

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PAULO ROBERTO DE QUADROS IORRA

**ALÉM DA APROXIMAÇÃO MODULACIONAL NA INTERAÇÃO DO TRIPLETO
DE ONDA**

Porto Alegre

2016

PAULO ROBERTO DE QUADROS IORRA

**ALÉM DA APROXIMAÇÃO MODULACIONAL NA INTERAÇÃO DO TRIPLETO
DE ONDA**

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato

Porto Alegre

2016

*“Don't part with your illusions.
When they are gone, you may still exist, but you have ceased to live” – Mark Twain.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a minha família, por todo amor, carinho e suporte fornecidos. Assim como no meu projeto de diplomação, são os merecedores dos primeiros agradecimentos e fontes de inspiração. Agradeço inclusive pela pressão e pelas cobranças, que apesar de desconfortáveis, são importantes.

Por seguinte, gostaria de agradecer muito ao meu orientador, Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato, pelo exemplo como docente e pesquisador. Poucos aceitariam o desafio de orientar um engenheiro em um trabalho assim, e tenho total convicção que sua participação foi fundamental neste trabalho.

Igualmente importantes foram os Doutores Samuel Marini e Eduardo Alcides Peter, tanto por suas contribuições quanto por seu apoio moral.

Ademais, gostaria de agradecer a banca, Prof. Dr. Sergio Roberto Lopes, Prof. Dr. Rudi Gaelzer e Prof. Dra. Marcia Cristina Bernardes Barbosa, pela atenção, pelo conhecimento, pelas observações e pelas correções sugeridas, que elevaram a qualidade final deste trabalho.

Gostaria também de agradecer a UFRGS, ao Instituto de Física e ao CNPq pela oportunidade de me permitir realizar o sonho de tornar-me mestre em física, sendo bolsista, em uma instituição avaliada como uma das melhores do Brasil na área e com uma comunidade exemplar, cujos nomes inspiradores só não citarei por medo de esquecer algum. Apesar de alguns pontos a serem melhorados, carregarei com orgulho o nome desta universidade.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus amigos. Sem estes, a vida não teria a menor graça.

RESUMO

Este trabalho investiga a quebra da aproximação modulacional na interação não-linear de três ondas, a interação do tripleto de ondas. Um modo comum de descrever a interação de três ondas portadoras de alta frequência é a partir da aproximação modulacional, que assume que as amplitudes e fases são lentamente moduladas. Isto apenas é verdade quando o acoplamento entre as três ondas é fraco. Ao se analisar os tipos de dinâmica envolvidas quando o valor do acoplamento é alterado, para grandes valores de acoplamento é detectada uma transição abrupta onde a amplitude limitada do regime modulacional chega a outras regiões do espaço configuracional. Também é investigado o caso onde uma das ondas do tripleto possui uma frequência muito menor que as outras duas.

Palavras-chave: Acoplamento. Aproximação Modulacional; Quebra.

ABSTRACT

This work investigates the breakdown of the traditional modulation approximation in the three wave nonlinear interactions, the wave triplet interaction. A common way to describe the interaction of three high-frequency carriers is by the modulational approximation, which assume that amplitude and phases are slowly modulated. This is only accurate when the three-wave coupling is weak. When analyzing the different types of dynamics when the coupling is changed, for large values of coupling it is detected an abrupt transition where the limited amplitude of the modulational region reaches to other regions of the configuration space. It is also investigated the case where one of the waves of the triplet has a much lower frequency than the other two.

Keywords: Breakdown; Coupling; Modulational approximation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	O MODELO FÍSICO	8
2	A APROXIMAÇÃO MODULACIONAL	10
2.1	O LAGRANGEANO MODULACIONAL QUANDO $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$	10
2.1.1	O Lagrangeano Temporal Médio Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$	11
2.1.2	Aplicação de Euler-Lagrange no Lagrangeano Médio	13
2.1.3	Pontos Fixos Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$	14
2.1.4	Frequência de Flutuação Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$	17
2.2	O LAGRANGEANO MODULACIONAL QUANDO $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$.	20
2.2.1	O Lagrangeano Temporal Médio Quando $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$	22
2.2.2	Aplicação de Euler-Lagrange com ω_1 Pequeno	24
3	SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	27
3.1	CASO $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$	27
3.1.1	Simulação da Estrutura de Espaço-Fase	27
3.1.2	Simulação da Falha da Aproximação Modulacional	30
3.1.3	Superfícies das Regiões de Energia	35
3.2	CASO $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$	39
3.2.1	Simulação Completa do Sistema	39
3.2.2	<i>Poincaré Plot</i> do Sistema com ω_1 Pequeno	43
4	CONCLUSÕES	45
	APÊNDICE A – CÁLCULO PARA ε_1 CRÍTICO	47
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	49

1 INTRODUÇÃO

Um dos modelos mais bem aceitos e estabelecidos para a interação não-linear de ondas é baseado no conceito de tripleto de onda [1-4]. Neste modelo, os três modos mais relevantes de um sistema oscilatório são tratados como se fossem um subsistema interligado entre si e isolado do resto. Cada um dos modos é visto como uma onda de alta frequência (também conhecida como portadora) modulada por uma onda de baixa frequência (também conhecida como moduladora). Em geral, um dos modos começa com a maior parte da (ou até toda) energia do sistema, que então é trocada com os outros modos devido à ressonância.

As condições de ressonância são fundamentais para uma interação ativa entre os modos. Estas condições são definidas como as condições de combinação de ressonância da onda modulada (ou seja, das altas frequências). O decaimento do modo “1” nos outros dois modos, “2” e “3”, é favorecido quando a condição de ressonância entre as altas frequências $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ é observada [5], de forma que as ondas moduladoras pouco importam neste caso se a diferença entre as escalas de tempo entre a portadora e a moduladora for alta.

Entretanto, em alguns casos, esta diferença não é grande o suficiente para realizar as aproximações modulacionais que permitam obter os resultados já conhecidos para este caso, de modo que as mesmas falham, obtendo-se então resultados que não são compatíveis com simulações completas [6,7]. Apesar da alta frequência tender a ser um parâmetro fixo para cada um dos módulos, a baixa frequência associada ao processo modulacional costuma aumentar com as amplitudes ou com a combinação das ondas envolvidas.

Este cenário é conhecido na física de plasmas. Ondas de Langmuir, que são modos vibrando com uma alta frequência (chamada de frequência de plasma) interagindo com ondas íon-acústicas, de frequência menor, são um bom exemplo [8,9]. Para amplitudes extremamente pequenas, o acoplamento de onda é pequeno e a frequência modulacional é menor que a baixa frequência das ondas íon-acústicas. Entretanto, a medida que se aumentam as amplitudes dos modos rápidos, a frequência característica da onda íon-acústica torna-se comparável à frequência de plasma e a aproximação modulacional lenta não pode mais ser aplicada [10]. Outros casos envolvendo diferentes configurações [11] apontam para a mesma direção, de forma que o problema se mostra relevante.

A descrição modulacional do sistema de ondas é importante para simplificar um complicado sistema de multimodos. A dinâmica completa é simplificada, visto que a média temporal dela é tomada sobre o sistema (cujos portadores variam de fase rapidamente),

permitindo que a interação possa ser examinada em termos de quantidades observáveis estatisticamente.

Este trabalho possui como objetivo compreender os limites da aproximação modulacional, compreendendo as situações em que a mesma é válida e o que ocorre quando a aproximação falha.

No capítulo 2, são realizados cálculos para o Lagrangeano no caso $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$ e após no caso $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$, visando compreender o comportamento do sistema com a aproximação modulacional. No capítulo 3 são realizadas simulações computacionais a partir da solução numérica das equações obtidas no capítulo 2 e do sistema completo, comparando-as quando for de interesse. No capítulo 4 estão as conclusões.

1.1 O MODELO FÍSICO

O Lagrangeano de um tripleto de ondas interagindo entre si, com modos 1, 2 e 3, pode ser escrito na forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3, \quad (1.1)$$

onde a frequência natural de cada modo é escrita neste modelo como ω_i , enquanto x_i indica o valor instantâneo de cada modo. O parâmetro ε_1 indica a intensidade do acoplamento do tripleto, enquanto o parâmetro ε_2 é apenas um termo muito pequeno, introduzido como um coeficiente que visa apenas garantir que a dinâmica se localize em regiões finitas do espaço-fase, sem divergir. Cada ponto acima de uma incógnita representa uma derivada temporal. Este modelo é similar aos modelos utilizados na análise de ressonâncias paramétricas em sistemas não lineares de três modos [12], e pode ser usado para descrever sistemas físicos como *free-electron lasers* e *beat wave accelerators*.

Esta forma escolhida para o potencial não-linear permite calcular a interação do tripleto de ondas. Para isto, deve-se utilizar a equação de Euler-Lagrange para cada um dos modos. A equação de Euler-Lagrange para cada modo pode ser dada como:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (1.2)$$

Aplicando esta equação no Lagrangeano (1.1), tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\omega_i^2 x_i - \varepsilon_2 x_i^3 - \varepsilon_1 x_j x_k \quad (1.3)$$

onde “j” e “k” são os modos diferentes de i (lembrando que temos apenas 3 modos, logo, são os modos complementares a i). Considerando o outro lado da equação:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \dot{x}_i = \ddot{x}_i. \quad (1.4)$$

Com isto, para cada modo, tem-se:

$$\ddot{x}_i = -\omega_i^2 x_i - \varepsilon_2 x_i^3 - \varepsilon_1 x_j x_k. \quad (1.5)$$

Como pode-se observar, a dinâmica do modo “i” depende de fatores de “j” e “k”, devido ao termo $\varepsilon_1 x_j x_k$. Isto é claramente uma interação de tripleto.

Este modelo é conservativo e pode não considerar todos os fatores de interesse possíveis. Por exemplo, o mesmo não possui nenhum termo dissipativo [13] nem efeitos de borda [14]. A dinâmica pode tornar-se caótica e incoerente, mas caso isto ocorra, é apenas devido aos efeitos não-lineares graças aos três graus de liberdade. A análise a ser feita é quanto a validade da aproximação modulacional para o Lagrangeano completo introduzido pela expressão (1.1).

2 A APROXIMAÇÃO MODULACIONAL

2.1 O LAGRANGEANO MODULACIONAL QUANDO $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

A estrutura canônica compatível com a aproximação modulacional é aquela em que todas as portadoras possuem frequências de mesma ordem de magnitude. Além disto, é necessário que todas possuam frequências muito maiores do que a frequência modulacional das correspondentes fases e amplitudes modais. Como mencionado anteriormente, também se precisa de valores suficientemente pequenos para o coeficiente de acoplamento ε_1 .

Para implementar a ideia de variações lentas de modulação, pode-se escrever cada um dos modos do tripleto como

$$x_i = \sqrt{\frac{2A_i(t)}{\omega_i}} \sin(\omega_i t + \phi_i(t)), \quad (2.1)$$

onde o termo proporcional a amplitude do envelope $A_i(t)$ e a fase $\phi_i(t)$ possuem uma dependência lenta do tempo. A partir deste ponto, a dependência temporal (t) será ocultada visando compactar a notação. Esta condição faz com que $\frac{\dot{A}_i}{A_i} \sim \frac{\dot{\phi}_i}{\phi_i} \sim \Omega \ll \omega_i$, condição que será muito útil na simplificação dos cálculos. É interessante lembrar que ω_i é uma constante, logo, sua utilização de forma explícita como divisor do termo da raiz não atrapalha o desenvolvimento do problema. A frequência Ω pode ser vista como uma medida da escala de tempo lenta para o problema, ligada a modulação.

Utilizando a expressão (2.1) no Lagrangeano (1.1), tem-se:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\left(\sqrt{\frac{1}{\omega_i A_i}} \dot{A}_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + \sqrt{\frac{2A_i}{\omega_i}} (\omega_i + \dot{\phi}_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \right)^2 - 2A_i \omega_i \sin^2(\omega_i t + \phi_i) - \frac{2\varepsilon_2 A_i^2}{\omega_i^2} \sin^4(\omega_i t + \phi_i) \right) - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_1 A_2 A_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3). \quad (2.2)$$

Desenvolvendo (2.2), chega-se em:

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 & \left(\frac{\dot{A}_i^2}{\omega_i A_i} \sin^2(\omega_i t + \phi_i) + \frac{2A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 \cos^2(\omega_i t + \phi_i) \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}\dot{A}_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i) \sin(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \\
& \left. - 2A_i \omega_i \sin^2(\omega_i t + \phi_i) - \frac{2\varepsilon_2 A_i^2}{\omega_i^2} \sin^4(\omega_i t + \phi_i) \right) \\
& - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{8A_1 A_2 A_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.1 O Lagrangeano Temporal Médio Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

Obtém-se a média temporal do Lagrangeano (2.3) utilizando-se a seguinte fórmula:

$$\langle L \rangle = T^{-1} \int_0^T L(t + \tau) d\tau \tag{2.4}$$

onde τ é uma variável fictícia para que seja possível a realização da integração e o tempo T é um tempo muito maior do que o período da onda de maior frequência, mas muito menor do que a escala modulacional. Como o valor de T é muito menor do que a escala de tempo modulacional, as amplitudes modulacionais e as fases podem ser consideradas constantes no processo da obtenção da média.

O termo fora do somatório pode ser escrito de forma mais conveniente. A multiplicação entre três senos pode ser reescrita como

$$\sin(A) \sin(B) \sin(C) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sin(A - B - C) + \sin(A + B - C) \\ + \sin(A - B + C) - \sin(A + B + C) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Assumindo uma condição de ressonância na forma $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, e utilizando a propriedade (2.5), reescreve-se o termo que envolve a multiplicação entre os senos como

$$\begin{aligned}
& \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3) \\
& = \frac{1}{4} \{ -\sin[(\omega_2 + \omega_3)t + \phi_1 - \omega_2 t - \phi_2 - \omega_3 t - \phi_3] \\
& \quad + \sin[(\omega_2 + \omega_3)t + \phi_1 + \omega_2 t + \phi_2 - \omega_3 t - \phi_3] \\
& \quad + \sin[(\omega_2 + \omega_3)t + \phi_1 - \omega_2 t - \phi_2 + \omega_3 t + \phi_3] \\
& \quad - \sin[(\omega_2 + \omega_3)t + \phi_1 + \omega_2 t + \phi_2 + \omega_3 t + \phi_3] \},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ou, simplificando a partir da soma ou subtração dos termos que se anulam:

$$\begin{aligned}
& \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3) \\
&= \frac{1}{4} \{ -\sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) + \sin(2\omega_2 t + \phi_1 + \phi_2 - \phi_3) \\
&+ \sin(2\omega_3 t + \phi_1 - \phi_2 + \phi_3) \\
&- \sin[2(\omega_2 + \omega_3)t + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3] \}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

A média temporal afeta apenas os termos senoidais e cossenoidais. Visto que:

$$\langle \sin^2(\omega_i t + \phi_i) \rangle = \frac{1}{2}; \tag{2.8}$$

$$\langle \langle \cos^2(\omega_i t + \phi_i) \rangle \rangle = \frac{1}{2}; \tag{2.9}$$

$$\langle \sin(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \rangle = 0 \tag{2.10}$$

e

$$\langle \sin^4(\omega_i t + \phi_i) \rangle = \frac{3}{8}, \tag{2.11}$$

onde o símbolo $\langle \quad \rangle$ representa a média temporal, pode-se realizar facilmente a média temporal do termo relativo ao somatório, restando pendente apenas simplificar o termo fora do mesmo. A partir de (2.7), pode-se observar que o termo pendente é composto por três termos senoidais de potência ímpar que dependem de algum ωt , logo, a média temporal destes termos deve anular-se. Mas, um dos senos possui dependência apenas das fases, sem depender de alguma frequência rápida ou do tempo de forma explícita (ao menos de forma relevante durante o intervalo considerado para a realização da média), logo, este termo pode ser considerado uma constante. Ao se realizar a média temporal, o termo se transforma em

$$\langle \sin(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3) \rangle = -\frac{1}{4} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3). \tag{2.12}$$

Sendo assim, realizando a média temporal e utilizando os termos (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) em (2.3), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\langle L \rangle = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + \frac{A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 - A_i \omega_i - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\
& + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Este termo ainda pode ser simplificado. Abrindo o termo quadrático, o Lagrangeano torna-se:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + A_i \omega_i + 2A_i \dot{\phi}_i + \frac{A_i \dot{\phi}_i^2}{\omega_i} - A_i \omega_i - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\ + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sendo assim, os termos $A_i \omega_i$ anulam-se, resultando em:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + 2A_i \dot{\phi}_i + \frac{A_i \dot{\phi}_i^2}{\omega_i} - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\ + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Neste ponto, uma aproximação pode ser realizada. Visto que as variações de amplitude e fase da modulação são muito pequenas, os termos que dependem do quadrado das derivadas de amplitude e fase podem ser desprezados, visto que são muito menores do que os outros termos da equação. Com isto

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(2A_i \dot{\phi}_i - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3), \quad (2.16)$$

ou, reordenando os termos de forma a destacar os coeficientes de acoplamento [15]:

$$\langle L \rangle = \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\phi}_i) + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{A_i^2}{\omega_i^2} \right). \quad (2.17)$$

2.1.2 Aplicação de Euler-Lagrange no Lagrangeano Médio

Após a obtenção do Lagrangeano temporal médio, é possível realizar uma aproximação para pontos fixos. É importante notar que o Lagrangeano temporal médio ainda depende do tempo, mas varia de forma muito lenta.

Aplicando a equação de Euler-Lagrange (1.2) para cada uma das seis variáveis dinâmicas A_i e ϕ_i de (2.17), lembrando que ambas são variáveis no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial A_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{A}_i}; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \phi_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{\phi}_i}. \quad (2.19)$$

As equações (2.18) e (2.19) representam 3 equações cada (uma para cada valor possível de i). Utilizando o valor de $\langle L \rangle$ de (2.17) em (2.18), chega-se em:

$$\dot{\varphi}_i + \varepsilon_1 \frac{1}{A_i} \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{8 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{A_i}{\omega_i^2} = 0. \quad (2.20)$$

Como $i = 1, 2, 3$, é possível escrever da forma acima, visto que o termo com ε_1 possui estrutura simétrica para todos os casos. Entretanto, para uma notação mais compacta, será utilizado também “j” e “k”, de forma que estes índices sempre assumem valores complementares a i . Sendo assim, reescrevendo e isolando o termo de interesse:

$$\dot{\varphi}_i = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i^{-1} A_j A_k}{8 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{A_i}{\omega_i^2}. \quad (2.21)$$

Em (2.21) estão representadas três equações dinâmicas. Agora, é necessário utilizar a equação (2.17) em (2.19) para a obtenção das outras três equações.

$$\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} (-1)^{\frac{(2-i)(3-i)+2}{2}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) = \dot{A}_i. \quad (2.22)$$

A potência de -1 é adicionada neste cálculo meramente como uma forma de compactar a notação. A derivada do termo senoidal deve ser positiva caso “i” = 1 e negativa nos outros dois casos. Sendo assim, com esta noção, caso “i” = 1, obtém-se $\frac{4}{2}$, de forma que $(-1)^2$ resulte em 1, um número positivo. Caso “i” = 2 ou “i” = 3, obtém-se $\frac{2}{2}$, de forma que $(-1)^1$ resulte em -1.

Pode-se simplificar mais um pouco a notação para ambos os casos. Utilizando uma nova variável $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$, (2.21) e (2.22) podem ser reescritos respectivamente como

$$\dot{\varphi}_i = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_i^{-1} A_j A_k}{8 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin \varphi - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{A_i}{\omega_i^2}; \quad (2.23)$$

e

$$\dot{A}_i = (-1)^{\frac{(2-i)(3-i)+2}{2}} \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2 \omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos \varphi. \quad (2.24)$$

2.1.3 Pontos Fixos Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

Pode-se reescrever (2.17) utilizando a nova variável. Visto que $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$:

$$\phi_1 = \varphi + \phi_2 + \phi_3 . \quad (2.25)$$

Aplicando-se (2.25) em (2.17):

$$\langle L \rangle = A_1(\dot{\varphi} + \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_3) + A_2\dot{\phi}_2 + A_3\dot{\phi}_3 + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin \varphi - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{A_i^2}{\omega_i^2} \right), \quad (2.26)$$

ou, reescrevendo:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & A_1\dot{\varphi} + (A_1 + A_2)\dot{\phi}_2 + (A_1 + A_3)\dot{\phi}_3 + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin \varphi \\ & - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{A_i^2}{\omega_i^2} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Considerando as equações de Euler-Lagrange nas variáveis angulares, tem-se, para ϕ_2 (que vale lembrar, é dependente do tempo)

$$\frac{d}{dt}(A_1 + A_2) = 0 , \quad (2.28)$$

logo, sabe-se que

$$A_1 + A_2 = I_2 , \quad (2.29)$$

sendo I_2 uma constante. De forma análoga para ϕ_3 (igualmente dependente do tempo):

$$\frac{d}{dt}(A_1 + A_3) = 0 , \quad (2.30)$$

logo, sabe-se que

$$A_1 + A_3 = I_3 , \quad (2.31)$$

sendo I_3 outra constante. Estas constantes são chamadas de quantidades conservadas de Manley-Rowe [1].

Para φ , entretanto, o cálculo fica um pouco diferente. Inicialmente, realizando o mesmo procedimento, obtém-se

$$\frac{d}{dt}(A_1) = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos \varphi . \quad (2.32)$$

Substituindo os valores de A_2 e A_3 pelos valores obtidos em (2.29) e (2.31), a equação torna-se

$$\dot{A}_1 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1(I_2 - A_1)(I_3 - A_1)}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos \varphi . \quad (2.33)$$

Para fins de simplicidade, é considerado que $I = I_2 = I_3$. Sendo assim:

$$\dot{A}_1 = \varepsilon_1 \frac{(I - A_1)\sqrt{A_1}}{\sqrt{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \cos \varphi . \quad (2.34)$$

Após o cálculo considerando a parte angular, será realizado o mesmo processo, mas referente à amplitude A_1 . Utilizando (2.29) e (2.31) em (2.27):

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & A_1 \dot{\varphi} + I(\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) + \varepsilon_1(I - A_1) \sqrt{\frac{A_1}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \sin \varphi - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \frac{A_1^2}{\omega_1^2} \\ & - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \frac{(I - A_1)^2}{\omega_2^2} - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \frac{(I - A_1)^2}{\omega_3^2}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ou, simplificando o último termo:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & A_1 \dot{\varphi} + I(\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3) + \varepsilon_1(I - A_1) \sqrt{\frac{A_1}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \sin \varphi \\ & - \frac{3}{8} \varepsilon_2 \left[\frac{A_1^2}{\omega_1^2} + (I - A_1)^2 \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Utilizando (1.2) em (2.36), focando em A_1 como a variável:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \varepsilon_1(I - A_1) \sqrt{\frac{A_1}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \frac{1}{2A_1} \sin \varphi - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1}{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \sin \varphi \\ - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \left[\frac{A_1}{\omega_1^2} - (I - A_1) \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Isolando $\dot{\varphi}$ e reorganizando os termos intermediários:

$$\dot{\varphi} = - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{8\omega_1\omega_2\omega_3}} \left(\frac{(I - A_1)}{\sqrt{A_1}} - 2\sqrt{A_1} \right) \sin \varphi + \frac{3}{4} \varepsilon_2 \left[\frac{A_1}{\omega_1^2} - (I - A_1) \left(\frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} \right) \right]. \quad (2.38)$$

As equações (2.34) e (2.38) são extremamente importantes. Ambas as equações explicam o funcionamento do sistema, e a partir delas é possível realizar uma análise de estabilidade no entorno do ponto fixo. Para tal, inicialmente é necessário calcular tais pontos fixos.

Os ditos pontos fixos (ou centrais) podem ser calculados de forma simples: considerando que as equações (2.34) e (2.38) são iguais a zero – ou seja, não há variação de angular nem de amplitude - e desconsiderando termos de variação em relação ao ponto fixo. Neste caso, serão calculados os pontos de equilíbrio do sistema. É fácil ver que este equilíbrio é instável: qualquer variação fará com que as derivadas saiam do ponto nulo de forma definitiva – exceto se houver alguma perturbação externa que coloque o sistema novamente na posição de equilíbrio. Tem-se então, respectivamente:

$$\varepsilon_1 \frac{(I - A_1') \sqrt{A_1'}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \cos \varphi' = 0; \quad (2.39)$$

$$-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{8\omega_1\omega_2\omega_3}}\left(\frac{(I-A'_1)}{\sqrt{A'_1}}-2\sqrt{A'_1}\right)\sin\varphi'+\frac{3}{4}\varepsilon_2\left[\frac{A'_1}{\omega_1^2}-(I-A'_1)\left(\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_3^2}\right)\right]=0. \quad (2.40)$$

Como ε_1 , I e A'_1 são não-nulos e I não é igual a A'_1 , utilizando-se (2.39) conclui-se rapidamente que

$$\cos\varphi'=0, \quad (2.41)$$

e com isto é fácil concluir que

$$\varphi'=\pm\frac{\pi}{2}. \quad (2.42)$$

Sabe-se a fase na qual ocorre o ponto de equilíbrio a partir do cálculo acima, sendo ainda necessário calcular a amplitude. Utilizando o resultado anterior em (2.40):

$$\pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{8\omega_1\omega_2\omega_3}}\left(\frac{(I-A'_1)}{\sqrt{A'_1}}-2\sqrt{A'_1}\right)+\frac{3}{4}\varepsilon_2\left[\frac{A'_1}{\omega_1^2}-(I-A'_1)\left(\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_3^2}\right)\right]=0. \quad (2.43)$$

O sinal \pm ocorre devido as duas possibilidades de solução: $-\frac{\pi}{2}$ ou $+\frac{\pi}{2}$.

Neste ponto será utilizada uma aproximação. O primeiro termo de (2.43) é muito maior do que o segundo, e isto pode ser visto facilmente, visto que $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$. Esta simplificação alterará muito pouco o valor numérico do resultado, mas facilitará muito o cálculo e a expressão algébrica final, além de tornar a resposta independente do sinal de φ . Sendo assim:

$$\frac{(I-A'_1)}{\sqrt{A'_1}}-2\sqrt{A'_1}=0. \quad (2.44)$$

Primeiramente, reorganizando (2.44) obtém-se

$$(I-A'_1)=2A'_1, \quad (2.45)$$

logo, o valor de equilíbrio (e assim, o centro da órbita) encontra-se em

$$A'_1=\frac{I}{3}. \quad (2.46)$$

2.1.4 Frequência de Flutuação Quando $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

Após o cálculo dos pontos centrais das trajetórias das variáveis dinâmicas, é possível calcular a frequência em que as quais flutuam no entorno do ponto fixo. Inicialmente, é necessário retomar (2.34). Os termos de amplitude e ângulo, então, devem ser expandidos dois: o ponto fixo e a variação do ponto fixo. Sendo assim, (2.34) é reescrito como

$$\dot{A}'_1+\delta\dot{A}'_1=\varepsilon_1\frac{[I-(A'_1+\delta A_1)]\sqrt{A'_1+\delta A_1}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}}\cos(\varphi'+\delta\varphi), \quad (2.47)$$

onde o termo δ indica uma variação em relação ao ponto central. Utilizando os valores dos pontos fixos obtidos em (2.42) e (2.46), chega-se em:

$$\delta\dot{A}_1 = \varepsilon_1 \frac{\left(I - \frac{I}{3} - \delta A_1\right) \sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} + \delta\varphi\right). \quad (2.48)$$

O termo cossenoidal pode ser simplificado por um seno, visto que é possível utilizar a propriedade trigonométrica $\cos\left(\pm \frac{\pi}{2} + \delta\varphi\right) = \mp \sin \delta\varphi$. Utilizando esta propriedade e realizando os cálculos, obtém-se:

$$\delta\dot{A}_1 = \varepsilon_1 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27} + \frac{4I^2}{9}\delta A_1 - \frac{I}{3}\delta A_1^2 - \delta A_1^3}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} (\mp \sin \delta\varphi). \quad (2.49)$$

As variações de amplitude dentro da raiz são desprezíveis por serem muito menores que I , e com isto, podem ser ignoradas. Além disto, para pequenos ângulos, como é o caso de $\delta\varphi$, $\sin \delta\varphi \approx \delta\varphi$. Por consequência, a expressão (2.49) pode ser reescrita como

$$\delta\dot{A}_1 = \mp \varepsilon_1 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} (\delta\varphi). \quad (2.50)$$

Derivando temporalmente em ambos os lados:

$$\delta\ddot{A}_1 = \mp \varepsilon_1 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} (\delta\dot{\varphi}). \quad (2.51)$$

Utilizando-se (2.38) em (2.51), utilizando as mesmas técnicas de expansão no entorno do ponto fixo, e lembrando que o segundo termo de (2.38) é muito menor que o primeiro termo, e por isto pode ser negligenciado, chega-se em:

$$\delta\ddot{A}_1 = \mp \varepsilon_1 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}}{\sqrt{2\omega_1\omega_2\omega_3}} \left[-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{8\omega_1\omega_2\omega_3}} \left(\frac{(I - A'_1 - \delta A_1)}{\sqrt{A'_1 + \delta A_1}} - 2\sqrt{A'_1 + \delta A_1} \right) (\sin(\varphi' + \delta\varphi)) \right]. \quad (2.52)$$

Utilizando os valores de ponto fixo já calculados, obtém-se $\sin\left(\pm \frac{\pi}{2} + \delta\varphi\right)$. Como $\delta\varphi$ é muito pequeno, pode-se aproximar a expressão para $\sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$, o que resulta em ± 1 . Em conjunto com o \mp , que depende da escolha do ponto de equilíbrio $\pm \frac{\pi}{2}$ a ser utilizado, tem-se que, independentemente da escolha por $+\frac{\pi}{2}$ ou por $-\frac{\pi}{2}$, há no resultado um sinal negativo (que

irá anular os sinais negativos dentro dos colchetes). Logo, já utilizando o valor de ponto fixo da amplitude:

$$\delta\ddot{A}_1 = \varepsilon_1^2 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}}{4\omega_1\omega_2\omega_3} \left[\left(\frac{\left(\frac{2I}{3} - \delta A_1\right)}{\sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1}} - 2\sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1} \right) \right]. \quad (2.53)$$

Multiplicando o último termo entre colchetes no numerador e no denominador pelo denominador do primeiro termo entre colchetes, chega-se em

$$\delta\ddot{A}_1 = \varepsilon_1^2 \frac{\sqrt{\frac{4I^3}{27}}}{4\omega_1\omega_2\omega_3} \left[\left(\frac{\left(\frac{2I}{3} - \delta A_1\right)}{\sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1}} - \frac{\left(\frac{2I}{3} + 2\delta A_1\right)}{\sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1}} \right) \right], \quad (2.54)$$

ou seja:

$$\delta\ddot{A}_1 = \varepsilon_1^2 \frac{\frac{2I}{3}\sqrt{\frac{I}{3}}}{4\omega_1\omega_2\omega_3} \left[\left(\frac{-3\delta A_1}{\sqrt{\frac{I}{3} + \delta A_1}} \right) \right]. \quad (2.55)$$

Visto que $\frac{I}{3} \gg \delta A_1(t)$, o valor da raiz depende majoritariamente do termo atemporal, de forma que o termo temporal pode ser cortado para fins de simplificação:

$$\delta\ddot{A}_1 = -\varepsilon_1^2 \frac{\frac{I}{3}\sqrt{\frac{I}{3}}}{2\omega_1\omega_2\omega_3} \left(\frac{3\delta A_1}{\sqrt{\frac{I}{3}}} \right). \quad (2.56)$$

Continuando o cálculo:

$$\delta\ddot{A}_1 = -\varepsilon_1^2 \frac{I}{2\omega_1\omega_2\omega_3} \delta A_1. \quad (2.57)$$

Um oscilador harmônico é claramente visível, pois há uma derivada temporal de segunda ordem de uma variável igualada a um termo negativo da mesma variável, mas sem derivação temporal alguma. Nestes casos, a frequência é dada pela raiz quadrada do módulo do termo que multiplica a grandeza temporal não derivada.

$$\Omega^2 = \varepsilon_1^2 \frac{I}{2\omega_1\omega_2\omega_3} \quad (2.58)$$

A frequência de flutuação das variáveis dinâmicas resulta em:

$$\Omega = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{I}{2\omega_1\omega_2\omega_3}}. \quad (2.59)$$

Esta expressão pode ser escrita de forma mais conveniente para comparações colocando-se em destaque um termo ω_1 . Para isto, é necessário multiplicar o numerador e o denominador, de forma que a expressão se torna:

$$\Omega = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{I}{2\omega_1^3 \omega_2 \omega_3}} \omega_1. \quad (2.60)$$

A expressão (2.60) serve como a definição formal para a frequência Ω , que deve ser vista como uma medida de tempo do lento processo modulacional envolvendo as portadoras.

Considerando que todas as frequências possuam a mesma ordem de magnitude, suposição esta realizada no início do capítulo, é fácil observar que para valores suficientemente grandes de ε_1 , tais que $\varepsilon_1 \sqrt{I}$ seja aproximadamente unitário, as ondas portadoras e moduladoras passam a ter frequências de mesma ordem de grandeza, e a hipótese de variações modulacionais lentas utilizadas para a obtenção das equações (2.23) e (2.24) torna-se falha. É importante lembrar que o valor de I é relacionado com a amplitude das ondas, como pode-se observar em (2.29) e (2.31).

2.2 O LAGRANGEANO MODULACIONAL QUANDO $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$

Outro caso interessante a ser avaliado é o caso em que uma das frequências moduladoras é muito menor do que as outras. Por fins de simplicidade, o primeiro modo será utilizado como o modo mais lento.

Este caso é o típico regime de operação de dispositivos com elétrons não muito concentrados, onde duas ondas moduladas de altas frequências excitam uma onda de baixa frequência de cargas elétricas movendo-se no espaço, caso de alguns aceleradores de partículas [16-18] e de *free-electron lasers* [19-21]. Nestes casos, as portadoras de alta frequência são ondas eletromagnéticas, enquanto o modo de baixa frequência é a onda de plasma. A interação entre ondas íon-acústicas e de Langmuir, por exemplo, pode ser considerada como outro caso de interação envolvendo ondas com grandes disparidades nas frequências das portadoras.

De forma a investigar esta possibilidade, é possível realizar a média temporal do Lagrangeano sobre o tempo mais rápido da escala, comparável com as frequências mais altas. Considerando que a portadora de frequência mais baixa não necessariamente possua frequência muito maior do que a frequência modulacional, a aproximação modulacional não pode ser realizada para todo o conjunto, mas apenas para os dois modos de maior frequência. É importante, entretanto, que estes modos possuam frequências ressonantes, pelos mesmos motivos que do subcapítulo anterior.

O processo do cálculo é similar ao cálculo realizado anteriormente, apesar do modelo não ser extremamente parecido com o caso prévio. O início é exatamente igual, a partir do mesmo modelo físico (1.1). É necessário realizar a média temporal deste Lagrangeano, lembrando que o primeiro modo é o mais lento. Entretanto, neste ponto começam as diferenças entre ambos os casos: enquanto no primeiro caso todos os modos são descritos a partir da expressão (2.1), neste caso apenas os modos cujas frequências são rápidas são assim definidos.

Isto ocorre porque as mudanças no valor de x_1 são muito mais lentas do que as mudanças nos outros modos, de forma que a média temporal considerando as ondas de altas frequências não faz sentido para a onda de baixa frequência. Intervalos de tempo suficientes para a realização de uma média temporal satisfatória para os modos 2 e 3 podem ser menores do que um ciclo do primeiro modo. Assim, substituindo (2.1) em (1.1) apenas para os modos rápidos:

$$\begin{aligned}
L' = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 & \left(\left(\sqrt{\frac{1}{\omega_i A_i(t)}} \dot{A}_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + \sqrt{\frac{2A_i}{\omega_i}} (\omega_i + \dot{\phi}_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \right)^2 \right. \\
& \left. - 2A_i \omega_i \sin^2(\omega_i t + \phi_i) - \frac{2\varepsilon_2 A_i^2}{\omega_i^2} \sin^4(\omega_i t + \phi_i) \right) \\
& + \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Abrindo o termo quadrático:

$$\begin{aligned}
L' = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 & \left(\frac{\dot{A}_i^2}{\omega_i A_i} \sin^2(\omega_i t + \phi_i) + \frac{2A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 \cos^2(\omega_i t + \phi_i) \right. \\
& + \frac{\sqrt{2}\dot{A}_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i) \sin(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_i t + \phi_i) \\
& \left. - 2A_i \omega_i \sin^2(\omega_i t + \phi_i) - \frac{2\varepsilon_2 A_i^2}{\omega_i^2} \sin^4(\omega_i t + \phi_i) \right) \\
& + \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

2.2.1 O Lagrangeano Temporal Médio Quando $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$

Realiza-se a média temporal conforme (2.4). A média temporal irá afetar apenas os termos senoidais e cossenoidais, visto que os outros até variam no tempo, mas de forma lenta. Visto que neste caso x_1 varia com frequência similar a frequência dos envelopes dos outros dois modos, a média temporal também não o afetará.

É fácil realizar o cálculo relembrando as expressões (2.8)-(2.11). Utilizando-as, obtém:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + \frac{A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 - A_i \omega_i - \frac{6\varepsilon_2 A_i^2}{8\omega_i^2} \right) \\ & - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{4A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \langle \sin(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\omega_3 t + \phi_3) \rangle. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Utilizando a propriedade trigonométrica

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)), \quad (2.64)$$

a multiplicação dos termos senoidais de (2.63) leva até a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + \frac{A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 - A_i \omega_i - \frac{6\varepsilon_2 A_i^2}{8\omega_i^2} \right) \\ & - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \langle \cos(\omega_2 t + \phi_2 - \omega_3 t - \phi_3) \\ & - \cos(\omega_2 t + \phi_2 + \omega_3 t + \phi_3) \rangle. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + \frac{A_i}{\omega_i} (\omega_i + \dot{\phi}_i)^2 - A_i \omega_i - \frac{6\varepsilon_2 A_i^2}{8\omega_i^2} \right) \\ & - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \left(\langle \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3) \rangle \right. \\ & \left. - \langle \cos((\omega_2 + \omega_3)t + \phi_2 + \phi_3) \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Este termo ainda pode ser melhor trabalhado. Abrindo o termo quadrático:

$$\begin{aligned}
\langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + A_i \omega_i + 2A_i \dot{\phi}_i + \frac{A_i \dot{\phi}_i^2}{\omega_i} - A_i \omega_i - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} (\langle \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3) \rangle) \\
& - \langle \cos((\omega_2 + \omega_3)t + \phi_2 + \phi_3) \rangle).
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Sendo assim, os termos $A_i \omega_i$ anulam-se, resultando em

$$\begin{aligned}
\langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\dot{A}_i^2}{2\omega_i A_i} + 2A_i \dot{\phi}_i + \frac{A_i \dot{\phi}_i^2}{\omega_i} - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} (\langle \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3) \rangle) \\
& - \langle \cos((\omega_2 + \omega_3)t + \phi_2 + \phi_3) \rangle).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Neste ponto, uma aproximação pode ser realizada. Visto que as variações de amplitude e fase da modulação continuam sendo muito pequenas em relação aos outros termos da equação, os termos que dependem do quadrado das derivadas de amplitude e fase podem ser desprezados. Com isto:

$$\begin{aligned}
\langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) - \frac{\varepsilon_2}{4} x_1^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 \left(2A_i \dot{\phi}_i - \frac{3\varepsilon_2 A_i^2}{4\omega_i^2} \right) \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} (\langle \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3) \rangle) \\
& - \langle \cos((\omega_2 + \omega_3)t + \phi_2 + \phi_3) \rangle).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Ou, reordenando os termos de forma a destacar os coeficientes de acoplamento e simplificar o somatório:

$$\begin{aligned}
\langle L' \rangle = & \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \sum_{i=2}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \frac{\varepsilon_2}{4} \left(x_1^4 + \frac{3A_2^2}{2\omega_2^2} + \frac{3A_3^2}{2\omega_3^2} \right) \\
& - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} (\langle \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3) \rangle) \\
& - \langle \cos((\omega_2 + \omega_3)t + \phi_2 + \phi_3) \rangle).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

É possível simplificar esta expressão utilizando mais uma aproximação. Como ω_2 possui um valor da mesma ordem de grandeza de ω_3 , o cosseno em que ambos são somados

torna-se muito mais rápido que o cosseno em que as frequências são subtraídas. Com isto, é possível afirmar que a expressão possui um cosseno rápido e um cosseno lento. Como a média temporal de um cosseno é nula, para fins de simplificação, o cosseno com maior frequência será anulado devido a média temporal. O cosseno de menor frequência possui variação tão lenta em relação ao outro que a média temporal é igual ao próprio cosseno. Sendo assim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \sum_{i=2}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \frac{\varepsilon_2}{4} \left(x_1^4 + \frac{3A_2^2}{2\omega_2^2} + \frac{3A_3^2}{2\omega_3^2} \right) \\ & - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \cos((\omega_2 - \omega_3)t + \phi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Utilizando $\delta = \omega_2 - \omega_3$:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \sum_{i=2}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \frac{\varepsilon_2}{4} \left(x_1^4 + \frac{3A_2^2}{2\omega_2^2} + \frac{3A_3^2}{2\omega_3^2} \right) \\ & - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \cos(\delta t + \phi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Por fim, de forma a tornar a fórmula mais compacta e organizada, colocando os termos ε em ordem de acordo com o índice e utilizando $\varphi = (\delta t + \phi_2 - \phi_3)$, chega-se na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle = & \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 - \omega_1^2 x_1^2) + \sum_{i=2}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi) \\ & - \frac{\varepsilon_2}{4} \left(x_1^4 + \frac{3A_2^2}{2\omega_2^2} + \frac{3A_3^2}{2\omega_3^2} \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

2.2.2 Aplicação de Euler-Lagrange com ω_1 Pequeno

Após a obtenção do Lagrangeano temporal médio, é possível obter equações que descrevem o comportamento da dinâmica aplicando a equação de Euler-Lagrange (1.2) para cada uma das cinco variáveis dinâmicas de (2.73): x_1 , A_i e ϕ_i (com $i = 2,3$). Lembrando que ambas são variáveis no tempo, tem-se duas equações iguais às do primeiro caso, representando quatro equações:

$$\frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial A_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial \dot{A}_i}; \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial \phi_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial \dot{\phi}_i}. \quad (2.75)$$

As equações (2.74) e (2.75) representam 2 equações cada (uma para cada valor possível de i neste caso), além da nova equação

$$\frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L' \rangle}{\partial \dot{x}_1}. \quad (2.76)$$

Utilizando o valor de $\langle L' \rangle$ de (2.73) em (2.74), chega-se em:

$$\dot{\phi}_i - \varepsilon_1 x_1 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_j}{A_i \omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi) - \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{A_i}{\omega_i^2} = 0. \quad (2.77)$$

Como $i = 2, 3$, “ j ” precisa ser a dimensão complementar a “ i ”. Há duas equações representadas aqui.

Agora, é necessário utilizar a equação (2.73) em (2.75) para a obtenção de outras duas equações:

$$(-1)^i \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \text{sen}(\varphi) = \dot{A}_i. \quad (2.78)$$

A potência de -1 é adicionada neste cálculo meramente como uma forma de compactar a notação. A derivada do termo senoidal deve ser positiva caso “ i ” = 2 e negativa caso “ i ” = 3. Como não há sentido em aproximar modulacionalmente o modo 1, este caso deve ser desconsiderado. Sendo assim, com esta noção, caso “ i ” = 2, obtém-se $(-1)^2$, que resulta em 1, um número positivo, e caso “ i ” = 3, obtém-se $(-1)^3$, que resulta em -1.

Por fim, para (2.76), chega-se em

$$-\omega_1^2 x_1 - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi) - \varepsilon_2 x_1^3 = \ddot{x}_1. \quad (2.79)$$

Reorganizando estas equações isolando as derivadas temporais, chega-se no conjunto abaixo:

$$\dot{\phi}_i = \varepsilon_1 x_1 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A_j}{A_i \omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi) + \frac{3}{4} \varepsilon_2 \frac{A_i}{\omega_i^2}. \quad (2.80)$$

$$\dot{A}_i = (-1)^i \varepsilon_1 x_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \text{sen}(\varphi) \quad (2.81)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_2 A_3}{\omega_2 \omega_3}} \cos(\varphi) - \varepsilon_2 x_1^3. \quad (2.82)$$

Estas três equações descrevem o funcionamento do sistema neste caso. Apesar de haver uma equação a menos que no caso anterior (cinco neste caso, contra seis no caso anterior), o sistema é mais complexo, devido à ausência de uma estrutura completamente simétrica.

3 SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

3.1 CASO $\omega_1 \sim \omega_2 \sim \omega_3$

3.1.1 Simulação da Estrutura de Espaço-Fase

Inicialmente, é interessante realizar uma simulação da estrutura de espaço-fase com as variáveis A_1 e ϕ de forma a observar o comportamento do sistema. É possível realizar esta simulação utilizando as equações (2.34) e (2.38). Outra possibilidade é considerar os contornos da função de energia conservada. Como o sistema não pode simplesmente ganhar ou perder energia, ambos os resultados devem ser equivalentes, entretanto, simular o sistema em função da sua energia é mais fácil, pois não depende de duas equações diferenciais relacionadas entre si, mas apenas de uma equação simples. Em ambos os casos é necessário alterar as condições iniciais de A_1 e ϕ para simular o sistema várias vezes.

A energia de um Lagrangeano qualquer pode ser escrita como

$$E_L = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (3.1)$$

onde “ q_i ” representa todas as variáveis dinâmicas do sistema. No caso do Lagrangeano temporal médio, as variáveis são as amplitudes A_i e os ângulos ϕ_i , de forma que

$$E_{\langle L \rangle} = \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{\phi}_i} + \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{A}_i} - \langle L \rangle. \quad (3.2)$$

$E_{\langle L \rangle}$ representa a energia do Lagrangeano temporal médio. Substituindo o valor do Lagrangeano temporal médio (2.17) e negligenciando-se os termos com ε_2 , devido a diferença de ordem de grandeza entre os coeficientes ε_1 e ε_2 :

$$\begin{aligned} E_{\langle L \rangle} = & \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_i} \left[\sum_{j=1}^3 (A_j \dot{\phi}_j) + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right] \\ & + \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} \left[\sum_{j=1}^3 (A_j \dot{\phi}_j) + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right] \\ & - \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\phi}_i) + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Há um somatório dentro de cada uma das derivadas que pode ser simplificado. A derivada por um termo cujo índice seja “i” só resulta em um valor não-nulo caso o índice “j” seja igual. Mesmo que A_i e A_j tenham um vínculo entre si, são variáveis distintas, de forma que, para cada somatório, haverá duas derivadas nulas e apenas uma não-nula. Sendo assim, o termo (3.3) pode ser reescrito de forma simplificada.

$$\begin{aligned}
E_{\langle L \rangle} = & \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_i} \left[A_i \dot{\phi}_i + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right] \\
& + \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} \left[A_i \dot{\phi}_i + \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Realizando as derivadas:

$$E_{\langle L \rangle} = \sum_{i=1}^3 \dot{\phi}_i [A_i] + \sum_{i=1}^3 \dot{A}_i [0] - \sum_{i=1}^3 (A_i \dot{\phi}_i) - \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3). \tag{3.5}$$

Sendo assim, chega-se em

$$E_{\langle L \rangle} = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3), \tag{3.6}$$

ou, lembrando que neste caso $\varphi = \phi_1 - \phi_2 - \phi_3$:

$$E_{\langle L \rangle} = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi). \tag{3.7}$$

Esta equação pode ser simplificada em termos de valores constantes, A_1 e φ utilizando as equações (2.29) e (2.31), além da definição $I = I_2 = I_3$ (condição utilizada anteriormente). Devido a esta igualdade, a expressão possui uma simetria entre A_2 e A_3 (que não é o foco neste caso, mas vale a pena ser citada). Logo, isolando-se A_2 e A_3 nestas equações e substituindo em (3.7), chega-se em

$$E_{\langle L \rangle} = -\varepsilon_1 \sqrt{\frac{A_1 (I - A_1)^2}{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi), \tag{3.8}$$

e com isto

$$E_{\langle L \rangle} = -\varepsilon_1 \frac{(I - A_1) \sqrt{A_1}}{\sqrt{2\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \sin(\varphi). \tag{3.9}$$

Com a equação (3.9), é possível realizar várias curvas de energia constante em função de A_1 e φ de forma muito mais simples que com as equações (2.34) e (2.38), mesmo que o termo ε_2 seja igualmente desprezado neste caso. Sendo assim, é possível realizar uma simulação do sistema.

Como calculado no capítulo 2 (nas equações (2.42) e (2.46)), há dois pontos de equilíbrio para a dinâmica, de forma que a amplitude e a fase se mantenham constantes. Quanto mais longe destes pontos, maior a probabilidade de encontrar caos no sistema.

Para gerar a Figura 1, foram utilizados $\omega_1 = 1,5$; $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 0,5$. Além disto, foram utilizados $\varepsilon_1 = 0,01$ e $I = 1$. O termo ε_2 , conforme os cálculos acima indicam, foi considerado nulo. Foram testadas diferentes condições iniciais A_1 e φ .

Na Figura 1 torna-se claro os pontos fixos orbitais e as possíveis órbitas com dois centros – conforme indicavam os resultados (2.42) e (2.46), onde o termo angular podia ser positivo ou negativo (que indica energia negativa ou positiva, respectivamente). As órbitas mais próximas dos centros possuem um comportamento mais linear, enquanto o comportamento não-linear começa a ser mais visível a medida que se afasta destes pontos de equilíbrio.

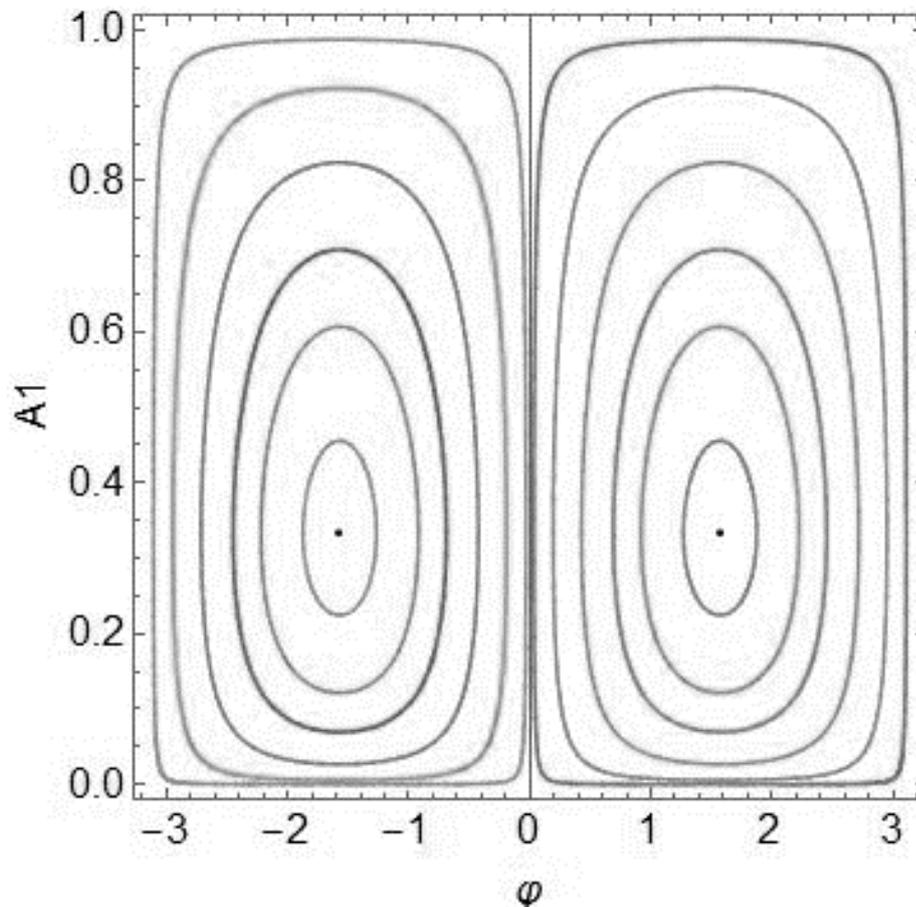


Figura 1: Estrutura orbital da aproximação modulacional para diferentes condições iniciais.

Em casos extremos é possível ver o sistema ir para condições em que $A_1 \sim I$ e $A_2 = A_3 \sim 0$. Nestes casos, toda a energia encontra-se no primeiro modo, e é possível observar como um sistema cuja toda energia encontra-se no primeiro modo comporta-se, entregando energia para outros dois modos, inicialmente sem energia alguma. No que se refere às condições iniciais, há outro ponto cujo comentário é válido: independentemente dos valores, as órbitas vistas na Figura 1 são periódicas.

Observando as equações (3.9), (2.34) e (2.38) – excluindo-se o termo que contém ε_2 – é possível observar que todas são proporcionais ao termo $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\omega_1\omega_2\omega_3}}$ e os valores ε_1 , ω_1 , ω_2 e ω_3 aparecem apenas neste termo nas equações. Isto possui uma implicação interessante: estes valores não afetam a forma do resultado da Figura 1, afetando apenas a velocidade com que um sistema com uma certa energia altera seu estado, como pôde ser visto em (2.60). A importância da utilização de valores pensados para este caso ocorre principalmente devido à necessidade de a simulação encontrar-se dentro das condições necessárias para a aproximação modulacional, visto que, caso isto não ocorra, as equações (2.34), (2.48) e (3.9) são inválidas.

3.1.2 Simulação da Falha da Aproximação Modulacional

Um ponto muito importante – na verdade, uma das principais motivações para o trabalho – é entender o que acontece quando a aproximação modulacional falha e o que é obtido nestes casos. Para uma real compreensão do efeito, é necessário comparar os resultados obtidos a partir da dinâmica completa do sistema, representada por (1.5) para cada modo, lembrando que x_i (e, analogamente, x_j e x_k) pode ser descrito por (2.1), e compará-la com os resultados obtidos pela aproximação modulacional, representados por (2.34) e (2.38).

A comparação é realizada simulando-se ambos os sistemas com condições iniciais iguais (inclusive, a equação (2.1) foi relembrada exatamente para que as condições iniciais iguais sejam obtidas mais facilmente), além de, obviamente, frequências com mesmo valor. Inicialmente, utilizam-se valores para ε_1 pequenos, em cuja situação é esperado que as aproximações sejam adequadas, como forma de validar a aproximação.

Em um primeiro momento, as frequências utilizadas para a simulação são as mesmas do subcapítulo anterior: $\omega_1 = 1,5$; $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 0,5$. Além disto, são utilizadas amplitudes modais de ordem unitária, com $A_1(0) = 0,5$ e $I = 1$. Optou-se por $\varphi = \pi/2$ como fase inicial. Estes valores iniciais foram escolhidos de forma a simplificar o trabalho, visto que o foco é com

o efeito que ocorre devido ao acoplamento – e é o fator que indica o acoplamento que deve ser visto com mais cuidado.

Para um sistema completo compatível com estas condições, o primeiro módulo do triplete pode começar com apenas x_1 possuir valor inicial não nulo, com $\phi_1 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$ e $\phi_3 = 0$, de forma que $x_1(0) = \sqrt{\frac{2A_1(0)}{\omega_1}}$. Para um sistema igualmente coerente, é igualmente necessário pensar nas derivadas temporais de x_i . Para isto, é possível derivar (2.1) temporalmente, considerando A_i e ϕ_i constantes, e substituindo com os valores já definidos.

$$\dot{x}_i(t) = \sqrt{\frac{2A_i}{\omega_i}} \omega_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (3.10)$$

Ou seja, para o tempo zero:

$$\dot{x}_i(0) = \sqrt{2A_i(0)\omega_i} \cos(\phi_i(0)) \quad (3.11)$$

O parâmetro ε_2 deve ser considerado como muito pequeno, visto que ele apenas existe para evitar que o modelo divirja durante ou após a quebra da aproximação, mas não deve influenciar fortemente o regime enquanto as amplitudes estiverem limitadas. Sendo assim, é razoável utilizar $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/100$.

O primeiro caso a ser examinado é o caso em que $\varepsilon_1 = 0,01$. Como é possível ver nas figuras 2 e 3, a solução completa (linha fina) é comparada com as equações das aproximações modulacionais (2.34) e (2.38) (linha grossa). Fica claro que para baixos valores ε_1 , ou seja, para acoplamentos fracos, o envelope da solução completa é completamente compatível com a aproximação modulacional A_1 . Isto indica que o modelo funciona nestas condições.

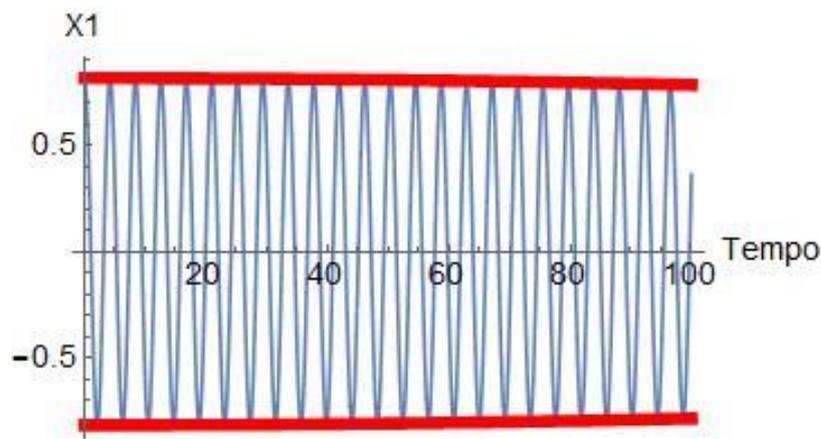


Figura 2: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_1$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,01$.

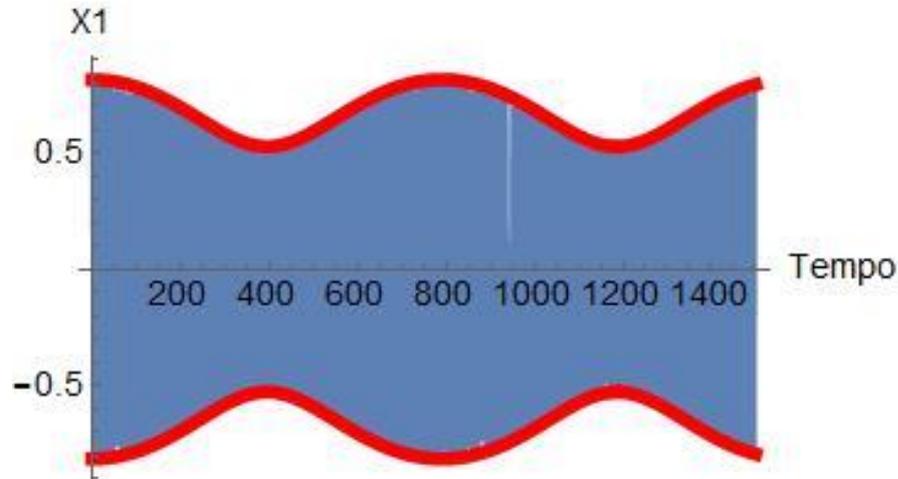


Figura 3: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_1$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,01$ em uma escala de tempo maior.

É fácil observar que a portadora (onda de alta frequência) oscila rapidamente dentro da modulação, muito mais lenta. Para pequenos fatores de acoplamento, a aproximação modulacional para o triploto funciona, visto que reproduz os resultados esperados.

A medida que o valor de ε_1 é aumentado, entretanto, torna-se claro que o modelo perde qualidade e torna-se cada vez menos preciso. Em casos extremos, o modelo torna-se inválido. Como exemplo, será utilizado o caso $\varepsilon_1 = 0,40$, mantendo-se todos os outros valores do caso anterior.

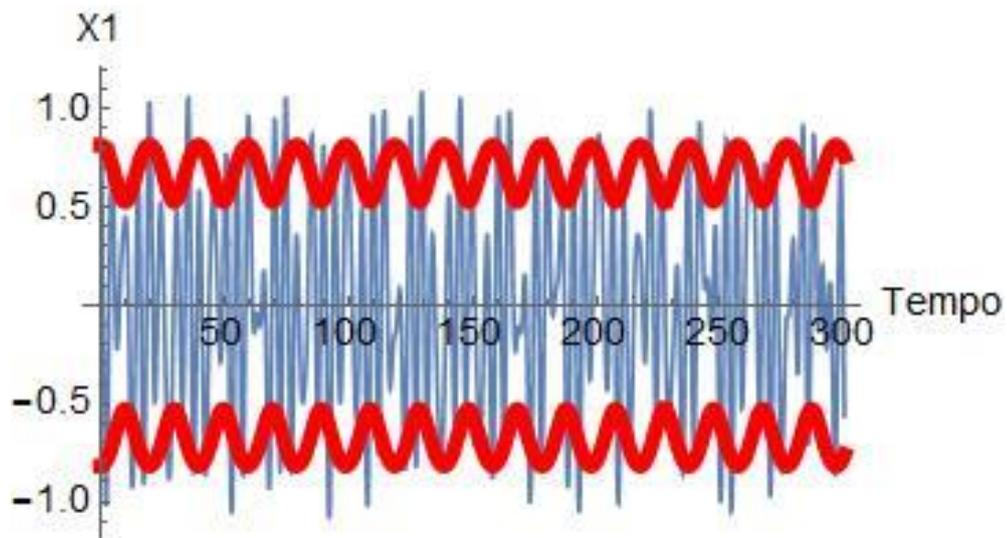


Figura 4: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_1$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,40$.

É possível observar na Figura 4 que, apesar das oscilações do sistema completo ainda serem visivelmente limitadas, a coerência com a aproximação foi perdida. O sistema completo (linhas finas) e a aproximação (linhas grossas) possuem ordens de grandeza similares, mas o envelope do sistema completo é visivelmente muito diferente da aproximação. Outro ponto importante é notar que a frequência do envelope se alterou, tornando-se muito maior, como era esperado a partir de (2.60).

Aumentando-se ainda mais o valor do acoplamento, é possível observar uma mudança de comportamento no sistema. Como exemplo, será utilizado o caso $\varepsilon_1 = 0,55$, mantendo-se todos os outros valores do caso anterior:

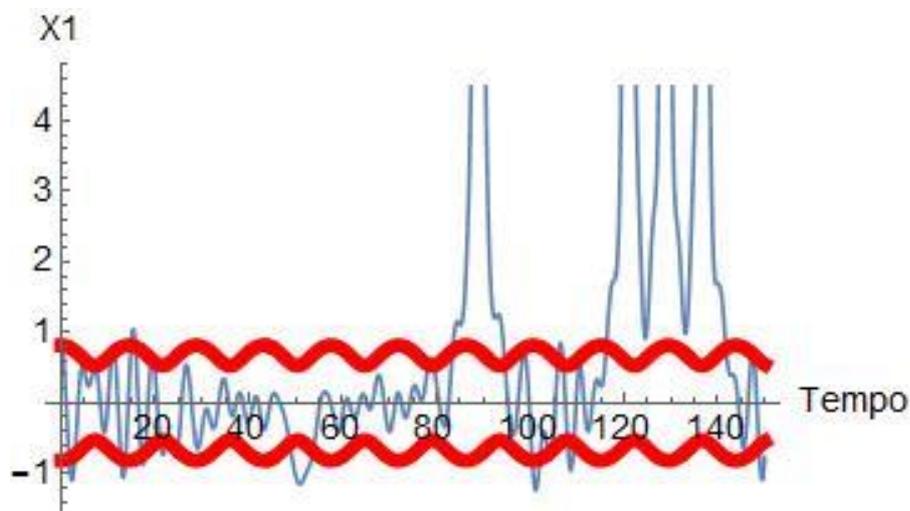


Figura 5: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_1$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,55$.

Durante um intervalo de tempo, a simulação indica resultados muito similares ao caso anterior ($\varepsilon_1 = 0,40$), cujas oscilações são visivelmente irregulares, mas limitadas, entretanto, a solução completa do sistema vista na figura 5 indica um comportamento explosivo após este intervalo. Com as condições iniciais utilizadas neste caso, a explosão ocorre com aproximadamente $t = 82$.

A simulação apenas tente voltar frequentemente para o entorno da sua origem devido ao termo ε_2 , que evita divergências, entretanto, ela não se limita a explodir apenas uma, tendendo a ficar variando entre a zona inicial e zonas mais afastadas da dinâmica. Aumentando o intervalo de tempo da simulação, este comportamento torna-se ainda mais explícito.

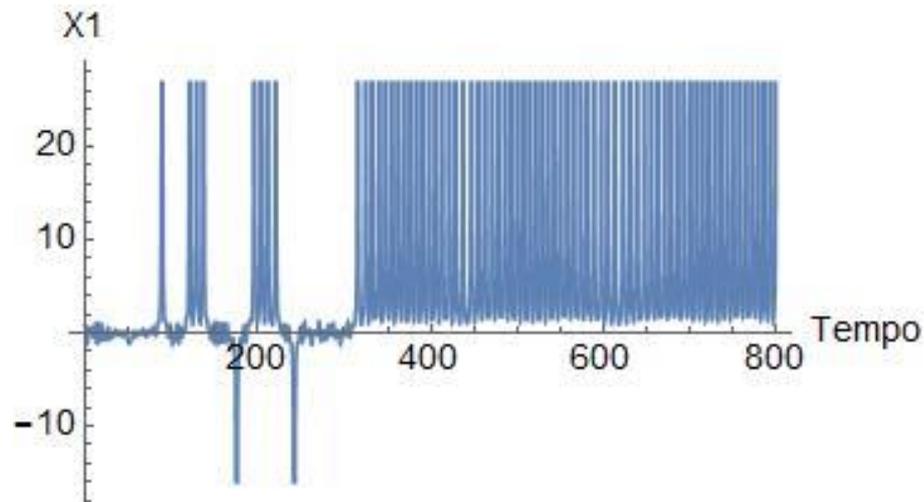


Figura 6: Gráfico do sistema completo para $\varepsilon_1 = 0,55$.

Outro fator interessante é o comportamento do sistema completo durante as explosões. Como pode ser visto na Figura 7, todos os modos sempre explodem simultaneamente, entretanto, sempre um número ímpar de modos explode negativamente. Inclusive, como pode ser observado no intervalo de tempo próximo de $t = 175$, podem ocorrer situações em que todos os modos explodam negativamente.

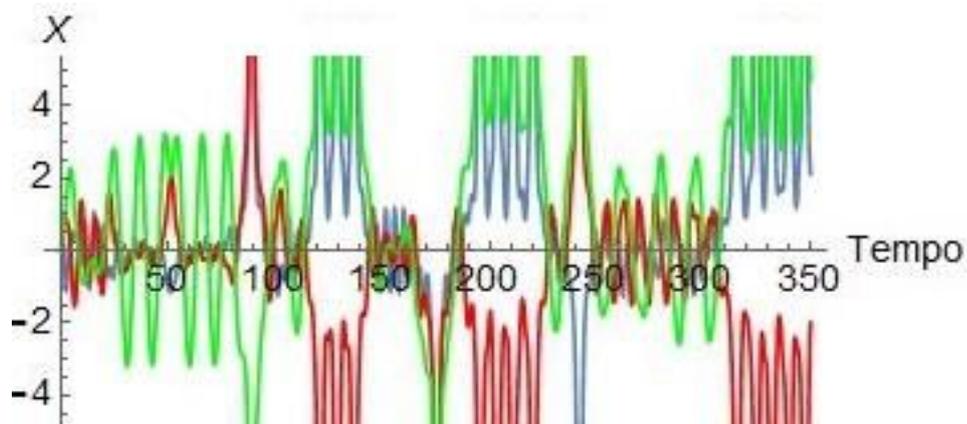


Figura 7: Gráfico dos três modos do sistema completo para $\varepsilon_1 = 0,55$. Modo 1 em azul, modo 2 em vermelho e modo 3 em verde.

Análises extras mostram que, para um sistema com os dados utilizados aqui como exemplo, o valor em que a explosão começa a ser vista é, aproximadamente, $\varepsilon_{1\text{limite}} \approx 0,4987$. Este valor é alterado dependendo das condições iniciais, mas a dependência é fraca o suficiente para que o mesmo possa ser considerado representativo.

3.1.3 Superfícies das Regiões de Energia

Algo ocorre quando o valor limite de ε_1 é ultrapassado, e *a priori* parece interessante investigar o que está ocorrendo. Um modo sólido de olhar para o problema é realizando uma análise da energia do Lagrangeano (1.1) na sua forma completa. Visto que a energia do Lagrangeano pode ser calculada como

$$E_L = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L, \quad (3.12)$$

utilizando-se a equação (1.1) em (3.10) obtém-se:

$$E_L = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\dot{x}_j^2 - \omega_j^2 x_j^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_j^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 \right] - \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 \right] \quad (3.13)$$

Simplificando o sistema, retirando-se todos os termos cuja derivada é nula (ou seja, considerando-se apenas os termos dentro do somatório em que “i” = “j” e retirando os outros), chega-se em:

$$E_L = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 \right] - \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 \right]. \quad (3.14)$$

Esta expressão ainda pode ser aprimorada. Realizando a derivada:

$$E_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (2\dot{x}_i^2) - \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^2 - \omega_i^2 x_i^2 - \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 \right]. \quad (3.15)$$

Então, unindo os somatórios, chega-se em:

$$E_L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i^2 + \omega_i^2 x_i^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} x_i^4 \right) + \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3. \quad (3.16)$$

Para qualquer condição inicial, é possível obter a energia do sistema e mapear as regiões possíveis para a existência da dinâmica do mesmo, lembrando da conservação de energia. Estas regiões são os pontos onde a energia cinética do sistema

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 \quad (3.17)$$

não é negativa, ou seja, nas regiões limitantes, estes termos devem ser nulos. Visto que a energia do sistema é constante e depende das condições iniciais, fica explícito que as condições iniciais, as frequências e os coeficientes de acoplamento determinam as possíveis regiões do sistema.

Uma boa maneira de compreender o problema é utilizar as mesmas condições do item anterior ($\omega_1 = 1,5$; $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 0,5$, $I = 1$, $A_1(0) = 0,5$ e $\varphi = \pi/2$) e simular o problema, examinando-se as alterações da região possível do sistema a partir da variação de ε_1 . Estes valores devem ser utilizados para a obtenção das condições iniciais em função de x_1 , x_2 e x_3 , além de suas derivadas temporais utilizando a mesma técnica do caso anterior. Além disto, assim como nos casos acima, é considerado $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/100$.

Iniciando-se com $\varepsilon_1 = 0,01$, obtém-se a figura abaixo:

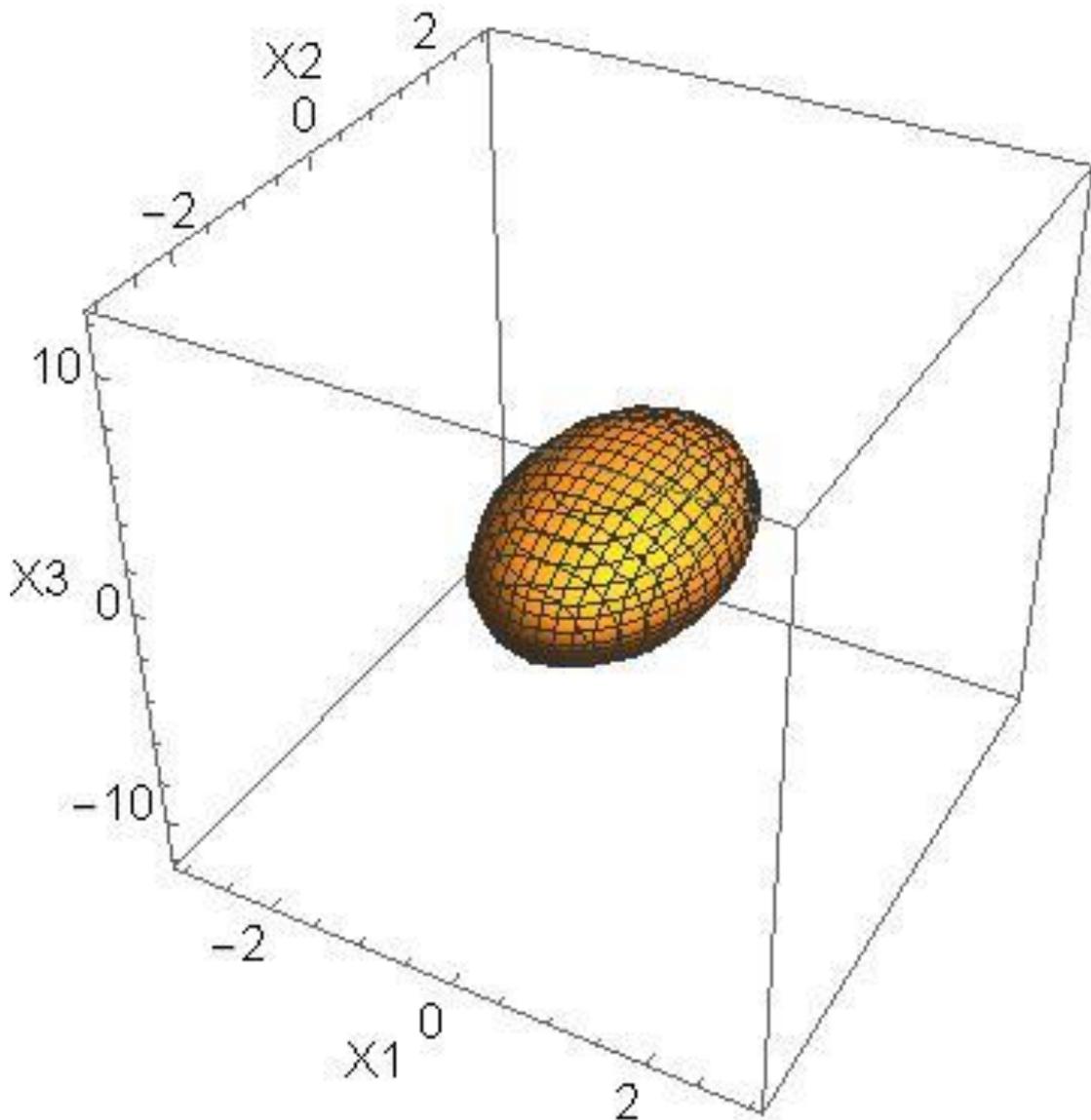


Figura 8: Superfícies das regiões permitidas do sistema para $\varepsilon_1 = 0,01$.

Com a escala utilizada na figura, é possível identificar apenas uma região, pequena e localizada no centro, que encapsula a dinâmica modulacional obtida com as equações (2.34) e (2.38) – vale lembrar que, a partir dos resultados anteriores, é sabido que para este valor de ε_1 , a dinâmica aproximada possui envelope extremamente similar à dinâmica completa. Isto significa que, se as condições iniciais estiverem dentro desta área, a dinâmica completa do sistema continuará eternamente lá, e será bastante regular para pequenos valores de acoplamento.

Seguindo a lógica do subcapítulo anterior, aumenta-se o valor de acoplamento o sistema para $\varepsilon_1 = 0,40$:

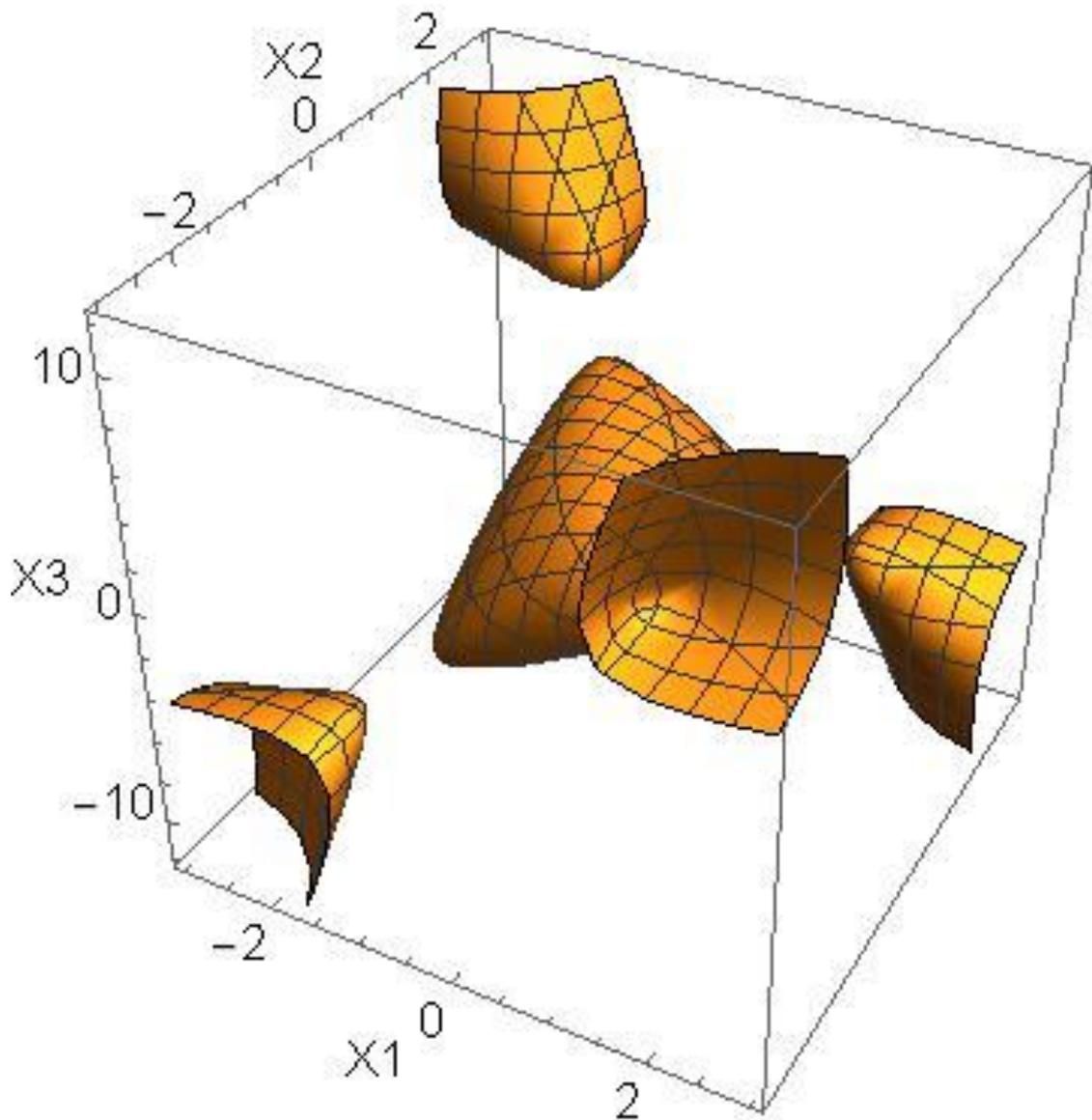


Figura 9: Superfícies das regiões permitidas do sistema para $\varepsilon_1 = 0,40$.

A Figura 9 indica uma mudança de situação. Além da região central, é possível observar outras quatro regiões nos cantos. Além disto, a região central deformou-se levemente. Outro ponto importante a ser notado é que as regiões estão próximas, mas separadas por regiões impossíveis – o que significa que um sistema permanecerá na região cujas condições iniciais encontram-se, entretanto, o comportamento não será tão regular quanto o caso anterior.

Por fim, aumentando-se novamente o valor do acoplamento para $\varepsilon_1 = 0,55$ e simulando-se o sistema, obtém-se o resultado abaixo:

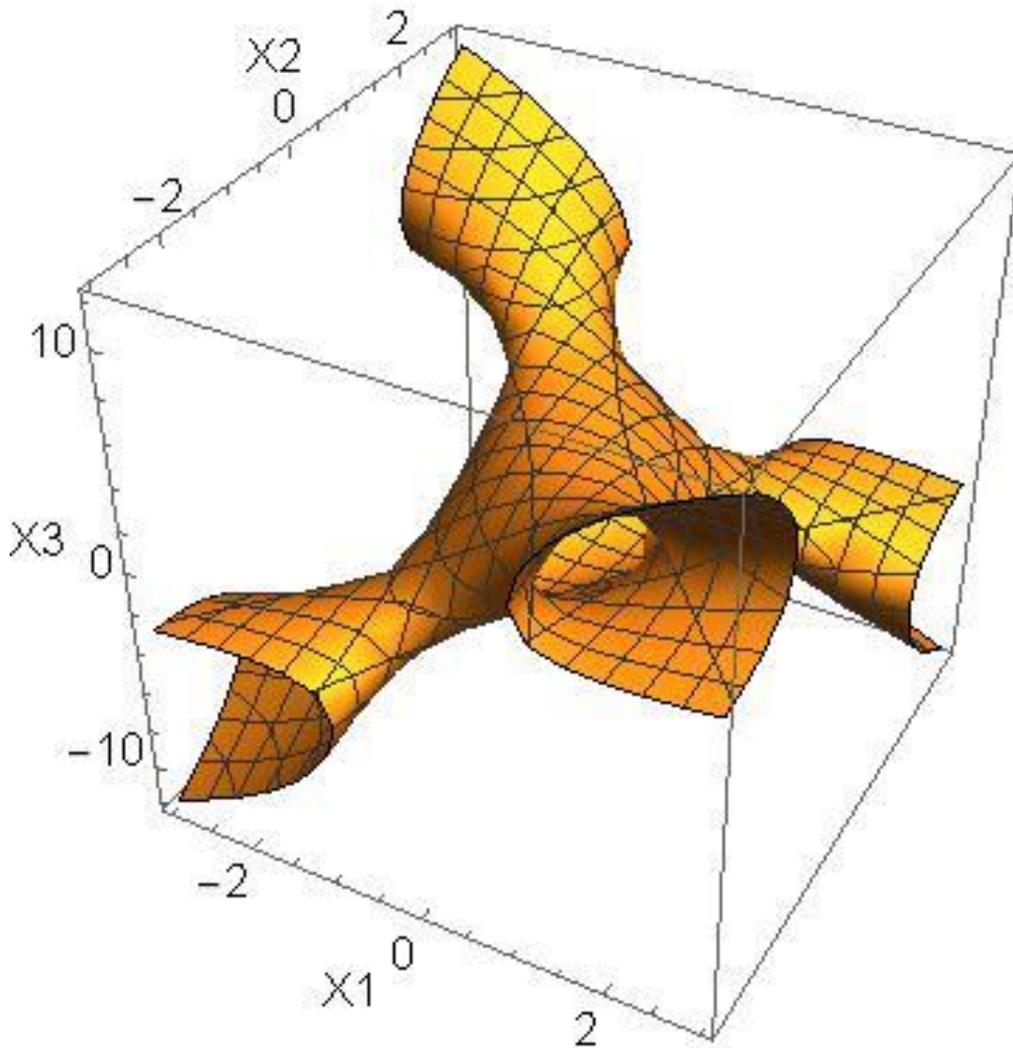


Figura 10: Superfícies das regiões permitidas do sistema para $\varepsilon_1 = 0,55$.

Nesta situação as regiões permitidas estão conectadas. Com isto, as órbitas não ficam restritas na região de modulação formal e o caráter caótico da dinâmica possibilita que o sistema se dirija para alguma posição muito distante da região central. Não apenas a trajetória é irregular

na região central, ela agora pode abandonar a região central e direcionar-se para as regiões periféricas.

A transição é explosiva: após um intervalo de tempo transitório explorando as regiões de baixas amplitudes, a órbita subitamente afasta-se para o centro em direção a posições de maiores amplitudes. Esta transição já foi vista para diferentes tipos de sistemas de onda [11], de forma que este tipo de transição é relativamente comum em modos de interação não-linear.

O termo ε_2 é a causa do sistema conseguir voltar frequentemente para o entorno da sua origem na após uma explosão. Caso este não existia, a órbita simplesmente divergiria, eventualmente para nunca mais voltar.

3.2 CASO $\omega_1 \ll \omega_2 \sim \omega_3$

3.2.1 Simulação Completa do Sistema

O Lagrangeano (2.73), calculado no capítulo anterior, indica o resultado da aproximação modulacional para um sistema cujo primeiro modo possua uma frequência muito menor que os modos 2 e 3. Este formato pode representar um *beat wave accelerator* ou um *free-electron laser*, onde os modos rápidos representariam o laser e o *wiggler* (neste caso, um *wiggler* variável) e o modo lento representaria a onda de elétrons (plasma) movendo-se espacialmente.

Assim como no subcapítulo anterior, é necessário comparar a dinâmica completa utilizando (1.5) com os resultados obtidos a partir da aproximação modulacional. Neste caso, como o primeiro modo possui frequência muito menor que os outros modos (que possuem, assim, frequências similares), não é possível utilizar a aproximação modulacional para este modo. Os resultados obtidos que representam este sistema são (2.80), (2.81) e (2.82).

O sistema pode ser simulado escolhendo-se os parâmetros iniciais. Como deseja-se obter a transição abrupta vista no subcapítulo 3.1.2, utilizam-se valores de ordem de grandeza similar. Optou-se por utilizar os parâmetros $\omega_1 = 0,01$; $\omega_2 = 1$ e $\omega_3 = 0,99$, de forma que $\delta = \omega_1$. Além disto, como condições iniciais, foram escolhidos $x_1 = 0,2$; $\dot{x}_1 = 0$; $\varphi = 0,1$ e $A_2 = A_3 = 0,5$. A relação entre os fatores de acoplamento mantém-se a mesma do último item anterior, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/100$, com o objetivo de facilitar comparações. Assim como no subcapítulo prévio, variando-se o valor do acoplamento, ocorrerão variações na dinâmica do sistema.

Para um sistema completo compatível com estas condições, o segundo módulo do tripleto pode começar com $\phi_2 = \pi/2$, de forma que $x_2(0) = \sqrt{\frac{2A_2(0)}{\omega_i}}$ e $\phi_3 = \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0,1$. Para um sistema igualmente coerente, é igualmente necessário pensar nas derivadas temporais de x_i , utilizando o valor obtido em (3.11).

Visto que ω_1 é uma frequência lenta, a comparação com o sistema do caso anterior é inviável para o primeiro modo, visto que neste não há aproximação modulacional. Sendo assim, os gráficos ficam mais claros se forem feitos para outro modo, e o foco torna-se, neste ponto, a dinâmica de x_2 .

Começando-se com um valor pequeno de acoplamento, deve-se obter resultados similares ao primeiro resultado da simulação do sistema quando as frequências eram todas da mesma ordem de grandeza. O acoplamento ε_1 precisa ser de ordem de grandeza menor do que ω_1 , logo, mantendo-se a mesma diferença de ordem de grandeza, opta-se por $\varepsilon_1 = 0,0001$. Simulando-se o gráfico neste caso, chega-se em:

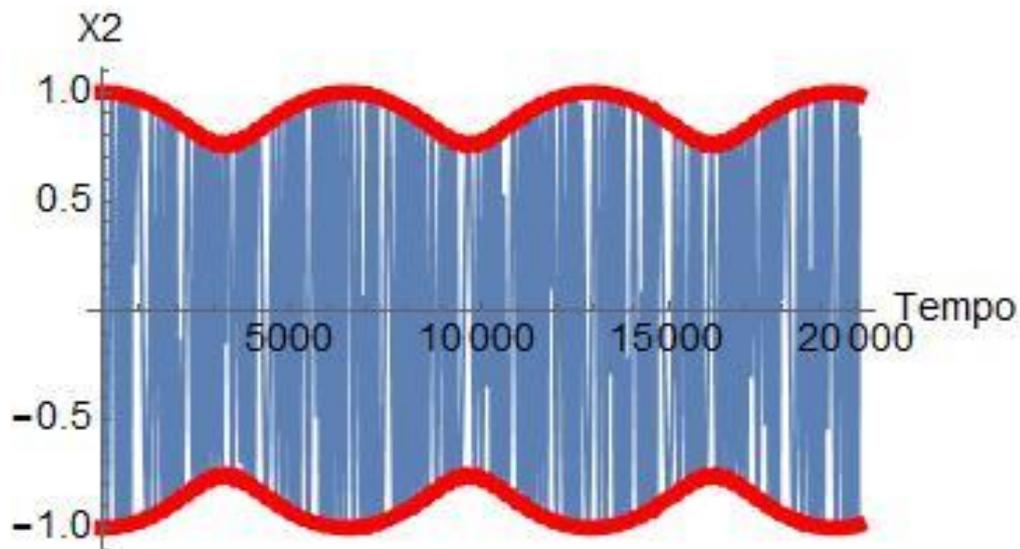


Figura 11: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_2$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,0001$.

É possível notar resultados com um padrão muito similar aos da Figura 2. A dinâmica é periódica, regular, comportada e a simulação da aproximação modulacional bate completamente com o envelope da simulação completa.

Aumentando-se este valor de acoplamento, por exemplo, $\varepsilon_1 = 0,03$, é visível uma mudança de comportamento. A dinâmica da situação, como explicitado a partir da Figura 12,

torna-se aperiódica, ao contrário do caso anterior. Apesar disto, a aproximação possui uma ótima concordância com o sistema completo! Há um regime aperiódico, mas integrável, logo, não caótico.

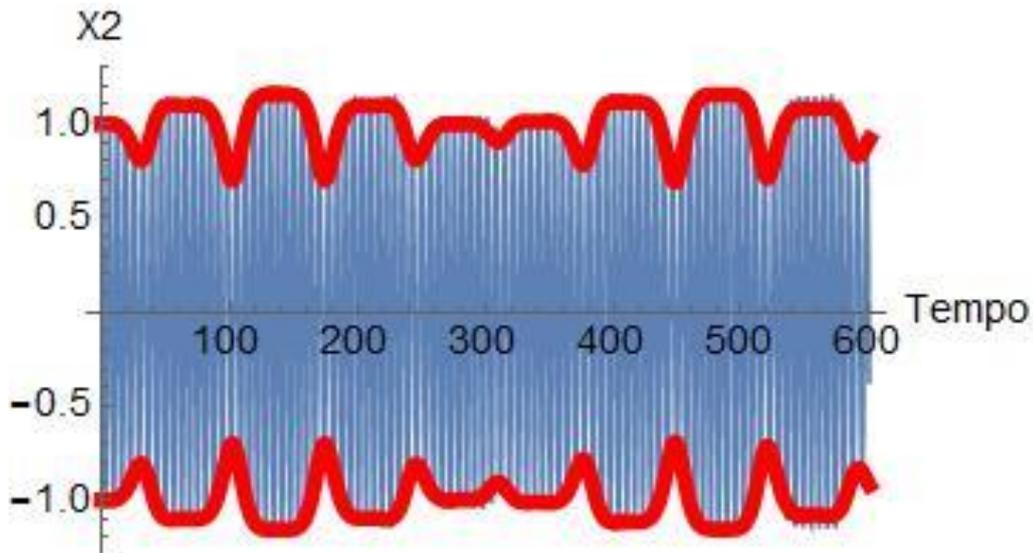


Figura 12: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_2$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,03$.

A equação (2.60) já indicava resultados assim visto que um acoplamento desta magnitude produz uma dinâmica modulacional cuja frequência é muito menor as frequências portadoras mais rápidas, mas similar em tamanho a frequência lenta. A aproximação, como esperado, ainda funciona bem neste intervalo. Aumentando-se ainda mais o acoplamento, entretanto, a aproximação modulacional tende a, assim como no caso em que as frequências eram da mesma ordem de grandeza, não corresponder mais ao sistema completo.

Para um valor do acoplamento para $\varepsilon_1 = 0,1$, já é possível observar que o sistema completo começa a sair de forma bem visível do envelope. Um observador muito atento até pode notar que o sistema no caso $\varepsilon_1 = 0,03$ também extrapolou o envelope em alguns momentos, mas estes acontecimentos eram raros, além de serem excessos muito menores que no caso $\varepsilon_1 = 0,1$.

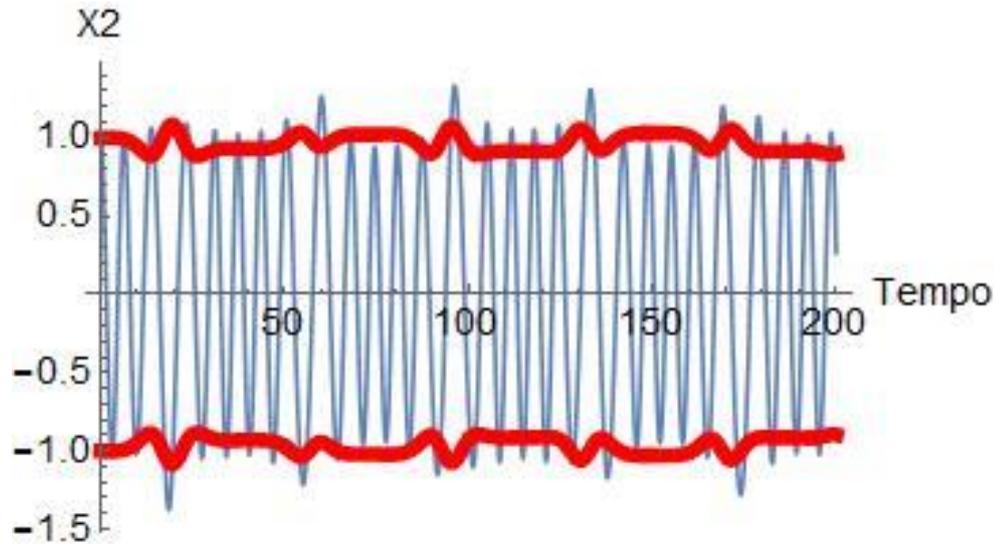


Figura 13: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_2$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,1$.

A medida que os valores de acoplamento crescem, a aproximação modulacional tende a funcionar por períodos de tempo cada vez menores, além de também tender a se aproximar mais de valores extremos (a partir de uma explosão). Desta forma, aumentando-se ainda mais o valor do acoplamento, o sistema tende a ser caótico.

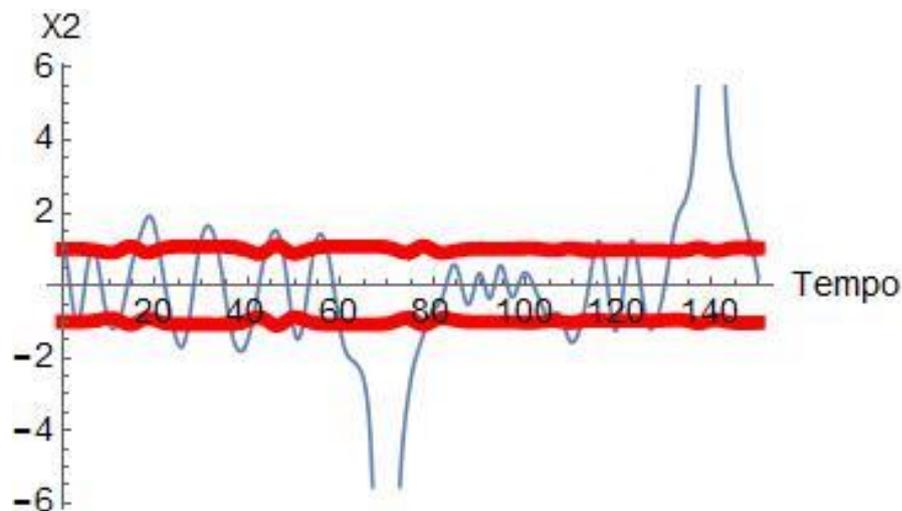


Figura 14: Gráfico do sistema completo (linha fina) e do envelope proporcional a $\pm A_2$ da aproximação modulacional (linha grossa) para $\varepsilon_1 = 0,15$.

Como pode ser visto na Figura 14, aumentando-se o valor do acoplamento, o sistema possui uma tendência a divergir. Assim como quanto as frequências eram similares entre si, este sistema apenas volta a frequentar sua zona de origem de forma frequente devido ao termo

com o fator de acoplamento ε_2 . Com as condições iniciais utilizadas e com $\varepsilon_1 = 0,15$, o sistema explodiu com aproximadamente $t = 60s$. Quanto maior for o acoplamento, mais cedo o sistema tende a explodir.

3.2.2 *Poincaré Plot* do Sistema com ω_1 Pequeno

Dinâmicas aperiódicas são frequentemente vistas em interações de ondas auto consistentes [22], e este comportamento observado pode ser melhor descrito. O Lagrangeano modulacional (2.73) controla o sistema com dois graus de liberdade: um é formado pelo par de variáveis x_1, \dot{x}_1 e o outro por φ, A_2 , por exemplo. Pela estrutura de $\langle L' \rangle$, A_2 e A_3 não são independentes, visto que suas derivadas temporais são iguais.

Uma técnica recomendada para examinar a periodicidade de sistemas dinâmicos é o *Poincaré Plot* [23]. Neste caso em particular, o *Poincaré Plot* apropriado é produzido com os valores de φ e A_2 , quando $x_1 = 0$ e $\dot{x}_1 > 0$. Ao contrário do caso anterior, não é possível simplificar o problema, apesar dele ainda ser integrável, sendo necessário simular o sistema completo para a obtenção da estrutura de espaço-fase.

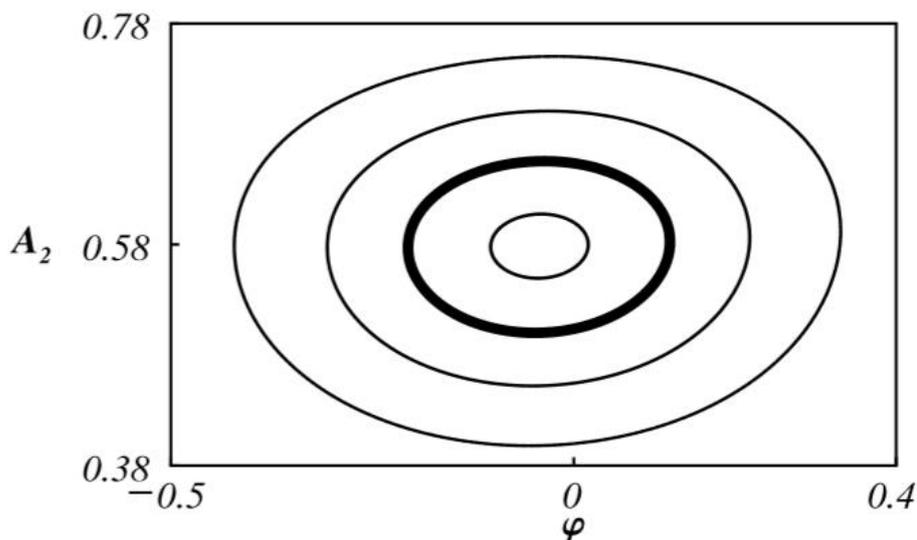


Figura 15: *Poincaré Plot* do comportamento quase-periódico do sistema.

Pode concluir a partir da Figura 15 que até em casos aperiódicos a dinâmica em geral é regular e *quasi*-periódica. Sendo assim, o sistema é integrável para os casos das Figuras 11 a 13 (a curva em destaque representa sistema da Figura 12), e pode ser visto como uma progressão

de uma dinâmica de amplitude simples para uma dinâmica de amplitudes multi-periódicas [24-27].

Para acoplamentos levemente maiores, a concordância entre a simulação completa e a simulação modulacional torna-se mais fraca. Este regime coincide com a prevalência de órbitas caóticas nos *Poincaré Plots* que não reproduzem as órbitas reais, como visto na Figura 12. A medida que o valor do acoplamento for subindo, a região modulacional novamente se une a outras regiões que se aproximam do centro, de forma análoga ao visto em 3.1.3, e as órbitas ficam livres para moverem-se para regiões muito afastadas do espaço configuracional, como ocorreu na situação da Figura 13.

Em sistemas físicos reais, como em um *beat wave accelerator* ou em um *free-electron laser*, este regime deve ser evitado. Para que estes sistemas funcionem de forma adequada, é importante que os mesmos sejam controlados, o exato oposto do que ocorre em um sistema caótico.

Neste caso, o valor numérico do limite do acoplamento é, aproximadamente, $\varepsilon_{1\text{limite}} \approx 0,1335$. Assim como no caso anterior, este valor depende das condições iniciais, entretanto, esta dependência é leve, de forma que o valor deste caso em particular possui um caráter universal em termos de magnitude.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi examinado o que ocorre quando a aproximação modulacional para sistemas não lineares de três ondas quebra. Esta aproximação é justificável quando tanto a amplitude quanto a fase de cada onda moduladora mudam numa escala de tempo muito menor que suas ondas portadoras (de alta frequência). Como foi observado, a dinâmica da amplitude e da fase evoluem numa escala de tempo característica em que $\Omega \sim \varepsilon_1$, o que permite concluir que a aproximação modulacional é conveniente para sistemas fracamente acoplados.

A medida que o acoplamento cresce, o comportamento do sistema vai se alterando. Em um primeiro momento, com valores de acoplamento muito pequenos, a aproximação modulacional obtém resultados muito similares ao sistema completo. Aumentando-se um pouco o valor do acoplamento inicialmente altera a correspondência entre o sistema completo e a aproximado, resultando em erro de casamento dos envelopes, mas sem alterar gravemente o limite das amplitudes excursionadas.

Ampliando-se ainda mais o acoplamento, não apenas a precisão da aproximação modulacional é perdida, mas também ocorre uma mudança no comportamento global do sistema, a partir de uma mudança na configuração espacial possível para a dinâmica do tripleto. Esta mudança permite excursões muito maiores dentro do sistema. Neste caso, as órbitas ficam durante um tempo transiente na configuração inicialmente associada com a dinâmica modulacional, mas acabam direcionando-se para outras regiões, inicialmente desconectadas do sistema de possibilidades inicial, de forma que acabam realizando excursões de larga amplitude.

Este comportamento é visto em ambas as situações trabalhadas, tanto quando as frequências das ondas portadoras do tripleto possuem frequências similares em termos de magnitude quanto no caso em quase uma das frequências é muito menor que as outras duas no tripleto. Este último caso é de extrema importância para dispositivos com elétrons (como, por exemplo, *free-electron lasers*), onde tipicamente duas ondas eletromagnéticas de altas frequências excitam uma onda espacial de cargas elétricas, também conhecida como onda de plasma.

Um ponto a ser melhorado neste estudo é a restrição ao modelo de três ondas. Na presença de modos adicionais, como no caso de um sistema de ondas completo, a energia inicial do tripleto pode não continuar no tripleto após a transição, visto parte desta energia inicial seja transferida para modos adicionais. Apesar de não ser o foco deste trabalho, este problema já foi estudado no por outros autores [28-29]. Acredita-se que enquanto regimes regulares de três modos tende a conservar sua energia, em maiores amplitudes o sistema de três modos expande-

se parcialmente no espaço-fase e parcialmente entrega energia para modos adicionais. Outro possível ponto a ser melhorado é considerar o efeito do descasamento entre ondas.

Além desta dissertação, este trabalho resultou em um artigo produzido [30].

APÊNDICE A – CÁLCULO PARA ε_1 CRÍTICO

Com a equação (3.16) e com as condições iniciais é possível obter a energia inicial do sistema, baseado em [7]. Esta energia se conserva, de forma que as regiões limite ocorrem quando não há energia cinética, de forma que

$$E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\omega_i^2 x_i^2) - \varepsilon_1 x_1 x_2 x_3 = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde E é a energia inicial do sistema. Os termos com ε_2 foram negligenciados por serem muito pequenos e possuem um termo quadrático que dificultaria muito a solução do problema.

Derivando a equação (A.1) em relação a x_1 , obtém-se

$$\omega_1^2 x_1 + \varepsilon_1 x_2 x_3 = 0, \quad (\text{A.2})$$

de forma que

$$x_3 = \frac{-\omega_1^2 x_1}{\varepsilon_1 x_2}. \quad (\text{A.3})$$

Utilizando (A.3) em (A.1), é possível obter

$$E + \frac{1}{2} \omega_1^2 x_1^2 - \frac{1}{2} \omega_2^2 x_2^2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_1^4 \omega_3^2 x_1^2}{\varepsilon_1^2 x_2^2} = 0, \quad (\text{A.4})$$

de forma que derivando em relação a x_2 , conclui-se

$$\omega_2^2 x_2 - \frac{\omega_1^4 \omega_3^2 x_1^2}{\varepsilon_1^2 x_2^3} = 0, \quad (\text{A.5})$$

ou, isolando x_1^2 :

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon_1^2 \omega_2^2 x_2^4}{\omega_1^4 \omega_3^2}. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando (A.6) em (A.4), a equação torna-se:

$$E + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1^2 \omega_2^2 x_2^4}{\omega_1^2 \omega_3^2} - \omega_2^2 x_2^2 = 0. \quad (\text{A.7})$$

As raízes da equação (A.7) em relação a x_2 são facilmente obtíveis, visto que a mesma é uma equação biquadrática. Sendo assim, as raízes são

$$x_2 = \pm \sqrt{\frac{-\omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_2^4 - 2 \frac{\varepsilon_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2} E}}{\frac{\varepsilon_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2}}}. \quad (\text{A.8})$$

As regiões de energia localizadas nos extremos tocam a região central quando as raízes deixam de ser quatro e passam a ser apenas duas (que diferem apenas pelo sinal). Isto ocorre quando a raiz quadrada interna se anula, logo:

$$\omega_2^4 - 2 \frac{\varepsilon_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 \omega_3^2} E = 0. \quad (\text{A.9})$$

ou, isolando ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\sqrt{2E}}. \quad (\text{A.10})$$

Com a equação (A.10) é possível calcular o valor do $\varepsilon_{1\text{limite}}$ da dinâmica. Esta equação é válida para ambos os casos estudados. Além disto, é possível observar muito claramente que além das frequências de oscilação do sistema, as condições iniciais do sistema também determinam qual é o valor do acoplamento em que ocorre a troca de regime, pois afetam o valor da energia inicial. Sistemas mais energéticos necessitam de menor ε_1 para uma troca de regime. Este cálculo vale para ambas as situações estudadas neste trabalho.

O cálculo do ε_1 crítico, conforme desenvolvido neste apêndice, foi originalmente proposto por Samuel Marini.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WEILAND, J.; WILHELMSSON, H., *Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas*. Oxford: Pergamon, 1977.
- [2] DAVIDSON, R. *Methods in Nonlinear Plasma Theory*. Londres: Academic Press, London, 1972.
- [3] BATISTA, A. M.; CALDAS, I. L.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; HORTON, W.; MORRISON, P. J. Nonlinear three-mode interaction and drift-wave turbulence in a tokamak edge plasma. *Physics of Plasmas*, v. 13:042510, 2006.
- [4] BRODIN, G.; STENO, L. Alfvén wave interactions within the Hall-MHD description. *Journal of Plasma Physics*, v. 79, p. 909-911, 2013.
- [5] THORNHILL, S. G.; TER HAAR, D. Langmuir turbulence and modulational instability. *Physics Reports*, v. 43, p. 43-99, 1978.
- [6] RIZZATO, F. B.; CHIAN, A. C. -L. Nonlinear generation of the fundamental radiation in plasmas: the influence of induced ion-acoustic and Langmuir waves. *Journal of Plasma Physics*, v. 48, p. 71-84, 1992.
- [7] FRICHEMBRUDER, M.; PAKTER, R.; GERHARDT, G.; RIZZATO, F. B. Chaos and coherence in the conservative three-mode decay interaction. *Physical Review E*, v. 62, p. 7861-7866, 2000.
- [8] SHUKLA, P. K.; RAO, N. N.; YU, M. Y.; TSINTSADZE, N. L. Relativistic nonlinear effects in plasmas. *Physics Reports*, v. 138, p. 1-149, 1986.
- [9] ALINEJAD, H.; ROBINSON, P. A.; SKJAERAASEN, O.; CAIRNS, I. H. Coupled Langmuir and nonlinear ion acoustic waves in the presence of non-thermal electrons. *Journal of Plasma Physics*, v. 75, p. 193-202, 2008.

- [10] DE OLIVEIRA, G. I.; RIZZATO, F. B. Nonintegrable three mode interaction in the Zakharov equations. *Physica D*, v. 104, p. 119-126, 1997.
- [11] GERHARDT, G. J.; FRICHEMBRUDER, M.; RIZZATO, F. B.; LOPES, S. R. Sudden transition to spatiotemporal chaos in a nonlinear Klein-Gordon equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 13, p. 1269-1279, 2002.
- [12] EL-BASSIOUNY. A. F. Three-mode interaction in harmonically excited system with cubic nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, v. 139, p. 201-230, 2003.
- [13] LOPES, S. R.; CHIAN, A. C. -L. Controlling chaos in nonlinear three-wave coupling. *Physical Review E*, v. 54, p. 170-174, 1996.
- [14] DRYSDALE, P. M.; ROBINSON, P. A. Mean field theory of the coherent to random-phase state transition in three-wave interactions. *Physics of Plasmas* v. 9, p. 4896-4904, 2002.
- [15] WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1974.
- [16] TAJIMA, T.; DAWSON, J. M. Laser Electron Accelerator. *Physical Review Letters*, v. 43, p. 267-269, 1979.
- [17] MENDONÇA, J. T. *Theory of Photon Acceleration*. Bristol: IOP Publishing, 2001.
- [18] GIBBON, P. *Short Pulse Laser Interactions with Matter*. Londres: Imperial College Press, 2007.
- [19] BONIFACIO, R.; CASAGRANDE, F.; CERCHONI, G.; DE SALVO SOUZA, L. PIERINI, P.; PIOVELLA, N. Physics of the high-gain FEL and superradiance. *La Rivista del Nuovo Cimento*, v. 13, p. 1-69, 1990.

- [20] MONTEIRO, L. F.; SERBETO, A.; TSUI, K. H.; MENDONÇA, J. T.; GALVÃO, R. M. O. Quantum fluid model of coherent stimulated radiation by a dense relativistic cold electron beam. *Physics of Plasmas*, v. 20:073101, 2013.
- [21] PETER, E.; ENDLER, A.; RIZZATO, F. B. Nonlinear model for thermal effects in free-electron lasers. *Physics of Plasmas*, v. 21:113104, 2014.
- [22] BONATTO, A.; PAKTER, R.; RIZZATO, F. B. Self-consistent dynamics of electromagnetic pulses and wakefields in laser-plasma interactions. *Laser and Particle Beams*, v. 29, p. 399-406, 2011.
- [23] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1992.
- [24] ROMEIRAS, F. J. Integrability of double three-wave interaction. *Physical Letters A*, v. 93, p. 227-229, 1983.
- [25] PAKTER, R.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L. Transition to chaos in the conservative four-wave parametric interactions. *Physica D*, v. 110, p. 277-288, 1997.
- [26] BONATTO, A.; NUNES, R. P.; BONATTO, C.; LOPES, S. R.; PAKTER, R.; RIZZATO, F. B. Multidimensional aspects of nonlinear electromagnetic solitary pulses. *Physica A*, v. 404, p. 332-340, 2014.
- [27] FELK, E. V.; KUZNETSOV, A. P.; SAVIN, A. V. Multistability and transition to chaos in the degenerate Hamiltonian system with weak nonlinear dissipative perturbation. *Physica A*, v. 410, p. 561-572, 2014.
- [28] LOPES, S. R.; RIZZATO, F. B. Nonintegrable dynamics of the triplet-triplet spatiotemporal interaction. *Physical Review E*, v. 60, p. 5375-5384, 1999.
- [29] PETER, E.; MARINI, S.; CHÁVES, A. T.; RIZZATO, F. B. Breakdown of the modulational approximation in a multimode extension of the triplet interaction. *Physica A*, v. 463, p. 103-110, 2016.

- [30] IORRA, P.; MARINI, S.; PETER, E.; PAKTER, R.; RIZZATO, F. B. Beyond the modulational approximation in the wave triplet interaction. *Physica A*, v. 436, p. 686-693, 2015.