UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA

Representação de Inteiros por algumas Formas Quadráticas Ternárias

por

Thayner Gomes De Bona

Trabalho submetido como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Pura

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Orientador

Porto Alegre, novembro de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

De Bona, Thayner Gomes

Representação de Inteiros por algumas Formas Quadráticas Ternárias / Thayner Gomes De Bona.—Porto Alegre: PPGMAT da UFRGS, 2016.

84 p.: il.

Dissertação (Mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura, Porto Alegre, 2016.
Orientador: Brietzke, Eduardo Henrique de Mattos

Dissertação: Matemática Pura,
Partições, Ramanujan, Teoria dos Números, Formas Quadráticas

Representação de Inteiros por algumas Formas Quadráticas Ternárias

por

Thayner Gomes De Bona

Trabalho submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Pura

Linha de Pesquisa: Teoria dos Números

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
IME-UNICAMP

Prof. Dr. Robson da Silva
ICT-UNIFESP

Prof. Dr. Samuel Volkweis Leite
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
Novembro de 2016.

Rafael Rigão Souza
Coordenador

Sumário

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é descrever os números inteiros que podem ser representados nas formas $9x^2+16y^2+36z^2+16yz+4xz+8xy$ e $9x^2+17y^2+32z^2-8yz+8xz+6xy$. Para isso, utilizamos uma série de resultados envolvendo funções theta, como a identidade do produto triplo de Jacobi e equações modulares. Então, provamos três análogos do Teorema $E\Upsilon PHKA$ de Gauss e utilizamos um deles para descrever os inteiros que podem ser representados nas formas em questão. Como um bônus, determinamos ainda os inteiros que podem ser representados na forma $3x^2+4y^2+9z^2$, partindo dos inteiros que podem ser expressados na forma $x^2+3y^2+36z^2$.

ABSTRACT

The main goal of this work is to describe the integers which can be written in the forms $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy$ and $9x^2 + 17y^2 + 32z^2 - 8yz + 8xz + 6xy$. To do so, we use a series of results concerning theta functions, such as the Jacobi triple product identity and modular equations. Then, we prove three analogues of Gauss $E\Upsilon PHKA$ Theorem and use one of them to describe the integers which can be written in the desired forms. As an extra, we also find the integers which can be written in the form $3x^2 + 4y^2 + 9z^2$, making use of the integers that can be expressed in the form $x^2 + 3y^2 + 36z^2$.

1 INTRODUÇÃO

Um tipo de problema recorrente em Teoria dos Números é a questão sobre quais números inteiros podem ser representados de certa forma (qualitativo), ou ainda, de quantas maneiras diferentes um número inteiro pode ser representado naquela forma (quantitativo). Um exemplo popular deste tipo de problema é a conjectura de Goldbach, que afirma que todo inteiro par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos. Apesar de parecer um problema simples, e datar de 1742, sua veracidade ainda se encontra em aberto.

Outro exemplo de problema deste tipo, no sentido quantitativo, é o de calcular de quantas formas um inteiro positivo pode ser escrito como soma de inteiros positivos (evidentemente, menores ou iguais ao próprio). Uma forma de representar um inteiro positivo n como soma de inteiros positivos é dita uma *partição de n* e, neste caso, a ordem dos termos da soma não importa. Em 1918, Hardy e Ramanujan encontraram uma fórmula assintótica para o número de partições de um inteiro n. Em 1937, Hans Rademacher melhorou a fórmula encontrada por Hardy e Ramanujan ao encontrar uma expressão para o número de partições de n em termos de uma série convergente.

Em 1796, Gauss (1777-1855) provou que todo número natural é soma de três números triangulares, e comemorou o feito em seu diário escrevendo "$E\Upsilon PHKA$! $num = \Delta + \Delta + \Delta$", e desde então alguns se referem a este resultado como Teorema Eureka de Gauss. A demonstração final foi publicada em 1801, no celebrado *Disquisitiones Arithmeticae*, de autoria do próprio Gauss. Para a prova, Gauss faz uso do seguinte importante teorema:

Teorema 1.1 (Teorema dos Três Quadrados)**.** *Um inteiro não-negativo n pode ser representado como a soma de três quadrados perfeitos se, e somente se, n não é da forma $4^v(8m+7)$, quaisquer que sejam $v, m \in \mathbb{N}$.*

Na linguagem da teoria de formas quadráticas, este teorema pode ser escrito do seguinte modo:

Teorema 1.2 (Teorema dos Três Quadrados). *A forma $x^2 + y^2 + z^2$ representa exclusivamente todos os inteiros não-negativos que não são do tipo $n = 4^v(8m+7)$, com $v, m \in \mathbb{N}$.*

Em 1907, Hurwitz propôs que o número de maneiras de representar n^2 pela forma $x^2 + y^2 + z^2$ poderia ser expresso como uma função finita simples dos divisores de n. De fato, se a fatoração em primos de n é dada por

$$n = 2^a \prod_{p>2} p^v$$

então o número de maneiras de representar n^2 como soma de três quadrados é exatamente

$$6 \prod_{p>2} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1-p^v}{1-p} \right),$$

onde $\left(\dfrac{a}{n}\right)$ denota o símbolo de Jacobi.

Neste trabalho, partiremos deste resultado quantitativo sobre a representação de n^2 pela forma $x^2 + y^2 + z^2$, bem como dois resultados semelhantes sobre a representação de n^2 pelas formas $x^2 + y^2 + 2z^2$ e $x^2 + y^2 + 3z^2$, para obter um teorema qualitativo sobre os inteiros representados pelas formas $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy$ e $9x^2 + 17y^2 + 32z^2 - 8yz + 8xz + 6xy$.

Para tanto, no Capítulo 2, apresentamos todos os pré-requisitos básicos para uma boa compreensão da matemática envolvida. Em seguida, no Capítulo 3, direcionamos o interesse à exposição de equações que nos serão úteis no desenvolvimento dos resultados, e cuja obtenção em meio ao desenvolvimento o tornaria confuso e desgastante. Enfim, no Capítulo 4, apresentamos inicialmente três teoremas que nos serão fundamentais, e então os utilizamos para obter o desejado. Em tal ponto, a estratégia é trabalharmos com as funções theta associadas às formas em questão, obtendo para elas uma representação em termos de funções que nos são mais familiares, para enfim utilizar os teoremas que obtivemos e poder concluir exatamente quais inteiros são representados por tais formas.

2 BASE TEÓRICA

Neste capítulo, apresentaremos uma série de resultados necessários para o pré-desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção, introduzimos o simbolo de Legendre para então apresentar suas generalizações: o símbolo de Jacobi e o símbolo de Kronecker. A segunda seção traz três teoremas sobre formas quadráticas ternárias, e a partir deles obtemos um corolário que nos será útil. Na terceira seção tratamos de funções theta, trazendo uma série de teoremas importantes e fixando algumas notações. As quarta e quinta seções tratam de funções hipergeométricas e equações modulares. A maioria das demonstrações desse capítulo serão omitidas.

2.1 Símbolo de Kronecker

O objetivo desta seção é calcularmos alguns valores do símbolo de Kronecker, que é uma generalização do símbolo de Jacobi, que por sua vez é uma extensão do símbolo de Legendre.
Começamos então definindo resíduos quadráticos e o símbolo de Legendre.

Definição 2.1. *Sejam a um inteiro e p um número primo ímpar positivo tal que $p \nmid a$. Dizemos que a é um resíduo quadrático módulo p se existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Caso contrário, dizemos que a é um não-resíduo quadrático módulo p.

Definição 2.2. *Sejam a um inteiro e p um número primo ímpar não-negativo. O símbolo de Legendre de a por p é definido por*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } a \text{ é resíduo quadrático módulo } p; \\ 0 & \text{, se } p \mid a; \\ -1 & \text{, se } a \text{ é não-resíduo quadrático módulo } p. \end{cases}$$

Expomos a seguir algumas propriedades básicas do símbolo de Legendre, incluindo, em teorema separado dada a sua importância, a Lei da Reciprocidade Quadrática. As demonstrações de tais propriedades podem ser encontradas em [8].

Teorema 2.1. *Sejam a e b inteiros, e p um número primo ímpar positivo. Então:*

(i) Se $a \equiv b \pmod{p}$, *então* $\left(\dfrac{a}{p}\right) = \left(\dfrac{b}{p}\right)$;

(ii) $\left(\dfrac{a^2}{p}\right) = 1$;

(iii) $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$;

(iv) $\left(\dfrac{ab}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$;

(v) $\left(\dfrac{1}{p}\right) = 1$ *e* $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Teorema 2.2 (Lei da Reciprocidade Quadrática)**.** *Sejam p e q números primos ímpares distintos. Então*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Em particular, os símbolos de Legendre de p sobre q e de q sobre p são iguais se pelo menos um dentre p ou q é congruente a 1 módulo 4, e são recíprocos um do outro se p e q são ambos congruentes a 3 módulo 4.

Agora estendemos o símbolo de Legendre para n inteiro ímpar positivo no lugar de p.

Definição 2.3. *Sejam a um inteiro e n um inteiro ímpar positivo. Se a fatoração em primos de n é dada por*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

então o símbolo de Jacobi de a por n é definido por

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{a}{p_i}\right)^{\alpha_i},$$

onde cada $\left(\dfrac{a}{p_i}\right)$ *é o símbolo de Legendre de* a *por* p_i.

É fácil ver que as propriedades *(i)*, *(ii)*, *(iv)* e *(v)* do Teorema 2.1 são válidas também para o símbolo de Jacobi. Além disso, a Lei da Reciprocidade Quadrática também é válida para o símbolo de Jacobi, trocando p e q primos distintos por m e n primos entre si, mas a demonstração é um pouco mais trabalhosa. Por fim, generalizamos o símbolo de Legendre para qualquer inteiro à partir do símbolo de Jacobi pela definição a seguir.

Definição 2.4. *Sejam* a *e* n *inteiros. Se* $n = u2^k n'$, *onde* $u \in \{-1, 1\}$ *e* n' *é um inteiro positivo ímpar, então o símbolo de Kronecker de* a *por* n *é dado por*

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{u}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^k\left(\frac{a}{n'}\right),$$

onde

$$\left(\frac{a}{-1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } a \geq 0; \\ -1 & \text{, se } a < 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } a \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ 0 & \text{, se } a \equiv 0 \pmod 2; \\ -1 & \text{, se } a \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

e $\left(\frac{a}{1}\right)$ *e* $\left(\frac{a}{n'}\right)$ *são símbolos de Jacobi. Enfim, no caso* $n = 0$, *definimos*

$$\left(\frac{a}{0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } a = \pm 1; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, é fácil ver que as propriedades do Teorema 2.1 que são satisfeitas pelo símbolo de Jacobi são também satisfeitas pelo símbolo de Kronecker. No caso da Lei da Reciprocidade Quadrática, vale a seguinte versão.

Teorema 2.3. *Sejam m e n inteiros primos entre si. Escreva $m = 2^j m'$ e $n = 2^k n'$, com m' e n' inteiros ímpares. Então*

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m'-1}{2}\frac{n'-1}{2}}.$$

Agora, apresentamos alguns valores básicos do símbolo de Kronecker.

Teorema 2.4. *Se n é um inteiro positivo ímpar, então*

(i)
$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \begin{cases} 1 & , \textit{se } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & , \textit{se } n \equiv -1 \pmod 4. \end{cases} \tag{2.1}$$

(ii)
$$\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} 1 & , \textit{se } n \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & , \textit{se } n \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases} \tag{2.2}$$

(iii)
$$\left(\frac{3}{n}\right) = \begin{cases} 1 & , \textit{se } n \equiv \pm 1 \pmod{12}; \\ 0 & , \textit{se } n \equiv \pm 3 \pmod{12}; \\ -1 & , \textit{se } n \equiv \pm 5 \pmod{12}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Demonstração. *(i)* Como $n > 0$, temos $\left(\frac{n}{-1}\right) = 1$, então, pela Lei da Reciprocidade Quadrática temos

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \begin{cases} \left(\frac{n}{-1}\right) & , \text{se } n \equiv 1 \pmod 4; \\ -\left(\frac{n}{-1}\right) & , \text{se } n \equiv -1 \pmod 4. \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \text{se } n \equiv 1 \pmod 4; \\ -1 & , \text{se } n \equiv -1 \pmod 4. \end{cases}$$

(ii) Pela Lei da Reciprocidade Quadrática temos $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)$ qualquer que seja n. Então

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} 1 & , \text{se } n \equiv \pm 1 \pmod 8; \\ -1 & , \text{se } n \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

(iii) Pela Lei da Reciprocidade Quadrática temos

$$\left(\frac{3}{n}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{3}\right) & \text{, se } n \equiv 1 \pmod 4; \\ -\left(\dfrac{n}{3}\right) & \text{, se } n \equiv -1 \pmod 4). \end{cases}$$

Agora, podemos calcular $\left(\frac{n}{3}\right)$ diretamente pela classe de equivalência de n módulo 3, obtendo

$$\left(\frac{n}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1 \pmod 3; \\ -1 & \text{, se } n \equiv -1 \pmod 3. \end{cases}$$

e então, juntando isso ao obtido anteriormente, basta notar que

$$\begin{aligned} n \equiv 1 \pmod 3 \text{ e } n \equiv 1 \pmod 4 \quad &\Leftrightarrow \quad n \equiv 1 \pmod{12}, \\ n \equiv -1 \pmod 3 \text{ e } n \equiv 1 \pmod 4 \quad &\Leftrightarrow \quad n \equiv 5 \pmod{12}, \\ n \equiv 1 \pmod 3 \text{ e } n \equiv -1 \pmod 4 \quad &\Leftrightarrow \quad n \equiv 7 \pmod{12}, \\ n \equiv -1 \pmod 3 \text{ e } n \equiv -1 \pmod 4 \quad &\Leftrightarrow \quad n \equiv 11 \pmod{12}, \end{aligned}$$

para então concluir-se o desejado. □

Finalmente, encerramos a seção calculando alguns valores para o símbolo de Kronecker que serão os que utilizaremos mais tarde.

Teorema 2.5. *Seja n um inteiro positivo. Então:*

(i)

$$\left(\frac{-4}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1 \pmod 4; \\ 0 & \text{, se } n \equiv 0 \pmod 2; \\ -1 & \text{, se } n \equiv -1 \pmod 4. \end{cases} \tag{2.4}$$

(ii)

$$\left(\frac{-2}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1,3 \pmod 8; \\ 0 & \text{, se } n \equiv 0 \pmod 2; \\ -1 & \text{, se } n \equiv 5,7 \pmod 8. \end{cases} \tag{2.5}$$

(iii)

$$\left(\frac{-12}{n}\right) = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } n \equiv 1 \pmod 6; \\ 0 & , \textit{ se } n \equiv 0,2,3,4 \pmod 6; \\ -1 & , \textit{ se } n \equiv 5 \pmod 6. \end{cases} \tag{2.6}$$

(iv)

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \begin{cases} 1 & , \textit{ se } n \equiv 1 \pmod 3; \\ 0 & , \textit{ se } n \equiv 0 \pmod 3; \\ -1 & , \textit{ se } n \equiv -1 \pmod 3. \end{cases} \tag{2.7}$$

Demonstração. Começamos observando que, se $\mathrm{mdc}(a, b) > 1$ para a e b inteiros, então $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$. Isso segue diretamente da multiplicatividade do símbolo de Kronecker em b juntamente a definição do símbolo de Legendre.

(i) Pela observação acima, se n é par, temos $\left(\frac{-4}{n}\right) = 0$. Caso contrário, a multiplicatividade do símbolo de Kronecker no numerador nos dá

$$\left(\frac{-4}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2 = \left(\frac{-1}{n}\right)$$

donde segue o desejado por (2.1).

(ii) Se n é par, temos novamente $\left(\frac{-2}{n}\right) = 0$. Então, suponha n ímpar e escreva

$$\left(\frac{-2}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right).$$

Utilizando (2.1) e (2.2) juntamente com as implicações a seguir, está feita a demonstração.

$$\begin{aligned} n \equiv 1 \pmod 8 &\Rightarrow n \equiv 1 \pmod 4, \\ n \equiv 3 \pmod 8 &\Rightarrow n \equiv 3 \pmod 4, \\ n \equiv 5 \pmod 8 &\Rightarrow n \equiv 1 \pmod 4, \\ n \equiv 7 \pmod 8 &\Rightarrow n \equiv 3 \pmod 4. \end{aligned}$$

(iii) Se n é par e/ou múltiplo de 3, temos $\left(\frac{-12}{n}\right) = 0$. Caso contrário, escrevemos

$$\left(\frac{-12}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right) = \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right).$$

Agora basta utilizarmos (2.1) e (2.3) juntamente às implicações a seguir

$$\begin{aligned}
n \equiv 1 \pmod{12} \quad &\Rightarrow \quad n \equiv 1 \pmod 4\\
n \equiv 5 \pmod{12} \quad &\Rightarrow \quad n \equiv 1 \pmod 4\\
n \equiv 7 \pmod{12} \quad &\Rightarrow \quad n \equiv 3 \pmod 4\\
n \equiv 11 \pmod{12} \quad &\Rightarrow \quad n \equiv 3 \pmod 4
\end{aligned}$$

para concluir que

$$\left(\frac{-12}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1, 7 \pmod{12};\\ -1 & \text{, se } n \equiv 5, 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

Para concluir o que queremos, basta juntar isso aos casos $n \equiv 0, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11 \pmod{12}$, e então reduzir ao módulo 6.

(iv) Se n é ímpar e não é múltiplo de 3, temos do feito no item anterior que

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-12}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1 \pmod 6;\\ -1 & \text{, se } n \equiv 5 \pmod 6. \end{cases}$$

Agora faremos caso a caso módulo 12:

- Se $n \equiv 0, 3, 6, 9 \pmod{12}$, então $3 \mid n$, donde
$$\left(\frac{-3}{n}\right) = 0;$$
- se $n \equiv 2 \pmod{12}$, então $\frac{n}{2} \equiv 1 \pmod 6$, donde
$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{\frac{n}{2}}\right) = (-1)(1) = -1;$$
- se $n \equiv 8 \pmod{12}$, então $\frac{n}{4} \equiv 2 \pmod 3$. Ponha $n' = \frac{n}{4}$ e note que $\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right)$. Agora, se n' é ímpar, então $n' \equiv 5 \pmod 6$ e daí
$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = -1.$$

Por outro lado, se n' é par, então $n' \equiv 2, 8 \pmod{12}$. Se $n' \equiv 2 \pmod{12}$, usamos o argumento do item anterior para concluir que

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = -1.$$

Por fim, se $n' \equiv 8 \pmod{12}$, então $\frac{n'}{4} \equiv 2 \pmod 3$ e, pondo $n'' = \frac{n'}{4}$, temos $\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = \left(\frac{-3}{n''}\right)$. Assim, repete-se o argumento até obter-se um $n^{(k)}$ congruente a 5 módulo 6 ou congruente a 2 módulo 12. Em qualquer caso, conclui-se

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = -1;$$

- se $n \equiv 10 \pmod{12}$, então $\frac{n}{2} \equiv 5 \pmod 6$, donde

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-3}{\frac{n}{2}}\right) = (-1)(-1) = 1;$$

- se $n \equiv 4 \pmod{12}$, então $\frac{n}{4} \equiv 1 \pmod 3$. Ponha $n' = \frac{n}{4}$ e note que $\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right)$. Agora, se n' é ímpar, então $n' \equiv 1 \pmod 6$ e daí

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = 1.$$

Por outro lado, se n' é par, então $n' \equiv 4, 10 \pmod{12}$. Se $n' \equiv 10 \pmod{12}$, usamos o argumento do item anterior para concluir que

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = 1.$$

Por fim, se $n' \equiv 4 \pmod{12}$, então $\frac{n'}{4} \equiv 1 \pmod 3$ e, pondo $n'' = \frac{n'}{4}$, temos $\left(\frac{-3}{n}\right) = \left(\frac{-3}{n'}\right) = \left(\frac{-3}{n''}\right)$. Assim, repete-se o argumento até obter-se um $n^{(k)}$ congruente a 1 módulo 6 ou congruente a 10 módulo 12. Em qualquer caso, conclui-se

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = 1.$$

Em suma, temos

$$\left(\frac{-3}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{, se } n \equiv 1, 4, 7, 10 \pmod{12}; \\ 0 & \text{, se } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ -1 & \text{, se } n \equiv 2, 5, 8, 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

que é o mesmo que queriamos, bastando reduzir as congruências a módulo 3. $\square$

2.2 Formas quadráticas ternárias

Começamos com uma série de definições e notações sobre formas quadráticas ternárias trazidas em [2].

Definição 2.5. *Uma forma quadrática ternária é um elemento de* $\mathbb{Z}[x, y, z]$ *da forma*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy.$$

Por brevidade, denotaremos um elemento deste tipo por (a, b, c, d, e, f)*. Uma forma quadrática ternária é dita positiva se*

$$4abc + def - ad^2 - be^2 - cf^2 > 0.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}$*, o número total de representações de* n *pela forma* (a, b, c, d, e, f) *é o número de triplas ordenadas* $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ *tais que*

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy,$$

e tal número de representações será denotado por $(a, b, c, d, e, f; n)$*. Pode-se mostrar que, se* (a, b, c, d, e, f) *é positiva, então* $(a, b, c, d, e, f; n) = 0$ *se* $n < 0$*, isto é, uma forma ternária quadrática positiva só pode representar números não-negativos. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada no início do capítulo 3 de [9].*

O primeiro teorema que enunciamos é um dos principais resultados em Teoria dos Números e, segundo [2] e [9], é utilizado mais do que qualquer outro em pesquisas nessa área.

Teorema 2.6 (Teorema dos três quadrados)**.** *Seja n um inteiro não-negativo. Então*

$$(1, 1, 1, 0, 0, 0; n) \geq 0, \tag{2.8}$$

com igualdade se e somente se $n = 4^v(8m + 7)$*, com* v *e* m *inteiros não-negativos.*

As demonstrações deste teorema e dos dois teoremas a seguir podem ser encontradas em [9].

Teorema 2.7. *Seja n um inteiro não-negativo. Então*

$$(1, 1, 2, 0, 0, 0; n) \geq 0 \tag{2.9}$$

com igualdade se e somente se $n = 2 \cdot 4^v(8m + 7)$*, com* v *e* m *inteiros não-negativos.*

Teorema 2.8. *Seja n um inteiro não-negativo. Então*

$$(1, 1, 3, 0, 0, 0; n) \geq 0 \tag{2.10}$$

com igualdade se e somente se $n = 3 \cdot 9^v(3m + 2)$*, com* v *e* m *inteiros não-negativos.*

A seguir, apresentamos quatro teoremas que calculam o valor de $(a, b, c, d, e, f; n^2)$ para certas formas (a, b, c, d, e, f) a partir da fatoração em primos de n. Segundo [2], os três teoremas podem ser obtidos fazendo uso da fórmula de Siegel, que pode ser encontrada como a equação (2.1) em [3].

Teorema 2.9. *Se n é um inteiro positivo com a fatoração em primos dada por*

$$n = 2^a \prod_{p>2} p^v$$

então

$$\frac{(1, 1, 1, 0, 0, 0; n^2)}{6} = \prod_{p>2} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1 - p} - \left(\frac{-1}{p} \right) \frac{1 - p^v}{1 - p} \right). \tag{2.11}$$

Teorema 2.10. *Se n é um inteiro positivo com a fatoração em primos dada por*

$$n = 2^a \prod_{p>2} p^v$$

então

$$\frac{(1,1,2,0,0,0;n^2)}{4} = f(a)\prod_{p>2}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1-p^v}{1-p}\right), \tag{2.12}$$

onde $f(0) = 1$ *e* $f(a) = 3$ *quando* $a \geq 1$.

Teorema 2.11. *Se* n *é um inteiro positivo com a fatoração em primos dada por*

$$n = 2^a 3^b \prod_{p>3} p^v$$

então

$$\frac{(1,1,3,0,0,0;n^2)}{4} = (2^{a+1}-1)\prod_{p>3}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-3}{p}\right)\frac{1-p^v}{1-p}\right). \tag{2.13}$$

Teorema 2.12. *Se* n *é um inteiro positivo com a fatoração em primos dada por*

$$n = 2^a 3^b \prod_{p>3} p^v$$

então

$$\frac{(1,3,36,0,0,0;n^2)+(3,4,9,0,0,0;n^2)}{2} = (3\cdot 2^a - 2)g(b)\prod_{p>3}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-3}{p}\right)\frac{1-p^v}{1-p}\right), \tag{2.14}$$

onde $g(0) = 1$ *e* $g(b) = 2$ *se* $b \geq 1$.

Enfim, apresentamos quatro desigualdades obtidas diretamente destes teoremas.

Corolário 2.1. *Sejam* $M \not\equiv 0 \pmod 2$, $E \not\equiv 0 \pmod 2$ *e* $W \not\equiv 0 \pmod 3$ *inteiros positivos. Então valem as seguintes desigualdades:*

(i)
$$\frac{(1,1,1,0,0,0;M^2)}{6} \geq M, \tag{2.15}$$

com igualdade se e somente se $p \equiv 1 \pmod 4$ *para todo* p *divisor primo de* M*;*

(ii)
$$\frac{(1,1,2,0,0,0;E^2)}{4} \geq E, \tag{2.16}$$

com igualdade se e somente se $p \equiv 1,\, 3 \pmod 8$ *para todo* p *divisor primo de* E*;*

(iii)
$$\frac{(1,1,3,0,0,0;W^2)}{4} \geq W, \tag{2.17}$$
$$\frac{(1,3,36,0,0,0;W^2)+(3,4,9,0,0,0;W^2)}{2} \geq W, \tag{2.18}$$

com igualdade (em ambas) se e somente se $p \equiv 1 \pmod 3$ *para todo* p *divisor primo de* W*.*

Demonstração. *(i)* Escreva $M = \prod_{p>2} p^v$. Então, por (2.11) e do fato que $\left(\frac{-1}{p}\right) = \pm 1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{(1,1,1,0,0,0;M^2)}{6} &= \prod_{p>2}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1-p^v}{1-p}\right)\\ &\geq \prod_{p>2}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \frac{1-p^v}{1-p}\right)\\ &= \prod_{p>2}\frac{p^v-p^{v+1}}{1-p} = \prod_{p>2} p^v = M.\end{aligned}$$

Por fim observe que, para valer a igualdade, devemos ter $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ para todo p divisor primo de M, e isto vale se e só se $p \equiv 1 \pmod 4$.

(ii) Escreva $E = \prod_{p>2} p^v$. Então, por (2.12) com $f(0) = 1$ e do fato que $\left(\frac{-2}{p}\right) = \pm 1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{(1,1,2,0,0,0;E^2)}{4} &= \prod_{p>2}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1-p^v}{1-p}\right)\\ &\geq \prod_{p>2}\left(\frac{1-p^{v+1}}{1-p} - \frac{1-p^v}{1-p}\right)\\ &= \prod_{p>2}\frac{p^v-p^{v+1}}{1-p} = \prod_{p>2} p^v = E.\end{aligned}$$

Por fim observe que, para valer a igualdade, devemos ter $\left(\dfrac{-2}{p}\right) = 1$ para todo p divisor primo de E, e isto vale se e só se $p \equiv 1, 3 \pmod 8$.

(iii) Escreva $W = 2^a \prod_{p>3} p^v$. Então, por (2.13) e do fato que $(2^{a+1} - 1) = (2^a + 2^a - 1) \geq 2^a$, $(3 \cdot 2^a - 2) = (2^a + 2^{a+1} - 2) \geq 2^a$ e $\left(\dfrac{-3}{p}\right) = \pm 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{(1,1,3,0,0,0;W^2)}{4} &= (2^{a+1} - 1) \prod_{p>3} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1 - p} - \left(\frac{-3}{p}\right) \frac{1 - p^v}{1 - p} \right) \\
&\geq 2^a \prod_{p>3} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1 - p} - \frac{1 - p^v}{1 - p} \right) \\
&= 2^a \prod_{p>3} \frac{p^v - p^{v+1}}{1 - p} = 2^a \prod_{p>3} p^v = W
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{(1,3,36,0,0,0;W^2) + (3,4,9,0,0,0;W^2)}{2} &= (3 \cdot 2^a - 2) \prod_{p>3} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1 - p} - \left(\frac{-3}{p}\right) \frac{1 - p^v}{1 - p} \right) \\
&\geq 2^a \prod_{p>3} \left(\frac{1 - p^{v+1}}{1 - p} - \frac{1 - p^v}{1 - p} \right) \\
&= 2^a \prod_{p>3} \frac{p^v - p^{v+1}}{1 - p^v} = 2^a \prod_{p>3} p^v = W.
\end{aligned}$$

Por fim observe que, para valer a igualdade em ambas, devemos ter que $2 \nmid W$ e $\left(\dfrac{-3}{p}\right) = 1$ para todo p divisor primo de W, e isto vale se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo divisor primo de W. $\square$

2.3 Funções Theta ou Séries Theta

Começaremos fixando notações. Ao longo desta seção, a e q denotam números complexos, e $|q| < 1$. Observamos que a notação utilizada neste trabalho não é exatamente a mesma que a utilizada no livro [6] - ao invés disso, preferimos utilizar as notações de Berkovich em [2] - mas é semelhante.

Definição 2.6. *Defina*

$$(a; q) := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k) \tag{2.19}$$

e, se $a = q$,

$$E(q) := (q; q). \tag{2.20}$$

Definição 2.7. *Para a, $b \in \mathbb{C}$ com $|ab| < 1$, a função theta geral de Ramanujan $f(a, b)$ é definida por*

$$f(a,b) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{2.21}$$

Dois casos especiais destas funções, na própria notação de Ramanujan, são

$$\phi(q) := f(q,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \tag{2.22}$$

$$\psi(q) := f(q,q^3) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}. \tag{2.23}$$

A última igualdade em (2.23) ficará clara com a proposição a seguir, que traz algumas propriedades básicas das funções theta.

Proposição 2.1. *Temos*

(i) $f(a,b) = f(b,a)$;

(ii) $f(1,a) = 2f(a,a^3)$;

(iii) $f(-1,a) = 0$;

(iv) $f(a,b) = a^{\frac{m(m+1)}{2}} b^{\frac{m(m-1)}{2}} f(a(ab)^m, b(ab)^{-m}), \quad m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. *(i)* Basta fazer $n \mapsto -n$, como segue

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{-n(-n+1)}{2}} b^{\frac{-n(-n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n+1)}{2}} = f(b,a) \end{aligned}$$

(ii) Inicialmente separamos o índice da série que define $f(1,a)$ em negativo e não-negativo, e notamos que ambas as partes são iguais fazendo $n \mapsto -n-1$.

$$\begin{aligned} f(1,a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

A seguir, separamos o índice da nova série em n par e ímpar. Fazendo as trocas usuais $n \mapsto 2n$ e $n \mapsto 2n-1$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} &= 2\left(\sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv 0 \pmod 2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n\equiv 1 \pmod 2}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) \\ &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{n(2n-1)} \right). \end{aligned}$$

Por fim, basta notar que, fazendo $n \mapsto -n$ na primeira soma, o índice passa a percorrer os inteiros não-positivos, e o somando torna-se o mesmo da segunda soma, assim

$$2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{n(2n-1)} \right) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(2n-1)} = 2f(a,a^3). \tag{2.24}$$

(iii) Similarmente a antes, vamos separar a série que define $f(-1,a)$ nos índices positivos e não-positivos, e realizar a troca $n \mapsto -n+1$ na soma onde os índices são não-positivos.

$$\begin{aligned} f(-1,a) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right] a^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

Agora, como $n(n+1) = n^2 + n \equiv n^2 - 3n \not\equiv n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \pmod 4$, segue que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ e $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ têm paridades distintas, e daí $f(-1, a) = 0$.

(iv) Começamos fazendo $n \mapsto n+m$ e evidenciando o termo $a^{\frac{m^2+m}{2}} b^{\frac{m^2-m}{2}}$ que aparece naturalmente

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2+n}{2}} b^{\frac{n^2-n}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2+2nm+m^2+n+m}{2}} b^{\frac{n^2+2nm+m^2-n-m}{2}} \\
&= a^{\frac{m^2+m}{2}} b^{\frac{m^2-m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2+n}{2}} a^{mn} b^{\frac{n^2-n}{2}} b^{mn}.
\end{aligned}
$$

Escrevendo $n = \dfrac{n^2+n}{2} - \dfrac{n^2-n}{2}$ nas potências de a^m e b^m, obtemos

$$
\begin{aligned}
a^{\frac{m^2+m}{2}} b^{\frac{m^2-m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2+n}{2}} a^{mn} b^{\frac{n^2-n}{2}} b^{mn} &= a^{\frac{m^2+m}{2}} b^{\frac{m^2-m}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n^2+n}{2}} b^{\frac{n^2-n}{2}} (ab)^{m\frac{n^2+n}{2}} (ab)^{-m\frac{n^2-n}{2}} \\
&= a^{\frac{m^2+m}{2}} b^{\frac{m^2-m}{2}} f(a(ab)^m, b(ab)^{-m}).
\end{aligned}
$$

$\square$

Observe que no item *(ii)* é mostrada a igualdade das séries na definição de ψ em (2.23).

O próximo resultado é, segundo Berndt, o resultado mais importante e útil na teoria de funções theta. Sua demonstração, bem como as demonstrações dos outros resultados apresentados a seguir, pode ser encontrada no primeiro capítulo de [6].

Teorema 2.13 (Identidade do Produto Triplo de Jacobi)**.** *Se* a, $b \in \mathbb{C}$ *satisfazem* $|ab| < 1$, *então*

$$
f(a,b) = (-a; ab)(-b; ab)(ab; ab). \tag{2.25}
$$

O seguinte teorema também é fundamental, sendo usado diversas vezes em [6], e do qual também faremos uso para obter algumas equações ao longo do trabalho.

Teorema 2.14 (Identidade de Jacobi)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}} = (q;q)^3 \tag{2.26}$$

O último teorema que trazemos nesta seção também é bastante útil na teoria de funções theta, e possui dois corolários que nos auxiliarão na obtenção de duas equações no capítulo posterior.

Teorema 2.15 (Identidade do Produto Quíntuplo)**.** *Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+n}(z^{3n}q^{-3n} - z^{-3n-1}q^{3n+1}) = (q^2;q^2)(qz;q^2)(qz^{-1};q^2)(z^2;q^4)(q^4z^{-2};q^4). \tag{2.27}$$

Corolário 2.2.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (6n+1)q^{3n^2+n} = (q^2;q^2)^3(q^2;q^4)^2 \tag{2.28}$$

Corolário 2.3.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (3n+1)q^{3n^2+2n} = (q^2;q^2)(q;q^2)^2(q^4;q^4)^2 \tag{2.29}$$

2.4 A conexão entre funções hipergeométricas e funções theta

Nesta seção apresentaremos os teoremas e definições principais do Capítulo 5 de [6]. É importante observar que, na verdade, este trabalho utiliza somente os últimos teoremas dessa seção. Apesar disso, pensamos que listar somente tais teoremas seria um desfavor às suas compreensões.

Vamos começar definindo séries hipergeométricas.

Definição 2.8. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{C}$, tais que c não é um inteiro não-positivo. Então, para $|z| < 1$, a função hipergeométrica Gaussiana (ou ordinária) é definida por*

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \tag{2.30}$$

onde, para um número complexo a, $(a)_n$ denota o fatorial crescente dado por

$$(a)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (a + j) = a(a + 1) \cdots (a + (n - 1)). \tag{2.31}$$

Em [6], o autor define integrais elípticas e mostra uma série de equações úteis para mostrar o que chama de Teorema Principal. Aqui, por brevidade, vamos omitir algumas dessas equações, dando ênfase somente ao que é estritamente necessário. Primeiro, para $0 < x < 1$ defina

$$F(x) = \exp\left(-\pi \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - x)}{{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x)}\right). \tag{2.32}$$

Com isto, pode-se mostrar o seguinte teorema.

Teorema 2.16. *Se $|q| < 1$, então*

$$F\left(1 - \frac{\phi(-q)^4}{\phi(q)^4}\right) = q. \tag{2.33}$$

E, enfim, temos o que Berndt chama de Teorema Principal.

Teorema 2.17. *Para $0 < x < 1$, tem-se*

$$\phi(F(x))^2 = {}_2F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; x). \tag{2.34}$$

Estes últimos dois teoremas nos trazem uma importante relação entre um certo tipo de série hipergeométrica e a função ϕ. Basicamente, dado q com $|q| < 1$, definindo

$$x := 1 - \frac{\phi(-q)^4}{\phi(q)^4}, \tag{2.35}$$

$$y := \pi \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - x)}{{}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; x)}, \tag{2.36}$$

$$z := {}_2F_1(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; x), \tag{2.37}$$

os últimos dois teoremas nos garantem que $q = e^{-y}$, e ainda, que

$$\phi(q)^2 = z. \tag{2.38}$$

A ideia é que, se tivermos uma expressão envolvendo a função $\phi(q)$, podemos usar estas identidades para reescrever a expressão, e isso às vezes pode ser útil para manipulá-la, ou para obtermos outras expressões semelhantes. O modo como isso ocorre deve ficar mais claro com os teoremas que seguem.

Por um momento, vamos trabalhar com as variáveis x, y e z sem envolver q ou $\phi(q)$. Seja $0 < x < 1$, e suponha que y e z satisfazem, respectivamente, (2.36) e (2.37). Do mesmo modo, seja $0 < x' < 1$, e sejam y' e z' definidos por (2.36) e (2.37) com x, y e z trocados por x', y' e z'. Suponha ainda que x' está relacionado a x por

$$x' = \left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2. \tag{2.39}$$

Então pode-se mostrar que y' e z' estão relacionados a x, y e z por

$$y' = 2y, \tag{2.40}$$

$$z' = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x})z \quad . \tag{2.41}$$

Em outras palavras, temos o seguinte Teorema.

Teorema 2.18 (Princípio da Duplicação)**.** *Seja $0 < x < 1$ e sejam y, z, x', y' e z' satisfazendo, respectivamente, (2.36), (2.37), (2.39) e, (2.36) e (2.37) com x, y e z trocados por x', y' e z'. Se x', y' e z' satisfazem uma equação da forma*

$$\Omega(x', y', z') = 0 \tag{2.42}$$

então x, y e z satisfazem

$$\Omega\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2, 2y, \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x})z\right) = 0. \tag{2.43}$$

Por outro lado, escrevendo x, y e z em função de x', y' e z' nas equações anteriores, obtemos

$$x = \frac{4\sqrt{x'}}{(1+\sqrt{x'})^2}, \tag{2.44}$$

$$y = \frac{1}{2}y', \tag{2.45}$$

$$z = (1+\sqrt{x'})z', \tag{2.46}$$

e, com isso, temos outro Teorema análogo.

Teorema 2.19 (Princípio da Dimidiação)**.** *Seja* $0 < x' < 1$ *e sejam* y*,* z*,* x*,* y' *e* z' *satisfazendo, respectivamente, (2.36), (2.37), (2.44) e, (2.36) e (2.37) com* x*,* y *e* z *trocados por* x'*,* y' *e* z'*. Se* x*,* y *e* z *satisfazem uma equação da forma*

$$\Omega(x, y, z) = 0 \tag{2.47}$$

então x'*,* y' *e* z' *satisfazem*

$$\Omega\left(\frac{4\sqrt{x'}}{(1+\sqrt{x'})^2}, \frac{1}{2}y', (1+\sqrt{x'})z'\right) = 0. \tag{2.48}$$

Utilizando os Princípios de Duplicação e Dimidiação, podemos obter uma série de expressões em função de x e z para $\phi(q^n)$ e para $\psi(q^n)$ com n par positivo ou o inverso multiplicativo de um par positivo. E são destas equações que faremos uso de fato.

Teorema 2.20. *Seja* $|q| < 1$ *e sejam* x *e* z *dados por (2.35) e (2.37), respectivamente. Então valem as seguintes equações*

$$\phi(q) = z^{\frac{1}{2}}, \tag{2.49}$$

$$\phi(-q) = z^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.50}$$

$$\phi(-q^2) = z^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{8}}, \tag{2.51}$$

$$\phi(q^2) = 2^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}\left\{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.52}$$

$$\phi(q^4) = 2^{-1}z^{\frac{1}{2}}\left\{1+(1-x)^{\frac{1}{4}}\right\}, \tag{2.53}$$

$$\phi(q^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.54}$$

$$\phi(-q^{\frac{1}{2}}) = z^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.55}$$

Teorema 2.21. *Seja $|q| < 1$ e sejam x e z dados por (2.35) e (2.37), respectivamente. Então valem as seguintes equações*

$$\psi(q) = 2^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{8}}, \tag{2.56}$$

$$\psi(-q) = 2^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \left\{x(1-x)q^{-1}\right\}^{\frac{1}{8}}, \tag{2.57}$$

$$\psi(q^2) = 2^{-1} z^{\frac{1}{2}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{2.58}$$

$$\psi(q^4) = 2^{-\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} \left\{\left[1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] q^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{2.59}$$

$$\psi(q^8) = 2^{-2} z^{\frac{1}{2}} \left\{1 - (1-x)^{\frac{1}{4}}\right\} q^{-1}, \tag{2.60}$$

$$\psi(q^{\frac{1}{2}}) = 2^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{4}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{16}}, \tag{2.61}$$

$$\psi(-q^{\frac{1}{2}}) = 2^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{16}}. \tag{2.62}$$

Teorema 2.22. *Seja $|q| < 1$ e sejam x e z dados por (2.35) e (2.37), respectivamente. Então valem as seguintes equações*

$$f(q, -q^2) = 2^{-\frac{1}{6}} z^{\frac{1}{2}} \left\{x(1-x)q^{-1}\right\}^{\frac{1}{24}}, \tag{2.63}$$

$$f(-q, -q^2) = 2^{-\frac{1}{6}} z^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{6}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{24}}, \tag{2.64}$$

$$f(-q^2, -q^4) = 2^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{2}} \{x(1-x)q^{-1}\}^{\frac{1}{12}}, \tag{2.65}$$

$$f(-q^4, -q^8) = 2^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{24}} \left(xq^{-1}\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{2.66}$$

Para encerrar esta seção, segue outra fórmula que nos será útil mais adiante.

Teorema 2.23. *Seja $0 < x < 1$ e sejam y e z dados por (2.36) e (2.37), respectivamente. Então*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x(1-x)z^2}. \tag{2.67}$$

2.5 Equações Modulares

Nesta seção definiremos equações modulares, cujo uso será extensivo para a obtenção de algumas identidades no Capítulo seguinte. A definição aqui utilizada é uma adaptação daquela exposta em [6], visto que não definimos integrais elípticas, mas é equivalente.

Definição 2.9. *Sejam* $0 < \alpha$, $\beta < 1$. *Suponha que*

$$n\frac{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\alpha)}{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\alpha)} = \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\beta)}{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\beta)} \tag{2.68}$$

para algum inteiro positivo n. *Uma relação entre* α *e* β *induzida por (2.68) é dita uma equação modular de grau* n. *Freqüentemente, também dizemos que* β *tem grau* n *sobre* α.

Vamos ver como isso fica usando os Teoremas da seção anterior. Dado q com $|q| < 1$, e n um inteiro positivo, defina

$$\alpha := 1 - \frac{\phi^4(-q)}{\phi^4(q)}, \tag{2.69}$$

$$z_1 := {}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;\alpha), \tag{2.70}$$

$$\beta := 1 - \frac{\phi^4(-q^n)}{\phi^4(q^n)}, \tag{2.71}$$

$$z_n := {}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;\beta), \tag{2.72}$$

$$m := \frac{z_1}{z_n}, \tag{2.73}$$

onde m é chamado multiplicador de grau n. Como na seção anterior, podemos então concluir que

$$z_1 = \phi^2(q), \tag{2.74}$$

$$z_n = \phi^2(q^n), \tag{2.75}$$

e então podemos utilizar todas as fórmulas dos Teoremas 2.20 e 2.21 com α, q e z_1 ou β, q^n e z_n no lugar de x, q e z, respectivamente. A importância disso está ao notar que, pelo Teorema 2.16, temos

$$q = F(\alpha) = e^{-\pi \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\alpha)}{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\alpha)}} \qquad \text{e} \qquad q^n = F(\beta) = e^{-\pi \frac{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-\beta)}{{}_2F_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\beta)}}, \tag{2.76}$$

e destas duas equações segue que, definidos dessa forma, sempre temos β com grau n sobre α. Assim, vemos que uma equação modular pode ser vista como uma identidade de funções theta, fazendo as substituições acima. Neste ponto, Berndt observa que, na verdade, usualmente primeiro provam-se identidades com funções theta e a partir delas que obtém-se equações modulares. Apesar disso, ele aponta que não há um método comum para encontrar equações modulares, e em geral precisa-se de muitas ferramentas e recursos para tal. Nesse sentido, o seguinte Teorema é bastante útil, pois obtém uma equação modular a partir de outra equação modular de mesmo grau.

Teorema 2.24 (Método de Reciprocação)**.** *Se trocarmos α por $1-\beta$, β por $1-\alpha$, e m por $\dfrac{n}{m}$ numa equação modular de grau n, então obtemos uma nova equação modular de grau n.*

Em sequência, Berndt traz algumas identidades envolvendo funções theta, para utilizar a seguir na obtenção de funções modulares. Encerramos este capítulo listando as equações modulares que nos serão interessantes.

Teorema 2.25 (Equações Modulares de Grau 3)**.** *Seja β de grau 3 sobre α, e seja m o multiplicador de grau 3. Então*

$$\left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{8}} - \left(\frac{(1-\alpha)^3}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{8}} = 1 = \left(\frac{(1-\beta)^3}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} - \left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}, \tag{2.77}$$

$$(\alpha\beta)^{\frac{1}{4}} + \{(1-\alpha)(1-\beta)\}^{\frac{1}{4}} = 1, \tag{2.78}$$

$$m = 1 + 2\left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}, \quad \frac{3}{m} = 1 + 2\left(\frac{(1-\alpha)^3}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{8}}, \tag{2.79}$$

$$m^2\left\{\left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{8}} - \alpha\right\} = \left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{8}} - \beta, \tag{2.80}$$

$$\alpha = \frac{(m-1)(m+3)^3}{16m^3}, \quad \beta = \frac{(m-1)^3(m+3)}{16m}, \tag{2.81}$$

$$1-\alpha = \frac{(m+1)(3-m)^3}{16m^3}, \quad 1-\beta = \frac{(m+1)^3(3-m)}{16m}, \tag{2.82}$$

$$m^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.83}$$

$$\frac{9}{m^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta(1-\beta)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.84}$$

3 EQUAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos uma série de equações necessárias para provar os teoremas de interesse. Todas as equações serão acompanhadas de demonstração e, possivelmente, referências de onde podem ser encontradas. As equações foram agrupadas por semelhanças nas suas demonstrações.

Na primeira seção, traremos equações básicas que decorrem quase diretamente do Teorema do Produto Triplo de Jacobi, do Teorema do Produto Quíntuplo, e de seus corolários, acompanhadas de algumas manipulações de produtos.

A segunda seção trata de equações cuja obtenção exige alguma manipulação de séries. As primeiras são dissecções das séries que definem alguns casos especiais de funções theta, e então passamos a manipulações mais complicadas.

Duas equações cuja demonstração exige uso de equações modulares serão tratadas na Seção 3.

Finalmente, na Seção 4 introduzimos o operador $P_{t,s}$, que associa a uma série de potências de q a série que leva em conta somente as potências de q congruentes a s módulo t. Em seguida, obtemos algumas equações envolvendo tal operador.

3.1 Fórmulas Básicas

Nesta seção, utilizaremos algumas identidades do capítulo anterior para escrever algumas funções theta utilizando os símbolos $E(q^n)$. Começaremos reescrevendo $E(-q)$. Para tanto, usaremos algumas igualdades listadas a seguir, todas explicitadas para leitores desacostumados com a notação adotada:

$$(-q;-q) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-(-q)^{1+n}) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{1+2n})\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2+2n}) = (-q;q^2)(q^2;q^2),$$

$$(-q;q^2)(q;q^2) = \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{1+2n})\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{1+2n}) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2+4n}) = (q^2;q^4),$$

$$(q;q^2)(q^2;q^2) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{1+2n})\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2+2n}) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{1+n}) = (q;q).$$

Com estas igualdades, e utilizando também a última igualdade com $q \mapsto q^2$, temos

$$E(-q) = (-q;-q) = (-q;q^2)(q^2;q^2) = \frac{(q^2;q^4)(q^2;q^2)}{(q;q^2)} = \frac{(q^2;q^2)^3}{(q;q)(q^4;q^4)}. \tag{3.1}$$

A partir daqui, as igualdades intermediárias não serão mais explicitadas em cada equação, mas todas são semelhantes às recém mostradas. Na Proposição a seguir, escreveremos uma série de funções theta em função de $E(q^n)$.

Proposição 3.1. *Valem as seguintes igualdades:*

(i)
$$f(-q,-q^2) = E(q); \tag{3.2}$$

(ii)
$$\phi(q) = \frac{E(q^2)^5}{E(q)^2E(q^4)^2}; \tag{3.3}$$

(iii)
$$\phi(-q) = \frac{E(q)^2}{E(q^2)}; \tag{3.4}$$

(iv)
$$\psi(q) = \frac{E(q^2)^2}{E(q)}; \tag{3.5}$$

(v)
$$\psi(-q) = \frac{E(q)E(q^4)}{E(q^2)}; \tag{3.6}$$

(vi)
$$f(q,q^2) = \frac{E(q^2)E(q^3)^2}{E(q)E(q^6)}; \tag{3.7}$$

(vii)
$$f(q,q^5) = \frac{E(q^2)^2E(q^3)E(q^{12})}{E(q)E(q^4)E(q^6)}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Os ítens (i), (ii), (iv), (vi) e (vii) decorrem do Produto Triplo de Jacobi.

(i)

$$f(-q,-q^2) = (q;q^3)(q^2;q^3)(q^3;q^3) = (q;q).$$

(ii)

$$\phi(q) = (-q;q^2)^2(q^2;q^2) = \frac{(q^2;q^4)^2(q^2;q^2)}{(q;q^2)^2}$$
$$= \frac{(q^2;q^2)^3}{(q;q^2)^2(q^4;q^4)^2} = \frac{(q^2;q^2)^5}{(q;q)^2(q^4;q^4)^2}.$$

(iii) Aplicamos ao item (*ii*) a equação (3.1), como segue

$$\phi(-q) = \frac{E(q^2)^5}{E(-q)^2E(q^4)^2} = \frac{E(q^2)^5E(q)^2E(q^4)^2}{E(q^2)^6E(q^4)^2} = \frac{E(q)^2}{E(q^2)}.$$

(iv)

$$\begin{aligned}\psi(q) = (-q;q^4)(-q^3;q^4)(q^4;q^4) &= \frac{(-q;-q)}{(q^2;q^4)}\\ = \frac{E(-q)(q^4;q^4)}{(q^2;q^2)} &= \frac{E(q^2)^2}{E(q)}.\end{aligned}$$

(v) Utilizando o item (*iv*) e a equação (3.1), obtemos

$$\psi(-q) = \frac{E(q^2)^2}{E(-q)} = \frac{E(q)E(q^4)}{E(q^2)}.$$

(vi)

$$\begin{aligned}f(q,q^2) = (-q;q^3)(-q^2;q^3)(q^3;q^3) &= \frac{(-q;q)(q^3;q^3)}{(-q^3;q^3)}\\ = \frac{(q^2;q^2)(q^3;q^3)}{(q;q)(-q^3;q^3)} &= \frac{(q^2;q^2)(q^3;q^3)^2}{(q;q)(q^6;q^6)}.\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}f(q,q^5) = (-q;q^6)(-q^5;q^6)(q^6;q^6) &= \frac{(-q;q^2)(q^6;q^6)}{(-q^3;q^6)}\\ = \frac{(q^2;q^4)(q^6;q^6)(q^3;q^6)}{(q;q^2)(q^6;q^{12})} &= \frac{(q^2;q^4)(q^3;q^3)}{(q;q^2)(q^6;q^{12})}\\ = \frac{(q^2;q^2)(q^3;q^3)}{(q^4;q^4)(q;q^2)(q^6;q^{12})} &= \frac{(q^2;q^2)^2(q^3;q^3)(q^{12};q^{12})}{(q;q)(q^4;q^4)(q^6;q^6)}.\end{aligned}$$

□

Utilizando algumas dessas fórmulas, podemos provar o seguinte

Proposição 3.2. *Valem*

(i)
$$\phi(-q^8)^2\psi(q^8) = E(q^8)^3; \tag{3.9}$$

(ii)
$$\phi(-q^2)\psi(q) = \phi(q)\psi(-q); \tag{3.10}$$

(iii)
$$\psi(q)^2 = \phi(q)\psi(q^2). \tag{3.11}$$

Demonstração. *(i)* Utilizando (3.4) e (3.5) com q^8 no lugar de q, temos

$$\phi(-q^8)^2\psi(q^8) = \frac{E(q^8)^4E(q^{16})^2}{E(q^{16})^2E(q^8)} = E(q^8)^3.$$

(ii) Aqui basta utilizar (3.4) com q^2 no lugar de q, junto de (3.5), (3.3) e (3.6).

$$\begin{aligned}\phi(-q^2)\psi(q) &= \frac{E(q^2)^2E(q^2)^2}{E(q^4)E(q)} = \frac{E(q^2)^4}{E(q^4)E(q)}\\ &= \frac{E(q^2)^5E(q)E(q^4)}{E(q)^2E(q^4)^2E(q^2)} = \phi(q)\psi(-q).\end{aligned}$$

(iii) Das equações (3.5) e (3.3), temos

$$\psi(q)^2 = \frac{E(q^2)^4}{E(q)^2} = \frac{E(q^2)^5}{E(q)^2E(q^4)^2}\frac{E(q^4)^2}{E(q^2)} = \phi(q)\psi(q^2).$$

□

Agora faremos uso da Identidade de Jacobi para obter outras duas equações.

Proposição 3.3. *Se* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *denota o símbolo de Kronecker, então*

(i)
$$\sum_{n>0}\left(\frac{-4}{n}\right)nq^{n^2} = qE(q^8)^3; \tag{3.12}$$

(ii)
$$\sum_{n>0}\left(\frac{-2}{n}\right)nq^{n^2} = qE(-q^8)^3. \tag{3.13}$$

Demonstração. A ideia de ambas as demonstrações é calcular os símbolos de Kronecker e, após algumas manipulações, aplicar a Identidade de Jacobi.

(i) Da equação (2.4) temos

$$\sum_{n>0}\left(\frac{-4}{n}\right)nq^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)q^{(4n+1)^2} - (4n+3)q^{(4n+3)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)q^{16n^2+8n+1} - (4n+3)q^{16n^2+24n+9}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (4n+1)q^{8n(2n+1)} - (4n+3)q^{8(n+1)(2n+1)}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (2(2n)+1)q^{8\frac{2n(2n+1)}{2}} - (2(2n+1)+1)q^{8\frac{(2n+2)(2n+1)}{2}}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)(q^8)^{\frac{n(n+1)}{2}} = q(q^8;q^8)^3$$

onde a última igualdade segue da Identidade de Jacobi.

(ii) Utilizando a equação (2.5) segue que

$$\sum_{n>0} \left(\frac{-2}{n}\right) nq^{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (8n+1)q^{(8n+1)^2} + (8n+3)q^{(8n+3)^2}$$
$$- (8n+5)q^{(8n+5)^2} - (8n+7)q^{(8n+7)^2}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (8n+1)q^{64n^2+16n} + (8n+3)q^{64n^2+48n+8}$$
$$- (8n+5)q^{64n^2+80n+24} - (8n+7)q^{64n^2+112n+48}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (2(4n)+1)q^{8\cdot 2n(4n+1)}$$
$$+ (2(4n+1)+1)q^{8(2n+1)(4n+1)}$$
$$- (2(4n+2)+1)q^{8(2n+1)(4n+3)}$$
$$- (2(4n+3)+1)q^{8(2n+2)(4n+3)}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (2(4n)+1)(-q^8)^{\frac{4n(4n+1)}{2}}$$
$$- (2(4n+1)+1)(-q^8)^{\frac{(4n+2)(4n+1)}{2}}$$
$$+ (2(4n+2)+1)(-q^8)^{\frac{(4n+2)(4n+3)}{2}}$$
$$- (2(4n+3)+1)(-q^8)^{\frac{(4n+4)(4n+3)}{2}}$$
$$= q\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)(-q^8)^{\frac{n(n+1)}{2}} = q(-q^8;-q^8)^3.$$

□

Por fim, trataremos de duas identidades que seguem fazendo uso do Teorema do Produto Quíntuplo, mais especificamente de seus corolários.

Proposição 3.4. *Valem*

(i)
$$\sum_{n>0}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{n^2}=q\frac{E(q^{24})^5}{E(q^{48})^2}; \tag{3.14}$$

(ii)
$$\sum_{n>0}(-1)^{n+1}\left(\frac{-3}{n}\right)nq^{n^2}=q\frac{E(q^6)^5}{E(q^3)^2} \tag{3.15}$$

Demonstração. *(i)* Aplicando (2.6), separando a série nos termos cujos coeficientes de q^n são não-negativos e os que são negativos, fazendo $n\mapsto -n-1$ na série cujos coeficientes são negativos, e notando que $(-6n-1)^2=(6n+1)^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n>0}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{n^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}-(6n+5)q^{(6n+5)^2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}+\sum_{n=-\infty}^{-1}(6n+1)q^{(6n+1)^2}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}\end{aligned}$$

Agora, abrimos os quadrados nas potências e, como na Proposição anterior, evidenciamos q, para então aplicar a equação (2.28).

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{36n^2+12n+1}\\&=q\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)(q^{12})^{3n^2+n}\\&=q(q^{24};q^{24})^3(q^{24};q^{48})^2\\&=q\frac{(q^{24};q^{24})^5}{(q^{48};q^{48})^2}\end{aligned}$$

(ii) Como antes, separamos a série em duas, uma onde $\left(\frac{-3}{n}\right)>0$ e outra onde $\left(\frac{-3}{n}\right)<0$, fazendo uso de (2.7), e na segunda faremos a troca

de índice $n \mapsto -n-1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n>0}(-1)^{n+1}\left(\frac{-3}{n}\right)nq^{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}-(6n+4)q^{(6n+4)^2} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(6n+2)q^{(6n+2)^2}-(6n+5)q^{(6n+5)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}-(6n+4)q^{(6n+4)^2} \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{-1}-(6n+4)q^{(6n+4)^2}+(6n+1)q^{(6n+1)^2} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}-(6n+4)q^{(6n+4)^2}.
\end{aligned}$$

Agora basta abrir os quadrados e manipular os termos da soma, para então aplicar 2.29, como segue

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{(6n+1)^2}-(6n+4)q^{(6n+4)^2} \\
&\qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(6n+1)q^{36n^2+12n+1}-(6n+4)q^{36n^2+48n+16} \\
&\qquad = q\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3(2n)+1)(-q^3)^{3(2n)^2+2(2n)} \\
&\qquad\qquad + (3(2n+1)+1)(-q^3)^{3(2n+1)^2+2(2n+1)} \\
&\qquad = q\sum_{n=-\infty}^{\infty}(3n+1)(-q^3)^{3n^2+2n} \\
&\qquad = q(q^6;q^6)(-q^3;q^6)^2(q^{12};q^{12})^2 \\
&\qquad = q\frac{(q^6;q^6)(q^6;q^{12})^2(q^{12};q^{12})^2}{(q^3;q^6)^2} = q\frac{(q^6;q^6)^5}{(q^3;q^3)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Manipulação de Séries

Começaremos esta seção introduzindo duas séries duplas que nos serão essenciais ao longo do trabalho.

$$a(q) := \sum_{x,y} q^{x^2+xy+y^2} \tag{3.16}$$

$$c(q) := \sum_{x,y} q^{x^2+xy+y^2+x+y} \tag{3.17}$$

Agora, apresentamos algumas dissecções e uma trissecção de certas funções theta e de $c(q)$.

Proposição 3.5. *Valem*

(i) $$\phi(q) = \phi(q^4) + 2q\psi(q^8); \tag{3.18}$$

(ii) $$\phi(q) = \phi(q^9) + 2qf(q^3, q^{15}); \tag{3.19}$$

(iii) $$f(q, q^5) = f(q^8, q^{16}) + qf(q^4, q^{20}); \tag{3.20}$$

(iv) $$c(q) = 3\sum_{x,y} q^{3x^2+2x+9xy+9y^2+3y}. \tag{3.21}$$

Demonstração. *(i)* Aqui basta separar as potências pares e ímpares de q na expansão de $\phi(q)$.

$$\begin{aligned}\phi(q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(2n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{4n^2} + q\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{4n^2+4n} = \phi(q^4) + 2q\psi(q^8).\end{aligned}$$

(ii) Semelhantemente ao item anterior, separamos os termos da série que define $\phi(q)$ em potências múltiplas de 3, congruentes a 1 módulo 3 e congruentes a -1 módulo 3. Então, notamos que as duas últimas são iguais fazendo $n \mapsto -n$.

$$\begin{aligned}\phi(q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(3n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(3n+1)^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(3n-1)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{9n^2} + 2q\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{9n^2+6n} = \phi(q^9) + 2qf(q^3, q^{15}).\end{aligned}$$

(iii) Novamente, separamos a série nas potências pares e ímpares.

$$\begin{aligned} f(q,q^5) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3n^2+2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3(2n)^2+2(2n)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{3(2n-1)^2+2(2n-1)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{12n^2+4n} + q\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{12n^2-8n} = f(q^8,q^{16}) + qf(q^4,q^{20}). \end{aligned}$$

(iv) Desta vez, separaremos a série em três ao invés de duas, de acordo com classe de equivalência de $x-y$ módulo 3. Fazendo a troca $x \leftrightarrow y$ na terceira série, obtemos

$$\begin{aligned} c(q) &= \sum_{x\equiv y \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} + \sum_{x\equiv y+1 \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} \\ &\qquad + \sum_{x\equiv y-1 \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} \\ &= \sum_{x\equiv y \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} + \sum_{x\equiv y+1 \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} \\ &\qquad + \sum_{y\equiv x-1 \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} \\ &= \sum_{x\equiv y \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y} + 2\sum_{x\equiv y+1 \pmod 3} q^{x^2+x+xy+y^2+y}. \end{aligned}$$

Para $x \equiv y \pmod 3$, faça $y \mapsto 3y+x$, e para $x \equiv y+1 \pmod 3$ faça $y \mapsto 3y+x-1$.

$$\begin{aligned} c(q) &= \sum_{x,y} q^{x^2+x+x(3y+x)+(3y+x)^2+(3y+x)} + 2\sum_{x,y} q^{x^2+x+x(3y+x-1)+(3y+x-1)^2+(3y+x-1)} \\ &= \sum_{x,y} q^{3x^2+2x+9xy+9y^2+3y} + 2\sum_{x,y} q^{3x^2-x+9xy+9y^2-3y}. \end{aligned}$$

Então basta mostrar que

$$\sum_{x,y} q^{3x^2-x+9xy+9y^2-3y} = \sum_{x,y} q^{3x^2+2x+9xy+9y^2+3y}.$$

Para tanto, basta fazer a translação $y \mapsto y-x$ e em seguida a troca de sinal $y \mapsto -y$, como segue

$$\sum_{x,y} q^{3x^2-x+9xy+9y^2-3y} = \sum_{x,y} q^{3x^2-x+9x(y-x)+9(y-x)^2-3(y-x)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x,y} q^{3x^2+2x-9xy+9y^2-3y} \\
&= \sum_{x,y} q^{3x^2+2x+9xy+9y^2+3y}.
\end{aligned}
$$

□

A próxima fórmula pode ser facilmente obtida das fórmulas da página 45 de [5]. Por completude, aqui traremos uma demonstração que não faz uso explícito dessas fórmulas, mas as usa implicitamente.

Proposição 3.6.

$$\phi(q)^2 = \phi(q^2)^2 + 4q\psi(q^4)^2 \tag{3.22}$$

Demonstração. Primeiro vamos avaliar a expressão $\phi(q)^2+\phi(-q)^2$. Comece notando que a paridade de x^2+y^2 e $x+y$ é a mesma. A seguir, note que, quando os índices x e y têm paridades distintas, os termos nas duas séries duplas se cancelam, e quando a paridade é a mesma, eles somam-se, como segue

$$
\begin{aligned}
\phi(q)^2 + \phi(-q)^2 &= \sum_{x,y} q^{x^2+y^2} + \sum_{x,y} (-q)^{x^2+y^2} = \sum_{x,y} q^{x^2+y^2} + \sum_{x,y} (-1)^{x+y} q^{x^2+y^2} \\
&= 2 \sum_{x \equiv y \pmod 2} q^{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Agora, fazemos $x \mapsto x+y$ e $y \mapsto x-y$, obtendo

$$
\begin{aligned}
2 \sum_{x \equiv y \pmod 2} q^{x^2+y^2} &= 2\sum_{x,y} q^{(x+y)^2+(x-y)^2} = 2\sum_{x,y} q^{2x^2+2y^2} \\
&= 2\sum_{x} q^{2x^2} \sum_{y} q^{2y^2} = 2\phi(q^2)^2.
\end{aligned}
$$

E com isso concluimos que

$$\phi(q)^2 + \phi(-q)^2 = 2\phi(q^2)^2. \tag{3.23}$$

Agora, de maneira semelhante, vamos analisar a expressão $\phi(q)^2 - \phi(-q)^2$:

$$\phi(q)^2 - \phi(-q)^2 = \sum_{x,y} q^{x^2+y^2} - \sum_{x,y} (-1)^{x+y} q^{x^2+y^2}$$

$$= 2 \sum_{x \not\equiv y \pmod 2} q^{x^2+y^2}.$$

Dessa vez, fazemos a troca de índices $x \mapsto x + y + 1$ e $y \mapsto x - y$, obtendo

$$\begin{aligned}
2 \sum_{x \not\equiv y \pmod 2} q^{x^2+y^2} &= 2\sum_{x,y} q^{(x+y+1)^2+(x-y)^2} \\
&= 2q\sum_{x,y} q^{2x^2+2x+2y^2+2y} \\
&= 2q\sum_{x} q^{2x^2+2x}\sum_{y} q^{2y^2+2y} \\
&= 8q\psi(q^4)^2.
\end{aligned}$$

E assim

$$\phi(q)^2 - \phi(-q)^2 = 8q\psi(q^4)^2. \tag{3.24}$$

Finalmente, somando as equações (3.23) e (3.24), e dividindo toda a expressão por 2, segue que

$$\phi(q)^2 = \phi(q^2)^2 + 4q\psi(q^4)^2. \tag{3.25}$$

□

Na proposição a seguir, trazemos mais três equações que utilizaremos mais tarde. A primeira delas é equivalente a equação (1.34) em [10]. A segunda equação pode ser encontrada em [7], mais precisamente como o item (i)(a) do Lema 2.1. Finalmente, a terceira equação é equivalente à equação (4.9) encontrada em [1]. Implicitamente, as demonstrações que trazemos aqui são as mesmas trazidas nos referidos textos, mas a relação entre elas fica mais clara na forma como as apresentamos aqui.

Proposição 3.7. *Se verificam as seguintes igualdades:*

(i)
$$a(q) = a(q^4) + 6q\psi(q^2)\psi(q^6); \tag{3.26}$$

(ii)
$$\phi(q)\phi(q^3) = a(q^4) + 2q\psi(q^2)\psi(q^6); \tag{3.27}$$

(iii) $$\psi(q)\psi(q^3) = \psi(q^4)\phi(q^6) + q\phi(q^2)\psi(q^{12}). \tag{3.28}$$

Demonstração. *(i)* Na série que define $a(q)$, vamos separar os índices conforme suas paridades, como segue

$$a(q) = \sum_{\substack{x\equiv 0 \pmod 2 \\ y\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2} \tag{3.29}$$

$$+ 2 \sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 2 \\ y\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2} \tag{3.30}$$

$$+ \sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 2 \\ y\equiv 1 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2}. \tag{3.31}$$

Agora analisaremos cada uma dessas séries independentemente. Na série (3.29) basta fazer a troca de índice usual $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ para obter

$$\sum_{\substack{x\equiv 0 \pmod 2 \\ y\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2} = \sum_{x,y} q^{4x^4+4xy+4y^2} = a(q^4).$$

Em (3.30), fazemos primeiro a substituição usual $(x, y) \mapsto (2x + 1, 2y)$ para então fazer algumas manipulações e, novamente fazer uma substituição de índices, desta vez $(x - y, x + y) \mapsto (u, v)$.

$$\sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 2 \\ y\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2} = \sum_{x,y} q^{4x^2+4x+1+4xy+2y+4y^2} = q\sum_{x,y} q^{(x-y)^2+(x-y)+3(x+y)^2+3(x+y)}$$

$$= q \sum_{u\equiv v \pmod 2} q^{u^2+u+3v^2+3v}. \tag{3.32}$$

Agora separamos esta série em quando u e v são ambos pares e quando são ambos ímpares. Primeiro, note que $u^2+u+3v^2+3v = (u+1)^2-(u+1)+3(v+1)^2-3(v+1)$, e portanto, fazendo $(u, v) \mapsto (u-1, v-1)$ e então $(u, v) \mapsto (-u, -v)$, a série em que ambos os índices são ímpares se reduz à série em que ambos os índices são pares, como segue

$$\sum_{\substack{u\equiv 1 \pmod 2 \\ v\equiv 1 \pmod 2}} q^{u^2+u+3v^2+3v} = \sum_{\substack{u\equiv 1 \pmod 2 \\ v\equiv 1 \pmod 2}} q^{(u+1)^2-(u+1)+3(v+1)^2-3(v+1)}$$

$$= \sum_{\substack{u\equiv 0 \pmod 2 \\ v\equiv 0 \pmod 2}} q^{u^2-u+3v^2-3v}$$

$$= \sum_{\substack{u\equiv 0 \pmod 2 \\ v\equiv 0 \pmod 2}} q^{u^2+u+3v^2+3v}.$$

Assim, utilizando este fato em (3.32), e fazendo a substituição usual $(u,v) \mapsto (2x,2y)$ obtemos

$$q \sum_{u\equiv v \pmod 2} q^{u^2+u+3v^2+3v} = 2q \sum_{\substack{u\equiv 0 \pmod 2 \\ v\equiv 0 \pmod 2}} q^{u^2+u+3v^2+3v}$$
$$= 2q\sum_{x,y} q^{4x^2+2x+12y^2+6y} = 2q\psi(q^2)\psi(q^6).$$

Para analisar (3.31), vamos novamente iniciar com a substituição usual $(x,y) \mapsto (2x+1, 2y+1)$ e, como antes, após algumas manipulações, fazemos uma outra substituição de índices, a saber $(x-y, x+y+1) \mapsto (u,v)$.

$$\sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 2 \\ y\equiv 1 \pmod 2}} q^{x^2+xy+y^2} = \sum_{x,y} q^{4x^2+6x+4y^2+6y+4xy+3} = \sum_{x,y} q^{3(x+y+1)^2+(x-y)^2}$$
$$= \sum_{u\not\equiv v \pmod 2} q^{u^2+3v^2}. \tag{3.33}$$

Note que, $u \not\equiv v \pmod 2$ é equivalente a $u+v \equiv \pm 1 \pmod 4$, então podemos separar esta última soma em quando $u+v$ é congruente a 1 módulo 4 e quando $u+v$ é congruente a -1 módulo 4. Mas observe que, fazendo $(u,v) \mapsto (-u,-v)$, tem-se

$$\sum_{u+v\equiv -1 \pmod 4} q^{u^2+3v^2} = \sum_{u+v\equiv 1 \pmod 4} q^{u^2+3v^2}.$$

Agora, note que, pondo $u = 3x+y+1$ e $v = x-y$, obtemos uma correspondência biunívoca entre $\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2; u+v \equiv 1 \pmod 4\}$ e $\{(3x+y+1, x-y) \in \mathbb{Z}^2; x,y \in \mathbb{Z}\}$. Isso, junto a igualdade obtida acima, implica que

$$\sum_{u\not\equiv v \pmod 2} q^{u^2+3v^2} = 2\sum_{u+v\equiv 1 \pmod 4} q^{u^2+3v^2} = 2\sum_{x,y} q^{(3x+y+1)^2+3(x-y)^2}$$
$$= 2q\sum_{x,y} q^{12x^2+6x+4y^2+2y} = 2q\psi(q^2)\psi(q^6) \tag{3.34}$$

e portanto, substituindo os valores obtidos em (3.29), (3.30) e (3.31), está mostrado o desejado.

(ii) Aqui, basta reescrevermos a potência de q na definição de $a(q)$, separar a série em x par e ímpar utilizando as substituições usuais $x \mapsto 2x$ e $x \mapsto 2x+1$, e então fazer a translação $y \to y - x$ em ambas as partes, como segue

$$
\begin{aligned}
a(q) = \sum_{x,y} q^{x^2+xy+y^2} &= \sum_{x,y} q^{\frac{x^2}{4}+xy+y^2+3\frac{x^2}{4}} \\
&= \sum_{x,y} q^{\left(\frac{x}{2}+y\right)^2+3\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{(x+y)^2+3x^2} + \sum_{x,y} q^{\left(x+y+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{y^2+3x^2} + \sum_{x,y} q^{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \phi(q)\phi(q^3) + q\sum_{x,y} q^{y^2+y+3x^2+3x} \\
&= \phi(q)\phi(q^3) + 4q\psi(q^2)\psi(q^6). \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

A seguir, basta usar o item *(i)* para concluirmos o desejado.

(iii) Da equação (3.34) do item *(i)* temos

$$
\begin{aligned}
2q\psi(q^2)\psi(q^6) &= \sum_{u \not\equiv v \pmod 2} q^{u^2+3v^2} \\
&= \sum_{\substack{u\equiv 1 \pmod 2 \\ v\equiv 0 \pmod 2}} q^{u^2+3v^2} + \sum_{\substack{u\equiv 0 \pmod 2 \\ v\equiv 1 \pmod 2}} q^{u^2+3v^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{4x^2+4x+1+12y^2} + \sum_{x,y} q^{4x^2+12y^2+12y+3} \\
&= 2q\phi(q^{12})\psi(q^8) + 2q^3\phi(q^4)\psi(q^{24}).
\end{aligned}
$$

Agora basta simplificar o termo $2q$ que aparece em ambos os lados da equação e, então, substituir q^2 por q para ter o que queriamos. $\square$

A seguir, vamos escrever $c(q)$ em função dos símbolos $E(q^n)$. A nossa demonstração é uma adaptação da demonstração de (1.23) de [10] para $z = 1$.

Proposição 3.8.

$$c(q) = 3\frac{E(q^3)^3}{E(q)} \tag{3.36}$$

Demonstração. A demonstração é bastante técnica. A ideia é enxergar $c(q)$ como o termo independente de uma série de potências, então trabalhar com a função definida por essa série para encontrar o valor de $c(q)$. Para tanto, usaremos a notação $CT_a(h)$ para referir-nos ao termo constante da série h, onde h é uma Série de Laurent cuja indeterminada é a.

Começamos escrevendo $x^2+xy+y^2+x+y = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+\frac{x-(-x)}{2}+\frac{y-(-y)}{2} = \frac{x^2+y^2+(-x-y)^2+x+y-(-x-y)}{2}$. Usando isso na série que define $c(q)$ e pondo $p=-x-y$, temos

$$\begin{aligned} c(q) &= \sum_{x,y} q^{x^2+y^2+xy+x+y} = \sum_{x+y+p=0} q^{\frac{x^2+y^2+p^2+x+y-p}{2}} \\ &= CT_a\left[\left(\sum_x q^{\frac{x^2+x}{2}}a^x\right)\left(\sum_y q^{\frac{y^2+y}{2}}a^y\right)\left(\sum_p q^{\frac{p^2-p}{2}}a^p\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora escrevemos as séries utilizando a notação das funções theta, e então utilizamos o Teorema do Produto Triplo de Jacobi.

$$\begin{aligned} c(q) &= CT_a\left[\left(\sum_x q^{\frac{x^2+x}{2}}a^x\right)\left(\sum_y q^{\frac{y^2+y}{2}}a^y\right)\left(\sum_p q^{\frac{p^2-p}{2}}a^z\right)\right] \\ &= CT_a[f(aq,a^{-1})^2 f(a,a^{-1}q)] \\ &= CT_a[(-aq;q)^2(-a^{-1};q)^2(q;q)^2(-a;q)(-a^{-1}q;q)(q;q)] \\ &= CT_a\left[\frac{(1+a)}{(1+\frac{1}{a})}(-aq;q)^3(-a^{-1};q)^3(q;q)^3\right]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Com isso, defina $h(a) := (-aq^{\frac{1}{2}};q)^3(-a^{-1}q^{\frac{1}{2}};q)^3(q;q)^3$, para $a\in\mathbb{C}$. Claramente, h pode ser escrita na forma de Série de Laurent, então suponha que $h(a)=\sum_n c_n a^n$. Note que:

- $h(a^{-1}) = h(a)$, donde $c_{-n}=c_n$;

- $h(aq) = \left(\dfrac{1+\frac{1}{aq^{\frac{1}{2}}}}{1+aq^{\frac{1}{2}}}\right)^3 h(a) = a^{-3}q^{-\frac{3}{2}}h(a)$, donde $c_{n+3} = q^{n+\frac{3}{2}}c_n$.

Com esta relação de recorrência, é fácil mostrar, por indução, as seguintes fórmulas para c_n em função de c_0, de c_1 ou de c_{-1}, dependendo da classe de equivalência de n módulo 3:

$$c_{3n} = q^{\frac{3n^2}{2}}c_0, \qquad c_{3n+1} = q^{\frac{3n^2+2n}{2}}c_1, \qquad c_{3n-1} = q^{\frac{3n^2-2n}{2}}c_{-1}.$$

Aplicando estas fórmulas na série de $h(a)$, e lembrando que $c_{-1} = c_1$, usando a notação de funções theta para reescrever as séries obtidas, e então aplicando como antes o Teorema do Produto Triplo de Jacobi, obtém-se

$$\begin{aligned}
h(a) &= \sum_n c_n a^n = c_0\sum_n q^{\frac{3n^2}{2}}a^{3n} + ac_1\sum_n q^{\frac{3n^2+2n}{2}}a^{3n} + a^{-1}c_{-1}\sum_n q^{\frac{3n^2-2n}{2}}a^{3n} \\
&= c_0 f(a^3q^{\frac{3}{2}}, a^{-3}q^{\frac{3}{2}}) + c_1[af(a^3q^{\frac{5}{2}}, a^{-3}q^{\frac{1}{2}}) + a^{-1}f(a^3q^{\frac{1}{2}}, a^{-3}q^{\frac{5}{2}})] \\
&= c_0(-a^3q^{\frac{3}{2}};q^3)(-a^{-3}q^{\frac{3}{2}};q^3)(q^3;q^3) \\
&\qquad + c_1(q^3;q^3)[a(-a^3q^{\frac{5}{2}};q^3)(-a^{-3}q^{\frac{1}{2}};q^3) + a^{-1}(-a^3q^{\frac{1}{2}};q^3)(-a^{-3}q^{\frac{5}{2}};q^3)].
\end{aligned}$$

Agora podemos usar as duas fórmulas que temos para $h(a)$ para determinar c_1. Para tanto, basta calcular $h(e^{i\frac{\pi}{3}}q^{\frac{1}{2}})$ segundo as duas fórmulas. Então

$$\begin{aligned}
(-e^{i\frac{\pi}{3}}q;q)^3(-e^{-i\frac{\pi}{3}};q)^3(q;q)^3 &= h(e^{i\frac{\pi}{3}}q^{\frac{1}{2}}) \\
&= c_0(q^3;q^3)^2(1;q^3) \\
&\qquad + c_1(q^3;q^3)[q^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}(q^4;q^3)(q^{-1};q^3) + q^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}}(q^2;q^3)(q;q^3)] \\
&= 0 + c_1(q^3;q^3)\left[q^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}\frac{1-\frac{1}{q}}{1-q}(q;q^3)(q^2;q^3) + q^{-\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}}(q^2;q^3)(q;q^3)\right] \\
&= q^{-\frac{1}{2}}(q;q)c_1(-e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) = -\sqrt{3}iq^{-\frac{1}{2}}(q;q)c_1.
\end{aligned}$$

Observe que $(1+e^{i\frac{\pi}{3}}X)^3(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}X)^3(1-X)^3 = (1-X^3)^3$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}i(q;q)}(-e^{i\frac{\pi}{3}}q;q)^3(1+e^{-i\frac{\pi}{3}})^3(-e^{-i\frac{\pi}{3}}q;q)^3(q;q)^3 \\
&= -\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}i(q;q)}(1+e^{-i\frac{\pi}{3}})^3(q^3;q^3)^3 = 3q^{\frac{1}{2}}\frac{(q^3;q^3)^3}{(q;q)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, retornamos à equação (3.37) e obtemos

$$
\begin{aligned}
c(q) &= CT_a\left[\frac{(1+a)}{(1+\frac{1}{a})}(-aq;q)^3(-a^{-1};q)^3(q;q)^3\right] \\
&= CT_a[a(-aq;q)^3(-a^{-1};q)^3(q;q)^3] = CT_a[ah(aq^{\frac{1}{2}})] \\
&= CT_a\left[\sum_n c_n q^{\frac{n}{2}} a^{n+1}\right] = c_{-1}q^{-\frac{1}{2}} \\
&= q^{-\frac{1}{2}}c_1 = 3\frac{E(q^3)^3}{E(q)}.
\end{aligned}
$$

□

A última equação desta seção também é um tanto trabalhosa. A demonstração de um caso mais geral pode ser encontrada como o Teorema 2.1 de [4].

Proposição 3.9.

$$
\sum_{x,y} q^{72x^2+12xy+y^2} - \sum_{x,y} q^{72x^2+60xy+13y^2} = 2qE(q^{12})^2 \tag{3.38}
$$

Demonstração. Começaremos trabalhando com cada série separadamente, dividindo-as nas classes de equivalência de y módulo 12. Inicialmente, para a primeira série, fixado $j \in \mathbb{Z}$, utilizamos a substituição $y \mapsto 12y+j$, seguida da translação $x \mapsto x-y$, para então escrever a série que considera somente os inteiros y congruentes a j módulo 12 na notação das funções theta, como segue

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \\ y\equiv j \pmod{12}}} q^{72x^2+12xy+y^2} &= \sum_{\substack{x \\ y\equiv -j \pmod{12}}} q^{72x^2+12xy+y^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{72x^2+144y^2+144xy+12jx+24jy+j^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{72x^2+72y^2+12jx+12jy+j^2} \\
&= q^{j^2}\left(\sum_x q^{72x^2+12jx}\right)^2 = q^{j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)})^2.
\end{aligned}
$$

Assim o primeiro somatório fica

$$\sum_{x,y} q^{72x^2+12xy+y^2} = \sum_{j=-5}^{6} q^{j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)})^2$$
$$= f(q^{72}, q^{72})^2 + 2\sum_{j=1}^{5} q^{j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)})^2 + q^{36} f(1, q^{144})^2. \tag{3.39}$$

Agora vamos ao segundo somatório. Como antes, para j fixado, vamos escrever a série que considera somente os inteiros y congruentes a j módulo 12 na notação de funções theta. Para tanto, começamos com a mesma substituição $y \mapsto 12y + j$, e então fazemos $x \mapsto x - 5y$ para eliminar o termo xy na potência de q.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \\ y \equiv j \pmod{12}}} q^{72x^2+60xy+13y^2} &= \sum_{\substack{x \\ y \equiv -j \pmod{12}}} q^{72x^2+60xy+13y^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{72x^2+1872y^2+720xy+60jx+312jy+13j^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{72x^2+72y^2+60jx+12jy+13j^2} \\
&= q^{13j^2} \left(\sum_{x} q^{72x^2+60jx} \right) \left(\sum_{y} q^{72y^2+12jy} \right) \\
&= q^{13j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)}) f(q^{12(6-5j)}, q^{12(6+5j)}).
\end{aligned}$$

Antes de aplicar isso no segundo somatório, vamos fazer algumas modificações. No item *(iv)* da Proposição 2.1, faça $m = 1, 2$, $a \mapsto q^a$ e $b \mapsto q^b$ para obter

$$f(q^a, q^b) = q^a f(q^{-a}, q^{2a+b}), \qquad f(q^a, q^b) = q^{3a+b} f(q^{-2a-b}, q^{3a+2b}),$$

e, com estas fórmulas, podemos obter

$$\begin{aligned}
q^4 f(q^{-4}, q^{16}) &= f(q^4, q^8), & q^9 f(q^{-9}, q^{21}) &= f(q^3, q^9), \\
q^{16} f(q^{-14}, q^{26}) &= f(q^2, q^{10}), & q^{26} f(q^{-19}, q^{31}) &= f(q^5, q^7), \\
q^{36} f(q^{-24}, q^{36}) &= f(1, q^{12}).
\end{aligned}$$

É importante notar que utilizaremos estas fórmulas com q^{12} no lugar de q. Finalmente, usando o feito até aqui, reescrevemos o segundo somatório como

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y} q^{72x^2+60xy+13y^2} &= \sum_{j=-5}^{6} q^{13j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)}) f(q^{12(6-5j)}, q^{12(6+5j)}) \\
&= f(q^{72}, q^{72})^2 + 2\sum_{j=1}^{5} q^{13j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)}) f(q^{12(6-5j)}, q^{12(6+5j)}) \\
&\quad + q^{13\cdot 36} f(1, q^{144}) f(q^{-12\cdot 24}, q^{12\cdot 36}) \\
&= f(q^{72}, q^{72})^2 + 2q^{13} f(q^{12}, q^{12\cdot 11}) f(q^{12\cdot 5}, q^{12\cdot 7}) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{4} q^{j^2} f(q^{12(6-j)}, q^{12(6+j)})^2 \\
&\quad + 2q^{13} f(q^{12\cdot 5}, q^{12\cdot 7}) f(q^{12}, q^{12\cdot 11}) + q^{36} f(1, q^{144})^2. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Agora, subtraindo (3.40) de (3.39) podemos ver que os termos referentes a $j = 0$, 2, 3, 4 e 6 se cancelam e, então,

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y} q^{72x^2+12xy+y^2} - \sum_{x,y} q^{72x^2+60xy+13y^2} \\
&= 2[qf(q^{12\cdot 5}, q^{12\cdot 7})^2 + q^{25} f(q^{12}, q^{12\cdot 11})^2 - 2q^{13} f(q^{12}, q^{12\cdot 11}) f(q^{12\cdot 5}, q^{12\cdot 7})] \\
&= 2q[f(q^{12\cdot 5}, q^{12\cdot 7}) - q^{12} f(q^{12}, q^{12\cdot 11})]^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, para concluir o desejado, basta utilizar (3.2), separar a série que define $f(-q, -q^2)$ em quando o índice n é par ou ímpar, e a seguir escrever cada série na notação de função theta.

$$\begin{aligned}
E(q) = f(-q, -q^2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(6n-1)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(2n+1)(3n+1)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{6n^2-n} - q \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{6n^2+5n} = f(q^5, q^7) - qf(q, q^{11}).
\end{aligned}$$

□

3.3 Equações Modulares

Nesta seção apresentaremos duas equações modulares e, para isso, usaremos as fórmulas apresentadas nas seções 2.4 e 2.5 do Capítulo anterior.
A primeira equação é trazida como a equação (4.15) de [1]. Em tal artigo, o autor utiliza-se de duas equações modulares de grau 3 demonstradas em [14]. Aqui, fazemos uma demonstração alternativa.

Proposição 3.10.

$$\phi(q)^4 - \phi(q^3)^4 = 8qf(q,q^5)^3\phi(q^3) \tag{3.41}$$

Demonstração. Começamos utilizando (3.8) e (3.2) para escrever

$$f(q,q^5)^3 = \frac{E(q^2)^6E(q^3)^3E(q^{12})^3}{E(q)^3E(q^4)^3E(q^6)^3} = \frac{f(-q^2,-q^4)^6f(-q^3,-q^6)^3f(-q^{12},-q^{24})^3}{f(-q,-q^2)^3f(-q^4,-q^8)^3f(-q^6,-q^{12})^3}. \tag{3.42}$$

Então, utilizando as equações (2.64), (2.65) e (2.66) do Teorema 2.22 com $x = \alpha$ e $z = z_1$ para calcular $f(-q^{2^n}, -q^{2^{n+1}})$, e com $x = \beta$ e $z = z_3$ para calcular $f(-q^{3\cdot 2^n}, -q^{3\cdot 2^{n+1}})$, obtemos

$$\begin{aligned} f(q,q^5)^3 &= \frac{2^{-\frac{9}{2}}z_1^3z_3^3[\alpha(1-\alpha)]^{\frac{1}{2}}[\beta(1-\beta)]^{\frac{5}{8}}q^{-\frac{19}{2}}}{2^{-\frac{7}{2}}z_1^3z_3^{\frac{3}{2}}[\alpha(1-\alpha)]^{\frac{5}{8}}[\beta(1-\beta)]^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{17}{2}}} \\ &= \frac{z_3^{\frac{3}{2}}[\beta(1-\beta)]^{\frac{3}{8}}}{2q[\alpha(1-\alpha)]^{\frac{1}{8}}}. \end{aligned}$$

Agora, remanejamos a primeira equação de (2.79), e a utilizamos em (2.77), para obter

$$\left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{m-1}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{(1-\beta)^3}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} = 1 + \left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{m+1}{2}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{z_3^{\frac{3}{2}}}{2q}\left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\frac{(1-\beta)^3}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{8}} &= \frac{z_3^{\frac{3}{2}}}{2q}\frac{m-1}{2}\frac{m+1}{2} \\ &= \frac{z_3^{\frac{3}{2}}(m^2-1)}{8q} = \frac{z_3^{\frac{3}{2}}(z_1^2-z_3^2)}{8qz_3^2} \\ &= \frac{(z_1^2-z_3^2)}{8qz_3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\phi(q)^4-\phi(q^3)^4}{8q\phi(q^3)} \end{aligned}$$

onde usamos a definição do multiplicador m, e a equação (2.49). Desse modo, está provada a equação. $\square$

A próxima equação segue dos ítens (i) e (ii) da Entrada 3 no Capítulo 21 de [5], junto a algumas equações que já obtivemos, mas não é explicitada no livro. Aqui, apresentaremos uma demonstração mais direta ao invés de demonstrar os ítens separadamente.

Proposição 3.11.

$$4\phi(q^3)\phi(q)a(q^2) - \phi(q)^4 = 3\phi(q^3)^4 \tag{3.43}$$

Demonstração. Vamos mostrar a equação equivalente

$$a(q^2) = \frac{\phi(q^4) + 3\phi(q^3)^4}{4\phi(q)\phi(q^3)}.$$

Partimos da equação (3.35), e então usamos as equações (2.49) e (2.58) com $x = \alpha$ e $z = z_1$ para calcular $\phi(q)$ e $\psi(q^2)$, e com $x = \beta$ e $z = z_3$ para calcular $\phi(q^3)$ e $\psi(q^6)$.

$$\begin{aligned} a(q) &= \phi(q)\phi(q^3) + 4q\psi(q^2)\psi(q^6) \\ &= z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}} + z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} \beta^{\frac{1}{4}} \\ &= z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}} \left[1 + (\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}\right] \end{aligned}$$

Multiplicando as duas equações em (2.81) e substituindo no que temos, ficamos com

$$\begin{aligned} z_1^{\frac{1}{2}} z_2^{\frac{1}{2}} \left[1 + (\alpha\beta)^{\frac{1}{4}}\right] &= z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(m-1)(m+3)}{4m}\right] \\ &= z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{m-1}{4} + \frac{3(m-1)}{4m}\right] \\ &= \frac{z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}}}{2} \left[\frac{m+3}{2} + \frac{3(m-1)}{2m}\right]. \end{aligned}$$

Agora, utilizando as equações (2.77) e (2.79), podemos concluir que

$$\left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{8}} = 1 + \left(\frac{(1-\alpha)^3}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{8}} = 1 + \frac{\frac{3}{m} - 1}{2} = \frac{\frac{3}{m} + 1}{2} \tag{3.44}$$

então, utilizando isso e a primeira equação em (2.79), seguido da definição do multiplicador m, concluimos que

$$\frac{z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}}{2}\left[m\frac{1+\frac{3}{m}}{2}+\frac{3}{m}\frac{(m-1)}{2}\right]=\frac{z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}}{2}\left[m\left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{8}}+\frac{3}{m}\left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{8}}\right]$$
$$=\frac{z_1^{\frac{3}{2}}\alpha^{\frac{3}{8}}}{2z_3^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{8}}}+\frac{3z_3^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{3}{8}}}{2z_1^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{8}}}$$

e, finalmente, fazemos algumas manipulações para aplicar a equação (2.56) com $x=\alpha$ e $z=z_1$ e com $x=\beta$ e $z=z_3$, para obter a equação

$$a(q)=\frac{2^{-\frac{3}{2}}z_1^{\frac{3}{2}}\alpha^{\frac{3}{8}}q^{-\frac{3}{8}}}{2^{-\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{8}}(q^{-3})^{\frac{1}{8}}}+\frac{3q2^{-\frac{3}{2}}z_3^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{3}{8}}(q^{-3})^{\frac{3}{8}}}{2^{-\frac{1}{2}}z_1^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{8}}q^{-\frac{1}{8}}}$$
$$=\frac{\psi(q)^3}{\psi(q^3)}+\frac{3q\psi(q^3)^3}{\psi(q)}=\frac{\psi(q)^4+3q\psi(q^3)^4}{\psi(q)\psi(q^3)}.$$

Nesta última equação, troque q por q^2. Então, use a fórmula (2.58) com $x=\alpha$ e $z=z_1$ para $\psi(q^2)$, e com $x=\beta$ e $z=z_3$ para $\psi(q^6)$. A seguir, utilizamos a definição do multiplicador de grau 3, então novamente a primeira equação de (2.79) e a equação em (3.44).

$$a(q^2)=\frac{\psi(q^2)^4+3q\psi(q^6)^4}{\psi(q^2)\psi(q^6)}=\frac{2^{-4}z_1^2\alpha q^{-1}+3q2^{-4}z_3^2\beta q^{-3}}{2^{-2}z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{4}}q^{-1}}$$
$$=\frac{z_1^2\alpha+3z_3^2\beta}{4z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{4}}}=\frac{z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}}{4}\left[m\left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}+\frac{3}{m}\left(\frac{\beta^3}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$
$$=\frac{z_1^{\frac{1}{2}}z_3^{\frac{1}{2}}}{4}\left[m\left(\frac{\frac{3}{m}+1}{2}\right)^2+\frac{3}{m}\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right].$$

Observe que

$$m\left(\frac{3+m}{2m}\right)^2+\frac{3}{m}\left(\frac{m-1}{2}\right)^2=m\frac{9+6m+m^2}{4m^2}+\frac{3}{m}\frac{m^2-2m+1}{4}$$
$$=\frac{9+6m+m^2}{4m}+\frac{3m^2-6m+3}{4m}=\frac{4m^2+12}{4m}$$
$$=m+\frac{3}{m}.$$

Substituindo isso no que tinhamos antes, utilizando novamente a definição do multiplicador, e aplicando a equação (2.49) com $x=\alpha$ e $z=z_1$ e com $x=\beta$ e $z=z_3$, enfim temos

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}}}{4}\left[m\left(\frac{\frac{3}{m}+1}{2}\right)^2+\frac{3}{m}\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right] &= \frac{z_1^{\frac{1}{2}} z_3^{\frac{1}{2}}}{4}\left[m+\frac{3}{m}\right]\\
&= \frac{z_1^{\frac{3}{2}}}{4z_3^{\frac{1}{2}}}+\frac{3z_3^{\frac{3}{2}}}{4z_1^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{\phi(q)^3}{4\phi(q^3)}+\frac{3\phi(q^3)^3}{4\phi(q)}\\
&= \frac{\phi(q)^4+3q\phi(q^3)^4}{4\phi(q)\phi(q^3)}.
\end{aligned}
$$

□

3.4 O operador $P_{t,s}$

Nesta seção, definiremos um operador no conjunto das séries de potências de q. Em seguida, apresentaremos algumas fórmulas que envolvem tal operador.

Definição 3.1. *Sejam s, t inteiros não-negativos tais que $0 \leq s < t$. Então, o operador $P_{t,s}$ é definido por*

$$
\begin{array}{rccc}
P_{t,s}: & \mathbb{C}[[q]] & \to & \mathbb{C}[[q]] \\
& \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n & \to & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{tn+s} q^{tn+s}
\end{array}
$$

Basicamente, o operador $P_{t,s}$ nos permite enxergar numa série de potências de q somente os termos cuja potência de q deixe resto s na divisão inteira por t. Agora apresentamos três equações simples do artigo [2].

Proposição 3.12. *Valem as seguintes equações*

(i)
$$P_{2,1}\left[f(q,q^5)\phi(q)\right] = qc(q^4); \tag{3.45}$$

(ii)
$$P_{4,1}\left[\frac{\phi(q)^3}{6}\right] = q\phi(q^4)^2\psi(q^8); \tag{3.46}$$

(iii) $$P_{8,1}\frac{\phi(q)^2\phi(q^2)}{4} = q\psi(q^8)\phi(q^8)\phi(q^{16}). \tag{3.47}$$

Demonstração. *(i)* Primeiro note que

$$3x^2+2x+y^2 \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow x+y \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow x \not\equiv y \pmod 2$$

e, então, fazendo quando necessário a substituição $y \mapsto x+2y+1$, temos

$$\begin{aligned}
P_{2,1}\left[f(q,q^5)\phi(q)\right] &= P_{2,1}\left[\sum_{x,y} q^{3x^2+2x+y^2}\right] \\
&= \sum_{x \not\equiv y \pmod 2} q^{3x^2+2x+y^2} \\
&= \sum_{x,y} q^{3x^2+2x+(x+2y+1)^2} \\
&= q\sum_{x,y} q^{4x^2+4y^2+4xy+4x+4y} = qc(q^4).
\end{aligned}$$

(ii) É claro que as séries de $\phi(q^n)$ e $\psi(q^n)$ possuem somente potências de q múltiplas de n. Assim, para concluir a equação desejada, basta utilizar (3.18) para ver que

$$\begin{aligned}
\phi(q)^3 &= \left[\phi(q^4)+2q\psi(q^8)\right]^3 \\
&= \phi(q^4)^3 + 6q\phi(q^4)^2\psi(q^8) + 12q^2\phi(q^4)\psi(q^8)^2 + 8q^3\psi(q^8)^3.
\end{aligned}$$

(iii) Como no item anterior, utilizamos (3.18) para ver que

$$\begin{aligned}
\phi(q)^2\phi(q^2) &= \left[\phi(q^4)+2q\psi(q^8)\right]^2\left(\phi(q^8)+2q^2\psi(q^{16})\right) \\
&= \left(\phi(q^4)^2+4q\phi(q^4)\psi(q^8)+4q^2\psi(q^8)^2\right)\left(\phi(q^8)+2q^2\psi(q^{16})\right) \\
&= \phi(q^4)^2\phi(q^8) + 4q\phi(q^4)\phi(q^8)\psi(q^8) + 4q^2\phi(q^8)\psi(q^8)^2 \\
&\quad + 2q^2\phi(q^4)^2\psi(q^{16}) + 8q^3\phi(q^4)\psi(q^8)\psi(q^{16}) + 8q^4\psi(q^8)^2\psi(q^{16}).
\end{aligned}$$

Então

$$P_{8,1}\left[\frac{\phi(q)^2\phi(q^2)}{4}\right] = P_{8,1}\left[q\phi(q^4)\phi(q^8)\psi(q^8)\right]$$

e utilizando mais uma vez (3.18), concluimos

$$q\phi(q^4)\phi(q^8)\psi(q^8) = q\phi(q^8)\psi(q^8)\phi(q^{16}) + 2q^2\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{32})$$

donde segue o desejado. $\square$

A próxima equação também está presente em [2], mas é mais trabalhosa que as que acabamos de mostrar. Para prová-la, vamos antes mostrar uma outra equação utilizando algumas das que já mostramos ao longo do capítulo.

Lema 3.1.

$$a(q^2) = \frac{E(q)^5}{f(q,q^2)E(q^2)^2} + 2q\psi(q^3)\frac{c(q^2)}{f(q,q^2)}. \tag{3.48}$$

Demonstração. Começamos multiplicando a equação (3.41) por 3 e usando (3.43) para escrever

$$\begin{aligned}
3\phi(q)^4 - 3\phi(q^3)^4 &= 24qf(q,q^5)^3\phi(q^3)\\
&\Rightarrow 3\phi(q)^4 - 4\phi(q)\phi(q^3)a(q^2) + \phi(q)^4 = 24qf(q,q^5)^3\phi(q^3)\\
&\Rightarrow -4\phi(q)\phi(q^3)a(q^2) = -4\phi(q)^4 + 24qf(q,q^5)^3\phi(q^3).
\end{aligned}$$

Agora, utilizamos as equações (3.3) e (3.8) para escrever $\phi(q)^3$ na primeira parcela e $f(q,q^5)$ na segunda parcela em função de $E(q)$. Em seguida, completamos com os termos necessários para fazer aparecer um fator $\phi(q^3)$ na primeira parcela e um fator $\phi(q)$ na segunda. Então

$$\begin{aligned}
-4\phi(q)\phi(q^3)a(q^2) &= -4\phi(q)\frac{E(q^2)^{15}}{E(q)^6E(q^4)^6} + 24q\phi(q^3)\frac{E(q^2)^6E(q^3)^3E(q^{12})^3}{E(q)^3E(q^4)^3E(q^6)^3}\\
&= -4\phi(q)\phi(q^3)\frac{E(q^2)^{15}}{E(q)^6E(q^4)^6}\frac{E(q^3)^2E(q^{12})^2}{E(q^6)^5}\\
&\quad + 24q\phi(q)\phi(q^3)\frac{E(q^2)^6E(q^3)^3E(q^{12})^3}{E(q)^3E(q^4)^3E(q^6)^3}\frac{E(q)^2E(q^4)^2}{E(q^2)^5}\\
&= -4\phi(q)\phi(q^3)\frac{E(q^2)^{15}E(q^3)^2E(q^{12})^2}{E(q)^6E(q^4)^6E(q^6)^5}\\
&\quad + 24q\phi(q)\phi(q^3)\frac{E(q^2)E(q^3)^3E(q^{12})^3}{E(q)E(q^4)E(q^6)^3}
\end{aligned}$$

e, eliminando o termo $-4\phi(q)\phi(q^3)$, temos

$$a(q^2) = \frac{E(q^2)^{15}E(q^3)^2E(q^{12})^2}{E(q)^6E(q^4)^6E(q^6)^5} - 6q\frac{E(q^2)E(q^3)^3E(q^{12})^3}{E(q)E(q^4)E(q^6)^3}.$$

Neste ponto, trocamos q por $-q$ e aplicamos a equação (3.1) para obter

$$\begin{aligned}
a(q^2) &= \frac{E(q^2)^{15}E(q^{12})^2E(-q^3)^2}{E(q^4)^6E(q^6)^5E(-q)^6} + 6q\frac{E(q^2)E(q^{12})^3E(-q^3)^3}{E(q^4)E(q^6)^3E(-q)} \\
&= \frac{E(q^2)^{15}E(q^{12})^2E(q^6)^6E(q)^6E(q^4)^6}{E(q^4)^6E(q^6)^5E(q^3)^2E(q^{12})^2E(q^2)^{18}} + 6q\frac{E(q^2)E(q^{12})^3E(q^6)^9E(q)E(q^4)}{E(q^4)E(q^6)^3E(q^3)^3E(q^{12})^3E(q^2)^3} \\
&= \frac{E(q)^6E(q^6)}{E(q^2)^3E(q^3)^2} + 6q\frac{E(q)E(q^6)^6}{E(q^2)^2E(q^3)^3}.
\end{aligned}$$

A seguir, aplicamos a equação (3.7) para obter fatores $f(q,q^2)$, então utilizamos a equação (3.36) para obter um fator $c(q^2)$, e por fim fazemos uso de (3.5) para obter um fator $\psi(q^3)$, como segue

$$\begin{aligned}
\frac{E(q)^6E(q^6)}{E(q^2)^3E(q^3)^2} + 6q\frac{E(q)E(q^6)^6}{E(q^2)^2E(q^3)^3} &= \frac{E(q)^5}{f(q,q^2)E(q^2)^2} + 6q\frac{E(q^6)^5}{f(q,q^2)E(q^2)E(q^3)} \\
&= \frac{E(q)^5}{f(q,q^2)E(q^2)^2} + 2q\frac{c(q)E(q^6)^2}{f(q,q^2)E(q^3)} \\
&= \frac{E(q)^5}{f(q,q^2)E(q^2)^2} + 2q\frac{c(q)E(q^6)^2}{f(q,q^2)E(q^3)} \\
&= \frac{E(q)^5}{f(q,q^2)E(q^2)^2} + 2q\frac{c(q)\psi(q^3)}{f(q,q^2)}.
\end{aligned}$$

□

Agora passamos a equação de interesse.

Proposição 3.13.

$$P_{24,1}\left[\phi(q)^2\phi(q^3)\right] = 4q\frac{E(q^{24})^5}{E(q^{48})^2} + 16q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}) \tag{3.49}$$

Demonstração. Primeiro usamos (3.19) para ver que

$$\begin{aligned}
\phi(q)^2\phi(q^3) &= \left(\phi(q^9) + 2qf(q^3,q^{15})\right)^2\phi(q^3) \\
&= \phi(q^3)\phi(q^9)^2 + 4q\phi(q^3)\phi(q^9)f(q^3,q^{15}) + 4q^2\phi(q^3)f(q^3,q^{15})^2
\end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$P_{3,1}\left[\phi(q)^2\phi(q^3)\right] = 4q\phi(q^3)\phi(q^9)f(q^3,q^{15}). \tag{3.50}$$

Agora utilizamos as equações (3.20) e (3.27), seguidas de (3.26) e (3.28), para escrever

$$
\begin{aligned}
4q\phi(q^3)\phi(q^9)f(q^3,q^{15}) &= 4q\left(a(q^{12})+2q^3\psi(q^6)\psi(q^{18})\right)\left(f(q^{24},q^{48})+q^3f(q^{12},q^{60})\right)\\
&= 4q\big(a(q^{48})+6q^{12}\psi(q^{24})\psi(q^{72})\\
&\qquad +2q^3\psi(q^{24})\phi(q^{36})+2q^9\phi(q^{12})\psi(q^{72})\big)\\
&\quad \big(f(q^{24},q^{48})+q^3f(q^{12},q^{60})\big)\\
&= 4qa(q^{48})f(q^{24},q^{48})+24q^{13}\psi(q^{24})\psi(q^{72})f(q^{24},q^{48})\\
&\qquad +8q^4\psi(q^{24})\phi(q^{36})f(q^{24},q^{48})+8q^{10}\phi(q^{12})\psi(q^{72})f(q^{24},q^{48})\\
&\qquad +4q^4a(q^{48})f(q^{12},q^{60})+24q^{16}\psi(q^{24})\psi(q^{72})f(q^{12},q^{60})\\
&\qquad +8q^7\psi(q^{24})\phi(q^{36})f(q^{12},q^{60})+8q^{13}\phi(q^{12})\psi(q^{72})f(q^{12},q^{60}).
\end{aligned}
$$

Disso, juntamente com (3.50), temos

$$
\begin{aligned}
P_{24,1}\left[\phi(q)^2\phi(q^3)\right] &= P_{24,1}\left[4qf(q^3,q^{15})\phi(q^3)\phi(q^9)\right]\\
&= 4qa(q^{48})f(q^{24},q^{48})+P_{24,1}\left[8q^{13}\phi(q^{12})\psi(q^{72})f(q^{12},q^{60})\right]\\
&= 4qa(q^{48})f(q^{24},q^{48})+8q^{13}\psi(q^{72})P_{24,12}\left[\phi(q^{12})f(q^{12},q^{60})\right]\\
&= 4qa(q^{48})f(q^{24},q^{48})+8q^{25}c(q^{48})\psi(q^{72})
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade segue de (3.45) com q^{12} no lugar de q. Enfim, utilizando (3.48) com q^{24} no lugar de q, concluimos

$$
4qa(q^{48})f(q^{24},q^{48})+8q^{25}c(q^{48})\psi(q^{72}) = 4q\frac{E(q^{24})^5}{E(q^{48})^2}+16q^{25}c(q^{48})\psi(q^{72}).
$$

□

4 TEOREMAS

Neste capítulo, apresentaremos os principais resultados presentes em [2]. A Seção 1 contém três Teoremas sobre a representação de certos inteiros por algumas formas, com dadas restrições em x, y e z. Mostraremos exatamente quando inteiros do tipo $8n+1$ podem ser representados pela forma $(1,1,1,0,0,0)$ com $x \equiv 1 \pmod 4$ e $y \equiv z \equiv 2 \pmod 8$, e também quando podem ser representados pela forma $(1,1,2,0,0,0)$ com $x \equiv 1 \pmod 4$, $y \equiv 4 \pmod{16}$ e z par. Por fim, mostraremos exatamente quando inteiros da forma $24n+1$ podem ser representados pela forma $(1,4,12,0,0,0)$ com $x \equiv 3 \pmod{12}$, $y \equiv z \pmod 6$ e $y+z \equiv 2 \pmod 6$.

Na segunda seção, utilizamos os resultados da Seção 1 para obter exatamente quais inteiros podem ser representados pelas formas $(9,16,36,16,4,8)$ e $(9,17,32,-8,8,6)$. A seguir, na Seção 3, a partir dos inteiros representados pela forma $(1,3,36,0,0,0)$ e os resultados da Seção 1, encontramos todos os inteiros representados pela forma $(3,4,9,0,0,0)$.

Ao longo deste capítulo, usaremos a notação

$$[q^n]F(q)$$

para denotar o coeficiente de q^n extraído de $F(q)$, quando $F(q)$ está escrito na forma de Série de Maclaurin. Além disso, dada uma forma positiva (a,b,c,d,e,f), a série de q cujas potências são dessa forma será denotada por

$$\vartheta(a,b,c,d,e,f,q) := \sum_{x,y,z} q^{ax^2+by^2+cz^2+dyz+exz+fxy} = \sum_{n\geq 0}(a,b,c,d,e,f;n)q^n,$$

e esta será chamada de *série theta associada a forma* (a,b,c,d,e,f).

4.1 Primeiros resultados

Para provar os teoremas desta seção, utilizaremos as três primeiras desigualdades do Coroário 2.1, além de várias equações dos capítulos anteriores.

Teorema 4.1. *Seja n um inteiro positivo. Então*

$$[q^{8n+1}] \sum_{\substack{x \equiv 1 \pmod 4 \\ y \equiv 2 \pmod 8 \\ z \equiv 2 \pmod 8}} q^{x^2+y^2+z^2} \geq 0, \tag{4.1}$$

com igualdade se e somente se $8n+1 = M^2$ e para todo p divisor primo de M tem-se $p \equiv 1 \pmod 4$.

Demonstração. Começamos manipulando a série de interesse. Para tanto, fazemos as substituições usuais $x \mapsto 4x+1$, $y \mapsto 8y+2$ e $z \mapsto 8z+2$, e então usamos a primeira das séries na definição de ψ em (2.23) obtendo

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x \equiv 1 \pmod 4 \\ y \equiv 2 \pmod 8 \\ z \equiv 2 \pmod 8}} q^{x^2+y^2+z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+1)^2+(8y+2)^2+(8z+2)^2} \\ &= \sum_{x,y,z} q^{16x^2+8x+64y^2+32y+64z^2+32z+9} \\ &= q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2.\end{aligned}$$

Assim, precisamos mostrar que

$$[q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 \geq 0, \tag{4.2}$$

com a mesma restrição anterior para que valha a igualdade.

Tomando a equação (3.22) com $-q$ no lugar de q, e subtraindo da própria equação (3.22), temos

$$\begin{aligned}\phi(q)^2 &= \phi(q^2)^2 + 4q\psi(q^4)^2 \\ \phi(-q)^2 &= \phi(q^2)^2 - 4q\psi(q^4)^2\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \phi(q)^2 - \phi(-q)^2 = 8q\psi(q^4)^2$$

e então, usando isso com q^8 no lugar de q, seguido de (3.9), concluimos

$$8q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 = q\psi(q^8)\left(\phi(q^8)^2 - \phi(-q^8)^2\right) = q\psi(q^8)\phi(q^8)^2 - qE(q^8)^3.$$

Agora, de (3.46) e de (3.22) com q^4 no lugar de q, temos

$$P_{4,1}\left[\frac{\phi(q)^3}{6}\right] = q\phi(q^4)^2\psi(q^8) = q\psi(q^8)\phi(q^8)^2 + 4q^5\psi(q^8)\psi(q^{16})^2 \tag{4.3}$$

donde

$$P_{8,1}\left[\frac{\phi(q)^3}{6}\right] = q\psi(q^8)\phi(q^8)^2.$$

Com o que fizemos até aqui, e com (3.12) pode-se ver que

$$P_{8,1}\left[\frac{\phi(q)^3}{6} - \sum_{n>0}\left(\frac{-4}{n}\right)nq^{n^2}\right] = q\psi(q^8)\phi(q^8)^2 - qE(q^8)^3 = 8q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2,$$

o que implica

$$[q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 = [q^{8n+1}]\frac{1}{8}\left(\frac{\phi(q)^3}{6} - \sum_{n>0}\left(\frac{-4}{n}\right)nq^{n^2}\right).$$

Assim, se $8n+1$ não é um quadrado perfeito, então

$$[q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 = \frac{(1,1,1,0,0,0;8n+1)}{48} > 0$$

por (2.8), pois $8n+1$ claramente não é da forma $4^v(8m+7)$. Por outro lado, se $8n+1 = M^2$ para certo $M \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}[q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 &= \frac{1}{8}\left(\frac{(1,1,1,0,0,0;M^2)}{6} - \left(\frac{-4}{M}\right)M\right)\\ &\geq \frac{1}{8}\left(\frac{(1,1,1,0,0,0;M^2)}{6} - M\right) \geq 0\end{aligned}$$

por (2.15). Além disso, a última desigualdade torna-se igualdade se, e só se, para todo primo p que divide M, tem-se $p \equiv 1 \pmod 4$ e, neste caso, tem-se $\left(\frac{-4}{M}\right) = 1$, donde a primeira desigualdade também torna-se igualdade. □

Teorema 4.2. *Seja n um inteiro positivo. Então*

$$[q^{8n+1}]\sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 4\\ y\equiv 4 \pmod{16}\\ z\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+y^2+2z^2} \geq 0, \tag{4.4}$$

com igualdade se e somente se $8n+1 = E^2$ e para todo p divisor primo de E tem-se $p \equiv 1,3 \pmod 8$.

Demonstração. Primeiro reescrevemos a série a ser trabalhada. Para isso, utilizamos as substituições usuais $x \mapsto 4x+1$, $y \mapsto 16y+4$ e $z \mapsto 2z$, seguidas das definições de ϕ e ψ em (2.22) e (2.23).

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x\equiv 1 \pmod 4\\ y\equiv 4 \pmod{16}\\ z\equiv 0 \pmod 2}} q^{x^2+y^2+2z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+1)^2+(16y+4)^2+2(2z)^2}\\
&= \sum_{x,y,z} q^{16x^2+8x+256y^2+128y+8z^2+17}\\
&= q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128})
\end{aligned}$$

e portanto basta mostrarmos

$$[q^{8n+1}]q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}) \geq 0, \tag{4.5}$$

com as mesmas condições anteriores para que valha a igualdade.

Semelhantemente ao que fizemos no Teorema anterior, subtraimos (3.18) com $-q$ no lugar de q da própria equação (3.18), obtendo

$$\begin{aligned}
\phi(q) &= \phi(q^4) + 2q\psi(q^8)\\
\phi(-q) &= \phi(q^4) - q\psi(q^8)
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \phi(q) - \phi(-q) = 4q\psi(q^8).$$

Utilizando isso com q^{16} no lugar de q, juntamente a (3.10), e (3.9) com $-q^8$ no lugar de q^8, ficamos com

$$\begin{aligned}
4q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}) &= q\phi(q^8)\psi(q^8)\left(\phi(q^{16}) - \phi(-q^{16})\right)\\
&= q\phi(q^8)\psi(q^8)\phi(q^{16}) - q\phi(q^8)^2\psi(-q^8)\\
&= q\phi(q^8)\psi(q^8)\phi(q^{16}) - qE(-q^8)^3.
\end{aligned}$$

Com isso, usando (3.47) e (3.13), concluimos que

$$\begin{aligned}
P_{8,1}\left[\frac{\phi(q)^2\phi(q^2)}{4} - \sum_{n>0}\left(\frac{-2}{n}\right)nq^{n^2}\right] &= q\phi(q^8)\psi(q^8)\phi(q^{16}) - qE(-q^8)^3\\
&= 4q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}),
\end{aligned}$$

e portanto

$$[q^{8n+1}]q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}) = [q^{8n+1}]\frac{1}{4}\left(\frac{\phi(q)^2\phi(q^2)}{4} - \sum_{n>0}\left(\frac{-2}{n}\right)nq^{n^2}\right).$$

Assim, se $8n+1$ não é um quadrado perfeito, então

$$[q^{8n+1}]q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}) = \frac{(1,1,2,0,0,0;8n+1)}{16} > 0$$

por (2.9), pois $8n+1$ claramente não é da forma $2\cdot 4^v(8m+7)$. Por outro lado, se $8n+1 = E^2$ para algum $E \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}[q^{8n+1}]q^{17}\phi(q^8)\psi(q^8)\psi(q^{128}) &= \frac{1}{4}\left(\frac{(1,1,2,0,0,0;E^2)}{4} - \left(\frac{-2}{E}\right)E\right)\\ &\geq \frac{1}{4}\left(\frac{(1,1,2,0,0,0;E^2)}{4} - E\right) \geq 0\end{aligned}$$

por (2.16). Além disso, a segunda desigualdade é uma igualdade se, e só se, $p \equiv 1, 3 \pmod 8$ para todo p divisor primo de E e, neste caso, tem-se $\left(\frac{-2}{E}\right) = 1$, donde a primeira desigualdade também seria uma igualdade. □

Teorema 4.3. *Seja n um inteiro positivo. Então*

$$[q^{24n+1}]\sum_{\substack{x\equiv 3 \pmod{12}\\ y\equiv z \pmod 6\\ y+z\equiv 2 \pmod 6}} q^{x^2+4y^2+12z^2} \geq 0, \tag{4.6}$$

com igualdade se e somente se $24n+1 = W^2$ e para todo p divisor primo de W tem-se $p \equiv 1 \pmod 3$.

Demonstração. Novamente vamos começar modificando a série do enunciado. Note que, de $y \equiv z \pmod 6$ e $y+z \equiv 2 \pmod 6$ podemos concluir que $y \equiv z \equiv 1 \pmod 3$. Então, fazendo as substituições $x \mapsto 12x+3$, $y \mapsto 3y+1$ e $z \mapsto 6z+3y+1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x\equiv 3 \pmod{12}\\ y\equiv z \pmod 6\\ y+z\equiv 2 \pmod 6}} q^{x^2+4y^2+12z^2} &= \sum_{\substack{x\equiv 3 \pmod{12}\\ y\equiv 1 \pmod 3\\ z\equiv y \pmod 6}} q^{x^2+4y^2+12z^2}\\
&= \sum_{x,y,z} q^{(12x+3)^2+4(3y+1)^2+12(6z+3y+1)^2}\\
&= \sum_{x,y,z} q^{144x^2+72x+144y^2+96y+432z^2+144z+432yz+25}\\
&= \frac{1}{3}q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foram usados uma das séries da definição de ψ em (2.23) e a trissecção de $c(q)$ dada em (3.21). Com isso, é suficiente mostrarmos

$$[q^{24n+1}]q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}) \geq 0, \tag{4.7}$$

com as mesmas condições do enunciado para que valha a igualdade.

Diretamente de (3.49) e (3.14), temos

$$P_{24,1}\left[\phi(q)^2\phi(q^3) - 4\sum_{n>0}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{n^2}\right] = 16q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}),$$

donde

$$[q^{24n+1}]q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}) = [q^{24n+1}]\frac{1}{16}\left(\phi(q)^2\phi(q^3) - 4\sum_{n>0}\left(\frac{-12}{n}\right)nq^{n^2}\right).$$

Assim, se $24n+1$ não é um quadrado perfeito, então

$$[q^{24n+1}]q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}) = \frac{(1,1,3,0,0,0;24n+1)}{16} > 0$$

por (2.10) pois $24n+1$ claramente não é da forma $3\cdot 9^v(3m+2)$. Por outro lado, se $24n+1 = W^2$ para algum $W \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
[q^{24n+1}]q^{25}\psi(q^{72})c(q^{48}) &= \frac{1}{16}\left((1,1,3,0,0,0;W^2) - 4\left(\frac{-12}{W}\right)W\right)\\
&\geq \frac{1}{16}\big((1,1,3,0,0,0;W^2) - 4W\big) \geq 0
\end{aligned}$$

por (2.17). Além disso, a segunda desigualdade é uma igualdade se, e só se, $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de W e, neste caso, tem-se $\left(\frac{-12}{W}\right) = 1$, donde a primeira desigualdade também seria uma igualdade. $\square$

4.2 Representação de inteiros pelas formas $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy$ e $9x^2 + 17y^2 + 32z^2 - 8yz + 8xz + 6xy$

Nesta seção, utilizaremos um dos Teoremas que acabamos de mostrar para encontrar todos os inteiros representados pelas formas $(9, 16, 36, 16, 4, 8)$ e $(9, 17, 32, -8, 8, 6)$. Para cada caso, primeiro reescreveremos a série theta associada à forma como uma soma de funções theta de modo que possamos analisar os números representados pela forma por meio de classes de equivalência módulo um inteiro n. Começamos com a forma $(9, 16, 36, 16, 4, 8)$.

Lema 4.1.

$$\begin{aligned}\vartheta(9, 16, 36, 16, 4, 8, q) = \phi(q^{64})^3 + 2q^{16}\psi(q^{128})\phi(q^{64})^2 \\ + 8q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2 + 2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 \quad (4.8)\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro note que

$$\begin{aligned}9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy &= x^2 + (4y)^2 + (2z)^2 + 2(4y)(2z) + 2x(2z) \\ &\quad + 2x(4y) + 8x^2 + 32z^2 \\ &= (x + 4y + 2z)^2 + 8x^2 + 32z^2.\end{aligned}$$

Usando isso, separamos a série theta associada a forma $(9, 16, 36, 16, 4, 8)$ primeiro de acordo com a paridade de x, fazendo as substituições usuais $x \mapsto 2x$ e $x \mapsto 2x+1$, e em seguida separamos ambas as séries obtidas de acordo com a paridade de $x + z$.

$$\begin{aligned}\vartheta(9, 16, 36, 16, 4, 8, q) &= \sum_{x,y,z} q^{9x^2+16y^2+36z^2+16yz+4xz+8xy} \\ &= \sum_{x,y,z} q^{(x+4y+2z)^2+8x^2+32z^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x,y,z} q^{(2x+4y+2z)^2+32x^2+32z^2} \\
&\quad + \sum_{x,y,z} q^{(2x+4y+2z+1)^2+8(2x+1)^2+32z^2} \\
&= \sum_{\substack{y \\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z)^2+32x^2+32z^2} && (4.9) \\
&\quad + \sum_{\substack{y \\ x\not\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z)^2+32x^2+32z^2} && (4.10) \\
&\quad + \sum_{\substack{y \\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z+1)^2+8(2x+1)^2+32z^2} && (4.11) \\
&\quad + \sum_{\substack{y \\ x\not\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z+1)^2+8(2x+1)^2+32z^2}. && (4.12)
\end{aligned}
$$

Agora vamos trabalhar com cada uma das 4 séries obtidas separadamente. Em (4.9), fazemos as substituições $x \mapsto x+z$ e $z \mapsto x-z$, em seguida fazemos a translação $y \mapsto y-x$ e usamos a definição de ϕ. Por fim utilizamos a equação (3.18) com $q \mapsto q^{16}$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{y \\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z)^2+32x^2+32z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{16(x+y)^2+32(x+z)^2+32(x-z)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{16y^2+64x^2+64z^2} \\
&= \phi(q^{16})\phi(q^{64})^2 \\
&= \phi(q^{64})^3 + 2q^{16}\phi(q^{64})^2\psi(q^{128}).
\end{aligned}
$$

Para a série em (4.10), basta fazer as substituições $x \mapsto x+z+1$ e $z \mapsto x-z$, seguida da translação $y \mapsto y-x$, e então aplicar a segunda igualdade na definição de ψ em (2.23).

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{y \\ x\not\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z)^2+32x^2+32z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+4y+2)^2+32(x+z+1)^2+32(x-z)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{(4y+2)^2+32(x+z+1)^2+32(x-z)^2}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{x,y,z} q^{64x^2+64x+16y^2+16y+64z^2+64z+36}$$
$$= 8q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2.$$

Na série em (4.11), fazemos novamente $x \mapsto x+z$ e $z \mapsto x-z$, e depois $y \mapsto y-x$. Daí é só usar a definição usual de ψ.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{y \\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z+1)^2+8(2x+1)^2+32z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+4y+1)^2+8(2x+2z+1)^2+32(x-z)^2} \\ &= \sum_{x,y,z} q^{(4y+1)^2+8(2x+2z+1)^2+32(x-z)^2} \\ &= \sum_{x,y,z} q^{64x^2+32x+16y^2+8y+64z^2+32z+9} \\ &= q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2.\end{aligned}$$

Enfim, em (4.12), faça a substituição $x \mapsto x+z-1$ e $z \mapsto x-z$. Então, fazendo as trocas $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ e $z \mapsto -z$, e trocando o sinal dentro dos quadrados nas potências, observamos que obtemos a mesma série trabalhada acima, e portanto tem o mesmo valor.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{y \\ x\not\equiv z \pmod 2}} q^{(2x+4y+2z+1)^2+8(2x+1)^2+32z^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+4y-1)^2+8(2x+2z-1)^2+32(x-z)^2} \\ &= \sum_{x,y,z} q^{(4x+4y+1)^2+8(2x+2z+1)^2+32(x-z)^2} \\ &= q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2.\end{aligned}$$

E isto encerra a demonstração, bastando substituir os valores encontrados para cada série. □

Agora utilizamos esta expressão para $\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)$ para obter uma estimativa para os valores de $(9,16,36,16,4,8;n)$ a partir da classe de equivalência de n módulo 64. Estas estimativas estão reunidas no lema a seguir.

Lema 4.2. *Seja n um inteiro não-negativo. Temos*

$$(9,16,36,16,4,8;64n) = (1,1,1,0,0,0;n), \tag{4.13}$$

$$(9,16,36,16,4,8;64n+16) > 0, \tag{4.14}$$

$$(9,16,36,16,4,8;32n+4) = [q^{8n+1}]8q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2, \tag{4.15}$$

$$(9,16,36,16,4,8;8n+1) = [q^{8n+1}]2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2, \tag{4.16}$$

$$(9,16,36,16,4,8;8n+r) = 0, \quad \textit{se } r \in \{3,5,7\}, \tag{4.17}$$

$$(9,16,36,16,4,8;64n+2\tilde{r}) = 0, \quad \textit{se } \tilde{r} \notin \{0,2,8,18\}. \tag{4.18}$$

Demonstração. De (4.8), se $r \in \{3,5,7\}$ e $\tilde{r} \in \{1,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31\}$, temos

$$P_{64,0}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = \phi(q^{64})^3,$$
$$P_{64,16}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = 2q^{16}\phi(q^{64})^2\psi(q^{128}),$$
$$P_{32,4}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = 8q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2,$$
$$P_{8,1}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = 2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2,$$
$$P_{8,r}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = 0,$$
$$P_{64,2\tilde{r}}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = 0.$$

As equações (4.16), (4.17) e (4.18) seguem, respectivamente, da quarta, quinta e sexta equações de forma direta. Observando que o coeficiente de q^{64n} em $\phi(q^{64})^3$ é igual ao coeficiente de q^n em $\phi(q)^3$, a primeira equação implica (4.13). Na segunda equação, use (3.46) com $q \mapsto q^{16}$ para ver que

$$P_{64,16}\left[\vartheta(9,16,36,16,4,8,q)\right] = P_{64,16}\left[\frac{\phi(q^{16})^3}{3}\right]$$

e, notando que o coeficiente de q^{64n+16} em $\phi(q^{16})^3$ é o mesmo que o de q^{4n+1} em $\phi(q)^3$, segue que

$$(9,16,36,16,4,8;64n+16) = \frac{(1,1,1,0,0,0;4n+1)}{3} > 0$$

onde a desigualdade estrita vem do Teorema dos Três Quadrados junto ao fato que $4n+1$ claramente não é da forma $4^a(8m+7)$. Por fim, a terceira equação implica que

$$(9,16,36,16,4,8;32n+4) = [q^{32n+4}]8q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2 = [q^{8n+1}]8q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2,$$

bastando notar que a mudança $q^4 \mapsto q$, como nos casos anteriores, não causa modificações nos coeficientes, e dai segue a equação (4.15). $\square$

Com isso, finalmente conseguimos determinar todos os inteiros não-representados (e, portanto, também os representados) pela forma $(9,16,36,16,4,8)$.

Teorema 4.4. *A forma $9x^2+16y^2+36z^2+16yz+4xz+8xy$ representa exclusivamente todos os inteiros não-negativos que não são dos tipos*

$$4^a(8m+7), \quad 4^b(8m+3), \quad 4^b(4m+2), \quad 4^c(8m+5), \quad M^2, \quad 4M^2,$$

onde $b \in \{0,1,2\}$, $c \in \{0,1\}$, a, m, $M \in \mathbb{N}$, e todos os divisores primos p de M satisfazem $p \equiv 1 \pmod 4$.

Demonstração. Começamos definindo os seguintes conjuntos

$$X = \{n \in \mathbb{N}; (9,16,36,16,4,8;n) = 0\}$$

$$X_1 = \{64n; (1,1,1,0,0,0;n) = 0\},$$

$$X_2 = \{8n+1, 32n+4; [q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^{32}) = 0\},$$

$$X_3 = \{8n+7, 64n+28, 64n+60, 128n+112; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_4 = \{8n+3, 64n+12, 64n+44, 128n+48; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_5 = \{8n+5, 64n+20, 64n+52; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_6 = \{64n+2\tilde{r}; n \in \mathbb{N}, \tilde{r} \notin \{0,2,6,8,10,14,18,22,24,26,30\}\}.$$

Então X é o conjunto de todos os inteiros positivos que não são representados pela forma $9x^2+16y^2+36z^2+16yz+4xz+8xy$. De uma observação cuidadosa do Lema anterior segue que

$$X = \bigcup_{j=1}^{6} X_j.$$

Agora, mostraremos que os números nos conjuntos X_j são exatamente dos tipos citados no enunciado deste teorema. Começamos por X_1. Pelo Teorema dos Três Quadrados, temos $(1,1,1,0,0,0;n) = 0$ se e somente se $n = 4^a(8m+7)$, para certos $a, m \in \mathbb{N}$. Então

$$X_1 = \{64 \cdot 4^a(8m+7); a, m \in \mathbb{N}\} = \{4^a(8m+7); a \geq 3, m \in \mathbb{N}\}.$$

Para reescrever X_2, basta utilizar o Teorema 4.1 e notar que sempre temos $M^2 \equiv 1 \pmod 8$ qualquer que seja M ímpar, logo

$$\begin{aligned} X_2 &= \{8n+1, 4(8n+1); 8n+1 = M^2 \text{ e } p \mid M \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\} \\ &= \{M^2, 4M^2; p \mid M \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\}. \end{aligned}$$

Os X_j's restantes exigem apenas algumas modificações elementares utilizando classes de equivalência, como segue

$$\begin{aligned} X_3 &= \{8m+7, 32m+28, 128m+112; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+7, 4(8m+7), 4^2(8m+7); m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^a(8m+7); 0 \leq a \leq 2, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \{8m+3, 32m+12, 128m+48; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+3, 4(8m+3), 4^2(8m+3); m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^b(8m+7); 0 \leq b \leq 2, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_5 &= \{8m+5, 32m+20; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+5, 4(8m+5); m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^c(8m+5); 0 \leq c \leq 1, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_6 &= \{64n + 2\tilde{r}; \tilde{r} \in \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31\}\} \\
&\quad \cup \{64n+8, 64n+24, 64n+40, 64n+56; n \in \mathbb{N}\} \\
&\quad \cup \{64n+32; n \in \mathbb{N}\} \\
&= \{4m+2, 16m+8, 64m+32; m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{4m+2, 4(4m+2), 4^2(4m+2); m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{4^b(4m+2); 0 \leq b \leq 2, m \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}
$$

□

Isso encerra a discussão sobre a forma $(9,16,36,16,4,8)$. Antes de prosseguir, vamos obter mais uma equação que nos será útil para reescrevermos a outra forma.

Proposição 4.1.

$$
\psi(q)^2\psi(q^8) = \psi(q^2)\psi(q^4)^2 + 2q\psi(q^2)\psi(q^8)^2 \tag{4.19}
$$

Demonstração. Basta utilizarmos (3.11), (3.18) e então novamente (3.11) com $q \mapsto q^4$, como segue

$$
\begin{aligned}
\psi(q)^2\psi(q^8) = \phi(q)\psi(q^2)\psi(q^8) &= \psi(q^2)\psi(q^8)\left(\phi(q^4) + 2q\psi(q^8)\right) \\
&= \psi(q^2)\phi(q^4)\psi(q^8) + 2q\psi(q^2)\psi(q^8)^2 \\
&= \psi(q^2)\psi(q^4)^2 + 2q\psi(q^2)\psi(q^8)^2.
\end{aligned}
$$

□

Agora voltamos a atenção para a forma $(9,17,32,-8,8,16)$. Como antes, começamos reescrevendo a série theta associada a forma.

Lema 4.3.

$$
\begin{aligned}
\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q) &= \phi(q^{32})^2\phi(q^{256}) + 2q^{20}\psi(q^{32})\psi(q^{64})^2 + 8q^{80}\psi(q^{128})\psi(q^{256})^2 \\
&\quad + 16q^{144}\psi(q^{128})\psi(q^{512})^2 + 4q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2 + 2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Demonstração. Primeiro observe que

$$\begin{aligned}9x^2+17y^2+32z^2-8yz+8xz+6xy &= x^2+(3y)^2+(-4z)^2+2(3y)(-4z)+2x(-4z)\\ &\quad +2x(3y)+4x^2-8xy+4y^2+4x^2+4y^2\\ &\quad +4(2z)^2+8y(2z)+8x(2z)+8xy\\ &= (x+3y-4z)^2+4(x-y)^2\\ &\quad +4(x+y+2z)^2.\end{aligned}$$

Aplicando isso à série theta associada a $(9,17,32,-8,8,6)$, separamo-na de acordo com a paridade de $x-y$, fazendo as substituições $x\mapsto x+y$ e $y\mapsto x-y$ quando $x\equiv y \pmod 2$, e fazendo $x\mapsto x+y+1$ e $y\mapsto x-y$ quando $x\not\equiv y \pmod 2$. Depois, separamos a primeira série resultante de acordo com a paridade de y, e a segunda de acordo com a paridade de $x-z$.

$$\begin{aligned}\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q) &= \sum_{x,y,z} q^{(x+3y-4z)^2+4(x-y)^2+4(x+y+2z)^2}\\ &= \sum_{\substack{z\\ x\equiv y \pmod 2}} q^{(x+3y-4z)^2+4(x-y)^2+4(x+y+2z)^2}\\ &\quad + \sum_{\substack{z\\ x\not\equiv y \pmod 2}} q^{(x+3y-4z)^2+4(x-y)^2+4(x+y+2z)^2}\\ &= \sum_{x,y,z} q^{(4x-2y-4z)^2+4(2y)^2+4(2x+2z)^2}\\ &\quad + \sum_{x,y,z} q^{(4x-2y-4z+1)^2+4(2y+1)^2+4(2x+2z+1)^2}\\ &= \sum_{x,y,z} q^{(4x-4y-4z)^2+4(4y)^2+4(2x+2z)^2} \qquad (4.21)\\ &\quad + \sum_{x,y,z} q^{(4x-4y-4z-2)^2+4(4y+2)^2+4(2x+2z)^2} \qquad (4.22)\\ &\quad + \sum_{\substack{y\\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(4x-2y-4z+1)^2+4(2y+1)^2+4(2x+2z+1)^2} \qquad (4.23)\\ &\quad + \sum_{\substack{y\\ x\not\equiv z \pmod 2}} q^{(4x-2y-4z+1)^2+4(2y+1)^2+4(2x+2z+1)^2}. \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Agora trataremos de cada série separadamente. Em (4.21), separamos a série em y par e ímpar, então utilizamos as translações $x \mapsto x + y$ e $z \mapsto z - y$ em ambas. Daí, aplicamos as definições de ϕ e ψ, encerrando com o uso da equação (4.19) com $q \mapsto q^{64}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y,z} q^{16(x-y-z)^2+64y^2+16(x+z)^2} &= \sum_{x,y,z} q^{16(x-2y-z)^2+256y^2+16(x+z)^2} \\
&\quad + \sum_{x,y,z} q^{16(x-2y-z-1)^2+64(2y+1)^2+16(x+z)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{16(x-z)^2+256y^2+16(x+z)^2} \\
&\quad + \sum_{x,y,z} q^{16(x-z-1)^2+64(2y+1)^2+16(x+z)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{32x^2+256y^2+32z^2} \\
&\quad + \sum_{x,y,z} q^{32x^2-32x+256y^2+256y+32z^2+32z+80} \\
&= \phi(q^{32})^2\phi(q^{256}) + 8q^{80}\psi(q^{64})^2\psi(q^{512}) \\
&= \phi(q^{32})^2\phi(q^{256}) + 8q^{80}\psi(q^{128})\psi(q^{256})^2 \\
&\qquad + 16q^{144}\psi(q^{128})\psi(q^{512})^2.
\end{aligned}$$

Para obter a forma desejada para (4.22), separamos a série em par e ímpar, com a transformação $y \mapsto 2y - 1$ para a série com y ímpar. Daí, observamos que as duas séries obtidas são idênticas, bastando fazer $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ e então trocar o sinal nos quadrados das potências. Depois disso, fazemos as translações $x \mapsto x + y$ e $z \mapsto z - y$, aplicamos as definições de ϕ e ψ e, como antes, encerramos utilizando a equação (4.19), agora com $q \mapsto q^{16}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y,z} q^{4(2x-2y-2z-1)^2+16(2y+1)^2+16(x+z)^2} &= \sum_{x,y,z} q^{4(2x-4y-2z-1)^2+16(4y+1)^2+16(x+z)^2} \\
&\quad + \sum_{x,y,z} q^{4(2x-4y-2z+1)^2+16(4y-1)^2+16(x+z)^2} \\
&= 2\sum_{x,y,z} q^{4(2x-4y-2z-1)^2+16(4y+1)^2+16(x+z)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{x,y,z} q^{4(2x-2z-1)^2+16(4y+1)^2+16(x+z)^2}\\
&= 2\sum_{x,y,z} q^{32x^2-16x+256y^2+128y+32z^2+16z+20}\\
&= 2q^{20}\psi(q^{16})^2\psi(q^{128})\\
&= 2q^{20}\psi(q^{32})\psi(q^{64})^2 + 4q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2.
\end{aligned}
$$

A série em (4.23) requer um pouco mais de cuidado. Primeiro usamos a substituição $x \mapsto x+z$ e $z \mapsto x-z$, e então usamos a definição de ψ na parte da série que tem o índice x.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{y\\ x\equiv z \pmod 2}} q^{(4x-2y-4z+1)^2+4(2y+1)^2+4(2x+2z+1)^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(-2y+8z+1)^2+4(2y+1)^2+4(4x+1)^2}\\
&= q^4\psi(q^{32})\sum_{x,y,z} q^{(-2y+8z+1)^2+4(2y+1)^2}
\end{aligned}
$$

Agora vamos mostrar que

$$
\sum_{y,z} q^{(-2y+8z+1)^2+4(2y+1)^2} = q^5\psi(q^8)\psi(q^{32}).
$$

Para isso, separamos a série em quatro, de acordo com a classe de equivalência de y módulo 4, com a substituição usual $y \mapsto 4y+j$ quando $y \equiv j \pmod 4$. Daí, usamos a translação $z \mapsto z+y$ em cada série para eliminar o termo em y de um dos quadrados na potência de q, posteriormente separando as séries como produtos de séries. Aí, após algumas modificações e evidenciações, obtemos um produto de duas somas de séries. Unindo as séries com mesmo índice, finalmente podemos utilizar a definição de ψ para encerrar a demonstração desta parte.

$$
\sum_{y,z} q^{(-2y+8z+1)^2+4(2y+1)^2} = \sum_{j=0}^{4}\sum_{y,z} q^{(-2(4y+j)+8z+1)^2+4(2(4y+j)+1)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y,z} q^{(-8y+8z+1)^2+(8y+1)^2} + \sum_{y,z} q^{(-8y+8z-1)^2+4(8y+3)^2} \\
&\quad + \sum_{y,z} q^{(-8y+8z-3)^2+4(8y+5)^2} + \sum_{y,z} q^{(-8y+8z-5)^2+4(8y+7)^2} \\
&= \sum_{y,z} q^{(8z+1)^2+(8y+1)^2} + \sum_{y,z} q^{(8z-1)^2+4(8y+3)^2} \\
&\quad + \sum_{y,z} q^{(8z-3)^2+4(8y+5)^2} + \sum_{y,z} q^{(8z-5)^2+4(8y+7)^2} \\
&= \sum_{z} q^{(8z+1)^2} \sum_{y} q^{4(8y+1)^2} + \sum_{z} q^{(8z-1)^2} \sum_{y} q^{4(8y+3)^2} \\
&\quad + \sum_{z} q^{(8z-3)^2} \sum_{y} q^{4(8y+5)^2} + \sum_{z} q^{(8z-5)^2} \sum_{y} q^{4(8y+7)^2} \\
&= \sum_{z} q^{(8z+1)^2} \sum_{y} q^{4(8y+1)^2} + \sum_{z} q^{(8z+1)^2} \sum_{y} q^{4(8y+5)^2} \\
&\quad + \sum_{z} q^{(8z+5)^2} \sum_{y} q^{4(8y+5)^2} + \sum_{z} q^{(8z+5)^2} \sum_{y} q^{4(8y+1)^2} \\
&= \left(\sum_{z} q^{(8z+1)^2} + \sum_{z} q^{(8z+5)^2} \right) \left(\sum_{y} q^{4(8y+1)^2} + \sum_{y} q^{4(8y+5)^2} \right) \\
&= \left(\sum_{z} q^{(4z+1)^2} \right) \left(\sum_{y} q^{4(4y+1)^2} \right) \\
&= q^5 \psi(q^8) \psi(q^{32}).
\end{aligned}
$$

Por fim, na série (4.24), começamos com a substituição $x \mapsto x+z+1$ e $z \mapsto x-z$, e então fazendo as reflexões e translações $x \mapsto -x-1$, $y \mapsto -y-1$ e $z \mapsto -z-1$, e mudando o sinal dentro dos quadrados nas potências, vemos que ficamos com a mesma série obtida ao trabalharmos com (4.23). Logo, esta série admite o mesmo valor final, e isto encerra a demonstração.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{y \\ x \not\equiv z \pmod 2}} q^{(4x-2y-4z+1)^2+4(2y+1)^2+4(2x+2z+1)^2} &= \sum_{x,y,z} q^{(-2y+8z+5)^2+4(2y+1)^2+4(4x+3)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{(2y-8z-1)^2+4(-2y-1)^2+4(-4x-1)^2} \\
&= \sum_{x,y,z} q^{(-2y+8z+1)^2+4(2y+1)^2+4(4x+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$= q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2.$$

□

Como antes, faremos uso dessa expressão de $\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)$ para obter estimativas para os valores de $(9,17,32,-8,8,6;n)$.

Lema 4.4. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Temos*

$$(9,17,32,-8,8,6;32n) = (1,1,8,0,0,0;n) \tag{4.25}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;32n+20) > 0 \tag{4.26}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;128n+80) > 0 \tag{4.27}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;128n+16) = [q^{8n+1}]16q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 \tag{4.28}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;32n+4) = [q^{8n+1}]4q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 \tag{4.29}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;8n+1) = [q^{8n+1}]2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2 \tag{4.30}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;8n+r) = 0, \quad \textit{se } r \in \{3,5,7\} \tag{4.31}$$

$$(9,17,32,-8,8,6;64n+2\tilde{r}) = 0, \quad \textit{se } r \notin \{0,2,8,16,18\} \tag{4.32}$$

Demonstração. De (4.20), se $r \in \{3,5,7\}$ e $\tilde{r} \in \{1,3,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,17,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32\}$ temos

$$P_{32,0}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = \phi(q^{32})^2\phi(q^{256}),$$

$$P_{32,20}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 2q^{20}\psi(q^{32})\psi(q^{64})^2,$$

$$P_{128,80}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 8q^{80}\psi(q^{128})\psi(q^{256})^2,$$

$$P_{128,16}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 16q^{144}\psi(q^{128})\psi(q^{512})^2,$$

$$P_{32,4}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 4q^{36}\psi(q^{32})\psi(q^{128})^2,$$

$$P_{8,1}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 2q^9\psi(q^8)\psi(q^{32})^2,$$

$$P_{8,r}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 0,$$

$$P_{64,2\tilde{r}}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = 0.$$

Das três últimas equações decorrem diretamente as equações (4.30), (4.31) e (4.32). Observando que o coeficiente de q^{32} em $\phi(q^{32})^2\phi(q^{256})$ é o mesmo que o coeficiente de q em $\phi(q)^2\phi(q^8)$, a primeira equação implica (4.25). Para obter (4.28) e (4.29), basta aplicar $q^{16} \mapsto q$ e $q^4 \mapsto q$, respectivamente, na quarta e quinta das equações acima. Retomando (4.3), temos

$$P_{8,5}\left[\frac{\phi(q)^3}{24}\right] = q^5\psi(q^8)\psi(q^{16})^2.$$

Utilizando isso na segunda e terceira equações, com $q \mapsto q^4$ e $q \mapsto q^{16}$, respectivamente, concluimos que

$$P_{32,20}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = P_{32,20}\left[\frac{\phi(q^4)^3}{12}\right]$$

e

$$P_{128,80}\left[\vartheta(9,17,32,-8,8,6,q)\right] = P_{128,80}\left[\frac{\phi(q^{16})^3}{3}\right]$$

Por fim, notando que o coeficiente de q^{32n+20} em $\phi(q^4)^3$, bem como o coeficiente de $q^{128n+80}$ em $\phi(q^{16})$, são os mesmos que o coeficiente de q^{8n+5} em $\phi(q)^3$, seguem

$$(9,17,32,-8,8,6;32n+20) = \frac{(1,1,1,0,0,0;8n+5)}{12} > 0$$

e

$$(9,17,32,-8,8,6;128n+80) = \frac{(1,1,1,0,0,0;8n+5)}{3} > 0,$$

onde as desigualdade estritas seguem do Teorema dos Três Quadrados, visto que $8n+5$ não é do tipo $4^k(8m+7)$. □

Para obtermos o desejado, precisaremos ainda de mais um resultado de [12].

Proposição 4.2. *A forma $x^2+y^2+8z^2$ representa exclusivamente todos os inteiros não-negativos que não são dos tipos $4m+3$, $2(8m+3)$ e $4^k2(8m+7)$, com $m,k \in \mathbb{N}$.*

Agora temos todas as ferramentas necessárias para determinar os inteiros representados por $(9,17,32,-8,8,6)$.

Teorema 4.5. *A forma* $9x^2+17y^2+32z^2-8yz+8xz+6xy$ *representa exclusivamente todos os inteiros não-negativos que não são dos tipos*

$4^a(8m+7)$, $4^b(8m+6)$, $4^c(8m+3)$, $4^b(8m+2)$, $8m+5$, M^2, $4M^2$, $16M^2$,

onde $b \in \{0,1,2\}$, $c \in \{0,1,2,3\}$ *e* a, m, $M \in \mathbb{N}$, *e todos os divisores primos de* M *satisfazem* $p \equiv 1 \pmod 4$.

Demonstração. Defina:

$$X = \{n \in \mathbb{N}; (9,17,32,-8,8,6;n) = 0\},$$

$$X_1 = \{32n; (1,1,8,0,0,0;n) = 0\}$$

$$X_2 = \{8n+1, 32n+4, 128n+16; [q^{8n+1}]q^9\psi(q^8)\psi(q^32)^2 = 0\},$$

$$X_3 = \{8n+7, 64n+28, 64n+60, 128n+112; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_4 = \{64n+2\tilde{r}; n \in \mathbb{N}, \tilde{r} \in \{3,7,11,12,15,19,23,27,28,31\}\},$$

$$X_5 = \{8n+3, 64n+12, 64n+44, 128n+48; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_6 = \{8n+5; n \in \mathbb{N}\},$$

$$X_7 = \{64n+2\tilde{r}; n \in \mathbb{N}, \tilde{r} \in \{1,4,5,9,13,17,20,21,25,29\}\}.$$

Então X é o conjunto de todos os inteiros positivos que não são representados pela forma $9x^2+17y^2+32z^2-8yz+8xz+6xy$ e, fazendo uma observação cuidadosa do Lema anterior, vemos que

$$X = \bigcup_{j=1}^{7} X_j.$$

Pela Proposição 4.2, podemos reescrever X_1 como

$$\begin{aligned} X_1 &= \{32\cdot(4m+3), 64(8m+3), 64\cdot 4^k(8m+7); k,m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^a(8m+7), 4^3(8m+3), 4^2(8m+6); a \geq 3, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Agora, para reescrever X_2 basta utilizar o Teorema 4.1, notando que $M^2 \equiv 1 \pmod 8$, qualquer que seja M ímpar.

$$\begin{aligned} X_2 &= \{8n+1, 4(8n+1), 16(8n+1); 8n+1 = M^2 \text{ e } p \mid M \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\} \\ &= \{M^2, 4M^2, 16M^2; p \mid M \Rightarrow p \equiv 1 \pmod 4\}. \end{aligned}$$

Por fim, reescrevemos X_3, X_4, X_5 e X_7 com o uso de propriedades elementares dos inteiros com relação a classes de equivalência.

$$\begin{aligned} X_3 &= \{8m+7, 32m+28, 128m+112; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+7, 4(8m+7), 4^2(8m+7); m \in \mathbb{N})\} \\ &= \{4^a(8m+7); 0 \leq a \leq 2, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4 &= \{64n+2\tilde{r}; n \in \mathbb{N}, \tilde{r} \in \{3,7,11,15,19,23,27,31\}\} \\ &\quad \cup \{64n+24, 64n+56; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+6, 32m+24; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^b(8m+6); 0 \leq b \leq 1, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_5 &= \{8m+3, 32m+12, 128m+48; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+3, 4(8m+3), 4^2(8m+3); m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^c(8m+3), 0 \leq c \leq 2, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_7 &= \{64n+2\tilde{r}; n \in \mathbb{N}, \tilde{r} \in \{1,5,9,13,17,21,25,29\}\} \\ &\quad \cup \{64n+8, 64n+40; n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+2, 32m+8; m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{8m+2, 4(8m+2); m \in \mathbb{N}\} \\ &= \{4^b(8m+2); 0 \leq b \leq 1, m \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

□

4.3 Representação de inteiros pela forma $3x^2 + 4y^2 + 9z^2$

Para obter os inteiros que são representados pela forma $(3, 4, 9, 0, 0, 0)$, precisaremos do seguinte resultado sobre a representação de inteiros pela forma $(1, 3, 36, 0, 0, 0)$, cuja demonstração pode ser encontrada em [12]:

Teorema 4.6. *A forma* $x^2 + 3y^2 + 36z^2$ *representa exclusivamente todos os inteiros não-negativos que não são do tipo* $3m+2$, $4m+2$ *e* $9^k(9m+6)$, *com* $m, k \in \mathbb{N}$.

Agora passamos ao seguinte lema, que relaciona o número de representações de inteiros por essas duas formas. A demonstração aqui apresentada é uma releitura da demonstração presente em [2].

Lema 4.5. *Seja* n *um inteiro não-negativo. Então*

$$(1, 3, 36, 0, 0, 0; n) = (3, 4, 9, 0, 0, 0; n), \tag{4.33}$$

se n *não é um quadrado perfeito ou é múltiplo de 3. Além disso, para* $r = 1, 2$,

$$(1, 3, 36, 0, 0, 0; (6j + r)^2) > (3, 4, 9, 0, 0, 0; (6j + r)^2) \geq 0, \tag{4.34}$$

com a última desigualdade sendo igualdade se e somente para todo p *divisor primo de* $6j + r$ *tem-se* $p \equiv 1 \pmod 3$, *e, para* $r = 4, 5$,

$$(3, 4, 9, 0, 0, 0; (6j + r)^2) > (1, 3, 36, 0, 0, 0; (6j + r)^2) > 0. \tag{4.35}$$

Demonstração. Defina funções f_1, f_2, g_1, $g_2 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ por

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (6x + y, -x) & f_2(x, y) &= (-y, x + 6y) \\ g_1(x, y) &= (3x + y, 2x + y) & g_2(x, y) &= (x - y, -2x + 3y) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2(x, y) &= f_1(-y, x + 6y) = (6(-y) + (x + 6y), -(-y)) = (x, y) \\ f_2 \circ f_1(x, y) &= f_2(6x + y, -x) = (-(-x), (6x + y) + 6(-x)) = (x, y) \\ g_1 \circ g_2(x, y) &= g_1(x - y, -2x + 3y) \\ &= (3(x - y) + (-2x + 3y), 2(x - y) + (-2x + 3y)) = (x, y) \\ g_2 \circ g_1(x, y) &= g_2(3x + y, 2x + y) \\ &= ((3x + y) - (2x + y), -2(3x + y) + 3(2x + y)) = (x, y). \end{aligned}$$

Daí segue que f_1 e g_1 são invertíveis (com inversos f_2 e g_2, respectivamente) e, portanto, são bijeções. Assim, podemos fazer as substituições $(x, y) \mapsto (6x + y, -x)$ e $(x, y) \mapsto (3x+y, 2x+y)$ nas séries de $\phi(q)\phi(q^{36})$ e $\phi(q^4)\phi(q^9)$ sem alterar o conjunto de índices, obtendo

$$\begin{aligned}\phi(q)\phi(q^{36}) &= \sum_{x,y} q^{x^2+36y^2} = \sum_{x,y} q^{(6x+y)^2+36(-x)^2} \\ &= \sum_{x,y} q^{72x^2+12xy+y^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\phi(q^4)\phi(q^9) &= \sum_{x,y} q^{4x^2+9y^2} = \sum_{x,y} q^{4(3x+y)^2+9(2x+y)^2} \\ &= \sum_{x,y} q^{72x^2+60xy+13y^2}.\end{aligned}$$

Agora unimos isso às equações (3.38) e (3.15) para concluir que

$$\begin{aligned}\vartheta(1,3,36,0,0,0,q) - \vartheta(3,4,9,0,0,0,q) &= \phi(q)\phi(q^3)\phi(q^{36}) - \phi(q^3)\phi(q^4)\phi(q^9) \\ &= \phi(q^3)\left(\sum_{x,y} q^{72x^2+12xy+y^2} - \sum_{x,y} q^{72x^2+60xy+13y^2}\right) \\ &= 2q\phi(q^3)E(q^{12})^2 \\ &= 2\sum_{n>0}(-1)^{n+1}\left(\frac{-3}{n}\right) nq^{n^2}.\end{aligned}$$

Analisando os coeficientes de q^n, se n não é um quadrado perfeito, temos

$$(1,3,36,0,0,0;n) - (3,4,9,0,0,0;n) = 0 \Rightarrow (1,3,36,0,0,0;n) = (3,4,9,0,0,0;n)$$

e, se $n = m^2$ para algum $m \in \mathbb{N}$,

$$(1,3,36,0,0,0;m^2) - (3,4,9,0,0,0;m^2) = 2(-1)^{m+1}\left(\frac{-3}{m}\right) m. \tag{4.36}$$

Como $\left(\frac{-3}{m}\right) = 0$ se $m = 3k$ é múltiplo de 3, então

$$(1,3,36,0,0,0;9k^2) = (3,4,9,0,0,0;9k^2).$$

Restam considerar os casos $n = (6j + r)^2$ com $r \in \{1, 2, 4, 5\}$. Retomando a desigualdade (2.18), com $W = 6j + r$ e fazendo algumas manipulações, vale que

$$(1,3,36,0,0,0;(6j+r)^2)-(3,4,9,0,0,0;(6j+r)^2) \geq 2[(6j+r)-(3,4,9,0,0,0;(6j+r)^2)]$$

e, analogamente,

$$(3,4,9,0,0,0;(6j+r)^2)-(1,3,36,0,0,0;(6j+r)^2) \geq 2[(6j+r)-(1,3,36,0,0,0;(6j+r)^2)]$$

com igualdade, em ambas, se e somente se, para todo p divisor primo de $6j + r$, tem-se $p \equiv 1 \pmod 3$. Agora retornamos a (4.36), analisando caso a caso.

- Se $r = 1$, então $\left(\dfrac{-3}{6j+1}\right) = 1$ e $(-1)^{(6j+1)+1} = 1$, daí

  $$\begin{aligned} 2(6j+1) &= (1,3,36,0,0,0;(6j+1)^2) - (3,4,9,0,0,0;(6j+1)^2) \\ &\geq 2[(6j+1) - (3,4,9,0,0,0;(6j+1)^2)] \end{aligned}$$

  com igualdade se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de $(6j + 1)$. Em particular, segue que

  $$(1,3,36,0,0,0;(6j+1)^2) > (3,4,9,0,0,0;(6j+1)^2) \geq 0,$$

  com igualdade se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de $(6j + 1)$.

- Se $r = 2$, então $\left(\dfrac{-3}{6j+2}\right) = -1$ e $(-1)^{(6j+2)+1} = -1$, daí

  $$\begin{aligned} 2(6j+2) &= (1,3,36,0,0,0;(6j+2)^2) - (3,4,9,0,0,0;(6j+2)^2) \\ &\geq 2[(6j+2) - (3,4,9,0,0,0;(6j+2)^2)] \end{aligned}$$

  com igualdade se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de $(6j + 2)$, o que não pode ocorrer pois $2 \mid 6j + 2$. Em particular, segue que

  $$(1,3,36,0,0,0;(6j+2)^2) > (3,4,9,0,0,0;(6j+2)^2) > 0.$$

- Se $r = 4$, então $\left(\dfrac{-3}{6j+4}\right) = 1$ e $(-1)^{(6j+4)+1} = -1$, daí

$$\begin{aligned} 2(6j+4) &= (3,4,9,0,0,0;(6j+4)^2) - (1,3,36,0,0,0;(6j+4)^2) \\ &\geq 2[(6j+4) - (1,3,36,0,0,0;(6j+4)^2)] \end{aligned}$$

com igualdade se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de $(6j+4)$, o que não pode ocorrer pois $2 \mid 6j+4$. Em particular, segue que

$$(3,4,9,0,0,0;(6j+4)^2) > (1,3,36,0,0,0;(6j+4)^2) > 0.$$

- Se $r = 5$, então $\left(\dfrac{-3}{6j+5}\right) = -1$ e $(-1)^{(6j+5)+1} = 1$, daí

$$\begin{aligned} 2(6j+5) &= (3,4,9,0,0,0;(6j+5)^2) - (1,3,36,0,0,0;(6j+5)^2) \\ &\geq 2[(6j+5) - (1,3,36,0,0,0;(6j+5)^2)] \end{aligned}$$

com igualdade se e só se $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo p divisor primo de $(6j+5)$, o que não pode ocorrer pois $6j+5 \equiv 2 \pmod 3$. Em particular, segue que

$$(3,4,9,0,0,0;(6j+5)^2) > (1,3,36,0,0,0;(6j+5)^2) > 0.$$

□

Agora estamos aptos a explicitar os inteiros não representados por $(3,4,9,0,0,0)$.

Teorema 4.7. *A forma $3x^2+4y^2+9z^2$ representa exclusivamente todos os inteiros que não são dos tipos*

$$(3m+2), \qquad (4m+2), \qquad 9^a(9m+6), \qquad W^2,$$

onde a, m, $W \in \mathbb{N}$ e $p \equiv 1 \pmod 3$ para todo primo p que divide W.

Demonstração. Temos diretamente do lema anterior que $(3,4,9,0,0,0;n) = 0$ sempre que $(1,3,36,0,0,0;n) = 0$, logo $(3,4,9,0,0,0)$ certamente não representa números do tipo $3m+2$, $4m+2$ e $9^a(9m+6)$, visto que $(1,3,36,0,0,0)$ não representa tais números. Do lema também segue que o único caso em que $(3,4,9,0,0,0;n) = 0$ além destes é dado por números do tipo $(6j+1)^2$, tais que todos seus divisores primos p satisfazem $p \equiv 1 \pmod 3$. Mas, se $p \equiv 1 \pmod 3$ é um primo, então $p \equiv 1 \pmod 6$, visto que, se tivéssemos $p \equiv 4 \pmod 6$, então $2 \mid p$ e $p \neq 2$, o que contradiz p primo. Logo, se W é tal que todos seus divisores primos satisfazem $p \equiv 1 \pmod 3$, então todos devem satisfazer $p \equiv 1 \pmod 6$, de onde segue $W^2 \equiv 1 \pmod 6$, ou seja, um número W cujos divisores primos são todos congruentes a 1 módulo 3 é sempre do tipo $6j+1$, e portanto seu quadrado nunca pode ser representado por $(3,4,9,0,0,0)$. $\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É natural perguntar-se se o método que utilizamos para obtenção dos inteiros representados pelas formas $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy$ e $9x^2 + 17y^2 + 32z^2 - 8yz + 8xz + 6xy$ podem ser usados para trabalharmos com outras formas. De fato, isso ocorre.

As duas formas tratadas neste trabalho fazem parte de uma classe de formas chamadas *formas de Jones-Pall*, mas que usualmente são tratadas pelo nome *formas spinor regulares* hoje em dia. Uma definição formal dessa família de formas foge ao escopo deste trabalho, mas notas sobre o assunto podem ser encontradas em [15].

Resumidamente, de acordo com Dickson em [9], uma forma quadrática ternária positivo-definida é dita regular se ela representa todos os números naturais não excluídos por congruências. Em [12], Jones e Pall discutem algumas formas quadráticas cujos números naturais excluídos por congruências são os mesmos de certas formas regulares, mas estas formas acabam sendo quase-regulares, por falharem em representar uma infinidade de inteiros numa certa classe. Desde então, essas formas ficaram conhecidas como *formas de Jones-Pall* e, atualmente, como *formas spinor regulares.*

No seu artigo original, Jones e Pall apresentam 7 dessas formas, mas hoje em dia são conhecidas 29 delas. Dessas 29, 4 foram contribuição de Jagy, que ainda checou computacionalmente todas as formas ternárias positivas com discriminante até 1.400.000 procurando por formas spinor regulares. A lista com as 29 formas spinor regulares aqui citadas pode ser encontrada em [11], e acredita-se que está completa.

Em [13], Kaplansky apresentou as 10 formas spinor regulares a seguir

$$4x^2 + 5y^2 + 13z^2 + 2yz,$$

$$5x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 4xz + 4xy,$$

$$4x^2 + 9y^2 + 28z^2 + 4xz,$$

$$4x^2 + 9y^2 + 32z^2 + 4xy,$$

$$5x^2 + 13y^2 + 16z^2 + 2xy,$$

$$9x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 8yz + 8xz + 2xy,$$

$$9x^2 + 16y^2 + 16z^2 + 16yz,$$

$$13x^2 + 13y^2 + 16z^2 - 8yz + 8xz + 10xy,$$

$$9x^2 + 16y^2 + 36z^2 + 16yz + 4xz + 8xy,$$

$$9x^2 + 17y^2 + 32z^2 - 8yz + 8xz + 6xy.$$

Duas delas, de discriminante 16384, são as tratadas em [2] e neste trabalho. Segundo [2], todas as outras formas apresentadas por Kaplansky podem ser tratadas pelos mesmos métodos que utilizamos aqui.

Referências Bibliográficas

[1] Berkovich, A. On representation of an integer by $x^2 + y^2 + z^2$ and the modular equations of degree 3 and 5. In *Quadratic and Higher Degree Forms*. Springer, 2013, pp. 29–49.

[2] Berkovich, A. On the Gauss ΕΥΡΗΚΑ Theorem and some allied inequalities. *arXiv preprint arXiv:1406.7835* (2014).

[3] Berkovich, A., and Jagy, W. C. On representation of an integer as the sum of three squares and ternary quadratic forms with the discriminants $p^2, 16p^2$. *Journal of Number Theory 132*, 1 (2012), 258–274.

[4] Berkovich, A., and Patane, F. Binary quadratic forms and the Fourier coefficients of certain weight 1 eta-quotients. *Journal of Number Theory 135* (2014), 185–220.

[5] Berndt, B. C. Ramanujan's notebooks, part iii, 1991.

[6] Berndt, B. C. *Number theory in the spirit of Ramanujan*, vol. 34. American Mathematical Soc., 2006.

[7] Borwein, J. M., Borwein, P. B., and Garvan, F. G. Some cubic modular identities of Ramanujan. *Transactions of the American Mathematical Society* (1994), 35–47.

[8] Burton, D. M. *Elementary number theory.* Allyn and Bacon, Inc., 1976.

[9] Dickson, L. E. *Modern elementary theory of numbers*, vol. 111. Chicago, 1939.

[10] Hirschhorn, M., Garvan, F., and Borwein, J. Cubic analogues of the jacobian theta function $\theta(z; q)$. *Can. J. Math 45*, 4 (1993), 673–694.

[11] Jagy, W. C. Integral positive ternary quadratic forms. In *Quadratic and Higher Degree Forms*. Springer, 2013, pp. 169–179.

[12] Jones, B. W., and Pall, G. Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms. *Acta Mathematica 70*, 1 (1939), 165–191.

[13] Kaplansky, I. Notes on ternary forms, iii, jp (jones-pall) forms, 1996.

[14] Shen, L.-C. On the modular equations of degree 3. *Proceedings of the American Mathematical Society 122*, 4 (1994), 1101–1114.

[15] Watson, G. L. *Integral quadratic forms.* Cambridge, 1960.

Índice Remissivo