

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

OBSERVAÇÃO DE CAOS DETERMINÍSTICO  
EM DESCARGAS ELÉTRICAS\*

Thomas Braun

Dissertação realizada sob a orientação dos Doutores Ricardo E. Francke e Jason A.C. Gallas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

\*Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP); Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Porto Alegre  
1987

UF RS  
Instituto de Física  
Biblioteca

Dedico este trabalho  
à meus pais  
e a Tunz.

## AGRADECÇO

aos professores Ricardo E. Franke e Jason A. C. Gallas pela orientação e ensinamentos transmitidos;

ao prof. Jorge A. Lisboa pelo valioso auxílio no trabalho de laboratório;

ao prof. Sílvio Cunha pelo inestimável apoio recebido na redação deste trabalho;

em especial, aos colegas do grupo do Laser, pois este trabalho, muito antes de ser o fruto de um mérito pessoal, é a mostra da capacidade de um grupo se unir em torno de um objetivo e não medir esforços para alcançá-lo;

a Zuleika Berto pela colaboração prestada;

e a todos que me apoiaram.

## RESUMO

No presente trabalho relatamos a primeira observação de comportamento caótico determinístico num plasma de baixa energia, ou seja, numa descarga elétrica luminosa ("glow") e mostramos que, dependendo dos parâmetros de controle, a corrente, através da descarga, bem como a luz emitida pela descarga, pode apresentar um comportamento estacionário, periódico ou caótico.

A montagem experimental incluiu um tubo de descarga selado, tipo Plücker, contendo Hélio, o qual foi excitado com uma fonte de alta tensão contínua. A componente oscilatória  $I(t)$  da corrente e o diagrama de fase  $\dot{I}(t) \times I(t)$  foram observados diretamente em osciloscópios apropriados. A transição do regime oscilatório ao regime caótico foi observada, ao se variar a tensão da fonte.

O caos determinístico é uma característica de numerosos sistemas não lineares. A dinâmica destes sistemas pode ser modelada por mapas discretos. Através do estudo destes mapas, revisamos como sucede a transição da ordem ao caos, sem conhecermos em detalhe os mecanismos envolvidos no processo. Nosso sistema apresenta uma rota de dobramento do período, característica de mapas unidimensionais (1D). Além disso, observamos um comportamento que está associado a mapas bidimensionais (2D) de Henon.

## ABSTRACT

It is reported here the first observation of a deterministically chaotic behaviour in a low temperature glow discharge plasma. It is shown that according to the value of a control parameter the total electric current, and the light emitted by the discharge could show a stationary, oscillatory or chaotic behaviour.

In the experimental arrangement we used a helium sealed - of Plücker discharge tube excited with a high-voltage DC power supply. The oscillatory component of the discharge  $I(t)$  together with the phase diagram  $\dot{I}(t) \times I(t)$  were observed directly through an appropriate oscilloscope. The transition from an oscillatory to a chaotic regime was achieved by means of changing the applied voltage.

A deterministic chaos is a characteristic of several non-linear systems. The dynamic of these systems could be modeled by means of discrete maps. We review through this maps how it is accomplished the transition from order to chaos without knowing the detailed mechanism involved. Our system shows a period-doubling route to chaos which is characteristic of one-dimensional systems (1D). Furthermore, we also observed a behaviour which is characteristic of two-dimensional (2D) Henon's maps.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	1
1 - DINÂMICA CAÓTICA .....	6
1.1 - <u>Dinâmica Caótica Regida por Equações Diferenciais</u> ...	6
1.2 - <u>Dinâmica Caótica Regida por Mapas Discretos</u> .....	20
1.2.1 - Mapas Unidimensionais .....	23
1.2.2 - Mapas Bidimensionais .....	32
1.3 - <u>Definição e Caracterização de Caos</u> .....	34
1.4 - <u>Universalidade</u> .....	45
1.4.1 - Universalidade Estrutural .....	45
1.4.2 - Universalidade Métrica .....	47
1.5 - <u>Ruído Externo</u> .....	58
2 - CAOS NA DESCARGA ELÉTRICA .....	61
2.1 - <u>Processos Fundamentais na Descarga Elétrica</u> .....	62
2.2 - <u>Caracterização de Descarga Elétrica</u> .....	65
2.2.1 - Condutibilidade Elétrica na Descarga .....	66
2.2.2 - A Característica $V \times I$ da Descarga .....	69
2.3 - <u>Configuração Experimental</u> .....	77
2.4 - <u>Resultados Experimentais e Análise</u> .....	81
CONCLUSÕES .....	91
REFERÊNCIAS .....	93

## INTRODUÇÃO

Recentes descobertas matemáticas revolucionaram o nosso entendimento sobre a física não linear. A idéia de que sistemas dinâmicos, em geral, se comportam de uma maneira previsível é posta em questão. Além de apresentar um comportamento regular e reproduzível, muitos sistemas dinâmicos não lineares podem também apresentar soluções instáveis ou mesmo caóticas. Na linguagem científica, o termo caos é empregado para caracterizar um tipo de comportamento mais ou menos aleatório de sistemas descritos por equações completamente determinísticas (isto é, sistemas que não envolvem variáveis estocásticas). Em alguns destes sistemas caóticos determinísticos a transição de comportamento estável a caótico ocorre, variando-se um parâmetro de controle do sistema, e segue caminhos bem específicos e universais, no sentido de que são independentes das propriedades particulares do sistema físico em questão. Sistemas que, independentemente de suas características, podem ser unificados por uma teoria universal, despertam muita atenção e interesse. Em função disto, há um grande número de pesquisadores trabalhando para verificar experimentalmente os fenômenos previstos pela teoria da universalidade e para fundamentar e ampliar as suas bases teóricas. Para qualquer pesquisador ativo é óbvio que hoje em dia a palavra "caos" está em evidência.

Ao se considerar um comportamento determinístico, pode-se ter a idéia errônea que tal comportamento deve ser

regular, uma vez que os sucessivos estados do sistema evoluem continuamente um do outro. Entretanto, já em 1892, Poincaré [1] mostrou que há alguns sistemas mecânicos, onde a evolução temporal, mesmo que governada pelas equações determinísticas de Hamilton, pode apresentar um comportamento caótico. Além de Poincaré, Einstein [2] entre outros também conhecia a existência de comportamento caótico em sistemas determinísticos. Talvez o caos não tenha suscitado maior interesse no início do século, porque naquela época a comunidade física estava fascinada pela mecânica quântica para sistemas integráveis e porque não existiam computadores. De fato, o computador tem um papel decisivo no estudo da dinâmica caótica e foi somente com o seu auxílio que, na década de 60, foi retomada a pesquisa sobre caos em sistemas determinísticos. A descoberta posterior de Lorenz [3], em 1963, que um sistema não linear de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas pode levar a trajetórias completamente caóticas, é reconhecida hoje como uma "pedra de alicerce" da teoria sobre a dinâmica caótica. O modelo de Lorenz fornece uma descrição aproximada do movimento de um fluido entre placas paralelas submetidas a um gradiente térmico. Aumentando este gradiente, ocorre que as correntes de convecção que se formam no fluido deixam de ser regulares e assumem um comportamento turbulento ou caótico.

À primeira vista, estes sistemas caóticos parecem fugir da nossa experiência em problemas físicos. Isto ocorre, porque o nosso conhecimento físico se fundamenta muito em



modelos lineares, de reconhecida competência para explicar um grande número de fenômenos físicos. Porém, esta perspectiva linear permite apenas uma visão muito estreita do mundo físico, onde o comportamento não linear é a regra e o linear é a exceção. Aliás, atribui-se a Einstein a afirmação de que, como as equações básicas da física são não lineares, toda a física-matemática terá que ser refeita.

Ao contrário dos sistemas lineares, os sistemas não lineares têm que ser tratados em toda a sua complexidade. Assim, não existe um procedimento analítico geral para resolvê-los. Os avanços feitos em vários problemas não lineares, anteriormente intratáveis, podem ser atribuídos principalmente à capacidade de cálculo dos modernos computadores. Por outro lado, um sistema dinâmico caótico determinístico, abrangido pela teoria da universalidade, pode ter uma evolução facilmente previsível. Por exemplo, neste sistema, tendo-se observado certas características na sua evolução, é possível antever a transição de comportamento regular a caótico em termos da variação de um parâmetro apropriado, sem conhecer as equações que governam o sistema.

Esta breve introdução sobre caos pode ser ampliada, consultando os artigos básicos de Harrison e Biswas [4], Cvitanović [5], Crutchfield et al. [6] e Gallas [7].

A investigação de sistemas físicos não lineares que exibem comportamento caótico determinístico está atraindo muita atenção nos últimos anos. Entre estes sistemas não lineares certamente devemos ter plasmas em gases. O interesse que estes plasmas suscitam deriva de suas aplicações práticas (por exemplo: meio para lasers), das aplicações potenciais (por exemplo: fusão nuclear) ou do estudo de suas propriedades intrínsecas. Como foi apontado por Held et al. [8], apesar de que a possibilidade de plasmas apresentarem um comportamento caótico determinístico ter sido discutida do ponto de vista teórico recentemente [9,10], até hoje não foi dada uma demonstração experimental clara de tal comportamento em plasmas gasosos. No que se refere à condução elétrica, oscilações auto geradas foram observadas em diversas substâncias [11], porém somente alguns sistemas foram investigados para ver se apresentavam caos determinístico [12]. Recentemente, dois resultados foram obtidos para plasmas em estado sólido [8,13]. Como se sabe, entre outras aplicações, plasmas em semicondutores são de interesse como modelos simples para alguns plasmas em gases. No primeiro experimento, Held, Jeffries e Haller [8] acharam um comportamento caótico num plasma tipo elétron-lacuna num cristal de Ge sob campos elétricos e magnéticos. Martin, Leber e Martienssen [13] relataram a ocorrência de comportamento caótico na condução elétrica de um cristal de niobato de bário e sódio ( $Ba_2NaNb_5O_{15}$ ) a elevadas temperaturas.

No presente trabalho relatamos a primeira observação de comportamento caótico determinístico num plasma de baixa energia, ou seja, numa descarga elétrica luminosa ("glow"), e mostramos que, dependendo dos parâmetros de controle, a corrente através da descarga, bem como a luz emitida pela descarga, pode apresentar um comportamento estacionário, periódico ou caótico. Oscilações na corrente em descargas elétricas alimentadas por uma fonte de tensão DC constituem um fenômeno conhecido há muito tempo [14], apesar disso, não existe ainda uma explicação concreta a respeito. Com o nosso trabalho, podemos afirmar que estas oscilações podem apresentar um comportamento caótico determinístico.

O plano geral do nosso trabalho é o seguinte: no capítulo 1 desenvolvemos a fundamentação teórica da dinâmica caótica. No capítulo 2 iniciamos com uma breve revisão sobre descargas elétricas para depois mostrar os nossos resultados experimentais. A seguir, apresentamos as conclusões e perspectivas futuras do nosso trabalho.

## 1 - DINÂMICA CAÓTICA

Dentre a imensa gama de sistemas dinâmicos determinísticos possíveis, nos últimos anos especial atenção é devotada a um particular subconjunto destes sistemas: são aqueles descritos por equações não lineares e que, para valores apropriados dos parâmetros, apresentam um comportamento complicado, não periódico, errático. A dinâmica determinística que descreve o comportamento errático destes sistemas chamamos de dinâmica caótica.

No estudo desta dinâmica que apresentamos a seguir consideramos dois casos: a dinâmica caótica regida por um sistema de equações diferenciais e a dinâmica caótica regida por mapas discretos unidimensionais e bidimensionais. Partimos, então, para uma definição e caracterização mais precisa de caos. Depois, procuramos entender como emerge a universalidade destes sistemas caóticos. Finalmente, analisamos como um ruído externo pode afetar a dinâmica caótica determinística.

### 1.1-Dinâmica Caótica Regida por Equações Diferenciais

Consideremos um determinado sistema físico que possa ser modelado por um sistema de  $N$  equações diferenciais de primeira ordem, dado por

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= F_1(X_1, X_2, \dots, X_N, \alpha), \\
 \dot{X}_2 &= F_2(X_1, X_2, \dots, X_N, \alpha), \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \dot{X}_N &= F_N(X_1, X_2, \dots, X_N, \alpha),
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Um sistema deste tipo, onde a variável independente  $t$  não aparece nas funções  $F_i$ , é chamado de autônomo. Este sistema pode ser escrito de forma reduzida por

$$\dot{X} = F(X, \alpha),
 \tag{1.2}$$

onde  $X$  representa um conjunto de variáveis que descrevem o sistema em estudo,  $F$  é uma função não linear das variáveis  $X$  e  $\alpha$  é um parâmetro de controle ou um conjunto desses parâmetros que descrevem a interação do sistema físico em questão com o meio ambiente.

A primeira vista, pode parecer que o sistema anterior é bastante restrito em termos de sua aplicabilidade aos problemas físicos. Porém, note-se que o sistema (1.1) contém como caso particular a Mecânica Hamiltoniana (sistemas Hamiltonianos), onde se assume a existência de um Hamiltoniano  $H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$  tal que

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_i &= \partial H / \partial p_i, \\
 \dot{p}_i &= - \partial H / \partial q_i.
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

Além disso, toda equação diferencial de ordem  $N$  é equivalente a um sistema de  $N$  equações diferenciais de primeira ordem, bastando substituir na equação original  $X_1=x$ ,  $X_2=\dot{x}$ ,  $X_3=\ddot{x}$ , .... Se houver uma dependência explícita em  $t$  na equação original, podemos sempre, pelo menos em princípio, substituir uma equação diferencial dependente de  $t$  de ordem  $N$  por uma equação autônoma de ordem  $N+1$ . Estas observações mostram que o sistema (1.1) é bastante geral. Com este procedimento é possível converter as equações diferenciais representativas de problemas físicos num sistema tipo (1.1). Tomemos como exemplo o oscilador de Duffing [15] que é um oscilador não linear com um termo de rigidez cúbico, o qual descreve o endurecimento da mola observado em vários problemas mecânicos. Aqui consideramos uma variante da equação original de Duffing, na qual o termo de rigidez linear é negativo [16,17]:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + 4x^3 = A\cos(\omega t). \quad (1.4)$$

A ocorrência de caos num oscilador de Duffing foi demonstrada por Huberman e Crutchfield [18]. A equação anterior é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -kX_2 + X_1 - 4X_1^3 + A\cos(X_3) \\ \dot{X}_3 &= \omega \end{aligned} \quad (1.5)$$

O nosso propósito no estudo do sistema (1.1) não é saber os valores concretos das soluções correspondentes a determinadas condições iniciais. É nosso interesse saber a variação do comportamento da solução, quando se mudam os valores dos parâmetros em (1.1). Nesse sentido, duas coisas podem acontecer com a solução: uma alteração quantitativa e/ou uma alteração qualitativa. Uma alteração quantitativa significa que os valores numéricos dos coeficientes da solução mudaram, mas "estruturalmente" ela permanece a mesma. Por outro lado, uma alteração qualitativa implica que uma variação dos parâmetros na equação ocasiona uma modificação da estrutura da solução (por exemplo: a solução era estacionária e passou a ser oscilatória). Estamos interessados primordialmente neste segundo aspecto. Assim, tendo-se obtido uma solução oscilatória, queremos saber se, para uma variação dos parâmetros, a solução continua ou não apresentando este mesmo comportamento oscilatório. Este tipo de problema é abordado pela teoria qualitativa das equações diferenciais [19]. Resumindo, estamos interessados no comportamento qualitativo de sistemas físicos descritos por uma equação do tipo (1.2) e nas similaridades que possam existir entre estes diferentes sistemas. Passamos, agora, a descrever como analisar este comportamento qualitativo.

É usual estudar a evolução de um sistema dinâmico em termos de um espaço de fase - no nosso caso, um espaço de dimensão  $N$  (de acordo com (1.1)) cujas coordenadas são  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Cada ponto neste espaço de fase caracteriza todo

o sistema (isto é, contém toda informação do sistema) para um dado instante de tempo. Resolvendo o sistema de equações (1.1) para determinadas condições iniciais  $(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{N0}, t_0)$ , obtemos um ponto no espaço de fase correspondente ao estado inicial do sistema físico em questão. Quando este sistema evolui no tempo, ele ocupa sequencialmente outros pontos do espaço de fase, cada ponto correspondendo a um tempo diferente. Os pontos visitados sucessivamente pelo sistema constituem a sua trajetória no espaço de fase.

Assumindo-se que  $F_i$  e  $\partial F_i / \partial X_j$  são funções limitadas e contínuas em seus argumentos, segue da teoria das equações diferenciais que, dadas as condições iniciais  $(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{N0}, t_0)$ , o sistema de equações (1.1) possui uma solução única a qual escrevemos como

$$X_i = f_i(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{N0}, t) \quad i=1, \dots, N \quad (1.6)$$

e a qual, para  $t=t_0$ , satisfaz as condições iniciais, isto é,

$$f_i(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{N0}, t_0) = X_i \quad i=1, \dots, N \quad (1.7)$$

Como as funções  $f_i$  são unívocas e contínuas em  $X_{10}, \dots, X_{N0}$  e  $t$ , segue que em cada ponto do espaço de fase só pode passar uma única trajetória definida pelas  $f_i$ . Portanto, é impossível a intersecção de trajetórias associadas a diferentes condições iniciais do sistema (1.1). Ademais,



tendo-se determinado o ponto no espaço de fase que corresponde a certas condições iniciais de (1.1), a evolução do sistema físico, modelado pelas equações (1.1), está determinada por uma única trajetória possível no espaço de fase. Assim sendo, o comportamento dinâmico de um sistema físico pode ser obtido de uma análise das trajetórias no espaço de fase.

Para esse fim, importa saber o que acontece com as trajetórias depois que se passou um longo período de tempo, ou seja, entender o comportamento assintótico do sistema dinâmico. Se um sistema dinâmico dissipativo, tal como o oscilador de Duffing (eq. (1.4)), evolui no tempo a partir de condições iniciais dadas, observa-se que, depois que todos os transientes tiverem desaparecido, o sistema eventualmente convergirá para determinada região no espaço de fase. Esta região é denominada de atrator, pois atrai todas as trajetórias vizinhas. Um sistema dinâmico pode ter mais de um atrator. Neste caso, condições iniciais diferentes podem evoluir a diferentes tipos de comportamento assintótico. Note-se que, quando as trajetórias do sistema estão confinadas no atrator, atingiu-se o comportamento assintótico, pois nesta situação os transientes iniciais morreram.

Vejamos agora os vários atratores que um sistema dinâmico dissipativo pode apresentar. Inicialmente definimos que os pontos  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_N^*)$  tais que

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } i \quad (1.8)$$

são chamados de pontos fixos. Os pontos fixos que são estáveis em relação a pequenas perturbações são um exemplo de atratores. Em função de como as trajetórias são atraídas ao ponto fixo, podemos definir que nó estável é um ponto fixo em torno do qual as trajetórias se aproximam ao longo de curvas assintoticamente retas e que ponto espiral estável é um ponto fixo no qual as trajetórias vizinhas espiralam para eles. Outro exemplo importante de atrator é um ciclo limite estável. Um ciclo limite é uma trajetória periódica fechada e "isolada" no sentido de que nenhuma trajetória vizinha é também fechada. Os ciclos limite aparecem somente em sistemas dissipativos não lineares e são de grande importância prática [20,21]. Um ciclo limite estável pode ser pensado como um estado de equilíbrio entre excitação e dissipação para oscilações num sistema não linear, do mesmo modo como um ponto fixo estável representa uma situação de equilíbrio estacionário. Dentro do que se chama de sua base de atração no espaço de fase (isto é, o conjunto de pontos do espaço de fase que evoluem para o atrator), um ciclo limite estável, bem como um nó estável ou um ponto espiral, são independentes das condições iniciais e insensíveis a pequenas perturbações, sendo determinados somente pelos parâmetros nas equações.

Como exemplo da análise de um sistema dinâmico em termos do comportamento de suas trajetórias no espaço de fase, consideremos o oscilador de Duffing:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + 4x^3 = A\cos(\omega t). \quad (1.4)$$

O oscilador é excitado por uma força externa de frequência  $\omega$ , com amplitude  $A$  e unidade natural de tempo  $T_0=2\pi/\omega$ . A dissipação é controlada pelo coeficiente de fricção  $k$ . Dadas posição e velocidade iniciais, pode-se seguir numericamente (por exemplo, com o método numérico de Euler-Romberg [22] para resolver equações diferenciais) a trajetória do sistema no espaço de fase. Devido à presença da dissipação não importa muito de onde iniciamos a seguir a dinâmica no espaço de fase: para uma considerável gama de pontos iniciais a trajetória no espaço de fase converge rapidamente para um ciclo (a trajetória se fecha sobre si mesma) e, para algum  $k=k_0$ , se parece aproximadamente com a figura 1.1a. Observe-se que cada curva bidimensional que se intercepta, representada na figura 1.1, é uma projeção de uma curva tridimensional ( $N=3$  conforme equações (1.5)) onde as trajetórias não se interceptam.

Não fosse a força externa, o oscilador, devido à dissipação, logo atingiria o repouso (no caso, um ponto fixo no espaço de fase). Com a ação da força estabelece-se um equilíbrio entre excitação e dissipação, resultando o ciclo limite. É fácil visualizar o movimento deste sistema, imaginando-o como um pêndulo não linear. Iniciando no ponto marcado 1, o pêndulo retorna a ele após o período unitário  $T_0$ .

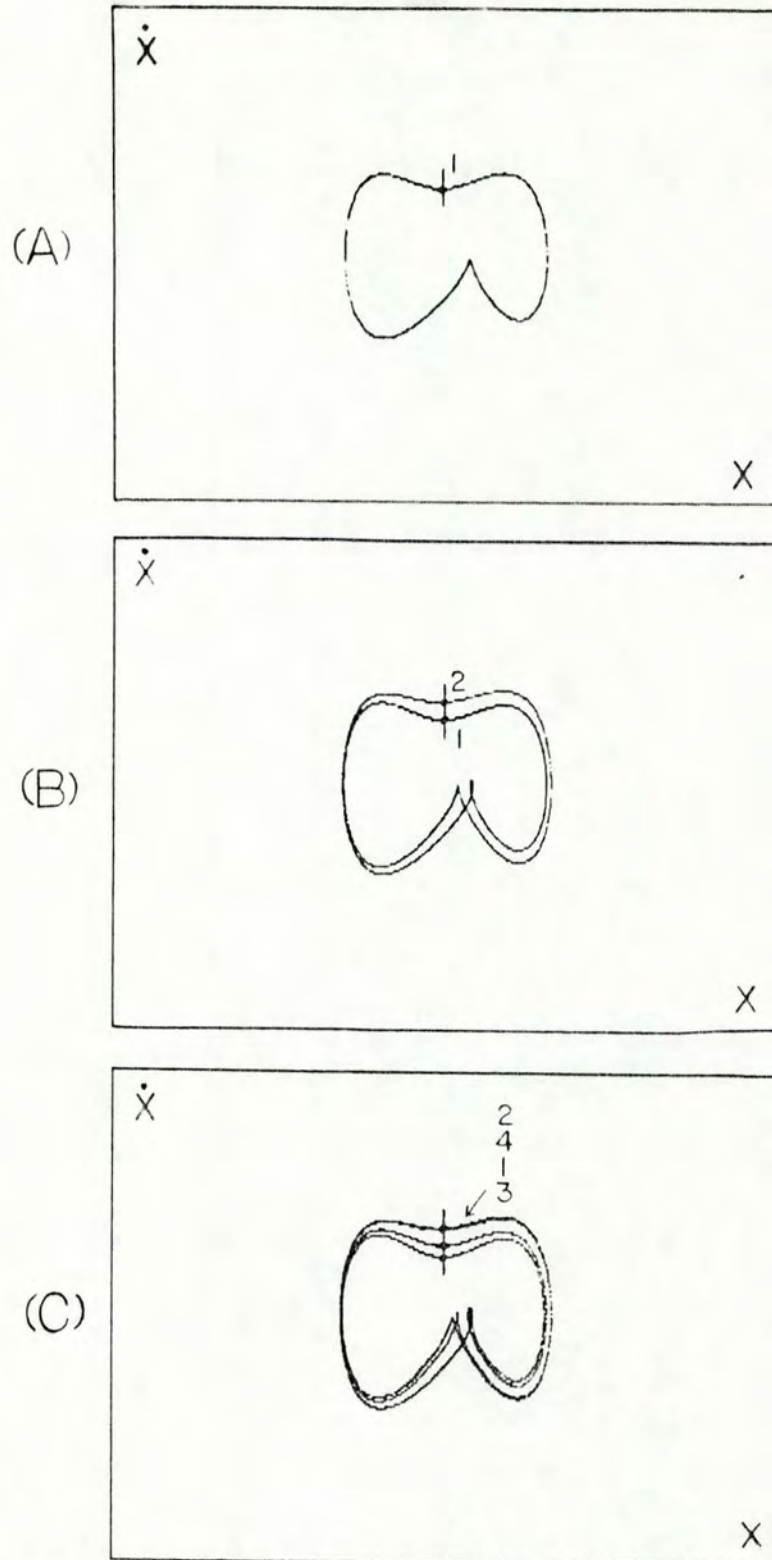


Figura 1.1 - Ciclos 1,2 e 4 estáveis no oscilador de Duffing com  $A=1.5$  e  $w=1$  (conforme equação 1.4), respectivamente, em A) para  $k=0.4$ , em B) para  $k=0.3$  e em C) para  $k=0.278$ , acompanhados de uma transformação de Poincaré unidimensional.

Agora, diminuindo-se a fricção, aparece um fenômeno muito interessante: uma bifurcação da trajetória no espaço de fase, ou seja, correspondendo a um determinado valor do parâmetro  $k$ , ocorre uma mudança contínua na topologia da figura no espaço de fase [23]. O ciclo limite começa a se desdobrar como é indicado na figura 1.1b. O sistema "erra" o ponto de partida 1 até encontrá-lo exatamente após  $2T_0$ . A órbita no espaço de fase continua sendo fechada, só que ela se fecha num período  $2T_0$  em relação ao ciclo limite inicial ( $T_0$ ). Nesse sentido, diz-se que houve um dobramento do período. Diminuindo a fricção, observa-se mais seguidamente a ocorrência de bifurcações (figura 1.1c). Para a  $n$ -ésima bifurcação o sistema erra o ponto de partida  $n$  vezes e, portanto, a órbita se fecha somente num tempo  $2^n T_0$  depois. O período se dobrou  $n$  vezes. Agora se  $n \rightarrow \infty$ , o período será infinito e a trajetória no espaço de fase se fechará num tempo infinito, ou seja, ela será aberta. Isso caracteriza um comportamento aperiódico ou caótico do sistema físico.

Com os sucessivos dobramentos de período fica cada vez mais difícil seguir a trajetória no espaço de fase. Em vista disso, é mais conveniente acompanhar o sistema pela seqüência de "erros" do ponto inicial do que seguindo a sua trajetória. Este modo de reduzir a dimensionalidade do espaço de fase é chamado de transformação de Poincaré. Em vez de estudar toda a trajetória no espaço de fase, olha-se somente para seus pontos de intersecção com uma dada superfície (neste caso, as linhas

tracadas nas figuras 1.1a, 1.1b e 1.1c correspondem à superfície). A transformação de Poincaré contém toda a informação necessária: dela se pode inferir, quando uma instabilidade ocorre e qual é a sua amplitude. Variando-se continuamente o parâmetro de não linearidade (fricção, por exemplo) e plotando num gráfico os pontos de intersecção da trajetória no espaço de fase com a superfície de Poincaré (linha), obtém-se uma árvore de bifurcações (figura 1.2):

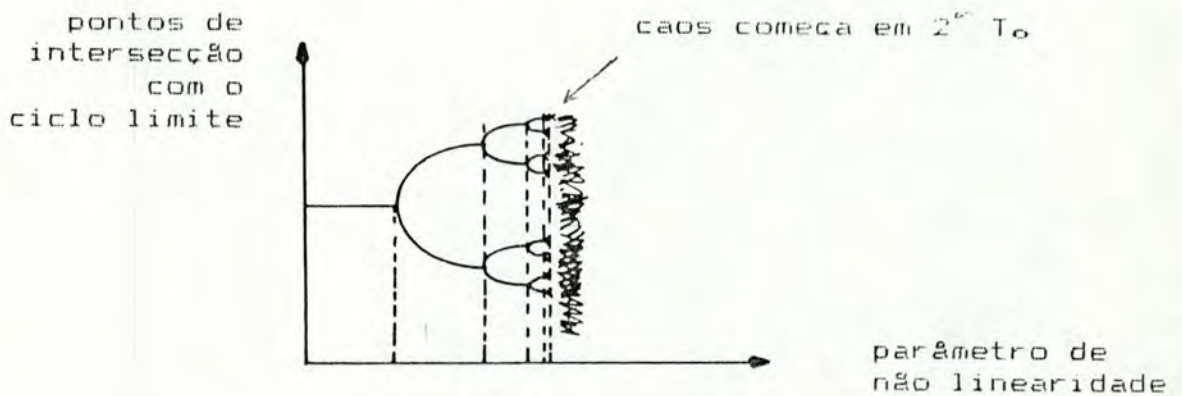


Figura 1.2 - Árvore de bifurcações.

Já conhecemos qualitativamente alguns aspectos deste gráfico. As trajetórias traçadas no espaço de fase eram localizadas de modo que a figura acima tem uma envoltória finita. As bifurcações ocorrem simultaneamente, porque cortamos de vez uma única trajetória; quando ela se divide, ela o faz ao longo de todo o seu comprimento. Escalas cada vez mais finas caracterizam tanto a separação dos ramos como seus comprimentos.

A grande descoberta (atribuída a Feigenbaum [24], porém, feita independentemente por Grossman e Thomae [25] e Coullet e Tresser [26]) consiste nas seguintes observações quantitativas:

→ a. A convergência dos parâmetros é universal (isto é, independe de um particular sistema físico):

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \rightarrow \delta = 4,6692016\dots$$

para  $i$  grande

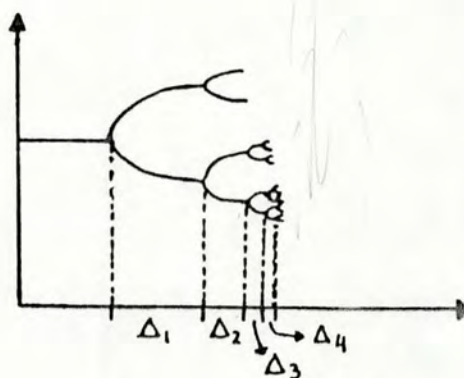
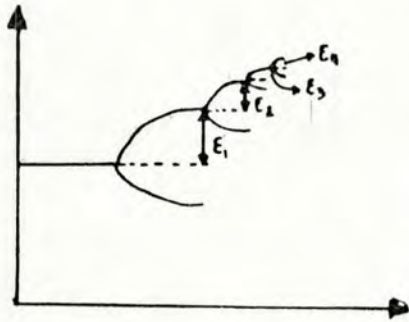


Figura 1.3 - Os comprimentos dos ramos na árvore de bifurcações são maiores a cada nova bifurcação.

b. A escala relativa das sucessivas bifurcações dos ramos é universal:



$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_{i+1}} \rightarrow \alpha = 2.502907875\dots$$

para  $i$  grande

Figura 1.4 - As separações dos ramos na árvore de bifurcações também são menores a cada nova bifurcação.

A beleza desta descoberta é que se turbulência/caos forem atingidos através de uma sequência infinita de bifurcações (o que é uma propriedade qualitativa), então temos duas previsões quantitativas:

a. A convergência dos valores críticos do parâmetro de não linearidade  $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_\infty)$ , correspondentes a ciclos de comprimento  $2, 4, 8, \dots, 2^i$ , é dada pelo parâmetro universal de convergência  $\delta = 4.6692\dots$ .

b. O desdobramento da trajetória no espaço de fase é controlado por um parâmetro universal de escala  $\alpha = 2.5029\dots$ .



É importante enfatizar que a universalidade não é uma consequência do caráter unidimensional do exemplo analisado aqui (pêndulo simples). Por exemplo, Franceschini e Tebaldi [27] investigaram numericamente um sistema não linear de dimensão maior:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_1 &= -2X_1 + 4X_2X_3 + 4X_4X_5 \\
 \dot{X}_2 &= -9X_2 + 3X_1X_3 \\
 \dot{X}_3 &= -5X_3 - 7X_1X_2 + r \\
 \dot{X}_4 &= -5X_4 - X_1X_5 \\
 \dot{X}_5 &= -X_5 - 3X_1X_4
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde  $r$  é um parâmetro externo. Para certos intervalos do parâmetro  $r$  ("número de Reynolds") eles obtiveram seqüências de dobramentos do período para trajetórias no espaço de fase. Além disso, todas as transformações de Poincaré tentadas por eles produziram dobramento do período ao longo de uma linha unidimensional. Os parâmetros de convergência  $\delta$  e de escala  $\alpha$  por eles medidos concordam com os números universais de Feigenbaum. O sistema acima é uma aproximação das equações de Navier-Stokes [27]; entretanto enfatizamos que qualquer aproximação deverá tornar-se unidimensional e mostrar universalidade. A razão é basicamente esta: para um sistema multidimensional dissipativo um volume do espaço de fase se contrai em todas as direções, quando a trajetória converge para um ciclo limite. Uma dada direção terá a taxa de contração menor e definirá uma linha ao longo da qual a teoria da universalidade se aplica (veja Collet e Eckmann [28]).

Uma questão pertinente ainda é saber quais são os requisitos que um sistema do tipo 1.1 deve satisfazer para apresentar caos. O grande problema é que não existe um critério geral para predizer se um dado sistema pode ou não mostrar uma evolução caótica. Para  $N=1$  ou  $2$  nas equações (1.1) existe um critério (conhecido como Critério Negativo de Bendixson [29]) que exclui a possibilidade de caos. Para  $N \geq 3$  nada se pode afirmar e é preciso investigar-se numericamente a evolução do sistema. O oscilador de Duffing envolve 3 equações e pode apresentar caos. Portanto, concluímos que devemos ter  $N \geq 3$  como uma condição necessária para o sistema (1.1) ser caótico. Além disso, um sistema linear é exatamente solúvel e verifica-se que nesta situação uma trajetória limitada deve ser regular, pelo menos para  $N$  finito. Resumindo, os sistemas do tipo (1.1) podem ser caóticos, se eles são não lineares e se  $N \geq 3$  [29].

## 1.2 - Dinâmica Caótica Regida por Mapas Discretos

Em primeiro lugar, vejamos o que se entende por mapas discretos (isto é, transformações discretas). Em Física é bastante usual descrever-se processos através de uma variável de tempo  $t$  contínua, da qual dependem as variáveis  $q$  de um sistema. Seguidamente, é possível obter-se bastante informação sobre o comportamento do sistema, estudando-se simplesmente  $q$  para uma seqüência discreta de tempos  $t_n$ ,  $n=0,1,2,3,\dots$ . Exemplos de tais seqüências são os métodos numéricos para

integrar equações diferenciais ( $t_n$  pequenos) ou ainda as transformações de Poincaré ( $t_n$  grandes). Por uma transformação de Poincaré entendemos qualquer transformação que reduza a dimensionalidade do espaço de fase de um sistema dinâmico, mas conserve as informações essenciais sobre a dinâmica deste sistema. Nas figuras 1.1 esquematizamos uma destas transformações para o oscilador de Duffing. Em cada figura cortamos as trajetórias no espaço de fase com uma reta. Os pontos de intersecção que se obtêm, determinam a dinâmica do sistema, no sentido de que cada intersecção fica determinada pela anterior. Como estes pontos caem sobre uma linha, é estabelecida uma relação unidimensional  $x_n \rightarrow x_{n+1}$ . Obviamente esta não é a única transformação de Poincaré possível. Por exemplo, uma outra transformação consiste em considerar apenas os pontos das trajetórias em que  $t$  na equação (1.4) é um múltiplo do período básico  $T_0$  da força externa, isto é,  $t = T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ . Assim, conforme mostra a figura 1.5, obtém-se uma distribuição de pontos no plano  $XY$ . Também aqui, cada ponto especifica o próximo e resulta uma relação bidimensional  $x_n, y_n \rightarrow x_{n+1}, y_{n+1}$ .

A importância dos mapas discretos reside no fato de que muito do que se sabe sobre o caos (do ponto de vista matemático) foi obtido, analisando mapas não lineares, ao invés de resolver equações diferenciais.

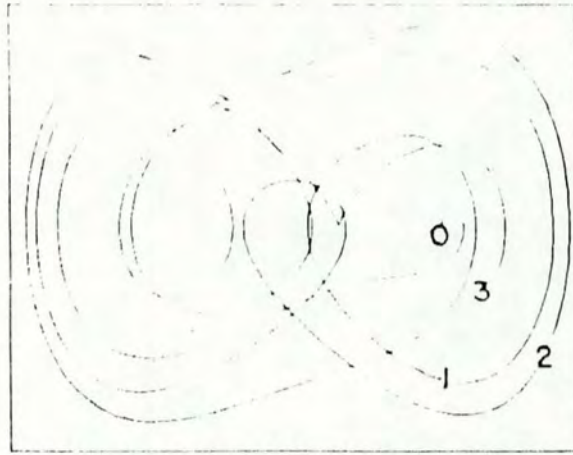


Figura 1.5 - Transformação de Poincaré bidimensional para um oscilador de Duffing [30].

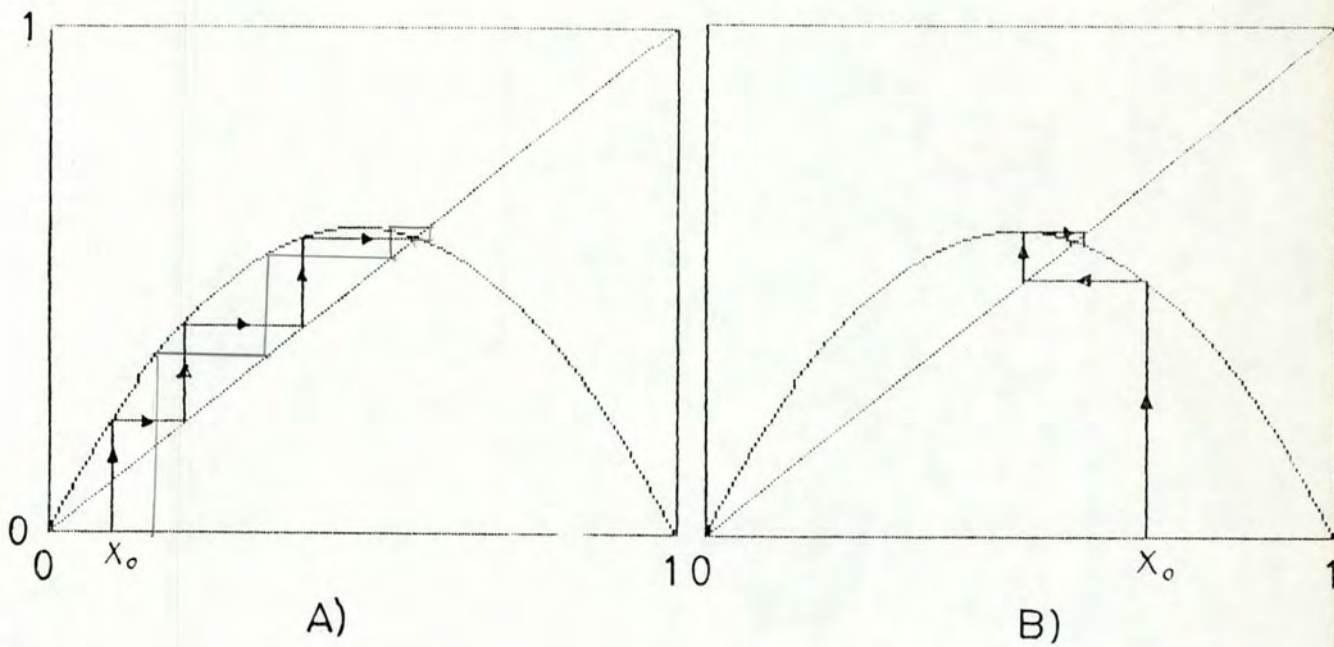


Figura 1.6 - Gráfico da função  $Y=4\lambda X(1-X)$  para  $\lambda=0.6$  mostrando as iterações para (A)  $X_0=0.1$  e (B)  $X_0=0.7$ .

## 1.2.1 - Mapas Unidimensionais (1D)

Num mapa unidimensional cada ponto  $x_{n+1}$  é determinado a partir do ponto  $x_n = q(t_n)$  imediatamente anterior. Podemos portanto imaginar a existência de uma relação:

$$x_{n+1} = f_n(x_n). \quad (1.10)$$

Em muitos casos de interesse a função  $f_n$  é independente de  $n$  de modo que temos simplesmente:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.11)$$

Como a relação acima transforma um valor  $x_n$  num valor  $x_{n+1}$  para índices  $n$  discretos, chamamos (1.11) de transformação discreta ou simplesmente de mapa discreto unidimensional.

De todas as possíveis funções  $f$  em (1.11), o chamado mapa logístico:

$$x_{n+1} = A\lambda x_n(1-x_n) \quad (1.12)$$

do intervalo  $0 \leq x \leq 1$  sobre ele mesmo, é provavelmente o que foi mais estudado até agora.  $\lambda$  faz o papel de um parâmetro de controle que pode ser variado entre  $0 \leq \lambda \leq 1$ . A notoriedade do mapa logístico provém do fato de ele ter sido estudado extensivamente por Feigenbaum nos trabalhos originais sobre a teoria da

universalidade.

O mapa logístico corresponde à discretização da chamada equação logística:  $\dot{X} = AX - BX^2$ . A mais conhecida aplicação deste mapa é como um modelo da dinâmica de uma população. Ele descreve a mudança de população ( $X_n \rightarrow X_{n+1}$ ) de um organismo de ano para ano ( $n \rightarrow n+1$ ), sendo que não há superposição entre as sucessivas gerações. O primeiro termo nos parênteses em (1.12) representa o crescimento da população devido ao nascimento dos organismos, enquanto o segundo termo representa um declínio na população devido à morte. Dependendo do valor de  $\lambda$ , a população pode ser estacionária, oscilatória ou caótica.

Na figura 1.6 está o gráfico da função  $Y = 4\lambda X(X-1)$ . Note-se que esta é uma função não monotônica com os valores  $Y$  entre 0 e  $\lambda$ . Como  $0 \leq \lambda \leq 1$ , podemos sempre introduzir  $Y$  como  $X$  na função, possibilitando repetidas iterações. Pela forma da função, segue que as sucessivas iterações podem oscilar entre 0 e  $\lambda$ . É justamente esse fato que é responsável pelo surgimento de efeitos muito interessantes, quando se itera a função, como veremos a seguir.

Um método gráfico muito apropriado para acompanhar a iteração da equação (1.12) é ilustrado na figura 1.6 em que:

$$Y = f(X) = 4\lambda X(1-X) \quad (1.13)$$

é plotado contra  $X$ . Para um dado  $\lambda$ , partimos de um valor inicial  $X_0$  arbitrário ( $0 \leq X_0 \leq 1$ ). Traçamos uma vertical por  $X=X_0$  até a intersecção com a curva  $f(x)$  em  $Y_0=f(X_0)$ . A altura  $Y_0 \equiv X_1$  é o argumento para a próxima iteração. Para determinar a próxima iteração da  $f$ , deve-se traçar uma nova vertical pelo valor obtido  $X_1=Y_0$ . Para isso, desenha-se uma linha horizontal de  $Y_0$  até encontrar a diagonal  $Y=X$ . Neste ponto, é traçada a segunda linha vertical que cortará a curva  $f(X)$  numa altura  $Y_1=f(X_1)=f(f(X_0))$ . Então  $Y_1 \equiv X_2$  e todas as demais iterações,  $X_3, \dots, X_n$ , podem ser obtidas da mesma forma. Resumindo, a iteração é realizada graficamente pela seguinte receita: (1) desloque-se verticalmente até alcançar a curva e (2) então mova-se horizontalmente até encontrar a linha diagonal. Repita os passos (1) e (2) sucessivamente.

Definem-se os pontos **fixos  $X^*$**  de um mapa  $X_{n+1}=f(X_n)$  pela equação  **$X^*=f(X^*)$** . O mapa logístico possui dois pontos fixos:  $X_0^*=0$  e  $X_1^*=1/(4\lambda)$ . Pontos fixos podem ser estáveis ou não frente a pequenas perturbações. A perturbação consiste num pequeno afastamento do ponto fixo ( $X^* \rightarrow X_0, X_0 \approx X^*$ ). Recorrendo ao método gráfico, verificamos que, para um dado  $X_0$ , é a declividade local de  $f(X)$ , ou seja,  $f'(X_0)$ , que determina o deslocamento horizontal nas sucessivas iterações da  $f$ . Sempre que a curva tiver o módulo da declividade maior que 1, cada iteração da  $f$  tende a se afastar gradativamente de  $X_0$ . Em função disso, enunciamos o critério de estabilidade frente a pequenas perturbações como segue:  $X^*$

será ponto fixo estável se  $|f'(X^*)| < 1$ , instável se  $|f'(X^*)| > 1$  e marginalmente estável se  $|f'(X^*)| = 1$ .

O critério de estabilidade enunciado acima nos dá que, para o mapa logístico com  $0 < \lambda < 1/4$ , teremos um único ponto fixo  $X_0^* = 0$  e que é estável. Independentemente do valor inicial  $X_0$ , a seqüência  $X_1, X_2, \dots$  eventualmente convergirá para  $X_0^*$ ; dizemos, pois, que  $X_0^*$  é um atrator de período um ou de ciclo um. Quando tivermos  $1/4 < \lambda < 3/4$ ,  $X_0^*$  será instável, sendo, porém,  $X_1^*$  estável. Para  $\lambda > 3/4$  ambos pontos fixos são instáveis. No entanto, justamente para  $\lambda > \lambda_1 \equiv 3/4$ , após um "transiente" inicial, observa-se que (conforme fig. 1.7) iterações sucessivas oscilam entre dois pontos especiais,  $X_2^*$  e  $X_3^*$ , de modo que agora temos um atrator de período dois ou de ciclo dois.

O atrator de período dois é estável, pois, iniciando com qualquer  $X_0$ , as iterações acabam convergindo para o ciclo 2  $[X_2^*, X_3^*, X_2^*, X_3^*, \dots]$ . Um modo instrutivo de acompanhar esta transformação é observar o gráfico da função  $f^2(X) = f(f(X))$ . Note-se que qualquer ponto fixo de  $f$  também é um ponto fixo de  $f^2$ , de modo que  $X_0^*$  e  $X_1^*$  são pontos fixos de  $f^2$ . Além disso, como  $f(X_2^*) = X_3^*$  e reciprocamente  $f(X_3^*) = X_2^*$ ,  $f^2$  tem dois novos pontos fixos:  $f^2(X_2^*) = X_2^*$  e  $f^2(X_3^*) = X_3^*$ . Uma análise de estabilidade dos pontos fixos de  $f^2$  mostra que  $X_0^*$  e  $X_1^*$  são pontos fixos instáveis de  $f^2$ , ao passo que  $X_2^*$  e  $X_3^*$  são pontos fixos estáveis. Ademais, verifica-se que  $|f^{2'}(X_2^*)| = |f^{2'}(X_3^*)|$  e, assim  $X_2^*$  e  $X_3^*$  estão amarrados um



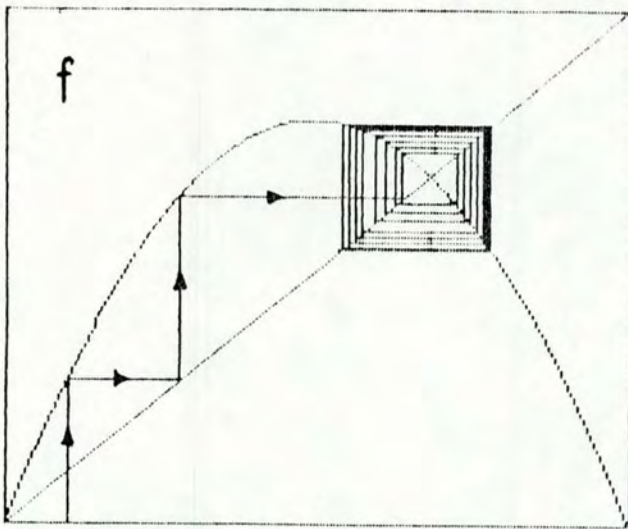
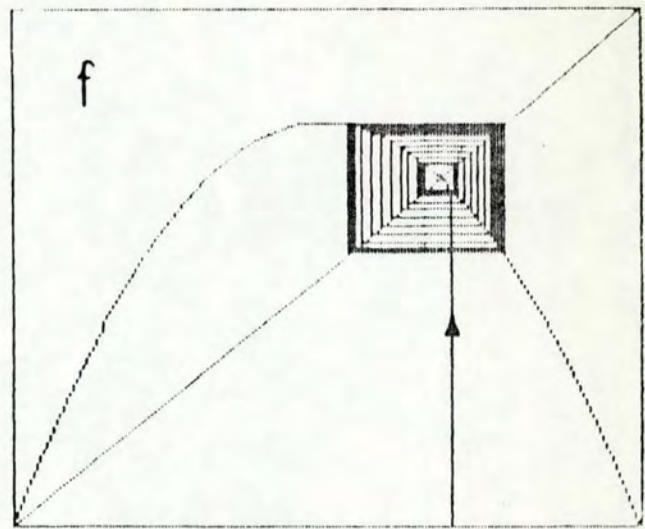
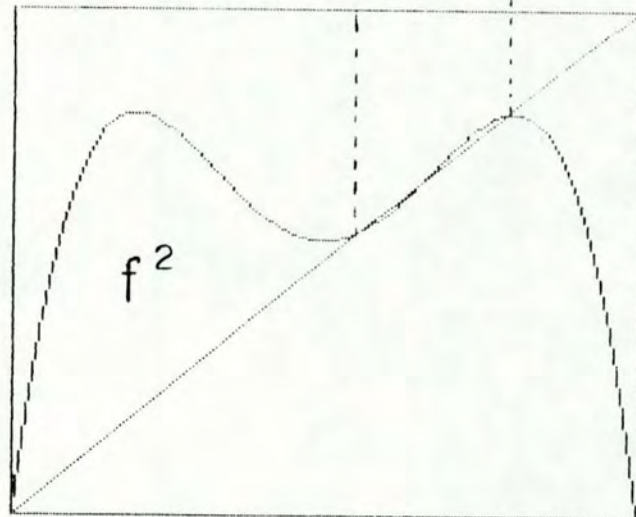
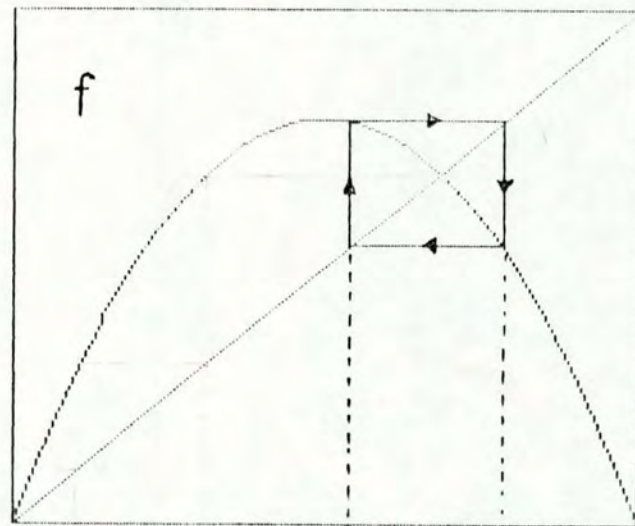

 $x_0 = 0.1$ 

 $x_0 = 0.7$ 


Figura 1.7 - Um ciclo 2 em  $f$  para  $\lambda = 0.785$ .

ao outro. O resultado anterior segue da regra da cadeia:

$$f^{2'}(x_2^*) = f'(f(x_2^*))f'(x_2^*) = f'(x_3^*)f'(x_2^*) = f^{2'}(x_3^*) \quad (1.14)$$

Deste modo, um atrator de período 1 é convertido em um atrator de período 2 para um determinado valor de  $\lambda$  ( $\lambda = \Lambda_1$ ). Ou seja, à medida que  $\lambda$  é variado, ocorre em  $\lambda = \Lambda_1$  um dobramento de período de ciclo 1 ( $0 \leq \lambda \leq \Lambda_1$ ) para ciclo 2 ( $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ ). Inicialmente coincidentes,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  afastam-se um do outro, quando  $\lambda$  cresce. O aumento de  $\lambda$  também ocasiona uma alteração da declividade de  $f^2$  em  $x_2^*$  e  $x_3^*$ , de modo que eles são pontos fixos estáveis de  $f^2$  até atingirmos  $\lambda = (1+16)/4 \equiv \Lambda_2 \approx 0.862372$ .

Do mesmo modo como aconteceu com  $f$  em  $\lambda = \Lambda_1$ , os pontos fixos estáveis de  $f^2$  tornam-se instáveis para  $\lambda = \Lambda_2$ . Nesse momento ocorre uma nova bifurcação, ou seja: os pontos fixos  $x_2^*$  e  $x_3^*$  em  $f^2$ , agora instáveis, "originam" quatro pontos fixos estáveis em  $f^4$ , respectivamente,  $x_4^*$ ,  $x_5^*$  e  $x_6^*$ ,  $x_7^*$ . Em consequência, surgiu um ciclo 4 estável em  $f$  [ $x_4^*$ ,  $x_5^*$ ,  $x_6^*$ ,  $x_7^*$ ,  $x_4^*$ ,  $x_5^*$ ,  $x_6^*$ ,  $x_7^*$ , ...] no lugar do ciclo 2. As bifurcações de  $x_2^*$  e  $x_3^*$  são simultâneas, uma vez que  $x_2^*$  e  $x_3^*$  estão "amarradas". Um ciclo 4 está representado na figura 1.8.

Quando  $\lambda$  é aumentado, há um certo valor  $\Lambda_3$  para o qual os quatro pontos fixos se bifurcam simultaneamente, resultando um atrator de período 8. Assim, sucessivamente

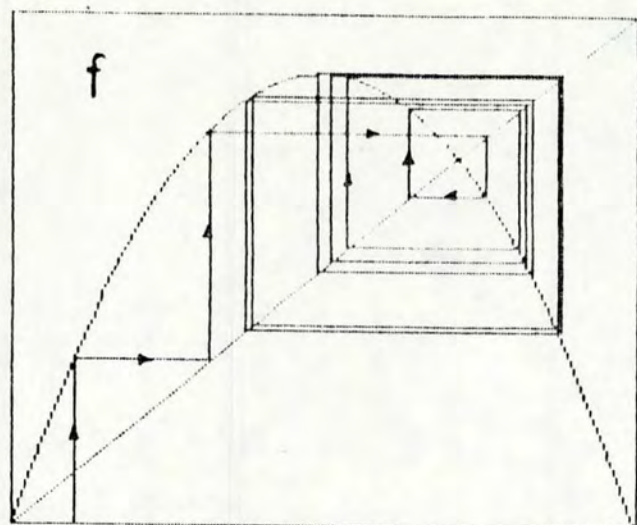
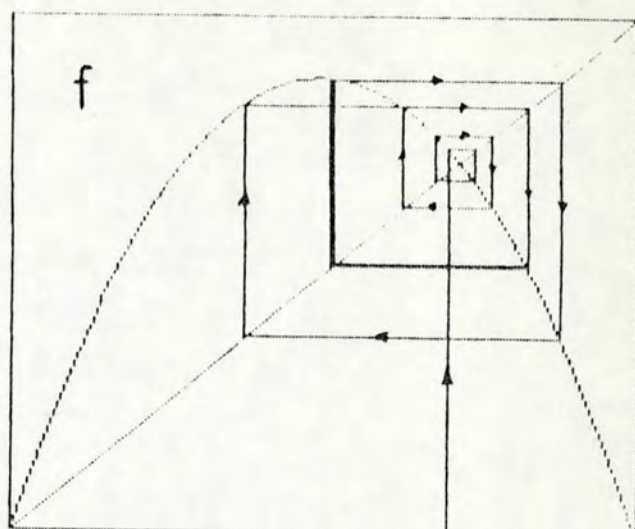
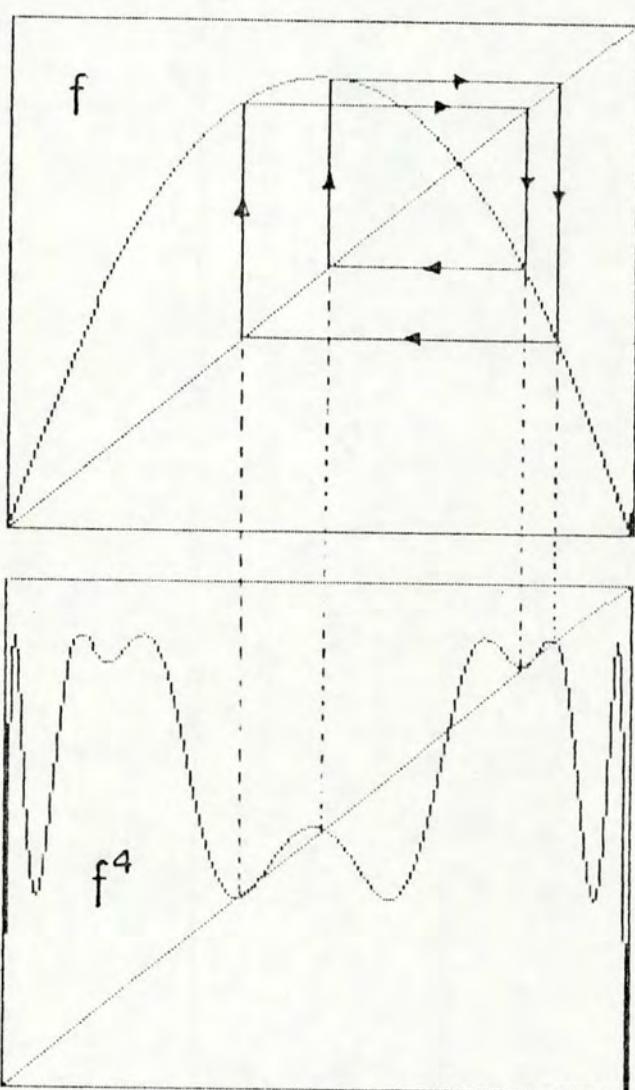
 $X_0 = 0.1$  $X_0 = 0.7$ 

Figura 1.8 - Um ciclo 4 em  $f$  para  $\lambda = 0.88$ .

continuaremos a ver dobramentos do período e a "janela" de valores de  $\lambda$  associados com dado ciclo  $n$  ficará cada vez mais estreita, à medida que  $n$  cresce. Isto pode ser visto na figura 1.9.

Os sucessivos dobramentos do período fundamentam-se na mesma razão: o módulo da declividade de uma função, calculado para os pontos fixos, ultrapassa o valor crítico 1. Em  $\lambda = \Lambda_1$  é  $|f'(x_1^*)| > 1$  que ocasiona a primeira bifurcação. A segunda bifurcação é causada pela ocorrência simultânea de  $|f^2'(x_2^*)| > 1$  e  $|f^2'(x_3^*)| > 1$ . Analogamente,  $\Lambda_3$  é o valor de  $\lambda$  em que os quatro pontos fixos ( $x_4^*$ ,  $x_5^*$ ,  $x_6^*$  e  $x_7^*$ ) da função  $f^4(x) = f^2(f^2(x)) = f(f(f(f(x))))$  perdem sua estabilidade simultaneamente. E assim segue sucessivamente.

A sequência de  $\Lambda$  para os quais ocorre o dobramento do período,  $\{\Lambda_n\}$ , obedece uma lei bastante simples. Para o mapa logístico Grossmann e Thomae [25] mostraram que há uma convergência geométrica tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n} = \delta = 4.669201691\dots \quad (1.15)$$

Feigenbaum [24,31] observou que esta lei tem caráter "universal", porque ela é válida para uma classe bastante ampla de funções  $f$ : para todas as funções com máximos quadráticos. A

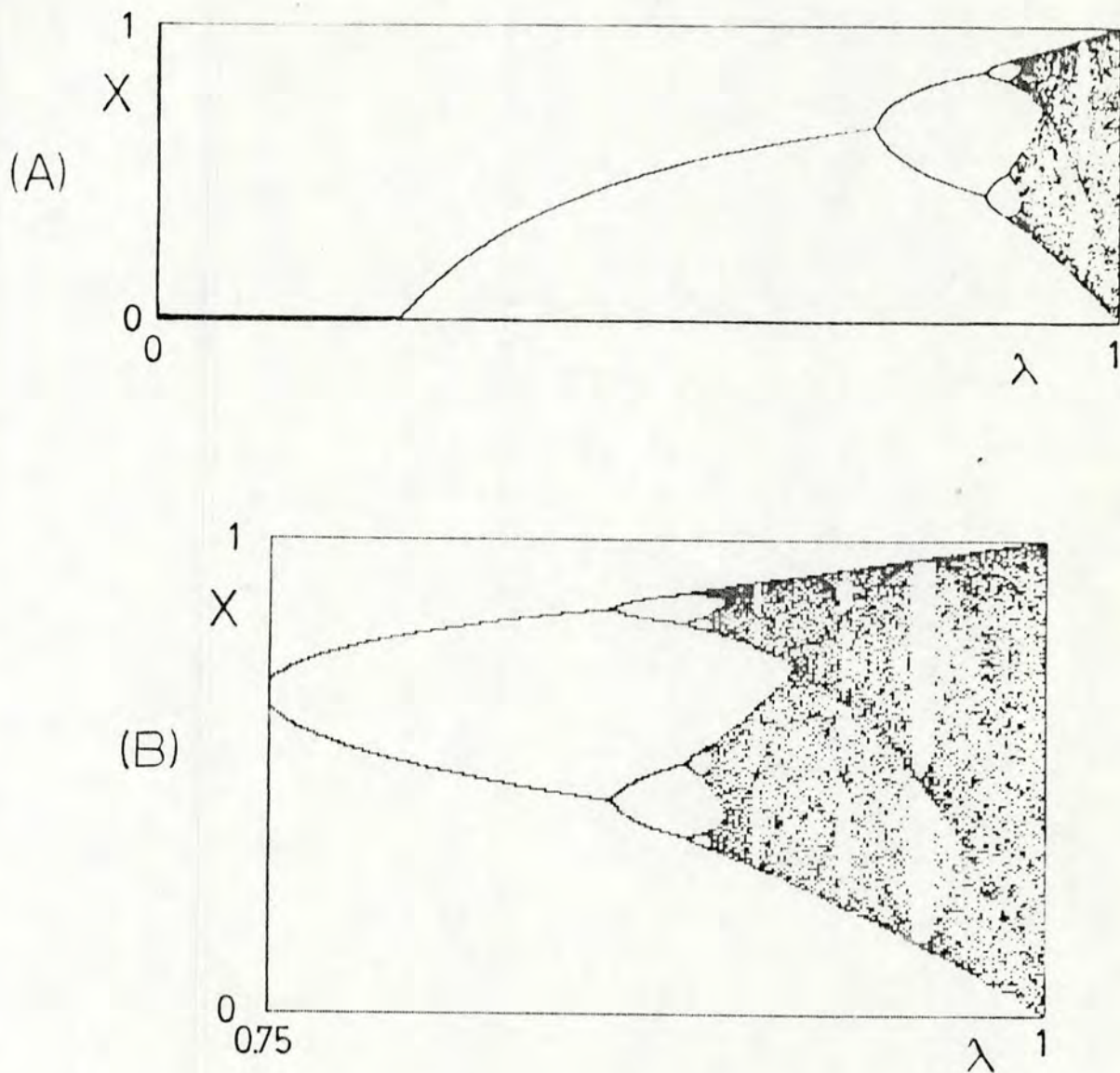


Figura 1.9 - (A) - Diagrama de bifurcação, mostrando a transição de comportamento cíclico a caótico no mapa logístico em função do parâmetro  $\lambda$ . O diagrama de bifurcação é obtido iterando-se o mapa logístico e (quando não há mais o transiente inicial) incrementando-se em pequenos passos o parâmetro  $\lambda$ . O último valor computado é sempre usado como novo valor inicial ( $X_0$  inicial = 0.66). (B) - Porção final expandida do diagrama em (A).

sequência  $\{X_n\}$  tem um ponto limite  $\lambda=0.892\dots$ ; após este valor os valores sucessivos das iterações  $X_1, X_2, \dots$  não convergem e, portanto, parecem ser caóticos, sem atratores periódicos, exceto para certas "janelas" de valores de  $\lambda$  (conforme figura 1.9). Para valores de  $\lambda$  dentro destas janelas, a sequência  $\{X_n\}$  é periódica.

A descoberta de Feigenbaum estimulou muito interesse neste tipo de estudo, pois mostrou existir uma universalidade na rota para o caos através de dobramento "ad infinitum" do período. É importante observar aqui que, apesar de termos escrito com razoável detalhe o cenário que conduz ao caos através de dobramento do período (por ser a rota mais frequente), existem outros caminhos para o caos que são igualmente interessantes. Uma comparação dos cenários mais usuais foi feito por Eckmann [32].

### 1.2.2 - Mapas Bidimensionais (2D)

Um mapa bidimensional genérico pode ser escrito como sendo

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= f_1(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} &= f_2(X_n, Y_n). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Como exemplo de um mapeamento bidimensional, consideremos o mapa de Hénon [33] que é dado por:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= Y_n + 1 - aX_n^2 \\ Y_{n+1} &= bX_n \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes ( $a > 0$  e  $0 < b < 1$ ). O mapa de Hénon, ao contrário do mapa logístico, é inversível, isto é,  $X_{n+1}, Y_{n+1}$  determinam  $X_n, Y_n$  de uma forma única. Os pontos fixos são  $X_{*,-}, Y_{*,-} = bX_{*,-}$ , onde

$$X_{*,-} = \frac{1}{2a} \left[ -(1-b) \pm [(1-b)^2 + 4a]^{1/2} \right]. \quad (1.18)$$

Procedendo da mesma forma como no mapa logístico, resulta que o ponto fixo  $(X_{*,-}, bX_{*,-})$  é sempre instável, enquanto  $(X_{*,-}, bX_{*,-})$  é instável, se  $a > (3/4)(1-b)^2$ .

Nesta análise, restringimo-nos ao caso  $b=0.3$  [33]. Os pontos da seqüência  $\{X_n, Y_n\}$  gerados pelas equações (1.17), dependendo do valor inicial  $(X_0, Y_0)$ , ou ficam confinados num atrator ou divergem para o infinito.

Para  $b=0.3$  os dois pontos fixos são estáveis, quando  $a > a_1 = 0.3675$ . Acima deste valor de  $a$  a situação é análoga à do mapa logístico com  $\lambda > \lambda_1$ . Em  $a_1$  surge um ciclo 2 estável (ou atrator de período 2). Então, para  $a = a_2 = 0.9125$  este atrator fica instável e observam-se sucessivos dobramentos do período

dos ciclos estáveis. Um fato marcante é que a sequência  $\{a_n\}$  dos valores em que surge um ciclo  $2^n$  converge geometricamente, sendo a razão de convergência igual à constante  $\delta$  de Feigenbaum [34].

A figura 1.10 mostra o resultado que se obtém, plotando num gráfico as 10000 iterações sucessivas do mapa de Hénon com  $a=1.4$  e  $b=0.3$  a partir do ponto inicial  $X_0=0.631$ ,  $Y_0=0.189$ . Nota-se que a distribuição dos pontos é aleatória, porém estes pontos ficam confinados a uma certa região do plano XY e, por isso, podemos dizer que a figura 1.10 representa um atrator. De fato, as iterações que iniciam com outros valores iniciais apropriados (isto é, dentro da base de atração do atrator), acabam convergindo para a mesma figura. A sequência  $b \rightarrow c \rightarrow d$  na figura 1.10 mostra o que acontece, quando se expande o quadrado na figura anterior. Observa-se que uma fração ampliada da figura tem o mesmo aspecto de toda a figura, ou seja, há uma "estrutura dentro de estrutura". Neste aspecto, o atrator é muito semelhante ao que Mandelbrot [35] chama de fractal.

### 1.3 - Definição e Caracterização de Caos

Nas seções anteriores estivemos discutindo caos e movimento caótico de um modo bastante intuitivo. Desejamos agora definir com maior rigor o que se entende por caos. A verdade é que não existe ainda uma "definição" rigorosa de caos. Existem



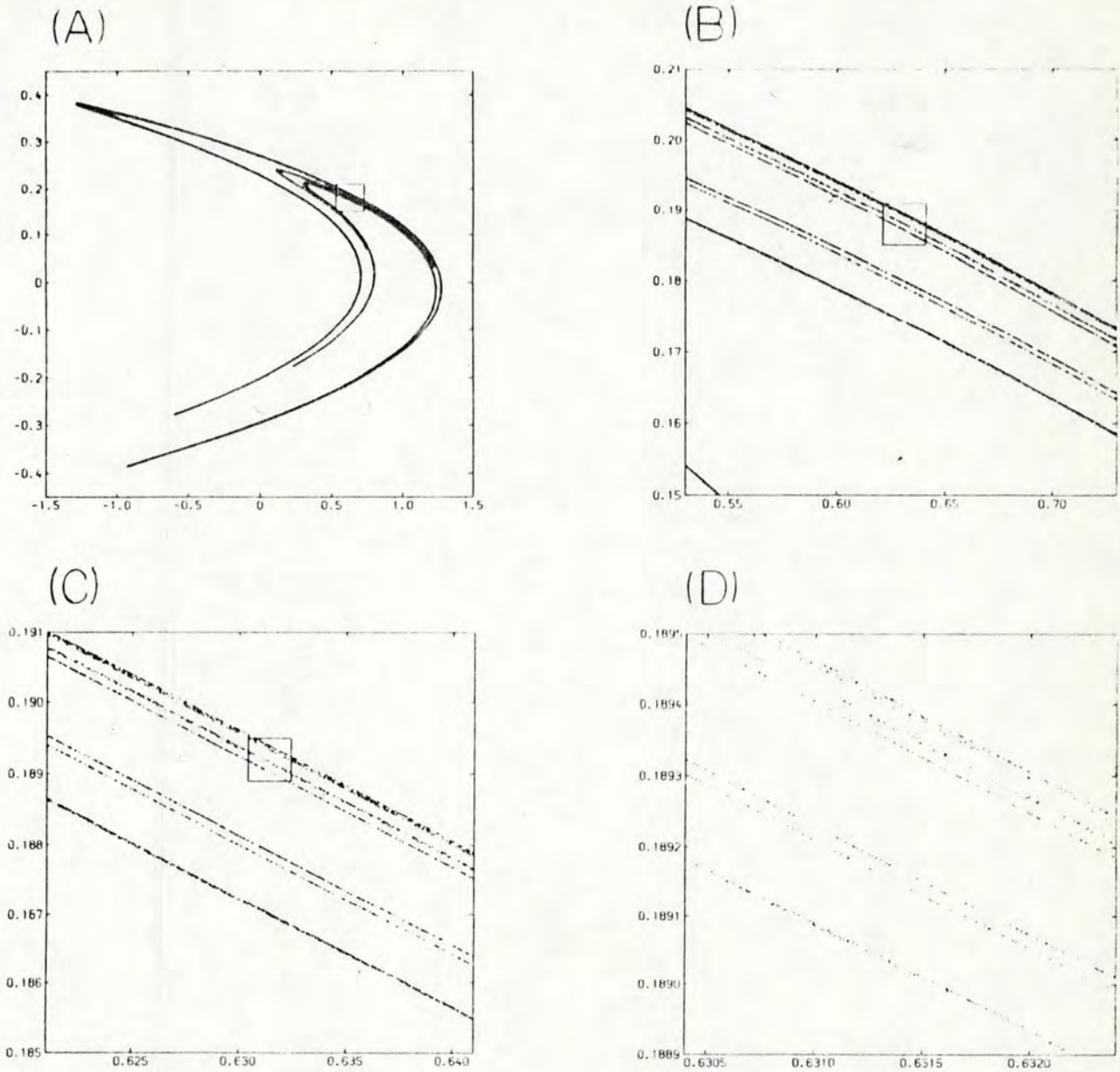


Figura 1.10 - (A) - Atrator de Hénon obtido de (1.17) com  $10^4$  iterações; (B) - ampliação do quadrado em (A),  $10^5$  iterações; (C) - ampliação do quadrado em (B),  $10^6$  iterações; (D) - ampliação do quadrado em (c),  $5 \times 10^6$  iterações.

na literatura várias definições de caos e vários critérios para determinar a sua ocorrência num determinado sistema. Toda esta dificuldade provém basicamente do problema de como definir-se adequadamente "movimento irregular". Por exemplo, a superposição de movimentos regulares com diferentes frequências poderia eventualmente simular um comportamento irregular e, é claro, uma definição de caos deve ser capaz de descartar tal simulação.

Os movimentos irregulares discutidos nas seções anteriores apareceram após infinitos dobramentos de período, provindos, porém, de equações completamente determinísticas. Este fato constitui a parte comum a várias definições de caos: caos é um movimento irregular proveniente de equações determinísticas (isto é, não envolvendo variáveis nem forças estocásticas). Movimento irregular significa aqui ausência de qualquer periodicidade no comportamento do sistema.

A característica básica dos sistemas que tratamos é que os dobramentos de período ocorrem, variando-se um parâmetro de controle apropriado. Sabe-se que o caos está associado à não linearidade das equações de movimento e, portanto, este parâmetro de controle determina a intensidade da não linearidade na equação. Diminuindo o seu valor, o sistema deverá apresentar um comportamento cada vez menos caótico, até que no limite correspondente à equação linear o comportamento deverá ser regular. Portanto, em se tratando de caos determinístico, deve ser sempre possível, pelo menos em princípio, observar a

transição que ocorre no sistema de um estágio regular a um estágio caótico, intensificando a não linearidade da equação. Este procedimento evidencia uma maneira de caracterizar o caos que é observar a transição ou rota para o caos. Neste trabalho enfocamos a rota do dobramento do período também conhecido como cenário de Feigenbaum.

Na evolução caótica de um sistema dinâmico determinístico, as trajetórias são caracterizadas pelas seguintes propriedades:

- a) são limitadas,
- b) são completamente aperiódicas,
- c) são sensíveis às condições iniciais, no sentido de que trajetórias inicialmente próximas divergem exponencialmente.

Segue-se então que as trajetórias estão confinadas num atrator no espaço de fase, o qual devido às propriedades acima é denominado de atrator estranho.

Apresentamos a seguir dois procedimentos usados para caracterizar um movimento irregular ou aperiódico: funções de correlação e decomposição em série de Fourier [36].

Seja  $c$  uma função de correlação entre uma variável  $q(t)$  num instante de tempo  $t$  e num instante posterior  $t+t'$ . A notação usual para tais funções de correlação é

$$c = \langle q(t)q(t+t') \rangle. \quad (1.19)$$

Porém, como não estamos lidando com processos aleatórios aqui, a média indicada na expressão acima não tem sentido. Entretanto, podemos substituir a média acima por uma média temporal da forma

$$c(t') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T q(t)q(t+t') dt \quad (1.20)$$

onde integramos em  $t$  primeiramente, deixando então o intervalo  $2T$  crescer infinitamente, ou seja, fazemos  $T$  tender ao infinito.

Se  $q(t)$  representa um movimento puramente periódico, segue que  $c(t')$  também será periódica. Por outro lado, para funções aleatórias (aperiódicas) devemos esperar uma função de correlação do tipo mostrado na figura 1.11 em que  $c(t')$  tende para zero à medida que  $t' \rightarrow \infty$ .

Outro procedimento consiste da decomposição de  $q(t)$  numa integral de Fourier

$$q(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right). \quad (1.21)$$

Calculando-se, agora,  $|c(\omega)|^2$  para um  $q(t)$  periódico, obtém-se um número finito de picos no espectro de potência. Por outro

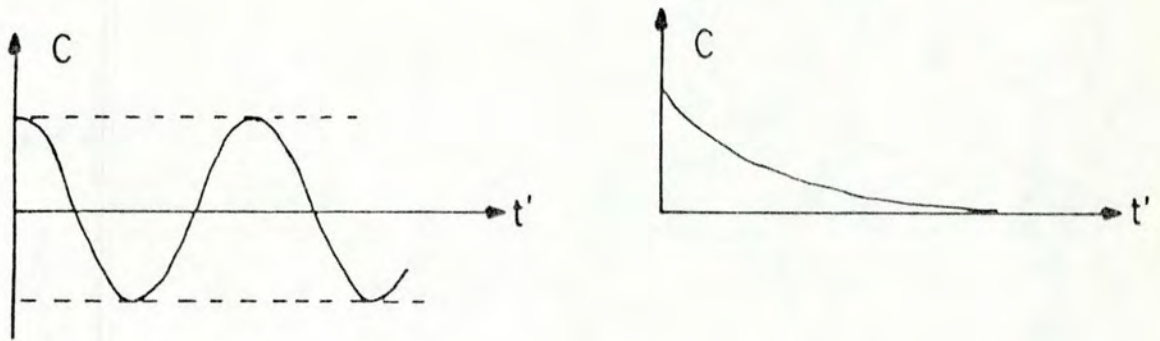


Figura 1.11

- (a) Função correlação para  $q(t)$  periódico. A amplitude não decai com o passar do tempo.
- (b) Função correlação para  $q(t)$  caótico. A amplitude tende a zero com o passar do tempo.

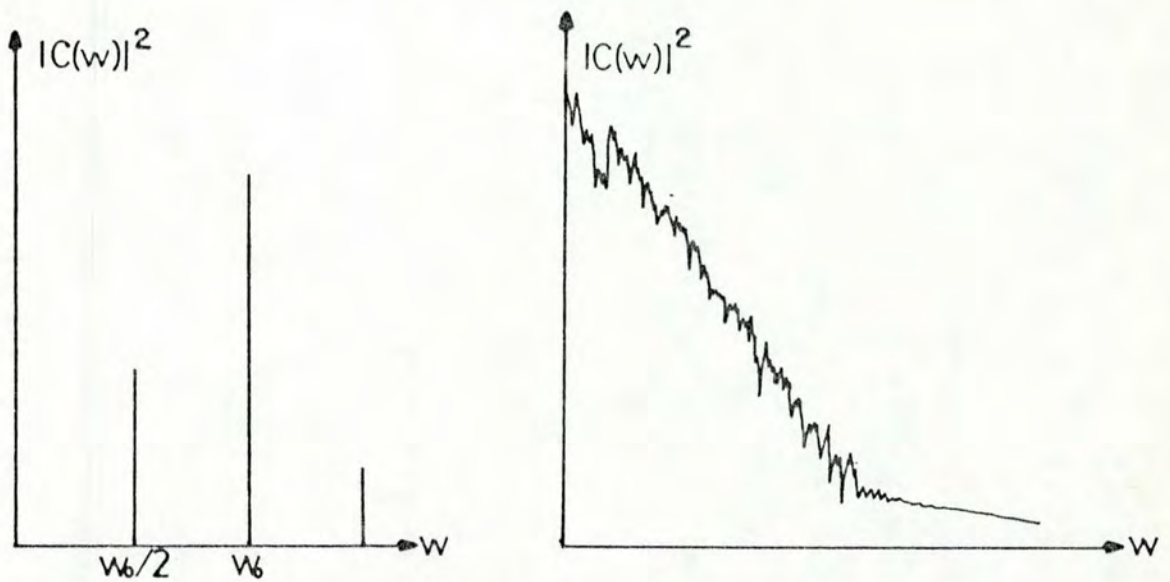


Figura 1.12

- (a) Exemplo de espectro de potência  $|c(w)|^2$  de uma variável  $q(t)$  puramente periódica.
- (b) Exemplo de espectro de potência de uma variável caótica.

lado, para um  $q(t)$  totalmente aperiódico corresponde uma banda larga e contínua de frequências (conforme a figura 1.12).

Os conceitos de função de correlação e decomposição em integral de Fourier, apresentados para o caso de um variável  $q(t)$  com  $t$  contínuo, podem facilmente ser estendidos para  $t$  discreto (ou seja: mapa discreto).

Os critérios expostos acima caracterizam um movimento caótico, mas não especificam se a sua origem é determinística ou estocástica. Justamente um dos maiores problemas desta área é distinguir caos determinístico de ruído estocástico. Assim sendo, embora funções de correlação, espectros de potência e observação da rota para o caos conjuntamente possam fornecer uma forte evidência de comportamento caótico determinístico, é desejável obter outros parâmetros que possam melhor caracterizá-lo e distingui-lo dos processos aleatórios. Descrevemos a seguir sucintamente alguns critérios usados para caracterizar caos determinístico:

a) Mapas de Poincaré: a evolução de um sistema dinâmico pode ser caracterizada por mapas de Poincaré. Se o sistema tiver uma evolução regular no tempo, o seu mapa de Poincaré será dado por um conjunto de pontos que se repetirão. Por outro lado, para uma evolução caótica determinística, os pontos irão se distribuir aleatoriamente numa particular seção do mapa, mas formarão, no conjunto, uma certa estrutura (figura 1.10). Uma

transformação de Poincaré aplicada a um sistema caótico randômico (estocástico), resultaria numa distribuição homogênea dos pontos no mapa, de modo a inexistir qualquer estrutura entre eles;

b) Dimensão Fractal: num sistema dissipativo, o volume ocupado pelo sistema no espaço de fase deve contrair com o passar do tempo. Por outro lado, num sistema caótico, trajetórias inicialmente próximas devem divergir exponencialmente no tempo. Estas duas exigências, aparentemente antagônicas, fazem com que as trajetórias no atrator estranho formem uma estrutura muito complexa em que há estiramento e dobramento das trajetórias. Tipicamente, um atrator estranho é constituído por uma superfície cheia de dobras e rugas com área infinita e que encerra um volume nulo. A dimensão desta "figura" é fracionária, característica de um fractal [35];

c) Entropia Kolmogorov: é uma propriedade dinâmica do atrator estranho que mede a "intensidade" do caos [37,38]. Num sistema ordenado espera-se que esta entropia tenha valor numérico 0, num sistema caótico randômico (estocástico) o seu valor deve ser infinito e para um sistema caótico determinístico espera-se um valor positivo definido;

d) Coeficiente de Liapunov: representa uma medida da estabilidade da solução de um sistema dinâmico. Se todos os coeficientes de Liapunov do sistema forem negativos a solução

será estável (regular). Agora, basta um coeficiente ser positivo para que a solução seja instável (caótica). A separação exponencial de trajetórias inicialmente próximas num sistema dinâmico é dada pelo maior coeficiente de Liapunov do sistema. Esta quantidade é negativa para um atrator tipo ponto fixo, é zero para um ciclo limite e é positiva para um atrator estranho [39]:

Consideremos como exemplo o mapa logístico dado pela equação 1.2, para o caso  $\lambda=1$ . Definindo-se  $X_n = \text{sen}^2 \theta_n$  temos  $\text{sen}^2 \theta_{n+1} = \text{sen}^2 2\theta_n$ , ou seja,  $\theta_{n+1} = 2\theta_n \pmod{\pi/2}$  e, portanto, o mapa logístico pode ser escrito para  $\lambda=1$  como

$$\theta_n = 2^n \theta_0 \quad (1.22)$$

A mudança de variáveis  $X_n \rightarrow \theta_n$  foi feita para se poder mostrar facilmente que a seqüência de números gerados pelo mapa logístico com  $\lambda=1$  é bastante sensível ao valor inicial  $\theta_0$  usado para começar a seqüência. Se substituirmos  $\theta_0 \rightarrow \theta_0 + \epsilon_0$  teremos  $\theta_n \rightarrow \theta_n + \epsilon_n$  onde

$$\epsilon_n = 2^n \epsilon_0 = \epsilon_0 e^{n \log 2} \quad (1.23)$$

A diferença  $\epsilon_n$  cresce, portanto, exponencialmente a uma taxa  $\log 2$ . Este expoente é o chamado expoente de Liapunov. Como neste caso o expoente de Liapunov é positivo, a seqüência gerada é bastante sensível ao valor inicial. Esta dependência sensível



nas condições iniciais é uma característica do caos. Dizemos, pois, que a sequência  $\{X_n\}$  gerada pelo mapa logístico com  $\lambda=1$  é "caótica" em vez de ser "ordenada".

Se  $\lambda \leq 1$  temos  $X_n + \epsilon_n = f^n(X_0 + \epsilon_0)$ , onde  $f^n$  é a  $n$ -ésima iteração de  $f$ , isto é,  $X_1 = f(X_0) \equiv f^1(X_0)$ ,  $X_2 = f(X_1) = f(f(X_0)) \equiv f^2(X_0)$ , etc. Portanto,

$$X_n + \epsilon_n \cong f^n(X_0) + \epsilon_0 f^{n'}(X_0) = X_n + \epsilon_0 f^{n'}(X_0), \quad (1.24)$$

ou seja,  $\epsilon_n = \epsilon_0 f^{n'}(X_0)$ , onde  $f^{n'} = df^n/dX$ . Da regra da cadeia segue que

$$f^{n'}(X_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(X_i) \quad (1.25)$$

e, portanto,

$$|\epsilon_n| = |\epsilon_0| \prod_{i=0}^{n-1} |f'(X_i)| = \epsilon_0 e^{nL_n} \quad (1.26)$$

onde

$$L_n = (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(X_i)|. \quad (1.27)$$

O limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(X_i)| \quad (1.28)$$

define o expoente de Liapunov do mapa  $X_{n+1}=f(X_n)$ . O cálculo numérico de  $L$  para o mapa logístico com  $\lambda=1$  nos dá  $L=\log 2$ , como deveria ser. A existência de expoentes de Liapunov positivos num sistema dinâmico é um sinal característico de evolução caótica.

Para finalizar, voltemos a abordar a evolução dinâmica. Conhecendo-se as condições iniciais e as equações de movimento de um sistema dinâmico, podemos, pelo menos em princípio, usar estes dados num computador, a fim de determinar a evolução deste sistema. Porém, como nenhuma grandeza pode ser medida com precisão infinita, decorre que na especificação das condições iniciais sempre há uma incerteza intrínseca. Além disso, um sistema físico real ainda está exposto a pequenas perturbações estocásticas (ruído). Assim sendo, num sistema com evolução caótica, ao contrário da evolução regular, a pequena incerteza intrínseca nos valores das variáveis bem como o ruído externo são amplificados exponencialmente, de modo que num curto espaço de tempo a evolução real do sistema é completamente diferente daquela calculada pelo computador. A própria precisão finita do computador age como um "ruído numérico" e acentua esta discrepância entre o resultado real e o calculado. Deste modo, é impossível acompanhar a evolução de sistemas caóticos, mesmo que estes sejam caracterizados por equações determinísticas.

## 1.4 - Universalidade

Vimos que os dois sistemas dinâmicos tratados antes (sistemas de equações diferenciais e mapas discretos) podem apresentar um comportamento qualitativo comum: uma série de sucessivas bifurcações do período (veja as figuras 1.2 e 1.9 (são as árvores de bifurcações)). O que queremos salientar agora é o caráter local da bifurcação e que esta é essência da teoria da universalidade. Esta teoria subdivide-se em universalidade estrutural (ou qualitativa) e universalidade métrica [31].

### 1.4.1 - Universalidade Estrutural

Iremos fundamentar a nossa análise em um mapa unidimensional. Isto não constitui uma restrição séria, pois, como vimos em 1.1, um sistema de equações diferenciais do tipo (1.1) pode ser transformado num mapa unidimensional através de uma transformação de Poincaré apropriada.

Então, retornando ao exemplo do mapa logístico (figura 1.6) verifica-se que a forma em arco da função  $f(x_n)$  garante que as trajetórias (isto é, as sucessivas iterações de  $f(x_n)$ ) fiquem confinadas. Esta função unidimensional dá uma descrição local de como as trajetórias são confinadas e convergem a um ciclo limite (como se vê nas figuras 1.7 e 1.8). Em princípio,  $f(x)$  é conhecida, pois pode-se determiná-la experimentalmente [40] ou computá-la das equações de movimento, quando estas são

conhecidas. A forma de  $f(X)$  depende da escolha do mapa de Poincaré e obter uma expressão analítica para  $f(X)$  é difícil. De qualquer modo, sabe-se qual deve ser a aparência genérica de  $f(X)$ . A fim de confinar as trajetórias,  $f(X)$  deve cair nos dois extremos, portanto, tem um máximo.

Relembremos, agora, o que acontece com as iterações, quando o parâmetro de não linearidade em (1.12) é variado. Para  $\lambda < \lambda_1$ , as trajetórias convergem a um ponto fixo. Aumentando-se  $\lambda$ , observa-se que, para  $\lambda = \lambda_1$ ,  $|f'(X)| < 1$  e o ponto fixo dá origem a um ciclo 2 em  $f(X)$ . Como vimos, isto corresponde a uma bifurcação da trajetória. Os pontos do ciclo 2 em  $f(X)$  são pontos fixos de  $f^2(X)$ . Continuando a incrementar  $\lambda$ , temos que, para  $\lambda = \lambda_2$ ,  $|f^2(X)| < 1$  e o ciclo 2 se desdobra num ciclo 4. Os pontos do ciclo 4 em  $f(X)$  são, por sua vez, pontos fixos de  $f^4(X)$ . E assim, para  $\lambda = \lambda_n$ , tem-se  $|f^{2^{n-1}}(X)| < 1$  com o ciclo  $2^{n-1}$  em  $f(X)$ , convertendo-se num ciclo  $2^n$  e sendo os pontos do ciclo  $2^n$  pontos fixos de  $f^{2^n}(X)$ .

Isto explica porque as trajetórias se bifurcam na seguinte sucessão:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$ . O argumento usado não depende da forma precisa de  $f(X)$  e, portanto, o fenômeno das sucessivas bifurcações das trajetórias constitui uma propriedade qualitativa universal. Este resultado foi descoberto por Metropolis, Stein e Stein [41]. Neste trabalho eles relatam que, dada uma função  $f(X)$  unidimensional com um máximo diferenciável e sendo que  $f(X)$  cai monotonicamente dos dois lados deste

máximo, então tem-se que as trajetórias de período estável em  $f(X)$  seguem um arranjo ordenado independente da particular forma de  $f(X)$ . Em função disso, denomina-se esta sequência pré-estabelecida de períodos estáveis de "sequência Universal". Por exemplo, na figura 1.13 observa-se que, para  $f(X)=4\lambda X(1-X)$ , as trajetórias visíveis de período estável estão na sequência 1,2,4,8,6,5,3. O mesmo arranjo é visto para  $f(X)=1-\mu X^2$ , conforme a figura 1.13. Fazendo-se a lista de todas as trajetórias de período estável possíveis, observa-se que há algumas trajetórias de período básico  $k$ , de modo que depois de cada período  $k$  segue uma sequência infinita de períodos  $k.2, k.4, k.8, \dots, k.2^n, \dots$ . Isto se vê claramente nas figuras 1.13 para  $k=1$  e, em menor escala, para  $k=3$ . Em particular não existe uma região aperiódica entre  $k.2^n$  e  $k.2^{n+1}$ . Estas observações constituem a chamada universalidade estrutural ou qualitativa. Como veremos a seguir, estas "sequências de bifurcações sub-harmônicas" também permitem previsões quantitativas.

#### 1.4.2 - Universalidade Métrica

Vimos que as bifurcações num ciclo  $2^n$  em  $f(X)$  ocorrem, quando os pontos fixos de  $f^{2^n}$  têm  $|f^{2^n}'(X)| < 1$ . Nestas condições, o ciclo  $2^n$  se desdobra num ciclo  $2^{n+1}$  em  $f(X)$ . Agora, para se observar isto, não é necessário acompanhar todos os pontos fixos de  $f^{2^n}(X)$ , pois, como vimos, pela regra da cadeia todos estão amarrados um ao outro. Então, basta se

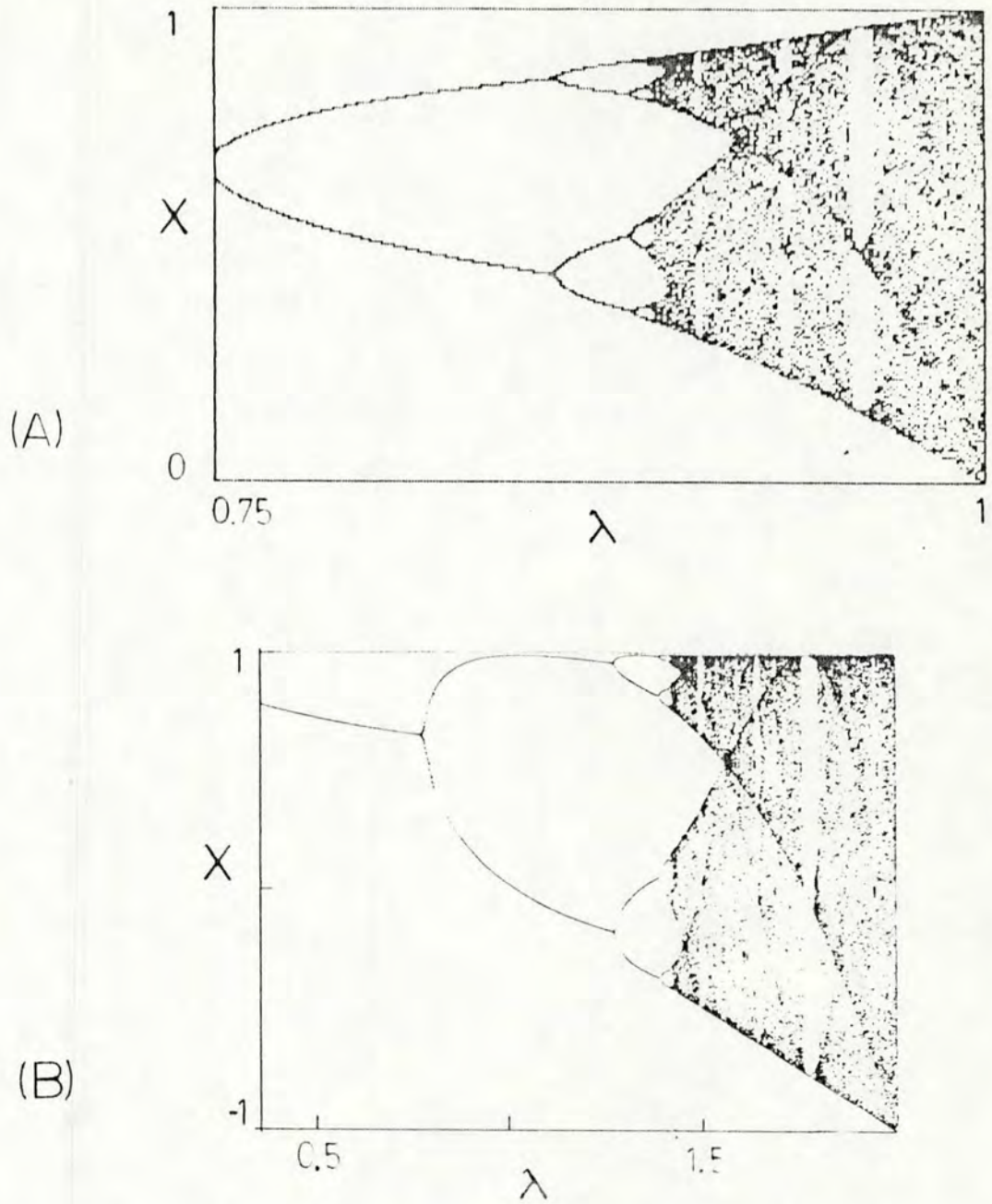


Figura 1.13 - O mapa logístico (A),  $f(x)=4\lambda x(1-x)$ , e o mapa quadrático (B),  $f(x)=1-\mu x^2$ , apresentam a "Seqüência Universal".

concentrar num ponto fixo para caracterizar as sucessivas bifurcações de um ciclo  $2^n$  para outro ciclo  $2^{n+1}$  em  $f(x)$ . Assim sendo, consideremos uma progressão de valores  $\lambda_n$  tais que  $x=1/2$  seja um ponto fixo em  $f^{2^n}$ . Cada  $\lambda_n$  caracteriza um ciclo  $2^n$  em  $f(x)$ . As figuras 1.14 e 1.15 mostram isto para  $n=1$  e  $n=2$ .

Para as considerações posteriores, é conveniente fazer uma transformação de coordenadas tal que  $(x=1/2, y=1/2) \rightarrow (x=0, y=0)$ . Assim, observando-se as redondezas dos sucessivos pontos fixos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  de  $f^{2^n}(x)$ , nota-se que elas são muito parecidas entre si. De fato, verifica-se esta semelhança, comparando a porção da figura 1.15a, inserida dentro do quadrado tracejado, com a figura 1.14a. Agora, se o quadrado tracejado da figura 1.15a for refletido através da origem e então ampliado por um fator  $\alpha$  apropriado, resulta que este quadrado com a curva é idêntico ao da figura 1.14a. Esta operação acima consiste numa transformação  $T$  aplicada sobre  $f^{2^n}(\lambda_2, x)$  tal que

$$Tf^{2^n}(\lambda_2, x) = f(\lambda_1, x), \quad (1.29)$$

sendo

$$Tf^{2^n}(\lambda_2, x) = -\alpha f^{2^n}(\lambda_2, x/(-\alpha)). \quad (1.30)$$

Em cada um destes quadrados temos um "pedaço" de uma função que

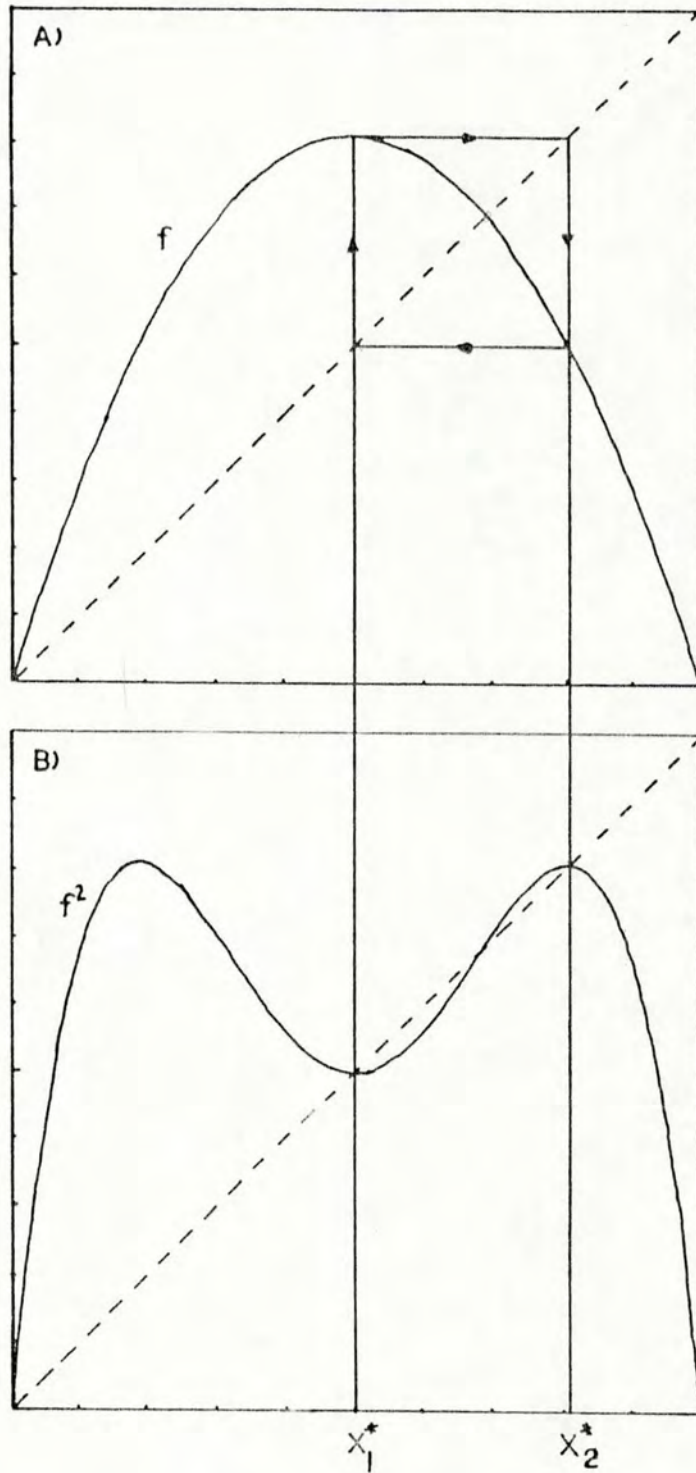


Figura 1.14 - Um ciclo 2 estável para  $\lambda = \lambda_1$ .  $x_1^*$  e  $x_2^*$  localizam-se nos extremos de  $f^2$ .



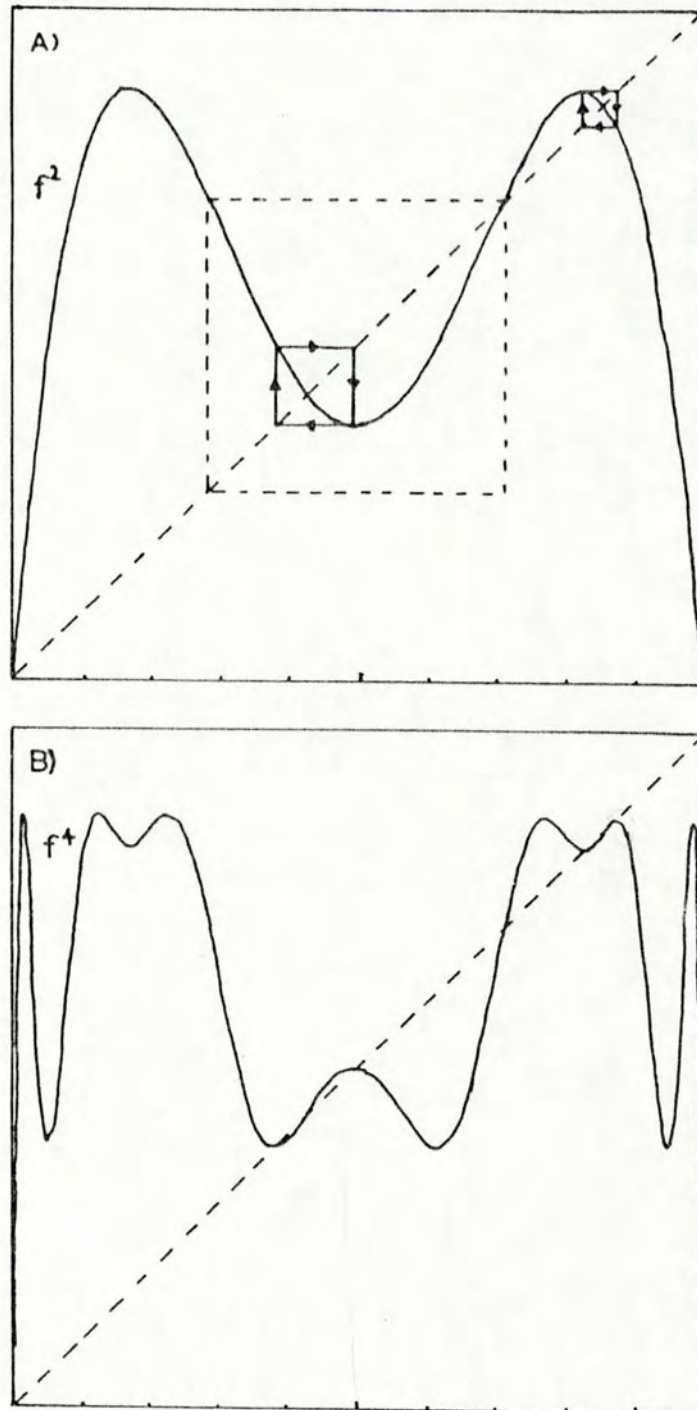


Figura 1.15 - Um ciclo 4 estável para  $\lambda = \lambda_2$ . Compare a região no interior do quadrado tracejado com toda a figura 1.14a..

tem o mesmo tipo de máximo em  $x=0$  e cai a zero no canto direito do quadrado. Repetindo esta operação I sobre as  $f^{2^n}(\lambda_{n+1}, x)$  seguintes, temos uma sucessão de curvas dentro de um quadrado. A superposição para as 5 primeiras curvas está representada na figura 1.16. Observa-se que, dentro do limite da resolução da figura, as últimas 3 curvas são coincidentes. Portanto, segue que as sucessivas operações I convergem a uma função  $g_1(x)$  que é a curva limite inscrita no quadrado da figura 1.16. Assim, temos

$$g_1(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}(\lambda_{n+1}, x) / (-\alpha)^n \quad (1.31)$$

Pelo fato desta função ser obtida, considerando intervalos cada vez menores em torno do máximo de  $f(x)$ , praticamente toda a informação original sobre a  $f(x)$  é perdida e resulta uma função universal,  $g_1(x)$ . Esta função é o limite universal de todas iterações de todas  $f$  com um extremo quadrático.

Da mesma forma como se construiu a função universal  $g_1(x)$ , podemos obter outras funções universais  $g_r(x)$  dadas por

$$g_r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}(\lambda_{n+r}, x) / (-\alpha)^n \quad (1.32)$$

Assim, pela definição, em  $x=0$ , a função  $g_1(x)$  acomoda um ciclo 2, a função  $g_2(x)$  acomoda um ciclo 4, a

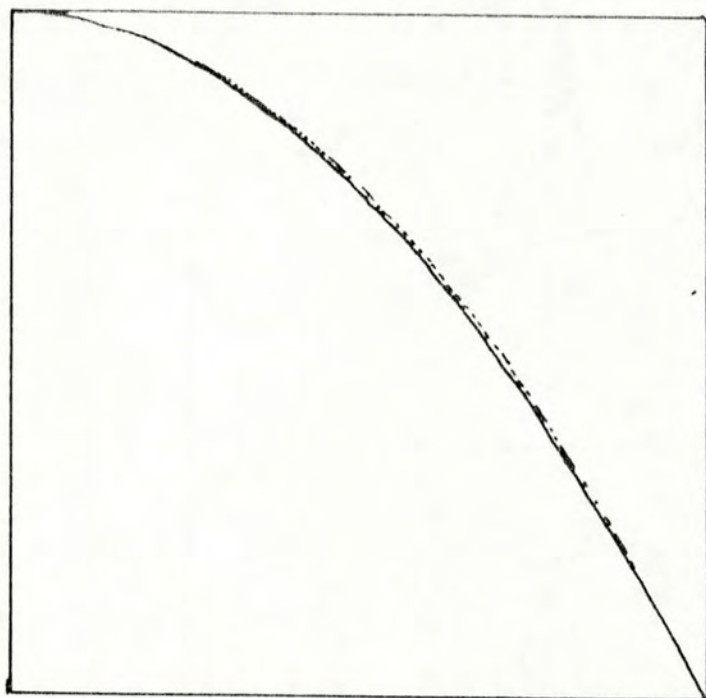


Figura 1.16 - A superposição dos "quadrados tracejados", convenientemente ampliados, das  $f^{2^{n-1}}$  em  $\lambda_n$  (como nas figuras 1.14a, 1.15a, ...).

função  $g_n(x)$  acomoda um ciclo  $\theta$  e assim por diante como esquematiza a figura J.17a. A sucessão de funções  $g_r(x)$  converge e, deste modo, define outra função universal

$$g(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} g_r(x) \quad (1.33)$$

Pode-se verificar de (1.32) que vale a seguinte relação entre as sucessivas  $g_r(x)$

$$g_{r-1}(x) = -\alpha g_r(x/(-\alpha)). \quad (1.34)$$

Da equação (1.33) segue então que  $g(x)$  satisfaz

$$g(x) = -\alpha g(x/(-\alpha)) \quad (1.35)$$

que é conhecida como a "equação universal".

A função  $g(x)$  se autoreproduz, quando ela é iterada e ampliada por um fator de escala  $-\alpha$ . A função tem um máximo quadrático em  $x=0$  e é simétrica em relação a  $x=0$ . Como  $g(x)$  é invariante frente a uma transformação de escala, convencionou-se introduzir a normalização  $g(0)=1$ . Substituindo este resultado em (1.35) vem

$$g(0) = 1 = -\alpha g(g(0)) = -\alpha g(1) \quad (1.36)$$

de modo que

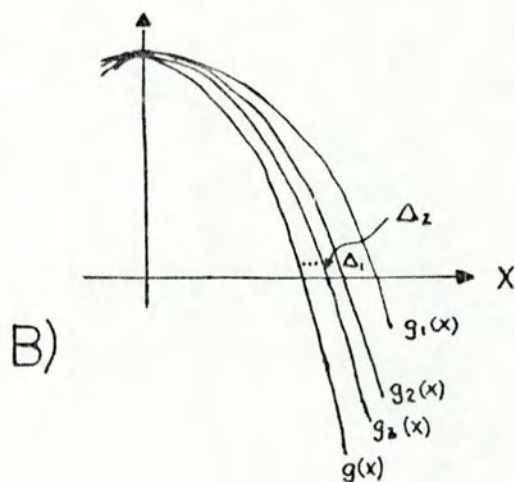
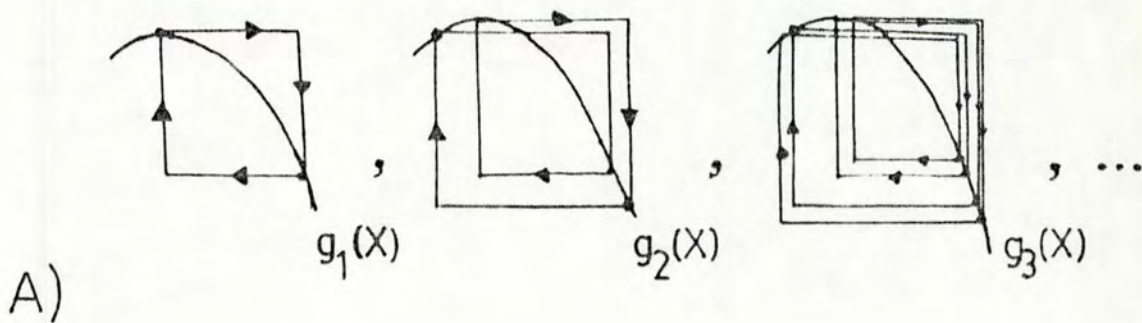


Figura 1.17 - (A) Sequência de funções universais,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ , ..., correspondentes a ciclo 2, ciclo 4, ciclo 8, ... . A função universal  $g(x)$  é  $g_\infty(x)$  nesta sequência (isto é, corresponde a um ciclo  $2^\infty$ ). (B) A partir das intersecções das  $g_n(x)$  com o eixo  $X$  obtém-se que  $\Delta_1/\Delta_2 \rightarrow 0$ .

$$\alpha = -1/g(1). \quad (1.37)$$

Só existe uma única solução para a equação (1.35) que, através de (1.37), determina

$$\alpha = 2.502907875\dots \quad (1.38)$$

Como  $\alpha$  é determinada a partir de uma equação universal, segue que  $\alpha$  é uma constante universal.

Consideremos agora a sequência de funções  $g_1(X)$ ,  $g_2(X)$ ,  $g_3(X)$ , ...,  $g_r(X)$ , ... . A função  $g(X)$  é  $g_r(X)$  nesta sequência. Para analisar a convergência desta sequência, observa-se a intersecção dos gráficos da  $g_r(X)$  com o eixo  $X$  e computa-se a razão  $\Delta_r/\Delta_{r+1}$  conforme está esquematizado na figura 1.17b. Verifica-se então que

$$\frac{\Delta_r}{\Delta_{r+1}} \rightarrow \xi = 4.6692016\dots \text{ para } r \text{ grande.} \quad (1.39)$$

Como as funções  $g_r(X)$  são universais, resulta que  $\xi$  determinado a partir delas é também uma constante universal.

Com isto, mostramos que a natureza local das sucessivas bifurcações leva às seguintes previsões quantitativas universais: (a) a convergência das bifurcações é determinada por uma constante universal  $\xi$  e (b) a razão entre os espaçamentos

das sucessivas bifurcações da trajetória é determinada pelo fator universal de escala  $\alpha$ . Na realidade, o  $\alpha$  determinado pela equação universal define a escala da trajetória perto do máximo de  $f(X)$ . Convém enfatizar que o importante em  $f(X)$  é a natureza do seu máximo. O comportamento assintótico das trajetórias depende somente de um segmento infinitesimal no pico do gráfico de  $f(X)$ . O resto da forma da função, mesmo que próxima do pico, é irrelevante. Esta descoberta empírica, feita por Feigenbaum e que envolve duas constantes universais de escala ( $\alpha$  e  $\delta$ ), caracteriza a transição para o caos por uma sequência de infinitos dobramentos do período e representa um outro tipo de universalidade: a universalidade métrica.

É importante resumir o que vimos até aqui: iniciamos com um sistema dinâmico multidimensional bastante complicado. Um mapa de Poincaré reduz o problema de um sistema de equações diferenciais para um sistema de iterações discretas. A dissipação reduz a dimensão do sistema, de modo que resulta um mapa unidimensional. As bifurcações sucessivas das trajetórias se dão em regiões cada vez menores do espaço de fase e praticamente toda a memória do sistema original é perdida. Nesta situação o comportamento do sistema em foco assume uma característica universal. Qualquer propriedade que puder ser extraída do regime assintótico de dobramento do período é universal. A questão é obter aquelas características universais que têm uma chance de serem verificadas experimentalmente.

### 1.5 - Ruído Externo

Um experimento físico real está sujeito a pequenas flutuações de natureza estocástica, fenómeno que se denomina ruído. Em função disto, surge a preocupação: as bifurcações que descrevemos antes sobrevivem ao ruído numa experiência real? Poder-se-ia pensar que no regime assintótico, onde a teoria da universalidade se aplica, o ruído se desenvolveu de tal forma que ele seja dominante sobre o sinal que queremos observar. Porém, em se tratando de sistemas dinâmicos dissipativos, o ruído não cresce ilimitadamente, mas também é amortecido.

Para analisar o efeito do ruído num sistema dinâmico caótico, consideremos como exemplo o mapa logístico com a adição de um termo correspondente a um ruído externo de pequena amplitude:

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1-x_n) + \sigma \xi \quad (1.40)$$

onde  $\sigma$  é a amplitude do ruído e  $\xi$  é uma variável aleatória que simula o ruído e satisfaz as condições

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle = 1. \quad (1.41)$$

A figura 1.18 representa o efeito de um ruído externo sobre as iterações do mapa logístico.



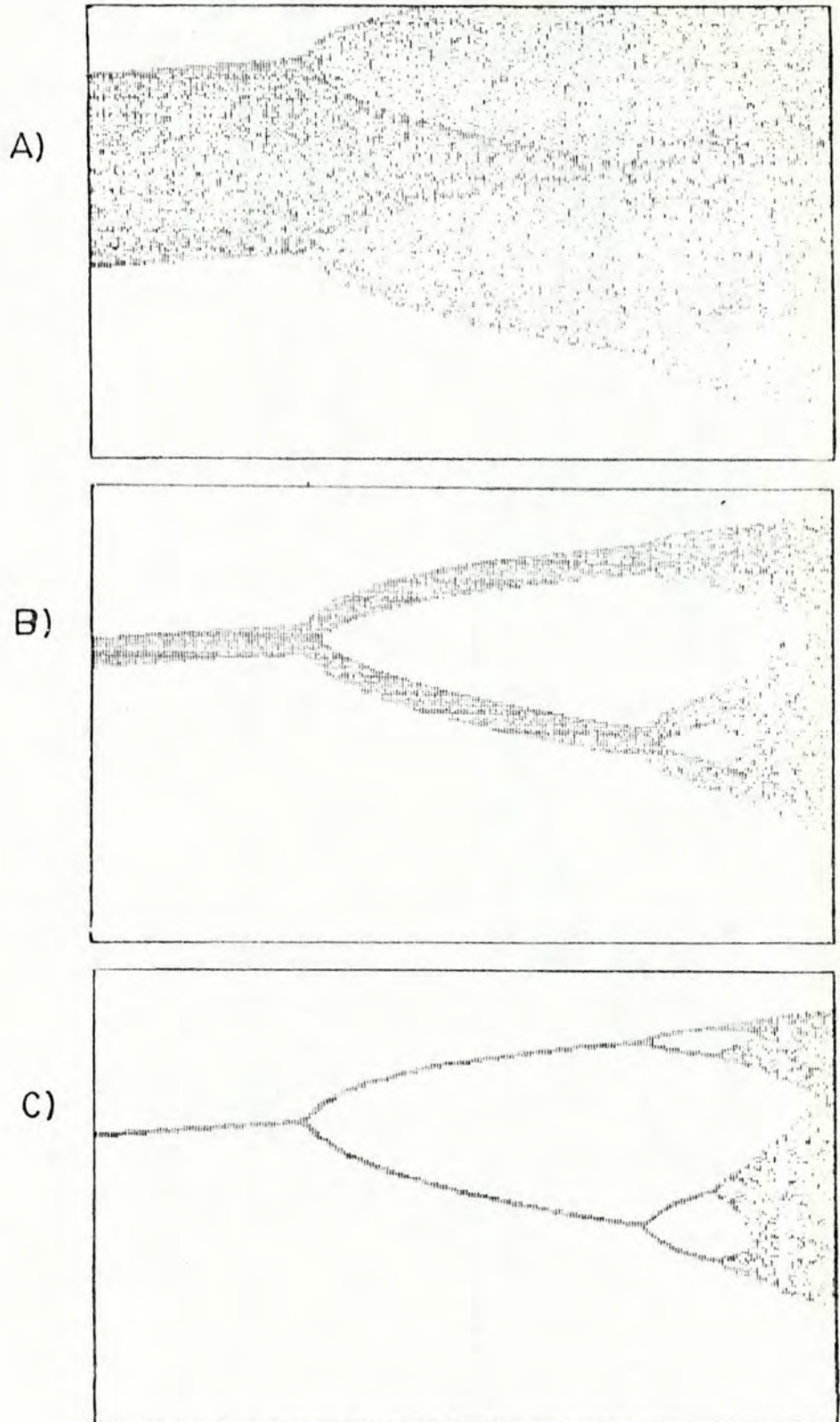


Figura 1.18 - Mapa logístico com ruído externo. O ruído diminui de A a C.

Analisando as figuras 1.18a, b, c, verifica-se que o efeito do ruído consiste em truncar a sequência de bifurcações. Quanto maior a amplitude do ruído, observa-se um número cada vez menor de bifurcações antes que se estabeleça o caos. Este resultado era previsível, pois, tão logo que a amplitude da separação das trajetórias, após uma bifurcação, for da mesma ordem da amplitude do ruído, as bifurcações não podem mais ser resolvidas [42]. Na verdade, as bifurcações já se tornam invisíveis antes disto. Como depois de cada bifurcação o período dobrou, há duas vezes mais tempo para se acumular os efeitos do ruído. Assim, a trajetória se torna mais ruidosa após cada bifurcação. Se  $\epsilon_n$  é o nível de ruído na  $n$ -ésima bifurcação e  $\epsilon_{n+1}$ , o nível de ruído na bifurcação seguinte, pode-se mostrar que [43]

$$\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} = \kappa = 6.61903\dots \quad (1.42)$$

$\kappa$  é o fator pelo qual o ruído aumenta de uma bifurcação para a próxima e também é um número universal como  $\alpha$  e  $\lambda$ .  $\kappa^n \epsilon = 1$  determina a  $n$ -ésima bifurcação ainda visível. Na figura 1.18 a amplitude  $\sigma$  foi escolhida de tal forma que em a):  $\sigma = 1/\kappa$ , em b):  $\sigma = 1/\kappa^2$  e em c):  $\sigma = 1/\kappa^3$ .

Desta análise sobre o efeito de um ruído (estocástico) externo num sistema dinâmico caótico conclui-se que, para observar experimentalmente mais uma bifurcação, é necessário, além de uma resolução mais fina no espaço de fase e no parâmetro de não linearidade, um ruído menor.

## 2 - CAOS EM DESCARGAS ELÉTRICAS

Os plasmas gasosos e, em especial, as descargas elétricas em meio gasoso estão entre os sistemas não lineares de maior interesse. Este interesse decorre de suas aplicações práticas (por exemplo: meios para lasers, lâmpadas, reações químicas, etc.) e do estudo de suas propriedades intrínsecas. Ainda que a possibilidade de plasmas mostrarem um comportamento caótico determinístico tenha sido discutida teoricamente, até o presente trabalho nenhuma demonstração experimental de tal comportamento em plasmas de baixa energia havia sido dada.

O gás possui um comportamento elétrico peculiar. À temperatura e pressão ambiente, ele é um isolante quase perfeito, mas também pode tornar-se um excelente condutor, se aplicarmos nele um campo elétrico suficientemente intenso. A condução de eletricidade no gás após a ruptura é muito diferente daquela em líquidos e metais. Nestes últimos, a condução em geral é devida a portadores de carga que já existem no meio. Em contraste, no gás, após a ruptura, é o campo elétrico que cria os portadores de corrente. Uma consequência disto é que a condução de eletricidade em gases é um processo extremamente complexo, não linear e com uma fenomenologia muito rica. A nível microscópico, colisões e processos radioativos são dominantes. A nível macroscópico, devemos considerar as diversas regiões e regimes da descarga, além das instabilidades do plasma.

Neste capítulo revisaremos vários destes processos, principalmente aqueles que têm relação com descargas em gases nobres fracamente ionizados. A seguir, discutimos um modelo simplificado da condutibilidade elétrica e a característica  $V \times I$  do plasma na descarga elétrica. Nas duas últimas seções descrevemos a configuração experimental empregada para observar caos determinístico na descarga e apresentamos os resultados experimentais que evidenciam isto.

## 2.1 - Processos Fundamentais na Descarga Elétrica

Os átomos e/ou moléculas que constituem o gás, em condições normais, são eletricamente neutras. Portanto, o gás no seu estado normal é isolante. Com o intuito de simplificar a discussão, doravante, quando falamos em moléculas, referimo-nos às espécies atômicas e moleculares constituintes do gás. A fim de que o gás conduza uma corrente elétrica, é necessário ionizá-lo para criar-se cargas livres. Dizer que o gás está ionizado implica considerar que através de algum mecanismo separou-se um ou mais elétrons de algumas moléculas do gás, resultando um meio gasoso contendo elétrons, íons e moléculas neutras.

Devido à radiação cósmica, radioatividade natural do meio ambiente e outros fatores, sempre existem no gás algumas cargas elétricas livres. Estas cargas são responsáveis por uma

certa condutibilidade elétrica do gás em seu estado normal. Aplicando-se um campo elétrico ao gás, este campo pode fornecer energia suficiente às cargas livres para que elas ionizem, por colisão, as moléculas do gás, criando assim novos portadores de carga. Gera-se desse modo um processo em cadeia de multiplicação de cargas livres, denominado de ruptura, e que culmina com o estabelecimento da descarga elétrica. Portanto, a descarga elétrica é um processo no gás que se caracteriza por um aumento drástico na condutibilidade elétrica causado e sustentado pelo campo elétrico externo. Através da descarga, o gás passou repentinamente de isolante quase perfeito para ótimo condutor elétrico.

O gás passou a ser condutor, porque surgiu um fluxo de cargas elétricas livres no mesmo, rompendo o seu comportamento isolante. A manutenção deste fluxo de cargas implica a transferência de energia do campo elétrico externo para os elétrons e íons. Os elétrons, pela sua pequena inércia, adquirem mais energia do campo externo do que os íons. Por intermédio das colisões inelásticas, os elétrons transferem energia às moléculas do meio, criando diversas espécies excitadas, tais como: moléculas excitadas (eletrônica, vibracional ou rotacional), moléculas metaestáveis e íons. Estas espécies excitadas perdem energia por:

- a) colisões com outras espécies;
- b) colisões com as paredes do recipiente que contém a

descarga;

- c) radiação que é responsável pela luminosidade característica das descargas.

Além das colisões ionizantes dos elétrons livres iniciais com as espécies da descarga, elétrons livres também podem ser gerados pelos seguintes processos:

- a) a difusão de metaestáveis para as paredes onde eles liberam elétrons, ao perderem sua energia;
- b) o choque dos íons com o catodo, provocando a emissão de elétrons secundários;
- c) a colisão de metaestáveis com as espécies excitadas da descarga.

Além dos processos de criação de cargas livres, há na descarga os correspondentes processos de neutralização. Os íons e elétrons gerados na descarga elétrica podem neutralizar-se de diversas maneiras, principalmente pelos seguintes mecanismos:

- a) a colisão nos eletrodos;
- b) a difusão, seguida da neutralização dos íons nas paredes;
- c) a recombinação de íons com elétrons na descarga. Este processo deve ser assistido por um terceiro corpo capaz de tomar o excesso de momentum e energia.

Numa descarga operando em regime estacionário, os processos de criação e neutralização de cargas operam conjuntamente de tal forma que haja um equilíbrio de cargas livres. Na verdade, numa descarga elétrica não é todo o gás que se ioniza, apenas uma pequena fração dele.

De fato, queremos ressaltar que aqui consideramos a descarga elétrica num gás confinado a pressão de alguns Torr e com uma corrente tal que a ionização do gás seja uma fração em torno de 1%. Portanto, o meio da descarga consiste primordialmente de espécies neutras. Isto é uma importante distinção a fazer, pois gases completamente ionizados, consistindo inteiramente de partículas carregadas (elétrons e íons), têm um comportamento e mecanismos completamente diferentes do que os gases fracamente ionizados [44].

## 2.2 - Caracterização da Descarga Elétrica

Para os nossos propósitos é suficiente encarar a descarga elétrica num gás como componente macroscópica não linear de um circuito elétrico onde ela é submetida a uma certa tensão e conduz determinada corrente. Portanto, estamos interessados em saber qual é a corrente  $I$  conduzida pela descarga, quando é aplicada uma tensão  $V$  ao gás. Este tipo de informação constitui a característica  $V \times I$  da descarga elétrica. Antes, porém, de analisar a característica  $V \times I$  da descarga

elétrica, apresentamos um modelo básico que nos dá uma idéia de como ocorre a condução elétrica num gás.

### 2.2.1 - A Condutibilidade Elétrica na Descarga

O modelo mais simples de explicar a condutibilidade elétrica do gás imerso num campo elétrico externo se obtém, supondo que esta condutibilidade é devida essencialmente ao movimento dos elétrons num meio de átomos e íons quase estacionários. Assume-se que as colisões predominantes entre as espécies do gás sejam os choques dos elétrons com as moléculas neutras. Este modelo se aplica muito bem a um gás fracamente ionizado, onde as colisões entre os elétrons e as espécies neutras do gás são dominantes. Estas colisões constituem uma força retardadora do tipo viscoso sobre o movimento dos elétrons. Aplicando-se as leis de Newton para descrever a ação das forças externas atuando sobre um elétron, obtemos a chamada equação de Langevin [44]:

$$\frac{d}{dt} m\mathbf{u} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - m\nu_m \mathbf{u} \quad (2.1)$$

O primeiro termo do lado direito é a força de Lorentz e o segundo termo representa a perda de momentum do elétron devido às colisões.  $m$  é a massa do elétron e  $\mathbf{u}$  é a sua velocidade média, também chamada de velocidade de arraste do elétron.  $\nu_m$  é a frequência de colisão do elétron. As colisões farão com que a velocidade do elétron, inicialmente



orientada com o campo elétrico, tenha uma distribuição aleatória. Nesse sentido,  $\nu_m$  representa, na média, a taxa de perda do momentum do elétron. Assim, a solução da equação anterior fornece a velocidade de um elétron "médio" que é suposto como representativo de todos os demais elétrons da descarga. Supondo apenas aplicado um campo elétrico DC, no regime estacionário, a solução de (2.1) é

$$u = \frac{-eE}{m\nu_m} \quad (2.2)$$

Uma vez conhecida a velocidade de arraste do elétron na descarga elétrica, a densidade de corrente elétrica nesta descarga devida ao movimento de todos os elétrons do gás é dada por:

$$J = -neu = \frac{ne^2E}{m\nu_m} \quad (2.3)$$

onde  $n$  é a densidade de elétrons por unidade de volume no gás. Nota-se que a densidade de corrente eletrônica é diretamente proporcional ao campo elétrico ( $J = \sigma E$ ), sendo a constante de proporcionalidade chamada de condutividade elétrica. Assim, a condutividade elétrica do gás na descarga é:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m\nu_m} \quad (2.4)$$

ou seja, uma grandeza que depende da natureza do gás. É obvio que a frequência de colisão  $\nu_m$  está diretamente relacionada

com o número de moléculas neutras com as quais os elétrons colidem, de modo que  $\nu_m$  é diretamente proporcional à pressão  $P$  do gás (para uma temperatura constante). Assim, podemos concluir que a corrente elétrica conduzida por um gás numa descarga elétrica depende essencialmente do tipo do gás e da razão  $E/P$ .

Finalizando, queremos ressaltar que, embora no presente modelo tenhamos assumido  $\nu_m$  independente de  $u$ , a frequência de colisão pode ser uma função da velocidade dos elétrons e, então, a equação (2.2) será :

$$u = \frac{-eE}{m\nu_m(u)} . \quad (2.5)$$

Assim, a condutibilidade elétrica na descarga pode ser uma função não linear das suas variáveis.

Uma descrição microscópica mais detalhada da descarga elétrica envolve a solução da equação de Boltzmann e funções de distribuição [44]. Para muitos processos que ocorrem em descargas elétricas não necessitamos conhecer tais processos microscópicos em detalhe, mas apenas valores médios de grandezas como densidade de portadores de cargas, velocidade e energia. Isto é essencialmente uma descrição macroscópica, baseada nas equações de fluido, obtidas através de médias apropriadas da equação de Boltzmann. O plasma é visto assim como um fluido. Na verdade muitas das propriedades básicas das descargas podem ser

explicadas com base em equações de fluido [44]. A densidade de corrente  $J=nev$ , por exemplo, é controlada pela equação

$$\frac{dn}{dt} - DV^2n = \alpha n - \beta n^2 \quad (2.6)$$

onde  $D$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de difusão, ionização e recombinação, respectivamente.

### 2.2.2 - A Característica $V \times I$ da Descarga Elétrica

A fim de identificar características básicas das descargas gasosas, analisaremos um caso simplificado, porém genérico. Consideremos um tubo de vidro cilíndrico, com dois eletrodos planos em suas extremidades, contendo um gás a baixa pressão (isto é, pressões menores que 10 Torr). O tubo de descarga é conectado em série com uma resistência variável  $R$  e uma fonte ajustável de tensão  $V_F$ , como ilustra a figura 2.1a, com a fonte sustentando uma diferença de potencial contínua  $V$  entre o anodo (eletrodo positivo) e o catodo (eletrodo negativo). Quando se estabelece uma descarga elétrica no gás, flui uma corrente  $I$  pelo circuito. A resistência  $R$  serve para limitar esta corrente. Portanto, variando-se  $R$ , altera-se  $I$ . Desse modo, podemos obter a curva Volt-Ampere ( $V \times I$ ) característica de uma descarga gasosa. Uma destas curvas está representada na figura 2.1b. Embora a forma da curva seja genérica para os diferentes gases a baixa pressão, há pequenas variações nos detalhes conforme o tipo do gás, sua densidade,

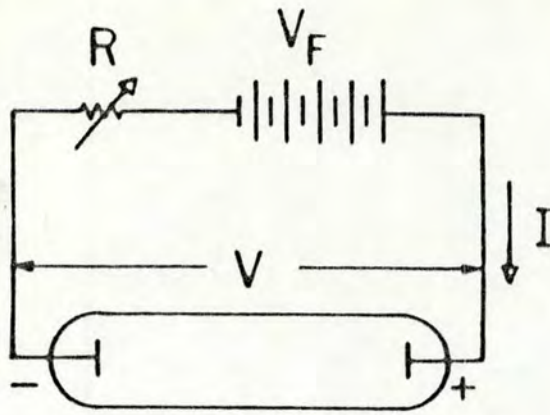


Figura 2.1a - Arranjo experimental característico para a geração de descargas elétricas em gases.

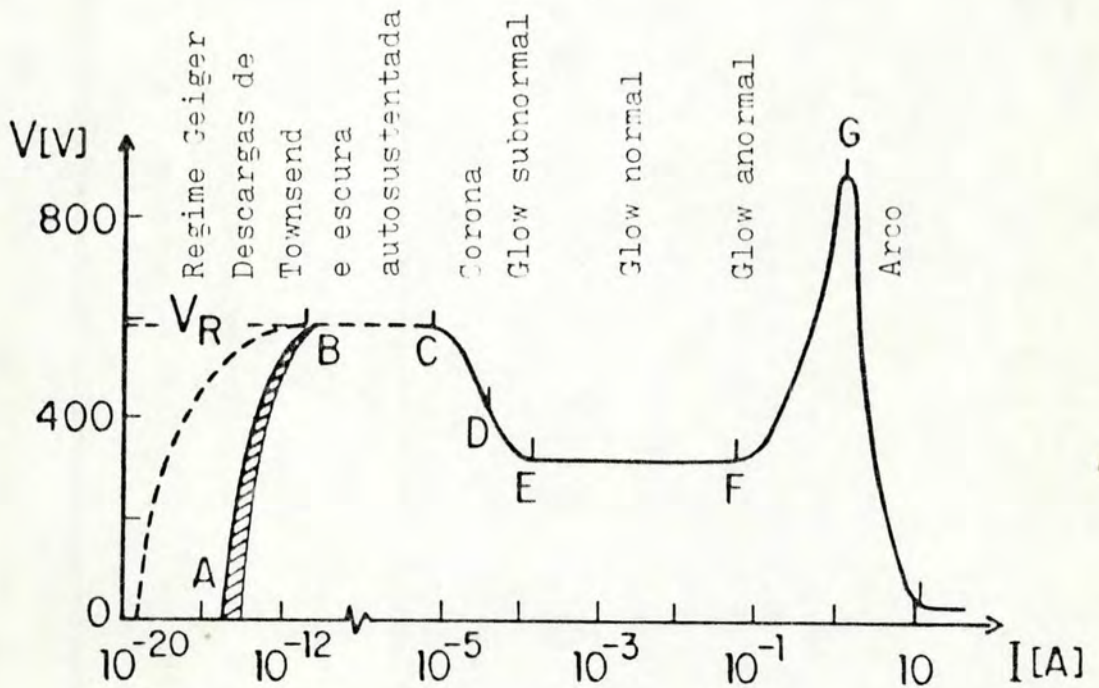


Figura 2.1b - Dependência da tensão em função da corrente para a descarga elétrica em vários gases. Os valores numéricos aproximadamente aplicam-se ao gás Neon, a uma pressão de 1 torr, sendo os eletrodos planos, de área próxima a  $10 \text{ cm}^2$ , feitos de cobre e a distância entre eles é de 50 cm [45].

comprimento e diâmetro do tubo de descarga, tipo de eletrodo, etc.

Analisando a figura 2.1b, notamos que nela há vários regimes distintos de operação da descarga elétrica, os quais descreveremos sucintamente a seguir. Para uma descrição mais detalhada, veja Francis [45] e Swift [46].

Consideremos, agora, o que sucede, se incrementarmos adiabaticamente a tensão no circuito da figura 2.1a. Neste tipo de circuito o início da descarga é de natureza eminentemente estocástica. Assim, quando a tensão  $V$  aplicada aos eletrodos aumenta, observam-se pequenas correntes ( $\approx 10^{-10}$  A), ocorrendo na forma de centelhas randômicas no tubo. Incrementando mais a tensão, aumenta o tamanho e a frequência das centelhas. Uma corrente maior ( $\approx 10^{-13}$  A) e mais estável surge, quando se ilumina o catodo com luz apropriada. Se a intensidade desta luz é maior, cresce a corrente. As correntes observadas originam-se na multiplicação dos elétrons livres presentes no gás, quando estes fazem colisões ionizantes com as moléculas do gás. A origem do primeiro elétron livre, no caso das centelhas randômicas, pode ser devida à ionização provocada por uma radiação ionizante oriunda do meio ambiente. No caso da iluminação do catodo, o primeiro elétron livre provém do catodo por emissão fotoelétrica. Nesta região (A até B na figura 2.1b), também conhecida como regime do contador Geiger, para existir uma corrente, é imprescindível a presença de uma fonte externa

de ionização, ou seja: a descarga não se mantém por conta própria.

Continuando a incrementar a tensão  $V$ , verifica-se que, num dado momento, a corrente  $I$  começa a crescer rapidamente, de modo que, num pequeno intervalo de tensão, a corrente salta para um valor significativamente maior, determinado pela resistência  $R$ . Nesta situação, a descarga deixa de ser randômica e assume um comportamento estável. Além disso, a corrente através da descarga independe de qualquer fonte externa de ionização. A menor tensão  $V$  em que isto ocorre é chamada de tensão de ruptura,  $V_R$ . A partir desta tensão, a descarga é auto-sustentada. A explicação é dada qualitativamente a seguir. Cada elétron que abandona o catodo, ao colidir com as moléculas do gás no seu movimento em direção ao anodo, provoca a formação de íons e moléculas excitadas e por conseguinte fótons. Alguns destes íons e fótons colidem com o catodo, podendo ocasionar a liberação de novos elétrons livres. Assim, se para cada elétron coletado no anodo for gerado um outro, a descarga será autosustentada. Diminuindo a resistência  $R$ , a corrente continua a crescer, podendo alcançar um valor próximo de  $10^{-4}$  A, sem que haja alteração significativa em  $V$ . A radiação luminosa emitida na descarga é muito pequena, donde vem o nome de região escura (B até C na figura 2.1b).

Agora, se a corrente aumenta acima de um certo valor (cerca de  $10^{-5}$  A), o comportamento da descarga muda

radicalmente. A descarga torna-se luminosa com uma distribuição característica de zonas claras e escuras. Além disso, a tensão  $V$  cai consideravelmente até estabilizar-se em outro valor constante. Durante essa queda de tensão (C até E na figura 2.1b) a descarga é muitas vezes intermitente. Após a queda, a descarga fica estável e a tensão permanece aproximadamente constante (E até F) num intervalo grande de corrente (por exemplo, de  $10^{-4}$  A a 0.1 A). Após esta faixa, se a corrente segue crescendo, então a tensão  $V$  sobe consideravelmente (F a G). Como nesta região a luminosidade da descarga é muito intensa, este regime de operação da descarga elétrica recebe o nome de descarga luminosa ("glow discharge").

Aumentando-se ainda mais a corrente  $I$ , o potencial, após passar por um máximo (G), decai a um valor muito baixo, indicando o aparecimento de novos fenômenos, notadamente o aquecimento do gás e dos eletrodos. Nesta região, a descarga tende a se contrair radialmente e, por isso, é denominada de arco. Estas são as características básicas (macroscópicas) dos diferentes regimes de operação da descarga. Voltemos, agora, a focar a descarga autosustentada, particularmente a descarga luminosa, que é onde observamos caos.

A primeira descarga autosustentada que se observa é aquela que corresponde ao regime de descarga escura. Neste caso as correntes são tão pequenas que a luz emitida e a densidade de carga espacial na descarga são desprezíveis. Assim, o campo

elétrico no espaço intereletrodico é determinado por  $V$  e pela geometria do tubo de descarga.

Com um aumento da corrente passa-se à região de descarga luminosa. Observa-se, então, que a descarga se processa numa tensão menor que na região de descarga escura. Além disto, a descarga torna-se luminosa com uma distribuição característica de zonas claras e escuras, como demonstra a figura 2.2.

A densidade de carga espacial é agora um fator relevante nos mecanismos da descarga e, em consequência, o campo elétrico entre os eletrodos não é mais homogêneo. Com este rearranjo das cargas espaciais, os processos físicos na descarga são mais eficientes, o que explica a tensão de operação menor. A corrente não é mais determinada unicamente pela resistência externa  $R$ , mas também pela descarga. Nestas circunstâncias, quando as propriedades da descarga são pela primeira vez determinadas pelas cargas espaciais, diz-se que uma descarga elétrica luminosa ("glow") se estabeleceu no gás.

Para obter uma descarga gasosa luminosa não é necessário percorrer todos os regimes antes descritos (conforme figura 2.1b). Na prática, se temos uma tensão  $V > V_R$  aplicada aos eletrodos do tubo, ocorre que o primeiro elétron livre que surgir no gás num lugar favorável (isto é, próximo ao catodo) irá provocar uma descarga autosustentada. Os processos na



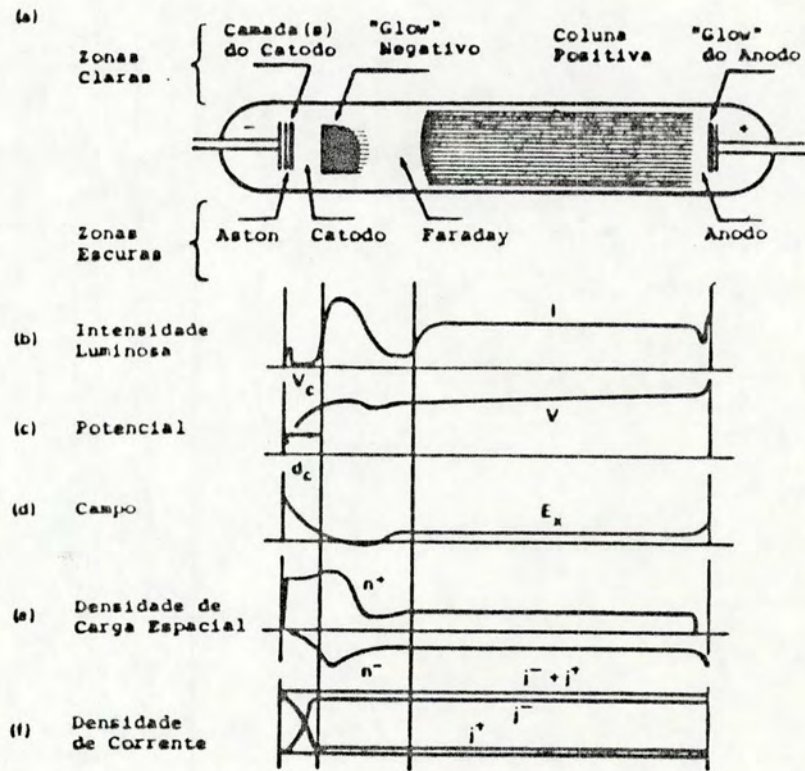


Figura 2.2 - Diagrama esquemático da variação dos parâmetros da descarga luminosa normal de acordo com a posição para um tubo de 50 cm de comprimento com Neon a 1 Torr [45,47].

descarga ocorrem tão rapidamente depois da formação do primeiro par elétron-íon livre que a multiplicação dos portadores de carga (elétrons livres e íons) converge rapidamente a uma condição de equilíbrio. Esta condição de equilíbrio se estabelece normalmente no regime de descarga luminosa ("glow discharge"). Todos os processos  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  (conforme figura 2.1b) se sucedem em frações de segundo (tipicamente entre  $10^{-7}$  s a  $10^{-1}$  s)[46], até que a descarga assuma um regime estável, quando a corrente alcançar um valor que satisfaça

$$V + IR = V_F. \quad (2.7)$$

A descarga luminosa pode ser subdividida em 3 categorias: normal, subnormal e anormal. A característica que distingue a descarga luminosa normal é que a tensão permanece constante para uma extensa faixa de variação da corrente. Isto ocorre, porque a maior parte da queda de tensão  $V(V_c)$  se dá numa pequena região próxima do catodo ( $d_c$ , conforme figura 2.2) que depende somente da natureza do gás, da sua densidade e do material do catodo. Também se observa que a densidade de corrente no catodo é pequena e aproximadamente constante. A descarga cobre apenas uma porção do catodo. Quando a corrente aumenta, maior é a área coberta, porém a densidade de corrente continua constante. Depois que a luminosidade da descarga cobrir todo o catodo, um acréscimo na corrente produz um aumento na densidade de corrente e na queda de tensão  $V_c$  no catodo - é a descarga luminosa anormal. Por outro lado, a descarga luminosa

subnormal ocorre, quando o diâmetro da descarga é tão pequeno que a difusão radial das cargas na região de queda de tensão próxima ao catodo se torna significativa. Com isso, a densidade de corrente decresce, de modo que a queda de tensão deve aumentar a fim de sustentar a corrente.

### 2.3 - Configuração Experimental

No nosso experimento, verificamos que a corrente elétrica conduzida por uma descarga elétrica luminosa num gás pode apresentar um comportamento caótico determinístico. A montagem experimental que empregamos para verificá-lo está esquematizada na figura 2.3.

Note-se que este circuito é muito similar ao circuito da figura 2.1a. A descarga elétrica é constituída por uma lâmpada espectral. As lâmpadas seladas que estavam à nossa disposição consistiam de um conjunto de lâmpadas espectrais da CENCO para fins didáticos. Utilizamos as seguintes lâmpadas: hélio (CENCO Nº 87215), argônio (CENCO Nº 87210) e nitrogênio (CENCO Nº 87240). A forma das lâmpadas se assemelha a um tubo de Plücker (figura 2.4), isto é, um tubo cilíndrico com um estrangulamento no meio. Este estrangulamento objetiva confinar a descarga radialmente a um espaço bem pequeno e, com isso, aumentar a sua luminosidade.

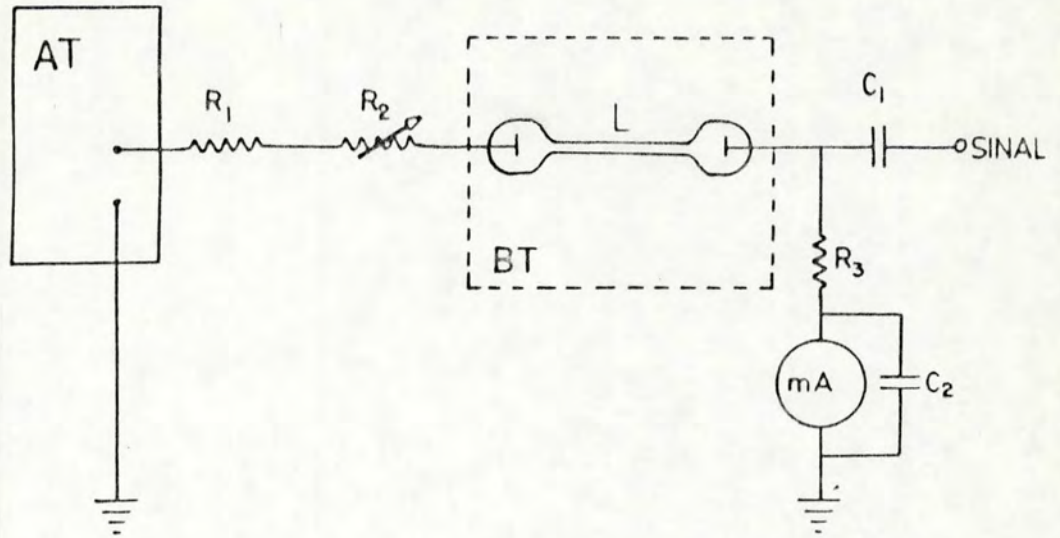


Figura 2.3 - Arranjo experimental empregado para observar a catoda na descarga: AT=fonte DC de alta tensão (0-5 kV); L=lâmpada; BT=banho térmico; mA=amperímetro;  $R_1=20\text{ k}\Omega$ ;  $R_2=10\text{ k}\Omega$ ;  $C_1=C_2=0.1\text{ }\mu\text{F}$ .

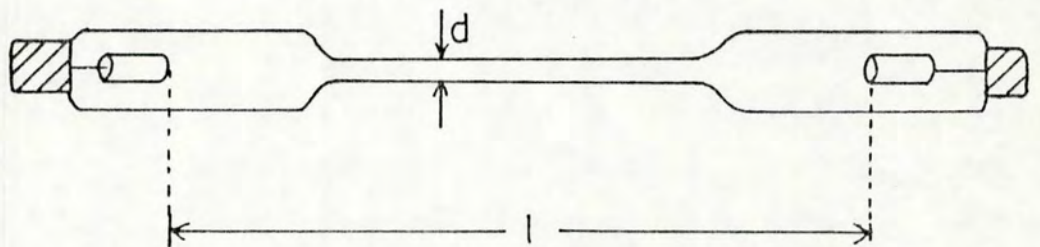


Figura 2.4 - Tubo de Glücker.  $l=15\text{ cm}$  e  $d=2\text{ mm}$ .

O diâmetro interno "d" do tubo (no estrangulamento) é de 2 mm (medido em um tubo que se partiu) e a separação entre os eletrodos 1 é de aproximadamente 15 cm. Os eletrodos têm forma de copo e são confeccionados em aço inox. A pressão do gás no tubo não é fornecida pelo fabricante. Estimamos que esta pressão seja em torno de 10 Torr.

A lâmpada no circuito da figura 2.3 é alimentada por uma fonte AT de alimentação contínua e ajustável (0-5 kV), através do resistor  $R_1$  de 90 k $\Omega$  em série com o potenciômetro de fio enrolado  $R_2$  de 10 k $\Omega$ . A lâmpada foi colocada em um banho térmico de temperatura ajustável entre 0 e 100°C.

Variações na corrente da ordem de 0-0.3 mA em amplitude (que constituem o sinal medido na figura 2.3) foram observadas em um osciloscópio Tektronix 7904 a partir da tensão desenvolvida no resistor  $R_3$  de 5 k $\Omega$ , colocado entre a lâmpada e a terra. Um capacitor de 0.1  $\mu$ F desacopla este sinal do nível de DC estabelecido pela parte estacionária da corrente. Esta corrente média (tipicamente 12 mA) na lâmpada foi medida através de um multímetro digital (MIC - 2200A), operando como amperímetro de corrente contínua. A observação simultânea das oscilações  $I(t)$  e suas correspondentes trajetórias no espaço de fase  $\dot{I}(t) \times I(t)$  foi possível, usando mais um osciloscópio (Tektronix 7633) e um circuito diferenciador como o esquematizado na figura 2.5. O primeiro amplificador operacional (nós utilizamos o integrado CA3240 que contém dois amplificadores operacionais

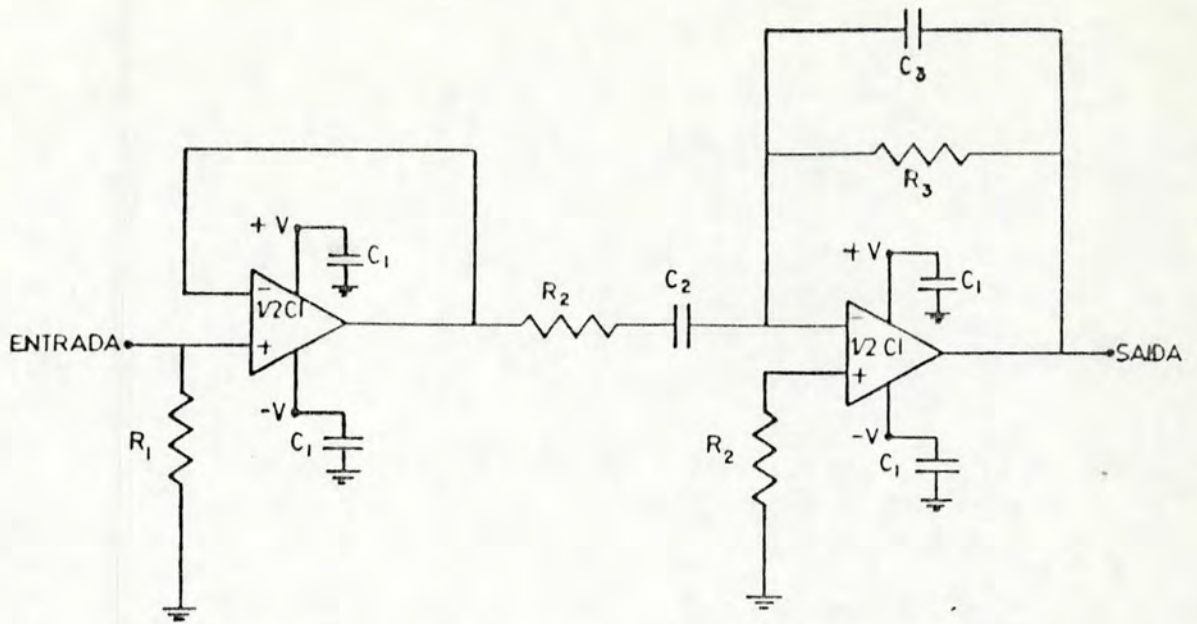


Figura 2.5 - Esquema do circuito diferenciador:  $C1=CA3240$ ,  $R_1=1\text{ k}\Omega$ ;  $R_2=170\text{ }\Omega$ ;  $R_3=1.2\text{ k}\Omega$ ;  $C_1=0.1\text{ }\mu\text{F}$ ;  $C_2=180\text{ pF}$ ;  $C_3=55\text{ pF}$ ;  $V=9\text{ V}$ .

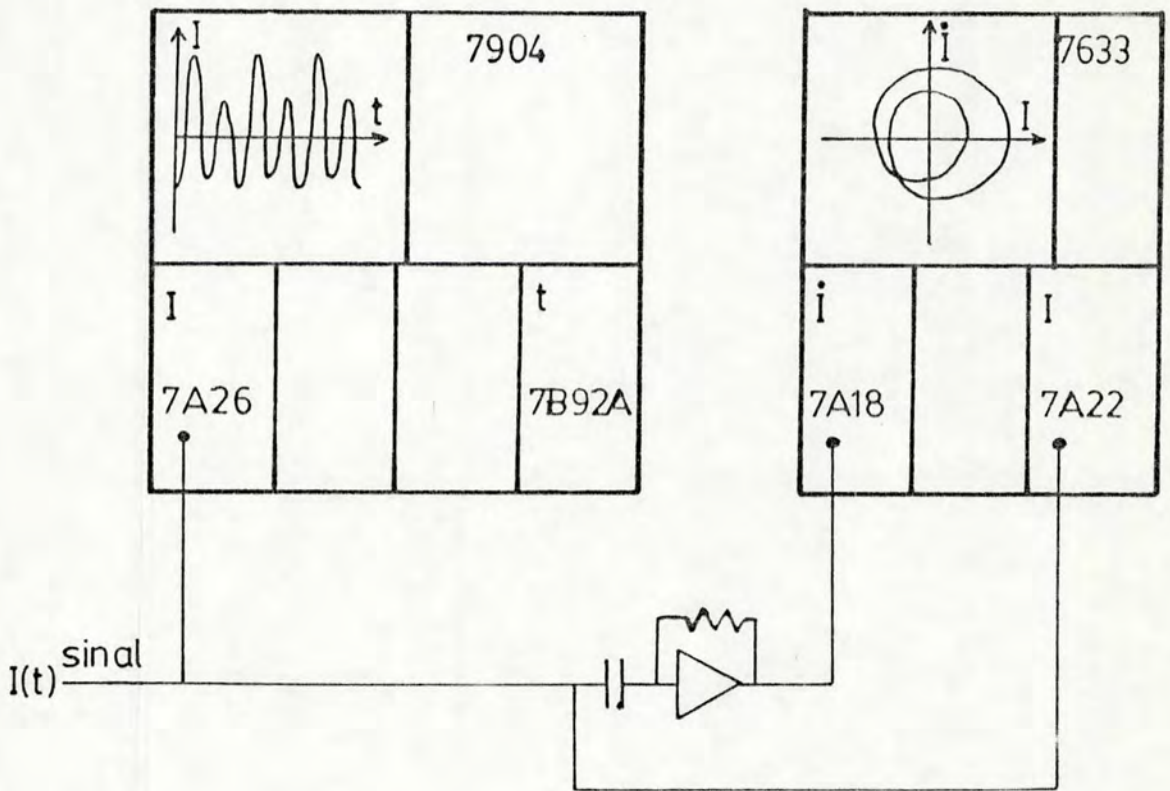


Figura 2.6 - Arranjo empregado para observar simultaneamente o sinal  $I(t)$  e o correspondente diagrama de fase  $\dot{i}(t) \times I(t)$ .

conjugados) opera como seguidor de tensão, isolando o diferenciador do circuito externo. O segundo amplificador operacional constitui o diferenciador em si.

Na figura 2.6 está representado o arranjo feito com os dois osciloscópios e o diferenciador para observar a oscilação  $I(t)$  e sua trajetória no espaço de fase  $\dot{I}(t) \times I(t)$ .

O sinal medido  $I(t)$  foi injetado no osciloscópio Tektronix 7904 através do canal vertical (gaveta 7A26) acionado por uma gaveta de varredura horizontal (7B92A). Desse modo, as oscilações na corrente ficam visíveis na tela do osciloscópio. No segundo osciloscópio (Tektronix 7633) foi injetado o sinal derivado  $\dot{I}(t)$  através do canal vertical (gaveta 7A18), enquanto o sinal  $I(t)$  acionava a gaveta de varredura horizontal (7A22). Os fenômenos oscilatórios relatados na próxima seção foram observados também na emissão luminosa do tubo medida através de um fotodiodo.

#### 2.4 - Resultados Experimentais e Análise

Em continuação descreveremos os resultados obtidos com a configuração experimental descrita anteriormente. Apesar de todos os tubos selados empregados serem muito semelhantes em suas características, o comportamento de cada um, observado sob excitação DC, foi bastante diferente e (baseado na experiência

com tubos abertos que também relataremos abaixo), atribuímos esta diferença a pequenas diferenças da pressão do gás e da idade destes tubos.

Para iniciar uma medida, aplicava-se uma tensão conveniente no tubo de descarga, de modo a se estabelecer uma corrente DC fluindo através deste. A seguir, o potenciômetro  $R_2$  foi ajustado lentamente, enquanto se observava o comportamento da corrente no osciloscópio. De todos os tubos à nossa disposição, aqueles contendo argônio e nitrogênio mostraram sempre um comportamento caótico independente da corrente através deles. Entretanto, nos quatro tubos de hélio disponíveis foi possível ver uma grande gama de comportamentos oscilatórios, inclusive a sequência de Feigenbaum para o caos. A principal diferença entre estes tubos foram os valores iniciais da corrente para os quais as oscilações de período unitário começavam.

Descreveremos a seguir resultados típicos obtidos medindo a corrente através da descarga de hélio em uma das lâmpadas espectrais comerciais (CENCO 87215). No regime luminoso, até cerca de 12 mA, observamos uma corrente DC estacionária. Com um pequeno ajuste no potenciômetro, surgiu uma oscilação auto-gerada de frequência  $f_0 \approx 190$  kHz superposta ao nível DC. Na figura 2.7a, à esquerda, vemos a evolução temporal destas oscilações, enquanto a forma "oval" mostrada à direita é a representação correspondente no espaço de fase  $\dot{i}(t) \times i(t)$ .



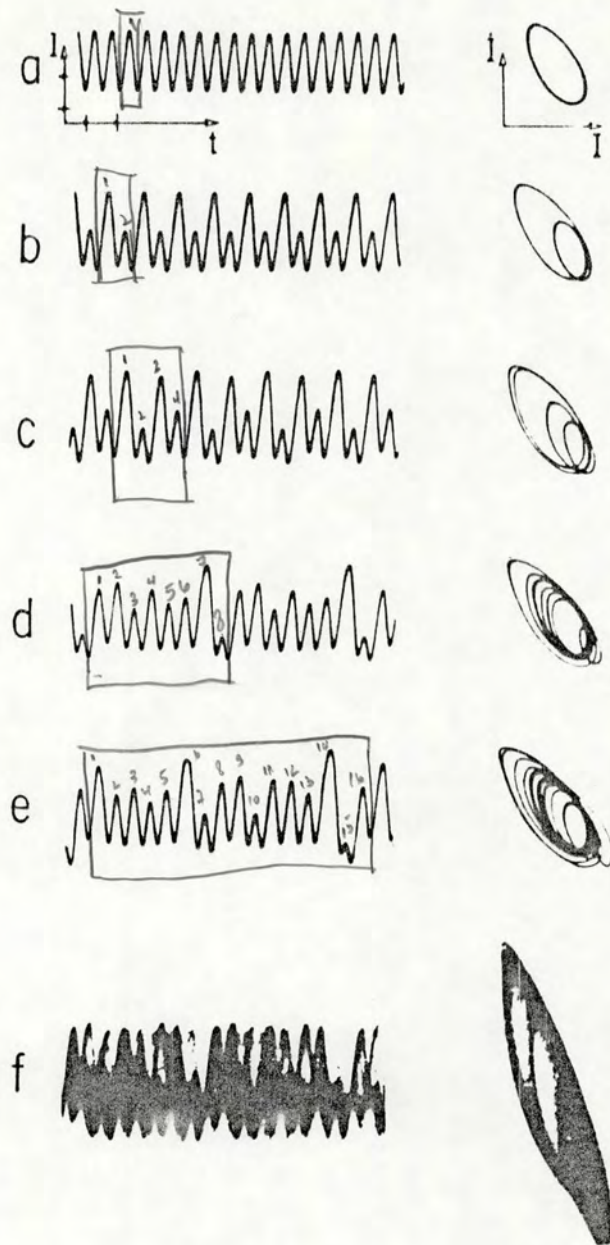


Figura 2.7 - Resultados experimentais obtidos com uma Lâmpada de hélio operando em 12 mA. As oscilações autosustentadas da corrente  $I(t)$  na Lâmpada estão mostradas à esquerda da figura. À direita está o diagrama  $dI/dt$  vs  $I$ . A corrente aumenta de a a f. A escala para  $I(t)$  é de 0.04 mA/div e 10  $\mu$ s/div. O diagrama de fase em f foi expandido verticalmente.

Através de um leve aumento na voltagem no circuito, foi possível ver uma clara seqüência de dobramento de período que é mostrada nas figuras 2.7b, c, d, e e. Continuando a aumentar a tensão, foram observados bifurcações adicionais, caos (como mostrado na figura 2.7f) e então janelas de comportamento oscilatório, periódico e caótico alternadamente, exatamente como a dinâmica prevista para mapas unidimensionais [28].

É interessante mencionar que os valores da corrente observados nas bifurcações, ao se aumentar a corrente, não correspondiam exatamente àqueles observados, quando se diminuía a corrente, ou seja, observou-se uma histerese envolvida neste processo. Adicionalmente, durante as seqüências de bifurcações, observaram-se oscilações de baixa freqüência superpostas ao sinal, de um modo similar ao observado por Kitano et al. [48], enquanto estudava bifurcações num sistema acústico.

Além da rota unidimensional (1D) descrita, observaram-se interrupções da seqüência de bifurcações pelo súbito aparecimento da freqüência  $f_1$ , que é um múltiplo ímpar de  $f_0$  ( $3f_0$ ,  $5f_0$ , etc.) seguida de novas bifurcações. Conforme os resultados de Libchaber et al. [49] e Arneodo et al. [50] parece evidente que um mapa 2D é necessário para modelar completamente o comportamento da descarga.

A figura 2.8 mostra o que se observou tipicamente em outro tubo de Hélio, operando a correntes mais altas (235 mA).

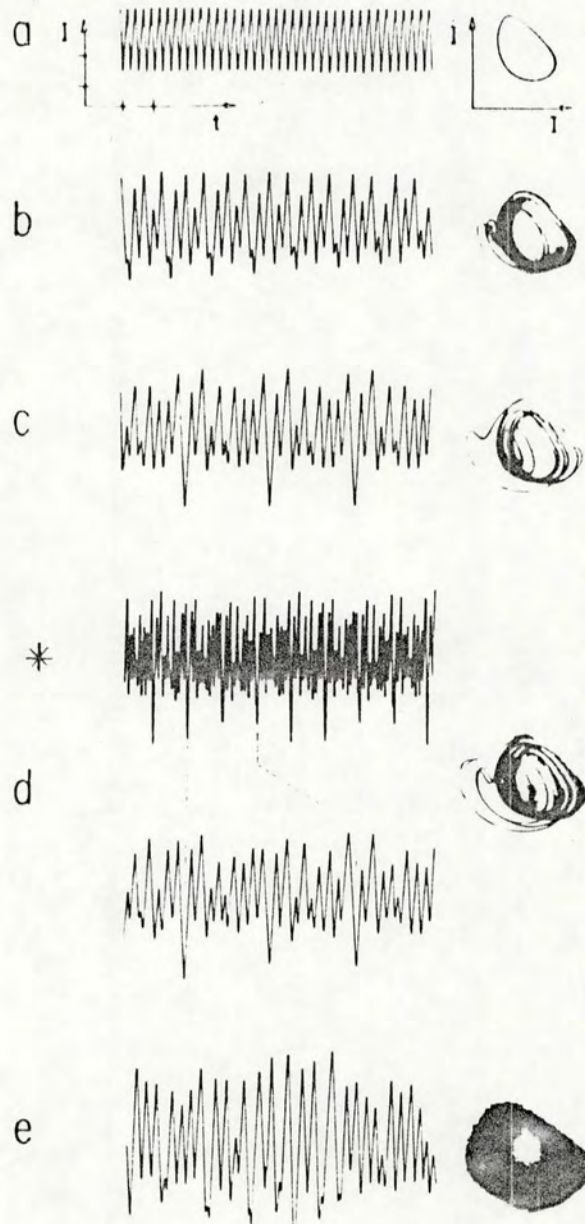


Figura 2.8 - Resultados experimentais obtidos com uma lâmpada de hélio operando em 35 mA. A descrição é similar a da figura 2.7. As escalas são de 0.1 mA/div. e 20  $\mu$ s/div., exceto no gráfico marcado com \*, onde é de 50  $\mu$ s/div..

Esta figura foi obtida, diminuindo adiabaticamente a corrente através da descarga, partindo de uma situação correspondente a oscilações caóticas (figura 2.8e). Diminuindo a corrente, observamos o primeiro sinal oscilatório mostrado na figura 2.8d, que se repetia a cada 40 picos. Ao baixar mais a corrente, o sistema passou por uma região de movimentos irregulares, depois da qual o sistema começou novamente a oscilar de forma periódica, repetindo-se a cada 10 picos (figura 2.8c). Posteriormente observaram-se oscilações que se repetiam a cada 5 picos (figura 2.8b), as quais continham superposta uma componente "parasítica" de baixa frequência, como mencionado anteriormente. Esta componente de baixa frequência tende a fazer a trajetória no espaço de fase mais difusa. Finalmente, a corrente foi diminuída até o sistema oscilar na frequência fundamental,  $f_0 \approx 190$  kHz, como é mostrado na figura 2.8a. Novos interessantes aspectos deste sistema foram descobertos, ao se inverter o procedimento descrito acima. Começando em a, um aumento da corrente produziu um dobramento de período de  $f_0$ , que, após uma desestabilização pela oscilação de baixa frequência, se tornou aparentemente caótico. Após, a descarga começou a operar de um modo bastante estável sem mostrar interferência com as oscilações de baixa frequência. Aumentando adicionalmente a corrente, esta alcançou o estágio b que mostra claramente uma quintuplicação no período, similar ao observado por Linsay [51] num oscilador anarmônico forçado. A partir daí, o sistema começou uma seqüência clara de dobramento de período a partir da "nova" frequência  $f_1 = (1/5)f_0$  e, após várias repetições da

medida com esta lâmpada, no lugar das oscilações irregulares vistas inicialmente entre as situações representadas nas figuras 2.8d e c, observaram-se oscilações regulares que se repetiam a cada 20 picos e que não foram observadas inicialmente. Além da quintuplicação do período descrita acima, observou-se também, algumas vezes, triplicação do período, seguida de uma sequência de dobramentos de período.

Pode-se pensar que ir de a-e deveria ser equivalente a ir de e-a e que as diferenças observadas decorriam do fato de a corrente não ter tido uma variação suficientemente adiabática. A repetição do experimento nos fez acreditar que este não é o caso. Para se observar estas diferenças, foi sempre muito mais importante um certo envelhecimento do tubo da descarga do que o procedimento seguido. A idade dos tubos correspondia ao tempo que estes foram efetivamente usados até então. Observem que a corrente necessária para se obter os efeitos mostrados na figura 2.8 (35 mA) é mais alta que a correspondente na figura 2.7 (12 mA). A alta corrente é bastante efetiva em causar mudanças irreversíveis nas características da descarga, de modo que, por exemplo, a janela entre a e b, na figura 2.8 onde era possível observar-se as oscilações de período 2, foi diminuindo com a idade do tubo, até que o sistema pulava aparentemente direto do período 1 para o caos. Isto pode ser uma explicação para o fato de não termos observado sequências de bifurcações nos tubos contendo argônio e nitrogênio. O envelhecimento do tubo, certamente envolve processos que afetam o catodo, mas o

mecanismo exato ainda não está esclarecido. Com o envelhecimento, a corrente necessária para observarmos fenômenos oscilatórios tende a aumentar.

Buscamos também observar fenômenos oscilatórios em tubos de descargas abertos do tipo comumente usados em espectroscopia com laser de fluidos gasosos eletricamente excitados. O diâmetro interno, muito mais largo, destes tubos complica bastante o sistema. Em qualquer das condições medidas, foi possível ver umas poucas bifurcações, mas a corrente tendia a pular intermitentemente entre os comportamentos caótico e periódico. Sequências de bifurcação claras, mas não facilmente controláveis, foram observadas em hélio, argônio,  $N_2$  e ar. Após a observação de uma autooscilação inicial, vários dobramentos de período eram vistos, decorrentes de uma pequena mudança na pressão do gás.

Nós também observamos caos para o tubo de Plücker descrito anteriormente através de uma sequência decorrente de uma variação direta na impedância do tubo. Isto foi obtido, variando a capacitância de um capacitor que estava conectado à terra e a um fio que envolvia o tubo capilar.

Colocando-se o tubo dentro de um banho de água, cuja temperatura se podia variar entre 0 e 100° C, obteve-se o efeito desejado de estabilizar as oscilações observadas. Sem o banho térmico, o calor gerado pela descarga, que resultava no

aumento de temperatura, induzia novas bifurcações. De fato, foi possível gerar sequências de dobramento de período, apenas aumentando ou diminuindo a temperatura, sem alterar qualquer outro parâmetro do circuito elétrico. A corrente necessária para iniciar as oscilações auto-induzidas aumentava com a temperatura do banho térmico.

Nas experiências descritas acima, tivemos o cuidado de verificar que este sinal oscilatório não era gerado por nenhum elemento externo ao tubo de descarga. Por exemplo, variamos as capacitâncias e indutâncias no circuito externo sem ter notado nenhuma influência sobre a frequência  $f_0$ . Porém, ao substituir o tubo por um resistor, as oscilações de frequência  $f_0$  ou submúltiplas destas desapareceram completamente até o limite de resolução do nosso aparelho, o qual era de  $10^{-6}$  A.

Em nossas experiências, observamos sequências de dobramento de período com até 16 frequências, correspondentes a 4 dobramentos. Existem poucos sistemas com caos determinístico, em que se tenha observado tal número de frequências. Por outro lado as investigações teóricas das equações diferenciais parciais, que buscam demonstrar um possível comportamento caótico nestes sistemas, estão ainda numa fase inicial. O procedimento usual é, partindo das equações que descrevem o sistema (por exemplo, a equação da continuidade em um fluido, equação 2.6), desdobrá-las em um conjunto de equações ordinárias. O paradigma da dinâmica caótica, o modelo de Lorenz,

é obtido por esse método, partindo das equações diferenciais que descrevem um fluido entre placas paralelas. É, portanto, plausível esperar a observação de caos em sistemas descritos pela equação 2.6. Por outro lado, devemos mencionar um trabalho recente [50] com resultados experimentais, nos quais o dobramento de período é interrompido por multiplicação de períodos ímpares. Os autores mostraram que esse comportamento que não é compatível com as predições de mapas unidimensionais (1D), mesmo que flutuações e controles de parâmetros não adiabáticos sejam considerados, pode ocorrer num mapa 2D inversível (mapa de Hénon), se permitirmos mudanças não adiabáticas nos parâmetros de controle. A competição entre dobramento de período e a multiplicação dos períodos por números ímpares é exatamente o que foi observado por nós em descargas. Assim, eventualmente, a expansão das equações que descrevem a descarga elétrica em um sistema de equações ordinárias, deve mostrar um mapa de Poincaré mais rico (ou seja, 2D) que o usual mapa 1D, típico das seqüências de Feigenbaum.



## CONCLUSões

Concluindo, reportamos neste trabalho a observação, pela primeira vez, de caos determinístico em descargas elétricas em gases excitados por uma tensão DC. Uma sequência de dobramento de período de Feigenbaum com até 16 frequências foi observada em descargas em tubos capilares fechados, contendo hélio. Sequências de dobramento de período também foram observadas em descargas abertas. O fenômeno descrito depende de um grande número de variáveis e sua análise é extremamente complexa. Ainda que uma descrição quantitativa dos mecanismos responsáveis pelo surgimento do comportamento oscilatório esteja ainda faltando, é esperado através de uma descrição macroscópica da descarga elétrica que, apesar de ter muitos graus de liberdade, este comportamento pode ser modelado por um mapa 1D. Adicionalmente, competindo com as sequências de Feigenbaum, reportamos a observação do segundo exemplo experimental conhecido de um cenário modelado por um mapa 2D (mapa de Henon). Portanto, vimos que descargas apresentam um comportamento complexo, que envolve muitos graus de liberdade, similar ao presente nos mapas 1D e 2D.

No aspecto experimental, devemos salientar a simplicidade do sistema estudado em que se observa esta rota ao caos. A maioria dos sistemas, estudados até agora, são mais complexos e requerem sistemas mais elaborados de detecção para evidenciarem as rotas ao caos. O fato de que em nosso sistema a

variável dinâmica não linear é também uma grandeza medida diretamente. simplificou muito a realização da experiência. Por fim, queremos salientar que a descarga elétrica, por suas aplicações práticas e pela física que contém, se constitui num sistema extremamente importante, cujo estudo, neste ou em outros aspectos, está longe de ser esgotado.

## REFERÊNCIAS

1. H. Poincaré. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, (Gauthier-Villars, Paris, 1892); (Dover Press, 1957).
2. A. Einstein, *Verh. Deut. Phys. Ges.* 19, 82 (1917).
3. E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* 20, 130 (1963).
4. R. G. Harrison e D. J. Biswas, *Nature* 321, 394 (1986).
5. P. Cvitanovic e M. H. Jensen, curso dado na NORDITA, Copenhagen, em fins de 1981.
6. J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, N. H. Packard e R. Shaw, *Sci. Am.* 255 (6), 38 (1986).
7. J. A. C. Gallas, curso dado na Escola de Física Jorge André Swieca, Seção: Ótica Quântica e não Linear, São Carlos, de 21 de junho a 1 de agosto de 1986; a ser publicado.
8. G. A. Held, C. Jeffries e E. E. Haller, *Phys. Rev. Lett.* 52, 1037 (1984).
9. J. M. Wersinger, J. M. Finn e E. Ott, *Phys. Fluids* 23, 1142 (1980).
10. J. C. Adam, M. N. Bussac e G. Laval, em Intrinsic Stochasticity in Plasmas, editado por G. Laval e D. Grésillon (Les Edition de Physique, Orsay, 1979).
11. (a) J. Keizer, em Special Topics in Electrochemistry, editado por P. A. Rock (Elsevier, Amsterdam, 1977); (b) F. Kaiser, *Z. Naturforsch.* 33A, 294 (1978) e 33A, 418 (1978); (c) F. Stöckmann, em Festkörperprobleme: Advances in Solid State Physics, editado por O. Madelung (Vieweg,

- Braunschweig, 1969), vol. 9; (d) J. B. Gunn, *Solid State Commun.* 1, 88 (1963); (e) V. V. Voronov e Yu. S. Fuz'minov, *Fiz. Tverd. Tela* 20, 389 (1978) [*Sov. Phys. Solid State* 20, 224 (1984)]; (f) para maiores referências veja ref. 8 acima.
12. (a) R. M. Fleming e C. C. Grimes, *Phys. Rev. Lett.* 42, 1423 (1979); (b) K. Aoki, K. Miyamae, T. Kobayashi e E. Yamamoto, *Physica (Utrecht) B&C* 117 & 118, 570 (1983).
13. S. Martin, H. Leber e W. Martienssen, *Phys. Rev. Lett.* 53, 303 (1984).
14. (a) B. Granovsky e L. Bykhovskaya, *J. Phys. USSR* 10, 351 (1946); T. Donahue e G. H. Dieke, *Phys. Rev.* 81, 248 (1951); (c) para uma revisão veja G. Francis em Gasentladungen II, *Handbuch der Physik*, Band 22, editado por S. Flugge (Springer Verlag, Berlin, 1957).
15. G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz, (F. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1918).
16. J. Guckenheimer e P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, (Springer Verlag, Berlin, 1986).
17. F. T. Arecchi e F. Lisi, *Phys. Rev. Lett.* 49, 94 (1982).
18. B. A. Huberman e J. P. Crutchfield, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1743 (1979).
19. N. Piskunov, Cálculo Diferencial e Integral (Editorial Mir, Moscou, 1977).
20. N. Minorsky, Nonlinear Oscillations, (van Nostrand, New York, 1962).

21. A. A. Andronov e D. E. Chaikin, Theory of Oscillations, (Princeton University Press, New Jersey, 1949).
22. T. R. McCalla, Introduction to Numerical Methods and Fortran Programming, (John Wiley & Sons, New York, 1967).
23. S. Smale, Invent. Math. 10, 305 (1970).
24. M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25 (1978); 21, 669 (1979); Phys. Lett. 74A, 375 (1979); Commun. Math. Phys. 77, 65 (1980).
25. S. Grossmann e S. Thomae, Z. Naturforsch. 32a, 1353 (1977).
26. P. Coullet e C. Tresser, J. de Physique Coll. C5, 25 (1978).
27. V. Franceschini e C. Tebaldi, J. Stat. Phys. 21, 707 (1979).
28. F. Collet e J. P. Eckmann, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems (Birkhäuser, Boston, 1980).
29. J. R. Ackerhalt, P. W. Milloni e M. L. Shih, Phys. Rep. 128, 205 (1985).
30. D. R. Hofstadter, Sci. Am. 245(5), 16 (1981).
31. M. J. Feigenbaum, Los Alamos Science 1, 4 (1980).
32. J. P. Eckmann, Rev. Mod. Phys. 53, 643 (1981).
33. M. Hénon, Commun. Math. Phys. 50, 69 (1976).
34. B. Derrida, A. Gervois e Y. Pomeau, J. Phys. A12, 269 (1979).
35. B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension, (W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977).
36. H Haken, Synergetics (Springer Verlag, Berlin, 1983).

37. R. Shaw, *Z. Naturforsch.* 36A, 80 (1981).
38. J. P. Crutchfield e N. H. Packard, *Physica (Utrecht)* 7D, 201 (1983).
39. D. E. Lanford, em Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, editado por H. L. Swinney e J. P. Gollub (Springer Verlag, Berlin, 1985).
40. R. H. Simoyi, A. Wolf e H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* 49 245 (1982).
41. M. Metropolis, M. L. Stein e P. R. Stein, *J. Combinatorial Theory (A)* 15, 25 (1973).
42. J. P. Crutchfield e B. A. Huberman, *Phys. Lett.* 77A, 407 (1980).
43. J. P. Crutchfield, M. Nauenberg e J. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* 46, 933 (1981).
44. B. E. Cherrington, Gaseous Electronics and Gas Lasers, (Pergamon Press, Oxford, 1979).
45. G. Francis em Gasentladungen 11, Handbuch der Physik, Band 22, editado por S. Flugge (Springer Verlag, Berlin, 1957).
46. D. A. Swift, *Contemp. Phys.* 22, 37 (1981).
47. B. Chapman, Glow Discharge Processes (John Wiley & Sons, New York, 1980).
48. M. Kitano, T. Yabuzaki e T. Ogawa, *Phys. Rev. Lett.* 50, 713 (1983).
49. A. Libchaber, S. Fauve e C. Laroche, *Physica (Utrecht)* 7D, 73 (1983).
50. A. Arneodo, P. Coullet, C. Tresser, A. Libchaber, J. Maurer

- e D. d'Humières, *Physica (Utrecht)* 6D, 385 (1983).
51. P. Linsay, *Phys. Rev. Lett.* 47, 1349 (1981).