

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

ROSANGELA CAVALERI

COMBINAÇÃO DE PREVISÕES APLICADA À VOLATILIDADE

Porto Alegre

2008

ROSANGELA CAVALERI

COMBINAÇÃO DE PREVISÕES APLICADA À VOLATILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Eduardo Pontual Ribeiro

Porto Alegre

2008

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da  
UFRGS

C376c

Cavaleri, Rosangela

Combinação de previsões aplicada à volatilidade / Rosangela  
Cavaleri. – Porto Alegre, 2008.

00 f. : il.

Orientador: Eduardo Pontual Ribeiro.

Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-  
Graduação em Economia, Porto Alegre, 2008.

1. Volatilidade : Modelo de previsão. 2. Mercado financeiro :  
Volatilidade. 3. Mercado de ações : Volatilidade. I. Ribeiro, Eduardo  
Pontual. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de  
Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III.  
Título.

CDU 330.115

**ROSANGELA CAVALERI**

**COMBINAÇÃO DE PREVISÕES APLICADA  
À VOLATILIDADE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 21 de julho de 2008.

---

Prof. Dr. Eduardo Pontual Ribeiro  
IE/UFRJ, PPGE/UFRGS

---

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal  
PPGE/UFRGS

---

Prof. Dr. Luís Otávio Façanha  
IE/UFRJ

---

Prof. Dr. Marco Antônio Freitas de Hollanda Cavalcanti  
IPEA/RJ; PUC-Rio

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus pais, meus maiores incentivadores,  
dedico este trabalho pelo afeto, por todos os  
ensinamentos e pelos auxílios constantes.

As minhas irmãs, Rosana e Suelen, por  
compreenderem a minha falta, e agüentarem  
meu constante mau humor.

Ao meu namorado, Bernardo, por todo  
o amor, paciência e compreensão  
que teve em todas as horas.

## **AGRADECIMENTOS**

A minha família, pelo carinho e apoio irrestrito durante toda a minha trajetória, propiciando as condições necessárias para a realização deste trabalho.

Ao Professor Eduardo Pontual Ribeiro, pela orientação e pela confiança de que eu seria capaz de concluir esta etapa.

Quero expressar minha gratidão ao Doutor Lauro Roberto Albrecht Ramos, ao Doutor Marco Antonio Cavalcanti e ao Mestre Carlos Henrique Leite Corseuil pelo apoio, principalmente, na etapa final deste trabalho.

Ao colega de turma, Luiz Gustavo Furlani pelas reflexões, críticas e sugestões recebidas.

“O que sabemos é uma gota.

O que ignoramos é um oceano”.

Isaac Newton

(1643 – 1727)

## RESUMO

A realização de previsões de volatilidade é uma atividade de suma importância para empresas e agentes econômicos, entretanto utilizar-se de apenas um modelo para obtê-las pode não ser suficiente para incorporar todo o conhecimento associado ao ambiente de previsões. As técnicas de combinação de previsões podem incorporar todo o conhecimento associado ao ambiente de previsão. As técnicas de combinação têm como objetivo principal incorporar vários modelos com a finalidade de reduzir as medidas de erro de previsão. Este trabalho apresenta uma comparação da acurácia dos modelos individuais e das técnicas de combinação. Os modelos individuais incluídos nas técnicas de combinação são os modelos da família GARCH, o modelo de Alisamento Exponencial e o de Volatilidade Estocástica. Já as técnicas de combinação escolhidas foram a técnica de combinação por média aritmética, a técnica de combinação de pesos fixos proposta por Granger e Ramanathan (1984), a técnica de combinação com pesos móvel de Terui e Djik (2002).

Palavras-Chave: Combinação de Previsão, Modelos de Previsão, Volatilidade, Mercado Financeiro.



## **ABSTRACT**

The realization of forecasts of volatility is an activity of extreme importance for companies and economy agents, however to utilize only one model to obtain them could be insufficient to incorporate all the knowledge associated to the ambient of previsions. The technics of combination of forecasts have as its main objective to incorporate various models with the finality to reduce the measures of error of prediction. This work presents a comparision of the acuracy of the individual models and of the combination technics. The individual models included on the technics of combination are the models of the family *GARCH*, the model of *Exponentially Weighted Moving Averages*. Thus the technics of combination chosen were the technic of combination by arithmetic average, the technic of fixed weights proposed by Granger and Ramanathan (1984), the technic of combination of movable weights of Terui e Djik (2002).

Keywords: Combination of Prevision, Models of Prevision, Volability, Financial Market.

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 4.1: Série de pontos do Ibovespa diário.....	39
Gráfico 4.2: Série de pontos do Dow Jones diário.....	40
Gráfico 4.3: Série de pontos do IGP-M diário.....	40
Gráfico 4.4: Previsões das técnicas de combinação e do modelo IGARCH para o índice Ibovespa.....	44
Gráfico 4.5: Previsões dos modelos GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH o índice Ibovespa.....	45
Gráfico 4.6: Previsões das técnicas do modelo de Volatilidade Estocástica e do EWMA para o índice Ibovespa.....	45
Gráfico 4.7: Previsões das técnicas de combinação e do modelo EGARCH para o índice Dow Jones.....	48
Gráfico 4.8: Previsões dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH o índice Dow Jones.....	49
Gráfico 4.9: Previsões das técnicas do modelo de Volatilidade Estocástica e do EWMA para o índice Dow Jones.....	49
Gráfico 4.10: Previsões das técnicas de combinação e do modelo ARCH para o IGP-M....	52
Gráfico 4.11: Previsões dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH e EGARCH para o IGP-M.....	52
Gráfico 4.12: Previsões das técnicas do modelo de Volatilidade Estocástica e do EWMA para o IGP-M.....	53

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 3.1: Medidas de Avaliação de Previsão.....	30
Tabela 4.1: Estatísticas para o Ibovespa, Dow Jones e IGP-M .....	41
Tabela 4.2: Medidas de Avaliação de Previsão para Ibovespa Dentro da Amostra.....	43
Tabela 4.3: Medidas de Avaliação de Previsão para Ibovespa Fora da Amostra.....	43
Tabela 4.4: Medidas de Avaliação de Previsão para Dow Jones Dentro da Amostra.....	46
Tabela 4.5: Medidas de Avaliação de Previsão para Dow Jones Fora da Amostra.....	47
Tabela 4.6: Medidas de Avaliação de Previsão para IGP-M Dentro da Amostra.....	50
Tabela 4.7: Medidas de Avaliação de Previsão para IGP-M Fora da Amostra.....	51

## SUMÁRIO

<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2 Volatilidade</b>	<b>14</b>
<b>2.1 Volatilidade: Aspectos conceituais</b>	<b>14</b>
<b>2.2 Modelos de Volatilidade</b>	<b>17</b>
2.2.1 Modelos de Médias Móveis	17
2.2.2 Modelos da Família GARCH	20
<b>2.3 Considerações Finais</b>	<b>29</b>
<b>3 Técnicas de combinação de previsão</b>	<b>30</b>
<b>3.1 Medidas de Acurácia</b>	<b>30</b>
<b>3.2 Combinação de Previsões</b>	<b>32</b>
3.2.1 Técnicas utilizadas para combinar as previsões individuais	36
<b>3.3 Considerações Finais</b>	<b>39</b>
<b>4 Resultados e Discussão</b>	<b>40</b>
<b>4.1 Apresentação dos dados</b>	<b>40</b>
4.1.1 Características das séries	41
<b>4.2 Formulação e Avaliação das Previsões Individuais e Previsões Combinadas</b>	<b>43</b>
4.2.1 Ibovespa	44
4.2.2 Dow Jones	47
4.2.3 Índice Geral de Preços - Mercado	52
<b>4.3 Considerações Finais</b>	<b>55</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>56</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>
<b>Apêndice A – GRÁFICOS DAS SÉRIES UTILIZADAS</b>	<b>63</b>
<b>Apêndice b – RESULTADOS DAS RESGRESSÕES</b>	<b>69</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A taxa de volatilidade influencia de forma significativa os investidores na tomada de decisão sobre investir e de quanto investir no mercado em questão, pois as mesmas indicam o grau de estabilidade econômica. Quando encontra-se um mercado de baixa volatilidade, ou em outras palavras, um mercado em que a distribuição dos retornos apresente uma dispersão muito pequena, os seus retornos serão menos incertos e, conseqüentemente, menores ganhos e perdas. Já quando esta se estudando um mercado de alta volatilidade, o mesmo possibilitará maiores lucros, pois uma alta variação gera grandes oportunidades de ganhos aos investidores. Todavia não pode-se esquecer que estas oportunidades trazem também consigo um nível maior de incerteza e a possibilidade de grandes perdas. Isto é, a volatilidade de um ativo ou índice financeiro representa uma medida de risco associado à dinâmica de preços do título financeiro. Ela também pode ser descrita como uma quantidade estatística que descreve a magnitude típica das variações de preços do ativo.

Dentro deste contexto torna-se de suma importância a estimação e previsão correta da volatilidade de ativos e índices financeiros, em especial na análise financeira e na composição de carteiras de investimentos.

Muitos são os modelos de previsão da volatilidade de índices financeiros com a finalidade de prever a variância do mesmo com o menor erro de previsão possível, por exemplo, os modelos de volatilidade implícita, os modelos da família GARCH. E modelos de volatilidade estocástica. No momento em que se consegue mensurar, com a maior

precisão, se a variância de um ativo será maior ou menor em um determinado período, pode-se controlar o risco e a exposição a grandes perdas.

Contudo, a grande maioria desses métodos analisa as informações utilizando apenas um modelo de previsão. A complexidade dos mercados de ações faz necessário o uso de toda e qualquer informação disponível e um único modelo pode não ser suficiente para utilizar de modo eficiente esta informação. Previsões mais confiáveis podem exigir a utilização de vários modelos, permitindo abranger a maior quantidade de informação disponível.

Desde Bates e Granger (1969), sabe-se que a previsão pode se tornar mais acurada quando realizamos uma combinação de modelos de previsão. A partir destes fatos parece interessante combinar previsões provenientes de vários métodos de previsão. Segundo Clemer (1989) independente do modo como a combinação de previsão será obtida, seu resultado traz um aumento da precisão sobre as previsões individuais.

Esta dissertação tem como objetivo avaliar os ganhos de acurácia ao empregar-se técnicas de combinação de previsão para prever a volatilidade de séries econômico-financeiras em relação a previsões baseadas em apenas um modelo.

Para alcançar este objetivo serão utilizadas as técnicas quantitativas mais comuns de previsão da média. Para compor as técnicas de combinação de previsões serão utilizados diversos modelos amplamente utilizados e divulgados para a previsão de volatilidade, tais como o modelo de Alisamento Exponencial, os modelos da família GARCH e os de Volatilidade Estocástica.

A fim de atingir o objetivo geral mencionado acima, foram traçados três objetivos específicos:

a) Identificar os métodos de combinação de previsão da média mais empregados na literatura;

b) Construir modelos de previsão individuais baseando-se na significância dos parâmetros e na minimização dos critérios Schwarz e Akaike, como sugere a literatura;

c) Combinar as previsões oriundas dos diversos modelos selecionados, buscando a redução das medidas de erro e verificar qual dos modelos individuais ou das técnicas de combinação gera equações mais aderentes aos dados.

As técnicas de combinação de previsões já são consagradas em diversas áreas de estudos econômicos e estatísticos para o cálculo de previsões da média. Mas, existem poucos estudos para o cálculo de previsões da variância através de combinações. Sendo assim, acredita-se que a combinação de previsões para a volatilidade pode ser vista como uma maneira alternativa de se utilizar toda a informação disponível proveniente dos modelos individuais e de se obter modelos com melhores medidas de acurácia.

Em se tratando de uma pesquisa aplicada, a metodologia adotada baseou-se em realizar revisões bibliográficas dos modelos individuais e das técnicas de combinação. Também se fez necessário o levantamento e análise dos dados utilizados, enfim, uma série de etapas que culminaram num maior entendimento do problema, para que se pudesse ter a pretensão de comparar os modelos individuais e as técnicas de combinação.

Todas as etapas na pesquisa são apresentadas em cinco capítulos. No primeiro, já apresentado, foi colocado o problema investigado e os objetivos almejados. No segundo capítulo será apresentada uma sintética da revisão bibliográfica dos modelos individuais utilizados para prever a volatilidade das séries em estudo.

O terceiro capítulo apresentará uma breve revisão da literatura das técnicas de combinação de previsão e um detalhamento das técnicas utilizadas com a finalidade de combinar os resultados provindos dos modelos individuais. O quarto capítulo é dedicado à apresentação da aplicação prática dos modelos e técnicas mencionadas nos capítulos anteriores e dos resultados encontrados com o desenvolvimento da pesquisa.

Finalmente, no quinto e último capítulo do trabalho será apresentadas as considerações finais.

## 2 VOLATILIDADE

As atividades de modelagem, inferência e previsão de séries financeiras são de suma importância para os agentes de mercado financeiro. De um modo geral, os modelos desenvolvidos para a estimação de volatilidade tentam reproduzir um conjunto de fatos estilizados comuns às séries de retornos dos ativos financeiros.

Na linha de estudo sobre a estimação de volatilidade encontram-se modelos paramétricos com diversos níveis de dificuldade de implementação. Pode-se utilizar a modelagem mais simples, onde a variância dos retornos é constante ao longo do tempo – modelos de médias móveis. Ou, em contraste, os modelos onde a variância dos retornos não é constante ao longo do tempo – modelos determinísticos e modelos estocásticos<sup>1</sup>.

Este capítulo, além de destacar as principais características contidas nas séries financeiras, também apresenta os modelos de estimação e previsão de volatilidade, entre eles os que serão empregados nas previsões individuais: o modelo de alisamento exponencial, os modelos da família GARCH e o modelo de volatilidade estocástica.

### 2.1 Volatilidade: Aspectos conceituais

A importância dada ao cálculo da volatilidade resulta do papel central que esta ocupa enquanto medida da variação do preço de um ativo em torno da sua média, para um intervalo fixo no tempo. Brooks (2002) define a volatilidade como um dos mais importantes conceitos em toda a área financeira.

---

<sup>1</sup> Processo determinístico e estocástico – a determinação desta volatilidade pode ser feita com base no conhecimento da variância passada ou ainda quando esta variância não é conhecida, respectivamente.



Diferentemente dos preços, a volatilidade não é uma variável observável diretamente no mercado, portanto, requer um modelo para sua estimação (ALEXANDER, 2005).

Inicialmente, a volatilidade dos retornos de ativos era apresentada como um fator constante no tempo. As ferramentas de *hedging* desenvolvidas por Fama (1965) e Black & Scholes (1973) para o mercado futuro e de opções baseavam-se nesses pressupostos. Segundo Voituriez (2001), essa mensuração da volatilidade simplesmente por variáveis como desvio-padrão ou variância, em que a variância dos preços é assumida como constante e a distribuição de preços como estacionários, não se ajusta para diversos ativos.

Nesse sentido, verifica-se que estudos empíricos posteriores suscitaram a hipótese de que a volatilidade dos ativos demonstrava variações com o passar do tempo. Engle (1982) propôs, em seu trabalho seminal, que a variância de uma série temporal alterava-se ao longo do tempo de maneira condicional aos erros de previsão observados no passado. Dessa proposição, adveio uma nova classe de modelos denominada *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH). A partir de então, modelos estatísticos variantes deste modelo seminal foram elaborados, tais como: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH), proposto por Bollerslev (1986), *Integrated GARCH* (IGARCH), formulado por Engle e Bollerslev (1986), e *Exponential GARCH* (EGARCH), elaborado por Nelson (1991), etc.

Segundo Costa (2001), nesta mesma linha de pensamento, volatilidade não constante ao longo do tempo, foi desenvolvido o modelo de volatilidade estocástica (VS) por Taylor (1986), sendo uma alternativa aos modelos da família GARCH. O modelo de VS também tem como objetivo “corrigir” algumas distorções oriundas da estimação pelos modelos usuais clássicos<sup>2</sup>. Devido ao fato da variável, a volatilidade, do modelo VS ser latente ela entra no modelo de forma não linear. Isto é, a função de verossimilhança não se torna de simples estimação, pois depende de integrais que não possuem solução analítica fechada e cuja dimensão é a dimensão dos dados

Como pode ser observada a mensuração da volatilidade pode variar em função da existência de uma gama de modelos fundamentados teoricamente. Brooks (2002) agrupa

---

<sup>2</sup> Tais como os modelos de Black-Scholes (volatilidade constante no tempo).

os modelos de estimação da volatilidade em, basicamente, três categorias em função da natureza desta variável, a saber:

- a) A volatilidade como constante ao longo do tempo, a qual é representada pelos modelos de volatilidade histórica, *Exponentially Weighted Moving Averages* (EWMA);
- b) A volatilidade variando no decorrer do tempo, dessa forma, sua determinação ocorre por meio da inclusão do comportamento passado dos dados. Esta volatilidade é expressa estatisticamente por modelos da família GARCH;
- c) A volatilidade considerada eminentemente como estocástica, ou seja, incorpora-se um segundo termo de erro na equação da variância condicional.

Suganuma (2000), apud Goulart (2004), demonstra que não existe um consenso sobre qual seria o modelo mais adequado para o cálculo da volatilidade. Devido a esse fato, é importante ressaltar que não há um melhor modelo em definitivo para o cálculo da volatilidade para todas as séries financeiras. Deve-se analisar qual modelo capta o comportamento desta variável na série financeira analisada.

A volatilidade dos índices financeiros será abordada, neste trabalho, a partir das três categorias definidas acima. Essa escolha pautou-se, principalmente, no fato de que esses modelos são compatíveis com os fatos estilizados das séries financeiras, os quais serão tratados a seguir, e de serem de fácil obtenção.

Ziegelmann e Pereira (1997) apresentam os seguintes fatos estilizados:

- Leptocurtose: demonstra a tendência de retornos de ativos financeiros terem distribuições que exibem caudas pesadas;
- Agrupamento de volatilidade com diferentes níveis: representa a tendência de a volatilidade em mercados financeiros aparecer em agrupamentos. Então, grandes retornos tendem a ser seguidos por longos retornos, de ambos os sinais, bem como pequenos retornos tendem a ser seguidos, de ambos os sinais, de pequenos retornos;

- Efeito Alavancagem: manifesta a tendência de a volatilidade reagir de maneira diferenciada se os preços estiverem aumentando ou declinando.
- Co-movimentos de volatilidade: existe uma vasta literatura sobre os co-movimentos dos mercados financeiros.
- Memória longa e persistência: existe evidência de que para dados de alta frequência tem seu processo gerador da variância condicional tem raiz unitária.
- Retornos não são autocorrelacionados: a distribuição dos retornos possui distribuição de probabilidade normal e os retornos não são autocorrelacionados.
- Os quadrados dos retornos são autocorrelacionados: são autocorrelacionados de primeira ordem e uma subsequente queda.

## **2.2 Modelos de Volatilidade**

São vários os modelos de previsão que são passíveis de serem utilizados para o estudo da volatilidade de índices financeiros. Neste trabalho serão estudados e apresentados os mais populares e conhecidos. Será apresentado o modelo de janela móvel, modelo de alisamento exponencial, o modelo ARCH desenvolvido por Engle (1982); o modelo GARCH apresentado por Bollerslev (1986) e algumas de suas modificações; e o modelo de volatilidade estocástica desenvolvido por Taylor (1986).

### **2.2.1 Modelos de Médias Móveis**

#### **2.2.1.1 Desvio-Padrão Histórico (Janela Móvel)**

Segundo Alexander (2005), as médias móveis são muito utilizadas na previsão da volatilidade de dados financeiros. Uma estimativa da volatilidade histórica (desvio-padrão) dos retornos dos ativos para um horizonte de  $n$ -dias é frequentemente baseada na média com pesos iguais dos  $n$ -retornos diários ao quadrado. Assumindo média zero, a

volatilidade amostral dos retornos do ativo utilizando-se uma amostra de  $n$  observações é definida como:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}} \quad (2.1)$$

onde:

$\sigma_t$  denota o desvio-padrão;

$y_t$  denota os retornos; e

$n$  denota o número de observações.

O cálculo do estimador utilizando-se toda amostra permite pouca adaptabilidade às informações mais recentes. Isso decorre do fato de que todas as observações da amostra recebem o mesmo peso.

Para contornar esse problema, utiliza-se não toda a amostra, mas uma janela móvel com um número fixo de observações. Essa janela pode ser simétrica em torno da observação corrente ou assimétrica. Apesar de ainda manter peso igual para todas as observações utilizadas na janela, consegue-se alguma flexibilidade, pois se pode controlar a importância das observações mais recentes através da escolha do tamanho da janela.

Entretanto, o uso desse estimador apresenta outro inconveniente. Em geral, a ocorrência de eventos extremos nas séries financeiras dá-se com relativa frequência. Como esse estimador utiliza o mesmo peso para todas as observações da amostra, a volatilidade estimada dá um salto para cima após um retorno extremo, permanecendo nesse nível enquanto a observação permanecer na amostra. Quando a observação extrema sai da amostra, a volatilidade salta para baixo novamente. Dessa forma, em períodos subsequentes a grandes variações de preços dos ativos, a volatilidade e, por conseqüência, o risco tendem a ser superestimados.

Outro problema com essa medida de volatilidade é que a função de previsão é constante e igual ao último valor;

### 2.2.1.2 Modelo de Alisamento Exponencial (EWMA)

Segundo Esteves (2003), os modelos de alisamento exponencial (EWMA) são bastante utilizados para previsões de séries temporais, devido à sua simplicidade, facilidade de implementação computacional e seus bons resultados. O método de alisamento exponencial simples (EWMA) configura-se em uma técnica de previsão pertencente a um grupo denominado métodos de alisamento exponencial (*Exponential Smoothing Methods*) que tenta contornar a limitação do modelo de janela móvel.

De acordo com Madridakis *et al.* (1998), o método das médias móveis exponencialmente ponderadas é uma extensão do método das médias móveis, no que se refere ao processo de previsão. São modelos que usam uma ponderação diferente em cada valor observado da série temporal, de modo que os valores mais recentes recebam pesos maiores. Assim, os pesos atribuídos às observações decaem exponencialmente a partir de valores mais recentes.

Makridakis *et al.* (1998, p. 147), apresenta a seguinte definição em relação ao modelo em questão: “... a nova previsão é simplesmente a soma da previsão antiga com ajuste para o erro ocorrido na última previsão”. Essa afirmação é representada a seguir pela equação (2.2):

$$\sigma_{t,i}^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) y_{t-1}^2 \quad (2.2)$$

onde,  $0 < \lambda < 1$

$\sigma_i^2$  denota a estimativa da variância.

A variância do retorno num determinado instante do tempo é composta por dois termos: o primeiro, um termo auto-regressivo expressando a dependência temporal da variância dos retornos, fato estilizado na maioria das séries financeiras; e o segundo, representando a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. A expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{T,i}^2 = \lambda^T \sigma_0^2 + (1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} y_{T-t}^2 \quad (2.3)$$

Nesta última expressão, a estimativa da variância dos retornos é igual à da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos, que representa a variância instantânea. A influência da variância inicial sobre a variância presente tende a desaparecer, e um candidato natural para estimador desse termo é o estimador da variância amostral. O segundo termo faz com que os efeitos dos choques nas séries de retornos sejam dissipados suavemente com o tempo. Note-se que o estimador amostral é um caso particular da expressão anterior com  $\lambda = T - 1/T$ .

A escolha do parâmetro ótimo de descaimento  $\lambda$  é feita muitas vezes de forma *ad hoc*, no sentido de que não envolve nenhum procedimento estatístico que gere uma estimativa a partir das observações passadas.

O modelo de alisamento exponencial tem maior capacidade de reproduzir os fatos estilizados do que o de janela móvel. Uma das características do modelo é que um valor  $\lambda$  próximo de um reproduz o fato estilizado da volatilidade ser altamente persistente. Contudo, o fato de a soma dos parâmetros do modelo ( $\lambda$  e  $1 - \lambda$ ) ser igual a 1 gera um inconveniente, a volatilidade não condicional dos retornos é igual a 0.

Como resultado, a distribuição não condicional dos retornos é degenerada, ou seja, sua média e variância são iguais a zero. Desta forma, toda massa da distribuição fica concentrada num único ponto, fato sem nenhum apoio empírico.

## **2.2.2 Modelos da Família GARCH**

### **2.2.2.1 Modelo ARCH**

Em seu artigo seminal, Engle (1982), buscando estimar a variância da inflação, introduziu o modelo de *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH). A heterocedasticidade leva a considerar a inexistência de volatilidade estacionária, ou seja, a presença de períodos de tempo com volatilidade elevada alternados com períodos de baixa volatilidade.

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0,1) \quad (2.4)$$

em que as inovações  $\varepsilon_t$  denotam a seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância um, e  $\Omega_{t-1}$  representa o conjunto de informações disponíveis em  $t-1$ .

O modelo ARCH ( $p$ ) formulado por Engle (1982) busca a estimação da variância dos retornos no qual a variância condicional é expressa como uma defasagem distribuída dos retornos passados. No modelo ARCH, a variância condicional é expressa como função das inovações passadas, com isso, tem-se:

$$\sigma_t^2 = E_t(y_t^2) = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 = w + \alpha(L)y_t^2 \quad (2.5)$$

onde,  $p$  denota a ordem do modelo;

$\sigma_t^2$  denota a variância condicional dado o conjunto de informações disponíveis em  $t-1$ ; e

$\alpha_i$  é o componente auto-regressivo dos resíduos quadráticos (parâmetro ARCH);

$y_t^2$  denota as inovações não correlacionadas serialmente;

$\alpha(L)$  é o polinômio no operador defasagem do tipo  $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p$ .

Para se obter o modelo bem definido com variância condicional positiva e fracamente estacionária, requer-se a satisfação das seguintes restrições,  $w > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ; para todo  $i > 0$  e  $\sum_i \alpha_i < 1$ .

Assim, a variância condicional  $\sigma_t^2$  depende do quadrado dos erros da regressão segundo uma ordem  $p$ .

No modelo ARCH várias hipóteses podem ser feitas em relação aos retornos. Pode-se assumir que a distribuição é normal ou não-normal, introduzir a influência de

variáveis exógenas e ainda verificar a interferência da volatilidade na determinação dos retornos. Uma desvantagem do modelo ARCH é que em geral, existe uma alta persistência na volatilidade das séries de retornos, o que faz com que o valor de  $p$  no modelo seja elevado implicando a necessidade de estimação de um grande número de parâmetros.

Como apuração do modelo ARCH, observa-se o desenvolvimento de modelos variantes não-lineares com relação à variância, como o GARCH, proposto por Bollerslev (1986).

### 2.2.2.2 Modelo GARCH

Um modelo mais abrangente, no qual a variância condicional não depende apenas do passado da inovação como também do seu próprio passado, foi desenvolvido por Bollerslev em 1986, o modelo GARCH – *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*. O modelo foi desenvolvido a partir do modelo ARCH de Engle, na qual se amplia o conjunto de informações e se obtém uma formulação mais parcimoniosa, isto é, utilizando um número menos de parâmetros (MATHWORKS, 2002).

Neste sentido, a expressão para a variância condicional deste modelo é representada por:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.6)$$

onde,  $q > 0$  é a ordem da dependência da variância com a variância passada, sendo os coeficientes  $\alpha_i; \beta_j \geq 0$  e  $\beta_j$  é o parâmetro do componente auto-regressivo da volatilidade (parâmetro GARCH);

O modelo GARCH ( $p, q$ ) pode ser reescrito de forma mais concisa como

$$\sigma_t^2 = w + \alpha(L)y_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (2.7)$$

onde,  $\alpha(L) = \alpha_1 L + \dots + \alpha_p L^p$ ; e  $\beta(L) = \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q$

Ainda podemos reescrever (2.7) como



$$\sigma_t^2 = \frac{w}{1-\beta(1)} + \frac{\alpha(L)}{1-\beta(L)} \varepsilon_t^2 = w^* + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \varepsilon_{t-k}^2 \quad (2.8)$$

onde  $w^* = \frac{w}{1-\beta(1)}$  e o coeficiente  $\delta_k$  é o coeficiente de  $L^k$  na expansão do termo  $\alpha(L)[1-\beta(L)]^{-1}$ .

Vemos então que o processo GARCH  $(p, q)$  é um processo ARCH de ordem infinita. Desta forma, o processo GARCH pode representar um processo ARCH de mais ordem de forma parcimoniosa.

De forma genérica, as restrições para que a variância do processo seja positiva e fracamente estacionária requerem que  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ;  $\beta_i > 0$  e  $\alpha_i + \beta_i < 1$ . O somatório de  $\alpha$  e  $\beta$  traduz a persistência de choques na volatilidade de retornos. Quanto maior a aproximação desse somatório de 1, maior será o tempo necessário para que um choque na série se dissipe.

Bollerslev e Wooldridge (1992) expõem que o comportamento da maior parte das séries financeiras tem sido bem captado pelo modelo GARCH (1,1), GARCH (2,1) ou GARCH (1,2). Tal fato indica que uma quantidade parcimoniosa de parâmetros consegue captar o comportamento de diferentes séries financeiras.

Um problema apresentado tanto no modelo ARCH como no GARCH é o fato de ambos tratarem os retornos positivos e negativos de forma similar, já que os quadrados dos retornos entram na fórmula da volatilidade. Pois, sabe-se que na prática a volatilidade reage de modo diferente a retornos positivos e negativos.

Devido ao fato do modelo GARCH não resolver o problema de assimetria da sua distribuição, especialmente nos índices financeiros que apresentam assimetrias de grande dimensão, pode-se considerar admissível que as previsões e a variância do seu erro sejam viesadas nas séries temporais assimétricas.

### 2.2.2.3 Modelo EGARCH

Como já mencionado anteriormente, nos mercados financeiros observa-se um comportamento assimétrico da volatilidade, ou seja, períodos de declínio nos preços são freqüentemente acompanhados por períodos de volatilidade intensa, ao passo que períodos de elevação nos preços são seguidos por um nível de volatilidade mais brando. Em função desses problemas foram criadas algumas modificações nos modelos GARCH que explicitamente têm em consideração as distribuições assimétricas. Uma alternativa de modelo para ultrapassar o problema da assimetria é o modelo EGARCH – *Exponential GARCH*– desenvolvido por Nelson (1991).

O modelo EGARCH é utilizado para capturar a assimetria na volatilidade induzida por grandes retornos positivos e negativos, e uma suposição de distribuição de probabilidade (NELSON, 1991). Neste modelo não é mais necessário impor restrições de não negatividade sobre os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

O modelo geral pode ser representado da seguinte forma:

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (2.9)$$

Onde  $z_t$  corresponde à série normalizada dos resíduos.

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \quad (2.10)$$

O valor de  $g(z_t)$  depende da hipótese feita na densidade não condicional de  $z_t$ . Nelson (1991) refere-se que “para acomodar a relação assimétrica entre a rentabilidade das ações e a variação da volatilidade... o valor de  $g(z_t)$  tem de ser função da magnitude e do sinal de  $z_t$ ”. Conforme foi sugerido pelo autor deve-se utilizar a seguinte expressão para a função  $g(\cdot)$ :

$$g(z_t) \equiv \theta_1 z_t + \theta_2 [|z_t| - E|z_t|] \quad (2.11)$$

onde,  $\theta_1 z_t$  denota o efeito alavancagem e  $\theta_2 [|z_t| - E|z_t|]$  a magnitude.

Se  $\varepsilon_t > 0$  os impactos serão dados por  $g(z_t) = -\theta_2 E|z_t|$ . Já se  $\varepsilon_t < 0$  os efeitos sobre o modelo serão dados por  $g(z_t) = \theta_2 - \theta_1 - \theta_2 E|z_t|$ . Logo, para o impacto da assimetria tenha maiores impactos quando  $\varepsilon_t < 0$ .

#### 2.2.2.4 Modelo TGARCH

O modelo *Threshold GARCH* proposto por Glosten, Jagannathan e Runkle (1993) – também conhecido por GJR<sup>3</sup> - assim como o modelo *EGARCH* tem como característica modelar os efeitos de “alavancagem” presentes em séries financeiras.

O modelo TGARCH pode ser expresso por:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \gamma_i S_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.12)$$

Em que a variável binária assume o valor  $S_{t-i} = 1$ , se  $\varepsilon_{t-i}^2 < 0$  e  $S_{t-i} = 0$  caso contrário.

Dependendo se o valor de  $\varepsilon_{t-i}$  está acima ou abaixo do valor de *threshold* zero,  $\varepsilon_{t-i}^2$  terá diferentes efeitos na variância condicional  $\sigma_t^2$ ; informações positivas (isto é,  $\varepsilon_{t-1} > 0$ ) terão impacto dados por  $\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$ ; e quando condições adversas do mercado e informações negativas (isto é,  $\varepsilon_{t-1} < 0$ ), o efeito total será dado por  $(\alpha_i + \gamma_i) \varepsilon_{t-i}^2$ . Portanto pode-se esperar que  $\gamma_i$  seja positivo para informações negativas e, além disso, que ele seja mais impactado por estas informações. O efeito “alavancagem” vai existir neste modelo caso tenhamos  $\gamma_i > 0$ .

Assim, choques positivos ou negativos podem produzir resultados diferentes (assimétricos) conforme os coeficientes de alavancagem  $\gamma$ .

---

3 GJR – iniciais do nome dos autores.

### 2.2.2.5 Modelo IGARCH

A persistência observada na volatilidade dos retornos das bolsas levou Engle e Bollerslev (1986) a desenvolverem o modelo GARCH Integrado, o IGARCH (*Integrated Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Neste modelo, um choque na variância (ou na série temporal) em um instante no tempo influencia ou permanece por um período longo de previsão. Muitas séries financeiras apresentam esta característica.

Segundo os autores, quando o polinômio da representação GARCH  $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$  tem raiz unitária<sup>4</sup>, ou seja,  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ , é conveniente utilizar um modelo IGARCH.

Neste modelo a informação corrente permanece importante para a previsão da volatilidade em qualquer horizonte de tempo. Então, se o modelo básico GARCH admitir a existência de raiz unitária na variância condicional, esse processo IGARCH, admite que os choques tenham um efeito permanente na variância condicional.

Neste modelo a informação corrente permanece importante para a previsão da volatilidade em qualquer horizonte de tempo. Se for acrescentado de ambos os lados da equação (2.7) o termo  $[1 - \beta(L)]\varepsilon_t^2$  pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) \quad (2.13)$$

onde  $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$ , sendo de ordem  $[\max\{p, q\} - 1]$ .

Podemos rearranjar a equação 2.14 para expressar a variância condicional em função dos resíduos ao quadrado,

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{[1 - \beta(L)]} + \left\{ [1 - \phi(L)](1-L) [1 - \beta(L)]^{-1} \right\} \varepsilon_t^2 \quad (2.14)$$

Segundo Nelson (1991), satisfazendo algumas condições,  $\sigma_t^2$  tem distribuição limite estritamente estacionária e ergódica e, conseqüentemente, o retorno é estritamente

---

<sup>4</sup> Neste caso, o processo da variância condicional é não estacionário.

estacionário por que é o produto de dois processos estritamente estacionários  $(\sigma_t \varepsilon_t)$ . O que significa que a distribuição dos retornos tem média zero, mas suas caudas são tão espessas que a distribuição não tem variância ou momentos de ordem mais elevada.

Neste modelo, ao contrário dos processos lineares com raiz unitária (*integrados*), os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do IGARCH são bem comportados, com distribuição assintótica normal, conforme mostra Lumsdaine (1990).

Segundo Alexander (2005), o processo EWMA definido anteriormente é um IGARCH com  $w = 0$  e os parâmetros fixados arbitrariamente. Neste modelo, os retornos teriam distribuição degenerada, isto é, sua distribuição não condicional teria média zero e variância indeterminada. Desta forma, ao assumir que os retornos de determinado ativo têm variância condicional definida por um EWMA está-se, na verdade, fazendo uma restrição que pode não ser justificada pelos dados.

Ainda segundo Alexander (2005), metodologicamente, o procedimento mais indicado seria estimar um GARCH e então testar a hipótese de que os parâmetros aceitam uma restrição do tipo  $w = 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . Isto garantiria a estimação de um modelo coerente com a realização do processo estocástico dos retornos. Entretanto, testar estas duas restrições, conjuntamente, é complicado, pois, sob a hipótese nula, a distribuição seria degenerada.

#### **2.2.2.6 Modelo de Volatilidade Estocástica – MVE**

Os modelos apresentados da família GARCH partem do pressuposto de que a variância condicional depende dos retornos ao quadrado passados. Já o modelo de volatilidade estocástica (MVE), proposto inicialmente por Taylor (1980, 1986) não faz essa suposição. Este modelo tem como premissa a idéia de que a volatilidade presente depende de seus valores passados, mas que os mesmos são independentes dos retornos passados.

O modelo MVE univariado foi proposto por Taylor (1986) tendo a seguinte equação (na forma discreta):

$$r_t = \varepsilon_t \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \quad (2.15)$$

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \eta_{t-1} \quad (2.16)$$

onde,

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

e  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$  o que implica em:  $r_t | h_t \sim N(0, \exp(h_t))$ .

Segundo Valls (2007),  $r_t$  é estritamente estacionário, pois é o produto de dois processos estritamente estacionários. A variável  $h_t$ , o log-volatilidade, é um componente não observado que pode ser estacionário ou não. Se  $|\gamma_1| < 1$  então  $h_t$  é estritamente estacionário com média  $\gamma_0 / (1 - \gamma_1)$  e variância  $\sigma_\eta^2 / (1 - \gamma_1^2)$ .

Tomando a transformação  $\ln(r_t^2)$ , pode-se colocar o modelo em uma representação em espaço de estado linear onde a equação de observação é dada por:

$$\ln(r_t^2) = h_t + \ln(\varepsilon_t^2) \quad (2.17)$$

onde  $\ln(\varepsilon_t^2)$  tem distribuição log-normal com média -1,27 e variância  $\pi^2/2$ <sup>5</sup>.

E a equação de transição é dada por:

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 h_{t-1} + \eta_{t-1} \quad (2.18)$$

Ao trabalhar com os modelos de volatilidade estocástica encontra-se o problema de que não é possível obter explicitamente as expressões que são utilizadas nas funções de verossimilhança, como no caso de outros modelos de volatilidade condicional. Para contornar este problema utiliza-se nesta dissertação a abordagem de Harvey (1993), que consiste em usar o procedimento de quase-máxima verossimilhança, por meio de Filtro de Kalman.

---

<sup>5</sup> Consultar Ruiz (1994) para maiores detalhes sobre as propriedades da função log-normal.

## **2.3 Considerações Finais**

Neste capítulo apresentou-se inicialmente algumas características das séries financeiras em geral a fim de auxiliar o entendimento sobre os modelos de previsão que foram utilizados. Baseando-se nessas propriedades foram descritos os modelos que foram utilizados para a estimação da volatilidade.

Esses modelos estão divididos em três categorias. Na primeira, a volatilidade é tratada constante ao longo do tempo; na segunda categoria a volatilidade é determinística e na terceira e última a volatilidade é considerada estocástica.

No próximo capítulo descreve-se a técnica de combinação de previsão. Essa técnica tem como objetivo combinar as previsões dos modelos individuais mais promissores a fim de obter resultados com o menor erro de previsão possível.

### **3 TÉCNICAS DE COMBINAÇÃO DE PREVISÃO**

Assim como os modelos descritos no capítulo anterior, muitas outras propostas foram sugeridas e aperfeiçoadas por pesquisadores com o objetivo de atingir desempenho superior no campo de previsões de séries temporais. Em função deste fato, nas últimas décadas, Bates & Granger (1969) propuseram o método de combinar os resultados dos modelos de previsão mais eficientes, com a finalidade de agregar as características mais relevantes de cada um dos modelos utilizados em uma determinada situação.

A fim de testar se a combinação de previsões para as séries financeiras estudadas nesta dissertação apresenta resultados superiores aos modelos individuais, este capítulo se propõe inicialmente a descrever as medidas de erro que serão utilizadas para a comparação dos modelos individuais e das técnicas de combinação. Posteriormente, será realizada uma breve introdução sobre combinação de previsões e um detalhamento sobre as técnicas utilizadas para a combinação dos modelos individuais

#### **3.1 Medidas de Acurácia**

A utilização de um modelo ou de uma técnica de combinação nem sempre conduz a uma boa fórmula de previsão. Muitas vezes os valores estimados apresentam valores muito distantes dos observados. Por este motivo na maioria dos casos a seleção do modelo ou da técnica de combinação é baseada em critérios de precisão que tem como finalidade mensurar essa distância – erro de previsão.

Os erros de previsão podem ser classificados em duas categorias: erros de viés e erros aleatórios. A primeira categoria ocorre quando acontece um equívoco consistente,



isto é, quando existem falhas de relacionamentos entre as variáveis; existência de algumas tendências seculares indeterminadas; e falhas na inclusão ou exclusão de variáveis (erros de especificações). Já a segunda, é composta por erros que não podem ser explicados pelo modelo de previsão (ruídos).

Existem diversas medidas de erros de previsão, a escolha de uma medida de acurácia pode variar de acordo com a situação de uso – seleção de modelo ou calibração de um dado modelo – e do tamanho das amostras utilizadas. Para alguns autores algumas medidas de precisão apresentam resultados superiores a outras. Carbone e Armstrong; e Morenttin e Tolo (1985), indicam o Erro Quadrático Médio (*MSE*) como a melhor medida de acurácia para a realização de estudos empíricos.

Para comparação de modelos Edmundson & O'Connor (1995) sugerem que a utilização do Erro Percentual Absoluto Médio (*MAPE*) como a medida mais apropriada nos estudos empíricos, sendo esta medida é menos afetada por valores extremos, utilizando percentuais do erro e não depende da unidade dos dados.

Neste trabalho serão utilizadas estas duas medidas de erros mencionadas acima para a comparação dos modelos individuais e das técnicas de combinação de previsão. As medidas utilizadas estão descritas na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Medidas de Avaliação de Previsão

Medidas	Equação
Erro Quadrático Médio ( <i>MSE</i> )	$MSE = \sum_{t=1}^n \left( \hat{y}_t - y_t \right)^2 / n$
<i>Mean Absolute Percentage Error (MAPE)</i>	$MAPE = 100 \sum_{t=1}^n \left( \left  \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right  \right) / n$
<i>Theil Inequality Coefficient</i>	$Theil = \frac{\sqrt{\sum \left( \hat{y}_t - y_t \right)^2 / n}}{\sqrt{\sum \hat{y}_t^2 / n} + \sqrt{\sum y_t^2 / n}}$

onde:  $y_t$  valor da variável dependente no instante  $t$ ;  $\hat{y}_t$  valor previsto para a variável dependente no instante  $t$ ;  $n$  é o número de observações consideradas para o cálculo da medida de erro.

Além destas duas medidas de acurácia também será utilizado o coeficiente de desigualdade (ou índice) de Theil-U – descrito na tabela 3.1 onde o numerador é a raiz do *MSE*, e o denominador da fórmula foi definido de modo a fazer com que a medida *U* sempre fique entre o valor zero e um. Neste caso quando maior for a aderência entre o valor observado e o previsto o valor que *U* será próximo de zero e próximo de um caso contrário.

### 3.2 Combinação de Previsões

A primeira técnica proposta na literatura para combinar os resultados obtidos dos modelos de previsão individuais mais eficientes foi proposta por Bates e Granger (1969), sugerindo um esquema de combinação linear, cujos coeficientes ou pesos são calculados utilizando uma matriz de covariância de erros de previsões individuais. Neste trabalho os autores sugerem combinar duas previsões não viciadas (ou corrigidas), dando pesos diferentes a cada um dos previsores. Pois, os autores acreditam que o desejável é dar maior peso a previsão que fornecer os menores erros quadráticos médios. A equação 3.1 fornece a combinação  $F_c$ .

$$F_c = wF_1 + (1-w)F_2 \quad (3.1)$$

onde,  $w$  é o peso da previsão 1 e  $(1-w)$  é o peso da previsão 2; e  $F_1$  e  $F_2$  são as previsões a serem combinadas resultantes dos modelos individuais.

Visando encontrar o valor ótimo de  $w$ , os autores propuseram a minimização da variância dos erros dos previsores combinados. A variância da previsão combinada é dada pela equação 3.2

$$\sigma_c^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2\rho w\sigma_1(1-w)\sigma_2 \quad (3.2)$$

onde,  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  são as variâncias dos erros das previsões a serem combinadas;  $\rho$  é o coeficiente de correlação dos erros das previsões.

Essa técnica ficou conhecida como técnica da variância mínima, pois para se obter a minimização da variância ( $\sigma_c^2$ ), utiliza-se da diferenciação da equação (3.2) em relação a  $w$  e iguala-se o seu resultado a zero. Assim, o valor mínimo de  $\sigma_c^2$  ocorre quando  $w$  assume o valor dado pela equação (3.3).

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \quad (3.3)$$

No caso em que os erros não são correlacionados  $\rho = 0$ ,  $w$  fica reduzido ao valor dado pela equação (3.4).

$$w = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.4)$$

Devido ao fato das variâncias  $\sigma_i^2$  dos erros de previsão não serem conhecidas, os autores propuseram cinco procedimentos para calcular o peso ótimo de  $w$ , tendo como base as medidas os erros das previsões.

A ampliação do número de modelos a serem combinados foi desenvolvida no trabalho de Newbold e Granger (1974), onde os autores ampliaram o número de modelos a serem combinados, passando de dois para  $n$ , mas mantendo todas as suposições feitas, inicialmente, por Bates e Granger (1969). Os mesmos cinco procedimentos de estimação de pesos foram utilizados e estendidos com o objetivo de combinar mais de duas previsões. Para maiores detalhes de tais procedimentos consultar o Apêndice A desta dissertação.

Newbold e Granger (1974) concluíram, assim como Bates e Granger (1969), que a técnica da variância mínima pode trazer melhorias na acurácia das previsões. Mas, que essas melhorias são freqüentemente obtidas se for considerado uma combinação de mais de duas previsões, uma vez que cada modelo de previsão tem suas características e habilidades próprias para capturar os diferentes aspectos das informações disponíveis para predição. Além disso, as correlações poderiam ser ignoradas na estimação dos pesos, pois na prática elas têm pouca influência na sua definição.

No seu estudo Winkler e Makridakis (1983) também analisaram a técnica da variância mínima entre as dez técnicas estudadas para a realização das previsões, e os resultados encontrados confirmaram as conclusões de Newbold e Granger (1974). Que é melhor ignorar os efeitos da correlação no cálculo da variância mínima. Os autores chegaram a essa conclusão após realizarem uma comparação do *MAPE* médio de 1001 séries temporais.

Em função das dificuldades de estimação dos pesos ótimos - Newbold e Granger (1974) – para a combinação de previsões os pesquisadores Gupta e Wilton (1977) propuseram a utilização de uma técnica de combinação simples, de combinar as previsões individuais, através de uma média aritmética das previsões. Esta técnica tem sido defendida por diversos pesquisadores do assunto por ser de fácil obtenção e por produzir resultados tão bons ou até mesmo melhores que técnicas mais complexas. Entre esses autores pode-se citar alguns estudos, tais como Winkler e Makridakis (1983), Clemer e Winkler (1986), Asku e Gunter (1992), e Armstrong e Collopy (1998).

Mesmo sendo uma boa alternativa a realização da combinação de previsores através da média aritmética, muitos autores continuam na busca por uma técnica que apresente resultados superiores. Granger e Ramanathan (1984) chamaram a atenção para o fato de que as técnicas convencionais de combinação de previsões poderiam ser vistas como uma forma estruturada de regressão. Assim, propuseram três técnicas para combinar previsões de forma linear. A primeira refere-se a uma combinação linear sem restrição nos pesos e sem constantes, chamada de técnica A, igual aos modelos propostos por Newbold e Granger (1974) e Winkler e Makridakis (1983). Porém seus parâmetros (os pesos) são estimados por Mínimos Quadrados Ordinários.

Já a segunda técnica, chamada de técnica B, é uma combinação linear sem constante e com restrições nos pesos, que somam um. Para Taylor e Bunn (1999), tal técnica é equivalente à técnica de variância mínima proposto por Bates e Granger (1969), porém combina mais de duas previsões. A terceira, chamada de técnica C, é uma combinação linear sem restrições nos pesos, porém com a adição de uma constante.

Para Deutsch *et al.* (1994), como a vasta maioria das combinações lineares consideram apenas pesos fixos, a combinação de pesos móveis – que variam no tempo – é uma área a ser investigada. Com o intuito de realizar tal investigação, os autores propõem, com base no uso dos modelos de *switching regression*, duas técnicas de combinação de previsões, chamadas de '*switching regime models*' que considera o regime em que a combinação esta sendo realizada e a '*smooth transition models*' que é aplicada nos casos onde se deve assumir uma mudança mais gradual nos pesos da combinação.

Também cabe ressaltar outras alternativas que foram desenvolvidas, mas de abordagens bayesianas. O método *Outperformance*, através do qual os pesos para as previsões individuais são interpretados como a probabilidade de que cada previsão irá desempenhar melhor na próxima ocasião, estima as probabilidades considerando a proporção de vezes em que a respectiva previsão teve melhor desempenho no passado. Este método foi desenvolvido por Bunn (1995), que pode ser consultado para um maior detalhamento.

Mas, para Zou & Yang (2004), este tipo de combinação é muitas vezes instável, e pode causar uma alta variabilidade na previsão final. Por isso, eles propuseram o uso de um algoritmo para combinar modelos, sendo que, para cada observação adicional incluída na análise, ocorre uma atualização nos pesos da combinação.

Além das técnicas de combinação quantitativa muitos pesquisadores também utilizam as técnicas de combinação baseadas em modelos subjetivos (opinião de especialistas). Entre esses estudos pode-se citar o de Winkler & Makridakis (1983), que acreditam que as combinações de previsões não devem estar restritas a técnicas de combinação que se utilizam apenas de séries temporais, devendo ser considerada toda e qualquer informação disponível. Estes autores acreditam que em muitos casos de estudo diferentes tipos de fontes podem melhorar as medidas de acurácia.

Para Sanders e Ritzman (2001), não existem dúvidas no que tange ao aumento da precisão dos resultados obtidos quando se realiza combinação de previsões individuais, sejam elas técnicas de combinação quantitativas, qualitativas ou mesmo uma combinação de ambas as técnicas. Pois, cada técnica de combinação oferece informações distintas no decorrer do processo de combinação.

Já Makridakis *et al.* (1998), acredita que a acurácia das previsões qualitativas é, em média, inferior às previsões que utilizam as técnicas quantitativas. Este fato ocorreria devido ao julgamento que é freqüentemente caracterizado pelas limitações humanas, sendo possível a introdução de vários tipos de viés.

Em geral, os desempenhos dessas técnicas de combinação quantitativas apresentam melhores resultado da medida de acurácia para diversas aplicações, com ênfase

em séries econômicas (MENEZES *et al.*, 2000). A principal diferença entre os métodos de combinação de previsores é a maneira como esses pesos são calculados.

### 3.2.1 Técnicas utilizadas para combinar as previsões individuais

Como descrito na introdução esta dissertação tem como objetivo principal comparar os resultados encontrados nos modelos individuais com os obtidos na combinação de previsores. Para tal optou-se em realizar três técnicas de combinações quantitativas, que serão detalhadas nesta seção do trabalho.

A primeira técnica que será utilizada esta apoiada no estudo de Granger e Ramanathan (1984), já mencionado anteriormente, onde os autores argumentam que as técnicas de combinação de previsores são equivalentes ao Método de Mínimos Quadrados Ordinários (*MQO*), tendo a previsão combinada como variável resposta e as previsões individuais como variáveis explicativas.

A técnica de combinação por *MQO* utilizada nesta dissertação não impõe restrições aos pesos e adiciona uma constante, é chamada pelos autores de técnica C. Esta técnica é muito semelhante às técnicas propostas por Newbold & Granger (1974) e Winkler & Makridakis (1983), mas com a inclusão da constante. Porém seus parâmetros (os pesos) são estimados por *MQO*.

$$F_c = w_1F_1 + w_2F_2 + \dots + w_nF_n + k \quad (3.5)$$

onde,  $F_c$  é a previsão combinada;

$F_n$  é a previsão do modelo individual  $n$ ;

$w_n$  são os pesos (parâmetros) dos modelos individuais; e

$k$  é uma constante diferente de zero.

Os autores demonstraram que é melhor empregar esta técnica de combinação linear sem restrição aos pesos e incluir um termo constante, pois a mesma produz um menor erro quadrático médio e uma previsão combinada não-viciada, mesmo quando as previsões individuais são viciadas.

Holmes (1987) simulou dados de três modelos *Box-Jenkins*. Ao combinar as previsões resultantes pelas três técnicas descritas no trabalho Granger & Ramanathan (1984) e chegou às mesmas conclusões que os autores: as combinações de previsões produzem, individualmente, o menor erro quadrático médio que qualquer previsão original e a técnica C produz o menor erro quadrático médio, para a combinação dos três modelos e para qualquer combinação duas a duas.

A segunda técnica a ser utilizada nesta dissertação é a combinação de previsões por média aritmética proposta por Gupta e Wilton (1987):

$$F_c = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{n} \quad (3.6)$$

onde,  $n$  é o número de modelos individuais utilizados na combinação.

Para Winkler & Makridakis (1983), utilizar a média das previsões é indubitavelmente melhor que usar um modelo “ruim” ou uma técnica de previsão pobre, uma vez que os resultados registrados pelos autores sugerem que o uso de média das previsões traz consideráveis benefícios práticos em termos de melhoria da acurácia de previsão e de diminuição da sua variabilidade. Quando não há informações sobre a dependência entre as previsões, ou quando não há informações disponíveis sobre a precisão de cada técnica de previsão, parece ser razoável utilizar a média das previsões (BESSLER e BRANDT, 1981).

Além disso, de acordo com Taylor & Bunn (1999), a média, além de ser um método importante, é o método de combinação mais empregado. Para Menezes *et al.* (2000), uma possível resposta para o sucesso da média aritmética pode estar associada à instabilidade dos pesos que, freqüentemente, resultam de mudanças não-sistemáticas que ocorrem ao longo do tempo na matriz de covariância dos erros das previsões individuais. Devido a estas circunstâncias, à média, embora não tenha pesos ótimos, pode dar origem a resultados melhores que os de métodos mais sofisticados.

Segundo Winkler (1989), outra vantagem dessa técnica de combinação é não requer estimação de parâmetros e, por esse motivo, não é foco de problemas de estimação . Tais como, dependência, incerteza sobre as características das previsões e instabilidade no

processo de previsão. E de um ponto de vista prático, pode ser mais efetivo considerar a média e gerar previsões adicionais ao invés de refinar o procedimento de combinação.

A terceira e última técnica de combinação utilizada está apoiada no estudo de Terui e Djik (2002), onde os autores propõem a utilização de uma técnica onde os coeficientes variem ao longo do tempo. Esta técnica, segundo os autores, tem a vantagem de modelar tanto modelos lineares quanto não lineares.

Uma das contribuições desta técnica de combinação, segundo os autores, é que se pode avaliar a contribuição de cada modelo individual à combinação como um todo em cada instante do tempo, diferentemente da combinação constante que nos fornece apenas a contribuição para o período inteiro. Assim como na técnica de combinação constante do tempo – técnica C de Granger e Ramanathan (1984) – os autores introduzem um termo constante a equação e não impõem nenhum tipo de restrição aos parâmetros.

$$F_c = \alpha_0 + \alpha_t^1 F_t^1 + \dots + \alpha_t^n F_t^n + \varepsilon_t ; \quad \varepsilon_t \sim N(0, \eta^2) \quad (3.7)$$

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + u_t \quad ; \quad u_t \sim N(0, \Sigma) \quad (3.8)$$

onde,  $F_t^n$  são as previsões geradas pelos modelos individuais; e

$$\alpha_t = [\alpha_0, \alpha_t^1, \dots, \alpha_t^n]; \text{ são vetores}$$

A técnica de combinação com coeficientes variando no tempo – Equações (3.7) e (3.8) – podem ser interpretadas como um modelo de espaço de estado, onde a equação (3.7) é a que define a distribuição de  $F_t$  - equação de medida ; e a equação (3.8) é a equação de estado que define a distribuição de  $\alpha_t$  para todo  $t > 1$ .

Esta combinação de previsores será realizada aplicando o algoritmo de Filtro de Kalman. Onde serão verificadas as relações recursivas a respeito das previsões e determinar o coeficiente de estimação ótimo para a equação de estado

$$\hat{\alpha}_{t|T} = E(\alpha_t | F_1, \dots, F_T) \text{ e para a matriz de covariância } \hat{\Sigma}_{t|t} = E \left[ \left( \alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t} \right) \left( \alpha_t - \hat{\alpha}_{t|t} \right)' \right].$$



### **3.3 Considerações Finais**

Neste capítulo apresentaram-se inicialmente as medidas de acurácia que serão utilizadas na comparação entre os modelos individuais e as técnicas de combinação de previsores. Também se fez uma breve introdução sobre as técnicas de combinação mais utilizadas na literatura de séries temporais. Logo em seguida foram descritas as técnicas de combinação que serão empregadas para a estimação da volatilidade.

As técnicas de combinação por média aritmética por ser de fácil obtenção e fornecer bons resultados; a combinação por pesos constantes que será estimada como uma estrutura de regressão - MQO; e a combinação por pesos móveis que será obtida através de Filtro de Kalman.

O capítulo quatro tem como finalidade apresentar os resultados obtidos dos modelos individuais e das técnicas de combinação descritas nesta dissertação.

## **4 RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Este capítulo tem como finalidade apresentar os dados utilizados, suas características gerais e os resultados dos testes realizados. Também serão apresentados os principais resultados das estimativas e das previsões dos modelos individuais e das técnicas de combinação de previsões discutidas neste trabalho.

### **4.1 Apresentação dos dados**

Os dados referentes ao índice da bolsa de valores de São Paulo – *Ibovespa* – e ao índice da bolsa de valores de New York – *Dow Jones* – foram coletados junto ao Finance Yahoo. Tais dados foram fornecidos em valores do seu fechamento diário, portanto, as previsões foram realizadas também diariamente. No estudo foram considerados como amostra os dados do período de 02/01/2002 a 31/12/2007. As cem últimas observações de cada série, serão utilizadas para verificação das previsões.

Já os dados referentes ao Índice Geral de Preços – Mercado (IGP-M) – foram coletados junto a Fundação Getúlio Vargas – Conjuntura Econômica – e tem o mês de agosto de 1994 como base. Diferentemente dos dados mencionados anteriormente esta série tem seu índice disponibilizado mensalmente, logo suas previsões serão mensais. O período de estudo desta série é de janeiro de 1995 a março de 2008. Os dez últimos meses da série serão utilizados para a verificação das previsões.

Para a realização das combinações serão utilizadas as previsões dos modelos já mencionados, os quais terão seus desempenhos individualmente comparados entre si e com as técnicas de combinação. A avaliação das previsões de cada modelo e deles

combinados será baseada nos resultados do cálculo do MSE, do MAPE e da estatística Theil-U (ou coeficiente de desigualdade).

#### 4.1.1 Características das séries

Para que se possa ter uma visão geral do comportamento estatístico dos dados descritos acima e identificar a necessidade de possíveis transformações para tornar confiáveis as aplicações dos modelos já mencionados, é apresentada uma descrição das séries originais.

As séries em pontos do Índice Ibovespa e do *Dow Jones* – gráficos A.1 e A.2 – e a série do IGP-M – gráfico A.3 – são claramente não estacionárias, apresentando fortes oscilações em determinados períodos, como nos últimos meses do ano de 2007 (crise imobiliária dos Estados Unidos) e para a série do IGP-M oscilações para o período eleitoral de 2002. O teste de raiz unitária de Dickey-Fuller, mostra que a série de log retornos diários de ambas as séries são estacionários – conforme sugerem os gráficos 4.1, 4.2 e 4.3.

Gráfico 4.1: Série de retornos do Ibovespa diário

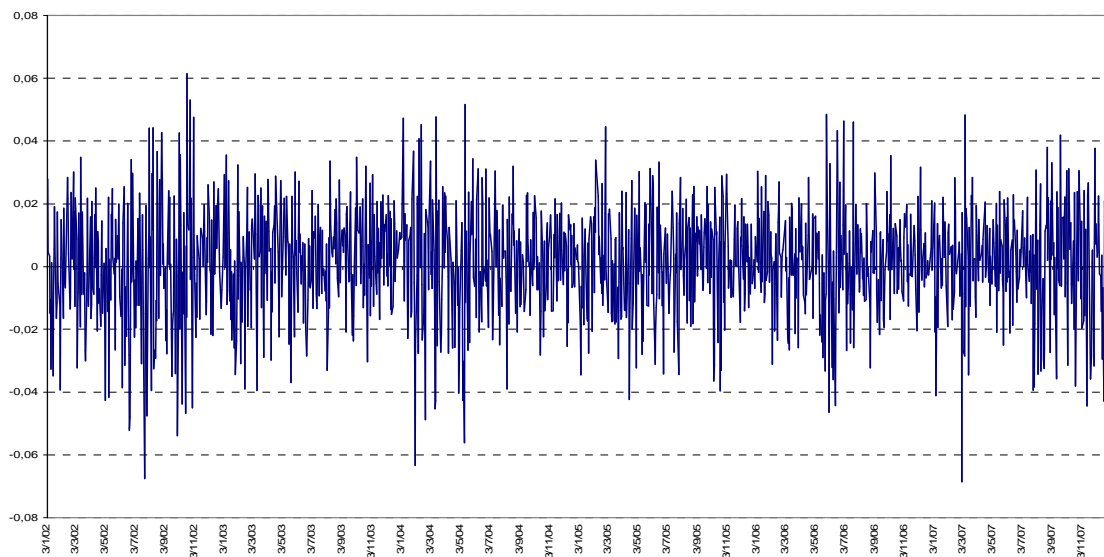


Gráfico 4.2: Série dos retornos do Dow Jones diário

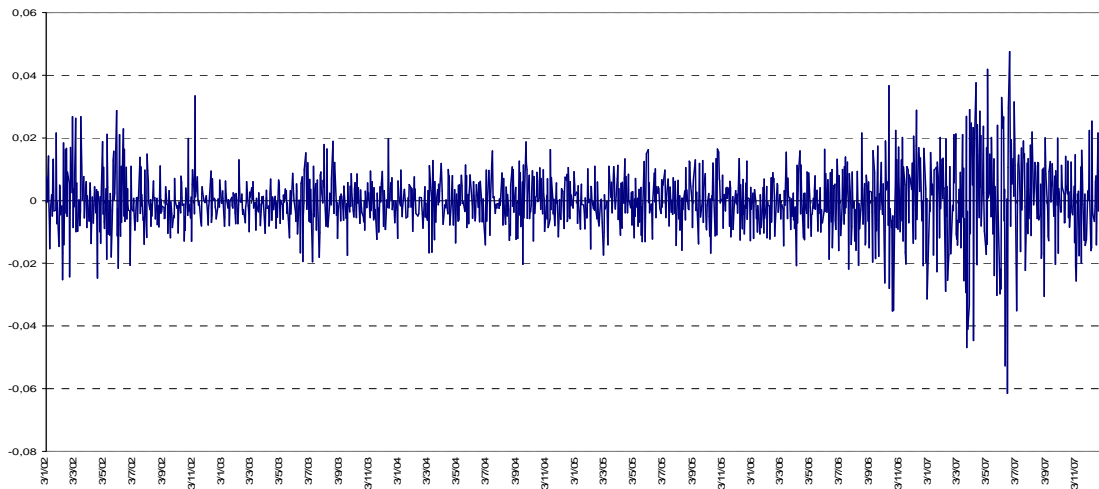
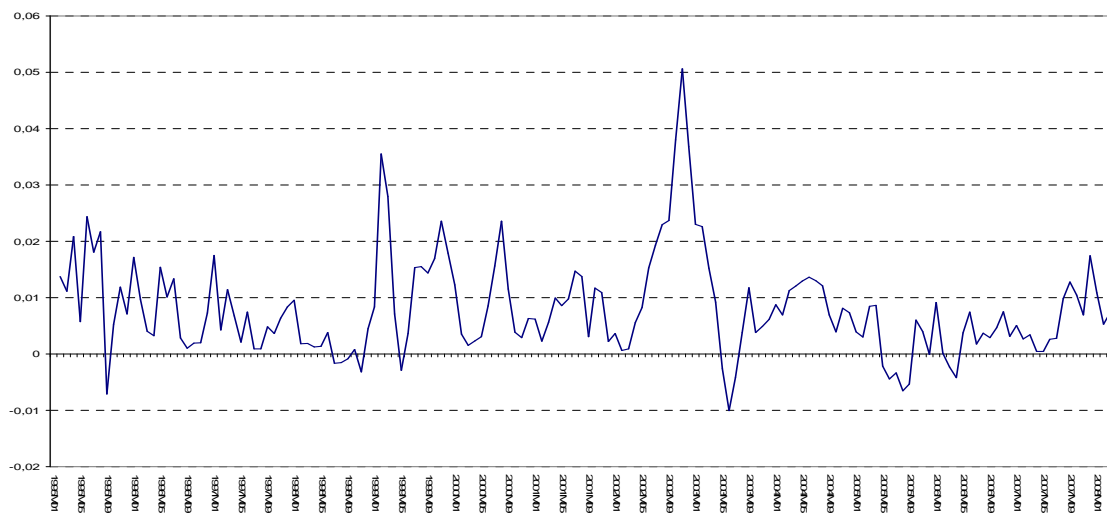


Gráfico 4.3: Série dos retornos do IGP-M mensal



Como se pode visualizar na tabela 4.1 todas as séries de retornos apresentam problemas de normalidade, como constatado a partir da estatística de Jarque Bera (a hipótese nula é de distribuição normal). Os altos valores encontrados para a Curtose (tabela 4.1), a indicação de aglomeração da variância em alguns pontos e a existência de agrupamentos (*volatility clustering*) tal como sugerido na literatura de finanças, onde os altos retornos são seguidos por altos retornos, mas com maior frequência no caso dos

retornos negativos. (gráfico 4.1, 4.2 e 4.3) sugerem uma especificação de volatilidade variável no tempo (*GARCH e outros*).

Tabela 4.1: Estatísticas para as séries de retornos do Ibovespa, Dow Jones e IGP-M

Estatística	Retorno Ibovespa	Retorno Dow Jones	Retorno IGP-M
Média Amostral	0,001029	-0,000182	0,007998
Desvio Padrão	0,017168	0,009814	0,008821
Assimetria	-0,292048	-0,211998	1,474849
Curtose	3,674405	6,614167	6,927383
Retorno Máximo	0,061503	0,047515	0,050596
Retorno Mínimo	-0,068565	-0,061547	-0,010073
Probabilidade de JB	0,000000	0,000000	0,000000

Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de verificar a existência de autocorrelação nas séries de retornos foram realizados os testes de autocorrelação nos retornos das séries (estatística Ljung-Box) com 12 defasagens e os resultados indicam a existência de autocorrelações da primeira ordem para as séries de retornos e de seu quadrado para as três séries em estudo na primeira diferença.

#### 4.2 Formulação e Avaliação das Previsões Individuais e Previsões Combinadas

A aplicação dos modelos individuais e das técnicas de combinação de previsões para as três séries em estudo desta dissertação foram realizadas no *Software Eviews 6*. Entre os modelos individuais foram considerados os modelos EWMA, ARCH, GARCH, EGARCH, IGARCH, TGARCH e Volatilidade Estocástica. E para as técnicas de combinação utilizaram-se as combinações por MQO, a combinação por média aritmética e a combinação por filtro de Kalman – móvel.

Os modelos individuais foram escolhidos pela significância da estatística *t* para os parâmetros e pela minimização dos critérios de Schwarz e do Akaike dentro da amostra. Dentre os modelos individuais utilizados nesta dissertação apenas o modelo ARCH para os dados do Ibovespa, e o modelo TGARCH para a série do IGP-M não apresentaram parâmetros significativos ao nível de 10%. E, portanto, ficaram fora da combinação das previsões para essas séries, respectivamente.

Após a escolha dos modelos individuais que apresentaram melhores resultados realizou-se as previsões para dentro e fora da amostra e utilizou-se destas previsões para a realização das medidas de erros dos modelos individuais.

De posse dessas previsões individuais construíram-se as combinações de previsão da volatilidade. Os resultados encontrados para cada série em estudo serão detalhados nas subseções seguintes.

#### 4.2.1 Ibovespa

Os resultados encontrados para o Índice Ibovespa, tanto dentro da amostra como fora da amostra, sugerem que as técnicas de combinação fornecem resultados superiores aos demais modelos individuais. As previsões geradas a partir das técnicas de combinação de previsões apresentaram um MSE e o MAPE dentro da amostra inferiores aos obtidos pelos modelos individuais. A tabela 4.2 traz os valores obtidos pelos modelos individuais e pelas técnicas de combinação dentro da amostra e, como pode ser visualizado, o melhor modelos pelas três medidas de erros são as técnicas por MQO e móvel (combinação por filtro de Kalman).

Tabela 4.2: Medidas de Avaliação de Previsão para o Ibovespa dentro da amostra

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,000000226	9971,85	0,5660
GARCH (1,2)	0,000000223	10138,22	0,6379
EGARCH (2,1,1)	0,000000228	10969,12	0,6267
IGARCH (1,1)	0,000000226	10377,42	0,6363
TGARCH (1,3,1)	0,000000221	10350,16	0,6342
Volatilidade Estocástica	0,000002365	20360,80	0,7657
Combinação MQO	0,000000209	9284,45	0,5108
Combinação Média	0,000000286	9309,62	0,5708
Combinação Móvel	0,000000210	8921,58	0,5334

Fonte: Elaborado pelo autor

O modelo individual com melhor resultado, segundo a medida MSE, é o TGARCH. Quando compara-se este modelo com as técnicas de combinação por MQO e móvel obtêm-se um ganho de aproximadamente 12,3% e 10,1%, respectivamente, na estatística Theil-U.

Quando realizou-se as previsões para fora da amostra as técnicas de combinação continuaram apresentando resultados superiores aos modelos individuais, mas dentre as

técnicas de combinação a combinação por MQO obteve melhores resultados na medida de acurácia MSE; a combinação por média aritmética apresentou melhores resultados na estatística Theil-U; já a combinação móvel obteve o melhor desempenho na medida de acurácia MAPE – tabela 4.3.

Tabela 4.3: Medidas de Avaliação de Previsão para o Ibovespa fora da amostra.

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,000000259	17,8089	0,5840
GARCH (1,3)	0,000000245	42,4802	0,5069
EGARCH (2,3,1)	0,000000238	29,7530	0,5065
IGARCH (1,3)	0,000000247	34,9430	0,5069
TGARCH (1,3,1)	0,000000252	35,0324	0,5147
Volatilidade Estocástica	0,000000619	125,9719	0,4827
Combinação OLS	0,000000188	8,6516	0,3388
Combinação Média	0,000000240	25,9092	0,4623
Combinação Móvel	0,000000219	9,6403	0,3916

Fonte: Elaborado pelo autor

Tais resultados indicam que as previsões do Índice Ibovespa podem ser feitas através das técnicas de combinação de previsões, pois irão produzir melhores resultados que os modelos individuais utilizados para o período em estudo. Comparando-se o modelo individual com melhor desempenho – modelo EGARCH – com a técnica de combinação *MQO* observa-se um ganho de aproximadamente 16,8% na estatística Theil-U; quando comparado com a técnica de combinação móvel têm-se um ganho de 11,5% e de 4,4% quando comparado a técnica de combinação por média aritmética.

Quando comparado o modelo EGARCH com as técnicas de combinação pela medida de acurácia MSE, novamente, as técnicas de combinação por *MQO* e móvel apresentam ganhos no desempenho.

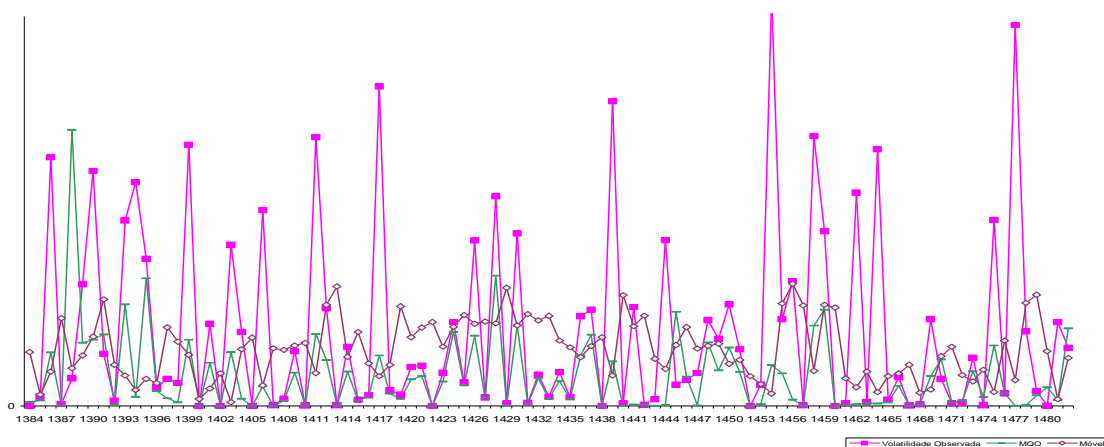
Dentre as técnicas de combinação de previsão a que melhor apresentou resultado em relação aos modelos individuais nas três medidas utilizadas foi a realizada por *MQO*, os pesos encontrados nesta técnica para cada um dos modelos individuais foram de - 0,00004 para a constante; 0,9256 para o modelo GARCH; 3,4868 para o modelo EGARCH; -0,8326 para o IGARCH; 2,5847 para o TGARCH; --0,0235 para o VE; e 1,9755 para o EWMA.

Percebe-se, através dos pesos que o método dos mínimos quadrados ordinários, deu maior peso para o regressor do modelo EGARCH, seguido pelo modelo

IGARCH e em último lugar, com menor influência o modelo VE. Esses resultados mostram que esta técnica de combinação priorizou os modelos individuais detentores das melhores medidas de MSE. O que era de se esperar, pois a técnica por MQO tenta minimizar o MSE.

No entanto, para que se possa identificar qual método pode ser considerado o mais adequado às circunstâncias que geraram a proposta do trabalho, é necessário antes analisar as previsões de ambos as combinações. Para que se possa ter uma maior noção informativa da aderência das técnicas de combinação e dos modelos individuais aos dados da volatilidade observada são apresentados três gráficos com os valores previstos e o observado para cem passos fora da amostra. O Gráfico 4.4 mostra a volatilidade observada no período e as previsões obtidas nas técnicas de combinação e no modelo individual que apresentou o melhor desempenho no critério MSE, levando em consideração a medida de MSE (Modelo EGARCH).

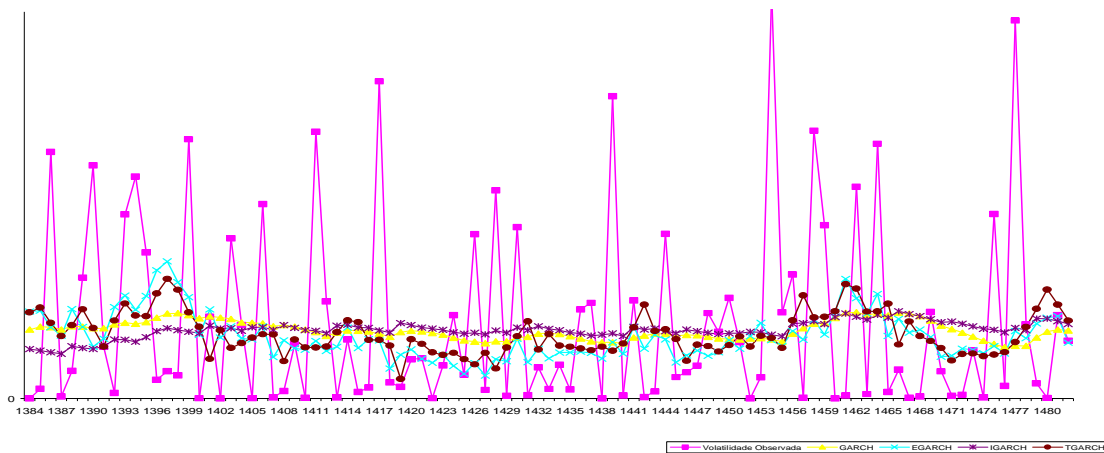
Gráfico 4.4: Previsões das técnicas de combinação e do modelo EGARCH para o índice Ibovespa.



Como pode-se observar no Gráfico 4.4, as técnicas de combinação por MQO e por peso móvel apresentam maior aderência a volatilidade observada, se comparada ao modelo individual.



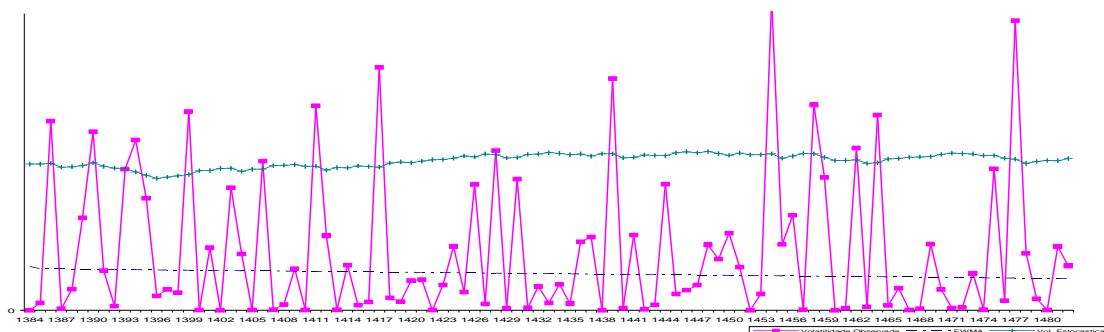
Gráfico 4.5: Previsões dos modelos GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH para o índice Ibovespa.



O gráfico 4.5 tem como finalidade demonstrar a volatilidade observada e as previsões providas dos modelos da família GARCH, para que o leitor possa contratar as mesmas.

Já o gráfico 4.6 traz as previsões dos modelos de volatilidade estocástica e de alisamento exponencial. Como demonstrado na tabela 4.3 os resultados obtidos no modelo individual de volatilidade estocástica são diferentes dos demais modelos apresentados.

Gráfico 4.6: Previsões dos modelos de Volatilidade Estocástica e EWMA para o índice Ibovespa.



#### 4.2.2 Dow Jones

Assim como nos resultados encontrados para o Índice Ibovespa, as previsões do Índice *Dow Jones* sugerem que as técnicas de combinação fornecem resultados superiores aos demais modelos individuais tanto para as previsões realizadas dentro da amostra como para as realizadas fora da amostra. Com exceção da combinação por Média

Aritmética que não apresentou bons resultados se comparada aos modelos da família GARCH.

Na tabela 4.4 encontra-se disponível os resultados das previsões dentro da amostra e, novamente, pode-se constatar o ganho na utilização das técnicas de combinação de previsões. Quando se realiza uma comparação das técnicas de combinação – MQO e móvel – com o modelo individual com melhor resultado, segundo o MSE, o EGARCH observa-se um ganho de acurácia nas três medidas de acurácia adotadas neste trabalho. O ganho obtido das combinações por MQO e móvel na estatística Theil-U foi de, aproximadamente, 10,9% e 7,1%, respectivamente.

Tabela 4.4: Medidas de Avaliação de Previsão para o Dow Jones dentro da amostra

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,000000207	7320,61	0,8383
ARCH (3,0)	0,000000042	1742,35	0,5485
GARCH (1,2)	0,000000042	1200,50	0,5274
EGARCH (2,1,1)	0,000000040	1789,50	0,5080
IGARCH (1,1)	0,000000043	1161,15	0,5258
TGARCH (2,1,1)	0,000000042	1650,16	0,5080
Volatilidade Estocástica	0,000000635	10499,21	0,8003
Combinação OLS	0,000000032	1115,78	0,3988
Combinação Média	0,000000060	1840,24	0,6478
Combinação Móvel	0,000000039	962,10	0,4363

Fonte: Elaborado pelo autor

Na realização das previsões para fora da amostra ambas as combinações que já haviam mostrado bons resultados para as previsões dentro da amostra também se sobressaem em relações os modelos individuais utilizados. Como pode ser visualizada na tabela 4.5 a combinação por *MQO* apresentou melhor desempenho tanto no MSE quanto na estatística Theil-U e, novamente, a combinação móvel obteve resultado superior as demais técnicas e aos modelos individuais na MAPE.

Na comparação do modelo GARCH com as combinações por *MQO* e móvel encontram-se ganhos na estatística Theil-U de aproximadamente 14,12% e 14,42%, respectivamente. Na comparação com o MSE, novamente, as técnicas de combinação por *MQO* e Móvel apresentam ganhos no desempenho.

Tabela 4.5: Medidas de Avaliação de Previsão para o Dow Jones fora da amostra

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,000000029	716,9588	0,4577
ARCH (5,0)	0,000000031	223,0520	0,5203
GARCH (1,4)	0,000000029	498,4523	0,5071
EGARCH (2,2,1)	0,000000032	791,5010	0,4900
IGARCH (1,4)	0,000000030	819,7119	0,4785
TGARCH (2,1,1)	0,000000030	1180,5327	0,4579
Volatilidade Estocástica	0,000000576	1135,2173	0,8116
Combinação OLS	0,000000022	262,5872	0,3659
Combinação Média	0,000000033	313,3247	0,4566
Combinação Móvel	0,000000025	306,9872	0,3629

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir de tais resultados pode-se concluir que as previsões do Índice *Dow Jones* podem ser feitas através das técnicas de combinação de previsões, pois irão produzir resultados melhores que as previsões individuais para o período em estudo.

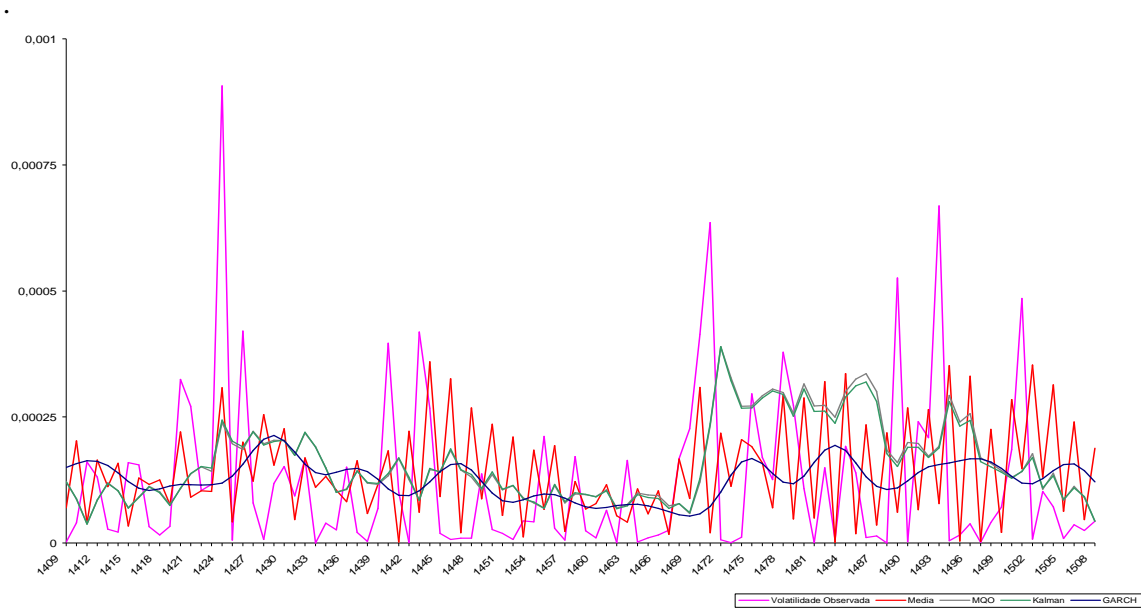
Ambas as técnicas de combinação – móvel e por MQO – apresentaram resultados superiores em relação aos modelos individuais nas três medidas utilizadas. Na combinação realizada por *MQO*, os pesos encontrados para cada um dos modelos individuais foram de -0,00001 para a constante; 0,2676 para o modelo ARCH; 1,8384 para o modelo GARCH; 1,2236 para o modelo EGARCH; 0,0807 para o IGARCH; -0,0345 para o TGARCH; -0,0125 para o VE; e 0,2349 para o EWMA.

Novamente, percebe-se que a técnica de combinação por MQO deu maiores pesos para os regressores com as melhores medidas de MSE. O modelo GARCH que foi considerado seguindo a técnica de MSE como o melhor modelo individual recebeu o maior peso para a estimação por mínimos quadrados, seguido pelo modelo TGARCH e em último lugar, com menor influência o modelo VE.

Já na combinação móvel os pesos encontrados para cada um dos modelos individuais para o décimo passo foram de 0,00000 para a constante; 0,2623 para o modelo ARCH; 1,8113 para o modelo GARCH; 1,0958 para o modelo EGARCH; 0,0797 para o IGARCH; -0,0120 para o TGARCH; -0,0103 para o VE; e 0,3093 para o EWMA. Nota-se que a combinação por filtro de Kalman apresentou pesos muito próximos dos observados na técnica de combinação por MQO.

Novamente, serão apresentados ao leitor os gráficos com os valores previstos e o observado para dez passos fora da amostra. O Gráfico 4.7 mostra a volatilidade observada no período e as previsões obtidas nas técnicas de combinação e no modelo individual que apresentou o melhor desempenho, levando em consideração a medida de MSE (Modelo GARCH).

Gráfico 4.7: Previsões das técnicas de combinação e do modelo GARCH para o índice Dow Jones.



Como pode-se observar no Gráfico 4.7, as técnicas de combinação por MQO e por peso móvel apresentam maior aderência a volatilidade observada, se comparada ao modelo individual.

O gráfico 4.8 informa a aderência das previsões provindas dos modelos da família GARCH a volatilidade observada. Pode-se visualizar que o modelo GARCH e o ARCH, diferentemente dos outros modelos, demonstram maior aderência a série observada.

Gráfico 4.8: Previsões dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH para o índice Dow Jones.

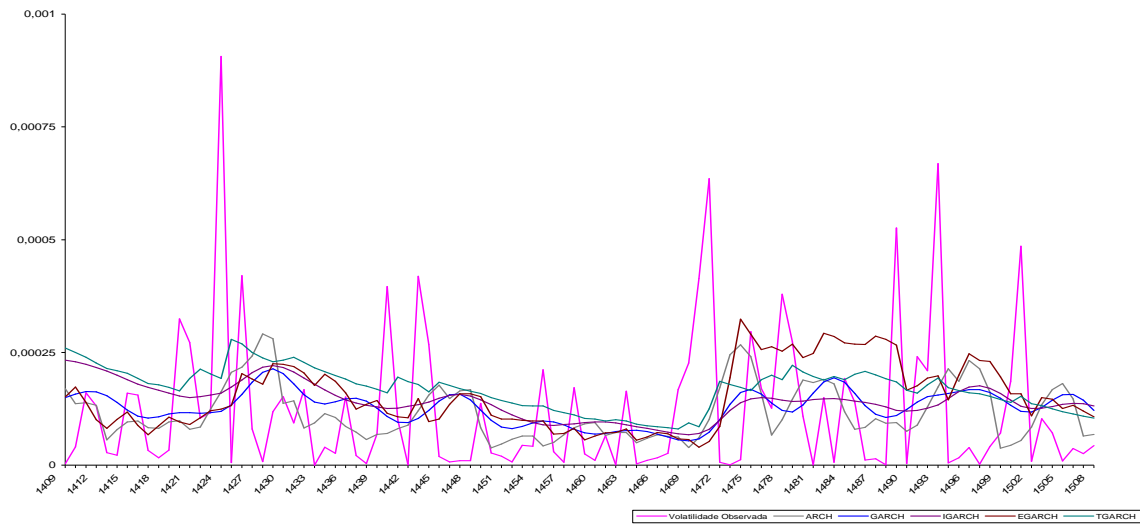
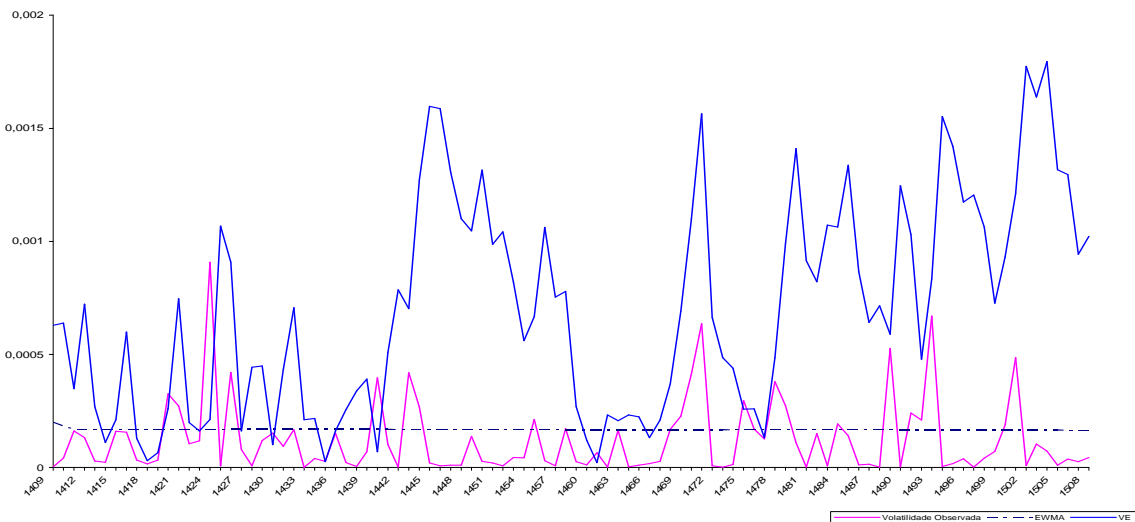


Gráfico 4.9: Previsões dos modelos de Volatilidade Estocástica e EWMA para o índice Dow Jones.



O gráfico 4.9 traz as previsões dos modelos de volatilidade estocástica e de alisamento exponencial. Como pode ser observado ambos os modelos apresentaram resultados distintos dos demais modelos individuais aqui apresentados. Este gráfico também chama a atenção para os resultados encontrados na técnica de combinação por média aritmética – gráfico 4.7, pois ao visualizar-se a previsão provinda do modelo de volatilidade estocástica nota-se a influência do modelo sobre a combinação da mesma.

### 4.2.3 Índice Geral de Preços - Mercado

Ao realizar-se a comparação dos resultados obtidos nas previsões dentro e fora da amostra dos modelos individuais e das técnicas de combinação para o IGP-M pode-se concluir que, novamente, todas as técnicas de combinação apresentaram resultados superiores aos modelos individuais em todas as medidas utilizadas neste trabalho. E que a combinação por *MQO* apresentou melhor desempenho entre as técnicas de combinação utilizadas para todas as medidas de acurácia utilizadas neste trabalho.

Como pode ser visualizada na tabela 4.6 a combinação por *MQO* apresentou melhor desempenho nas três medidas de avaliação utilizadas. Quando se realiza uma comparação das três técnicas de combinação com o modelo individual com melhor resultado, segundo o MSE, o EGARCH observa-se um ganho de acurácia nas três medidas de acurácia adotadas neste trabalho. O ganho obtido pelas técnicas de combinação na estatística Theil-U foi de 51,4% pela combinação por *MQO*, de 50,5% pela combinação móvel e de 44,0% pela combinação por média aritmética.

Tabela 4.6: Medidas de Avaliação de Previsão para o IGP-M dentro da amostra

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,0000836	372,80	0,5310
ARCH	0,0000844	300,50	0,9785
GARCH (1,2)	0,0000842	300,26	0,9752
EGARCH (2,1,1)	0,0000824	300,97	0,9217
IGARCH (1,1)	0,0000842	300,25	0,9741
Volatilidade Estocástica	0,0000775	365,77	0,5154
Combinação OLS	0,0000418	124,73	0,4072
Combinação Média	0,0000768	161,24	0,4812
Combinação Móvel	0,0000701	182,21	0,4170

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao realizarem-se as previsões para fora da amostra não se encontra resultados diferentes das realizadas para dentro da amostra, com exceção do melhor modelo individual, segundo o critério do MSE, que neste caso foi o modelo ARCH. Como pode ser visualizada na tabela 4.7 os ganhos alcançados na utilização da técnica de combinação por *MQO* é superior as demais técnicas e modelos utilizados. O ganho obtido pelas técnicas de combinação na estatística Theil-U foi de 51,4% pela combinação por *MQO*, de 50,5% pela combinação móvel e de 44,0% pela combinação por média aritmética.

Tabela 4.7: Medidas de Avaliação de Previsão para o IGP-M fora da amostra

Modelos	MSE	MAPE	Theil-U
EWMA	0,0000580	534,7439	0,5481
ARCH	0,0000237	196,3832	0,8821
GARCH (1,2)	0,0000253	201,2860	0,9128
EGARCH (2,1,1)	0,0000252	207,4048	0,8977
IGARCH (1,1)	0,0000262	204,0673	0,9429
Volatilidade Estocástica	0,0000578	506,9896	0,5604
Combinação OLS	0,0000065	123,3306	0,3991
Combinação Média	0,0000200	195,7103	0,5399
Combinação Móvel	0,0000109	155,6443	0,4069

Fonte: Elaborado pelo autor

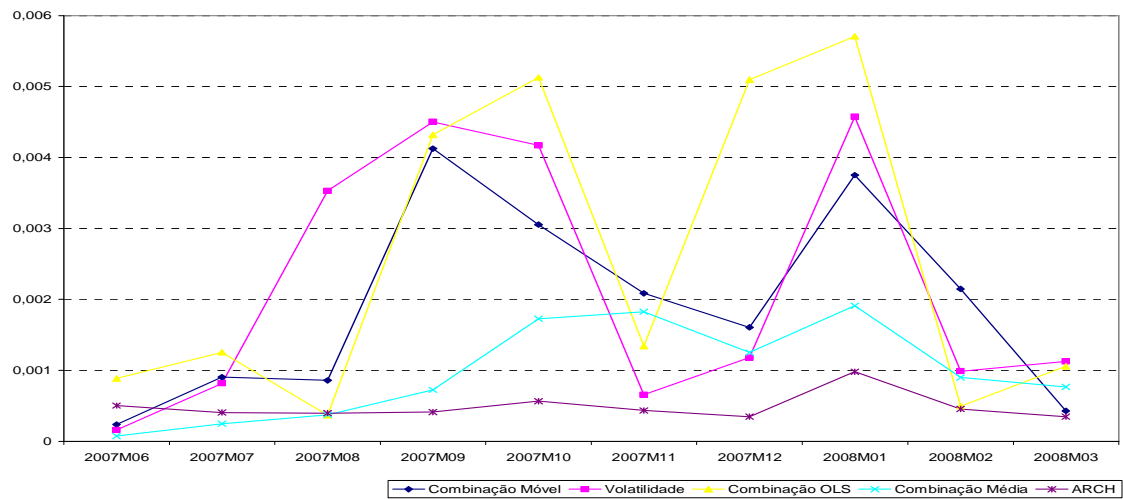
Tais resultados indicam que as previsões da volatilidade do IGP-M também podem ser realizadas através de combinação de previsões, tais como o índice Ibovespa e o *Dow Jones*, para o período em estudo.

Na combinação realizada por MQO, os pesos encontrados para cada um dos modelos individuais foi: -0,00429 para a constante; 32,697 para o modelo ARCH; -676,881 para o modelo GARCH; -0,2828 para o modelo EGARCH; 610,984 para o IGARCH; 0,2814 para o VE; e 0,6836 para o EWMA.

Nesta série a técnica de combinação por MQO deu maiores pesos para os regressores da família GARCH, que apresentaram melhores resultados na medida MSE. Diferentemente das séries anteriores o modelo com maior peso não foi o que apresentou a melhor medida de MSE entre os individuais.

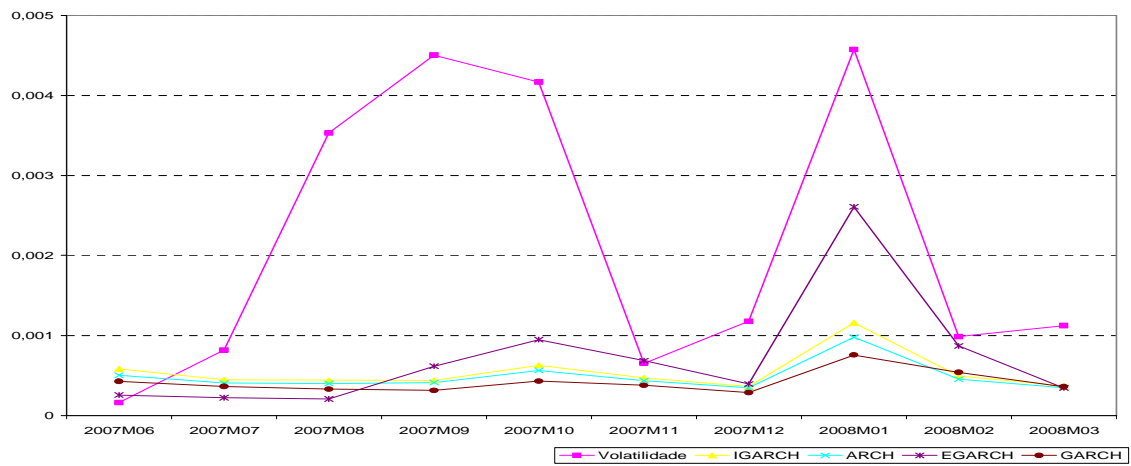
Serão apresentados ao leitor os gráficos com os valores previstos e o observado para dez passos fora da amostra – equivalente ao período de maio de 2007 a março de 2008. O Gráfico 4.10 mostra a volatilidade observada no período e as previsões obtidas nas técnicas de combinação e no modelo individual que apresentou o melhor desempenho, levando em consideração a medida de MSE (Modelo ARCH).

Gráfico 4.10: Previsões das técnicas de combinação e do modelo ARCH para o IGP-M



Como pode ser observado no Gráfico 4.10, todas as técnicas de combinação de previsão apresentam maior aderência a volatilidade observada, se comparada ao modelo individual incluído no gráfico.

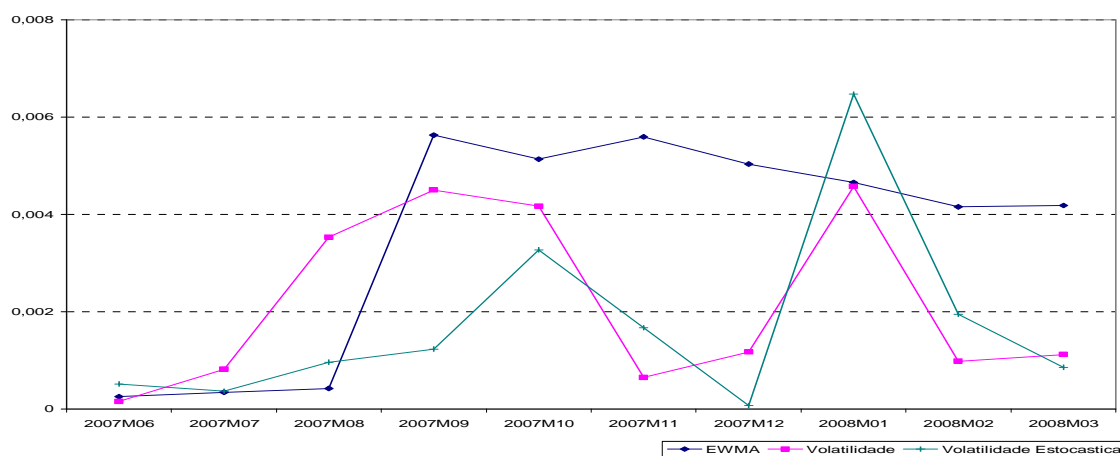
Gráfico 4.11: Previsões dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH e EGARCH para o IGP-M.



O gráfico 4.11 informa as previsões provindas dos modelos da família GARCH e a volatilidade observada.



Gráfico 4.12: Previsões dos modelos de Volatilidade Estocástica e EWMA para o IGP-M.



O gráfico 4.12 traz as previsões dos modelos de volatilidade estocástica e de alisamento exponencial. Como pode ser observado ambos os modelos apresentaram resultados distintos dos demais modelos individuais aqui apresentados.

### 4.3 Considerações Finais

Após a realização de todos os testes e de analisar os resultados obtidos para ambas as séries, observou-se que a combinação por *MQO* proposta por Granger e Ramanathan (1984) obteve um bom desempenho na tarefa de previsão de séries temporais. Em todos os testes realizados, seja considerando a estatística Theil-U, o MAPE ou o MSE, a combinação mostrou-se bastante eficiente, tendo em todos os casos, obtido medidas de erro para as previsões dentro e fora da amostra melhores do que os obtidos pelos modelos individuais. O fato da técnica de combinação por *MQO* apresentar melhores resultados referentes ao mínimo do MSE apenas confirma a proposta do método que é minimizar os erros quadráticos. O que chama a atenção é o fato da técnica também obter resultados satisfatórios nas outras medidas de acurácia quando comparado com os modelos individuais.

Outro fator importante constatado neste trabalho referente às técnicas de combinação foi o seu desempenho em relação à volatilidade das três séries em estudo. Constatou-se que a técnica de combinação móvel apresenta melhores resultados quando a série é mais volátil – Ibovespa – e, a combinação por *MQO* quanto menor for a volatilidade presente na série – inflação.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma comparação entre os modelos individuais e as técnicas de combinação de previsão. Os modelos individuais utilizados foram: o Alisamento Exponencial (EWMA); alguns dos modelos da Família GARCH; e o modelo de Volatilidade Estocástica proposto por Taylor (1986). E as técnicas utilizadas foram a combinação por MQO – técnica C – proposta por Granger e Ramanathan (1984), a combinação por média aritmética proposta por Gupta e Wilton (1987) e a combinação com pesos móveis apresentada por Terui e Djik (2002). Os resultados encontrados mostraram a acurácia das técnicas de combinação em comparação com os modelos individuais na tarefa de realizar previsões mais acuradas.

A relevância da metodologia proposta deve-se, especialmente ao fato de que os resultados obtidos são testados dentro e fora da amostra em todos os casos, e são melhores do que os obtidos pelos demais modelos que foram testados para realizar a mesma tarefa. Em geral, as técnicas de combinação, analisando os resultados obtidos pelas medidas de acurácia, fornecem modelos muito bons que se ajustam aos dados se comparados aos resultados provindos das previsões individuais.

Com destaque para a técnica de combinação por MQO que apresentou bons resultados relativa a todas as séries estudadas.

As técnicas de combinação foram testadas para realizar previsões nas comparações dos resultados obtidos pelos modelos univariados para a série de retornos do Índice Ibovespa e para o índice Dow Jones para o período de 02 de janeiro de 2002 a 31 de

dezembro de 2007. E na comparação dos resultados obtidos pelos modelos univariados para a série do IGP-M para o período de janeiro de 1995 a março de 2007.

A partir da realização destes experimentos, conclui-se que a construção de técnicas de combinação de previsões mostrou-se bastante eficiente na tarefa de previsão. Os resultados obtidos foram comparados a outros modelos de previsão utilizando como comparação as medidas de acurácia – MSE, MAPE e estatística Theil-U. Em todas as séries estudadas as técnicas de combinação por MQO e móvel mostraram-se ser boas alternativas para obter as previsões de volatilidade, pois apresentaram resultados com menores erros de predição para dentro ou fora da amostra relativamente aos demais modelos estudados nesta dissertação.

Como sugestão para trabalhos futuros sugere-se o estudo da utilização de modelos multivariados para a realização das previsões dos modelos individuais, poderia ser uma boa estratégia para a obtenção de modelos com medidas de acurácia melhores, porém isto poderia acarretar um custo computacional elevado. Também seria interessante a realização e análise do desempenho preditivo dos vários modelos individuais e técnicas de combinação para diferentes horizontes de tempos, pois cada modelo pode revelar-se melhor para um horizonte temporal.

Outra sugestão seria a testar formalmente se as diferenças de capacidade preditiva observadas são estatisticamente significantes, por exemplo, a construção do teste Diebold e Mariano (1985) ou extensões deste teste.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANDER, C. Modelos de Mercados: Um Guia Para a Análise de Informações Financeiras. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005.

ARMSTRONG, J. S. Principles for Forecasting: A handbook for Researchers and Practitioners. Kluwer Academic Publishers. 2004.

ARMSTRONG, J. S.; COLLOPY, F. Integration of Statistical Methods and Judgment of Time Series Forecasting: Principles for Empirical Research. In: Reproduced with permission from G. Wright and P. Goodwin (eds.), Forecasting with Judgment, John Wiley & Sons Ltd., 1998, 269-293.

AKSU, C.; GUNTER, S. I. An empirical analysis of the accuracy of SA, OLS, ERLS and NRLS combination forecasts. International Journal of Forecasting. Vol. 8, n. 1 (1986), p. 27-43.

BATES J. M.; GRANGER C. W. J. The Combination of Forecasts. Operations Research Quarterly. Vol. 20 (1969), p. 451-468.

BESSLER, D. A.; BRANDT, J. A. Forecasting Livestock Prices With Individual and Composite Methods. Applied Economics. Vol. 13 (1981), p. 513-522.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Journal of Econometrics. Vol. 31, 1986, p.303-327.

BOLLERSLEV, T.; WOOLDRIDGE, J. M. Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances. *Econometric Reviews*, Vol.11, n.2 (1992), p.143-172.

BUNN, D. W. A Bayesian approach to the linear combination of forecasts. *Operational Research Quarterly*, Vol. 26, (1975), 325-329.

CLEMENTS, M. P.; HENDRY, D. F. Pooling of Forecasts. *Econometrics Journal*. Vol. 7 (2004), p. 1-31.

CLEMER, R.T. Linear Constraints and the Efficiency of Combined Forecasts. *Journal of Forecasting*. Vol. 5 (1989), p.31-38.

CLEMER, R.T.; WINKLER, R.L. Combining Economic Forecasts. *Journal of Business & Economic Statistics*. Vol. 4 (1989), p. 39-46.

COSTA, P. H. S. Séries de Retornos de Ações Brasileiras: Volatilidade e Valor em Risco. Tese de Doutorado. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Industrial (2001).

DIEBOLD, F.X. *Elements of Forecasting*. South-Western College Publishing. Cincinnati (1998), p.349-352.

DIEBOLD, F. X.; LOPEZ, J. A. Forecast Evaluation and Combination. Federal Reserve Bank of New York. Research Paper N°. 9525 (1996).

ENGLE, R.; BOLLERSLEV, T; NELSON, D. ARCH Model. *Handbook of Econometrics*. Vol. 4 (1994), p. 2961-3040.

BROOKS, C. *Introductory Econometrics for Finance*. New York: Cambridge University Press, 2002.

CARBONE, R.; ARMSTRONG, J. S. Evaluation Extrapolative Forecasting Methods Results of Survey of Academicians and Practitioners. *Journal of Forecasting*. Vol. 1, n. 2 (1982), p. 215-217.

CLEMER, R.T. Combining Forecasts: A Review and Annotated Bibliography. *International Journal of Forecasting*. Vol.5, 1989, p.559-583.

- DEUTSCH, T.; LEHMANN, E. D.; CARSON, E. R.; SÖNKSEN, P.H. Combining Rule-Based Reasoning and Mathematical Modelling in Diabetes Care. *Medical Informatics & The Internet in Medicine*, 1994
- EDMUNDSON, B.; O'CONNOR, M. Forecasting Support Systems for the Incorporation of Event Information: an Empirical Investigation. *International Journal of Forecasting*. Vol. 21 n. 3 (2004), p. 411-423.
- ELLIOTT, G.; TIMMERMANN, A. Optimal Forecast Combinations Under General Loss Functions and Forecast Error Distributions. *Journal of Econometrics*. Vol. 122 (2004), p. 47-79.
- ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With Estimates of the variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*. Vol. 50 (1982), p. 987-1007.
- ENGLE, R. F.; BOLLERSLEV, T. Modelling the Persistence of Conditional Variances. (with discussion). *Econometrics Reviews*. Vol. 5 (1986), p. 1-50, 81-87.
- ENGLE, R. F.; LEE, G.G. J., "Estimating Diffusion Models of Stochastic Volatility", In: ROSSI, P. E., *Modelling Stock Market Volatility: Bridging the Gap to Continuous Time*, Academic Press, San Diego, (1996)
- ENGLE, R. F.; LILIEN, D. M.; ROBINS, R. P. Estimating Time-Varying Risk Premia in The Term Structure: the ARCH-M Model. *Econometrica*. Vol. 55 (1987), p. 391-408.
- ENGLE, R. F.; NG, V. K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance*. Vol. 48 (1993), p. 1749-78.
- ESTEVEZ, P. Modelling Taylor Rule Uncertainty: an Application to the Euro Area. *Economic Modelling* Forthcoming. Lisboa (2003).
- GABE, J.; PORTUGAL, M. S. Volatilidade Implícita Versus Volatilidade Estatística: Uma Avaliação para o Mercado Brasileiro a Partir dos Dados de Opções e Ações da Telemar S.A.
- GLOSTEN, L.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. On the Relation Between the Expected Value and Volatility of Nominal Excess Returns on Stocks. *Journal of Finance*, Vol. 46 (1993), 1779-801.

GRANGER, C. W. J. Invited Review Combining Forecasts – Twenty Years Later. *Journal of Forecasting*. Vol. 8 (1989), p. 167-173

GRANGER, C. W. J.; RAMANATHAN, R. Improved Methods of Combining Forecasts. *Journal of Forecasting*. Vol. 3 (1984), p. 197-204

GUPTA, S.; WILTON, P. C. Combination of Forecasts: An Extension. *Management Science* Vol. 13, n. 3 (1977), p. 356-372.

Holmen, J. S. A Note on The Value of Combining Short-Term Earnings Forecasts. A Test of

Granger and Ramanathan. *International Journal of Forecasting*. Vol. 3, n. 2 (1987), p. 239-243.

MAKRIDAKIS, S.G.; WHEELWRIGHT, S.C.; HYNDMAN, R.J. *Forecasting: Methods And Applications*. 3 ed. New York: John Willey & Sons, 1998.

MAKRIDAKIS, S.G.; WINKLER, R. L. Averages of Forecasts: Some Empirical Results. *Management Science* Vol. 29, n. 9 (1983), p. 987-996.

MATHWORKS. Garch Toolbox User's Guide (2002). Disponível em: [www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf\\_doc/garch/garch.pdf](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/garch/garch.pdf). Acesso em: 10 de maio de 2007.

MENEZES, L. M., BUNN, D. W.; TAYLOR, J. W. Review of Guidelines for the Use of Combined Forecasts. *European Journal of Operational Research*. Vol. 120, n.1 (2000), p. 190-204.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. de C. Modelos para Previsão de Séries Temporais. In: *Colóquio Brasileiro de Matemática*, 13º, 1981, Poços de Caldas – MG, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

NELSON, D. Conditional Heteroskedasticity in Assets Returns: A New Approach. *Econometrica*. Vol. 59 (1991), p. 347-370.

NELSON, D. Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory*. Vol. 6 (1991), p. 318-34.

NELSON, D. ARCH Models as Diffusion Approximations. *Journal of Econometrics*. Vol. 45 (1990), p. 7-38.

NEWBOLD, P.; GRANGER, C. W. J. Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecasts. *Journal of the Royal Statistical Society*. Vol. 137 (1974), p. 131-165.

SANDERS, N. R.; RITZMAN, L. P. Judgmental Adjustment of Statistical Forecasts. In: ARMSTRONG, J. S. *Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners*. Kluwer Academic Publishers, 2001.

TAYLOR, S. J. *Modeling Financial Time Series*. New York: John Wiley (1986)

TAYLOR, S. J.; BUNN, D. W. A Quantile Regression Approach to Generating Prediction Intervals. *Management Science*, Vol. 45, n. 2 (1999), p. 225-237.

TERUI, N. DIJK, H. K. Combined Forecasts From Linear and Nonlinear Time Series Models. *International Journal of Forecasting*. Vol. 18, n. 3 (2002), p. 421-438.

VOITURIEZ, T. What Explains Price Volatility Changes in Commodity Markets? Answers From the World Palm-oil Market. *Agricultural Economics*, Vol. 25 (2001), p. 295-301.

WINKLER, R. L. Combining Forecasts: A Philosophical Basis and Current Issues. *International Journal of Forecasting*. Vol. 5, (1989), p. 605-609.

ZIEGELMANN, F. A.; PEREIRA, P. L. V. Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação Temporal: Um Estudo Empírico para o Índice Ibovespa. *Política e Planejamento Econômico*. Vol. 27 (1997), p. 353-376.

ZOU, H.; YANG, Y. Combining Time Series Models for Forecasting. *International Journal of Forecasting*, Vol. 20, n. 1 (2004), p. 69-84.



## APÊNDICE A – GRÁFICOS DAS SÉRIES UTILIZADAS

Gráfico A.1: Série de pontos do Ibovespa diário

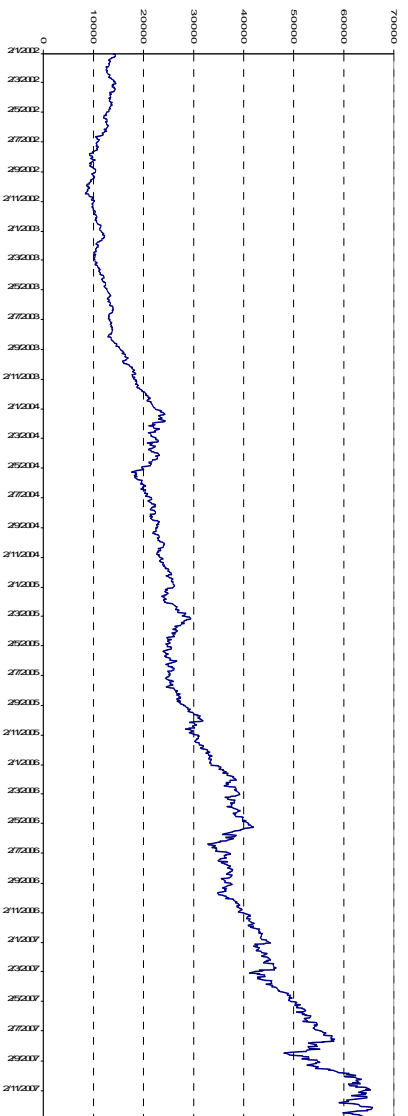
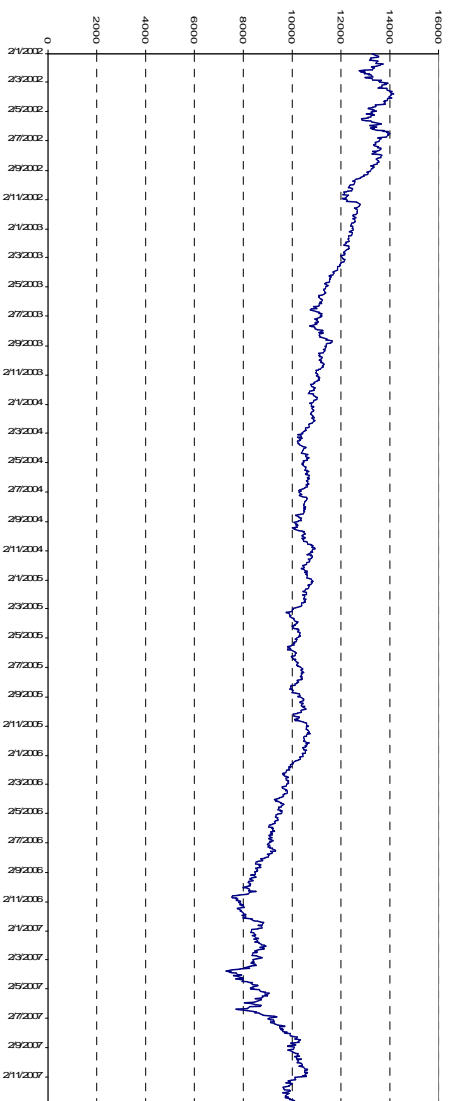


Gráfico A.2: Série de pontos do Dow Jones diário



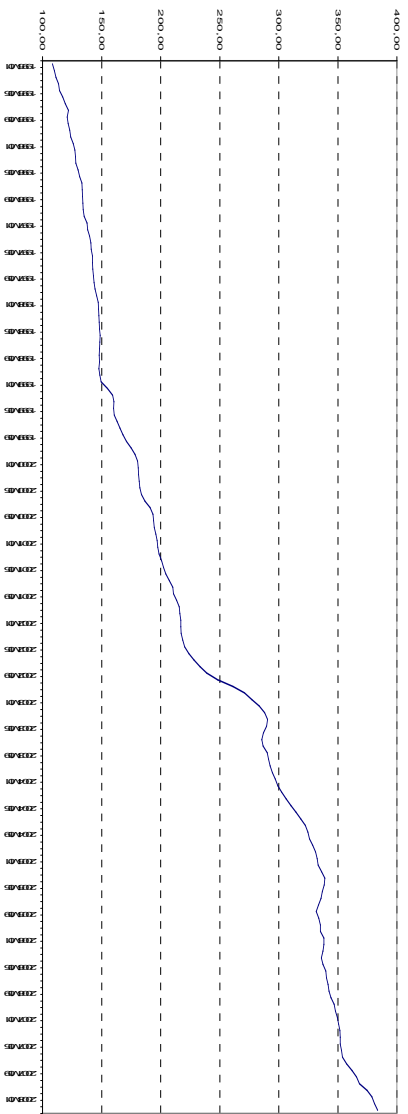


Gráfico A.3: Série do IGP-M mensal

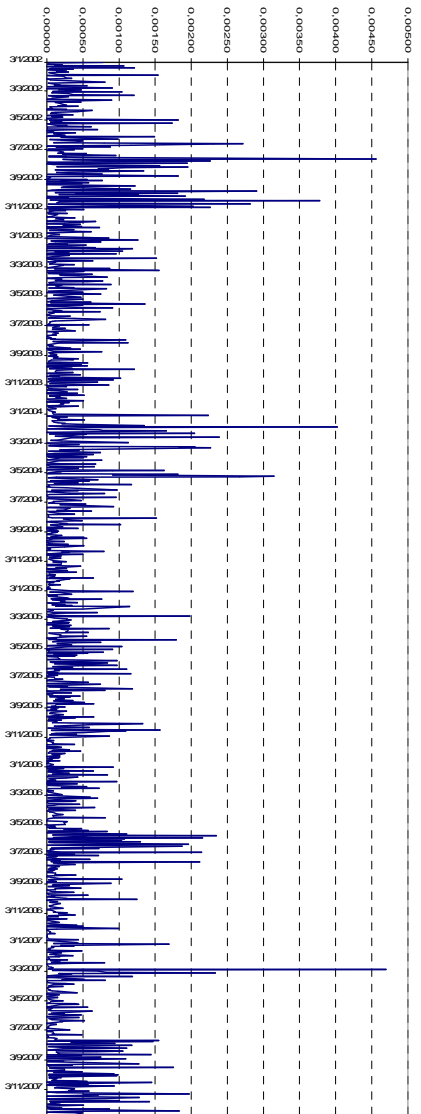


Gráfico A.4: Série de retornos ao quadrado do Ibovespa diário

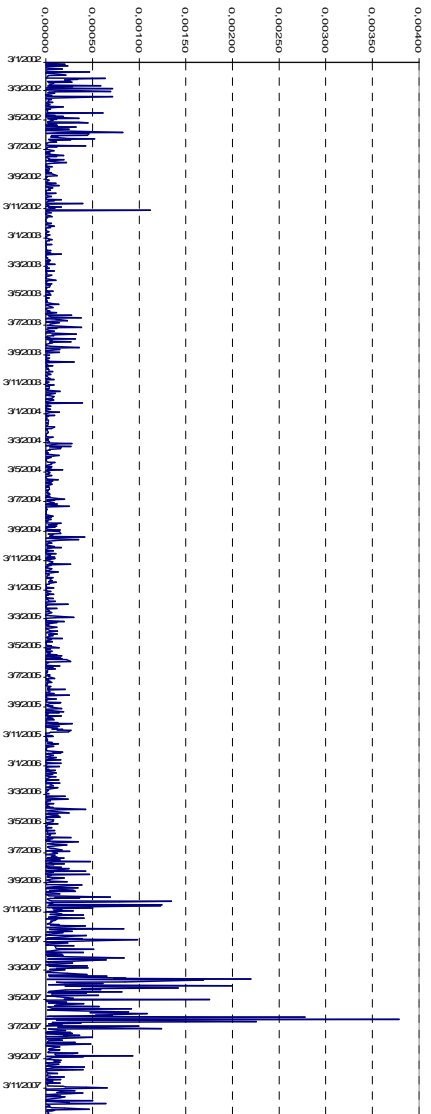


Gráfico A.5: Série dos retornos ao quadrado Dow Jones diário

Gráfico A.6: Série dos retornos ao quadrado do IGP-M mensal

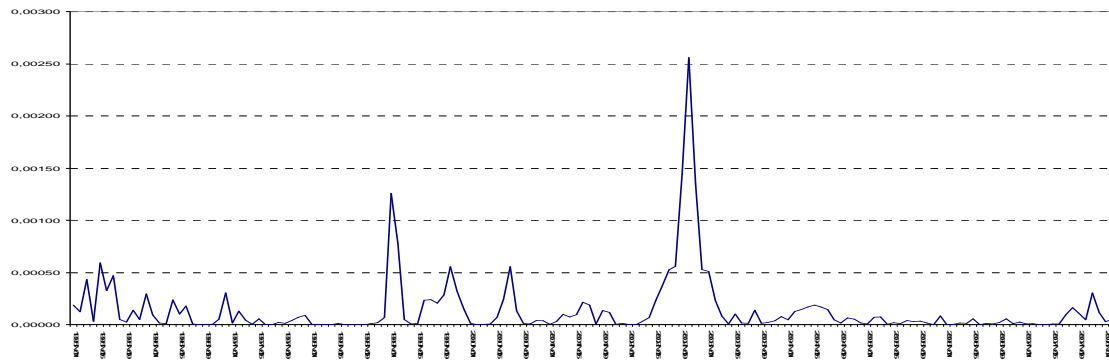


Gráfico A.7: Previsões para dentro da amostra as técnicas de combinação de previsões para o índice IBOVESPA.

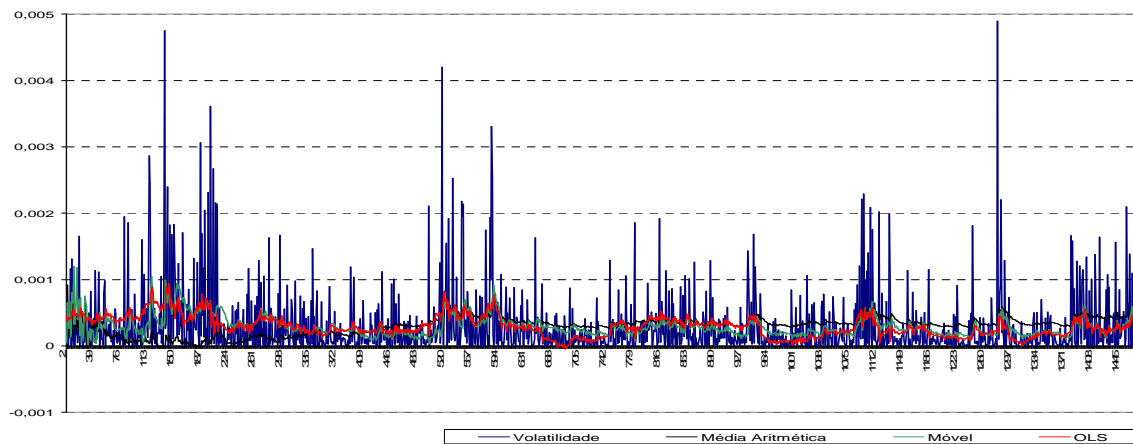


Gráfico A.8: Previsões para dentro da amostra dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH para o índice IBOVESPA.

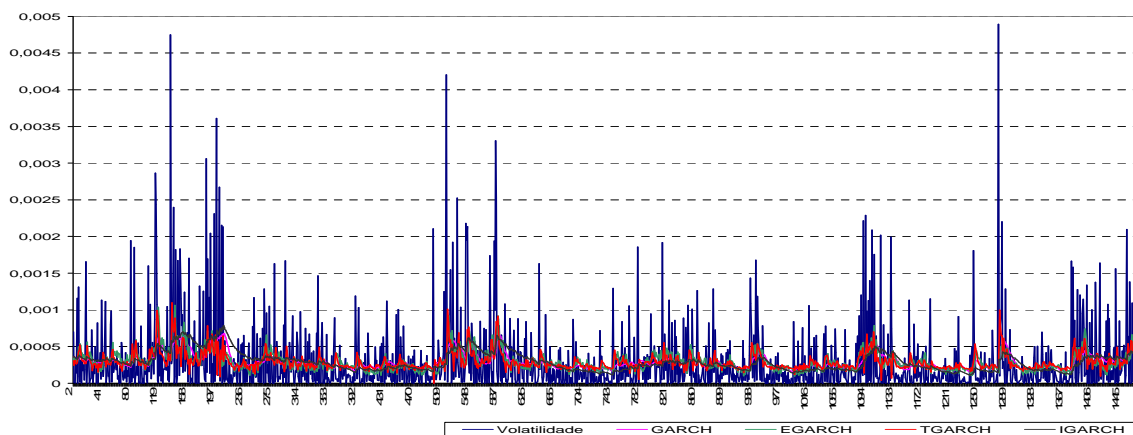


Gráfico A.9: Previsões para dentro da amostra dos modelos EWMA e Volatilidade Estocástica para o índice IBOVESPA.

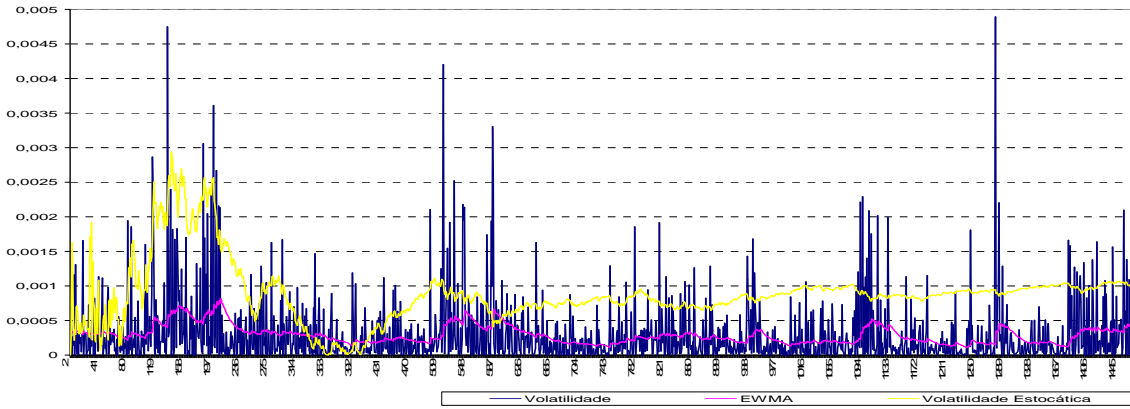


Gráfico A.10: Previsões para dentro da amostra as técnicas de combinação de previsões para o índice Dow Jones.

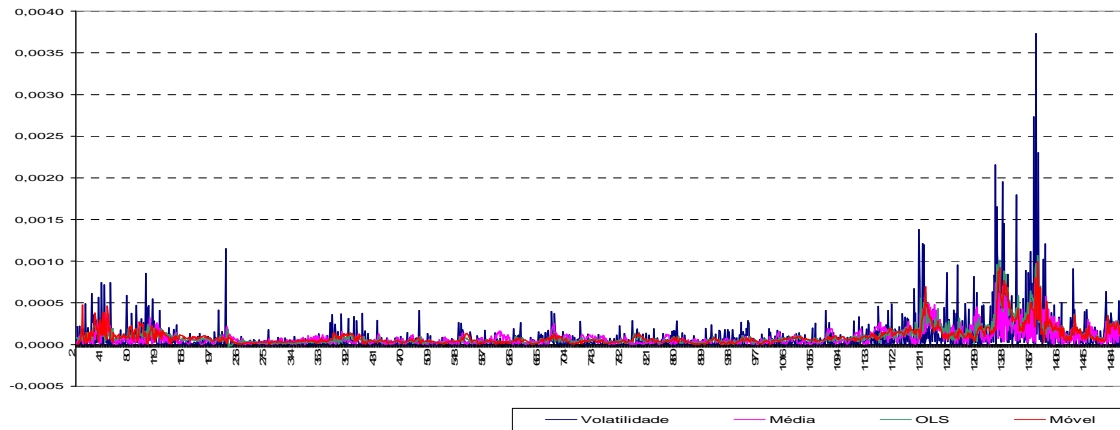


Gráfico A.11: Previsões para dentro da amostra dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH para o índice IBOVESPA.

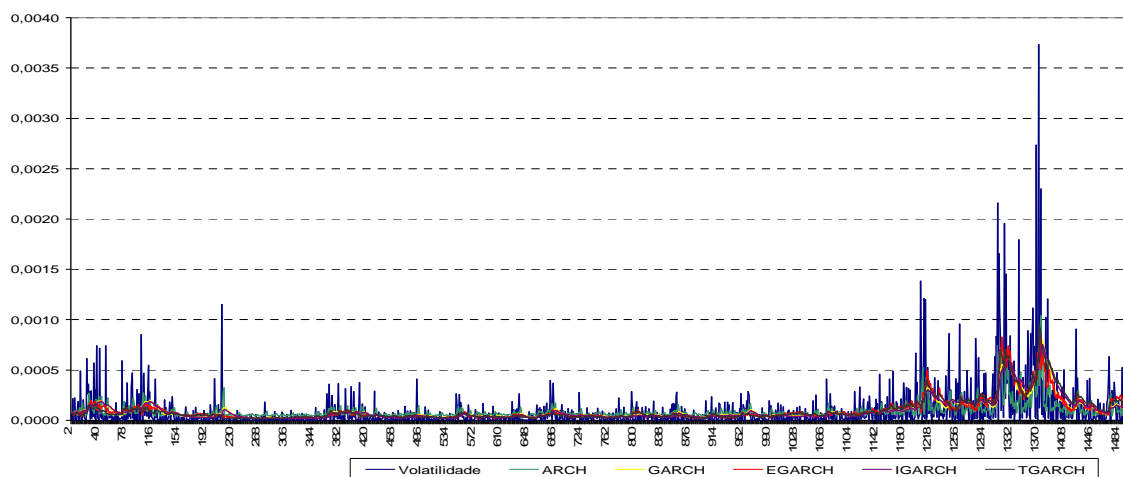


Gráfico A.12 Previsões para dentro da amostra dos modelos EWMA e Volatilidade Estocástica para o índice Dow Jones.

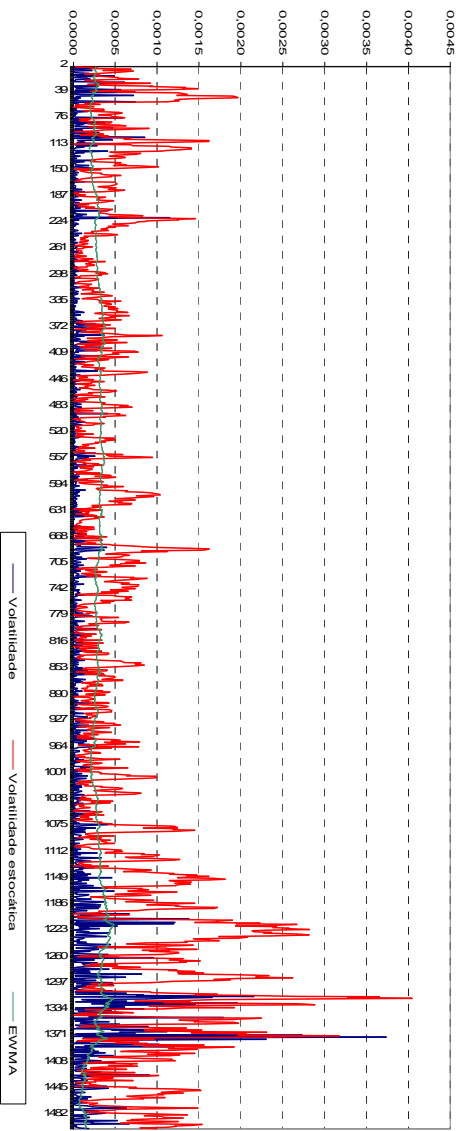


Gráfico A.13: Previsões para dentro da amostra as técnicas de combinação de previsões para o IGP-M.

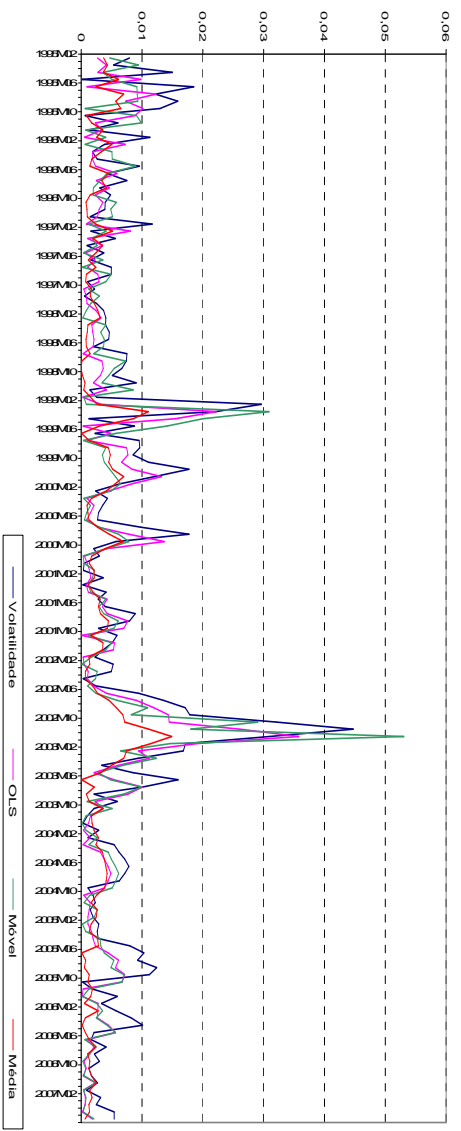


Gráfico A.14: Previsões para dentro da amostra dos modelos ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH e TGARCH para o índice IGP-M.

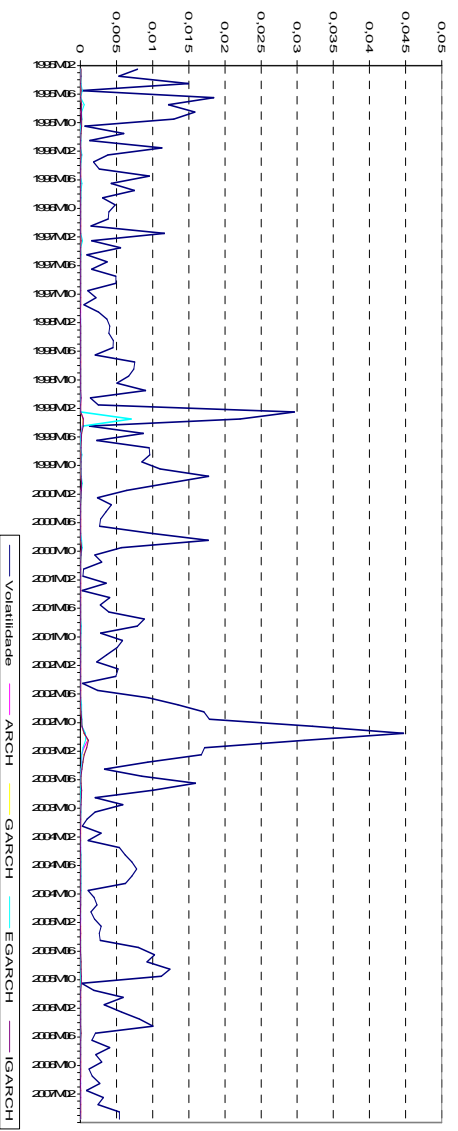
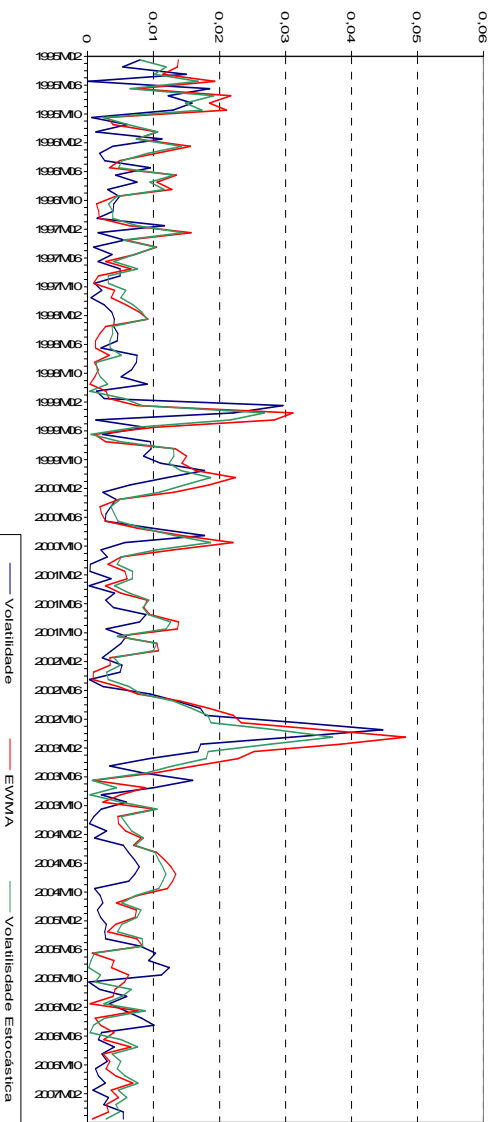


Gráfico A.15: Previsões para dentro da amostra dos modelos EWMA e Volatilidade Estocástica para o IGP-M.



## APÊNDICE B – RESULTADOS DAS RESGRESSÕES

Tabela B.1: Estatísticas do Índice Ibovespa e do Índice Dow Jones

Modelos		IBovespa			Dow Jones		
		Estatístic	Akaïke	Schwarz	Estatístic	Akaïke	Schwarz
ARCH (1,0)	Resid (-1)	0,1118	-5,3134	-5,3020	0,0000	-6,4522	-6,4416
ARCH (2,0)	Resid (-1)	0,3555	-5,3372	-5,3182	0,0000	-6,5117	-6,4976
	Resid (-2)	0,0132			0,0000		
ARCH (3,0)	Resid (-1)	0,5579	-5,3372	-5,3182	0,0022	-6,6049	-6,5872
	Resid (-2)	0,0044			0,0000		
	Resid (-3)	0,0000			0,0000		
ARCH (4,0)	Resid (-1)	0,8952	-5,3432	-5,3205	0,0000	-6,6520	-6,6308
	Resid (-2)	0,0041			0,0156		
	Resid (-3)	0,0000			0,0000		
	Resid (-4)	0,0131			0,0000		
ARCH (5,0)	Resid (-1)	0,9114	-5,3490	-5,3225	0,0000	-6,6792	-6,6544
	Resid (-2)	0,0072			0,0256		
	Resid (-3)	0,0000			0,0001		
	Resid (-4)	0,0122			0,0000		
	Resid (-5)	0,0034			0,0000		
GARCH (1,1)	Resid (-1)	0,0081	-5,3659	-5,3469	0,0075	-6,7232	-6,7090
	GARCH (-1)	0,0001			0,0000		
GARCH (1,2)	Resid (-1)	0,0140	-5,3643	-5,3378	0,0245	-6,7290	-6,7113
	GARCH (-1)	0,0000			0,0016		
	GARCH (-2)	0,0000			0,0000		
GARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0091	-5,3656	-5,3429	0,0391	-6,7306	-6,7093
	GARCH (-1)	0,0000			0,0032		
	GARCH (-2)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-3)	0,0000			0,0010		
GARCH (1,4)	Resid (-1)	0,4098	-5,3643	-5,3378	0,0073	-6,7313	-6,7065
	GARCH (-1)	0,2830			0,0000		
	GARCH (-2)	0,7836			0,0000		
	GARCH (-3)	0,9921			0,0000		
	GARCH (-4)	0,9014			0,0000		
GARCH (2,1)	Resid (-1)	0,7165	-5,3678	-5,3488	0,7777	-6,7295	-6,7118
	Resid (-2)	0,0035			0,0000		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
GARCH (2,2)	Resid (-1)	0,7282	-5,3666	-5,3439	0,5531	-6,7312	-6,7099
	Resid (-2)	0,0727			0,0214		

	GARCH (-1)	0,0045			0,00000		
	GARCH (-2)	0,5416			0,0125		
GARCH (2,3)	Resid (-1)	0,6619	-5,3654	-5,3389	0,5197	-6,7316	-6,7068
	Resid (-2)	0,0285			0,0127		
	GARCH (-1)	0,0162			0,0000		
	GARCH (-2)	0,4948			0,0020		
	GARCH (-3)	0,4850			0,0261		
GARCH (2,4)	Resid (-1)	0,6820	-5,3643	-5,3340	0,6573	-6,7303	-6,7020
	Resid (-2)	0,0448			0,1471		
	GARCH (-1)	0,0080			0,0013		
	GARCH (-2)	0,4429			0,2042		
	GARCH (-3)	0,4899			0,4981		
	GARCH (-4)	0,5654			0,7600		
GARCH (3,1)	Resid (-1)	0,7434	-5,3668	-5,3441	0,7541	-6,7320	-6,7107
	Resid (-2)	0,1066			0,3230		
	Resid (-3)	0,3608			0,0035		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
GARCH (3,2)	Resid (-1)	0,7471	-5,3660	-5,3394	0,7718	-6,7311	-6,7063
	Resid (-2)	0,0528			0,4013		
	Resid (-3)	0,0547			0,1873		
	GARCH (-1)	0,6046			0,0032		
	GARCH (-2)	0,2805			0,5512		
GARCH (3,3)	Resid (-1)	0,7447	-5,3646	-5,3344	0,8847	-6,7306	-6,7023
	Resid (-2)	0,0463			0,5248		
	Resid (-3)	0,0282			0,2097		
	GARCH (-1)	0,6739			0,0087		
	GARCH (-2)	0,3587			0,3068		
	GARCH (-3)	0,7682			0,0002		
GARCH (3,4)	Resid (-1)	0,7409	-5,3632	-5,3291	0,7831	6,7304	-6,6985
	Resid (-2)	0,0481			0,7259		
	Resid (-3)	0,0500			0,0170		
	GARCH (-1)	0,6500			0,0000		
	GARCH (-2)	0,4266			0,0000		
	GARCH (-3)	0,8502			0,0000		
	GARCH (-4)	0,9230			0,0002		
GARCH (4,1)	Resid (-1)	0,7256	-5,3659	-5,3393	0,8198	-6,7317	-6,7070
	Resid (-2)	0,0959			0,4017		
	Resid (-3)	0,2442			0,1502		
	Resid (-4)	0,3993			0,1390		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
GARCH (4,2)	Resid (-1)	0,7418	-5,3646	-5,3344	0,8010	-6,7313	-6,7029
	Resid (-2)	0,0678			0,3952		
	Resid (-3)	0,1154			0,0809		
	Resid (-4)	0,7298			0,0157		
	GARCH (-1)	0,6000			0,2819		
	GARCH (-2)	0,5335			0,1853		
GARCH (4,3)	Resid (-1)	0,7425	-5,3631	-5,3291	0,8479	-6,7356	-6,7037
	Resid (-2)	0,1374			0,0030		
	Resid (-3)	0,6159			0,0002		
	Resid (-4)	0,9553			0,0000		
	GARCH (-1)	0,9002			0,0000		
	GARCH (-2)	0,5876			0,0000		
	GARCH (-3)	0,9887			0,0000		
GARCH (4,4)	Resid (-1)	0,8724	-5,3633	-5,3255	0,9143	-6,7349	-6,6994
	Resid (-2)	0,0374			0,1176		
	Resid (-3)	0,0101			0,0008		
	Resid (-4)	0,1922			0,0036		



	GARCH (-1)	0,1264			0,0437		
	GARCH (-2)	0,0179			0,0000		
	GARCH (-3)	0,7696			0,0000		
	GARCH (-4)	0,0259			0,2456		
GARCH (5,1)	Resid (-1)	0,7494	-5,3647	-5,3344	0,8487	-6,7320	-6,7037
	Resid (-2)	0,1015			0,4240		
	Resid (-3)	0,2600			0,1355		
	Resid (-4)	0,3638			0,0464		
	Resid (-5)	0,5701			0,0941		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
GARCH (5,2)	Resid (-1)	0,7444	-5,3632	-5,3291	0,8615	-6,7307	-6,6988
	Resid (-2)	0,0778			0,4257		
	Resid (-3)	0,5006			0,2065		
	Resid (-4)	0,8128			0,1500		
	Resid (-5)	0,9570			0,1223		
	GARCH (-1)	0,7707			0,0873		
	GARCH (-2)	0,7969			0,8651		
GARCH (5,3)	Resid (-1)	0,7433	-5,3619	-5,3240	0,7560	-6,7343	-6,6988
	Resid (-2)	0,1977			0,1424		
	Resid (-3)	0,9236			0,0011		
	Resid (-4)	0,5662			0,0000		
	Resid (-5)	0,2132			0,0384		
	GARCH (-1)	0,0455			0,8627		
	GARCH (-2)	0,4415			0,0027		
	GARCH (-3)	0,6938			0,0000		
GARCH (5,4)	Resid (-1)	0,3044	-5,3787	-5,3371	0,9982	-6,7336	-6,6946
	Resid (-2)	0,0343			0,1636		
	Resid (-3)	0,7848			0,2650		
	Resid (-4)	0,7964			0,1229		
	Resid (-5)	0,2069			0,8572		
	GARCH (-1)	0,0205			0,7152		
	GARCH (-2)	0,4622			0,0524		
	GARCH (-3)	0,9272			0,0007		
	GARCH (-4)	0,4915			0,8630		
EGARCH (1,1)	(C3)	0,0002	-5,3882	-5,3692	0,0000	-6,7999	-6,7813
	(C4)	0,0000			0,0000		
	(C5)	0,0000			0,0000		
EGARCH (1,2)	(C3)	0,0096	-5,3868	-5,3640	0,0279	-6,7519	-6,7606
	(C4)	0,0052			0,0209		
	(C5)	0,0229			0,0001		
	(C6)	0,8820			0,4183		
EGARCH (1,3)	(C3)	0,0052	-5,3890	-5,3623	0,0000	-6,8024	-6,7763
	(C4)	0,0000			0,0000		
	(C5)	0,0000			0,0000		
	(C6)	0,0240			0,0000		
	(C7)	0,0000			0,0000		
EGARCH (1,4)	(C3)	0,0075	-5,3879	-5,3574	0,0048	-6,7971	-6,7763
	(C4)	0,0000			0,0017		
	(C5)	0,0000			0,0001		
	(C6)	0,0105			0,3276		
	(C7)	0,0060			0,6729		
	(C8)	0,3665			0,1496		
EGARCH (2,1)	(C3)	0,0025	-5,4008	-5,3779	0,0002	-6,8168	-6,7945
	(C4)	0,0000			0,0000		
	(C5)	0,0000			0,0000		
	(C6)	0,0000			0,0000		
EGARCH (2,2)	(C3)	0,0029	-5,3971	-5,3730	0,0003	-6,8195	-6,7934

	(C4)	0,0000			0,0000		
	(C5)	0,0000			0,0000		
	(C6)	0,0000			0,0000		
	(C7)	0,6300			0,0162		
EGARCH (2,3)	(C3)	0,0024	-5,4078	-5,3773	0,0003	-6,8193	-6,7895
	(C4)	0,0000			0,0000		
	(C5)	0,0000			0,0000		
	(C6)	0,0000			0,0000		
	(C7)	0,0042			0,0000		
	(C8)	0,0000			0,0003		
EGARCH (2,4)	(C3)	0,0025	-5,4064	-5,3721	0,1495	-6,8064	-6,7729
	(C4)	0,0000			0,0008		
	(C5)	0,0000			0,0000		
	(C6)	0,0000			0,0001		
	(C7)	0,0823			0,1585		
	(C8)	0,0320			0,1769		
	(C9)	0,9051			0,0060		
EGARCH (3,1)	(C3)	0,0049	-5,4004	-5,3738	0,0005	-6,8208	-6,7947
	(C4)	0,0307			0,0991		
	(C5)	0,1899			0,0009		
	(C6)	0,0000			0,0000		
	(C7)	0,0000			0,0000		
EGARCH (3,2)	(C3)	0,0026	-5,4021	-5,3717	0,0007	-6,8196	-6,7898
	(C4)	0,0899			0,1294		
	(C5)	0,0450			0,1465		
	(C6)	0,0000			0,0000		
	(C7)	0,0571			0,0000		
	(C8)	0,2365			0,6399		
EGARCH (3,3)	(C3)	0,0027	-5,4091	-5,3748	0,0088	-6,7689	-6,7370
	(C4)	0,0171			0,0945		
	(C5)	0,0778			0,0436		
	(C6)	0,0000			0,0000		
	(C7)	0,0000			0,0000		
	(C8)	0,0827			0,0609		
	(C9)	0,0000			0,5966		
EGARCH (3,4)	(C3)	0,0021	-5,4081	-5,3700	0,0011	-6,7689	-6,7370
	(C4)	0,0220			0,2095		
	(C5)	0,1002			0,3872		
	(C6)	0,0000			0,0037		
	(C7)	0,0099			0,0138		
	(C8)	0,5414			0,6731		
	(C9)	0,1563			0,8517		
	(C10)	0,5885			0,9482		
EGARCH (4,1)	(C3)	0,0043	-5,3993	-5,3689	0,0006	-6,8195	-6,7897
	(C4)	0,0297			0,1080		
	(C5)	0,1432			0,0822		
	(C6)	0,4890			0,6041		
	(C7)	0,0000			0,0000		
	(C8)	0,0000			0,0000		
EGARCH (4,2)	(C3)	0,0020	-5,4010	-5,3667	0,0012	-6,8181	-6,7846
	(C4)	0,0777			0,1724		
	(C5)	0,0274			0,1505		
	(C6)	0,5251			0,9040		
	(C7)	0,0000			0,0019		
	(C8)	0,0533			0,0004		
	(C9)	0,2428			0,7880		
EGARCH (4,3)	(C3)	0,0002	-5,4116	-5,3735	0,0018	-6,8171	-6,7798

	(C4)	0,0006			0,2207		
	(C5)	0,4574			0,1392		
	(C6)	0,0126			0,5603		
	(C7)	0,0000			0,0005		
	(C8)	0,0000			0,0002		
	(C9)	0,0000			0,5431		
	(C10)	0,0000			0,0709		
EGARCH (4,4)	(C3)	0,0002	-5,4102	-5,3682	0,0005	-6,8158	-6,7748
	(C4)	0,0005			0,0748		
	(C5)	0,3824			0,2065		
	(C6)	0,0098			0,5641		
	(C7)	0,0000			0,0000		
	(C8)	0,0000			0,0000		
	(C9)	0,0017			0,0000		
	(C10)	0,0001			0,5253		
	(C11)	0,8203			0,7821		
EGARCH (5,1)	(C3)	0,0043	-5,3990	-5,3648	0,0007	-6,8190	-6,7855
	(C4)	0,0318			0,1190		
	(C5)	0,1400			0,0976		
	(C6)	0,1691			0,2273		
	(C7)	0,2125			0,2622		
	(C8)	0,0000			0,0000		
	(C9)	0,0000			0,0000		
EGARCH (5,2)	(C3)	0,0025	-5,3998	-5,3617	0,0004	-6,8177	-6,7804
	(C4)	0,0762			0,0826		
	(C5)	0,0670			0,1393		
	(C6)	0,4064			0,2842		
	(C7)	0,5626			0,2372		
	(C8)	0,0000			0,0000		
	(C9)	0,0579			0,0000		
	(C10)	0,3299			0,0000		
EGARCH (5,3)	(C3)	0,0003	-5,4114	-5,3696	0,0013	-6,8163	-6,7753
	(C4)	0,0136			0,2039		
	(C5)	0,8529			0,3650		
	(C6)	0,2876			0,3992		
	(C7)	0,1733			0,4658		
	(C8)	0,0000			0,0026		
	(C9)	0,0000			0,0117		
	(C10)	0,0000			0,8211		
	(C11)	0,0000			0,8985		
EGARCH (5,4)	(C3)	0,0003	-5,4102	-5,3645	0,0007	-6,8151	-6,7704
	(C4)	0,0290			0,0795		
	(C5)	0,8418			0,4275		
	(C6)	0,4418			0,0753		
	(C7)	0,1674			0,1096		
	(C8)	0,0000			0,0000		
	(C9)	0,0005			0,0000		
	(C10)	0,0456			0,0000		
	(C11)	0,0153			0,0001		
	(C12)	0,5939			0,0000		
IGARCH (1,1)	Resid (-1)	0,0000	-5,3499	-5,3424	0,0000	-6,7563	-6,7489
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
IGARCH (1,2)	Resid (-1)	0,3077	-5,3493	-5,3380	0,0072	-6,7608	-6,7496
	GARCH (-1)	0,0604			0,0000		
	GARCH (-2)	0,6273			0,0001		
IGARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0023	-5,3508	-5,3356	0,0000	-6,7637	-6,7095
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		

	GARCH (-2)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-3)	0,0000			0,0000		
IGARCH (1,4)	Resid (-1)	0,0118	-5,3500	-5,3311	0,0001	-6,7573	-6,7387
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0000			0,0056		
	GARCH (-3)	0,0024			0,0000		
	GARCH (-4)	0,1339			0,0000		
IGARCH (2,1)	Resid (-1)	0,9780	-5,3513	-5,3400	0,9965	-6,7211	-6,7105
	Resid (-2)	0,0517			0,0000		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
IGARCH (2,2)	Resid (-1)	0,9708	-5,3499	-5,3348	0,7755	-6,7218	-6,7076
	Resid (-2)	0,1973			0,0411		
	GARCH (-1)	0,3130			0,0000		
	GARCH (-2)	0,9158			0,0983		
IGARCH (2,3)	Resid (-1)	0,8974	-5,3509	-5,3320	0,6903	-6,7240	-6,7062
	Resid (-2)	0,0446			0,0134		
	GARCH (-1)	0,0057			0,0000		
	GARCH (-2)	0,3416			0,0000		
	GARCH (-3)	0,2768			0,0001		
IGARCH (2,4)	Resid (-1)	0,0746	-5,3590	-5,3363	0,3508	-6,7651	-6,7428
	Resid (-2)	0,1822			0,0434		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0000			0,1157		
	GARCH (-3)	0,0036			0,4517		
	GARCH (-4)	0,2621			0,8206		
IGARCH (3,1)	Resid (-1)	0,9806	-5,3502	-5,3350	0,9196	-6,7232	-6,7090
	Resid (-2)	0,1242			0,4453		
	Resid (-3)	0,6533			0,0035		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
IGARCH (3,2)	Resid (-1)	0,9750	-5,3488	-5,3299	0,9348	-6,7220	-6,7043
	Resid (-2)	0,3055			0,4968		
	Resid (-3)	0,3526			0,1541		
	GARCH (-1)	0,8123			0,0103		
	GARCH (-2)	0,5807			0,7454		
IGARCH (3,3)	Resid (-1)	0,4088	-5,3507	-5,3280	0,8421	-6,7226	-6,7014
	Resid (-2)	0,0079			0,3643		
	Resid (-3)	0,0296			0,6036		
	GARCH (-1)	0,0015			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0102			0,0001		
	GARCH (-3)	0,0000			0,0017		
IGARCH (3,4)	Resid (-1)	0,9428	-5,3546	-5,3280	0,5883	-6,7640	-6,7379
	Resid (-2)	0,1843			0,5121		
	Resid (-3)	0,0325			0,5807		
	GARCH (-1)	0,0000			0,2053		
	GARCH (-2)	0,0002			0,7077		
	GARCH (-3)	0,0235			0,9423		
	GARCH (-4)	0,0644			0,8688		
IGARCH (4,1)	Resid (-1)	0,9841	-5,3538	-5,3348	0,5764	-6,7655	-6,7468
	Resid (-2)	0,0952			0,4892		
	Resid (-3)	0,3665			0,0945		
	Resid (-4)	0,0607			0,1096		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
IGARCH (4,2)	Resid (-1)	0,8808	-5,3656	-5,3429	0,5789	-6,7652	-6,7429
	Resid (-2)	0,2302			0,6059		
	Resid (-3)	0,8059			0,0419		
	Resid (-4)	0,2952			0,0026		
	GARCH (-1)	0,0000			0,2489		

	GARCH (-2)	0,0000			0,1081		
IGARCH (4,3)	Resid (-1)	0,8066	-5,3648	-5,3383	0,7425	-6,7714	-6,7453
	Resid (-2)	0,1026			0,0000		
	Resid (-3)	0,6376			0,0000		
	Resid (-4)	0,0528			0,0001		
	GARCH (-1)	0,0114			0,0000		
	GARCH (-2)	0,8224			0,0000		
	GARCH (-3)	0,2676			0,0000		
IGARCH (4,4)	Resid (-1)	0,8024	-5,3636	-5,3333	0,6010	-6,7630	-6,7332
	Resid (-2)	0,0816			0,5765		
	Resid (-3)	0,5767			0,0296		
	Resid (-4)	0,0240			0,0045		
	GARCH (-1)	0,0078			0,1950		
	GARCH (-2)	0,7476			0,5514		
	GARCH (-3)	0,6745			0,7737		
	GARCH (-4)	0,6887			0,7020		
IGARCH (5,1)	Resid (-1)	0,9713	-5,3524	-5,3297	0,6353	-6,7663	-6,7440
	Resid (-2)	0,0946			0,4997		
	Resid (-3)	0,3478			0,0791		
	Resid (-4)	0,1116			0,0271		
	Resid (-5)	0,7888			0,0392		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
IGARCH (5,2)	Resid (-1)	0,9943	-5,3644	-5,3379	0,4904	-6,7731	-6,7470
	Resid (-2)	0,2855			0,3599		
	Resid (-3)	0,8388			0,5678		
	Resid (-4)	0,0577			0,6147		
	Resid (-5)	0,0474			0,0206		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0000			0,0000		
IGARCH (5,3)	Resid (-1)	0,8881	-5,3489	-5,3186	0,4477	-6,7666	-6,7368
	Resid (-2)	0,0546			0,3483		
	Resid (-3)	0,0181			0,0003		
	Resid (-4)	0,5203			0,0000		
	Resid (-5)	0,3406			0,1100		
	GARCH (-1)	0,5608			0,0540		
	GARCH (-2)	0,8934			0,0080		
	GARCH (-3)	0,0000			0,0000		
IGARCH (5,4)	Resid (-1)	0,9997	-5,3646	-5,3306	0,4809	-6,7707	-6,7372
	Resid (-2)	0,0004			0,3846		
	Resid (-3)	0,0503			0,3273		
	Resid (-4)	0,0001			0,3742		
	Resid (-5)	0,0155			0,0168		
	GARCH (-1)	0,0262			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0000			0,9695		
	GARCH (-3)	0,0001			0,4902		
	GARCH (-4)	0,0000			0,7780		
TGARCH (1,1)	Resid (-1)	0,1892	-5,3802	-5,3612	0,0004	-6,7580	-6,7403
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
TGARCH (1,2)	Resid (-1)	0,2639	-5,3787	-5,3560	0,0413	-6,7588	-6,7375
	GARCH (-1)	0,0824			0,0000		
	GARCH (-2)	0,9576			0,0285		
TGARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0000	-5,3833	-5,3568	0,0422	-6,7580	-6,7332
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
	GARCH (-2)	0,0007			0,0116		
	GARCH (-3)	0,0000			0,1058		
TGARCH (1,4)	Resid (-1)	0,0000	-5,3831	-5,3528	0,2510	-6,7572	-6,7289
	GARCH (-1)	0,0000			0,1916		

	GARCH (-2)	0,1105			0,8085		
	GARCH (-3)	0,1059			0,9132		
	GARCH (-4)	0,4652			0,7595		
TGARCH (2,1)	Resid (-1)	0,0000	-5,3795	-5,3568	0,0016	-6,7596	-6,7383
	Resid (-2)	0,0000			0,0849		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
TGARCH (2,2)	Resid (-1)	0,0000	-5,3864	-5,3599	0,0005	-6,7617	-6,7370
	Resid (-2)	0,0001			0,0023		
	GARCH (-1)	0,0290			0,0092		
	GARCH (-2)	0,5023			0,0000		
TGARCH (2,3)	Resid (-1)	0,0000	-5,3828	-5,3525	0,0528	-6,7587	-6,7304
	Resid (-2)	0,0007			0,0376		
	GARCH (-1)	0,0514			0,0413		
	GARCH (-2)	0,6740			0,9014		
	GARCH (-3)	0,4094			0,5781		
TGARCH (2,4)	Resid (-1)	0,0000	-5,3856	-5,3515	0,0105	-6,7559	-6,7240
	Resid (-2)	0,0124			0,1236		
	GARCH (-1)	0,1017			0,0494		
	GARCH (-2)	0,8036			0,6592		
	GARCH (-3)	0,6432			0,7669		
	GARCH (-4)	0,5042			0,4027		
TGARCH (3,1)	Resid (-1)	0,0000	-5,3849	-5,3584	0,0011	-6,7598	-6,7350
	Resid (-2)	0,4642			0,8248		
	Resid (-3)	0,0004			0,1743		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
TGARCH (3,2)	Resid (-1)	0,0000	-5,3753	-5,3450	0,0057	-6,7599	-6,7316
	Resid (-2)	0,1284			0,6572		
	Resid (-3)	0,0014			0,5019		
	GARCH (-1)	0,0121			0,0004		
	GARCH (-2)	0,6789			0,5236		
TGARCH (3,3)	Resid (-1)	0,0000	-5,3849	-5,3509	0,0000	-6,7577	-6,7258
	Resid (-2)	0,7183			0,8358		
	Resid (-3)	0,0008			0,2955		
	GARCH (-1)	0,0227			0,0351		
	GARCH (-2)	0,7398			0,8542		
	GARCH (-3)	0,4362			0,6878		
TGARCH (3,4)	Resid (-1)	0,0000	-5,3866	-5,3488	0,0099	-6,7564	-6,7210
	Resid (-2)	0,3260			0,9067		
	Resid (-3)	0,0010			0,3353		
	GARCH (-1)	0,0144			0,0513		
	GARCH (-2)	0,9365			0,8281		
	GARCH (-3)	0,6949			0,9567		
	GARCH (-4)	0,8298			0,6822		
TGARCH (4,1)	Resid (-1)	0,0000	-5,3782	-5,3479	0,1660	-6,7587	-6,7303
	Resid (-2)	0,4487			0,8262		
	Resid (-3)	0,0017			0,2841		
	Resid (-4)	0,2691			0,6530		
	GARCH (-1)	0,0000			0,0000		
TGARCH (4,2)	Resid (-1)	0,0000	-5,3803	-5,3462	0,0329	-6,7595	-6,7276
	Resid (-2)	0,5598			0,6278		
	Resid (-3)	0,0013			0,3826		
	Resid (-4)	0,4335			0,3310		
	GARCH (-1)	0,1260			0,0000		
	GARCH (-2)	0,6464			0,0000		
TGARCH (4,3)	Resid (-1)	0,0000	-5,3760	-5,3381	0,0465	-6,7584	-6,7230
	Resid (-2)	0,2691			0,6722		
	Resid (-3)	0,0011			0,3084		

	Resid (-4)	0,4507			0,2552		
	GARCH (-1)	0,0856			0,0000		
	GARCH (-2)	0,9012			0,9673		
	GARCH (-3)	0,6674			0,0000		
TGARCH (4,4)	Resid (-1)	0,0000	-5,3833	-5,3416	0,0044	-6,7582	-6,7193
	Resid (-2)	0,4898			0,5101		
	Resid (-3)	0,0057			0,2319		
	Resid (-4)	0,8015			0,1480		
	GARCH (-1)	0,0356			0,0042		
	GARCH (-2)	0,6672			0,7562		
	GARCH (-3)	0,4928			0,8994		
	GARCH (-4)	0,7155			0,9346		
TGARCH (5,1)	Resid (-1)	0,0000	-5,3780	-5,3440	0,0008	-6,7612	-6,7293
	Resid (-2)	0,7396			0,6095		
	Resid (-3)	0,0015			0,2313		
	Resid (-4)	0,2901			0,1787		
	Resid (-5)	0,0678			0,0191		
	GARCH (-1)	0,0054			0,0000		
TGARCH (5,2)	Resid (-1)	0,0000	-5,3756	-5,3377	0,0008	-6,7614	-6,7259
	Resid (-2)	0,5075			0,4854		
	Resid (-3)	0,0021			0,3201		
	Resid (-4)	0,3305			0,2890		
	Resid (-5)	0,0520			0,0357		
	GARCH (-1)	0,2235			0,0000		
	GARCH (-2)	0,8962			0,4190		
TGARCH (5,3)	Resid (-1)	0,0000	-5,3799	-5,3383	0,0027	-6,7607	-6,7217
	Resid (-2)	0,5895			0,4506		
	Resid (-3)	0,0045			0,3458		
	Resid (-4)	0,9041			0,4107		
	Resid (-5)	0,2216			0,0746		
	GARCH (-1)	0,0261			0,0019		
	GARCH (-2)	0,8365			0,8265		
	GARCH (-3)	0,5522			0,7047		
TGARCH (5,4)	Resid (-1)	0,0000	-5,3730	-5,3276	0,0070	-6,7571	-6,7146
	Resid (-2)	0,3758			0,7751		
	Resid (-3)	0,0008			0,2292		
	Resid (-4)	0,3897			0,1253		
	Resid (-5)	0,0705			0,0184		
	GARCH (-1)	0,2722			0,0000		
	GARCH (-2)	0,9335			0,6621		
	GARCH (-3)	0,9533			0,7943		
	GARCH (-4)	0,8415			0,5302		
Vol. Estocástica	(C1)	0,0258	-4,4971	-4,4904	0,0000	-6,4108	-6,3967
	(C2)	0,0000			0,0000		
	(C3)	0,0000			0,0000		
Comb por OLS	(C1)	0,0361	-12,842	-12,815	0,0475	-14,244	-14,216
	ARCH	-			0,0000		
	GARCH	0,0026			0,0031		
	EGARCH	0,0000			0,0000		
	IGARCH	0,0075			0,0148		
	TGARCH	0,0000			0,0168		
	EWMA	0,0000			0,0999		
	VE	0,0005			0,0018		
Comb por móvel	(C1)	0,0000	-12,768	-12,760	0,0000	-14,159	-14,152
	ARCH				0,0000		
	GARCH	0,0009			0,0017		
	EGARCH	0,0000			0,0000		

	IGARCH	0,0016			0,0627		
	TGARCH	0,0000			0,0323		
	EWMA	0,0000			0,0419		
	VE	0,0177			0,0302		

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela B.2: Estatísticas do IGP-M

Modelos		Estatística <i>t</i>	Akaike	Schwarz
ARCH (1,0)	Resid (-1)	0,0030	-6,8957	-6,8349
ARCH (2,0)	Resid (-1)	0,0105	-6,8963	-6,8153
	Resid (-2)	0,1970		
ARCH (3,0)	Resid (-1)	0,0184	-6,9099	-6,8087
	Resid (-2)	0,1414		
	Resid (-3)	0,0009		
GARCH (1,1)	Resid (-1)	0,0078	-6,9055	-6,8245
	GARCH (-1)	0,0060		
GARCH (1,2)	Resid (-1)	0,0071	-6,9006	-6,7994
	GARCH (-1)	0,3961		
	GARCH (-2)	0,1033		
GARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0122	-6,8935	-6,7720
	GARCH (-1)	0,3010		
	GARCH (-2)	0,0192		
	GARCH (-3)	0,3765		
GARCH (2,1)	Resid (-1)	0,0130	-6,8940	-6,7928
	Resid (-2)	0,6584		
	GARCH (-1)	0,1302		
GARCH (2,2)	Resid (-1)	0,0148	-6,9386	-6,8171
	Resid (-2)	0,1039		
	GARCH (-1)	0,0051		
	GARCH (-2)	0,1630		
GARCH (2,3)	Resid (-1)	0,0051	-6,9217	-6,7800
	Resid (-2)	0,1344		
	GARCH (-1)	0,0004		
	GARCH (-2)	0,1502		
	GARCH (-3)	0,0013		
GARCH (3,1)	Resid (-1)	0,0173	-6,9016	-6,7800
	Resid (-2)	0,6286		
	Resid (-3)	0,0031		
	GARCH (-1)	0,5049		
	GARCH (-2)	0,4189		
GARCH (3,2)	Resid (-1)	0,0208	-6,9380	-6,7962
	Resid (-2)	0,0803		
	Resid (-3)	0,4526		
	GARCH (-1)	0,0382		
	GARCH (-2)	0,4189		
GARCH (3,3)	Resid (-1)	0,0101	-6,9272	-6,7651
	Resid (-2)	0,8283		
	Resid (-3)	0,0000		
	GARCH (-1)	0,0539		
	GARCH (-2)	0,0510		
	GARCH (-3)	0,4096		
EGARCH (1,1)	(C3)	0,0033	-6,9177	-6,8164
	(C4)	0,0046		
	(C5)	0,0001		
EGARCH (1,2)	(C3)	0,0022	-6,9056	-6,7841
	(C4)	0,0178		



	(C5)	0,0019		
	(C6)	0,6109		
EGARCH (1,3)	(C3)	0,0001	-6,8977	-6,7559
	(C4)	0,0049		
	(C5)	0,0013		
	(C6)	0,7858		
	(C7)	0,3055		
EGARCH (2,1)	(C3)	0,0037	-6,9042	-6,7827
	(C4)	0,9562		
	(C5)	0,0070		
	(C6)	0,0206		
EGARCH (2,2)	(C3)	0,0004	-6,8970	-6,7552
	(C4)	0,5404		
	(C5)	0,0729		
	(C6)	0,1297		
	(C7)	0,7048		
EGARCH (2,3)	(C3)	0,0000	-6,8939	-6,7318
	(C4)	0,6567		
	(C5)	0,0630		
	(C6)	0,2268		
	(C7)	0,9944		
	(C8)	0,3581		
EGARCH (3,1)	(C3)	0,0097	-6,9165	-6,7747
	(C4)	0,7977		
	(C5)	0,1044		
	(C6)	0,0081		
	(C7)	0,0011		
EGARCH (3,2)	(C3)	0,0108	-6,9046	-6,7426
	(C4)	0,7891		
	(C5)	0,1305		
	(C6)	0,0393		
	(C7)	0,2251		
	(C8)	0,8025		
EGARCH (3,3)	(C3)	0,0008	-6,9435	-6,7612
	(C4)	0,5803		
	(C5)	0,0152		
	(C6)	0,0140		
	(C7)	0,0001		
	(C8)	0,0050		
	(C9)	0,0013		
IGARCH (1,1)	Resid (-1)	0,0000	-6,6610	-6,6205
	GARCH (-1)	0,0000		
IGARCH (1,2)	Resid (-1)	0,4177	-6,6751	-6,6144
	GARCH (-1)	0,0000		
	GARCH (-2)	0,0277		
IGARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0000	-6,8106	-6,7296
	GARCH (-1)	0,7827		
	GARCH (-2)	0,0002		
	GARCH (-3)	0,5162		
IGARCH (2,1)	Resid (-1)	0,0000	-6,8854	-6,8247
	Resid (-2)	0,0001		
	GARCH (-1)	0,0000		
IGARCH (2,2)	Resid (-1)	0,0000	-6,9116	-6,8305
	Resid (-2)	0,0001		
	GARCH (-1)	0,0000		
	GARCH (-2)	0,0038		
IGARCH (2,3)	Resid (-1)	0,0101	-6,6241	-6,5229

	Resid (-2)	0,0003		
	GARCH (-1)	0,0000		
	GARCH (-2)	0,0000		
	GARCH (-3)	0,0000		
IGARCH (3,1)	Resid (-1)	0,0000	-6,8946	-6,8136
	Resid (-2)	0,0224		
	Resid (-3)	0,2414		
	GARCH (-1)	0,0000		
IGARCH (3,2)	Resid (-1)	0,0016	-6,8984	-6,7971
	Resid (-2)	0,2243		
	Resid (-3)	0,9285		
	GARCH (-1)	0,0000		
	GARCH (-2)	0,0734		
TGARCH (1,1)	Resid (-1)	0,0417	-6,9044	-6,8031
	GARCH (-1)	0,2845		
TGARCH (1,2)	Resid (-1)	0,0371	-6,8989	-6,7774
	GARCH (-1)	0,2079		
	GARCH (-2)	0,4448		
TGARCH (1,3)	Resid (-1)	0,0153	-6,8802	-6,7384
	GARCH (-1)	0,3577		
	GARCH (-2)	0,0565		
	GARCH (-3)	0,3788		
TGARCH (2,1)	Resid (-1)	0,0016	-6,7596	-6,7383
	Resid (-2)	0,0849		
	GARCH (-1)	0,0000		
TGARCH (2,2)	Resid (-1)	0,0005	-6,7617	-6,7370
	Resid (-2)	0,0023		
	GARCH (-1)	0,0092		
	GARCH (-2)	0,0000		
TGARCH (2,3)	Resid (-1)	0,0052	-6,8985	-6,7365
	Resid (-2)	0,7426		
	GARCH (-1)	0,0000		
	GARCH (-2)	0,0009		
	GARCH (-3)	0,0000		
Vol. Estocástica	(C1)	0,0015	-7,1607	-7,0797
	(C2)	0,0412		
	(C3)	0,0000		
Comb por OLS	(C1)	0,0634	-7,1502	-7,0085
	ARCH	0,0847		
	GARCH	0,0112		
	EGARCH	0,0799		
	IGARCH	0,0118		
	EWMA	0,0356		
	VE	0,0763		
Comb por móvel	(C1)	0,0102	-6,7370	-6,6966
	ARCH	0,0930		
	GARCH	0,0193		
	EGARCH	0,0930		
	IGARCH	0,0209		
	EWMA	0,1001		
	VE	0,0133		

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela B.4: Tabela de *p-valores* do Teste *Q* para autocorrelação dos retornos e dos retornos ao quadrado do índice Ibovespa.

Probabilidade	Retornos	Retornos ao quadrado
Lag 1	0,092	0,028
Lag 2	0,181	0,000
Lag 3	0,255	0,000
Lag 4	0,274	0,000
Lag 5	0,392	0,000
Lag 6	0,469	0,000
Lag 7	0,383	0,000
Lag 8	0,420	0,000
Lag 9	0,497	0,000
Lag 10	0,241	0,000
Lag 11	0,301	0,000
Lag 12	0,369	0,000

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela B.5: Tabela de *p-valores* do Teste *Q* para autocorrelação dos retornos e dos retornos ao quadrado do índice Dow Jones.

Probabilidade	Retornos	Retornos ao quadrado
Lag 1	0,009	0,000
Lag 2	0,033	0,000
Lag 3	0,078	0,000
Lag 4	0,146	0,000
Lag 5	0,135	0,000
Lag 6	0,187	0,000
Lag 7	0,041	0,000
Lag 8	0,023	0,000
Lag 9	0,023	0,000
Lag 10	0,037	0,000
Lag 11	0,054	0,000
Lag 12	0,032	0,000

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela B.6: Tabela de *p-valores* do Teste *Q* para autocorrelação dos retornos e dos retornos ao quadrado do IGP-M.

Probabilidade	Retornos	Retornos ao quadrado
Lag 1	0,000	0,000
Lag 2	0,000	0,000
Lag 3	0,000	0,000
Lag 4	0,000	0,000
Lag 5	0,000	0,000
Lag 6	0,000	0,000
Lag 7	0,000	0,000
Lag 8	0,000	0,000
Lag 9	0,000	0,000
Lag 10	0,000	0,000
Lag 11	0,000	0,000
Lag 12	0,000	0,000

Fonte: Elaborado pelo autor