

ações: Curso de Pós-graduação em Física
C28 30,00

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Instituto de Física

CAMPO MAGNÉTICO CRÍTICO SUPERIOR^{*}
DE UM SUPERCONDUTOR IMPURO

Marco Aurélio Pires Idiart

Dissertação realizada sob a orientação da Dra. Alba Theumann, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

* Trabalho financiado pela Coordenação do Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior (CAPES).

1988

AGRADEÇO

A prof. Alba Theumann pela proposição do tema, pelo acompanhamento durante a dura batalha e pela amizade.

A Pedro, Ângela, Alexandre, Naira, Roberto e Gilberto, eles sabem porque.

Aos meus colegas e amigos de sala por terem me aguentado.

Aos meus pais.

RESUMO

O campo magnético crítico superior e a temperatura crítica são calculadas para supercondutores com impurezas. Na avaliação das funções de Green do problema são usadas as autofunções exatas de um elétron em um campo magnético constante, ao invés da aproximação semi-clássica comumente utilizada.

Em analogia ao cálculo da resistividade residual de um metal são somados diagramas em escada e diagramas multiplamente cruzados, sendo estes últimos relacionados com o efeito de Localização de Anderson. O resultado da consideração dos dois tipos de diagramas é uma interação efetiva do tipo BCS com $\lambda^* = 2\lambda$ e, portanto, uma nova temperatura crítica $T_c^* > T_c$. Ocorre também uma modificação na dependência funcional de $H_{c2}(T)/T_c = F(T/T_c)$ em relação ao limite limpo, também estudado neste trabalho.

ABSTRACT

The upper critical field and the Critical Temperature of a dirty superconductor are calculated. To evaluate the Green Functions we avoid the semi-classical approximation by using the exact electrons eigenstates in a magnetic field. In analogy with the problem of the residual resistance of a normal metal we consider ladder and multiply crossed diagrams, where the last are related to the Anderson Localization.

As result we obtain a BCS effective interaction $\lambda^* = 2\lambda$ and, therefore, a new Critical Temperature $T_c^* > T_c$. The shape of the function $H_{c2}(T)/T_c = F(T/T_c)$ is changed too.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

1. CAMPO MAGNETICO CRÍTICO SUPERIOR DE UM SUPERCONDUTOR	1
2. TEORIA MICROSCÓPICA DA SUPERCONDUTIVIDADE	3
3. SUPERCONDUTORES IMPUROS	8

CAPÍTULO 1- SUPERCONDUTORES PUROS

1.1 FORMALISMO DE GORKOV PARA A SUPERCONDUTIVIDADE	11
1.2 CÁLCULO DO CAMPO MAGNETICO CRÍTICO H_{c2}	17
1.3 CÁLCULO DE $G^0(\vec{r}, \vec{r}', w)$	22
1.4 CÁLCULO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA O GAP	24
1.5 CÁLCULO DO CAMPO CRÍTICO H_{c2} A $T=0$	30
1.6 CÁLCULO DE H_{c2} A TEMPERATURAS DIFERENTES DE ZERO	33

CAPITULO 2- SUPERCONDUTORES COM IMPUREZAS

2.1 O TEOREMA DE ANDERSON	37
2.2 CÁLCULO DE H_{c2} PARA UM SUPERCONDUTOR COM IMPUREZAS	41
2.3 CÁLCULO DE $\langle G_a^0(\vec{r}, \vec{r}', w) \rangle$	44
2.4 CONTRIBUIÇÃO DE DIAGRAMAS EM ESCADA	50
2.4.1 Cálculo de $S(w+i\Gamma)$	51
2.4.2 Calculo de $\Lambda_k(\omega_c, T)$	54
2.5 A CONTRIBUIÇÃO DOS DIAGRAMAS CRUZADOS	58
2.5.1 Calculo da Transformada de Fourier de $Q(\vec{r}-\vec{r}', w+i\Gamma)$	60
2.5.2 Calculo de $\Lambda_c(\omega_c, T)$	62
2.6 RESULTADO FINAL PARA $H_{c2}(T)$ PARA UM SUPERCONDUTOR COM	

IMPUREZAS	65
2.6.1 Campo Crítico a Temperatura Zero	67
2.6.2 Temperatura Crítica	69
2.6.3 Variação da curva $H_{c2}(T)$ com o nível de impurezas	70
APÊNDICE I	77
APÊNDICE II	79
APÊNDICE III	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90

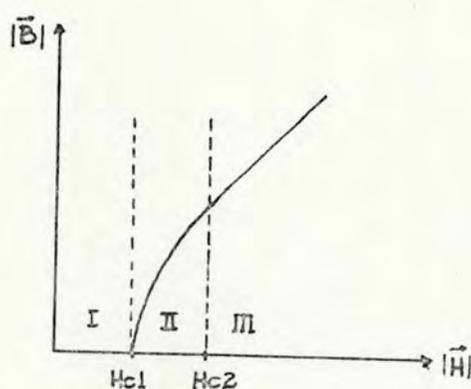
INTRODUÇÃO

1. CAMPO MAGNÉTICO CRÍTICO SUPERIOR DE UM SUPERCONDUTOR

Uma das características básicas de um supercondutor é o chamado efeito Meissner. Este consiste no fato de não haver penetração de fluxo magnético dentro de uma região supercondutora além de uma certa distância da superfície chamada comprimento de penetração, normalmente da ordem de 10^{-5} cm. O preço a pagar pela exclusão do campo magnético é um aumento na energia livre

supercondutora em função do campo externo, indicando assim que haverá um valor limite do campo para o qual a fase supercondutora deixará de ser estável ocorrendo uma transição para a fase normal.

De acordo com a natureza desta transição, se de primeira ou segunda ordem, os supercondutores são classificados em tipo I ou II.⁽¹⁾ O diagrama do vetor indução magnética " \vec{B} " no interior de um supercondutor do tipo II contra a intensidade de campo magnético externo " H " apresenta três regiões distintas.



- I. Fase supercondutora
- II. Fase mista
- III. Fase normal

fig.1

Como nós sabemos a característica básica de uma transição de segunda ordem é que a tensão superficial na interface das duas fases envolvidas é negativa. Isto favorece a nucleação de uma fase dentro da outra mesmo que esta nova fase seja menos econômica energeticamente.

Na região I o material é supercondutor e a fase normal é totalmente instável. A medida que aumentamos o campo e ultrapassamos o campo crítico inferior (H_{c1}) o aparecimento de

regiões de metal normal começa a ser mais favorável energeticamente e então o fluxo magnético começa penetrar. Para valores do campo maiores que (H_{c2}) a fase supercondutora é instável e desaparece.

Não estamos interessados nas características especiais desta transição, mas somente no fato de que em se tratando de uma transição de segunda ordem pode ser definido, como veremos adiante, um parâmetro de ordem que vai a zero na transição.

Uma descrição mais detalhada é devida a A.A. Abrikosov⁽²⁾ (1957).

Os campos H_{c1} e H_{c2} só aparecem se usada a teoria microscópica da supercondutividade, enquanto que o único campo crítico presente no diagrama de fase de supercondutores do tipo I pode ser calculado totalmente a partir de considerações termodinâmicas, ou seja macroscópicas.

2. TEORIA MICROSCÓPICA DA SUPERCONDUTIVIDADE

A teoria da supercondutividade na forma que conhecemos agora se deve a Bardeen, Cooper e Schrieffer⁽³⁾ (1957) e se baseia na hipótese de que exista uma interação atrativa entre os elétrons de condução situados em uma estreita faixa em torno da energia de Fermi. O estado fundamental para este sistema é um condensado de

pares ligados destes elétrons em um único nível separado do primeiro estado excitado por um *gap* de energia.

Pode ser estranho pensar em uma atração entre elétrons, mas deve-se notar que não se trata simplesmente de elétrons nus. Uma descrição completa deveria ser em termos de um gás de elétrons interagindo com uma rede de ions positivos. O simples problema de ter estes ions fixos já tem como resultado que a repulsão columbiana entre os elétrons é blindada a distâncias de aproximadamente 10^{-7} em metais. Sendo essa repulsão de tão curto alcance não é de se admirar que a introdução da dinamica dos ions positivos possa causar um efeito cujo resultado liquido seja uma atração. De fato Frohlich⁽⁴⁾ demonstrou que em certas condições a interação elétron-fônon favorece uma atração entre elétrons.

E importante notar que a Teoria da Supercondutividade de BCS não é parte da solução do problema exato de elétrons na rede. Este na verdade permanece insolúvel. O Modelo de BCS pretende apenas ter em conta o que se acha ser as principais características que levam a supercondutividade .

Para o nosso problema específico de calcular o campo magnético crítico é mais vantajoso usar um formalismo um pouco diferente daquele originalmente apresentado por BCS. Este formalismo se deve a Gor'kov⁽⁵⁾. As duas formulações basicamente diferem em dois pontos, o primeiro que não é propriamente uma diferença é que em Gor'kov se trabalha com operadores de campo ao invés daqueles que criam ou destroem partículas em estados. O segundo, que podia ser encarado como uma diferença de modelo é

que Gor'kov não considera a hipótese de pareamento explícita no hamiltoniano.

A hipótese de pareamento introduzida no hamiltoniano é uma simplificação adotada em BCS. Decorre do trabalho de Frohlich que a interação mediada por fônons somente é atrativa para certas escolhas dos estados dos elétrons que interagem. Por exemplo, os elétrons para interagirem atrativamente devem ter energias muito próximas, tanto mais intensa será a atração quanto mais próximos em energia estiverem. Então no caso de um supercondutor livre da presença de um campo externo seria favorável a formação de pares de elétrons com vetores de onda de Bloch $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ e $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$. A primeira escolha, no entanto, é eliminada pois tem a contribuição devida a interação de Coulomb muito alta. Assim o par de elétrons mais estável, chamado Par de Cooper, é aquele com os estados $(-\vec{k}, \vec{k})$. Obviamente cada situação vai ter seu pareamento mais adequado. Quando houver um campo elétrico associado o par será $(-\vec{k} + \vec{q}, \vec{k} + \vec{q})$, onde q dá conta da supercorrente.⁽⁶⁾

A Hipótese de Pareamento de BCS consiste em considerar a interação entre estes estados assim pareados como sendo a mais importante para a supercondutividade. Desta forma o Hamiltoniano reduzido de BCS é escrito:

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon_{\vec{k}} C_{\vec{k}\sigma}^+ C_{\vec{k}\sigma} - \frac{\lambda}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \sigma} C_{\vec{k}'\sigma}^+ C_{-\vec{k}'\sigma}^+ C_{-\vec{k}-\sigma} C_{\vec{k}\sigma} \quad (1)$$

O parâmetro λ é constante e positivo sendo resultado do efeito somado da interação devida aos fônons e a de Coulomb. Os

operadores C 's criam e destroem elétrons nos estados de Bloch.

Escrever este hamiltoniano em termos dos operadores de campo definidos como

$$\Psi_{\sigma}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}\sigma} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2)$$

resultaria em:

$$H_{DCS} = \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma}(\vec{r}) \frac{-\nabla^2}{2m} \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3r - \frac{\lambda}{2} \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma}(\vec{r}_1) \Psi_{\sigma}(\vec{r}_1) d^3r_1 \int \Psi_{\sigma}(\vec{r}_2) \Psi_{\sigma}(\vec{r}_2) d^3r_2 \quad (3)$$

No esquema de Gor'kov todos os elétrons situados em uma faixa de energia de largura $2\omega_D$, onde ω_D é a frequência de Debye, interagem atrativamente com a mesma intensidade independente dos estados em que se encontram. O hamiltoniano correspondente é :

$$H_{GK} = \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma}(\vec{r}) \frac{-\nabla^2}{2m} \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3r - \frac{\lambda}{2} \sum_{\sigma} \int \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \Psi_{\sigma}(\vec{r}) \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3r \quad (4)$$

Apesar de não estar evidente na notação devemos nos lembrar que a interação esta restrita a uma faixa no espaço de momentum.

Para muitos casos, evidentemente, estas duas formulações dão os mesmos resultados. Se formos calcular a temperatura

crítica , por exemplo , para um supercondutor sem a presença de um campo externo vemos que são equivalentes se houver uma redefinição da função do gap

$$\Delta_{\text{BCS}}^* = \int \Delta_{\text{GK}}^* d\vec{r} \quad (5)$$

onde

$$\Delta_{\text{GK}} = \langle \Psi_{\sigma}^+(\vec{r}) \Psi_{-\sigma}(\vec{r}') \rangle \quad (6)$$

A função do gap assim definida tem seu módulo quadrado proporcional a densidade de pares no supercondutor, e corresponde ao parâmetro de ordem da teoria de transições de segunda ordem de Ginzburg-Landau⁽⁷⁾ para a supercondutividade. Em particular , quando não há campo externo, é constante em \vec{r} , e assim a redefinição acima é apenas uma troca de escala proporcional ao volume do sistema.

Se introduzirmos um campo magnético externo , como é nosso objetivo , a equivalência das formulações deixa de ser trivial. As modificações devidas ao campo são o aparecimento do vetor potencial no termo de energia cinética e , no caso do hamiltoniano (1), os operadores C's passam a criar ou destruir elétrons nos níveis de Landau. Não se considera o termo de Paramagnetismo de Pauli por ser uma contribuição de ordem mais baixa⁽⁸⁾. Ademais a função do gap passa a não ser mais e uma

constante em \vec{r} . O modo com que a função $\Delta^*(F)$ varia com a posição indica como se formam as regiões de metal normal dentro do supercondutor na fase mista.

O que tem sido feito na literatura é usar uma aproximação semi-clássica na qual se supõe que a função de Green dos elétrons em um campo magnético, que será definida mais adiante e basicamente dá a amplitude de probabilidade de um elétron se propagar de um ponto a outro do espaço em um certo tempo, difira daquela de elétrons livres apenas por uma fase. Isto implica que as funções de onda serão ainda do tipo ondas planas mais uma fase, o argumento para esta suposição é o fato que os elétrons que efetivamente participam na supercondutividade estão com energias altas, da ordem da energia de Fermi, e conseqüentemente possuem um raio de curvatura muito grande.

No nosso trabalho evitamos esta aproximação. Assim as formulações de BCS e Gor'kov, isto é, com e sem uma regra explícita de pareamento deixam de ser equivalentes. Existiria, então, dois caminhos para escolher, um seria usar o hamiltoniano de Gor'kov com a simples introdução do campo externo, o outro, escrever o hamiltoniano na forma de operadores de criação e destruição de estados, supor uma regra de pareamento para os elétrons e representá-lo através de uma densidade hamiltoniana com operadores de campo. Esta segunda opção tem problemas. Não há uma regra estrita para o pareamento dos níveis de Landau, e a mais comumente aceita que seria parear um estado com seu inverso temporal parece não ser muito simples.

Portanto, escolhemos como hamiltoniano de partida o de Gor'kov.

3. SUPERCONDUTORES IMPUROS

A segunda parte do trabalho é o estudo dos supercondutores com impurezas, no caso mais simples quando estas não são magnéticas. Tais impurezas podem ser físicas, como por exemplo uma pequena desordem em uma liga metálica, ou químicas se houver a presença de outros elementos que não os da própria liga.

No texto usaremos indistintamente as expressões, densidade de impurezas e grau de desordem.

De forma geral a Teoria de Supercondutores Impuros está dominada por um artigo de Anderson⁽⁹⁾, no qual demonstra que as impurezas têm pouco efeito sobre o comportamento supercondutor.

Como veremos no capítulo 2, o campo H_{c2} e a temperatura crítica basicamente dependem da avaliação de uma média configuracional sobre o produto de duas funções de Green de uma partícula na presença de impurezas, exatamente como ocorre no problema da resistência residual de um metal. Não é possível calcular exatamente essa média, assim em analogia àquele problema vamos considerar uma aproximação na qual teremos em conta somente dois tipos de diagramas, os diagramas "em escada" e aqueles "completamente cruzados". No cálculo de condutividade os

primeiros levam ao resultado clássico de Drude e os outros ao importante fenômeno de Localização de Anderson⁽¹⁰⁾. Deve-se ressaltar que aqui, a priori, só existe uma analogia matemática. Portanto não se pode afirmar que os diagramas cruzados que eu considero em supercondutividade são aqueles mesmos do efeito de Localização, isto porque as duas funções de Green que incorrem na média não são exatamente iguais nos dois problemas.

Em supercondutividade, os resultados que encontramos são:

- A temperatura crítica não varia com o grau de desordem. O valor de T_c , no entanto, não é o mesmo de um supercondutor puro, ao invés disso é surpreendentemente maior.
- O campo crítico H_{c2} , no limite de alta densidade de impurezas, é praticamente independente desta densidade. A medida que se toma o limite contrário, ou seja, em direção à desordem zero, a contribuição dos diagramas cruzados desaparece.

CAPITULO 1 SUPERCONDUTORES PUROS

1.1 FORMALISMO DE GORKOV PARA A SUPERCONDUTIVIDADE

Como foi visto no capítulo anterior o hamiltoniano de Gor'kov para o problema de eletrons em um supercondutor é:

$$H = \sum_{\sigma} \left(\int \Psi_{\sigma}^{+}(\vec{r}) \left[-\frac{\nabla^2}{2m} \right] \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3r - \frac{\lambda}{2} \int \Psi_{\sigma}^{+}(\vec{r}) \Psi_{-\sigma}^{+}(\vec{r}) \Psi_{-\sigma}(\vec{r}) \Psi_{\sigma}(\vec{r}) d^3r \right) \quad (1.1.1)$$

onde

$$\Psi_{\sigma}^{(+)}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}, \sigma} e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}} C_{\vec{k}, \sigma}^{(+)} \quad (1.1.2)$$

destrói (cria) uma partícula na posição \vec{r} , e σ são índices de spin.

Apresentado desta forma parece que se considera uma interação de alcance nulo entre os elétrons. Isto não é verdade, o modelo deve corresponder ao hamiltoniano

$$H = \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon_{\vec{k}} C_{\vec{k}, \sigma} C_{\vec{k}, \sigma} - \frac{\lambda}{2} \sum_{\substack{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ = \vec{k}_3 + \vec{k}_4 \\ \sigma}} C_{\vec{k}_1, \sigma}^{+} C_{\vec{k}_2, -\sigma}^{+} C_{\vec{k}_3, \sigma} C_{\vec{k}_4, -\sigma} \theta_{\vec{k}_1} \theta_{\vec{k}_2} \theta_{\vec{k}_3} \theta_{\vec{k}_4} \quad (1.1.3)$$

com a restrição adicional que somente interagem elétrons com energias dentro de uma faixa de largura $2\omega_D$ ao redor da energia de Fermi, representada pelas funções $\theta_{\vec{k}}$. Portanto é exatamente a transformada de Fourier do potencial de duas partículas definida como:

$$\lambda \theta_{\vec{k}_1} \theta_{\vec{k}_2} \theta_{\vec{k}_3} \theta_{\vec{k}_4} = \int e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}} v(\vec{r} - \vec{r}') e^{-i(\vec{k}_2 - \vec{k}_4) \cdot \vec{r}'} d^3r d^3r' \quad (1.1.4)$$

O potencial que certamente não é uma Delta de Dirac, é uma função suave que tem um máximo em $\vec{r}=0$.

Calcular explicitamente o potencial $V(\vec{r}-\vec{r}')$ e usá-lo é complicado, de forma que é mais útil manter a notação e só usar as restrições mais tarde, como teremos oportunidade de ver.

Define-se a função de Green de um elétron como:

$$G_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}'; t-t') = -i \langle \phi_0 | T(\psi_\alpha(\vec{r}, t) \psi_\beta^\dagger(\vec{r}', t')) | \phi_0 \rangle \quad (1.1.5)$$

onde ϕ_0 é o estado fundamental do sistema e

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{iHt} \psi(\vec{r}) e^{-iHt} \quad (1.1.6)$$

A equação de Heisenberg para esta função de Green, com a energia tomada em relação ao nível de Fermi é:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) G_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}'; \Delta t) - i \lambda \sum \langle T(\psi_\delta^\dagger(x) \psi_\delta(x) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x')) \rangle = \delta(x-x') \quad (1.1.7)$$

O teorema de Wick⁽¹¹⁾ e o tipo especial de estado fundamental permitem escrever a média sobre os quatro operadores de campo como :

$$\begin{aligned} \langle T(\psi_\delta^\dagger(x) \psi_\delta(x) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x')) \rangle &= - \langle T(\psi_\delta(x) \psi_\delta^\dagger(x)) \rangle \langle T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(x')) \rangle \\ &+ \langle T(\psi_\alpha(x) \psi_\delta^\dagger(x)) \rangle \langle T(\psi_\delta(x) \psi_\beta^\dagger(x')) \rangle \\ &+ \langle T(\psi_\delta(x) \psi_\alpha(x)) \rangle \langle T(\psi_\delta^\dagger(x) \psi_\beta^\dagger(x')) \rangle \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Os primeiros dois termos também estão presentes no problema de um gás de elétrons normal com interação. Portanto podem ser absorvidos como representando apenas uma modificação quantitativa no espectro de energia do gás de elétrons sem interação. O último termo corresponde a suposição de que o estado fundamental é um condensado de pares de elétrons e que a destruição ou a criação de um par não o altera significativamente, visto que o número de pares no condensado é proporcional ao número de partículas do sistema.

A equação de movimento resulta em :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) G_{\alpha\beta}(x, x') + i\lambda F_{\beta\alpha}(\bar{F}) F_{\alpha\beta}^+(x, x') = \delta(x - x') \quad (1.1.9)$$

Com a definição de uma nova função de Green, chamada anômala, que esta relacionada com a existência dos pares.

$$F_{\alpha\beta}^+(x, x') = \langle T(\psi_{\alpha}^+(x) \psi_{\beta}^+(x')) \rangle \quad (1.1.10)$$

e

$$F_{\alpha\beta}(\bar{F}) = \lim_{x' \rightarrow x} F_{\alpha\beta}(x, x') \quad (1.1.11)$$

Já que as interações que envolvem transições no espaço de spin não serão consideradas no decorrer do trabalho, pode-se eliminar os índices de spin de um modo simples. Primeiro, a função de Green na ausência deste tipo de interação é escrita:

$$\hat{G}(x, x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G(x, x') \quad (1.1.12)$$

E, desde que, os pares ligados estão no estado singlete, a função de Green Anômala é:

$$\hat{F}(x, x') = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} F(x, x') \quad (1.1.13)$$

A antissimetria da matriz é devida as regras de anticomutação dos operadores de campo.

Assim, eliminando a dependência nas variáveis de spin:

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) G(x, x') + i \lambda F(\bar{F}) F^\dagger(x, x') &= \delta(x - x') \\ \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) F^\dagger(x, x') + i \lambda F^\dagger(\bar{F}) G(x, x') &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Que é o conjunto de equações acopladas para o supercondutor na presença de um campo magnético. A equação para a função de Green Anômala é obtida de forma similar.

O problema à temperatura não nula exige a introdução do

conceito de função de Green de Matsubara definida como

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \langle T_{\tau} (\psi(\bar{F}, \tau) \bar{\psi}(\bar{F}', \tau)) \rangle_{\tau} \quad (1.1.15)$$

onde os colchetes significam a média termodinâmica $\text{Tr}(e^{-H\beta} \dots) / \text{Tr} e^{-H\beta}$ e os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ são definidos a partir dos operadores de campo na representação de Schrodinger da seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi(\bar{F}, \tau) &= e^{H\tau} \psi(\bar{F}) e^{-H\tau} \\ \bar{\psi}(\bar{F}, \tau) &= e^{H\tau} \psi^{\dagger}(\bar{F}) e^{-H\tau} \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

com a introdução de um "tempo imaginário" variando de 0 a β . O operador T_{τ} mantém a ordem crescente em τ .

Do mesmo modo que no caso de temperatura zero o que caracteriza o estado supercondutor é o fato de serem finitas as médias:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, x') &= \langle T_{\tau} (\psi(\bar{F}, \tau) \psi(\bar{F}', \tau)) \rangle_{\tau} \\ \mathcal{F}^{\dagger}(x, x') &= \langle T_{\tau} (\bar{\psi}(\bar{F}, \tau) \bar{\psi}(\bar{F}', \tau)) \rangle_{\tau} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

As correspondentes equações de movimento são, então:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right) \xi(x, x') + \lambda \bar{F}(\bar{F}) \bar{F}^+(x, x') = \delta(x-x') \quad (1.1.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right) \bar{F}(x, x') - \lambda \bar{F}^+(\bar{F}) \xi(x, x') = 0$$

Cabe agora alguns comentários acerca das equações acima apresentadas. Claramente na fase normal devemos ter $\bar{F}(x, x')=0$, assim, de alguma forma, esta função pode ser considerada um possível parâmetro de ordem. Na verdade, pode ser provado⁽⁷⁾ que a função $\bar{F}(\bar{F})$ é tal que seu módulo ao quadrado é proporcional a densidade de partículas no condensado em analogia com a Teoria macroscópica de Ginsburg-Landau.

Baseado nesta analogia define-se a função de onda do gap como:

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{F}) &= \lambda F(\bar{F}, 0^+) & T=0 \\ \Delta(\bar{F}) &= \lambda \bar{F}(\bar{F}, 0^+) & T \neq 0 \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

1.2 CÁLCULO DO CAMPO MAGNÉTICO CRÍTICO H_{c2}

As equações de movimento com a introdução do campo externo na forma do potencial vetor $\vec{A}(r)$ são :

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m}(\nabla_r - ie\vec{A}(\bar{F}))^2 + \mu\right) G(x, x') + i\Delta(\bar{F})F^+(x, x') &= \delta(x-x') \\ \left(-i\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2m}(\nabla_r + ie\vec{A}(\bar{F}))^2 + \mu\right) F^+(x, x') + i\Delta^*(\bar{F})G(x, x') &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

É conveniente fazer a seguinte transformação de Fourier:

$$G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\Delta t} G(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$$

$$F^+(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\Delta t} F^+(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$$
(1.2.2)

Logo,

$$(\omega + \frac{1}{2m} (\nabla - ie\vec{A}(\vec{r}))^2 + \mu) G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) + i\Delta(\vec{r}) F^+(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$(-\omega + \frac{1}{2m} (\nabla + ie\vec{A}(\vec{r}))^2 + \mu) F^+(\vec{r}, \vec{r}', \omega) + i\Delta^*(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = 0$$
(1.2.3)

As soluções destas equações podem ser expressas de forma recorrente em termos da função de Green de uma partícula livre em um campo magnético externo, definida como é usual:

$$(\omega + \frac{1}{2m} (\nabla - ie\vec{A}(\vec{r}))^2 + \mu) G^0(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$
(1.2.4)

De imediato se vê que:

$$G(\bar{r}, \bar{r}', \omega) = G^0(\bar{r}, \bar{r}', \omega) - i \int G^0(\bar{r}, \bar{r}'', \omega) \Delta(\bar{r}'') F^+(\bar{r}'', \bar{r}', \omega) d^3r'' \quad (1.2.5)$$

O complexo conjugado da equação (1.2.4) é :

$$\left(\omega + \frac{1}{2m} (\nabla + ie\vec{A}(r))^2 + \mu\right) G^0(\bar{r}', \bar{r}, \omega) = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (1.2.6)$$

Resultando que:

$$F^+(\bar{r}, \bar{r}', \omega) = -i \int G^0(\bar{r}'', \bar{r}', \omega) \Delta^*(\bar{r}'') G(\bar{r}'', \bar{r}, \omega) d^3r'' \quad (1.2.7)$$

O cálculo de Hc_2 , neste trabalho, é baseado totalmente naquele desenvolvido por Gor'kov⁽⁸⁾. Assim, será necessário utilizar somente a equação para a função de onda do gap.

$$\Delta^*(\bar{r}) = \lambda F^+(\bar{r}, \bar{r}', t-t') \quad (1.2.8)$$

$\bar{r}', t' \rightarrow \bar{r}, t$

Que, de (1.2.7) e (1.2.8) é :

$$\Delta^*(\bar{r}) = -i\lambda \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\delta_+} \int G^0(\bar{r}'', \bar{r}', -\omega) G(\bar{r}'', \bar{r}, \omega) \Delta^*(\bar{r}'') d^3r'' \quad (1.2.9)$$

Convém notar agora que, para o caso de temperatura finita, haverá uma grande semelhança nos cálculos que pode ser explorada com o intuito de compactar a notação.

A transformação de Fourier correspondente para as funções de Green termodinâmicas nada mais é que uma série de Fourier, já que possui um intervalo finito de variação. Portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x') &= \beta^{-1} \sum_{\nu} e^{-i\omega_{\nu}\tau} \mathcal{G}(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) \\ \mathcal{F}(x, x') &= \beta^{-1} \sum_{\nu} e^{-i\omega_{\nu}\tau} \mathcal{F}^+(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

onde $\omega_{\nu} = (2\nu+1)\pi/\beta$ são as frequências de Matsubara.

As equações correspondentes a (1.2.3) seriam :

$$\begin{aligned} (i\omega_{\nu} + \frac{1}{2m} (\nabla - ie\vec{A}(\bar{F}))^2 + \mu) \mathcal{G}(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) + \Delta(\bar{F}) \mathcal{F}^+(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) &= \delta(\bar{F} - \bar{F}') \\ (-i\omega_{\nu} + \frac{1}{2m} (\nabla + ie\vec{A}(\bar{F}))^2 + \mu) \mathcal{F}(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) - \Delta(\bar{F}) \mathcal{G}(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

E então :

$$\Delta^*(\bar{F}) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{\nu} \int \mathcal{G}^0(\bar{F}', \bar{F}, -\omega_{\nu}) \mathcal{G}(\bar{F}'', \bar{F}, \omega_{\nu}) \Delta^*(\bar{F}'') d^3\bar{r}'' \quad (1.2.12)$$

Mais adiante será mostrado que $\mathcal{G}^0(\bar{F}, \bar{F}', \omega_{\nu}) = G^0(\bar{F}, \bar{F}', i\omega_{\nu})$

Então, desde já, introduzimos a notação :

$$\Delta^*(\bar{F}) = \hat{\mathbb{D}}_w \int G^0(\bar{F}', \bar{F}, -w) G(\bar{F}'', \bar{F}, w) \Delta^*(\bar{F}'') d^3\bar{r}'' \quad (1.2.13)$$

onde: - para $T=0$, $W=\omega$ e $\mathbb{D}_\omega = -i\lambda \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\delta_+} \dots$ (1.2.14)

- para $T \neq 0$, $W=i\omega_\nu$ e $\mathbb{D}_{i\omega_\nu} = \frac{\lambda}{\beta} \sum_\nu \dots$

O que não é evidente na notação é que, tanto a função $F(x, x')$ como $\Delta^*(F)$ são funções homogêneas do campo externo. De forma que, quando $H=H_{c2}$ ambas devem ser zero. No caso de um supercondutor do tipo II, que é o caso de interesse, estas funções vão a zero continuamente com o aumento do campo até $H=H_{c2}$.

A equação (1.2.9) pode ser escrita , devido (1.2.5) , como uma expansão em termos de $G^\circ(\vec{r}, \vec{r}', W)$, facilmente calculável.

$$\Delta^*(F) = \mathbb{D}_W \int G^\circ(F', F, -W) G^\circ(F'', F, W) \Delta^*(F'') d^3r'' + o(|\Delta|^2 \Delta^*) \quad (1.2.15)$$

Como $\Delta^*(F)$ vai continuamente a zero quando o campo se aproxima de H_{c2} , então para $H = H_{c2}$ os termos de maior ordem podem ser desconsiderados , logo :

$$\Delta^*(F) = \mathbb{D}_W \int G^\circ(F', F, -W) G^\circ(F'', F, W) \Delta^*(F'') d^3r'' \quad (1.2.16)$$

Um modo elegante de calcular H_{c2} é via a solução da equação integral de autovalores⁽¹²⁾

$$\int K^\circ(F', F, W) \Delta^*(F') d^3r' = S(\omega) \Delta^*(F) \quad (1.2.17)$$

com o "kernel" definido como $K(\vec{r}, \vec{r}', W) = G(\vec{r}, \vec{r}', W)G(\vec{r}, \vec{r}', W)$.

Assim o campo Hc_2 a $T=0$ e como função de T pode ser resolvido do seguinte par de equações algébricas:

$$1 = \mathbb{D}_w S(w) \tag{1.2.19}$$

Uma vez descrito o método pode-se passar para o cálculo propriamente dito. O primeiro passo é a função de Green para um elétron em um metal normal.

1.3 CÁLCULO DE $G(\vec{r}, \vec{r}', W)$

A equação diferencial a ser resolvida é :

$$\left(W + \frac{1}{2m} (\nabla - ie\vec{A}(\vec{r}))^2 + \mu \right) G(\vec{r}, \vec{r}', W) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{1.3.1}$$

Para isso serão usadas as funções de onda dos Níveis de Landau que diagonalizam o operador diferencial que atua sobre a função $G(\vec{r}, \vec{r}', W)$. Portanto escrevendo :

$$G^{\circ}(\vec{F}, \vec{F}', W) = \sum_{n, n'} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\mathbf{q} d\mathbf{q}' \varphi_{n, \mathbf{k}, \mathbf{q}}(\vec{F}) \varphi_{n', \mathbf{k}', \mathbf{q}'}(\vec{F}') G_{nn'}^{\circ}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}', W) \quad (1.3.2)$$

onde

$$\varphi_{n, \mathbf{k}, \mathbf{q}}(\vec{F}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi/m\omega_c}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} e^{-\frac{m\omega_c}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{k}/(m\omega_c))^2} H_n(\sqrt{m\omega_c}(\mathbf{y} - \mathbf{k}/(m\omega_c))) \quad (1.3.3)$$

são as autofunções de

$$-\frac{1}{2m} (\nabla - ie\vec{A}(\vec{F}))^2 \varphi_{n\mathbf{k}\mathbf{q}}(\vec{F}) = (\omega_c(n+1/2) + q^2/2m) \varphi_{n\mathbf{k}\mathbf{q}}(\vec{F}) \quad (1.3.4)$$

no gauge de Landau $\vec{A}(\mathbf{r}) = (-Hy, 0, 0)$, com $\omega_c = eH/m$.

Usando a ortonormalidade e completicidade destas funções,

$$\sum_n \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} \varphi_{n\mathbf{k}\mathbf{q}}^*(\vec{F}') \varphi_{n\mathbf{k}\mathbf{q}}(\vec{F}) = \delta(\vec{F} - \vec{F}') \quad (1.3.5)$$

$$\int d^3r \varphi_{n\mathbf{k}\mathbf{q}}^*(\vec{F}) \varphi_{n'\mathbf{k}'\mathbf{q}'}(\vec{F}) = \delta_{nn'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$$

obtém-se:

$$G_{nn'}^{\circ}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}', W) = \frac{\delta_{nn'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(W - \omega_c(n+1/2) - q^2/2m + \mu)} \quad (1.3.6)$$

Então retornando a (1.3.2)

$$G^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_n \frac{\sqrt{m\omega_c}}{\sqrt{\pi} (2\pi)^2} \int dk e^{ik(x-x')} e^{-\frac{m\omega_c}{2} [y-k/(m\omega_c) + (y'-k/(m\omega_c))]} \times H_n(\sqrt{m\omega_c}(y-k/(m\omega_c))) H_n(\sqrt{m\omega_c}(y'-k/(m\omega_c))) \int \frac{dq e^{iq\Delta z}}{(\omega - \omega_c(n+1/2) - q^2/2m + i\mu)} \quad (1.3.7)$$

A integral em k pode ser operada e o resultado será :

$$G^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = \sum_n \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} e^{\frac{i m \omega_c \Delta x (y+y')}{2}} e^{-\frac{m\omega_c}{4} (\Delta z^2 + \Delta y^2)} L_n\left(\frac{m\omega_c (\Delta z^2 + \Delta y^2)}{2}\right) \int \frac{e^{iq\Delta z} dq}{(\omega - E_n(q) + i\mu)} \quad (1.3.8)$$

onde L_n são polinômios de Laguerre, $\Delta x = (x-x')$ e $E_n(q) = \omega_c(n+1/2) + q^2/(2m)$.

É interessante notar que , com a aplicação do campo externo, o sistema perde a simetria translacional. Isto se reflete no fato da função de Green não mais depender da diferença de coordenadas $(\vec{r}-\vec{r}')$.

1.4 CÁLCULO DA EQUAÇÃO INTEGRAL PARA O GAP

Substituindo (1.3.8) em (1.2.17) resulta :

$$S(\omega)\Delta^*(\vec{r}) = \int \Delta^*(\vec{r}') \frac{(m\omega_c)^2}{(2\pi)^4} e^{im\omega_c \Delta z (\gamma - \gamma')} e^{-\frac{m\omega_c}{2} (\Delta x^2 + \Delta y^2)} dx$$

$$\sum_{n,n'} L_n \left(\frac{m\omega_c}{2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right) L_{n'} \left(\frac{m\omega_c}{2} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \right) \int \frac{dq dq' e^{i(q+q')\Delta z} d\vec{r}'}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q') + \mu)} \quad (1.4.1)$$

com $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$.

A integral em z pode ser realizada resultando uma função $\delta(q - q')$. Integrando em q e fazendo a seguinte troca de variáveis $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ obtém-se :

$$S(\omega)\Delta^*(\vec{r}) = \int \Delta^*(\vec{r}_1 + \vec{r}) \frac{(m\omega_c)^2}{(2\pi)^3} e^{im\omega_c x_1 (\gamma_1 + 2\gamma)} e^{-\frac{m\omega_c}{2} (x_1^2 + y_1^2)} dx$$

$$\sum_{n,n'} L_n \left(\frac{m\omega_c}{2} (x_1^2 + y_1^2) \right) L_{n'} \left(\frac{m\omega_c}{2} (x_1^2 + y_1^2) \right) \int dq \frac{1}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q) + \mu)} dx_1 dy_1 \quad (1.4.2)$$

Como não há método analítico para a resolução desta equação integral devemos propor soluções tentativas.

Suposição I :

$$\Delta^*(\vec{r}) = e^{-ixy m\omega_c} \bar{\Delta}^*(x, y) \quad (1.4.3)$$

Usando esta hipótese em (1.4.2), juntamente com a seguinte troca de variáveis $x_1 = \rho_1 \cos \theta_1$, $y_1 = \rho_1 \sin \theta_1$ resulta :

$$S(W) \bar{\Delta}^*(\rho, \theta) = \bar{\Delta}^*(\rho_1, \rho_2, \theta, \theta_1) (m\omega_c)^2 e^{i(m\omega_c \rho \rho_1 \sin(\theta - \theta_1))} e^{-\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2} \times \sum_{n, n'} L_n\left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2\right) L_{n'}\left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2\right) \rho_1 d\rho_1 d\theta_1 \int \frac{dq}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q) + \mu)} \quad (1.4.4)$$

Suposição II :

$$\bar{\Delta}^*(x, y) = e^{-\frac{m\omega_c}{2}(x^2 + y^2)} \Delta^* \quad (1.4.5)$$

onde $\Delta^* = \text{constante em } x \text{ e } y$.

Assim,

$$\bar{\Delta}^*(\rho_1, \rho_2, \theta, \theta_1) = e^{-\frac{m\omega_c}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1 \rho_2 \cos(\theta - \theta_1))} \Delta^* \quad (1.4.6)$$

A expressão (1.4.4) se reduz a :

$$S(W) \Delta^* = \Delta^* \int \frac{(m\omega_c)^2}{(2\pi)^2} e^{im\omega_c \rho \rho_1 \sin(\theta - \theta_1) - m\omega_c \rho \rho_1 \cos(\theta - \theta_1)} e^{-\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2} \times \sum_{n, n'} L_n\left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2\right) L_{n'}\left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_1^2\right) \rho_1 d\theta_1 d\rho_1 \int \frac{dq}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q) + \mu)} \quad (1.4.7)$$

Reescrevendo a integral em θ_1 de modo conveniente

$$\int_0^{2\pi} e^{-m\omega_c \rho \rho_1 (\cos(\theta_1 - \theta) + i \sin(\theta_1 - \theta))} d\theta_1 = \int_0^{2\pi} e^{-m\omega_c \rho \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta)} \cos(m\omega_c \rho \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta)) \times (1.4.8)$$

$$\times d\theta_1 - i \int_0^{2\pi} e^{-m\omega_c \rho \rho_1 \cos(\theta_1 - \theta)} \sin(m\omega_c \rho \rho_1 \sin(\theta_1 - \theta)) d\theta_1$$

e, desde que , o integrando é periódico na variável de integração e o intervalo de integração é o período, esta integral é translacionalmente invariante, portanto a variável θ pode ser omitida.

As integrais (1.4.8) são tabeladas :

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-R \cos \theta} \cos [R \sin \theta] = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{-R \cos \theta} \sin [R \sin \theta] = 0 \quad (1.4.9)$$

e independentes de ρ e θ . O que indica que a forma escolhida para $\Delta^*(\vec{r})$ é realmente solução de (1.4.1).

$$\Delta^*(\vec{r}) = e^{-ixym\omega_c} e^{-\frac{m\omega_c}{2}(x^2+y^2)} \Delta^* \quad (1.4.10)$$

Evidentemente pode-se questionar a unicidade desta solução , e a aparente arbitrariedade da forma funcional (uma gaussiana centrada na origem) do que se pretende que tenha ligação direta com uma grandeza macroscópica como a densidade de pares.

Rigorosamente esta é apenas uma das soluções do problema. A combinação linear de todas as soluções possivelmente dará a estrutura de vórtices da densidade de pares na fase mista.

Não nos interessa a solução completa do problema mas somente o autovalor $S(W)$ que é suficiente para determinar H_c .

De (1.4.7) e (1.4.9) :

$$S(W) = \int \left(\frac{m\omega_c}{2m} \right)^2 e^{-m\omega_c \rho_i^2} \sum L_n \left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_i^2 \right) L_{n'} \left(\frac{m\omega_c}{2} \rho_i^2 \right) \rho_i d\rho_i \times$$

$$\times \int dq \frac{1}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q) + \mu)}$$
(1.4.11)

Recorrendo novamente a tabela ⁽¹⁴⁾ vê-se que:

$$\int_0^\infty e^{-m\omega_c \rho^2} L_n \left(\frac{m\omega_c}{2} \rho^2 \right) L_{n'} \left(\frac{m\omega_c}{2} \rho^2 \right) \rho d\rho = \frac{\Gamma(n+n'+1) 2^{-(n+n'+1)}}{m\omega_c \Gamma(n+1)\Gamma(n'+1)}$$
(1.4.12)

E finalmente :

$$S(W) = \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sum_{n,n'} \frac{(n+n')!}{n!n'} 2^{-(n+n'+1)} \int dq \frac{1}{(W - E_n(q) + \mu)(-W - E_{n'}(q) + \mu)}$$
(1.4.13)

Até este ponto o desenvolvimento é exato. No entanto, seguir

calculando carregando as somas e fatoriais mostrou ser uma tarefa muito árdua. Assim algumas aproximações de caráter operacional deverão ser feitas.

A primeira delas é que, visto $\omega_c \ll \omega_D$, dois termos consecutivos do somatório estão muito próximos e então as somas podem ser tomadas como integrais.

$$\sum_{n=0}^{\mu/\omega_c} f(n\omega_c)\omega_c \approx \int_0^{\infty} f(x)dx + o(\omega_c) \quad (1.4.14)$$

Assim usando $D = (\hat{n} - \hat{n}')$ e $S = (\hat{n} + \hat{n}')$, para $\hat{n} = \omega_c \cdot n$ e $\hat{n}' = \omega_c \cdot n'$:

$$S(W) = \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \iint \frac{dsdD}{2\omega_c^2} \frac{\Gamma(S/\omega_c+1)e^{-(S/\omega_c+1)}}{\Gamma(\frac{S+D}{2\omega_c}+1)\Gamma(\frac{S-D}{2\omega_c}+1)} \int \frac{dq}{(W - \frac{S+D}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu)(-W - \frac{S-D}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu)} \quad (1.4.15)$$

Supondo que $S \gg 1$ pode-se substituir as funções Gama por suas expressões assintóticas:

$$\frac{\Gamma(S/\omega_c+1)e^{-(S/\omega_c+1)}}{\Gamma(\frac{S+D}{2\omega_c}+1)\Gamma(\frac{S-D}{2\omega_c}+1)} \approx \sqrt{\frac{4S\omega_c}{2\pi(S^2-D^2)}} e^{\frac{S}{\omega_c} \ln \frac{S}{\omega_c} - (\frac{S+D}{\omega_c}) \ln(\frac{S+D}{\omega_c}) - (\frac{S-D}{\omega_c}) \ln(\frac{S-D}{\omega_c})} \quad (1.4.16)$$

Esta expressão é então expandida em torno do seu máximo em $D=0$, pegando o primeiro termo resulta para $S(W)$:

$$S(W) = \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \int \frac{dDds}{2\omega_c^2} \sqrt{\frac{\omega_c}{2\pi S}} e^{-D^2/2S\omega_c} \int \frac{dq}{(W - \frac{S+D}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu)(-W - \frac{S-D}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu)} \quad (1.4.17)$$

Trocando a variável $D=ZS$:

$$S(\omega) = \frac{m\omega_c}{2(2\pi)^2} \int \frac{dS}{\omega_c^2} dz e^{-\frac{SZ^2}{2\omega_c}} \sqrt{\frac{\omega_c S}{2\pi}} \int \frac{dq}{\left(\omega - \frac{S}{2}(1+z) - \frac{q^2}{2m} + \mu\right) \left(-\omega - \frac{S}{2}(1-z) - \frac{q^2}{2m} + \mu\right)} \quad (1.4.18)$$

No limite em que ω_c vai a zero , sabemos que :

$$\lim_{\omega_c \rightarrow 0} \sqrt{\frac{S}{2\pi\omega_c}} e^{-Z^2 S / 2\omega_c} = \delta(Z) \quad (1.4.19)$$

Portanto integrando em Z :

$$S(\omega) = \frac{m\omega_c}{2(2\pi)^2} \int \frac{dS}{\omega_c} \int dq \frac{1}{\left(\omega - S/2 - q^2/2m + \mu\right) \left(-\omega - S/2 - q^2/2m + \mu\right)} \quad (1.4.20)$$

1.5 CÁLCULO DO CAMPO CRÍTICO H_{c2} A $T=0$

Introduzindo (1.4.20) na equação (1.2.19) resulta :

$$I = -\frac{i\lambda}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\delta_+} \int dq ds \frac{m}{2(2\pi)^2} \frac{1}{\left(\omega - \frac{S}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu\right) \left(-\omega - \frac{S}{2} - \frac{q^2}{2m} + \mu\right)} \quad (1.5.1)$$

Devemos isolar ω_c nesta equação. Para isso temos que nos lembrar das restrições do modelo (1.1.3) , que agora se aplicam no intervalo de integração.

Os elétrons que interagem devem estar em um intervalo de $2\omega_D$ ao redor da energia de Fermi, portanto:

$$-\omega_D \leq \epsilon/2 + q^2/2m - \mu \leq \omega_D \quad (1.5.2)$$

Assim definimos novas variáveis

$$x \equiv \epsilon/2 + q^2/2m \quad (1.5.3)$$

$$y \equiv -\epsilon/2 + q^2/2m$$

cujos intervalos são, então:

$$x \in (\mu - \omega_D, \mu + \omega_D) \quad (1.5.4)$$

$$y \in (-x, x)$$

O Jacobiano da transformação é:

$$\frac{\partial(q, \epsilon)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \sqrt{m}/(2\sqrt{x+y}) & 1 \\ \sqrt{m}/(2\sqrt{x+y}) & -1 \end{vmatrix} = \sqrt{m}/\sqrt{x+y} \quad (1.5.5)$$

Assim, (1.5.1) torna-se:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-im\lambda}{2(2\pi)^3} \int d\omega e^{-i\omega\delta_+} \int_{\mu-\omega_D}^{\mu+\omega_D} dx \int_{-x}^x dy \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x+y}} \frac{1}{(\omega-x+\mu)(-\omega-x+\mu)} \\ &= \frac{-im^{3/2}\lambda}{(2\pi)^3} \int d\omega e^{-i\omega\delta_+} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} 2dx' \sqrt{2\mu-2x'} \frac{1}{(\omega-x')(-\omega-x')} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Como $\mu \gg \omega_D$ considera-se $\sqrt{2\mu - 2x'} \approx \sqrt{2\mu}$

A integral em ω é calculada por resíduos usando a regra de Feynman para passar os polos :

$$\int d\omega e^{-i\omega\delta_+} \frac{1}{(\omega + i\delta_+ \operatorname{sgn} \omega - x')(-\omega - i\delta_+ \operatorname{sgn} \omega - x')} \quad (1.5.7)$$

Para o contorno da figura abaixo

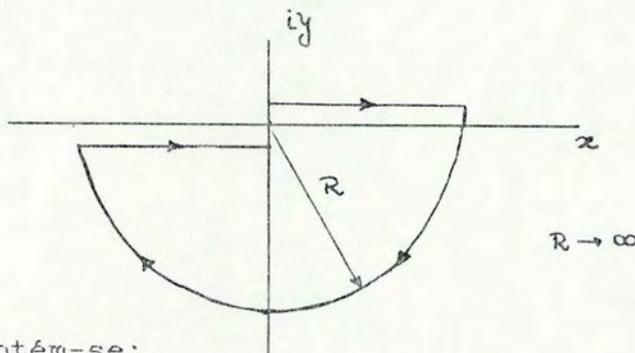


fig.2

obtem-se:

$$\oint \frac{-dz}{(z-x')(z+x')} = 2\pi i \left(\frac{\theta(x')}{2x'} - \frac{\theta(-x')}{2x'} \right) \quad (1.5.8)$$

Logo a equação (1.5.6) é escrita :

$$I = \frac{\lambda m \sqrt{2m\mu}}{2\pi^2} \int_0^{\omega_D} \frac{dx'}{x'} \quad (1.5.9)$$

Esta integral claramente possui uma divergência logarítmica. Ademais a variável incógnita ω_c que desejávamos explicitar

simplesmente desapareceu, e isto se deve ao fato de que considerar a soma como integral é tomar o limite de ω_c indo a zero.

Para remover estes problemas arbitra-se que o mínimo valor que a variável X pode assumir não é zero e sim $\omega_c/2$, desta forma evita-se a divergência e recupera-se ω_c . É importante ressaltar que esta escolha é arbitrária e não está apoiada em nenhuma argumentação física, as razões para usá-la são os bons resultados que dela provém.

O problema da divergência não se deve as aproximações aqui efetuadas. Se substituirmos (1.4.3) em (1.2.19), integrarmos a variável ω como em (1.5.8) veremos que as somas possuirão o mesmo problema.

A expressão resultante para $H_{c2}(0)$ é :

$$\omega_c(0) = 2\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda N(\mu)}} \quad (1.5.10)$$

que é o valor do "gap" de energia do supercondutor a $T=0$. Onde $N(\mu) = \frac{m^3 v_F^3}{2\pi^2}$ é a densidade de estados no nível de Fermi para o metal normal calculada no apêndice I.

O campo magnético crítico é tal que a energia do ponto zero dos dois elétrons que formam o par de Cooper seja igual ao "gap" de energia que os mantém ligados.

1.6 CALCULO DE H_{C_2} A TEMPERATURAS DIFERENTES DE ZERO

O desenvolvimento, agora, é basicamente igual ao da seção anterior com a exceção que ao invés da integral em ω deveremos ter a soma sobre as frequências de Matsubara.

Assim a expressão correspondente a (1.5.6) será :

$$1 = \frac{\lambda}{\beta} \frac{m p_0}{2\pi^2} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} dx' \frac{1}{((2\eta+1)i\pi/\beta - x')(- (2\eta+1)i\pi/\beta - x')} \quad (1.6.1)$$

Usando que ⁽¹⁴⁾

$$\operatorname{tgh} \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + x^2} \quad (1.6.2)$$

podemos substituir

$$\sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{((2\eta+1)i\pi/\beta - x')(- (2\eta+1)i\pi/\beta - x')} = \frac{\beta}{2x'} \operatorname{tgh}(\beta x'/2) \quad (1.6.3)$$

em (1.6.1) resultando :

$$1 = \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \int \operatorname{tgh}(\beta x'/2) \frac{dx'}{x'} \quad (1.6.4)$$

Neste caso não há divergência para $X' \rightarrow 0$ e a integral

existiria se o intervalo contivesse este ponto. No entanto, o campo magnético tem de ser introduzido de alguma forma, e esse no nosso entender é o melhor jeito.

Claramente no limite $T \rightarrow 0$ recuperamos o resultado da seção anterior.

Um modo de testar a consistência de (1.6.4) é através do cálculo da temperatura crítica. Para obtermos a temperatura crítica devemos tomar $\omega_c = 0$, pois o campo magnético crítico é zero em T_c .

Antes porém é conveniente reescrever (1.6.4) integrando por partes:

$$1 = \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \left\{ \operatorname{tgh}(\omega_0 \beta / 2) \ln(\omega_0 \beta / 2) - \operatorname{tgh}(\omega_c \beta / 4) \ln(\omega_c \beta / 4) - \int_{\omega_c \beta / 4}^{\omega_0 \beta / 4} \frac{\ln(x) dx}{\cosh^2(x)} \right\} \quad (1.6.5)$$

Como normalmente $\omega_D \gg kT_c$ algumas simplificações podem ser feitas em (1.6.5), resultando:

$$2\pi^2 = \ln(\omega_0 \beta / 2) - \operatorname{tgh}(\omega_c \beta / 4) \ln(\omega_c \beta / 4) - \int_0^{\infty} \frac{\ln(x) dx}{\cosh^2(x)} + \int_0^{\omega_c \beta / 4} \frac{\ln(x) dx}{\cosh^2(x)} \quad (1.6.6)$$

A primeira integral é tabelada e é igual a $-\ln(4\gamma/\pi)$ onde $\ln(\gamma)$ é a constante de Euler. O segundo e o último termos podem ser agrupados em uma integração por partes. Logo (1.6.6) torna-se:

$$\frac{2\pi^2}{\lambda \mu_0} = \ln(2\omega_D \beta \delta / \pi) - \int_0^{\omega_c \beta / 4} \operatorname{tgh} x \frac{dx}{x} \quad (1.6.7)$$

Quando fazemos $\omega_c = 0$ encontramos

$$k T_c = \frac{\gamma}{\pi} 2\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda N(\mu)}} \quad (1.6.8)$$

que é o resultado conhecido para a temperatura crítica.

Assim a expressão final para o campo magnético crítico em função da temperatura é :

$$\ln(\tau / \tau_c) = - \int_0^{\omega_c \beta / 4} \operatorname{tgh}(x) \frac{dx}{x} \quad (1.6.9)$$

Não é possível colocar analiticamente ω_c como função explícita de T , no sentido de isolar ω_c na equação.

Na figura 3 é apresentada uma comparação entre a curva ($c(T)/c(0)$ x T/T_c proveniente de (1.6.9) através de cálculo numérico cujo programa se encontra no apêndice II) e aquelas relativas aos trabalhos de Gor'kov e Abrikosov-Ginzburg.

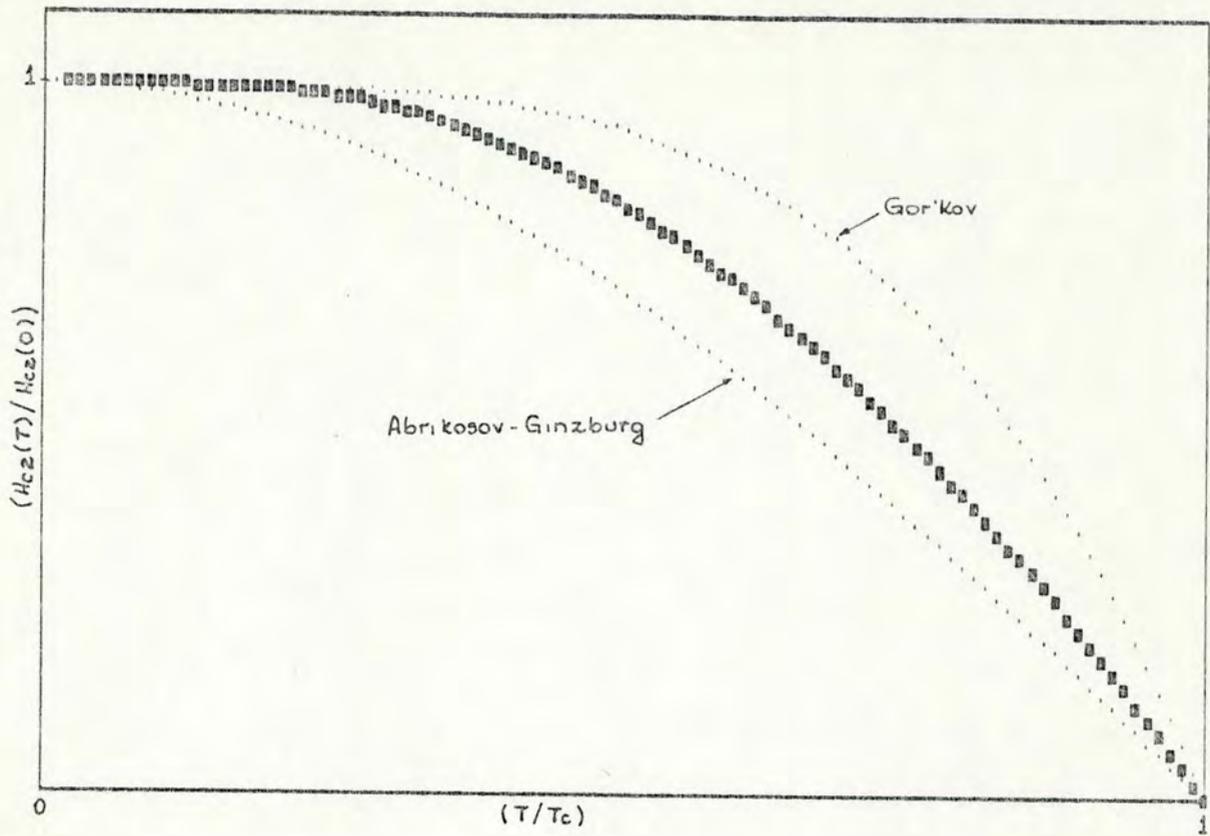


fig.3

CAPITULO II. SUPERCONDUTORES COM IMPUREZAS

As primeiras experiências no sentido de estudar a relação entre a supercondutividade e a desordem foram devidas a B.T. Matthias⁽¹⁶⁾ e seus colaboradores e têm como resultado que no caso de impurezas não magnéticas a temperatura crítica T_c é pouco alterada pela desordem em geral. Na verdade duas regiões se distinguem, uma de materiais relativamente puros onde T_c varia rapidamente com o grau de impurezas e outra de materiais muito "sujos" onde a adição de mais impurezas não causa efeito

apreciável sobre T_c .

Anderson⁽⁹⁾ desenvolveu uma teoria para esta segunda região. Basicamente supõe-se que os elétrons nos autoestados do problema com impurezas ainda assim se agrupam em pares, sofrendo uma interação atrativa da mesma intensidade de (1). O pareamento se dá entre um estado e seu inverso temporal, já que quando as impurezas não são magnéticas estes possuem a mesma energia.

Na seção que segue apresentaremos a argumentação de Anderson.

2.1 O TEOREMA DE ANDERSON

A equação (1.2.16) para um supercondutor com impurezas, livre da presença de um campo externo, é:

$$\Delta^*(\vec{r}) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int G^o(\vec{r}_2, \vec{r}_1, -i\omega_\nu) G^o(\vec{r}_2, \vec{r}_1, i\omega_\nu) \Delta^*(\vec{r}_2) d\vec{r}_2 \quad (2.1.1)$$

onde as funções de Green satisfazem a equação:

$$(i\omega_\nu + \nabla^2 - V(\vec{r}) + \mu) G(\vec{r}_2, \vec{r}_1, i\omega_\nu) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \quad (2.1.2)$$

sendo definida, portanto, como

$$G^0(\vec{r}_2, \vec{r}, i\omega_\nu) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_\nu \tau} \langle \psi(\vec{r}_2, \tau) \psi^\dagger(\vec{r}, 0) \rangle_{H_0} \quad (2.1.3)$$

Os colchetes significam a média termodinâmica

com $H_0 = -\frac{\nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu$, $V(\vec{r})$ é o potencial das impurezas e

$$\psi(\vec{r}, \tau) = e^{-H_0 \tau} \psi(\vec{r}) e^{H_0 \tau} \quad (2.1.4)$$

Se as autofunções de H_0 forem conhecidas podemos escrever:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(\vec{r}) C_{\alpha} \quad (2.1.5)$$

onde C_{α}^{\dagger} cria uma partícula no autoestado α de H_0 .

A expressão (2.1.1) torna-se então

$$\Delta^*(\vec{r}) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \delta, \delta'}} \int \phi_{\alpha}^*(\vec{r}_2) \phi_{\beta}(\vec{r}) \phi_{\delta'}^*(\vec{r}_2) \phi_{\delta}(\vec{r}) G_{\alpha}(-i\omega_{\nu}) G_{\beta}(i\omega_{\nu}) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\delta'} \Delta^*(\vec{r}_2) d^3r_2 \quad (2.1.6)$$

$$\Delta^*(\vec{r}) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha \delta} \int \phi_{\alpha}^*(\vec{r}_2) \phi_{\alpha}(\vec{r}) \phi_{\delta}^*(\vec{r}_2) \phi_{\delta}(\vec{r}) G_{\alpha}(-i\omega_{\nu}) G_{\delta}(i\omega_{\nu}) \Delta^*(\vec{r}_2) d^3r_2$$

com

$$G_{\alpha}(i\omega_{\nu}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_{\nu} \tau} \langle C_{\alpha}(\tau) C_{\alpha}^{\dagger}(0) \rangle = \frac{1}{(i\omega_{\nu} - E(\alpha) + \mu)} \quad (2.1.7)$$

Assim,

$$\Delta^*(\bar{F}) = \frac{\lambda}{\rho} \sum_{\alpha, \beta} \int \phi_{\alpha}^*(\bar{F}_2) \phi_{\alpha}(\bar{F}) \phi_{\beta}^*(\bar{F}_2) \phi_{\beta}(\bar{F}) \Delta^*(\bar{F}_2) d^3\bar{F}_2 \frac{1}{(-i\omega_{\nu} - E(\alpha) + \mu)(i\omega_{\nu} - E(\beta) + \mu)} \quad (2.1.8)$$

Se supuzermos que $\Delta^*(\bar{F})$ é aproximadamente constante em " \bar{F} " como deve ser em um material puro :

$$1 = \frac{\lambda}{\rho} \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}(\bar{F}) \phi_{\alpha}(\bar{F}) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega_{\nu} - E(\alpha) + \mu)(i\omega_{\nu} - E(\bar{\alpha}) + \mu)} \quad (2.1.9)$$

O estado $\bar{\alpha}$ é o inverso temporal de α . Sabemos que $E(\bar{\alpha}) = E(\alpha)$. Note que a equação (2.1.9) apresenta uma inconsistência pois se trata de uma igualdade entre uma função e um número.

Integrando os dois membros de (2.1.9) em " \bar{F} " :

Usando (1.6.3) obtemos :

$$1 = \lambda \sum_{\alpha} \frac{1}{v} \frac{\text{tgh}(\beta(E(\alpha) - \mu))}{2(E(\alpha) - \mu)} \quad (2.1.10)$$

Ou equivalentemente , introduzindo a densidade de estados

$$1 = \lambda \int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} d\omega N(\omega) \frac{\text{tgh}(\beta(\omega - \mu))}{2(\omega - \mu)} \quad (2.1.11)$$

onde

$$N(\omega) = \frac{1}{V} \sum_{\alpha} \delta(\omega - E(\alpha)) \quad (2.1.12)$$

A suposição de Anderson é que $N(\omega) \approx N(\mu)$ não deva variar apreciavelmente com a densidade de impurezas, de forma que $N(\mu) \approx m p_0 / (2\pi^2)$ e recuperamos a equação (1.6.4) para $\omega_c = 0$ e, portanto, T_c é dada pela equação (1.6.8).

Certamente esta abordagem é muito simplificada. Por exemplo, não leva em conta a interação repulsiva de Coulomb e as modificações desta devido as impurezas. Como sabemos a supercondutividade é resultado de um delicado balanço entre a atração mediada pelos fônons e esta repulsão (cada elétron está sujeito a um potencial coulombiano da ordem de 1.6 joules enquanto que a energia que mantém os pares de Cooper é de aproximadamente $1.6 \cdot 10^{-8}$ joules. Assim as correções à interação de Coulomb devem ser fator importante no comportamento supercondutor. Muitos artigos ⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ têm sido recentemente dedicados ao cálculo de efeitos de localização sobre a interação de Coulomb, estes efeitos parecem causar um decréscimo em T_c . Espera-se, a princípio, que com o aumento da desordem haja um "enfraquecimento" da supercondutividade, pois no limite em que as funções de onda dos elétrons começam a ficar muito localizadas, próximo a transição metal-isolante, esta deve desaparecer.

Neste trabalho não se considera a interação de Coulomb explicitamente, mas embutida na interação elétron-elétron de forma que, como foi dito anteriormente, seja o resultado da

concorrência dos dois tipos de interação. A nossa atenção estará voltada para as correções na densidade de estados devido ao espalhamento dos elétrons.

2.2 CÁLCULO DE H_c2 PARA UM SUPERCONDUTOR COM IMPUREZAS

A introdução de impurezas, como já vimos, é mediante a adição de um potencial de uma partícula em (1.2.1). Esta interação será considerada do tipo:

$$V(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N u \delta(\vec{r} - \vec{R}_a) \quad (2.2.1)$$

onde $\{\vec{R}_a\}$ é distribuído de forma equiprovável sobre o material.

Diferente de Anderson supomos que o resultado, que pode ser via a densidade de estados, seja dependente da desordem. Nós sabemos, no entanto, que a posição das impurezas não deve determinar o comportamento macroscópico do sistema. Assim, para evitar esta dependência não física toma-se uma média configuracional que tem a forma

$$\langle A \rangle_c = \int \prod_{i=1}^N \frac{d\vec{R}_i}{V} A \quad (2.2.2)$$

já que a distribuição é aleatória. Feito isto os únicos parâmetros decorrentes das impurezas serão a densidade e a

intensidade u da interação (2.2.1).

As equações que determinam H_c para $T=0$ têm a mesma forma daquelas calculadas em (1.2.16) com a diferença que agora, a função de Green não é mais $G(\vec{r}, \vec{r}'; i\omega)$ definida em (1.2.4) mas sim depende de $\{\vec{R}_\alpha\}$ via a definição abaixo:

$$(i\omega) + \frac{(\nabla - ie\vec{A}(\vec{r}))^2}{2m} - \sum_{\alpha=1}^N u \delta(\vec{r} - \vec{R}_\alpha) + \mu) G_\alpha^0(\vec{r}, \vec{r}'; i\omega) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.2.3)$$

Estas novas equações para a função de onda do gap serão:

$$\Delta^*(\vec{r}) = \mathbb{D}_w \int \langle k_\alpha(\vec{r}', \vec{r}, w) \rangle \Delta^*(\vec{r}') d^3r' \quad (2.2.4)$$

onde se supõe que a média configuracional da expressão incida unicamente no "kernel"

$$k_\alpha(\vec{r}', \vec{r}, w) = G_\alpha^0(\vec{r}', \vec{r}, w) G_\alpha^0(\vec{r}', \vec{r}, -w) \quad (2.2.5)$$

Esta média configuracional pode ser escrita como uma expansão em funções de Green do tipo (1.2.4).

Diagramaticamente isto é representado

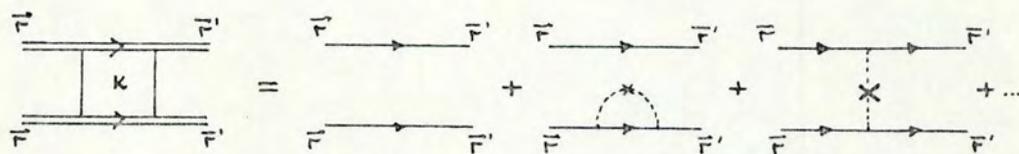
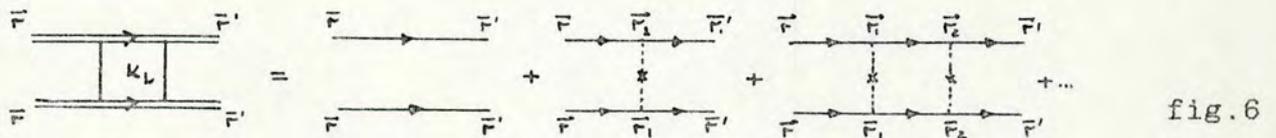


fig.5

onde \longrightarrow é a $\vec{G}(\vec{r}, \vec{r}', W)$ e a linha pontilhada representa o fator multiplicativo u e o "x" a densidade de estados η . O resto segue das regras normais de interpretação dos diagramas de Feynman.

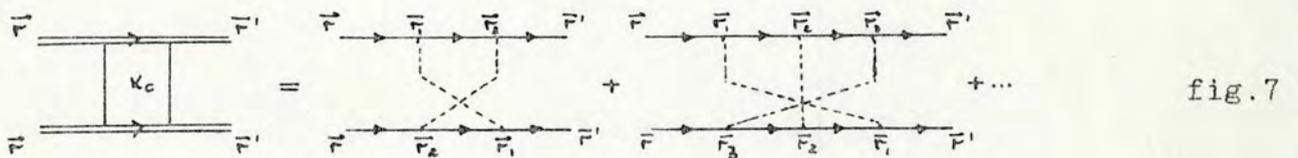
Evidentemente a compilação da soma completa é um trabalho quase impossível. O que se pode fazer é somar certas classes de diagramas.

Aqui nos preocuparemos com duas delas em especial. A mais natural e de mais fácil soma é a formada pelos diagramas chamados "ladder" (escada) como mostra a figura abaixo.



Como já foi dito, a consideração destes no problema do cálculo da resistência residual de um metal leva ao resultado clássico de Drude.⁽¹¹⁾

A outra soma realizável é aquela referente aos diagramas "completamente cruzados". No problema da resistência dos metais estes carregam o efeito de Localização de Anderson.⁽¹⁰⁾



Portanto escreveremos a equação (2.2.4) como:

$$\Delta^*(F) = \mathbb{D}_W \int \{K_L(\bar{F}_2, \bar{F}, W) + K_C(\bar{F}_2, \bar{F}, W)\} \Delta^*(\bar{F}_2) d^3\bar{F}_2 = (\Lambda_L(\omega_c, T) + \Lambda_C(\omega_c, T)) \Delta^*(\bar{F}) \quad (2.2.6)$$

Onde $K_L(\bar{r}, \bar{r}', W)$ e $K_C(\bar{r}, \bar{r}', W)$ representam respectivamente a soma completa dos diagramas escada e completamente cruzados.

Como tudo é escrito em termos de $\langle G_\alpha^0(\bar{r}, \bar{r}', W) \rangle$ é conveniente primeiramente calcularmos esta função.

2.3 CALCULO DE $\langle G_\alpha^0(\bar{r}, \bar{r}', W) \rangle$

De (2.2.3) conclui-se que

$$G_\alpha^0(\bar{r}, \bar{r}', W) = G^0(\bar{r}, \bar{r}', W) + u \int \sum \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) G^0(\bar{r}, \bar{r}', W) G_\alpha^0(\bar{r}, \bar{r}_1, W) d^3\bar{r}_1 \quad (2.3.1)$$

que corresponde a seguinte soma de diagramas de Feynman:

$$\overleftrightarrow{\bar{r}} = \overleftrightarrow{\bar{r}'} = \bar{r} \rightarrow \bar{r}' + \bar{r} \xrightarrow{\bar{r}_1} \bar{r}' + \bar{r} \xrightarrow{\bar{r}_1} \bar{r}_1 \rightarrow \bar{r}' + \bar{r} \xrightarrow{\bar{r}_1} \bar{r}_1 \rightarrow \bar{r}_2 \rightarrow \bar{r}' + \dots \quad \text{fig.8}$$

É mais proveitoso trabalhar no espaço das autofunções do hamiltoniano definindo, como anteriormente :

$$G^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) = \sum_{\bar{n}} \int dk dq \varphi_{n_k q}(\bar{F}) \varphi_{n_k q}^*(\bar{F}') G_n^{\circ}(q, W) \quad (2.3.2)$$

$$G_a^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) = \sum_{n_1, n_1'} \int dk dk' dq dq' \varphi_{n_k q}(\bar{F}) \varphi_{n_1 k' q'}(\bar{F}') G_a^{\circ n_1 n_1'}(k, k', q, q', W)$$

Substituindo em (2.3.1) :

$$G_a^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) = G^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) + u \sum_{i, n_1, n_2} \int dk_1 dk_2 dq_1 dq_2 \varphi_{n_k q}(\bar{F}) \varphi_{n_k q}^*(\bar{F}_i) \times \varphi_{n_1 k_1 q_1}(\bar{F}_i) \varphi_{n_2 k_2 q_2}^*(\bar{F}') \delta(\bar{F}_i - \bar{R}_i) G_n^{\circ}(q, W) G_a^{\circ n_1 n_2}(k_1, k_2, q_1, q_2, W) d\bar{F}_i \quad (2.3.3)$$

Então ,

$$G_a^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) = G^{\circ}(\bar{F}, \bar{F}', W) + u \sum_{n_1, n_2} \int dk_1 dk_2 dq_1 dq_2 \varphi_{n_k q}(\bar{F}) \varphi_{n_2 k_2 q_2}^*(\bar{F}') \times \left\{ \sum_{n_1, i} \int dk_1 dq_1 \varphi_{n_1 k_1 q_1}^*(\bar{R}_i) \varphi_{n_1 k_1 q_1}(\bar{R}_i) G_a^{\circ n_1 n_2}(k_1, k_2, q_1, q_2, W) G_n^{\circ}(q, W) \right\} \quad (2.3.4)$$

Logo ,

$$G_a^{\circ n_1 n_2}(k_1, k_2, q_1, q_2, W) = G_n^{\circ}(q, W) \delta(k_1 - k_2) \delta(q_1 - q_2) \delta n_1 n_2 + \left\{ \sum_{n_1, i} u \int dk_1 dq_1 \varphi_{n_1 k_1 q_1}(\bar{R}_i) G_a^{\circ n_1 n_2}(k_1, k_2, q_1, q_2, W) \right\} \varphi_{n_k q}^*(\bar{R}_i) G_n^{\circ}(q, W) \quad (2.3.5)$$

Usando recorrência para expandir a função acima obtemos:

$$G_a^{\circ n_1 n_2}(k, k_2, q, q_2, W) = G_n^{\circ}(q, W) \delta(k - k_2) \delta(q - q_2) \delta n_1 n_2 + \sum_i u \varphi_{n_2 k_2 q_2}(\bar{R}_i) \varphi_{n_k q}^*(\bar{R}_i) G_n^{\circ}(q, W) G_n^{\circ}(q_2, W) + \sum_{i, j} u^2 \left\{ \int dk_1 dq_1 \varphi_{n_1 k_1 q_1}(\bar{R}_i) \varphi_{n_1 k_1 q_1}^*(\bar{R}_j) \varphi_{n_2 k_2 q_2}(\bar{R}_j) G_n^{\circ}(q, W) G_n^{\circ}(q_2, W) \right\} \times \varphi_{n_k q}^*(\bar{R}_i) G_n^{\circ}(q, W) + \dots \quad (2.3.6)$$

A aplicação da média configuracional será descrita cuidadosamente para o cálculo dos primeiros diagramas. Os diagramas de ordem mais alta serão apenas inferidos, o que não é uma tarefa muito difícil.

Termo de primeira ordem :

$$D_1 = \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 R_i}{V} \sum_a u \varphi_{n_2 k_2 q_2}(\bar{R}_a) \varphi_{n_1 k_1 q_1}^*(\bar{R}_a) G_{n_1}^0(q, w) G_{n_2}^0(q, w) = u \eta (G_{n_1}^0(q, w))^2 \delta_{n_1 n_2} \times \delta(k - k_2) \delta(q - q_2) \quad (2.3.7)$$

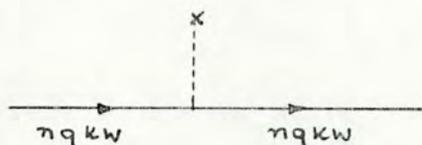


fig.9

Diagramas de segunda ordem :

$$D_2 = \int \prod_{i=1}^N \frac{d^3 R_i}{V} \sum_{a,b} u^2 \int dq, dk, \varphi_{n_1 k_1 q_1}(\bar{R}_a) \varphi_{n_1 k_1 q_1}^*(\bar{R}_b) \varphi_{n_2 k_2 q_2}(\bar{R}_b) \varphi_{n_1 k_1 q_1}^*(\bar{R}_a) \times G_{n_1}^0(q_1, w) G_{n_2}^0(q_2, w) G_{n_1}^0(q, w) \quad (2.3.8)$$

i) primeiro caso $\bar{R}_a \neq \bar{R}_b$:

$$D_2(a \neq b) = \eta^2 u (G_{n_1}^0(q, w))^3 \delta(k - k_2) \delta(q - q_2) \delta_{n_1 n_2} \delta(k - k_1) \delta(q - q_1) \delta_{n_1 n_1} \quad (2.3.9)$$

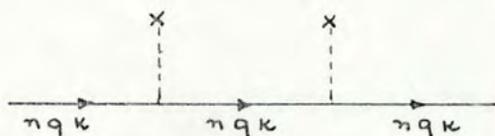


fig.10

ii) segundo caso $\vec{R}_a = \vec{R}_b$:

$$D_2(a=b) = \eta u^2 \int d\vec{R} \sum_{n_1, n_2} dq dk \varphi_{n_1 k q_1}(\vec{R}) \varphi_{n_2 k q}^*(\vec{R}) (\varphi_{n_2 k_2 q_2}(\vec{R}) \varphi_{n_1 k_1 q}^*(\vec{R})) \quad (2.3.10)$$

$$\times G_{n_1}^0(q_1, W) G_{n_2}^0(q_2, W) G_n^0(q, W)$$

A integral em "k" pode ser resolvida usando (1.3.5) e o resultado é $m\omega_c / (2\pi)^2$, então :

$$D_2(a=b) = \eta u^2 \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sum_{n_1} \int dq_1 G_{n_1}^0(q_1, W) (G_n^0(q, W))^2 \delta(k-k_2) \delta(q-q_2) \delta_{n_1 n_2} \quad (2.3.11)$$

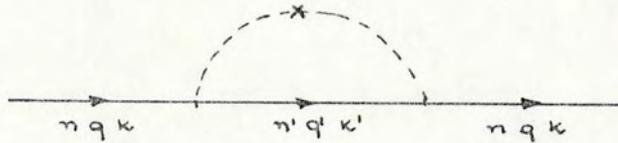


fig.11

A soma dos diagramas do tipo presente nas figuras 8 e 9 representam, apenas uma correção na energia de Fermi sendo assim desconsiderados. De acordo com Gor'kov⁽¹¹⁾ os diagramas que mais contribuem são :



fig.12

Logo é uma boa aproximação escrever $\langle G_a^0(\vec{r}, \vec{r}', W) \rangle$ em termos

da equação "Equação de Dyson" :

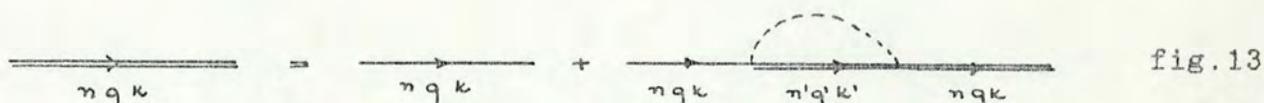


fig.13

Com os poucos termos apresentados é evidente que a média restabelece a simetria característica de $G^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', W)$, conseqüentemente $\langle G_{\alpha n_2}^{\circ}(k, k_2, q, q_2, W) \rangle$ é apenas $G_{\alpha n}^{\circ}(q, W) \delta_{n n_2} \delta(q - q_2) \delta(k - k_2)$.

Logo a equação correspondente a figura 13 é

$$G_{\alpha n}^{\circ}(q, W) = G_n^{\circ}(q, W) + \eta u^2 \frac{m \omega_c}{(2\pi)^2} G_n^{\circ}(q, W) \left\{ \sum_{n_1} \int dq_1 G_{\alpha n_1}^{\circ}(q_1, W) \right\} G_{\alpha n}^{\circ}(q, W) \quad (2.3.12)$$

ou seja,

$$G_{\alpha n}^{\circ}(q, W) = \frac{1}{(W + \sum - \omega_c(\eta + 1/2) - q^2/2m + \mu)} \quad (2.3.13)$$

onde :

$$\sum = -\eta u^2 \frac{m \omega_c}{(2\pi)^2} \sum_{n_1} \int dq_1 \frac{1}{(W + \sum - \omega_c(\eta + 1/2) - q_1^2/2m + \mu)} \quad (2.3.14)$$

Como constantes reais adicionadas ao denominador de (2.3.13) não nos interessam tomaremos apenas $\text{Im} \sum$ e $G_{\alpha n}^{\circ}(q, W)$ poderá ser reescrita:

$$G_{\alpha}^{\circ n}(q, W) = \frac{1}{(W + i\Gamma - \omega_c(n+1/2) - q^2/2m + \mu)} \quad (2.3.15)$$

Com :

$$i\Gamma = -\text{Im} \left(\eta u^2 \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sum_n \int dq \frac{1}{(W + i\Gamma - \omega_c(n+1/2) - q^2/2m + \mu)} \right) \quad (2.3.16)$$

Assim o resultado de introduzir impurezas neste problema é a presença de uma constante imaginária somada ao denominador de $G_{\alpha}^{\circ n}(q, W)$. Na verdade podemos notar que $G_{\alpha}^{\circ n}(q, W)$ é igual a $G_{\alpha}^{\circ n}(q, W + i\Gamma)$. Dado o fato de haver colisões, um elétron não permanecerá indefinidamente num mesmo Nível de Landau, ao invés, sofrerá transições continuamente e o tempo médio entre estas colisões é definido como $\tau = 1/\Gamma$. Da mesma maneira que para o espaço de momentum no espaço real $\langle G_{\alpha}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', W) \rangle = G_{\alpha}^{\circ}(\vec{r}, \vec{r}', W + i\Gamma)$.

2.4 CONTRIBUIÇÃO DOS DIAGRAMAS EM ESCADA

A soma destes diagramas é representada por :

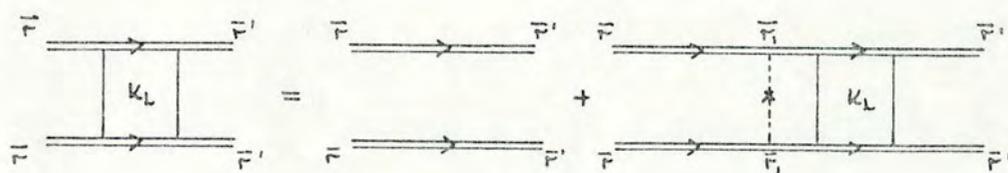


fig.14

A linha cheia é a função de Green da figura 13.

A figura 14 corresponde a

$$K_L(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) = K^0(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) + \eta u^2 \int K^0(\vec{F}, \vec{F}_1, W+i\Gamma) K_L(\vec{F}_1, \vec{F}', W+i\Gamma) d^3\vec{F}_1 \quad (2.4.1)$$

onde

$$K^0(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) = G^0(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) G^0(\vec{F}, \vec{F}', -W-i\Gamma) \quad (2.4.2)$$

Uma consequência direta de (1.2.17) e (1.4.10) é que

$$\int K^0(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) \Delta^*(\vec{F}') d^3\vec{F}' = S(W+i\Gamma) \Delta^*(\vec{F}) \quad (2.4.3)$$

com $S(W+i\Gamma)$ calculado em (1.4.11) trocando W por $W+i\Gamma$.

Assim:

$$K_L(\vec{F}, \vec{F}', W+i\Gamma) \Delta^*(\vec{F}') d^3\vec{F}' = S(W+i\Gamma) \Delta^*(\vec{F}) + \eta u^2 S(W+i\Gamma) \int K_L(\vec{F}, \vec{F}_1, W+i\Gamma) \Delta^*(\vec{F}') d^3\vec{F}' \quad (2.4.4)$$

Portanto: ⁽¹²⁾

$$\Lambda_L(\omega, T) = \mathcal{D}_W \left(\frac{S(W+i\Gamma)}{1 - \eta u^2 S(W+i\Gamma)} \right) \quad (2.4.5)$$

Se considerarmos esta como a única contribuição para o campo crítico, vemos que no limite em que a densidade de impurezas vai a zero recuperamos o caso puro.

2.4.1 Cálculo de $S(W+i\Gamma)$

Visto que o problema à temperatura zero é um limite muito simples daquele à temperatura finita então não será calculado explicitamente como no capítulo 1. Portanto daqui para frente $W = i\omega_\nu$.

Da equação (1.4.13) temos :

$$S(i\omega_\nu + i\Gamma) = \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sum_{n, n'} \frac{(n+n')!}{n!n'} 2^{-(n+n'+1)} \int \frac{\sqrt{2m} dq}{(i(\omega_\nu + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+1/2) + \mu)} \times \quad (2.4.6)$$

$$\times \frac{1}{(-i(\omega_\nu + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+1/2) + \mu)}$$

Já sabemos que a contribuição maior é proveniente da região onde $n = n'$. Assim vamos calcular " $S(i\omega_\nu + i\Gamma)$ " até primeira ordem de " $\omega_c(n-n')$ " expandindo somente o denominador de (2.4.6).

Então:

$$S(i\omega_\nu + i\Gamma) = 2\text{Re} \frac{m\omega_c \sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \sum_n dq \frac{1}{2i(\omega_\nu + \Gamma)(i(\omega_\nu + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+1/2) + \mu)} +$$

$$+ 2\text{Re} \frac{m\omega_c \sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \sum_{n, n'} \frac{(n+n')!}{n!n'} 2^{-(n+n'+1)} \int dq \frac{1}{2i(\omega_\nu + \Gamma)(i(\omega_\nu + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+n'+1/2) + \mu)} \quad (2.4.7)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2i(\omega_\nu + \Gamma)} + \frac{1}{(i(\omega_\nu + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+n'+1/2) + \mu)} \right\} \omega_c(n-n').$$

Onde se usou :

$$\sum_{n=0}^M \frac{M!}{n!(M-n)!} z^n = 1 \quad (2.4.8)$$

O segundo termo em (2.4.7) é obviamente nulo .

Como $\text{Re}(iz) = i(\text{Im}.z)$ a expressão (2.4.7) torna-se :

$$S(i\omega_v + i\Gamma) = \frac{1}{i(\omega_v + \Gamma)} \left(-\text{Jm} \frac{m\omega_c \sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_n \int \frac{dq}{(i(\omega_v + \Gamma) - q^2 - \omega_c(m+1/2) + \mu)} \right) \quad (2.4.9)$$

E meu intuito comparar esta expressão com àquela da definição de " $i\Gamma$ " que é de (2.3.16):

$$\frac{i\Gamma}{\eta u^2} = -\text{Jm} \left(\frac{m\omega_c \sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \sum_n \int dq \frac{1}{(i(\omega_v + \Gamma) - q^2 - \omega_c(n+1/2) + \mu)} \right) \quad (2.4.10)$$

Se a soma em n (ou m) fosse simplesmente substituída por uma integral, seguindo o que foi feito em (1.4.14), teríamos como resposta :

$$S(i\omega_v + i\Gamma) = \frac{\Gamma}{\eta u^2 (\omega_v + \Gamma)} \quad (2.4.11)$$

No entanto, a aproximação é muito grosseira, sendo equivalente a fazer $\omega_c = 0$, o que já representou um problema no capítulo anterior. É interessante então, que saibamos as suas

correções para ordens mais altas em " ω_c ". Para isto usa-se a fórmula da somatória de Euler-McLaurin

$$\sum_{n=0}^{A/\omega_c} f(n\omega_c)\omega_c = \int_0^A f(x)dx + \frac{\omega_c}{2} (f(A) - f(0)) + \frac{\omega_c^2}{12} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_A - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \right\} \quad (2.4.12)$$

Se a função $f(x)$ for tal que ela e todas as suas derivadas se anulem no infinito, como é o caso de (2.4.9) e (2.4.10), então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n\omega_c)\omega_c = \int_0^{\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(0)\omega_c - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \omega_c^2 + o(\omega_c^3) \quad (2.4.13)$$

Assim em primeira ordem de ω_c :

$$S(i\omega_p + i\Gamma) = \frac{\Gamma + \alpha(\Gamma)}{\eta u^2 (\omega_p + \Gamma)} \quad (2.4.14)$$

com $\alpha(\Gamma)$ definido como :

$$\alpha(\Gamma) = \text{Im} \left\{ i\eta u^2 \frac{\omega_c m \sqrt{2m}}{4(2\pi)^2} \int dq \frac{1}{(i(\omega_p + \Gamma) - q^2 - \omega_c/2 + \mu)} \right\} \quad (2.4.15)$$

2.4.2 Cálculo de $\Lambda_L(\omega_c, T)$

Substituindo (2.4.14) em (2.4.5) vemos que :

$$\Lambda_L(\omega_c, \tau) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{\nu} \frac{\Gamma + \alpha(\Gamma)}{(\omega_{\nu} - \alpha(\Gamma)) \eta u^2} \quad (2.4.16)$$

Considerando o numerador em ordem mais baixa de ω_c

$$\Gamma + \alpha(\Gamma) = \text{Im} \left\{ i \eta u^2 \frac{m \sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \int ds \int dq \frac{1}{(i(\omega_{\nu} + \Gamma) - q^2 - s + \mu)} \right\} \quad (2.4.17)$$

e $\Gamma = 0$ como primeira aproximação no lado direito de (2.4.17) , resulta :

$$\Lambda_L(\omega_c, \tau) = \frac{\lambda m \sqrt{2m}}{\beta (2\pi)^2} \sum_{\nu} \int ds dq \frac{\omega_{\nu}}{(\omega_{\nu} - \alpha(\Gamma))(i\omega_{\nu} - q^2 - s + \mu)(-i\omega_{\nu} - q^2 - s + \mu)} \quad (2.4.18)$$

A integral em "q" de $\alpha(0)$ na equação (2.4.15) pode ser calculada facilmente usando o plano complexo :

$$\alpha(0) = -\eta u^2 \frac{m \sqrt{2m} \omega_c \text{sgn} \omega_{\nu}}{16\pi \sqrt{\mu + i\omega_{\nu}}} \quad (2.4.19)$$

E , portanto podemos aproximar :

$$\alpha(0) = -\eta u^2 \frac{m \sqrt{2m} \omega_c \text{sgn} \omega_{\nu}}{16\pi \sqrt{\mu}} \quad (2.4.20)$$

onde se considera que a contribuição maior venha da região $|\omega_y| \ll \mu$.

Seguindo o procedimento de (1.5.6), ou seja, realizar a troca de variáveis ;

$$\begin{aligned} x &= q^2 + S - \mu & x \in [-\omega_D, \omega_D] \\ y &= q^2 - S & y \in [-x, x] \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

chegamos a :

$$\Lambda_L(\omega_c, T) = \frac{\lambda 2m\beta_0}{\beta(2\pi)^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int dx \frac{\omega_\nu}{\omega_\nu + a \operatorname{sgn} \omega_\nu} \frac{1}{(\omega_\nu - x)(-\omega_\nu - x)} \quad (2.4.21)$$

com

$$a = \eta u^2 \frac{m\omega_c}{8\pi\nu_0} \quad (2.4.22)$$

Neste momento convém fazer uma pequena modificação na aplicação do "cut off", isto é a restrição no intervalo de integração imposta pelo modelo. É conhecido na literatura que é pouco importante se aplicamos este "cut off" nas variáveis da energia $E_n(q)^{(0)}$ ou em $\omega_\nu^{(20)}$. Assim vamos permitir que ω_D vá ao infinito na integral em X de (2.4.21), que converge e é simples de resolver, e restringiremos a soma em ν a $-\omega_D < \omega_\nu < \omega_D$.

É questionável que integremos X irrestritamente após já

termos considerado em (2.4.21) uma aproximação baseada no seu intervalo finito. No entanto é de fácil verificação que a diferença entre integrarmos "s" e "q" de $-\infty$ a $+\infty$ e fazê-lo via (1.5.3) com $\omega_D \rightarrow \infty$ é de ordem μ^2 , portanto pouco importante dentro da ordem de aproximação que vem sendo adotada.

Assim, usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + \omega_\nu^2} = \frac{\pi}{|\omega_\nu|} \quad (2.4.23)$$

resulta :

$$\begin{aligned} \Lambda_L(\omega_c, T) &= \lambda \frac{2m\beta_0\pi}{\beta(2\pi)^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sgn } \omega_\nu}{\omega_\nu + a \text{sgn } \omega_\nu} \\ &= \lambda \frac{2m\beta_0}{2\pi\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{|\omega_\nu| + a} \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Como $\omega_\nu = (2n+1)\pi/\beta$ a expressão acima é equivalente a :

$$\Lambda_L(\omega_c, T) = \lambda \frac{2m\beta_0}{2\pi\beta} \oint \text{tgh}\left(\frac{\beta z}{2}\right) \frac{\beta}{4\pi i} \frac{i}{(z+ia)} dz \quad (2.4.25)$$

O contorno de integração é o da figura 15a podendo ser distorcido até a forma da figura 15b. É bom notar que isto é possível pois $z = ia$ não é um polo.

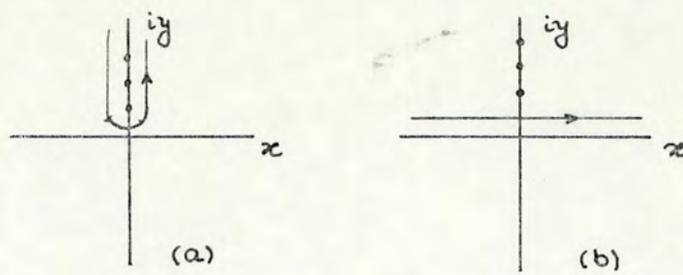


fig.15

ou seja

$$\Lambda_L(\omega_c, T) = \frac{\lambda 2m p_0}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tgh}\left(\frac{\beta z}{2}\right) \frac{\beta}{4\pi} \frac{i}{z+ia} dz \quad (2.4.26)$$

parte imaginária de (2.4.26) é nula (é uma integral de integrando ímpar em intervalo simétrico). Portanto usando o cut off:

$$\Lambda_L(\omega_c, T) = \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \int_0^{\omega_D} \text{tgh}\left(\frac{\beta z}{2}\right) \frac{z}{z^2 + a^2} dz \quad (2.4.27)$$

2.5 A CONTRIBUIÇÃO DOS DIAGRAMAS CRUZADOS

A soma da figura 6 tem a seguinte representação, em termos de $G^0(\vec{r}, \vec{r}', W+i\Gamma)$:

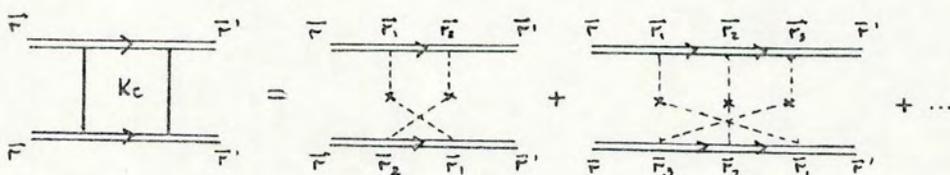


fig.16

Para mostrar como pode ser feita, vamos, antes de mais nada, analisar com cuidado o primeiro termo da soma. Com o auxílio

das regras de Feynman para a decodificação de diagramas este é escrito :

$$(\eta u^2)^2 \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 G(\vec{r}', \vec{r}_1, W+i\Gamma) G(\vec{r}', \vec{r}_2, -W-i\Gamma) G(\vec{r}_2, \vec{r}_1, W+i\Gamma) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, -W-i\Gamma) Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, W+i\Gamma) \quad (2.5.1)$$

onde da equação (1.3.8) para $\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}', W)$ obtém-se :

$$Q(\Delta\vec{r}, W+i\Gamma) = \left(\frac{m\omega_c}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 e^{-\frac{m\omega_c}{2}(\Delta z^2 + \Delta y^2)} \sum_{n,n'} L_n\left(\frac{m\omega_c}{2}(\Delta z^2 + \Delta y^2)\right) \times L_{n'}\left(\frac{m\omega_c}{2}(\Delta z^2 + \Delta y^2)\right) \int dq dp_z e^{ip_z \Delta z} \frac{1}{2(W+i\Gamma - E_n(\frac{q+p_z}{2}) + \mu)(-W-i\Gamma - E_{n'}(\frac{q-p_z}{2}) + \mu)} \quad (2.5.2)$$

O fato desta parte interna do diagrama ser somente dependente da diferença de coordenadas nos possibilitará calcular a soma completa sem maiores esforços. Note que se pegarmos um termo de ordem mais alta

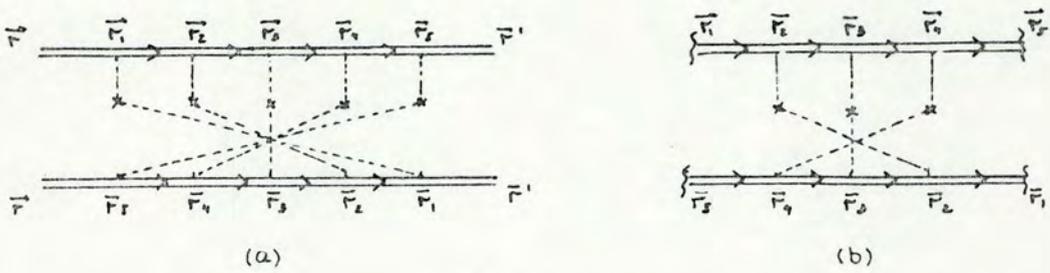


fig.17

e separarmos apenas a parte interna (fig. 17b), ou seja sem as quatro funções de Green externas e das duas últimas integrais , resulta

$$(\eta u^2)^3 \int Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, W+i\Gamma) Q(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, W+i\Gamma) Q(\vec{r}_3 - \vec{r}_4, W+i\Gamma) Q(\vec{r}_4 - \vec{r}_2, W+i\Gamma) d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \quad (2.5.3)$$

e usando que

$$Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, w + i\Gamma) = \int e^{i\vec{p} \cdot \Delta\vec{r}} Q(\vec{p}, w + i\Gamma) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.5.4)$$

nós obtemos integrando nas variáveis de posição na equação (2.5.3):

$$(\eta u^2)^3 \int e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} (Q(\vec{p}, w + i\Gamma))^4 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.5.5)$$

Deste modo a soma da figura 16 é simplesmente:

$$\begin{aligned} K_c(\vec{r}_1, \vec{r}_2, w + i\Gamma) = & \eta u^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_1, w + i\Gamma) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, -w - i\Gamma) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \{ \eta u^2 Q(\vec{p}, w + i\Gamma) + \\ & + (\eta u^2 Q(\vec{p}, w + i\Gamma))^2 + \dots \} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} G(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -w - i\Gamma) G(\vec{r}_2, \vec{r}_1, w + i\Gamma) d^3r_1 d^3r_2 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned} = & \eta u^2 \int G(\vec{r}_1, \vec{r}_1, w + i\Gamma) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, -w - i\Gamma) \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \eta u^2 Q(\vec{p}, w + i\Gamma) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} + \\ & \times G(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -w - i\Gamma) G(\vec{r}_2, \vec{r}_1, w + i\Gamma) d^3r_1 d^3r_2 \end{aligned}$$

2.7.1 Cálculo da transformada de Fourier de $Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, w + i\Gamma)$

Podemos ver que a parte em "z" de (2.5.2) já está na forma de Fourier, resta então calcular a transformada nas variáveis "x" e "y". Definindo então :

$$F_{nn'}(\vec{P}) = \int e^{-i\vec{P}_\perp \cdot \Delta\vec{F}_\perp} e^{-\frac{m\omega_c(\Delta\vec{F}_\perp)^2}{2}} \ln\left(\frac{m\omega_c(\Delta\vec{F}_\perp)^2}{2}\right) \ln'\left(\frac{m\omega_c(\Delta\vec{F}_\perp)^2}{2}\right) d^3\Delta\vec{F}_\perp \quad (2.5.7)$$

onde $\vec{V}_\perp = (V_x, V_y, 0)$, resulta :

$$F_{nn'}(\vec{P}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-i p_\perp r_\perp \sin\theta} d\theta e^{-\frac{m\omega_c r_\perp^2}{2}} \ln\left(\frac{m\omega_c r_\perp^2}{2}\right) \ln'\left(\frac{m\omega_c r_\perp^2}{2}\right) r_\perp dr_\perp \quad (2.5.8)$$

As variáveis de integração foram escolhidas de forma a satisfazer $\vec{P} \cdot \vec{F} = p \cdot r \cdot \cos\theta' = p \cdot r \cdot \sin\theta$

A integral em θ pode sofrer uma mudança de variável $\theta \rightarrow \theta - \pi$ resultando em

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i p \cdot r \sin\theta'} d\theta' = 2J_0(p \cdot r) \quad (2.5.9)$$

com $J_0(pr)$ a função de Bessel de primeira classe e ordem zero, assim :

$$F_{nn'}(\vec{P}) = \int_0^\infty 2\pi e^{-\frac{m\omega_c r^2}{2}} \ln\left(\frac{m\omega_c r^2}{2}\right) \ln'\left(\frac{m\omega_c r^2}{2}\right) r J_0(pr) dr \quad (2.5.10)$$

Cuja solução é tabelada :

$$F_{nn'}(\vec{P}) = 2\pi (-1)^{n+n'} e^{-p^2/(2m\omega_c)} \ln^{n-n'}\left(p^2/(2m\omega_c)\right) \ln'^{n-n'}\left(p^2/(2m\omega_c)\right) \quad (2.5.11)$$

Logo a transformada de Fourier de $Q(\Delta\vec{r}, W+i\Gamma)$ é:

$$Q(\vec{p}, w+i\Gamma) = \frac{m\omega_c}{2(2\pi)^3} \sum_{\eta, \eta'} F_{\eta\eta'}(p_L) \int dq \frac{1}{(w+i\Gamma - E_{\eta}(\frac{q+p_L}{2}) + \mu)(-w-i\Gamma - E_{\eta'}(\frac{q-p_L}{2}) + \mu)} \quad (2.5.12)$$

Como podemos notar, realizar a integral em " \vec{p} " de (2.5.6) não é uma tarefa muito simples. Por isso usaremos a Aproximação do Polo de Difusão, muito comum em cálculos de localização de elétrons em potenciais desordenados.

É de fácil constatação que o denominador em (2.5.6) zera para $(\vec{p}, w)=0$. A aproximação de polo de difusão consiste em expandir $Q(\vec{p}, w+i\Gamma)$ em torno deste ponto, retendo apenas as primeiras correções não nulas mediante a suposição que a maior contribuição para a integral provém desta região.

Afortunadamente, apesar do polo esta integral converge em três dimensões.

Novamente vamos apenas nos concentrar no problema à temperatura finita. A expansão completa de $Q(\vec{p}, i\omega_{\nu} + i\Gamma)$ se encontra no apêndice III, por se tratar de uma extensa quantidade de cálculos. Aqui apresentaremos unicamente o resultado:

$$Q(p_L, p_z, i\omega_{\nu} + i\Gamma) = \frac{1}{\eta u^2} - \frac{\omega_{\nu}}{\eta u^2 \Gamma} - \frac{\mu p_0}{12\pi \Gamma^3} \operatorname{sgn} \omega_{\nu} p_z^2 - \frac{\mu p_0 \operatorname{sgn} \omega_{\nu} p_L^2}{12\pi \Gamma^3 (1 - (\omega_c/2\Gamma)^2)} \quad (2.5.13)$$

O próximo passo é calcular o segundo termo do lado direito de (2.2.5) ou a contribuição dos diagramas cruzados propriamente dita.

2.5.2 Cálculo de $\Lambda_c(\omega_c, T)$

Vamos começar por fazer algumas modificações no produto das duas funções de Green que primeiro aparecem em (2.5.6).

Escrevendo :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_1, i\omega_c + \Gamma) G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, -i(\omega_c + \Gamma)) = \frac{(m\omega_c)^2}{(2\pi)^4} e^{im\omega_c((x^1-x)(y^1+y)) - \frac{m\omega_c}{2}[(x^1-x)^2 + (y^1-y)^2]} \times \sum_{n, n'} L_n\left(\frac{m\omega_c}{2}((x^1-x)^2 + (y^1-y)^2 + x_{12}(x_{12}^2 + x) + y_{12}(y_{12}^2 + y))\right) L_{n'}(\dots) \int \frac{dq dq'}{(\omega + i\Gamma - E_n(q) + \mu)(-\omega - i\Gamma - E_{n'}(q') + \mu)} e^{i(q+q')(x-z) - i(q-q')z z_{12}} \quad (2.5.14)$$

$$\times e^{-\frac{m\omega_c}{8}(z_{12}^2 + y_{12}^2 + 2iz_{12}y_{12})}$$

onde foram usadas as seguintes definições :

$$\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 \quad \vec{r}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.5.15)$$

Se for suposto que a expressão (2.5.14) não dependa de \vec{r}_{12} , a menos da última exponencial, então :

$$G^0(\vec{r}_1, \vec{r}_1, i\omega_c + i\Gamma) G^0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, -i\omega_c - i\Gamma) \approx e^{-\frac{m\omega_c}{8}(z_{12}^2 + y_{12}^2 + 2iz_{12}y_{12})} G^0(\vec{r}_1, \vec{r}, i\omega_c + i\Gamma) G^0(\vec{r}_1, \vec{r}, -i\omega_c - i\Gamma) \quad (2.5.16)$$

Esta aproximação torna o problema extremamente simples, pois será possível aplicar o resultado anterior

$$\int G^0(\vec{r}', \vec{r}, i\omega_c + i\Gamma) G^0(\vec{r}', \vec{r}, -i\omega_c - i\Gamma) \Delta^*(\vec{r}') d^3r' = \delta(i\omega_c + i\Gamma) \Delta^*(\vec{r}) \quad (2.5.17)$$

com $\Delta(\vec{r})$ dada em (1.4.10) e $S(i\omega_\nu + i\Gamma)$ já é conhecido da equação (2.4.6).

Olhando para

$$\int k_c(\vec{r}; \vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma) \Delta^*(\vec{r}) d^3r = \int \eta u^2 \int \frac{e^{i\vec{r} \cdot \vec{r}_{12}} \eta u^2 Q(\vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma)}{(1 - \eta u^2 Q(\vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma))} d^3p \times$$

$$\times e^{\frac{m\omega_c}{4}(x_{12}^2 + y_{12}^2)} d^3_{r_{12}} \int G^o(\vec{r}, \vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma) G^o(\vec{r}, \vec{r}, -i\omega_\nu - i\Gamma) \Delta(\vec{r}) d^3r \quad (2.5.18)$$

$$\times \int G^o(\vec{r}, \vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma) G^o(\vec{r}, \vec{r}, -i\omega_\nu - i\Gamma) d^3r$$

vê-se que a integral em " \vec{r} " produz um $S(i\omega_\nu + i\Gamma)$, a função $\Delta^*(\vec{r})$ integrada com as duas funções de Green que sobram dá origem a outro $S(i\omega_\nu + i\Gamma)$. Sendo a expressão (2.5.18), então, proporcional ao quadrado deste.

Desprezando a primeira ordem em " ω_c ", $S(i\omega_\nu + i\Gamma)$ pode ser representado unicamente por (2.4.11) e ademais se tomarmos ordem zero em ω_ν , devido a aproximação do polo que viemos seguindo, (2.5.18) torna-se:

$$\Lambda_c(\omega_c, \Gamma) \Delta^*(\vec{r}) = \int e^{\frac{-m\omega_c}{4}(x_{12}^2 + y_{12}^2)} \int \frac{e^{i\vec{r} \cdot \vec{r}_{12}} \eta u^2 Q(\vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma) d^3p d^3_{r_{12}} \Delta^*(\vec{r})}{1 - \eta u Q(\vec{r}, i\omega_\nu + i\Gamma) (2\pi)^3} \quad (2.5.19)$$

Integrando em " \vec{r}_{12} " e substituindo (2.5.13) resulta:

$$\Lambda_c(\omega_c, \Gamma) = \frac{4\pi}{m\omega_c} (\eta u^2)^{-1} \int \frac{e^{-p_1^2/(m\omega_c)} \Gamma}{\omega_\nu + \frac{14p_0}{12\pi\Gamma^2} \eta u^2 \text{sgn} \omega_\nu p_1^2} \frac{d^2 p_1}{(2\pi)^2} \quad (2.5.20)$$

Onde se usou:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipz} dz = 2\pi \delta(pz)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx - (m\omega_c/4)x^2} dx = \sqrt{4\pi/(m\omega_c)} e^{-p^2/(m\omega_c)} \quad (2.5.21)$$

A integral em " \vec{p}_\perp " pode ser resolvida em perturbação de c expandindo o denominador do integrando em torno de $\vec{p}_\perp = 0$.

Assim,

$$I = \int \frac{e^{-p_\perp^2/(m\omega_c)}}{\omega_\nu + \zeta \operatorname{sgn} \omega_\nu p_\perp^2} d^2 p_\perp = 2\pi \cdot \frac{1}{2\omega_\nu} (m\omega_c - \frac{\zeta}{\omega_\nu} (m\omega_c)^2 + \dots) \quad (2.5.22)$$

ou seja aproximadamente

$$I \approx \frac{\pi m \omega_c}{\omega_\nu + \zeta m \omega_c \operatorname{sgn} \omega_\nu} \quad (2.5.23)$$

se $\zeta m \omega_c / \omega_\nu$ é pequeno, com

$$\zeta = \frac{\mu_0 \eta u^2}{12\pi r^2} \quad (2.5.24)$$

Resumindo, então, a contribuição dos termos cruzados é dada por, seguindo o procedimento da seção 2.4.2:

$$\begin{aligned}
\Lambda_c(\omega_c, T) &= \mathbb{D}i\omega_\nu \frac{\Gamma}{\eta u^2} \frac{1}{(\omega_\nu + \zeta m \omega_c \operatorname{sgn} \omega_\nu)} \quad (2.5.25) \\
&= \frac{\lambda m \sqrt{2m}}{\beta (2\pi)^2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int ds dq \frac{\omega_\nu}{(\omega_\nu + \zeta m \omega_c \operatorname{sgn} \omega_\nu)(i\omega_\nu - q^2 - s + \mu)(-i\omega_\nu - q^2 - s + \mu)} \\
&= \frac{\lambda m p_0}{2\pi\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn} \omega_\nu}{\omega_\nu + \zeta m \omega_c \operatorname{sgn} \omega_\nu}
\end{aligned}$$

2.8 RESULTADO FINAL PARA $H_{c2}(T)$ PARA UM SUPERCONDUTOR COM IMPUREZAS

Como sabemos, o campo magnético crítico em função da temperatura é calculado a partir da equação (2.2.6). Nos é interessante apresentar esta equação na forma de (2.4.27) para que seja mais fácil comparar com o problema sem impurezas.

Eu digo então, que o campo magnético crítico considerando tanto diagramas de escada como diagramas cruzados é dado por :

$$\frac{2\pi^2}{\lambda m p_0} = \int_0^{\omega_0} \operatorname{tgh}\left(\frac{\beta x}{2}\right) \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{x}{x^2 + b^2} \right) dx \quad (2.6.1)$$

com

$$a = \frac{\eta u^2 m \omega_c}{8\pi v_0} \quad b = \frac{\mu_0 \eta u^2 m \omega_c}{12\pi \Gamma^2} \quad (2.6.2)$$

Esta solução é direta por comparação entre (2.5.25) e

(2.4.16).

Antes de mais nada vamos escrever estas duas constantes de uma forma mais conveniente. Para isto tomaremos as seguintes aproximações, primeiro que $\Gamma(T) = \Gamma(0)$ e ademais que (0) seja calculado somente até primeira ordem de " ηu^2 ".

Usando a equação (2.3.16) com as condições acima resulta :

$$\begin{aligned}
 i\Gamma(0) &= -Jm \eta u^2 \frac{m\omega_0}{(2\pi)^2} \sum_n \int dq \frac{1}{(\omega_n + i\delta \operatorname{sgn} \omega_n - E_n(q) + \mu)} \\
 &= \eta u^2 \frac{m\omega_0}{(2\pi)^2} \sum_n \int dq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i\delta \operatorname{sgn} \omega_n}{(\omega_n - E_n(q) + \mu)^2 + \delta^2}
 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Como a expressão

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{x^2 + \delta^2} \tag{2.6.4}$$

é uma das definições da função Delta de Dirac, segue que:

$$\Gamma(0) = \eta u^2 \frac{m\omega_0}{4\pi} \operatorname{sgn} \omega \sum_n \int dq \delta(\omega_n + \mu - E_n(q)) \tag{2.6.5}$$

Ou pelo apêndice I

$$\Gamma(0) = \eta u^2 \pi N(\omega + \mu) \operatorname{sgn} \omega \approx \eta u^2 \frac{m p_0}{2\pi} \operatorname{sgn} \omega \approx \Gamma^0 \operatorname{sgn} \omega, \tag{2.6.6}$$

onde $N(\mu) = m p_0 / (2\pi^2)$ é a densidade de estados por spin.

Portanto de agora em diante "a" e "b" são escritos:

$$a = \frac{\Gamma^0 \omega_c}{4\mu} \quad b = \frac{\mu \omega_c}{6\Gamma^0} \quad (2.6.7)$$

Voltando , agora, à expressão (2.6.1) vamos calcular qual é o valor do campo crítico à temperatura zero.

2.6.1 Campo crítico à temperatura zero

Para $\beta \rightarrow 0$ a equação (2.6.1) é

$$\frac{2\pi^2}{\lambda \mu \rho_0} = \int_0^{\omega_D} \left\{ \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{x}{x^2 + b^2} \right\} dx \quad (2.6.8)$$

ou seja,

$$\frac{1}{\lambda N(\mu)} = \frac{1}{2} (\ln(\omega_D^2 + a^2) + \ln(\omega_D^2 + b^2) - 2\ln(ab)) \quad (2.6.9)$$

Vamos analisar duas regiões distintas :

Região 1 : Supercondutores muito desordenados

Neste caso $\omega_D \gg a, b$ resultando então :

$$\omega_c^*(\omega) = \sqrt{24} \omega_0 e^{-1/(2\lambda N(\mu))} \quad (2.6.10)$$

E importante notar que este valor é independente da

quantidade de desordem. É isto é uma característica especial desta região onde os dois tipos de diagramas contribuem de forma parecida.

Região 2 : Supercondutores quase puros

Se $\omega_D \gg a$ e $b \gg \omega_D$ teremos

$$\frac{1}{\lambda N(\mu)} = \ln(\omega_D/a) \quad (2.6.11)$$

e, portanto :

$$\omega_c(0) = \frac{4\omega_D \mu}{\Gamma^0} e^{-1/\lambda N(\mu)} \quad (2.6.12)$$

Vemos que o resultado só leva em conta diagramas tipo "ladder". No limite em que Γ^0 tende a zero devemos recuperar o nosso resultado para o caso de supercondutores puros. Isto não é evidente apenas olhando para (2.6.12), que de fato diverge. Afortunadamente, a mesma divergência ocorria lá. Assim se formos seguir a linha da seção 1.5 podemos escrever (2.6.8) na região próxima a $\Gamma^0=0$ como

$$2\pi^2/(\lambda m \mu) = \int_{\omega_c/2}^{\omega_D} \frac{x}{(x^2 + a^2)} dx \quad (2.6.13)$$

E então

$$\omega_c(0) = \frac{2\omega_D e^{-1/\lambda N(\mu)}}{(1 + \mu/2\Gamma^0)} \quad (2.6.14)$$

Que é um resultado satisfatório no limite de desordem indo a zero.

2.6.2 Temperatura Crítica

Como na seção 1.6 devemos fazer $\omega_c=0$. Assim a equação (2.6.1) fica

$$(2\pi^2/(\lambda m p_0)) = 2 \int_0^{\omega_D} \operatorname{tgh}\left(\frac{\beta x}{2}\right) \frac{dx}{x} \quad (2.6.15)$$

e é imediato que de (1.6.4) e (1.6.8) que neste caso:

$$kT_c^* = \frac{\gamma}{\pi} 2\omega_D e^{-1/(2\lambda N(\mu))} \quad (2.6.16)$$

A temperatura assim calculada é absolutamente independente da quantidade de impurezas. Nesse sentido concordamos com o Teorema de Anderson, porém T_c não é a mesma do caso sem impurezas. Assim, em verdade há uma variação de T_c com a desordem, e esta variação é abrupta e se dá em uma região muito pequena ao redor de $\Gamma^0 = 0$.

E facilmente identificável a razão desta variação abrupta. No problema com impurezas o resultado final vem da consideração de dois termos que são, a soma de diagramas em escada e a soma daqueles multiplamente cruzados. O primeiro deles, como já vimos, no limite em que $\eta \rightarrow 0$ reproduz o resultado do capítulo 1, enquanto que a contribuição dos cruzados desaparece totalmente neste limite. Todavia, seja qual for a densidade de impurezas estes dois termos vão contribuir de forma exatamente igual quando $\omega_c = 0$.

2.6.3 Variação da curva $H_{c2}(T)$ com o nível de impurezas

Esta análise só é possível numericamente, já que como antes não se pode representar $H_{c2} = H_{c2}(T)$ analiticamente.

Aqui não é conveniente usar a expressão 2.6.1 mas sim usar diretamente 2.4.24 e 2.5.25:

$$1 = \frac{\lambda m p_0}{\pi \beta} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu+1)\pi\beta + a} + \frac{1}{(2\nu+1)\pi/\beta + b} \right) \right\}$$

$$\frac{2\pi^2}{\lambda m p_0} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu + 1/2 + a\beta/2\pi} + \frac{1}{\nu + 1/2 + b\beta/2\pi} \right) \quad (2.6.17)$$

Como esta expressão diverge deve ser aplicado o mesmo tipo de corte usado na seção 2.4.2, ou seja, $\omega_\nu < \omega_D$ e portanto $\nu \leq \omega_D \beta / 2\pi$

Assim:

$$\frac{2\pi^2}{\lambda m \rho_0} = \sum_{\nu=0}^{\omega_0 \beta / 2\pi} \left(\frac{1}{\eta + 1/2 + a\beta/2\pi} - \frac{1}{\eta + 1/2 + b\beta/2\pi} \right) \quad (2.6.18)$$

Sabemos que a campo zero temos

$$\frac{2\pi^2}{\lambda m \rho_0} = 2 \sum_{\nu=0}^{\omega_0 \beta_c / 2\pi} \frac{1}{\eta + 1/2} \sim 2 \ln \frac{\omega_0 \beta_c}{\pi} \quad (2.6.19)$$

se $\omega_0 \beta_c$ for suficientemente grande, com $\beta_c = 1/kT_c^*$.

Desta forma a equação 2.6.18 pode ser escrita:

$$2 \ln (T/T_c^*) = \sum_{\nu=0}^{\omega_0 \beta / 2\pi} \left(\frac{1}{(\eta + 1/2 + a\beta/2\pi)} - \frac{1}{(\eta + 1/2 + b\beta/2\pi)} - \frac{2}{(\eta + 1/2)} \right) \quad (2.6.20)$$

Que é muito conveniente para a análise numérica.

Para padronizar mais os resultados que serão apresentados em conjunto, a equação 2.6.20 é posta em termos das funções digama já definidas anteriormente:

$$\psi(x) = -C - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad (2.6.21)$$

Ou simplesmente, já que é possível tomar o limite $\omega_0 \rightarrow \infty$

$$2 \ln (T/T_c) = 2\psi(1/2) + \psi(1/2 + \omega_c (\Gamma^0/\mu) \beta / 8\pi) + \psi(1/2 + \omega_c \mu \beta / (12\pi\Gamma^0)) \quad (2.6.22)$$

Na figura abaixo temos algumas curvas $H_{c2}(T) \times T / T_c$ para diversos valores da razão

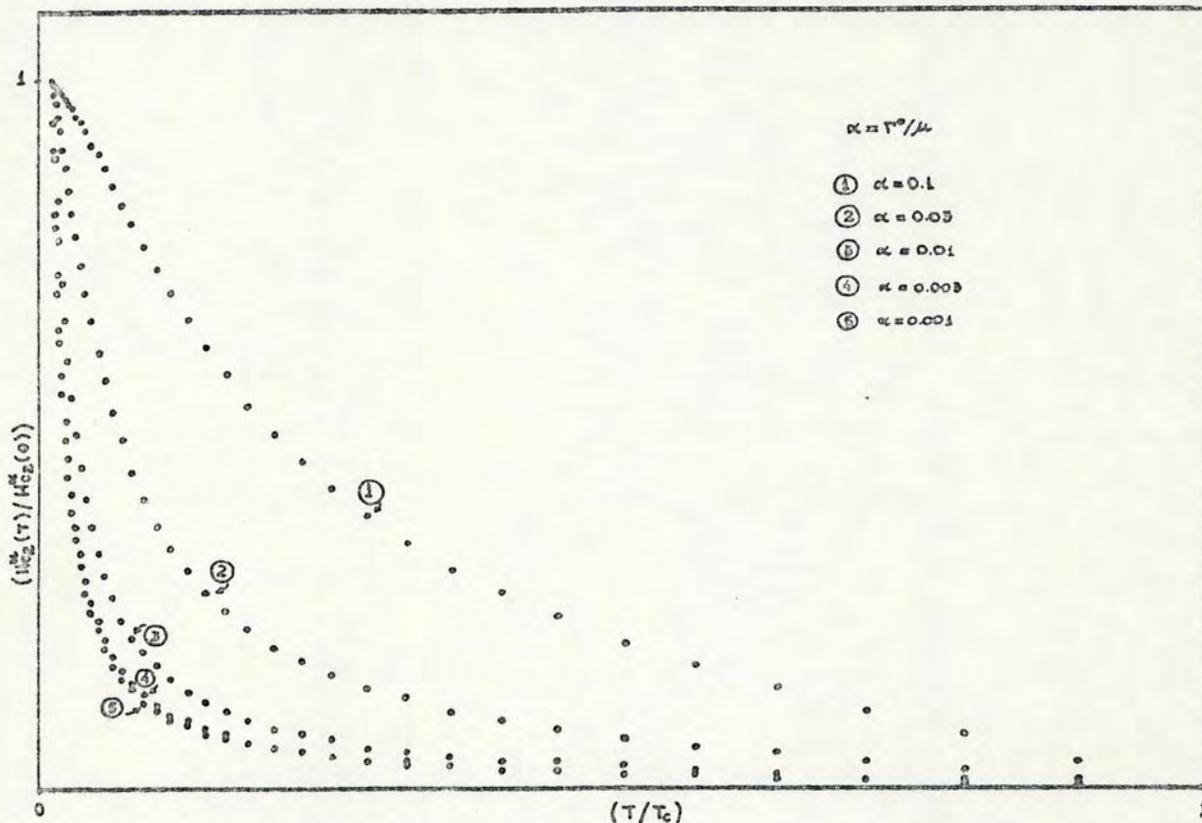


fig 18

3. CONCLUSÕES E RESULTADOS

O objetivo deste trabalho foi o cálculo do campo magnético crítico e a temperatura crítica para supercondutores tipo II. Basicamente dois pontos foram explorados. Primeiro, o fato de usarmos as autofunções exatas do problema de um elétron em um campo magnético, segundo a aproximação de somar diagramas em escada e cruzados quando da introdução de impurezas, em analogia ao cálculo da resistividade residual de um metal.

No caso do supercondutor limpo existe um sério problema que é a necessidade da introdução do campo de forma arbitrária para evitar uma divergência. Apesar disso, a comparação da curva $H_{c2} = H_{c2}(T)$, assim obtida, com outros autores, mostra um bom acordo. Deve-se ressaltar que estas três curvas da figura 3 não estão necessariamente na mesma escala, e sim em escala reduzida em relação ao seu próprio máximo. Assim $H_{c2}(0)$ calculada no capítulo 1, a princípio, não é igual àquele calculado pelos outros autores, todavia já que o campo é introduzido de forma arbitrária podemos dizer que o limite inferior da integral em (1.6.4) é $C\omega_c$ ao invés de $\omega_c/2$, de forma que, com esta liberdade em C, a curva possa ser ajustada.

Podemos resumir os resultados do capítulo 1 da seguinte forma:

Aproximações	$\omega_c \ll \omega_D \ll \mu$
Equação para o campo crítico.	$\ln(\tau/\tau_c) = \psi(1/2) - \psi(1/2 + C\omega_c\beta/(2\pi))$
Temperatura crítica	$kT_c = \frac{\delta}{\pi} 2\omega_D e^{-1/(\lambda N(\mu))}$
Campo magnético a T=0	$H_{c2} = \frac{m\omega_D}{ec} e^{-1/(\lambda N(\mu))}$

A equação apresentada para o campo crítico é equivalente a (1.6.9). Esta forma resulta de integrar (1.6.1) irrestritamente em x' , aplicar o cut off na soma em n e escrever esta soma em

termos da função digama.

O resumo dos resultados do capítulo 2 é:

Aproximações	$\omega_c \ll \omega_D \ll \mu \quad \Gamma \ll \mu$	
	$\omega_D \gg a, b$	$b \gg \omega_D \gg a$
Equação para o campo crítico	$2 \ln(T/T_c) = \psi(1/2) - \psi(1/2 + \frac{\omega_c \Gamma^0 \beta}{8\pi\mu}) +$ $+ \psi(1/2) - \psi(1/2 + \frac{\omega_c \mu \beta}{12\pi\Gamma^0})$	
Temperatura crítica	$kT_c^* = \frac{\delta}{\pi} 2\omega_D e^{-1/(2\lambda N(\mu))}$	
Campo magnético crítico a T=0	$H_{c2}(0) = \frac{m}{e} \sqrt{24} \omega_D e^{-1/(2\lambda N(\mu))}$	$H_{c2}(0) = \frac{4\mu}{\Gamma^0} \omega_D e^{-1/(2\lambda N(\mu))}$

O fato da temperatura crítica T_c não variar com o nível de impurezas faz com que o limite da equação acima para o campo crítico quando $\Gamma^0 \rightarrow 0$, ou seja, no limite puro, não seja igual aquela encontrada no capítulo 1. No entanto, devemos ter bem claro que estivemos sempre trabalhando em uma situação onde $\omega_c < \Gamma^0$. De forma que, a princípio, não podemos tomar arbitrariamente pequeno.

Quanto a comparação de nossos resultados com os trabalhos anteriores vemos que, o fato de somarmos tanto diagramas em escada como os cruzados distingue o nosso trabalho como original. Isto tem grandes implicações nos cálculos de T_c e $H_{c2}(T=0)$ que resultam ser muito diferentes daqueles correspondentes a

considerar somente um tipo de diagrama. Além disso a forma da curva $H_{c2} = H_{c2}(T)$ muda de modo drástico. Por exemplo, se usássemos somente diagramas em escada teríamos

$$\ln(\tau/\tau_c) = \psi(1/2) - \psi(1/2 + \omega_c(\Gamma^0/\mu)\beta/8\pi)$$

com T_c igual àquele calculado no capítulo 1. Esta curva é tal que $\frac{\partial^2 H_{c2}}{\partial T^2} < 0$ no intervalo $[0, T_c]$ e, portanto similar a fig.3 e aos resultados de G. Rickayzen⁽²²⁾ e E. Helfand & N. R. Werthamer⁽¹²⁾ que usam unicamente diagramas em escada. O tratamento de Rickayzen para o problema é muito parecido ao que desenvolvemos na seção 2.4., com uma restrição que, possivelmente devido ao fato de não haver usado os níveis exatos de Landau, achou uma dependência do tipo $H_{c2} \propto (T_c - T)^{1/2}$ para $T \simeq T_c$ quando sabemos que esta é linear.

A nossa curva final possui a concavidade invertida e é semelhante a apresentada por G. Kotliar & A. Kapitulnik⁽²³⁾ em seu trabalho recente no qual se propõem a estudar os efeitos de grande desordem nas propriedades supercondutoras de metais desordenados. Como neste caso os formalismos são muito diferentes vou me restringir somente a este comentário qualitativo das curvas.

APÊNDICE I. CÁLCULO DA DENSIDADE DE ESTADOS POR SPIN DE UM GÁS DE ELÉTRONS NÃO INTERAGENTES EM UM CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.

A densidade de estados é definida como

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_i \delta(E - E_n(q)) \quad (I.1)$$

onde $\{i\}$ significa a soma sobre todos os estados possíveis. Colocando a soma em termos dos números quânticos do problema (1.3.4) resulta :

$$N(E) = \frac{1}{V} \sum_k \sum_n \sum_q \delta(E - E_n(q)) \quad (I.2)$$

A soma em "k" é justamente a degenerescência de cada um dos Níveis de Landau e é $g = \frac{m\omega_c L^2}{2\pi}$, no autovalor "q" na verdade temos a integral $(L/2\pi) \int dq$, já que é contínuo.

Assim,

$$N(E) = \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sum_n \int_0^\infty dq \delta(E - (n+1/2)\omega_c - q^2/2m) \quad (I.3)$$

com $L^3 = V$.

Trocando de variável $x=q/2m$:

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x}} \delta(E - (n+1/2)\omega_c - x) \\ &= \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2} \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(E - (n+1/2)\omega_c)}{\sqrt{E - (n+1/2)\omega_c}} \end{aligned} \quad (I.4)$$

Como o que nos interessa aqui é $E = \mu$ e sabemos que $\mu \gg \omega_c$ façamos que:

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{m\sqrt{2m}}{(2\pi)^2} \int_0^{\mu} dy \frac{1}{\sqrt{\mu - y}} \\ &\approx \frac{m\sqrt{2m\mu}}{2\pi^2} = \frac{m\mu_0}{2\pi^2} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Que é aproximadamente a mesma densidade de estados que teria o gás se não houvesse o campo magnético. É bom ressaltar que se trata da densidade de estados por spin, ou seja, não se considerou a degenerescência de spin que contribuiria com um fator 2 no resultado.

APÊNDICE II. CÁLCULO NUMÉRICO DA FUNÇÃO $H_{c2} = H_{c2}(T)$

II.1 Supercondutores limpos

A curva que deve ser calculada é proveniente da expressão (1.6.9), isto é:

$$\ln(\tau/\tau_c) = \int_0^{\omega_c \rho/4} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} dx \quad (\text{II.1})$$

O modo mais simples de fazê-lo é através da equação diferencial que resulta de derivarmos esta expressão em relação a "T". Esta derivada é :

$$1/T = \frac{-\operatorname{tgh}(\omega_c(T)/4kT) \left(\frac{\omega_c(T)}{4kT}\right)'}{\omega_c(T)/4kT} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{Para } y(T) = \omega_c(T)/4kT \quad (\text{II.3})$$

a equação diferencial será então:

$$y'(T) = -\frac{1}{T} y(T) / \operatorname{tgh}(y(T)) \quad (\text{II.4})$$

Com a condição inicial que $Y(T_c)=0$. Sendo então "Tc" o único parâmetro de entrada do nosso programa .

A função $Y(T)$ é calculada usando o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. O programa é o seguinte:

```
REM    CALCULO DE H(T) USANDO RUNGE-KUTTA DE 4 ORDEM

      DEF FNA(X,Y)=-Y/X/(((1-EXP(-2*Y))/(1+EXP(-2*Y))))
      DIM T(500),Y(500),H(500)
      T=1:Y=.00001:N=100
      H=-T/N
      FOR I=1 TO N
      T(I)=T:Y(I)=Y
      H(I)=Y(I)*T(I)
      K1=FNA(T,Y)*H
      K2=FNA(T+H/2,Y+K1/2)*H
      K3=FNA(T+H/2,Y+K2/2)*H
      K4=FNA(T+H,Y+K3)*H
      Y=Y(I)+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6:T=T+H
      NEXT I

REM    MONTAGEM DO GRAFICO

      SCREEN 2
      LINE (20,10)-(20,180):LINE (20,10)-(630,10)
      LINE (20,180)-(630,180):LINE (630,180)-(630,10)
      FOR J=1 TO N-1
      FOR R=.1 TO 2.5 STEP .1
      CIRCLE(T(J)/T(1)*610+20,180-H(J)/1.1/H(N-1)*170),R,,,,.5:NEXT
      NEXT J

REM    AS CURVAS "G" E "GL" SAO DE GORKOV E GINZBURG-LANDAU

      FOR T=0 TO 1 STEP 0.01
      G=(1.77-0.43*T^2+0.07*T^4)*(1-T^2)/1.77
      GL=(1-T^2)*(1+T^2)
      PSET(T*610+20,180-170/1.1*G)
      PSET(T*610+20,180-170/1.1*GL)
      NEXT T
560  IF INKEY$="" THEN 560
```

APÊNDICE III. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA EXPANSÃO DE
 $Q(p, i(\omega_\nu + \Gamma))$ EM TORNO DE $\vec{p} \approx 0$

De (2.5.12) temos :

$$Q(\vec{P}, i(\omega_\nu + \Gamma)) = \frac{m\omega_c}{2(2\pi)^2} \sum_{n, n'} (-i)^{n+n'} e^{-p_L^2 / 2m\omega_c} L_n^{n'-n} \left(\frac{p_L^2}{2m\omega_c} \right) \times$$

$$\times L_{n'}^{n-n'} \left(\frac{p_L^2}{2m\omega_c} \right) \int dq \frac{1}{(i(\omega_\nu + \Gamma) - E_n((q+p_z)/2) + \mu)(-i(\omega_\nu + \Gamma) - E_{n'}((q-p_z)/2) + \mu)} \quad (\text{III.1})$$

Primeiro vamos expandir

$$I_{nn'} = \int dq \frac{1}{(i(\omega_\nu + \Gamma) - E_n((q+p_z)/2) + \mu)(-i(\omega_\nu + \Gamma) - E_{n'}((q-p_z)/2) + \mu)} \quad (\text{III.2})$$

Trocando de variáveis $y = q - p_z$ resulta :

$$I_{nn'} = \int dy \frac{1}{(i(\omega_\nu + \Gamma) - E_n(y/2 + p_z) + \mu)(-i(\omega_\nu + \Gamma) - E_{n'}(y/2) + \mu)} \quad (\text{III.3})$$

Definindo a função $f(p)$ como

$$f(p_z) = 1 / (i(\omega_\nu + \Gamma) - \omega_c(n + 1/2) - (y/2 + p_z)^2 / 2m + \mu) \quad (\text{III.4})$$

e expandindo-a em série de MacLaurin :

$$f(p_z) = \frac{1}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)} + \frac{\gamma/(2m) p_z}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1/m}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)^2} + \frac{2(\gamma/2m)^2}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)^3} \right) p_z^2 \quad (\text{III.5})$$

Ao substituírmos $f(p_z)$ em (III.3) vemos que o termo linear em " p_z " desaparece, pois a integral em " y " é de integrando simétrico.

Portanto até a segunda ordem em " p_z " temos :

$$I_{nn'} = \int \frac{dy}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_{n'}(y/z) + \mu)} + \int \frac{1}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)^2} \times \frac{p_z^2 / 2m dy}{(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_{n'}(y/z) + \mu)} + \int \frac{2(\gamma/2m)^2 dy}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/z) + \mu)(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_{n'}(y/z) + \mu)} \frac{p_z^2}{2} \quad (\text{III.6})$$

A outra parte que deve ser expandida é :

$$J = \sum_{n, n'} (-1)^{n+n'} e^{-p^2/(2m\omega c)} L_n^{n-n'}(p^2/(2m\omega c)) L_{n'}^{n-n'}(p^2/(2m\omega c)) I_{nn'} \quad (\text{III.7})$$

Substituindo a representação por série da exponencial e dos polinômios de Laguerre:

$$J = \sum_{n, n'} (-1)^{n+n'} \sum_r \frac{(-x)^r}{r!} \left\{ \theta(n-n'+1) \sum_{s=n-n'}^n \sum_{z=0}^{n'} \frac{n! n'! (-1)^{s+z} x^{s+z} / s! z!}{(n-s)! (n'-z)! (n-n'+z)! (n'-n+s)!} + \theta(n'-n) P_{nn'} \right\} I_{nn'} \quad (\text{III.8})$$

Nesta expressão $\theta(0)=0$, $x=p^2/(2\omega c m)$ e o símbolo $P_{nn'}$ representa a mesma soma acima em "s" e "z" com "n" e "n'" trocados.

Tomando (III.8) em primeira ordem em "x" :

$$J = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nn'} + \sum_{n,n'=0}^{\infty} (n\theta(n)\delta_{n,n'+1} + n'\theta(n')\delta_{n',n+1} - (2n+1)\delta_{n,n'}) \frac{p_L^2}{(2m\omega c)} \right\} \times I_{nn'} \quad (III.9)$$

O resultado final é, pegando somente os termos de ordem mais baixa :

$$Q(p_L, p_z, i(\omega\nu + \Gamma)) = C_0 + C_1 p_z^2 + C_2 p_L^2 \quad (III.10)$$

com :

$$C_0 = \frac{m\omega c}{2(2\pi)^2} \sum_n \int \frac{dy}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)}$$

$$C_1 = \frac{m\omega c}{2(2\pi)^2} \sum_n \int \frac{dy/2m}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)^2 (-i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)} +$$

$$+ \sum_n \int \frac{(y/2m)^2 dy}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)} \quad (III.11)$$

$$C_2 = \frac{m\omega c}{2(2\pi)^2} \sum_{n,n'} \int dy \frac{n\theta(n)\delta_{n,n'+1} + n'\theta(n')\delta_{n',n+1}}{(i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)(-i(\omega\nu + \Gamma) - E_n(y/2) + \mu)}$$

O coeficiente C_0 pode ser escrito usando (2.4.14) já que $C_0 = S(i\omega\nu + i\Gamma)$, assim :

$$C_0 = \frac{\Gamma}{\eta \gamma^2 (\omega \nu + \Gamma)} \quad (\text{III.12})$$

Os demais são calculados explicitamente .

III.1 CÁLCULO DE C₁

Definindo as seguintes integrais

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{1}{(i(\omega \nu + \Gamma) + \varepsilon - E_n(q) + \mu)(-i(\omega \nu + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} = I_0(\eta, \varepsilon)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q^2/m}{(i(\omega \nu + \Gamma) + \varepsilon - E_n(q) + \mu)(-i(\omega \nu + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} = I_1(\eta, \varepsilon) \quad (\text{III.13})$$

pode-se demonstrar facilmente que :

$$C_1 = \frac{\omega \varepsilon}{2(z\pi)^2} \left(-\frac{d}{d\varepsilon} \sum I_0(\eta, \varepsilon) + \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \sum I_1(\eta, \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} \quad (\text{III.14})$$

Assim ,

$$I_0 = \sqrt{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2)} \quad (\text{III.15})$$

com :

$$x_1 = \sqrt{i(\omega\nu + \Gamma) - (\eta + 1/2)\omega_c + \mu + \epsilon}$$

$$x_2 = \sqrt{-i(\omega\nu + \Gamma) - (\eta + 1/2)\omega_c + \mu} \quad (\text{III.16})$$

Que integrando no semiplano complexo superior resulta :

$$I_0 = \sqrt{2m} \frac{\pi i \operatorname{sgn} \omega_\nu}{2i(\omega\nu + \Gamma) + \epsilon} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = I_0(\eta, \epsilon) \quad (\text{III.17})$$

Da mesma maneira , para I obtém-se :

$$I_1 = 2\sqrt{2m} \frac{\pi i \operatorname{sgn} \omega_\nu}{2i(\omega\nu + \Gamma) + \epsilon} (x_1 + x_2) = I_1(\eta, \epsilon) \quad (\text{III.18})$$

Substitui-se , então , (III.17) e (III.18) em (III.14) usando que $\frac{dx_1}{d\epsilon} = -\frac{1}{2x_1}$. Logo ,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\omega_c}{2(2\pi)^2} \sum_{\eta} \left\{ \frac{\sqrt{2m} \pi i}{(2i(\omega\nu + \Gamma) + \epsilon)^2} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) - \frac{\sqrt{2m} 2\pi i}{(2i(\omega\nu + \Gamma) + \epsilon)^2} \frac{1}{x_1} - \frac{4\sqrt{2m} \pi i}{(2i(\omega\nu + \Gamma) + \epsilon)^3} (x_1 + x_2) \right\} \operatorname{sgn} \omega_\nu \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\omega_c}{2(2\pi)^2} \sum_{\eta} \left\{ \frac{\sqrt{2m} \pi i}{4(\omega\nu + \Gamma)^2} \left(\frac{1}{\sqrt{i(\omega\nu + \Gamma) - \omega_c(\eta + 1/2) + \mu}} - \frac{1}{\sqrt{-i(\omega\nu + \Gamma) - \omega_c(\eta + 1/2) + \mu}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2m} \pi}{2(\omega\nu + \Gamma)^3} \left(\sqrt{i(\omega\nu + \Gamma) - \omega_c(\eta + 1/2) + \mu} + \sqrt{-i(\omega\nu + \Gamma) - \omega_c(\eta + 1/2) + \mu} \right) \right\} \operatorname{sgn} \omega_\nu \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Atéeste momento não se tem feito nenhuma aproximação no cálculo de C_1 , porém mais uma vez nos defrontamos com o problema de resolver uma soma infinita. Como anteriormente vamos considerar a soma simplesmente como uma integral mediante a

suposição que $\omega_c \ll \mu$

Portanto :

$$C_1 = \frac{\sqrt{2m}\pi}{8(2\pi)^2} \frac{1}{(\omega\nu+\Gamma)^3} \left\{ i(\omega\nu+\Gamma) \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i(\omega\nu+\Gamma)+\mu-x}} - \frac{1}{\sqrt{-i(\omega\nu+\Gamma)-x+\mu}} \right) dx - \right. \\ \left. - 2 \int_0^{\infty} \left(\sqrt{i(\omega\nu+\Gamma)-x+\mu} + \sqrt{-i(\omega\nu+\Gamma)-x+\mu} \right) dx \right\} \operatorname{sgn} \omega\nu \quad (\text{III.20})$$

A primeira integral é divergente. É fácil constatar que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{i(\omega\nu+\Gamma)-x+\mu} - \sqrt{-i(\omega\nu+\Gamma)-x+\mu} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{(x-\mu)^2 + (\omega\nu+\Gamma)^2} \left\{ e^{\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega\nu+\Gamma}{-x+\mu}} - e^{\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{-\omega\nu-\Gamma}{-x+\mu}} \right\} = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[4]{x^2} 2i = i \cdot \infty \quad (\text{III.21})$$

Enquanto que , se fosse uma soma ao invés de uma diferença o limite seria zero, o que implica que a primeira integral converge.

Apesar da divergência podemos desconsiderar o primeiro termo em (III.20) pois é de ordem mais baixa em μ . Ou seja , este termo é proporcional a " $\sqrt{\mu}$ " enquanto que o segundo o é a " $\mu\sqrt{\mu}$ " .

Mas pode um termo divergente ser de ordem mais baixa que um finito ? Neste caso a resposta é sim . Esta divergência não é física e pode ser evitada através de um "cut off" como foi feito na seção 1.5 , e assim veremos que este é realmente de ordem

mais baixa .

O resultado final para C_1 é em ordem zero de ω_y :

$$C_1 = \frac{-\mu p_0}{12\pi\Gamma^3} \operatorname{sgn} \omega_y \quad (\text{III.22})$$

III.2 CALCULO DE C_2

Operando as deltas de Kroniker em (III.11c), chegamos a :

$$C_2 = \frac{1}{4(2\pi)^2} \sum_n^{\infty} \int dq \left\{ \frac{2n}{(i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)(-i(\omega_y + \Gamma) - E_{n-1}(q) + \mu)} + \right. \\ \left. + \frac{2n}{(i(\omega_y + \Gamma) - E_{n-1}(q) + \mu)(-i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} + \right. \\ \left. + \frac{-2(2n+1)}{(i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)(-i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} \right\} \quad (\text{III.23})$$

Cada um dos três termos pode ser separado em frações parciais , e se , em alguns deles trocarmos o indice de soma para fazer $E_{n-1}(q) = E_n(q)$ resulta :

$$C_2 = \frac{1}{4(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int dq \left\{ \frac{-2n}{(2i(\omega_y + \Gamma) - \omega_c)} - \frac{2(n+1)}{(2i(\omega_y + \Gamma) + \omega_c)} + \frac{2(2n+1)}{2i(\omega_y + \Gamma)} \right\} \times \\ \times \frac{1}{(i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} - \sum_{n=0}^{\infty} \int dq \left\{ \frac{2(n+1)}{2i(\omega_y + \Gamma) - \omega_c} + \frac{2n}{2i(\omega_y + \Gamma) + \omega_c} - \frac{2(2n+1)}{2i(\omega_y + \Gamma)} \right\} \times \\ \times \frac{1}{(-i(\omega_y + \Gamma) - E_n(q) + \mu)} \quad (\text{III.24})$$

Ou seja , escrito em termos de I_0 e I_1 já definidos :

$$C_2 = \frac{\omega_c}{2(2\pi)^2((2i(\omega_\nu + \Gamma))^2 - \omega_c^2)} \left\{ 2\mu \sum_{n=0}^{\infty} I_0(n,0) - \sum_{n=0}^{\infty} I_1(n,0) \right\} \quad (\text{III.25})$$

Substituindo (III.17) e (III.18) e realizando as somas como integrais, note que desta vez tanto " $\sum_n I_0(n,0)$ " como " $\sum_n I_1(n,0)$ " convergem, temos :

$$C_2 = \frac{\sqrt{2m} \pi i \operatorname{sgn} \omega_\nu}{2(2\pi)^2((2i(\omega_\nu + \Gamma))^2 - \omega_c^2) i(\omega_\nu + \Gamma)} \left\{ 2\mu (\sqrt{\mu + i(\omega_\nu + \Gamma)} + \sqrt{\mu - i(\omega_\nu + \Gamma)}) - \right. \\ \left. - (2/3) (\sqrt{\mu + i(\omega_\nu + \Gamma)}^3 + \sqrt{\mu - i(\omega_\nu + \Gamma)}^3) \right\} \quad (\text{III.26})$$

Em zero ordem de :

$$C_2 = -\frac{1}{12\pi} \frac{\mu p_0}{r^3 (1 + (\omega_c/2\Gamma)^2)} \operatorname{sgn} \omega_\nu \quad (\text{III.27})$$

Assim finalmente :

$$Q(p_x, p_z, i\omega_\nu + i\Gamma) = \frac{\Gamma}{\eta \gamma^2 (\omega_\nu + \Gamma)} - \frac{\mu p_0}{12\pi r^3} \operatorname{sgn} \omega_\nu p_z^2 - \\ - \frac{\mu p_0}{12\pi r^3} \frac{\operatorname{sgn} \omega_\nu}{(1 + (\omega_c/2\Gamma)^2)} p_x^2 \quad (\text{III.28})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) LIFSHITZ, E.M. & PITAEVSKII, L.P. Statistical Physics, Oxford, Pergamon, 1980.
- (2) ABRIKOSOV, A.A. On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group. Soviet Physics JETP, New York, 5(6):1174-1182, Dec, 1957.
- (3) BARDEEN, J.; COOPER, L.N.; SCHRIEFFER, J.R. Theory of Superconductivity. Physical Review, New York, 108(5):1175-1204, Dec, 1957.
- (4) FROHLICH, H. Interaction of Eletrons with Lattice Vibrations. Proceedings of the Royal Society, London, A215:219-298, 1952.
- (5) GORKOV, L.P. On the Energy Spectrum of Superconductors. Soviet Physics JETP, New York, 7(3):505-508, Sept, 1958.
- (6) SCHRIEFFER, J.R. Theory of Supercondutivity, New York, Benjamin, 1964.
- (7) GORKOV, L.P. Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations in the Theory of Supercondutivity. Soviet Physics JETP, New York, 9(6):1364-1367, Dec, 1959.
- (8) GORKOV, L.P. The Critical Supercooling Field in Supercondutivity. Soviet Physics JETP, New York, 10(3):593-599, Mar, 1960.
- (9) ANDERSON, P.W. Theory of Dirty Superconductors. Journal of Physics and Chemistry of Solids, New York, 11:26-30, 1959.
- (10) BERGMANN, G. Weak Localization in Thin Films. Physics Reports, Amsterdan, 107(1):1-58, 1984.
- (11) ABRIKOSOV, A.A.; GORKOV, L.P.; DZYALOSHINSKI, I.E. Methods of

Quantum Field Theory in Statistical Physics, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1964.

- (12) HELFAND, E. & WERTHAMER, N.R. Temperature and Purity Dependence of the Superconducting Critical Field, Physical Review, New York, 147(1):288-294, July, 1966.
- (13) MAGALHÃES, S. Efeitos de Localização na Magnetocondutividade em Três Dimensões. Dissertação de Mestrado IF-UFRGS, Porto Alegre, dez, 1987.
- (14) GRADZTEYN, I.S. & RYZHIK, M. Table of Integrals, Series and Products, New York, Academic, 1965.
- (15) JONES, C.K.; HULM, J.K.; CHANDRASEKHAR, B.S. Upper Critical Field of Solid Solutions. Reviews of Modern Physics, New York, 36(1):74-76, Jan, 1964.
- (16) MATTHIAS, B.T.; WOOD, E.A.; CORENZWIT, E.; BALA, V.B. Journal of Physics and Chemistry of Solids, New York, 1:188, 1956.
- (17) MAEKAWA, S.; EBISAWA, H.; FUKUYAMA, H. Localization and Superconductivity. Progress of Theoretical Physics Supplement, 84:154-165, 1985.
- (18) COFFEY, L.; MUTTALIB, K.A.; LEVIN, K. Theory of Upper Critical Field in Highly Disordered Superconductors: Localization Effects. Physical Review Letters, New York, 52:783-787, 1984.
- (19) KAPITULNIK, A. & KOTLIAR, G. Anderson Localization and the Theory of Dirty Superconductors Physical Review Letters, New York, 54(5):473-476, Feb., 1985.
- (20) EVANS, W.A.B & RICKAYZEN, G. The Critical Field of a Superconductor Proceedings of the Physical Society, London, 83:311-320, 1964.

- (21) ERDELYI, A. et al. Tables of Integral Transforms v.II , New York, McGraw-Hill, 1954.
- (22) RICKAYZEN, G. Critical Magnetic Field of a Thin Film of Superconductor. Physical Review, New York, 138():A73-78 , April, 1965.
- (23) KOTLIAR, G. & KAPITULNIK, A. Anderson Localization and the Theory of Dirty Superconductors. II Physical Review B, New York , 33(5):3146-3157, Mar, 1986.