 0021-8936.

Bushnell, D. Stress, Stability and Vibration of Complex, Branched Shells of Revolution. **Computers & Structures**, v. 4, n. 2, p. 399-424, 1974. ISSN 0045-7949.

Bushnell, D. **Computerized Buckling Analysis of Shells**. Springer Science & Business Media, 1985. ISBN 9024730996.

Carlsen, C.; Czujko, J. The Specification of Post-Welding Distortion Tolerances for Stiffened Plates in Compression. **Structural Engineer**, v. 56, 1978. ISSN 1466-5123.

Castro E Silva, A. L. R. **Análise Numérica Não-Linear da Flambagem Local de Perfis de Aço Estrutural Submetidos à Compressão Uniaxial**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais 2006.

Chajes, A. **Principles of Structural Stability Theory**. Prentice Hall, 1974. ISBN 0137099649.

Cheng, B.; Zhao, J. Strengthening of Perforated Plates under Uniaxial Compression: Buckling Analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 48, n. 12, p. 905-914, 2010. ISSN 0263-8231.

Chow, F.-Y.; Narayanan, R. Buckling of Plates Containing Openings. Seventh International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, 1984.

Connor, J. J.; Brebbia, C. A. **Finite Element Techniques for Fluid Flow**. Newnes-Butterworths, London, 1976.

Cook, R. D. **Finite Element Modeling for Stress Analysis**. John Wiley & Sons, New York, 1995.

Chujutalli, J. A. H. **Flambagem torcional de enrijecedores em painéis de navios tanques submetidos à compressão axial**. 2010. (Mestrado). UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2010.

Da Cunha, P. C. **Comportamento Crítico e Pós-Crítico de Placas Dobradas**. 2005. (Mestrado). Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2005.

Davies, A. J. **The Finite Element Method: A First Approach**. Oxford University Press, 1980. ISBN 0198596308.

El-Sawy, K. M.; Martini, M. I. Elastic Stability of Bi-Axially Loaded Rectangular Plates with a Single Circular Hole. **Thin-Walled Structures**, v. 45, p. 122-133, 2007.

El-Sawy, K. M.; Nazmy, A. S. Effect of Aspect Ratio on The Elastic Buckling Of Uniaxially Loaded Plates with Eccentric Holes. **Thin-Walled Structures**, v. 39, n. 12, p. 983-998, 2001. ISSN 0263-8231.

El-Sawy, K. M.; Nazmy, A. S.; Martini, M. I. Elasto-Plastic Buckling of Perforated Plates under Uniaxial Compression. **Thin-Walled Structures**, v. 42, n. 8, p. 1083-1101, 2004. ISSN 0263-8231.

Falkowicz, K.; Ferdynus, M.; Debski, H. Numerical Analysis of Compressed Plates with a Cut-Out Operating in the Geometrically Nonlinear Range. **Science and Technology**, 2015.

Falzon, B.; Hitchings, D. **An Introduction to Modelling Buckling and Collapse**. NAFEMS, 2006. ISBN 1874376182.

Felippa, C. A. Lecture Notes: Nonlinear Finite Element Methods. Colorado, 2001. Acesso em: 23 de novembro de 2015.

Galambos, T. V. **Structural Members and Frames**. Prentice Hall, 1968.

Galambos, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**. John Wiley & Sons, 1998. ISBN 0471127426.

Gallagher, R. H. Stress Analysis of Heated Complex Shapes. **ARS Journal**, v. 32, n. 5, p. 700-707, 1962. ISSN 1936-9972.

Golub, G. H.; Van Der Vorst, H. A. Eigenvalue Computation in the 20th Century. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 123, n. 1, p. 35-65, 2000. ISSN 0377-0427.

Gordo, J. M.; Guedes Soares, C. Efeito das Imperfeições Geométricas Iniciais na Resistência de Placas. **O Mar Fonte de Desenvolvimento Sustentável, 8AS Jornadas Técnicas de Engenharia Naval**, p. 385-404, 2014.

Helbig, D.; Da Silva, C. C. C.; Real, M. D. V.; Dos Santos, E. D.; Rocha, L. a. O.; Isoldi, L. A. Numerical Analysis of Perforated Steel Plates Subjected to Elastic and Elasto-Plastic Buckling by means the Constructal Design Method. **23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering**, 2015. Rio de Janeiro. December 06-11.

Helbig, D.; Real, M. D. V.; Correia, A. L. G.; Santos, E. D. D.; Isoldi, L. A. Constructal Design of Perforated Steel Plates subject to Linear Elastic and Nonlinear

Elastoplastic Buckling. **XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2013. Pirenópolis - GO. November 10-13.

Helbig, D.; Rocha, L. a. O.; Da Silva, C. C. C.; Dos Santos, E. D.; Real, M. D. V.; Isoldi, L. A. Numerical Simulation and Constructal Design Method Applied to the Study of the Cutout Shape Influence in the Mechanical Behavior of Perforated Plates Subject to Buckling. **XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2014. Fortaleza - CE.

Hibbeler, R. C. **Resistência dos Materiais**. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2004.

Hinton, E.; Owen, D. R. J. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. Pineridge Press Limited, Swansea, 1986.

Horbach, C. S. **Constructal Design de Materiais de Alta Condutividade em Forma de "Y" para Refrigeração de Corpo Gerador de Calor**. 2013. (Mestrado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Isoldi, L.; Real, M.; Correia, A.; Vaz, J.; Dos Santos, E.; Rocha, L. Flow of Stresses: Constructal Design of Perforated Plates Subjected to Tension or Buckling. In: (Ed.). **Constructal Law and the Unifying Principle of Design**: Springer, 2013. p.195-217.

Jones, R. E. A Generalization of the Direct-Stiffness Method of Structural Analysis. **AIAA Journal**, v. 2, n. 5, p. 821-826, 1964. ISSN 0001-1452.

Kenneth, H. H.; Thornton, E. A. **The Finite Element Method for Engineers**. John Wiley & Sons, New York, 1995.

Koenig, H. A.; Davids, N. The Damped Transient Behaviour of Finite Beams and Plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 2, p. 151-162, 1969. ISSN 1097-0207.

Lara, M. F. E. **Estudo Numérico Bidimensional com Aplicação de Constructal Design para Otimização da Geometria e da Profundidade de Submersão de um Dispositivo Conversor de Ondas do Mar Tipo Coluna D'água Oscilante**. 2015. (Mestrado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Lisbôa, T. D. V. **Uma Metodologia para a Obtenção de Respostas Semi-Analíticas para Flexão Linear e Não-Linear de Placas Semi-Espessas**. 2009. (Mestrado). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Logan, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. Thomson Learning, New York, 2007.

Lorente, S.; Lee, J.; Bejan, A. The “flow of stresses” concept: the analogy between mechanical strength and heat convection. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, n. 15, p. 2963-2968, 2010. ISSN 0017-9310.

Lorenzini, G.; Helbig, D.; L. A. O. Rocha; C. C. C. Da Silva; E. D. Dos Santos; M. De V. Real; Isoldi, L. A. Constructal Design Method Applied to the Analysis of the Cutout Type

and Cutout Shape Influences in The Mechanical Behavior of Thin Steel Plates Subjected to Buckling. **Constructal Law & Second Law Conference**, 2015. Parma - Itália.

Lorenzini, G.; Rocha, L. a. O. Geometric Optimization of TY-Shaped Cavity According to Constructal Design. **International Journal of heat and mass transfer**, v. 52, n. 21, p. 4683-4688, 2009. ISSN 0017-9310.

Madenci, E.; Guven, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. 2006.

Mansour, A.; Yang, J. M.; Thayamballi, A. An Experimental Investigation of Ship Hull Ultimate Strength. **Transactions-Society of Naval Architects and Marine Engineers**, v. 98, p. 411-439, 1990. ISSN 0081-1661.

Masubuchi, K. **Analysis of Welded Structures: Residual Stresses, Distortions and their Consequences**. Pergamon Press Ltd, New York, 1980.

Melosh, R. J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. **AIAA Journal**, v. 1, n. 7, p. 1631-1637, 1963. ISSN 0001-1452.

Michaello, R. D. S.; Real, M. D. V.; Dos Santos, E. D.; Isoldi, L. A.; Helbig, D.; Rocha, L. a. O. Modelagem Computacional e Método Constructal Design aplicados à Análise da Flambagem Térmica de Colunas de Aço Perfuradas. **XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015. Rio de Janeiro. November 22-25.

Moen, C. D.; Schafer, B. W. Elastic Buckling of Thin Plates with Holes in Compression or Bending. **Thin-Walled Structures**, v. 47, n. 12, p. 1597-1607, 2009. ISSN 0263-8231.

Mulligan, G. P.; Peköz, T. The influence of local buckling on the structural behavior of singly-symmetric cold-formed steel columns. 1983.

Narayanan, R.; Chow, F. Y. Ultimate Capacity of Uniaxially Compressed Perforated Plates. **Thin-Walled Structures**, v. 2, n. 3, p. 241-264, 1984. ISSN 0263-8231.

Oden, J. T. **Finite Elements of Nonlinear Continua**. McGraw-Hill, New York, 1972.

Okumoto, Y.; Takeda, Y.; Mano, M.; Okada, T. **Design of Ship Hull Structures: A Practical Guide for Engineers**. Springer Science & Business Media, 2009. ISBN 3540884459.

Pasqualino, I. P.; Estefen, S. F.; Netto, F. A. Ultimate Strength of Ships'panels. **International shipbuilding progress**, v. 48, n. 2, p. 103-116, 2001.

Pepe, V. R. **Estudo de Redes Vasculares Aplicadas aos Materiais Multifuncionais**. 2008. (Projeto de Graduação). Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

Pérez, S. V. S. **Análise Experimental Da Instabilidade Distorcional Em Perfis De Paredes Finas E Seção Aberta, Sob Força De Compressão Excêntrica**. 2003. Universidade Federal do Rio de Janeiro

Przemieniecki, J. S. **Theory of Matrix Structural Analysis**. Courier Corporation, United States of America, 1985. ISBN 0486649482.

Rao, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. Butterworth-heinemann, 2005. ISBN 0750678283.

Reis, A.; Camotim, D. **Estabilidade Estrutural**. McGraw-Hill, 2001. ISBN 9727730361.

Rocha, L.; Isoldi, L.; Vasconcellos Real, M.; Santos, E.; Correia, A.; Lorenzini, G.; Biserni, C. Constructal Design Applied to the Elastic Buckling of Thin Plates with Holes. **Open Engineering**, v. 3, n. 3, p. 475-483, 2013. ISSN 2391-5439.

Roorda, J. **Buckling of Elastic Structures**. Solid Mechanics Division, University of Waterloo, 1980.

Samuelsson, A.; Zienkiewicz, O. C. History of the stiffness method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, n. 2, p. 149-157, 2006. ISSN 1097-0207.

Shakerley, T. M.; Brown, C. J. Elastic Buckling of Plates with Eccentrically Positioned Rectangular Perforations. **International journal of mechanical sciences**, v. 38, n. 8, p. 825-838, 1996. ISSN 0020-7403.

Shanmugam, N. E.; Thevendran, V.; Tan, Y. H. Design Formula for Axially Compressed Perforated Plates. **Thin-Walled Structures**, v. 34, n. 1, p. 1-20, 1999. ISSN 0263-8231.

Silva, C. C. C.; Dos Santos, E. D.; Real, M. D. V.; Isoldi, L. A.; Helbig, D.; Rocha, L. a. O. Simulação Numérica e Método Constructal Design Aplicados ao Estudo de Flambagem em Placas de Aço Perfuradas. **XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2015. Rio de Janeiro.

Silva, P. H. L. **Dimensionamento de Pilares Mistos de Aço e Concreto**. 2012. (Mestrado). Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Silveira, T. D.; Correia, A. L. G.; Silva, C. C. C. D.; Rocha, L. a. D. O.; Real, M. D. V.; Santos, E. D. D.; Isoldi, L. A. Otimização Geométrica de Placas com Enrijecedores Submetidas à Flexão. **V Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica**, 2012. Rio Grande. Universidade Federal do Rio Grande.

Singh, S.; Kulkarni, K.; Pandey, R.; Singh, H. Buckling Analysis of Thin Rectangular Plates with Cutouts Subjected to Partial Edge Compression using FEM. **Journal of Engineering, Design and Technology**, v. 10, n. 1, p. 128-142, 2012. ISSN 1726-0531.

Soares, A. M. **Análise Comparativa de Esforços e Deflexões em Placas Retangulares Finas**. 2004. (Doutorado). Universidade federal de itajubá, Itajubá - MG.

Szabo, B. A.; Lee, G. C. Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 3, p. 301-310, 1969. ISSN 1097-0207.

Szilard, R. **Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods**. John Wiley & Sons, 2004. ISBN 0471429899.

Teixeira Dias, F.; Da Cruz, J.; Valente, R.; De Sousa, R. **Método dos Elementos Finitos-Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia**. ETEP, Lisboa, 2010.

Timoshenko, S. P.; Gere, J. M. **Theory of Elastic Stability, Engineering Societies Monographs**. McGraw-Hill, New York, 1961.

Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells**. McGraw-hill, New York, 1959. ISBN 0070858209.

Turner, M. J. Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads. **Journal of the Aerospace Sciences**, 1960.

Ugural, A. C.; Fenster, S. K. **Advanced strength and applied elasticity**. Prentice Hall, New Jersey, 2003. ISBN 0130473928.

Ventsel, E.; Krauthammer, T. **Thin Shells: Theory Analysis, & Applications**. Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

Vinson, J. R. **Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction**. Springer Science & Business Media, 2005. ISBN 1402031106.

Vinson, J. R.; Sierakowski, R. L.; Bert, C. W. The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 249, 1987.

Von Karman, T.; Sechler, E. E.; Donnell, L. The strength of thin plates in compression. **Trans. ASME**, v. 54, n. 2, p. 53-57, 1932.

Wang, C. M.; Wang, C. Y. **Exact Solutions for Buckling of Structural Members**. CRC press, 2007. ISBN 0203483537.

Wang, C. M.; Wang, C. Y.; Reddy, J. N. **Exact Solutions for Buckling of Structural Members**. CRC press, 2004. ISBN 0203483537.

Wunderlich, W.; Pilkey, W. D. **Mechanics of structures: variational and computational methods**. CRC press, 2002. ISBN 1420041835.

Xie, Z.; Chen, L.; Sun, F. Constructal Optimization of Twice Y-Shaped Assemblies of Fins by Taking Maximum Thermal Resistance Minimization as Objective. **Science China Technological Sciences**, v. 53, n. 10, p. 2756-2764, 2010. ISSN 1674-7321.

Yoo, C. H.; Lee, S. C. **Stability of Structures: Principles and Applications**. Elsevier, 2011. ISBN 0123851238.

Yu, W.-W. **Cold-Formed Steel Design**. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0471348090.

Zienkiewicz, O. C. **The finite element in engineering science**. McGraw-Hill, London, 1971.

Zienkiewicz, O. C.; Irons, B.; Nath, B. **Natural Frequencies of Complex, Free, or Submerged Structures by the Finite Element Method**. Butterworths, London, 1965.

Zienkiewicz, O. C.; Lyness, J.; Owen, D. Three-Dimensional Magnetic Field Determination using a Scalar Potential - A Finite Element Solution. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 13, n. 5, p. 1649-1656, 1977. ISSN 0018-9464.

Zienkiewicz, O. C.; Watson, M.; King, I. P. A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 10, n. 10, p. 807-827, 1968. ISSN 0020-7403.

APÊNDICE A - Teste de convergência para o elemento *Shell*

A proximidade entre o valor da solução exata e a encontrada através de métodos computacionais, normalmente está associada ao número de elementos da malha definida no domínio computacional. Em geral, quanto maior for o número de elementos da malha, mais próxima à solução encontrada estará da solução exata. Por outro lado, quanto mais refinada for a malha, maior será o esforço computacional necessário para a resolução do problema.

Foram considerados para a análise de convergência, dois testes. O primeiro será o responsável pela escolha do tipo de elemento do Ansys® a ser utilizado no trabalho e o segundo, para definir o tamanho da malha.

Para os testes de convergência foram utilizadas placas com $H/L = 0,5$, simplesmente apoiadas nas quatro bordas e submetidas à compressão uniaxial. Os elementos considerados, *Shell181* e *Shell93*, fazem parte do *software* Ansys® e podem ser utilizados para o estudo de cascas e de placas finas. O objetivo deste tipo de verificação, para este trabalho, concentra-se em analisar a rapidez na convergência, e em função desta, definir o elemento a ser considerado na análise computacional.

O elemento *Shell181*, Figura A.1, é formado por quatro nós e possui seis graus de liberdade por nó, ou seja, translações nas direções x , y e z , e rotações em torno dos eixos x , y e z . É um elemento adequado para aplicações lineares, grandes rotações, e/ou grandes deformações não lineares. Neste, não são permitidos elementos de área iguais à zero, elementos com espessura nula em qualquer extremidade e a opção triangular é recomendada para ser utilizada apenas como elemento de composição na geração da malha.

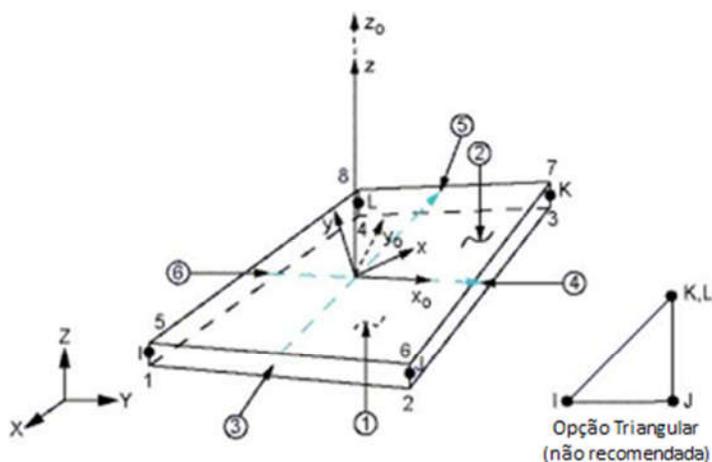


Figura A.1 - Elemento *Shell181*, [Ansys®,2005].

O *Shell93*, o outro elemento considerado, ver Figura A.2, pode ser utilizado para a modelagem de geometrias em forma de cascas com curvaturas. O elemento possui oito nós, seis graus de liberdade em cada nó, com translações nas direções x , y e z , e rotações em torno dos eixos x , y e z , pode trabalhar com até quatro espessuras e também pode possuir propriedades ortotrópicas. Os polinômios interpoladores responsáveis pela forma de deformação são quadráticos em ambas as direções planas e o elemento finito em questão pode incorporar plasticidade, encruamento e grandes deformações. Quanto às restrições, são as mesmas apresentadas para o elemento *Shell181*.

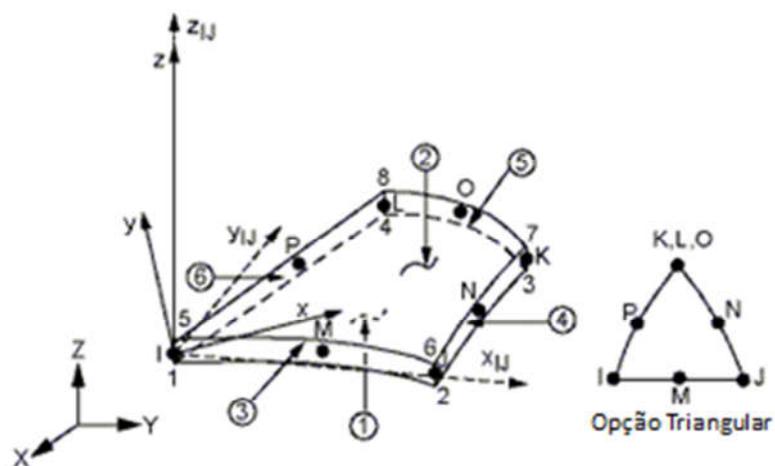


Figura A.2 - Elemento Shell93, [Ansys®, 2005].

A Tabela A.1 apresenta as principais características da placa, utilizada como modelo, na elaboração dos testes de convergência para a escolha do tipo de elemento.

Tabela A.1– Características da placa modelo para os testes de convergência do elemento.

Largura H (mm)	Comprimento L (mm)	Espessura h (mm)	Módulo de Elasticidade E (GPa)	Coefficiente de Poisson ν	Tensão de Escoamento σ_y (MPa)
1000,00	2000,00	10,00	210	0,3	250

A Tabela A.2 mostra os casos analisados para o estudo da convergência, nesta são apresentados o número de elementos que formam a malha e seu respectivo tamanho, observando-se que foi utilizado, em todos os casos, malha quadriculada.

Tabela A.2 – Casos analisados para a convergência.

Caso	Tamanho do elemento (mm)	Número de elementos
1	200	50
2	100	200
3	50	800
4	25	3200
5	12,5	12800

Apresenta-se na Tabela A.3, para os cinco casos analisados, os valores correspondentes à tensão crítica. Para a definição da margem de erro, considerou-se como referência o caso de número 5, ou seja, malhas quadriculadas com tamanho de 12,5 mm.

Tabela A.3 - Teste de convergência do tipo de elemento.

Caso	<i>Shell93</i>			<i>Shell181</i>		
	σ_{cr} (Ansys®)	Diferença (%)	Aproximação	σ_{cr} (Ansys®)	Diferença (%)	Aproximação
1	74,6703	0,009340	0,990660	81,7326	0,081583	0,918417
2	75,2360	0,001835	0,998165	77,2229	0,021905	0,978095
3	75,3749	0,000008	0,999992	76,1171	0,007272	0,992728
4	75,3745	0,000003	0,999997	75,7622	0,002575	0,997425
5	75,3743	0,000000	1,000000	75,5676	0,000000	1,000000

A Figura A.3 mostra os resultados obtidos para os cinco casos simulados. Nesta, os resultados são apresentados em função de sua aproximação para com a tensão crítica, considerando-se como parâmetro o caso de número cinco, Tabela A.2, o qual possui o menor tamanho para a malha quadriculada.

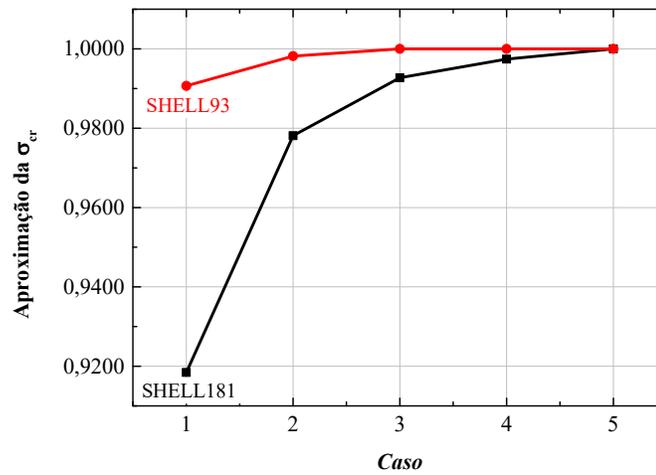


Figura A.3 - Testes de convergência para os elementos *Shell181* e *Shell93*.

A Figura A.3 mostra a importância do tamanho da malha para a obtenção de resultados satisfatórios em análises numéricas. Para ambos os casos analisados, a diminuição do tamanho da malha resulta em aproximação mais rápida para o valor da tensão crítica. O elemento *Shell93* possui menor variação, e mesmo para elementos com malha de tamanho maior, sua resposta está mais próxima da tensão crítica. Deste modo, por convergir de forma mais rápida, o elemento escolhido para desenvolver este trabalho de simulação numérica foi o *Shell93*.

APÊNDICE B

B.1 Trabalhos Publicados: *Journals*

Helbig, D. ; Silva, C. C. C. ; Real, M. V. ; Dos Santos, E. D. ; Isoldi, L. A. ; Rocha, L. A. O. Study about buckling phenomenon in perforated thin steel plates employing computational modeling and constructal design method. **Latin American Journal of Solids and Structures, an ABCM Journal**, v. 13,nº 10, pp. 1912-1936, 2016. ISSN 1679-7817

Lorenzini, G. ; Helbig, D. ; Real, M. V. ; Dos Santos, E. D. ; Rocha, L. A. O. ; Isoldi, L. A. Computational modeling and constructal design method applied to the mechanical behavior improvement of thin perforated steel plates subject to buckling. **Journal of Engineering Thermophysics**, v. 25, n. 2, p. 197-215, 2016. doi:10.1134/S1810232816020053

B.2 Trabalhos Publicados em Revistas

Helbig, D.; Michaello, R. S.; Dos Santos, E. D.; Real, M. V.; Rocha, L. A. O.; Isoldi, L. A. Análise numérica da flambagem térmica em placas finas de aço. **Scientia Plena**, Vol. 11, Nº 8, 2015. doi: 10.14808/sci.plena.2015.081308.

Rodrigues, M. K.; Goulart, M. M.; Helbig, D.; Magalhaes, G. M. C.; Acunha Jr., I. C.; Rocha, L. A. O.; Dos Santos, E. D. Constructal Design aplicado à otimização geométrica de um material de alta condutividade térmica em forma de “T”. **Scientia Plena**, Vol. 11, Nº 8, 2015. doi: 10.14808/sci.plena.2015.081328.

B.3 Trabalhos Publicados em Anais de Congressos

Helbig, D.; Michaello, R. S.; Dos Santos, E. D.; Real, M. V.; Rocha, L. A. O.; Isoldi, L. A. Análise numérica da flambagem térmica em placas finas de aço. In: Anais do XI MCSul, Rio Grande. In: **Conferência Sul em Modelagem Computacional (MCSUL)**. Rio Grande: 2014.

Helbig, D.; Silva, C. C. C.; Rocha, L. A. O.; Dos Santos, E. D.; Real, M. V.; Isoldi, L. A. Numerical simulation and Constructal Design method applied to the study of the cutout shape

influence in the mechanical behavior of perforated plates subjected to buckling. In: Anais CILAMCE2014, Fortaleza/Ceará. In: **XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering** (CILAMCE2014). Fortaleza/Ceará: 2014.

Lorenzini, G.; Helbig, D.; Silva, C. C. C.; Real, M. V.; Dos Santos, E. D.; Isoldi, L. A.; Rocha, L. A. O. Constructal design method applied to the analysis of the cutout type and cutout shape influences in the mechanical behavior of thin steel plates subjected to buckling. In: **Constructal Law and Second Law Conference** (CLC CONFERENCE 2015), 2015, Parma. Proceedings of CLC 2015. Bologna: Timeo Editore, 2015, v. 1, p. 477-499.

Silva, C. C. C.; Helbig, D.; Dos Santos, E. D.; Real, M. V.; Isoldi, L. A.; Rocha, L. A. O. Simulação numérica e método Constructal Design aplicados ao estudo de flambagem em placas finas de aço perfuradas. **XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering** (CILAMCE2015). November 22th to 25th, Rio de Janeiro/RJ: 2015.

Michaello, R. S.; Real, M. V.; Dos Santos, E. D.; Isoldi, L. A.; Helbig, D.; Rocha, L. A. O. Modelagem computacional e método Constructal Design aplicados à análise da flambagem térmica de colunas de aço perfuradas. **XXXVI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering** (CILAMCE2015). November 22th to 25th, Rio de Janeiro/RJ: 2015.

Helbig, D.; Silva, C. C. C.; Dos Santos, E. D.; Real, M. V.; Isoldi, L. A.; Rocha, L. A. O. Numerical analysis of perforated steel plates subjected to elastic and elasto-plastic buckling by means the Constructal Design method. **23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering** (COBEM2015). December 6th to 11th, Rio de Janeiro/RJ: 2015.