



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



Processos k -Factor GARMA com Adição de *Outliers* Aditivos

Autor: Lucas Horstmann Serafim
Orientador: Professor Dr. Cleber Bisognin

Porto Alegre-RS, 12 de Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Processos k -Factor GARMA com Adição de *Outliers* Aditivos

Autor: Lucas Horstmann Serafim

**Monografia do Curso de Estatística da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul**

Banca Examinadora:

Professor Dr. Cleber Bisognin

Professora Dra. Liane Werner

Porto Alegre-RS, 12 de Dezembro de 2013

*Dedico este trabalho à minha mãe, Maria de Lourdes,
meu irmão Matheus, e minha namorada Marianne,
que sempre me apoiaram e incentivaram.*

Agradecimentos

Agradeço à minha família, principalmente minha mãe, que sempre me apoiou, incentivou e acreditou em mim, tornando a realização deste sonho possível. Obrigado por todo o carinho, por ser essa mãe maravilhosa. Foi pensando em ti e no que tu sempre batalhaste que eu me dediquei e tentei sempre dar o meu melhor. Obrigado por tudo! E meu irmão, Matheus, que apesar das brigas e discussões sempre esteve do meu lado. Amo muito vocês!

Agradeço à minha fiel namorada, Marianne que foi sempre uma grande companheira. Muito obrigado pela força e por entender que eu tinha que estar estudando em diversas ocasiões. Obrigado pelo carinho, pela atenção, por toda paciência que tiveste. Te amo muito!

Agradeço aos professores da UFRGS pelo profundo aprendizado adquirido proveniente de seus excelentes conhecimentos em cada conteúdo pontual! Faço um agradecimento especial ao meu professor e orientador, Cleber, que foi sempre a base da minha formação. Três anos de convivência quase que diária, entre aulas de inferência, bolsa de iniciação científica, estágio e esta monografia. Obrigado por ser esta pessoa sensacional com um conhecimento imensurável, sem ti, eu não estaria aqui. Muito obrigado, principalmente pela paciência! Além de seres um professor excepcional, hoje posso chamá-lo de amigo!

Agradeço aos meus colegas de curso e amigos que desde 2007 conquistei. Henrique Helfer e Alessandro no começo do curso, sem vocês as manhãs de cálculo e outras disciplinas não seriam as mesmas. Agradecimento especial aos grandes colegas e amigos Vinícius Roglio, João Lucas, Felipe Pinheiro, Lucas Schmidt e João Dewes que sem eles eu jamais teria chegado até aqui. Obrigado por estarem sempre ao meu lado, aprendi muito com vocês!

Agradeço aos meus queridos amigos Manu, Nati, Pricci, Débora, Mari, Nando, entre outros, pela amizade verdadeira desde sempre e pela compreensão nos momentos de ausência.

Resumo: Neste trabalho estudamos os processos estocásticos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, métodos de estimação clássicos (semiparamétricos e paramétricos) e robustos para os seus parâmetros quando o processo estocástico está ou não contaminado por *outliers* aditivos, utilizando o modelo de contaminação por mistura.

Este estudo foi realizado em duas etapas. Na primeira, realizamos um estudo analítico destes processos e da estimação. Nesta etapa definimos os processos e *outliers* aditivos e, também, definimos e analisamos os estimadores semiparamétricos GPH e BA, os quais só realizamos simulações sem adição de *outliers*, pois, por serem semiparamétricos somente podemos estimar um dos parâmetros e neste trabalho queremos estudar todos os parâmetros no processo. Nos concentramos no estimadores paramétricos, portanto definimos e analisamos os estimadores FT e MCMC, além de propormos e analisarmos o estimador FTmod, sendo esse um estimador com mais frequências do que somente às de Fourier.

Na segunda etapa, realizamos um estudo através de simulações de Monte Carlo para verificarmos o comportamento dos estimadores estudados. Através destas simulações obtivemos resultados excelentes de estimações dos processos estocásticos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ através dos três estimadores paramétricos estudados, mesmo quando variamos os parâmetros do processo.

Palavras-chave: Processos Estocásticos, Longa Dependência, Estimação, Outliers.

Abstract: On this work we study the stochastic process k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, classic estimation methods (parametric and non parametric) and robust for their parameters when the stochastic process is contaminated or not by addictive outliers, using the mixed contamination model.

This study was conducted in two stages. At first, we carried out an analytic study for this processes, and the estimation. On this stage we defined the processes and the addictive outliers and also defined and analyzed the semiparametric estimatiors GPH and BA, which we only had performed without adding outliers, because being semiparametric only one parameter can be estimated and in this work we want to study all of the parameters on the process. We focus on parametric estimators, so we defined and analyzed the FT and MCMC estimators, and proposed and analyzed FTmod estimator, this being an estimator with more frequencies that just the Fourier.

On the second stage, we performed a study on the Monte Carlo simulations to verify the estimators behavior. Through these simulations we obtained excellent results of estimations of stochastic processes k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ through the three parametric estimators studied, even when we vary the parameters of the process.

Key-words: Stochastic Processes, Long Memory, Estimation, Outliers.

SUMÁRIO

1	Introdução	11
2	Processos	13
2.1	Longa Dependência	13
2.2	Polinômios Gegenbauer	15
2.3	Processos GARMA	16
2.4	Processos k -Factor GARMA	22
2.5	Contaminação por Outliers Aditivos	25
3	Estimação	29
3.1	Estimador para as Frequências de Gegenbauer	29
3.2	Estimação Semiparamétrica	31
3.2.1	Estimador GPH	32
3.2.2	Estimador BA	32
3.3	Estimação Paramétrica	33
3.3.1	Estimador FT	33
3.3.2	Estimador FTmod	34
3.3.3	Estimator Whittle MCMC	35
4	Simulações de Monte Carlo	36
4.1	Sem Contaminação por <i>Outliers</i>	37
4.2	Com Contaminação por <i>Outliers</i>	44
5	Conclusão	74
5.1	Conclusões Gerais	74
5.2	Sugestões Para Trabalhos Futuros	76
	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	Função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q), com $\mu = 0$ e $\lambda = 0.2$: (a) $u = 1, p = 0 = q$ e $G = 0$; (b) $u = -1, p = 0 = q$ e $G = \pi$; (c) $u = 0.4, p = 0 = q$ e $G = 0.369\pi$; (d) $u = -0.4, p = 0 = q$ e $G = 0.63\pi$; (e) $u = 0.4, p = 1, q = 0$, com $\phi_1 = 0.8$ e $G = 0.369\pi$; (f) $u = 0.4, p = 1, q = 0$, com $\phi_1 = -0.8$ e $G = 0.369\pi$;	22
2.2	Função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$: (a) $k = 2, \mathbf{u} = (-0.4, 0.8), G_1 = 0.631\pi, G_2 = 0.204\pi$ e $p = 0 = q$; (b) $k = 3, \mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9), G_1 = 0.747\pi, G_2 = 0.403\pi, G_3 = 0.143\pi$ e $p = 0 = q$; (c) $k = 2, \mathbf{u} = (-0.4, 0.8), G_1 = 0.631\pi, G_2 = 0.204\pi, p = 1 = q, \phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$; (d) $k = 3, \mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9), G_1 = 0.747\pi, G_2 = 0.403\pi, G_3 = 0.143\pi, p = 1 = q, \phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$	25
2.3	Série gerada a partir de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela expressão (2.28), com $k = 2, \mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}, \boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}, p = 0 = q, G$ uma distribuição $\mathcal{N}(0, 50)$ e $c = 0.2$	26
2.4	Função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver expressão (2.30)), denotada por $f_Z(\cdot)$ (preto), com $k = 2, \mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}, \boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}$ e $p = 0 = q$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_X(\cdot)$ (vermelha), dada pela equação (2.25). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por $f_V(\cdot)$ (azul), onde $c = 0.2$ e G é a distribuição $\mathcal{N}(0, 50)$	28
4.1	Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$	52
4.2	Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$	52
4.3	Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$	53
4.4	Estimção Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	55
4.5	Estimção Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	57

4.6	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	59
4.7	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	61
4.8	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	63
4.9	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	65
4.10	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	67
4.11	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	69
4.12	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	71
4.13	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	73

Lista de Tabelas

4.1	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.2$	37
4.2	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.4$	38
4.3	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.9, 0.9\}$ e $\lambda = 0.2$	39
4.4	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.9, 0.9\}$ e $\lambda = 0.4$	39
4.5	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, q = 0, p = 1, u = 0.5, \lambda = 0.2$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$	40
4.6	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, q = 0, p = 1, u = -0.5, \lambda = 0.2$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$	40
4.7	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 2, q = 0, p = 1, \mathbf{u} \in \{-0.5, 0.5\}, \boldsymbol{\lambda} \in \{0.2, 0.4\}$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$	41
4.8	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 2, p = 0 = q, \mathbf{u} \in \{-0.9, -0.5, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \{0.2, 0.4\}$	42
4.9	Estimação Semi-paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.9, -0.5, 0.5, 0.9\}, \lambda = 0.2$ e $\alpha = 0.899$	43
4.10	Estimação Semi-paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.9, -0.5, 0.5, 0.9\}, \lambda = 0.4$ e $\alpha = 0.899$	44
4.11	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 1000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$	45
4.12	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 1000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$	46
4.13	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 1000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$	48
4.14	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$	49
4.15	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$	50

4.16	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$	51
4.17	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	54
4.18	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	56
4.19	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	58
4.20	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	60
4.21	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	62
4.22	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	64
4.23	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	66
4.24	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	68
4.25	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	70
4.26	Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$	72

Capítulo 1

Introdução

Recentemente, na literatura de séries temporais, a expressão longa dependência tem sido bastante mencionada. *Longa dependência* pode ser definida, no domínio do tempo, como a característica na qual a função de autocorrelação não é absolutamente convergente. No domínio da frequência, a longa dependência aparece como a característica na qual a função densidade espectral torna-se ilimitada para frequências muito pequenas, em torno de zero. O principal objetivo de estudar uma série temporal com longa dependência é encontrar um modelo matemático que nos possibilite fazer previsões sobre os futuros valores desta série.

Neste trabalho apresentamos os processos fracionários generalizados. Estes processos são uma extensão dos processos estocásticos introduzidos por G.E.P. Box e G.M. Jenkins, definidos em termos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes os quais são chamados de *processos auto-regressivos de médias móveis* (ARMA). Mandelbrot (1965) e Mandelbrot e van Ness (1968), utilizando os conceitos de integração e diferenciação fracionária, definiram o *Movimento Browniano Fracionário*, que é um processo estocástico estacionário com longa dependência a tempo contínuo, utilizado para explicar o efeito de Hurst. O nome *efeito de Hurst* é dado ao comportamento de dependência entre as observações, mesmo distantes, divulgado primeiramente pelo hidrólogo Harold E. Hurst em 1951 enquanto investigava a série temporal dos níveis do rio Nilo. Em seguida, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *Ruído Gaussiano Fracionário*, que é uma versão do Movimento Browniano Fracionário a tempo discreto, mostrando que este processo também exibe o efeito de Hurst. Mais tarde, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) estendem a classe de processos definidos por Box et al. (1994) para os chamados *processos auto-regressivos de médias móveis com integração fracionária*, denotados por $ARFIMA(p, d, q)$, os quais apresentam a *propriedade de longa dependência*.

Como objetivo principal deste trabalho apresentamos os processos fracionários com a propriedade de longa dependência, mais especificamente os processos k -Factor GARMA, contaminados por mistura com *outliers* aditivos. Os processos k -Factor GARMA são uma generalização dos processos ARFIMA e SARFIMA, chamado *processos auto-regressivos de médias móveis com integração fracionária com sazonalidade*, que são os processos ARFIMA com a presença de sazonalidade, com a característica de repetir-se durante um certo período fixo de tempo.

Gray, Zhang e Woodward (1989) propõem os Processos GARMA, isto é, quando $k = 1$. Apresentam as propriedades do processo e propõem um método para simular tais processos. Para estimar os parâmetros dos processos os autores utilizam o método de máxima verossimi-

lhança com a “grid search”. Para identificar o grau dos polinômios AR e MA é utilizado o critério AIC de Akaike (1974).

Giraitis e Leipus (1995) e Woodward et al. (1998) apresentam os Processos k -Factor GARMA, que são uma generalização dos Processos Gegenbauer (GARMA), além das propriedades de estacionariedade, longa dependência e sua função densidade espectral. O primeiro detém-se apenas na teoria destes processos. O segundo, além da teoria, apresenta resultados de simulações. Para estimar os parâmetros do k -factor GARMA este artigo segue uma extensão do método proposto por Chung (1996) utilizando o método da máxima verossimilhança aproximado em conjunto com a “grid search”.

Frequentemente, são encontradas em séries temporais observações que são discordantes quando comparadas as restantes. Algumas, devem-se a erros grosseiros de medição, outras podem ser resultantes de influências externas, tais como greves, alterações súbitas na estrutura de mercado, entre outras. Como resultado destas influências externas surgem observações discordantes que são classificadas como *outliers*. Fox (1972) introduziu os conceitos de *outliers* do tipo I e tipo II, conhecidos na literatura, respectivamente, como *outliers aditivos* e *inovadores* denotados, respectivamente, por AO e IO. Os *outliers aditivos* correspondem a um erro grosseiro de medição ou gravação afetando uma única observação. No caso dos *outliers inovadores*, ocorre um choque em um determinado período e o efeito se propaga para as observações subsequentes. Uma segunda questão refere-se ao tipo de modelo gerador dos *outliers*. Denby e Martin (1979) e Bustos e Yohai (1986), entre outros, consideram o modelo de contaminação por mistura, isto é, os *outliers* AO e IO são gerados por uma dada distribuição de probabilidade.

No Capítulo 2 definimos Longa Dependência, os polinômios de Gegenbauer, os processos GARMA e k -Factor GARMA e o modelo de contaminação por mistura para outliers aditivos. Também apresentamos algumas propriedades destes processos. No Capítulo 3 apresentamos alguns estimadores para os parâmetros destes processos. No Capítulo 4 analisamos a eficiência destes estimadores através de Simulações de Monte Carlo e no Capítulo 5 concluímos.

Capítulo 2

Processos

2.1 Longa Dependência

Em recentes estudos sobre séries temporais, tem-se focado nos processos estocásticos com a característica de longa dependência. A propriedade de longa dependência para um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser definida de diferentes maneiras, podendo ser no domínio do tempo ou no domínio da frequência. A seguir, introduzimos uma definição para a propriedade de *longa dependência*.

Definição 2.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário. No domínio do tempo, se existe um número real $u \in (0, 1)$ tal que

$$\rho_x(k) \sim C_1 k^{-u}, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C_1 \neq 0$ e $\rho_x(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência*. Equivalentemente, no domínio da frequência, se existe um número real $b \in (0, 1)$ tal que

$$f_x(w) \sim C_2 |w|^{-b}, \text{ quando } w \rightarrow 0,$$

onde $C_2 > 0$ e $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui *longa dependência* (ver Bary, 1964).

Notação: Na Definição 2.1, a notação $f(w) \sim g(w)$, quando $w \rightarrow 0$, significa $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(w)}{g(w)} = 1$.

Observação 2.1. Em relação a Definição 2.1 observamos:

- i) a relação $b = 1 - u$ é verdadeira;
- ii) no domínio do tempo, quando $u \in (0, 1)$, $\rho_x(k)$ tende a zero tão lentamente que $\sum_{k \geq 0} |\rho_x(k)|$ diverge, onde $\rho_x(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo;
- iii) o caso em que $u = 1$ é referido como *curta dependência* por alguns autores.

A seguir apresentamos a propriedade de dependência intermediária.

Definição 2.2. Na Definição 2.1, se $u \in (1, 2)$ dizemos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico estacionário com *dependência intermediária*.

Observação 2.2. A Definição 2.1 para a propriedade de *longa dependência* não é a única possível. Definições alternativas podem ser encontradas na literatura e elas não são equivalentes. No contexto de processos estocásticos estacionários $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, com variância finita, os itens a seguir são definições comuns de *longa dependência*:

- i) $\sum_{k=-n}^n \gamma_X(k) \sim n^\alpha L_1(n)$, quando $n \rightarrow \infty$ e $0 < \alpha < 1$;
- ii) $\gamma_X(k) \sim k^{-\beta} L_2(k)$, quando $k \rightarrow \infty$ e $0 < \beta < 1$;
- ii) $f_X(w) \sim w^{-\delta} L_3(|w|)$, quando $w \rightarrow 0$ e $0 < \delta < 1$.

As funções $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ são funções de variação suave (ver Definição ?? e Observação A.1) no infinito enquanto que a função $L_3(\cdot)$ é de variação suave em zero. Para maiores detalhes ver Doukhan et al. (2003).

Utilizando a definição de *longa dependência*, Granger e Joyeux (1980), Hosking (1981, 1984) e Geweke e Porter-Hudak (1983) apresentam os *processos auto-regressivos fracionariamente integrados de média móvel* (denotados por ARFIMA(p, d, q)) como um exemplo de processo com a característica de *longa dependência*. A seguir definimos os processos ARFIMA(p, d, q) porém, antes, precisamos definir os *processos ruído branco*.

Definição 2.3. O processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *ruído branco* com média zero e variância $\sigma_\varepsilon^2 < \infty$, denotado por $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0, \end{cases}$$

onde $\gamma_\varepsilon(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Definição 2.4. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - \mathcal{B})^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (2.1)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco (ver Definição 2.3), \mathcal{B} é o operador de *defasagem* ou de *retardo*, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de ordem p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell, \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (2.2)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem* (p, d, q) *com média* μ , denotado por ARFIMA(p, d, q), onde d é o *grau de diferenciação*.

Observação 2.3. Na Definição 2.4, quando $d = 0$ temos o chamado *processo auto-regressivo de média móvel de ordem* (p, q) , denotado por $\text{ARMA}(p, q)$. A função de autocorrelação dos processos $\text{ARMA}(p, q)$ possui decaimento exponencial, isto é,

$$|\rho_x(k)| \leq Cr^k, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

onde $C > 0$ e $r \in (0, 1)$.

Maiores detalhes sobre os processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ podem também ser encontrados em Fox e Taqqu (1986), Brockwell e Davis (1991), Sowell (1992), Beran (1994), Robinson (1995a), Baillie (1996), Peiris e Singh (1996), Reisen e Lopes (1999) e Lopes et al. (2004), Lopes (2007) entre outros.

Embora um número significativo de trabalhos utilizam-se dos processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$, é duvidoso acreditar que estes processos sejam suficientes para resolver todos os problemas sobre longa dependência sem alguma generalização.

Um exemplo de generalização, sugerido por Hosking (1981), é o modelo

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

o qual claramente inclui os processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$. Quando $u = 1$, temos $d = 2\lambda$.

Devido a complexidade na inversão do fator $(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda$, este modelo somente foi estudado recentemente. Inicialmente foi investigado por Gray et al. (1989) o qual utilizou as funções geradoras dos polinômios Gegenbauer (ver Definição 2.5). Os processos dados pela expressão (2.3) são mais gerais que os processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$.

A seguir, definiremos os polinômios Gegenbauer os quais são de grande importância para a definição dos processos GARMA e k -Factor GARMA .

Antes de definir os polinômios de Gegenbauer é conveniente introduzirmos as seguintes notações $\mathbb{Z}_{\geq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$ e $\mathbb{Z}_{\leq} = \{k \in \mathbb{Z} | k \leq 0\}$.

2.2 Polinômios Gegenbauer

Primeiramente vamos introduzir os polinômios de Gegenbauer. Estes polinômios são muito aplicados na Matemática tanto pela sua ortogonalidade como pelas suas propriedades recursivas.

Definição 2.5. Os *polinômios Gegenbauer* $C_j^{(\lambda)}(u)$ são definidos como os coeficientes na expansão em série de potência da seguinte função

$$(1 - 2uZ + Z^2)^{-\lambda} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u) Z^j, \quad (2.4)$$

para $\lambda \neq 0$, $|u| \leq 1$ e $|Z| \leq 1$, onde

$$C_j^{(\lambda)}(u) = \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda - k + j) (2u)^{j-2k}}{\Gamma(\lambda) \Gamma(k+1) \Gamma(j-2k+1)}, \quad (2.5)$$

para todo $j \geq 0$, com $\lfloor x \rfloor$ sendo a parte inteira de x , onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama definida por

- i) $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0;$
- ii) $\Gamma(x) = \infty, \quad x = 0;$
- iii) $\Gamma(x) = x^{-1} \Gamma(x+1), \quad x < 0;$
- iv) $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)}.$

Os polinômios Gegenbauer podem ser aproximados por

$$C_j^{(\lambda)}(u) \sim \frac{\cos[(j+\lambda)G - (\lambda\pi/2)]}{\Gamma(\lambda) \text{sen}^\lambda(G)} \left(\frac{2}{j}\right)^{1-\lambda}, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

onde a constante G é dada por $G = \cos^{-1}(u)$.

Assim, quando $\lambda < 1$, $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ decresce numa taxa hiperbólica, quando $j \rightarrow \infty$.

Computacionalmente, podemos calcular $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ usando a seguinte fórmula recursiva

$$C_j^{(\lambda)}(u) = 2u \left(\frac{\lambda-1}{j} + 1 \right) C_{j-1}^{(\lambda)}(u) - \left(2 \frac{\lambda-1}{j} + 1 \right) C_{j-2}^{(\lambda)}(u),$$

para todo $j > 2$, com $C_0^{(\lambda)}(u) = 1$, $C_1^{(\lambda)}(u) = 2\lambda u$, $C_2^{(\lambda)}(u) = 2\lambda(\lambda+1)u^2 - \lambda$.

Tendo definido os polinômios Gegenbauer podemos definir os processos Gegenbauer e, conseqüentemente, os processos GARMA.

2.3 Processos GARMA

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico dado pela expressão

$$(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda (X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (2.6)$$

onde $|u| \leq 1$, μ é a média do processo, \mathcal{B} é o operador de defasagem ou de retardo, isto é, $\mathcal{B}^j(X_t) = X_{t-j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

Se o processo é inversível, podemos escrever formalmente

$$X_t = \mu + (1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda} \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando-se a equação (2.4), o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser escrito na sua representação média-móvel infinita

$$X_t = \mu + \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u) \varepsilon_{t-j}, \quad (2.7)$$

onde $(C_j^{(\lambda)}(\cdot))_{j \in \mathbb{Z}}$ são os polinômios Gegenbauer definidos na equação (2.5). Assim temos a seguinte definição.

Definição 2.6. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela equação (2.7), é chamado de *processo Gegenbauer* com parâmetros u e λ e pode ser escrito pela expressão dada em (2.6).

Podemos notar que se $u = 1$, em (2.6), temos

$$(1 - \mathcal{B})^{2\lambda}(X_t - \mu) = \varepsilon_t. \quad (2.8)$$

Neste caso, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é justamente o processo fracionariamente integrado de grau ou parâmetro de diferenciação 2λ , isto é, um processo ARFIMA(0, 2λ , 0) e suas propriedades podem ser encontradas em Hosking (1981).

Quando $u = -1$, a equação (2.6) torna-se

$$(1 + \mathcal{B})^{2\lambda}(X_t - \mu) = \varepsilon_t.$$

A seguir citamos algumas propriedades dos processos Gegenbauer cujas demonstrações podem ser encontradas em Gray et al. (1989) e Chung (1996).

Observação 2.4. As Definições 2.1 e 2.2 podem ser estendidas para um processo estacionário qualquer.

- i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estacionário para o qual existe um número real $b \in (0, 1)$, uma constante $C_f > 0$ e uma frequência $G \in [0, \pi]$ (ou um número finito de frequências) tal que

$$f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-b}, \quad \text{quando } w \rightarrow G.$$

Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamado processo estacionário com *longa dependência*.

- ii) Quando $b \in (-1, 0)$, dizemos que o processo possui *dependência intermediária*.
 iii) No item i), quando $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processos ARFIMA(0, d , 0), temos que $b = 2d$ e $G = 0$. Assim, os processos ARFIMA(0, d , 0) possuem longa dependência quando $d \in (0, 0.5)$.

Proposição 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer dado na Definição 2.6. Então,*

- a) o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se
- i) $|u| < 1$ e $\lambda < 0.5$; ou
 - ii) $|u| = 1$ e $\lambda < 0.25$;
- b) o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se
- i) $|u| < 1$ e $\lambda > -0.5$; ou
 - ii) $|u| = 1$ e $\lambda > -0.25$;
- c) um processo Gegenbauer estacionário possui a propriedade de longa dependência se $0 < \lambda < 0.5$ e $|u| < 1$ ou $0 < \lambda < 0.25$ e $|u| = 1$;
- d) a função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\begin{aligned} f_x(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |1 - 2ue^{iw} + e^{2iw}|^{-2\lambda} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é chamada frequência de Gegenbauer ou frequência G , isto é, a função densidade espectral torna-se ilimitada em G .

Quando $w \rightarrow G$,

$$f_x(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \quad (2.10)$$

onde $C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\sin(G)|]^{-2\lambda} > 0$.

e) A função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, quando $|u| < 1$ e $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$, é dada por

$$\gamma_x(k) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(1 - 2\lambda) [2 \sin(G)]^{1/2 - 2\lambda} [P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) + (-1)^k P_{k-1/2}^{2\lambda-1/2}(-u)],$$

onde $P_a^b(\cdot)$ são funções de Legendre (ver Observação 2.6) e pode ser aproximada por

$$\begin{aligned} \gamma_x(k) &= \frac{2^{1-2\lambda} \sigma_\varepsilon^2}{\pi} \sin^{-2\lambda}(G) \sin(\lambda\pi) \Gamma(1 - 2\lambda) \cos(kG) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(k + 1)} [1 + O(k^{-1})]. \end{aligned}$$

f) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo Gegenbauer estacionário com longa dependência. Então,

i) quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = \frac{\Gamma(1 - 2\lambda) \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(k - 2\lambda + 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim k^{4\lambda-1}$.

ii) quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$, a função de autocorrelação do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_x(k) = (-1)^k \frac{\Gamma(1 - 2\lambda) \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda) \Gamma(k - 2\lambda + 1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_x(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$.

iii) quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$,

$$\rho_x(k) \sim k^{2\lambda-1} \sin(\pi\lambda - kG), \quad (2.11)$$

quando $k \rightarrow \infty$, onde $G = \cos^{-1}(u)$.

Observação 2.5. A expressão (2.11) acima explica o comportamento senoidal da função de autocorrelação dos processos Gegenbauer.

Observação 2.6. As *funções de Legendre*, associadas a expressão exata da função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada no item e) da Proposição 2.1, podem ser calculadas utilizando a fórmula recursiva

$$P_a^b(x) = \frac{2a-1}{a-b} x P_{a-1}^b(x) - \frac{a+b-1}{a-b} P_{a-2}^b(x). \quad (2.12)$$

A fórmula recursiva (2.12) requer os seguintes termos iniciais

$$P_{-1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-2\lambda)} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

$$P_{1/2}^{2\lambda-1/2}(u) = \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{\lambda-1/4} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2}-2\lambda)} \cdot F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}-2\lambda; \frac{1-u}{2}\right),$$

onde $F(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a *função hipergeométrica* definida por

$$F(a, b; c; x) = \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+j)\Gamma(j+1)} \right] x^j.$$

Observação 2.7. Woodward et al. (1998), baseados na equação (2.7), apresentam a função de autocovariância dada por

$$\gamma_x(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq}} C_j^{(\lambda)}(u) C_{j+k}^{(\lambda)}(u), \quad \text{para todo } |u| \leq 1, \quad (2.13)$$

onde $k \in \mathbb{Z}_{\geq}$ e $C_j^{(\lambda)}(\cdot)$ é dado pela expressão (2.5).

Da mesma forma que podemos incluir componentes auto-regressivas e médias móveis aos processos fracionalmente integrados puros obtendo então os processos ARFIMA(p, d, q), podemos estender os processos Gegenbauer combinando-os com os processos ARMA(p, q). Isto nos conduz a seguinte definição.

Definição 2.7. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(1 - 2u\mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^\lambda (X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (2.14)$$

onde μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos por

$$\phi(z) = \sum_{\ell=0}^p (-\phi_\ell) z^\ell \quad \text{e} \quad \theta(z) = \sum_{m=0}^q (-\theta_m) z^m, \quad (2.15)$$

onde ϕ_ℓ , $1 \leq \ell \leq p$, e θ_m , $1 \leq m \leq q$, são constantes reais e $\phi_0 = -1 = \theta_0$. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel Gegenbauer* de ordem (p, u, λ, q) , denotado por GARMA(p, u, λ, q).

As propriedades dos processos GARMA(p, u, λ, q), a seguir apresentadas, encontram-se demonstradas em Gray et al. (1989).

Proposição 2.2. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo GARMA(p, u, λ, q) ($\lambda \neq 0$), dado na Definição 2.7, com todas as raízes das equações $\phi(z) = 0$ e $\theta(z) = 0$ fora do círculo unitário. Então, valem as seguintes afirmações:*

- a) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se $\lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$.*
- b) *O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se $\lambda > -0.5$, quando $|u| < 1$, ou $\lambda > -0.25$, quando $|u| = 1$.*
- c) *Se $0 < \lambda < 0.25$, quando $|u| = 1$ ou $0 < \lambda < 0.5$, quando $|u| < 1$, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo com longa dependência.*
- d) *A função densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por $f_x(\cdot)$, é dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} [2(\cos(w) - u)]^{-2\lambda}, \text{ para todo } w \in (0, \pi], \quad (2.16)$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ é a frequência de Gegenbauer.

- i) *Se $|u| < 1$, $\lim_{w \rightarrow G} (w - G)^{2\lambda} f_x(w)$ existe e é finito.*
 - ii) *Se $|u| = 1$, $\lim_{w \rightarrow G} w^{4\lambda} f_x(w)$ existe e é finito.*
- e) *Quando $k \rightarrow \infty$,*
- i) $\rho_x(k) \sim k^{4\lambda-1}$, *quando $u = 1$ e $0 < \lambda < 0.25$,*
 - ii) $\rho_x(k) \sim (-1)^k k^{4\lambda-1}$, *quando $u = -1$ e $0 < \lambda < 0.25$,*
 - iii) $\rho_x(k) \sim k^{2\lambda-1} \text{sen}(\pi\lambda - kG)$, *quando $|u| < 1$ e $0 < \lambda < 0.5$.*

Observação 2.8.

- i) *A função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q) não é necessariamente ilimitada na origem, como nos processos ARFIMA (p, d, q), mas para alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$.*
- ii) *Estamos interessados em encontrar a expressão assintótica da função densidade espectral dos processos GARMA(p, u, λ, q). Para isso, escrevemos a expressão (2.16) como*

$$f_x(w) = f_Y(w) \frac{|\theta(e^{-iw})|^2}{|\phi(e^{-iw})|^2}, \quad (2.17)$$

onde $f_Y(\cdot)$ é a função densidade espectral de um processo GARMA ($0, u, \lambda, 0$), dada pela expressão (2.9), com $G = \cos^{-1}(u)$.

Vamos supor que o processo GARMA(p, u, λ, q) seja causal e inversível. Sabemos que $\lim_{z \rightarrow 0} \cos(z) = 1$, ou seja, $\cos(z) \sim 1$, quando $z \rightarrow 0$ (ver Definição ??). Pela expressão (2.17), quando $z \rightarrow 0$, temos que

$$\begin{aligned}
f_X(z+G) &= f_Y(z+G) \frac{|\theta(e^{-i(z+G)})|^2}{|\phi(e^{-i(z+G)})|^2} \\
&= f_Y(z+G) \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(z+G) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(z+G) + \rho_{\ell,2}^2)} \right] \\
&\sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} |z|^{-2\lambda} \\
&\quad \times \left[\frac{\prod_{m=1}^q (1 - 2\rho_{m,1} \cos(G) + \rho_{m,1}^2)}{\prod_{\ell=1}^p (1 - 2\rho_{\ell,2} \cos(G) + \rho_{\ell,2}^2)} \right] \tag{2.18} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} |z|^{-2\lambda} \frac{|\theta(e^{-iG})|^2}{|\phi(e^{-iG})|^2} \\
&= C_f |z|^{-2\lambda}, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

onde $G = \cos^{-1}(u)$ e

$$C_f = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2|\operatorname{sen}(G)|]^{-2\lambda} \frac{|\theta(e^{-iG})|^2}{|\phi(e^{-iG})|^2}. \tag{2.20}$$

A expressão (2.18) é validada pela equação (2.10).

Fazendo a mudança de variável $w = z + G$, na equação (2.19), temos que

$$f_X(w) \sim C_f |w - G|^{-2\lambda}, \tag{2.21}$$

quando $w \rightarrow G$, onde C_f é dada pela expressão (2.20).

A Figura 2.1 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos GARMA (p, u, λ, q) , com $\lambda = 0.2$, $\mu = 0$ e diferentes valores para u , G . A expressão da função densidade espectral dos processos GARMA (p, u, λ, q) (apresentada na Figura 2.1(a) com $\lambda = 0.2$, $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$) coincide com a expressão da função densidade espectral dos processos ARFIMA (p, d, q) quando $d = 0.4$, $p = 0 = q$ e $\mu = 0$.

Para maiores detalhes sobre os processos GARMA (p, u, λ, q) , ver Chung (1996) e Ferrara e Guégan (1999).

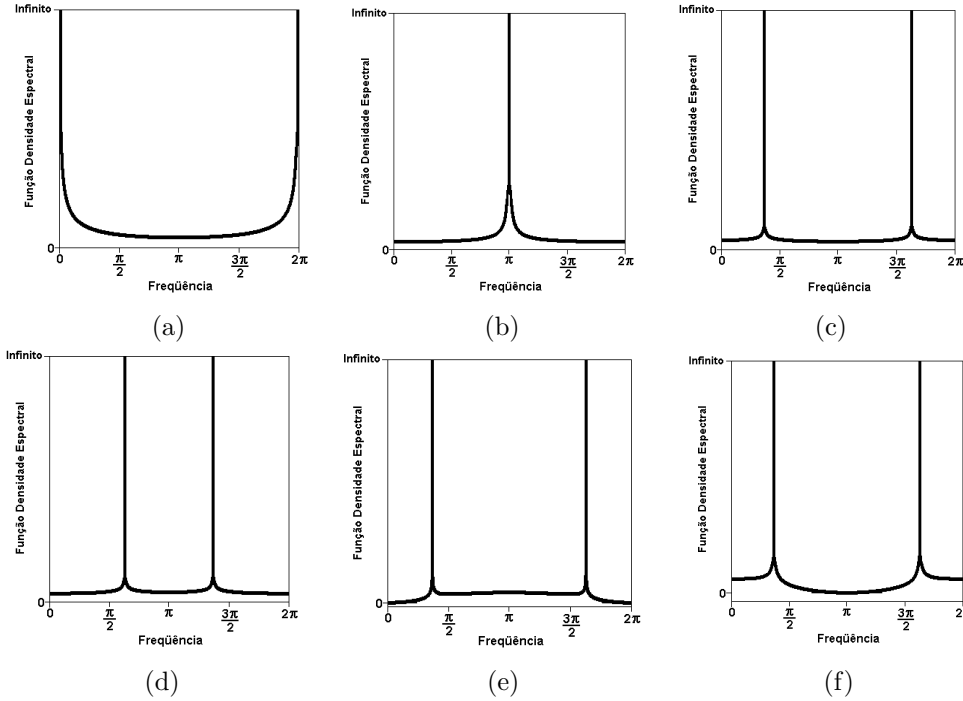


Figura 2.1: Função densidade espectral dos processos $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$, com $\mu = 0$ e $\lambda = 0.2$: (a) $u = 1$, $p = 0 = q$ e $G = 0$; (b) $u = -1$, $p = 0 = q$ e $G = \pi$; (c) $u = 0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.369\pi$; (d) $u = -0.4$, $p = 0 = q$ e $G = 0.63\pi$; (e) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = 0.8$ e $G = 0.369\pi$; (f) $u = 0.4$, $p = 1$, $q = 0$, com $\phi_1 = -0.8$ e $G = 0.369\pi$;

2.4 Processos k -Factor GARMA

Os processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$, onde $d \in (-0.5, 0.5)$, podem ser tratados como uma generalização dos processos $\text{ARIMA}(p, d, q)$, onde $d \in \mathbb{N}$, para modelar dados com a propriedade de longa dependência, isto é, quando a função densidade espectral é ilimitada na frequência zero. Similarmente, os processos $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$ são tratados como uma generalização dos processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$, na qual a sua função densidade espectral torna-se ilimitada em alguma frequência G no intervalo $(0, \pi]$, não necessariamente a frequência zero. Contudo, uma limitação dos processos $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ e do processo mais geral $\text{GARMA}(p, u, \lambda, q)$ é que as suas funções densidade espectral tornam-se ilimitadas em apenas uma frequência do intervalo $(0, \pi]$. Por isso, Gray et al. (1989) sugere a inclusão de mais de um fator Gegenbauer nos modelos GARMA.

Giraitis e Leipus (1995) e, depois, Woodward et al. (1998) estendem os modelos Gegenbauer e GARMA, respectivamente, aos modelos k -Factor Gegenbauer e k -Factor GARMA, para os quais a função densidade espectral é ilimitada para um número finito k de frequências, chamadas de *frequências de Gegenbauer* (ou frequências G), no intervalo $(0, \pi]$.

Definição 2.8. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo estocástico que satisfaz a equação

$$\prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (2.22)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a

média do processo e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco. Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo k -Factor Gegenbauer* de ordem $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$, denotado por k -Factor Gegenbauer $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$, onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

A seguir apresentamos algumas propriedades dos processos k -Factor Gegenbauer $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$. A demonstração destas propriedades pode ser encontrada em Woodward et al. (1998).

Proposição 2.3. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor Gegenbauer $(0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0)$ (ver Definição 2.8). Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se u_j são distintos e $\lambda_j < 0.5$, quando $|u_j| < 1$ e $\lambda_j < 0.25$, quando $|u_j| = 1$, para $j = 1, \dots, k$;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se o item i) é satisfeito e ainda $\lambda_j > 0$, para $j = 1, \dots, k$;*
- iii) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por*

$$f_x(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad \text{para } w \in (0, \pi],$$

onde $f_x(\cdot)$ é ilimitada nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, $j = 1, \dots, k$.

iv) *Seja*

$$|\lambda_j| < \begin{cases} 0.5, & \text{se } 0 < u_j < 1; \\ 0.25, & \text{se } |u_j| = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

com $\lambda_j \neq 1$, para $j = 1, \dots, k$. Então, existe uma única solução estacionária, X_t de (2.22) a qual é causal e inversível.

A expressão assintótica da função densidade espectral é dada por

$$f_x(w) \sim D(\ell) |w - G_\ell|^{-2\lambda_\ell}, \quad \text{quando } w \rightarrow G_\ell,$$

para $\ell = 1, \dots, k$, onde

$$D(\ell) = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |2 \operatorname{sen}(G_\ell)|^{-2\lambda_\ell} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } 0 < G_\ell < \pi, \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq \ell}}^k [2|\cos(G_\ell) - \cos(G_j)|]^{-2\lambda_j}, & \text{para } G_\ell = 0 \text{ ou } G_\ell = \pi. \end{cases}$$

A seguir definimos os modelos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$.

Definição 2.9. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B}) \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{\lambda_j} (X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B}) \varepsilon_t, \quad (2.24)$$

onde k é um inteiro finito, $|u_j| \leq 1$ e λ_j é um número fracionário, para $j = 1, \dots, k$, μ é a média do processo, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco e $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são os polinômios de grau p e q , respectivamente, definidos em (2.15). Então, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *processo auto-regressivo de média móvel k -Factor Gegenbauer* de ordem $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, denotado por k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)'$ e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)'$.

Na proposição a seguir, apresentamos alguns resultados sobre k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) estabelecidos e provados em Giraitis e Leipus (1995) e Woodward et al. (1998).

Proposição 2.4. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) conforme a Definição 2.9. Então,*

- i) *o processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário se todas as raízes da equação $\phi(z) = 0$ estão fora do círculo unitário, e além disso, u_j e λ_j , para $1 \leq j \leq k$, satisfazem a condição do item i) da Proposição 2.3;*
- ii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui longa dependência se satisfaz as condições do item i) desta proposição e, além disso, $\lambda_j > 0$, para $1 \leq j \leq k$;*
- iii) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é causal se e somente se $\phi(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- vi) *o processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é inversível se e somente se $\theta(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$;*
- v) *a função densidade espectral do processo k -Factor GARMA, definido pela expressão (2.24), é dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (2.25)$$

onde $0 < w \leq \pi$ e $G_j = \cos^{-1}(u_j)$ são as chamadas frequências de Gegenbauer.

A Figura 2.2 apresenta alguns exemplos da função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$ e diferentes valores para \mathbf{u} e $p, q \in \{0, 1\}$.

Lema 2.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela Definição 2.9, causal e inversível cuja função densidade espectral $f_X(\cdot)$ é dada pela equação (2.25). Então,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln[f_X(w)] dw = 2\pi \ln\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\right), \quad (2.26)$$

onde $\sigma_\varepsilon^2/2\pi$ é a função densidade espectral do processo ruído branco, denotado por $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

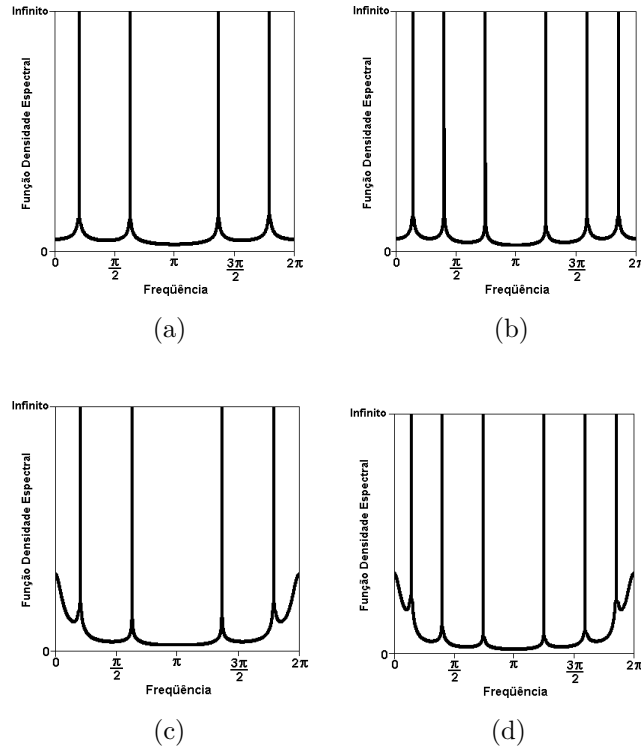


Figura 2.2: Função densidade espectral dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2)$, para $k = 2$ e $\boldsymbol{\lambda} = (0.2, 0.2, 0.2)$, para $k = 3$: (a) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$ e $p = 0 = q$; (b) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$ e $p = 0 = q$; (c) $k = 2$, $\mathbf{u} = (-0.4, 0.8)$, $G_1 = 0.631\pi$, $G_2 = 0.204\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$; (d) $k = 3$, $\mathbf{u} = (-0.7, 0.3, 0.9)$, $G_1 = 0.747\pi$, $G_2 = 0.403\pi$, $G_3 = 0.143\pi$, $p = 1 = q$, $\phi_1 = 0.8$ e $\theta_1 = 0.5$.

Maiores detalhes sobre os processos k -Factor Gegenbauer($0, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, 0$) e k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) podem ser encontrados em Giraitis e Leipus (1995), Woodward et al. (1998) e Ferrara e Guégan (2001).

Na seção a seguir, apresentamos um estimador para as frequências de Gegenbauer e diversos estimadores para o parâmetro de longa dependência.

2.5 Contaminação por Outliers Aditivos

Nesta seção, apresentamos o modelo de contaminação por mistura, proposto por Denby e Martin (1979), Bustos e Yohai (1986) e Beran (1994). Este modelo de contaminação será utilizado para contaminar os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com *outliers* aditivos, os quais estão definidos a seguir.

Definição 2.10. Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$Z_t = X_t + V_t, \quad (2.27)$$

onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 2.9). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é constituído de variáveis aleatórias dadas por $V_t = \chi_t^c V_t^*$, onde $\{\chi_t^c\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo de Bernoulli com variáveis aleatórias independentes com probabilidade de sucesso c e $\{V_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo estocástico arbitrário com distribuição G .

Então, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *processo com contaminação por mistura por outliers aditivos*.

Este modelo de contaminação é o mais geral onde podemos contaminar os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ com um processo estocástico $\{V_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$ arbitrário. Para maiores detalhes sobre este modelo de contaminação, ver Beran (1994). Neste trabalho, utilizamos um modelo de contaminação semelhante, o qual é definido a seguir.

Definição 2.11. Seja $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico satisfazendo a equação

$$Z_t = X_t + V_t, \quad (2.28)$$

onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, com processo de inovação $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 2.9). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é constituído de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição dada por

$$H_V = (1 - c)\delta_0 + cG, \quad (2.29)$$

onde $0 \leq c \leq 1$, δ_0 uma distribuição degenerada na origem, isto é, a esperança e a variância de uma variável aleatória com esta distribuição são ambas nulas e G uma distribuição arbitrária. Além disso, os processos $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes. Então, $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser um *processo com contaminação por mistura por outliers aditivos*.

Neste caso, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, que é um processo contaminado com AO , é igual ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com probabilidade $1 - c$, e tem probabilidade c de ser igual ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ adicionado de um erro $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, no caso AO uma componente aleatória adicional sobrepõe-se ocasionalmente ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Esta observação exibe um comportamento de *outlier*. Se $c = 0$, não temos contaminação, isto é, o processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é idêntico ao processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Neste trabalho, vamos considerar a função de distribuição de probabilidade G como sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, \tau_V^2)$. Assim, podemos calcular a variância e a esperança das variáveis aleatórias V_t , para todo $t \in \mathbb{Z}$.

A Figura 2.3 abaixo, apresenta uma série temporal de tamanho $n = 100$, gerada a partir de um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, onde $k = 2$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}$ e $p = 0 = q$, com e sem contaminação por mistura por *outliers* aditivos. Neste caso, consideramos a função de distribuição de probabilidade G como sendo uma distribuição $\mathcal{N}(0, 50)$ e $c = 0.2$.

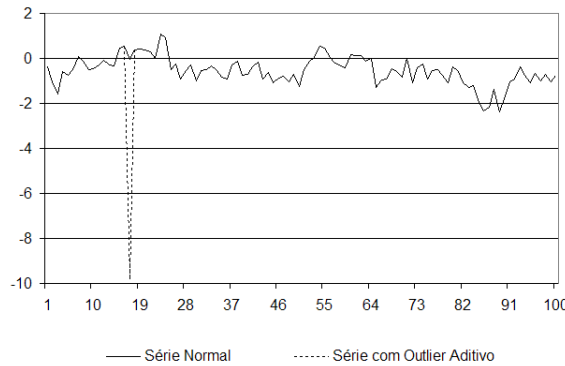


Figura 2.3: Série gerada a partir de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, dado pela expressão (2.28), com $k = 2$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}$, $p = 0 = q$, G uma distribuição $\mathcal{N}(0, 50)$ e $c = 0.2$.

Sejam v_t e ν_t variáveis aleatórias com distribuição, respectivamente, $F_v = \delta_0$ e $G_\nu = \mathcal{N}(0, \tau_\nu^2)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x d((1-c)F_v(x) + cG_\nu(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x dF_v(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x dG_\nu \\
&= (1-c)\mathbb{E}(v_t) + c\mathbb{E}(\nu_t) = 0.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos calcular a variância. Então,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(V_t) &= \mathbb{E}(V_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dH(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d((1-c)F_v(x) + cG_\nu(x)) \\
&= (1-c) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_v(x) + c \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG_\nu \\
&= (1-c)\mathbb{E}(v_t^2) + c\mathbb{E}(\nu_t^2) \\
&= (1-c)\text{Var}(v_t^2) + c\text{Var}(\nu_t^2) = c\tau_V^2.
\end{aligned}$$

Como os processos $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes, a função densidade espectral do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_z(w) = f_x(w) + f_v(w), \quad \text{para } w \in (0, \pi],$$

onde $f_x(\cdot)$ é a função densidade espectral do processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) (ver equação (2.25)) e $f_v(w) = \frac{c\tau_V^2}{2\pi}$ é a função densidade espectral do processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Logo,

$$f_z(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j} + \frac{c\tau_V^2}{2\pi}. \quad (2.30)$$

A Figura 2.4 abaixo, apresenta a função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver Definição 2.11), denotada por $f_z(\cdot)$, onde $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com com $k = 2$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}$ e $p = 0 = q$. A distribuição de probabilidade G é uma $\mathcal{N}(0, 50)$ e $c = 0.2$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_x(\cdot)$, dada pela equação (2.25). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por $f_v(w) = \frac{c\tau_V^2}{2\pi}$.

Por definição, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

$$\gamma_V(h) = 2 \int_0^\pi f_v(w) \cos(wh) dw = \begin{cases} c\tau_V^2, & \text{se } h = 0, \\ 0, & \text{se } h \neq 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Desta forma, a função de autocovariância de ordem h , $h \in \mathbb{Z}_{\geq}$, do processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, é dada por

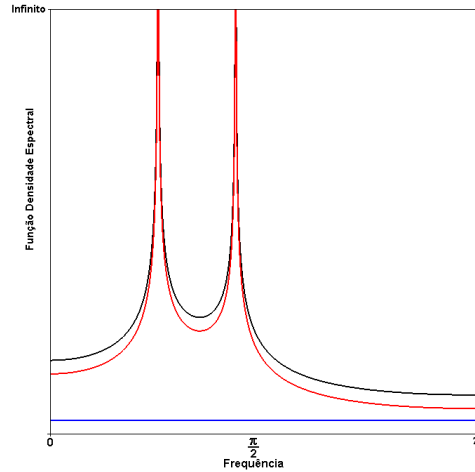


Figura 2.4: Função densidade espectral de um processo $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ (ver expressão (2.30)), denotada por $f_Z(\cdot)$ (preto), com $k = 2$, $\mathbf{u} = \{0.2, 0.7\}$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0.2, 0.2\}$ e $p = 0 = q$. O processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral denotada por $f_X(\cdot)$ (vermelha), dada pela equação (2.25). O processo $\{V_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui função densidade espectral dada por $f_V(\cdot)$ (azul), onde $c = 0.2$ e G é a distribuição $\mathcal{N}(0, 50)$.

$$\gamma_Z(h) = \begin{cases} \gamma_X(0) + \gamma_V(0), & \text{se } h = 0, \\ \gamma_X(h), & \text{se } h \neq 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

onde $\gamma_X(\cdot)$ é a função de autocovariância do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ que é um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$.

Capítulo 3

Estimação

Nesta seção apresentamos diversos métodos de estimação para o parâmetro dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Na classe paramétrica, a estimação de todos os parâmetros do processo ocorre conjuntamente através de estimadores de máxima verossimilhança. Dentre os estimadores paramétricos citamos o estimador proposto por Fox e Taqqu (1986), o qual utiliza uma aproximação, proposta por Whittle (1951), para a matriz de autocovariância do processo, para os processos ARFIMA(p, d, q), o qual estendemos seus resultados para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

No caso dos estimadores semiparamétricos e, conseqüentemente, nos estimadores robustos, apenas o parâmetro de longa dependência é estimado, isto é, estes estimadores necessitam da localização das frequências de Gegenbauer para estimar o parâmetro de longa dependência.

Para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) teríamos que expandir, em série de potência, o termo $\ln[2(\cos(w) - u_j)]^2$, para cada $j = 1, \dots, k$, que aparece na expressão (3.1) a seguir. Teríamos que truncar cada série em um certo valor m_j , para $j = 1, \dots, k$. Em seguida, aplicaríamos a técnica dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros, o que seria extremamente complicado e inviável.

Tendo em mente esta dificuldade, Yajima (1996) propõe um estimador gráfico para as frequências de Gegenbauer. As frequências de Gegenbauer são aquelas em que o periodograma possui um máximo local.

A seguir, apresentamos um estimador para as frequências de Gegenbauer de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

3.1 Estimador para as Frequências de Gegenbauer

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (2.24) cuja função densidade espectral possui k singularidades, nas frequências $G_j = \cos^{-1}(u_j)$, para $j = 1, \dots, k$ as quais são chamadas de frequências de Gegenbauer. A função densidade espectral possui a seguinte expressão

$$f_X(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - u_j)]^{-2\lambda_j}, \quad (3.1)$$

onde

$$f_U(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi].$$

Os parâmetros u_j e λ_j , para todo $j = 1, \dots, k$, satisfazem as condições da Proposição 2.4.

Seja $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ uma sequência de intervalos definidos como segue: para todo $\varepsilon > 0$ fixado e para todo $\nu = 1, \dots, k$,

$$V_\nu = (G_\nu - a_\nu, G_\nu - \varepsilon) \cup (G_\nu + \varepsilon, G_\nu + b_\nu),$$

onde $\{a_\nu\}_{\nu=1}^k$ e $\{b_\nu\}_{\nu=1}^k$ são sequências reais, tais que $\{V_\nu\}_{\nu=1}^k$ é uma cobertura do intervalo $(0, \pi]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, isto é,

$$\bigcup_{\nu=1}^k V_\nu = (0, \pi] \setminus \{G_1, \dots, G_k\}.$$

Definição 3.1. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) dado pela expressão (2.24). Seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal obtida a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e seja

$$I(w) := \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-itw} \right|^2, \quad (3.2)$$

a função periodograma. O estimador para as frequências de Gegenbauer G_j , denotado por \widehat{G}_j , para $j = 1, \dots, k$ é definido por

$$\widehat{G}_j = \frac{2\pi}{n} \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w). \quad (3.3)$$

Suposição 3.1.1. As funções $f_X(\cdot)$ e $f_U(\cdot)$ satisfazem as seguintes afirmações:

- i) $f_X(\cdot)$ é uma função par;
- ii) $f_U(\cdot)$ é uma função positiva no intervalo $[0, \pi]$;
- iii) para todo $\nu = 1, \dots, k$ e $w \in V_\nu$, $f_U(\cdot)$ satisfaz

$$\left| \frac{f'_U(w)}{f_U(w)} \right| = \mathcal{O}(|w - G_\nu|^{-1}),$$

para todo $w \in (0, \pi]$. Veja a definição de $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ na Definição ??.

O seguinte teorema foi estabelecido por Yajima (1996).

Teorema 3.1. *Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral satisfaz a equação (3.1). Sob a Suposição 3.1.1, para todo $\alpha \in (0, 1)$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que*

$$n^\alpha (\widehat{G}_j - G_j) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \text{para cada } j = 1, \dots, k.$$

A seguir, apresentamos os estimadores semiparamétricos para o vetor de parâmetros de longa dependência $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

3.2 Estimação Semiparamétrica

Nesta seção apresentamos a classe de estimadores semiparamétricos para os parâmetros dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Estes estimadores utilizam metodologias de regressão clássica e robusta para a estimação dos parâmetros $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ destes processos. Maiores detalhes sobre as metodologias de regressão clássica e robusta ver Draper e Smith (1981).

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) com média $\mu = 0$, cuja função densidade espectral é dada pela expressão (3.1).

Os parâmetros $u_j = \cos(G_j)$, para $j = 1, \dots, k$, são previamente estimados por $\hat{u}_j = \cos(\hat{G}_j)$, onde \hat{G}_j , $j = 1, \dots, k$, são dados através da expressão (3.3). Pela expressão (3.1), uma vez estimados os parâmetros u_j , a função densidade espectral para este processo é dada por

$$f_x(w) = f_U(w) \prod_{j=1}^k [2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^{-2\lambda_j}. \quad (3.4)$$

Aplicando a função logarítmica a ambos os lados da equação (3.4) temos

$$\ln(f_x(w)) = \ln(f_U(w)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^2. \quad (3.5)$$

Adicionando $\ln(f_U(0))$ e $\ln(I(w))$, a ambos os lados da equação (3.5), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma dada pela expressão (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \ln(I(w)) &= \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w) - \hat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right] \\ &\quad + \ln \left[\frac{I(w)}{f_x(w)} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Seja $B = \{0, 1, \dots, g(n) \mid \nu \neq v_j = \operatorname{argmax}_{w \in V_j} I(w), j = 1, \dots, k\}$, onde $g(n)$ é tal que $g(n) \rightarrow \infty$ e $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo a frequência w pelas frequências de Fourier $w_\nu = \frac{2\pi\nu}{n}$, $\nu \in B$, obtemos uma forma aproximada para a equação (3.6), dada por

$$\ln(I(w_\nu)) \sim \ln(f_U(0)) - \sum_{j=1}^k \lambda_j \ln[2(\cos(w_\nu) - \hat{u}_j)]^2 + \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_x(w_\nu)} \right]. \quad (3.7)$$

O termo $\ln \left[\frac{f_U(w)}{f_U(0)} \right]$, que aparece na equação (3.6), é desprezível se comparado com os outros termos daquela equação, sendo então desconsiderado. Desta forma, podemos observar que a equação (3.7) é uma forma aproximada de uma equação de regressão linear múltipla dada por

$$y_\nu \sim \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{\nu j} + \epsilon_\nu, \quad \text{para todo } \nu \in B, \quad (3.8)$$

onde

$$y_\nu = \ln(I(w_\nu)), \quad x_{\nu j} = \ln[2(\cos(w_\nu) - \hat{u}_j)]^2,$$

$$\epsilon_\nu = \ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right] + c, \quad \beta_0 = \ln f_\varepsilon(0) - c, \quad c = \mathbb{E} \left(\ln \left[\frac{I(w_\nu)}{f_X(w_\nu)} \right] \right),$$

$$\beta_j = -\lambda_j, \tag{3.9}$$

com ϵ_ν variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância constante.

3.2.1 Estimador GPH

Geweke e Porter-Hudak (1983) propôs o estimador semiparamétrico dos mínimos quadrados para o parâmetro d dos processos ARFIMA(p, d, q) utilizando a função periodograma. Nesta seção estendemos os seus resultados para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) onde estimamos o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ (ver equação 3.9), dado por $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ os quais minimizam a função perda

$$\mathfrak{L}_1(g(n)) = \sum_{\nu \in B} r_\nu^2, \tag{3.10}$$

onde $r_\nu = y_\nu - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_{\nu j}$ é o ν -ésimo resíduo e y_ν é dado na equação (3.8).

Denotaremos os estimadores das componentes do parâmetro $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, respectivamente, por

$$\hat{\lambda}_{GPH-MQ}^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

para indicar os estimadores de λ_j , obtidos através do método de estimação proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

Além da metodologia dos mínimos quadrados utilizamos duas metodologias robustas de regressão, a citar, a metodologia MM e MQP. Maiores detalhes ver Draper e Smith (1981). Denotaremos estes estimadores, respectivamente, por

$$\hat{\lambda}_{GPH-MM}^j \quad e \quad \hat{\lambda}_{GPH-MQP}^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

3.2.2 Estimador BA

Inicialmente, proposto para os processos ARFIMA(p, d, q), este estimador baseia-se no uso da função periodograma suavizado de covariâncias (ver expressão (3.11)) ao invés da função periodograma, no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Essa alteração decorre do fato de que a função periodograma é um estimador não viciado, mas inconsistente para a função densidade espectral de um processo. No entanto, a função periodograma suavizado de covariâncias é um estimador não viciado e consistente para ela, cuja expressão é dada por

$$I_{smooth}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m} \Lambda\left(\frac{k}{m}\right) \hat{\gamma}_X(k) e^{-ikw}, \quad \text{para todo } w \in (0, \pi], \tag{3.11}$$

onde $\widehat{\gamma}_x(\cdot)$ denota a função de autocovariância amostral. A função $\Lambda(\cdot)$ é denominada função peso ou núcleo e m é o *ponto de truncamento* da função, que depende do tamanho amostral n .

Aqui, generalizamos o procedimento proposto para os processos ARFIMA(p, d, q), para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) onde estimamos o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, dados na equação (3.9).

O estimador BA é obtido substituindo-se a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias, dado em (3.11), no estimador GPH .

Neste trabalho, utilizamos a função peso (ou núcleo) de Bartlett, cuja expressão é dada por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Maiores detalhes sobre a função periodograma suavizado de covariâncias e janelas espectrais podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991), Morettin e Toloí (2004) e Koopmans (1974).

O *ponto de truncamento* da Janela de Parzen é definido com $m = n^\beta$, $0 < \beta < 1$. Aqui, consideramos $\beta = 0.9$.

Os estimadores para os parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, pelo método dos mínimos quadrados, utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias, são denotados, respectivamente, por

$$\widehat{\lambda}_{BA-MQ}^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

Estes estimadores são não viciados. Da mesma forma que o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), aplicando as metodologias robustas MQP e MM à equação de regressão (3.8), obtemos os estimadores, baseados na metodologia robusta, para os parâmetros $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, denotados, respectivamente, por

$$\widehat{\lambda}_{BA-MM}^j \text{ e } \widehat{\lambda}_{BA-MQP}^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

3.3 Estimação Paramétrica

Nesta seção apresentamos os estimadores paramétricos, isto é, aqueles que estimam todos os parâmetros dos modelo ao mesmo tempo.

3.3.1 Estimador FT

O estimador proposto por Fox e Taqqu (1986) baseia-se em uma aproximação proposta por Whittle (1951).

Este estimador de $\boldsymbol{\eta} = \{\phi_1, \dots, \phi_p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \theta_1, \dots, \theta_q\}$ é definido como a solução $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$ que minimiza a equação

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; X) = \frac{1}{N} \sum_t \frac{I_N(\omega_t)}{k(\omega_t; \boldsymbol{\eta})}, \quad (3.12)$$

em que $\omega_t = \frac{2\pi t}{N}$ são as frequências de Fourier, $t \in \mathbb{Z}$, $-\frac{N}{2} < t \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x). Hannan (1973) mostra que os resultados sobre consistência e distribuição assintótica também valem considerando esta aproximação.

Na próxima Seção vamos definir um novo estimador, baseado na proposta de Fox e Taquq (1986). Provaremos que este novo estimador apresenta as mesmas propriedades do estimador proposto por Fox e Taquq (1986).

3.3.2 Estimador FTmod

Como vimos na seção anterior, na prática, para utilizarmos o estimador proposto por Fox e Taquq (1986), considera-se a soma nos coeficiente de Fourier. Assim, vamos modificar o estimador original, calculando a função $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; X)$, dada pela expressão (3.12), não apenas nas frequências de Fourier, passando a calcular em mais pontos.

Considere a seguinte função

$$S_n^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{cn} \sum_t \frac{I_n(\omega_{ct})}{k(\omega_{ct}; \boldsymbol{\eta})} \quad (3.13)$$

em que $\omega_{ct} = \frac{2\pi t}{cn}$, $c \in \mathbb{N} - \{1\}$ fixo e finito, $t \in \mathbb{Z}$, $-\frac{cn}{2} < t \leq \lfloor \frac{cn}{2} \rfloor$. O estimador modificado que estamos propondo, para $\boldsymbol{\eta} = \{\phi_1, \dots, \phi_p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \theta_1, \dots, \theta_q\}$, denotado por $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, o qual é o mínimo da equação (3.13) com relação à $\boldsymbol{\eta}$. Além disso, o estimador da variância do processo de inovação é dado por $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 2\pi S_n^2(\hat{\boldsymbol{\eta}}_n)$.

Na aproximação original, calcula-se a soma em n frequências, com essa nova proposta estaremos somando em cn frequências. Pretende-se, assim, aprimorar os resultados obtidos com o estimador original.

Observação 3.1. Na estimação das frequências de Gegenbauer e do parâmetro de longa dependência, Collet et al. (2003) analisa dois casos particulares.

Assumindo que existem dois picos no gráfico da função periodograma de uma série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$, denotam, respectivamente, por G_1 e G_2 as frequências nas quais estes picos ocorrem. Collet et al. (2003) considera um primeiro caso quando os picos estão distantes um do outro, isto é, $|G_1 - G_2| > 0$ e um segundo caso quando os picos estão próximos um do outro, isto é, $|G_1 - G_2| \sim 0$.

Para a situação quando $|G_1 - G_2| \sim 0$, Collet et al. (2003), analisa o vício do estimador proposto por Fox e Taquq (1986), como pode ser visto nos itens a seguir.

i) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) definido através da expressão (2.24). Considere a situação do Caso II e seja $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma série temporal gerada a partir do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Assumimos que ajustamos um processo $(k-1)$ -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) à série temporal. Seja $\hat{\lambda}_j$ o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ_j , para $j = 1, \dots, p, p+1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro de longa dependência λ_p é tal que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_p) > \lambda_p$.

ii) Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com frequências de Gegenbauer λ_j , $j = 1, \dots, k$. Assumimos que este processo é um $(k+1)$ -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), com λ_j , $j = 1, \dots, k$ e λ_{k+1} frequências de Gegenbauer, tais que $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, para todo $j = 1, \dots, k$. Então, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de longa dependência λ_j , denotado por $\hat{\lambda}_j$, para $j = 1, \dots, k+1$, é tal que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_j) = \lambda_j$, para $j = 1, \dots, k$ e $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_{k+1}) = 0$.

Observação 3.2. Collet et al. (2003) propõem um procedimento para detectar o número k de picos na função densidade espectral de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$). Neste

mesmo artigo, os autores definem um critério de parada para o procedimento de estimação de k , fornecem o teste de Kolmogorov e Smirnov (ver Brockwell e Davis, 1991) e um teste para decidir se a estimação do parâmetro de longa dependência λ é significativamente diferente de zero ou não (teste de t-Student).

3.3.3 Estimator Whittle MCMC

Outro método para calcular o estimador de verossimilhança aplicando a aproximação de Whittle é utilizando Monte carlo baseado em Cadeias de Markov. Seja C uma constante tal que $C = \int_{-\pi}^{\pi} I_n(\lambda) d\lambda$. Assim, temos que a equação

$$\sigma_n^2(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_n(\lambda)}{f_X(\lambda, \boldsymbol{\eta})} d\lambda, \quad (3.14)$$

por ser reescrita como

$$\sigma_n^2(\boldsymbol{\eta}) = C \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda)}{f_X(\lambda, \boldsymbol{\eta})} d\lambda = C \mathbb{E} \left(\frac{1}{f_X(\lambda, \boldsymbol{\eta})} \right), \quad (3.15)$$

onde $f(\lambda) = \frac{1}{C} I_n(\lambda)$ é a função densidade em $[-\pi, \pi]$. O valor esperado em (3.15) pode ser aproximado pela média empírica

$$\bar{\sigma}_n^2(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_X(\lambda_j, \boldsymbol{\eta})}, \quad (3.16)$$

onde N é suficientemente grande para satisfazer a lei dos grandes números. Aqui consideramos $N = 15000$ e o algoritmo de Metropolis-Hastings para gerar a amostra $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ como segue

- i) Gerar λ_k , para $k \in \{1, \dots, N\}$;
- ii) Gerar Y_k de uma distribuição uniforme no intervalo $[-\pi, \pi]$ e denote o valor obtido por y_k , para $k \in \{1, \dots, N\}$;
- iii) Tome

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} y_k, & \text{com probabilidade } p(\lambda_k, y_k), \\ \lambda_k, & \text{com probabilidade } 1 - p(\lambda_k, y_k), \end{cases}$$

onde $p(\lambda_k, y_k) = \min \left\{ \frac{f(y_k)}{f(\lambda_k)}, 1 \right\} = \min \left\{ \frac{I_n(y_k)}{I_n(\lambda_k)}, 1 \right\}$. Então, o estimador para $\boldsymbol{\eta}$, denotado por MCMC, é o valor $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ o qual minimiza (3.16) com respeito a $\boldsymbol{\eta}$. Maiores detalhes sobre o algoritmo de Metropolis-Hastings, ver Gilks et al. (1998). Ndongo et al. (2010) consideram este método para estimar os parâmetros dos processos ARFISMA(0, d , 0) \times (0, D , 0)_s - S α S.

Na seção a seguir apresentamos os resultados de simulação de Monte Carlo para os processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$).

Capítulo 4

Simulações de Monte Carlo

Nesta seção apresentamos os resultados de Simulação de Monte Carlo para os processos k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$. Para a geração dos processos utilizamos a sua representação média móvel infinita de um processo causal.

Observação 4.1. Um processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ é dito causal, ver Proposição 2.4, item iii), se existe uma seqüência $\{\psi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{Z}_>}$ tal que $\sum_{\ell \geq 0} |\psi_\ell| < \infty$ e

$$\psi(z) = \sum_{\ell \geq 0} \psi_\ell z^\ell = \frac{\theta(z)}{\phi(z)} \prod_{j=1}^k (1 - 2u_j \mathcal{B} + \mathcal{B}^2)^{-\lambda_j}. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) acima é chamada de representação média móvel infinita.

Computacionalmente, temos que truncar esta representação. Como ponto de truncamento utilizamos o valor $T = 10000$. Para cada simulação utilizamos $re = 1000$ replicações. Foram geradas séries temporais a partir do processo k -Factor GARMA $(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$ onde $\max\{p, q\} \geq 0$, $n = 1000$, $\mathbf{u} \in \{-0.9, -0.7, -0.5, -0.3, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \{0.2, 0.4\}$, $\phi_1 \in \{-0.7, 0.7\}$. Os valores utilizados para n , u e λ foram escolhidos aleatoriamente para a realização das simulações. Para os estimadores semiparamétricos o número de regressores utilizados é $g(n) = n^\alpha$, com $\alpha = 0.899$. Comparamos a eficiência destes estimadores analisando sua média, vício, erros quadráticos médios (eqm), e variância (var).

4.1 Sem Contaminação por *Outliers*

A seguir apresentamos algumas simulações de Monte Carlo, sem contaminação por *Outliers*, onde realizamos simulações paramétricas e semiparamétricas variando os valores de u , λ e k .

Logo abaixo, na tabela 4.1, são apresentados os resultados de média, vício, eqm e variância para um processo um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.2$.

Tabela 4.1: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.2$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$u = 0.5$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	0.4996	0.1967	0.5001	0.1979	0.4986	0.1987
vício	-0.0004	-0.0033	0.0001	-0.0021	-0.0014	-0.0013
eqm	0.0006	0.0007	0.0005	0.0006	0.0004	0.0006
var	0.0006	0.0007	0.0005	0.0006	0.0004	0.0006
$u = -0.5$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	-0.4999	0.1979	-0.4999	0.1976	-0.4996	0.1983
vício	0.0001	-0.0021	0.0001	-0.0024	0.0004	-0.0017
eqm	0.0005	0.0007	0.0005	0.0006	0.0004	0.0005
var	0.0006	0.0007	0.0005	0.0006	0.0004	0.0005

Na tabela 4.2 apresentamos os resultados de média, vício, eqm e variância para um processo um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.4$.

Tabela 4.2: Estimacão Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.4$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$u = 0.5$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	0.4997	0.4023	0.5001	0.4047	0.4996	0.4061
vício	-0.0003	0.0023	0.0001	0.0047	-0.0004	0.0061
eqm	0.0000	0.0007	0.0000	0.0007	0.0000	0.0006
var	0.0000	0.0007	0.0000	0.0007	0.0000	0.0005
$u = -0.5$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	-0.5000	0.4043	-0.4999	0.4042	-0.5005	0.4052
vício	0.0000	0.0043	0.0001	0.0042	-0.0005	0.0052
eqm	0.0000	0.0006	0.0000	0.0008	0.0000	0.0007
var	0.0000	0.0005	0.0000	0.0008	0.0000	0.0006

Com $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.5, 0.5\}$, $\lambda = 0.2$ e sem contaminao por outliers as estimacões através dos estimadores FT, FTmod e MCMC apresentaram baixo vício, eqm e variância, apresentando resultados excelentes estimados, tanto para u , quanto para λ . Quando simulamos alterando para $\lambda = 0.4$ os resultados apresentados permaneceram ótimos, continuando com baixo vício, eqm e variância.

Nas tabelas 4.3 e 4.4, apresentamos os resultados de média, vício, eqm e variância para um processo um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.9, 0.9\}$ e $\lambda \in \{0.2, 0.4\}$.

Tabela 4.3: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.9, 0.9\}$ e $\lambda = 0.2$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$u = 0.9$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	0.8980	0.1982	0.8983	0.1994	0.8986	0.1997
vício	-0.0020	-0.0018	-0.0017	-0.0006	-0.0014	-0.0003
eqm	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0001	0.0003
var	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0001	0.0003
$u = -0.9$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	-0.8981	0.1988	-0.8985	0.1991	-0.8994	0.1989
vício	0.0019	-0.0012	0.0015	-0.0009	0.0006	-0.0011
eqm	0.0003	0.0005	0.0007	0.0004	0.0001	0.0003
var	0.0003	0.0005	0.0007	0.0004	0.0001	0.0003

Tabela 4.4: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.9, 0.9\}$ e $\lambda = 0.4$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$u = 0.9$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	0.8998	0.4002	0.9000	0.4032	0.8998	0.4030
vício	-0.0002	0.0002	0.0000	0.0032	-0.0002	0.0030
eqm	0.0000	0.0005	0.0000	0.0005	0.0000	0.0003
var	0.0000	0.0005	0.0000	0.0005	0.0000	0.0003
$u = -0.9$						
	FT		MCMC		FTmod	
média	-0.8997	0.3997	-0.8999	0.4020	-0.9002	0.4006
vício	0.0003	-0.0003	0.0001	0.0020	-0.0002	0.0006
eqm	0.0000	0.0006	0.0000	0.0005	0.0000	0.0004
var	0.0000	0.0006	0.0000	0.0005	0.0000	0.0004

Ao mudarmos para $u \in \{-0.9, 0.9\}$ e realizando a mesma mudança anterior para λ , os resultados estimados continuaram excelentes, apresentando baixo vício, eqm e variância em todos os casos.

A seguir realizamos simulações com $p = 1$, para um processo um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, q = 0, u \in \{-0.5, 0.5\}$ e $\lambda = 0.2$, com $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$ representadas nas tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, q = 0, p = 1, u = 0.5, \lambda = 0.2$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$
$\phi = 0.7$									
	FT			MCMC			FTmod		
média	0.5368	0.1943	0.6789	0.6407	0.1845	0.6460	0.5179	0.1979	0.6889
vício	0.0368	-0.0057	-0.0211	0.1407	-0.0155	-0.0540	0.0179	-0.0021	-0.0111
eqm	0.0211	0.0013	0.0062	0.0586	0.0019	0.0087	0.0104	0.0008	0.0044
var	0.0198	0.0012	0.0058	0.0388	0.0016	0.0058	0.0101	0.0008	0.0042
$\phi = -0.7$									
	FT			MCMC			FTmod		
média	0.5202	0.1714	-0.6706	0.4558	0.1790	-0.6779	0.4825	0.1874	-0.6823
vício	0.0202	-0.0286	0.0294	-0.0442	-0.0210	0.0221	-0.0175	-0.0126	0.0177
eqm	0.0227	0.0046	0.0045	0.0122	0.0035	0.0035	0.0051	0.0019	0.0022
var	0.0223	0.0038	0.0037	0.0103	0.0031	0.0031	0.0048	0.0018	0.0018

Tabela 4.6: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, q = 0, p = 1, u = -0.5, \lambda = 0.2$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$
$u = -0.5, \phi = -0.7$									
	FT			MCMC			FTmod		
média	-0.5212	0.1721	0.6711	0.4558	0.1790	-0.6779	-0.4872	0.1893	0.6872
vício	-0.0212	-0.0279	-0.0289	0.9558	-0.0210	-1.3779	0.0128	-0.0107	-0.0128
eqm	0.0199	0.0044	0.0040	0.9238	0.0035	1.9018	0.0041	0.0016	0.0018
var	0.0195	0.0036	0.0031	0.0103	0.0031	0.0031	0.0039	0.0015	0.0016
$u = -0.5, \phi = 0.7$									
	FT			MCMC			FTmod		
média	-0.5292	0.1936	-0.6832	-0.6578	0.1813	-0.6393	-0.5199	0.1950	-0.6867
vício	-0.0292	-0.0064	0.0168	-0.1578	-0.0187	0.0607	-0.0199	-0.0050	0.0133
eqm	0.0191	0.0012	0.0038	0.0669	0.0020	0.0130	0.0108	0.0009	0.0019
var	0.0182	0.0011	0.0035	0.0421	0.0016	0.0093	0.0105	0.0008	0.0017

Quando $p = 1$, com $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$, podemos notar que as estimativas dos três estimadores paramétricos estudados apresentaram alto vício, eqm e variância.

Ao variarmos u e λ , mantendo os valores de p e ϕ , os resultados estimados através dos estimadores FT, FTmod e MCMC continuaram apresentando alto vício, eqm e variância.

Nas tabelas 4.7 e 4.8 realizamos as simulações de Monte Carlo com $k = 2$, onde variamos os valores de p , q , u e λ .

Tabela 4.7: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 2$, $q = 0$, $p = 1$, $\mathbf{u} \in \{-0.5, 0.5\}$, $\boldsymbol{\lambda} \in \{0.2, 0.4\}$ e $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$.

	\hat{u}_1	\hat{u}_2	$\hat{\lambda}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\phi}$
FT					
média	0.4580	0.6656	0.2117	0.3782	0.6459
vício	0.1580	-0.0344	0.0117	-0.0218	-0.0541
eqm	0.0711	0.0156	0.0088	0.0086	0.0151
var	0.0461	0.0145	0.0087	0.0082	0.0122
MCMC					
média	0.4554	0.7176	0.2263	0.3569	0.6393
vício	0.1554	0.0176	0.0263	-0.0431	-0.0607
eqm	0.0671	0.0101	0.0126	0.0163	0.0166
var	0.0430	0.0098	0.0120	0.0145	0.0129
FTmod					
média	0.4425	0.6692	0.2152	0.3693	0.6626
vício	0.1425	-0.0308	0.0152	-0.0307	-0.0374
eqm	0.0645	0.0149	0.0084	0.0099	0.0076
var	0.0442	0.0140	0.0082	0.0089	0.0062

Quando alteramos o valor do fator k para $k = 2$, mantendo $p = 0 = q$ e variando u e λ , todos os resultados estimados através dos três estimadores paramétricos estudados apresentaram valores excelentes, com baixo vício, eqm e variância.

Tabela 4.8: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 2, p = 0 = q, \mathbf{u} \in \{-0.9, -0.5, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ e $\boldsymbol{\lambda} \in \{0.2, 0.4\}$.

	\widehat{u}_1	\widehat{u}_2	$\widehat{\lambda}_1$	$\widehat{\lambda}_2$	\widehat{u}_1	\widehat{u}_2	$\widehat{\lambda}_1$	$\widehat{\lambda}_2$	\widehat{u}_1	\widehat{u}_2	$\widehat{\lambda}_1$	$\widehat{\lambda}_2$
$\mathbf{u} \in \{-0.5, 0.5\}$												
	FT				MCMC				FTmod			
média	0.5029	-0.4993	0.1981	0.4072	0.5009	-0.4996	0.1985	0.4045	0.5011	-0.5003	0.2003	0.4074
vício	0.0029	0.0007	-0.0019	0.0072	0.0009	0.0004	-0.0015	0.0045	0.0011	-0.0003	0.0003	0.0074
eqm	0.0009	0.0000	0.0010	0.0012	0.0006	0.0000	0.0008	0.0010	0.0004	0.0000	0.0007	0.0009
var	0.0009	0.0000	0.0010	0.0011	0.0006	0.0000	0.0008	0.0009	0.0004	0.0000	0.0007	0.0008
$\mathbf{u} \in \{-0.9, 0.9\}$												
	FT				MCMC				FTmod			
média	0.8980	-0.8997	0.1957	0.4006	0.8996	-0.9000	0.1979	0.4022	0.8993	-0.9002	0.1978	0.4020
vício	-0.0020	0.0003	-0.0043	0.0006	-0.0004	0.0000	-0.0021	0.0022	-0.0007	-0.0002	-0.0022	0.0020
eqm	0.0007	0.0000	0.0010	0.0009	0.0004	0.0000	0.0008	0.0008	0.0005	0.0000	0.0007	0.0007
var	0.0007	0.0000	0.0010	0.0009	0.0004	0.0000	0.0008	0.0008	0.0005	0.0000	0.0007	0.0007
$\mathbf{u} \in \{0.3, 0.4\}$												
	FT				MCMC				FTmod			
média	0.3003	0.6996	0.1935	0.4076	0.3016	0.6999	0.1957	0.4059	0.2997	0.6990	0.1946	0.4068
vício	0.0003	-0.0004	-0.0065	0.0076	0.0016	-0.0001	-0.0043	0.0059	-0.0003	-0.0010	-0.0054	0.0068
eqm	0.0013	0.0000	0.0013	0.0010	0.0007	0.0000	0.0010	0.0008	0.0011	0.0002	0.0010	0.0008
var	0.0013	0.0000	0.0012	0.0009	0.0007	0.0000	0.0010	0.0008	0.0011	0.0002	0.0009	0.0007

Abaixo apresentamos os resultados das simulações dos estimadores semiparamétricos, GPH e BA onde variamos os valores de p , q , u e λ representados pelas tabelas 4.9 e 4.10.

Tabela 4.9: Estimação Semi-paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \lambda, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u \in \{-0.9, -0.5, 0.5, 0.9\}$, $\lambda = 0.2$ e $\alpha = 0.899$.

	$\widehat{\lambda}MQ$	$\widehat{\lambda}MM$	$\widehat{\lambda}MQP$	$\widehat{\lambda}MQ$	$\widehat{\lambda}MM$	$\widehat{\lambda}MQP$
$u = 0.5$						
	GPH			BA		
média	0.2011	0.2018	0.2020	0.2018	0.2011	0.2019
vício	0.0011	0.0018	0.0020	0.0018	0.0011	0.0019
eqm	0.0008	0.0018	0.0009	0.0005	0.0008	0.0007
var	0.0008	0.0018	0.0009	0.0005	0.0008	0.0007
$u = -0.5$						
	GPH			BA		
média	0.2007	0.1988	0.2009	0.2027	0.2014	0.2020
vício	0.0007	-0.0012	0.0009	0.0027	0.0014	0.0020
eqm	0.0008	0.0017	0.0008	0.0005	0.0009	0.0007
var	0.0008	0.0017	0.0008	0.0005	0.0009	0.0007
$u = 0.9$						
	GPH			BA		
média	0.2005	0.2000	0.2002	0.2001	0.2002	0.2006
vício	0.0005	0.0000	0.0002	0.0001	0.0002	0.0006
eqm	0.0004	0.0010	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
var	0.0004	0.0010	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
$u = -0.9$						
	GPH			BA		
média	0.2006	0.2001	0.1996	0.2020	0.2010	0.2011
vício	0.0006	0.0001	-0.0004	0.0020	0.0010	0.0011
eqm	0.0004	0.0009	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004
var	0.0004	0.0009	0.0004	0.0003	0.0004	0.0004

Ao estimarmos λ através dos estimadores semi-paramétricos GPH e BA, com $k = 1$, $p = 0 = q$, $\alpha = 0.899$ e variando u , os resultados apresentaram baixo vício, eqm e variância em todos os casos.

Tabela 4.10: Estimação Semi-paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u \in \{-0.9, -0.5, 0.5, 0.9\}, \lambda = 0.4$ e $\alpha = 0.899$.

	$\widehat{\lambda}_{MQ}$	$\widehat{\lambda}_{MM}$	$\widehat{\lambda}_{MQP}$	$\widehat{\lambda}_{MQ}$	$\widehat{\lambda}_{MM}$	$\widehat{\lambda}_{MQP}$
$u = 0.5$						
	GPH			BA		
média	0.4089	0.4089	0.4074	0.4146	0.4133	0.4139
vício	0.0089	0.0089	0.0074	0.0146	0.0133	0.0139
eqm	0.0010	0.0021	0.0010	0.0009	0.0011	0.0010
var	0.0009	0.0020	0.0010	0.0007	0.0009	0.0008
$u = -0.5$						
	GPH			BA		
média	0.4074	0.4072	0.4087	0.4186	0.4170	0.4172
vício	0.0074	0.0072	0.0087	0.0186	0.0170	0.0172
eqm	0.0009	0.0019	0.0010	0.0010	0.0012	0.0011
var	0.0009	0.0019	0.0009	0.0006	0.0009	0.0008
$u = 0.9$						
	GPH			BA		
média	0.4046	0.4023	0.4051	0.4088	0.4093	0.4093
vício	0.0046	0.0023	0.0051	0.0088	0.0093	0.0093
eqm	0.0004	0.0011	0.0005	0.0004	0.0005	0.0004
var	0.0004	0.0011	0.0005	0.0003	0.0004	0.0004
$u = -0.9$						
	GPH			BA		
média	0.4042	0.4033	0.4039	0.4109	0.4095	0.4096
vício	0.0042	0.0033	0.0039	0.0109	0.0095	0.0096
eqm	0.0004	0.0010	0.0005	0.0004	0.0006	0.0005
var	0.0004	0.0010	0.0005	0.0003	0.0005	0.0004

Quando aumentamos λ para $\lambda = 0.4$, os resultados estimados apresentaram bons resultados, porém, com vício um pouco maior do que quando estimamos com $\lambda = 0.2$, mantendo baixo eqm e variância.

4.2 Com Contaminação por *Outliers*

Realizamos um estudo sobre estimação utilizando estimadores paramétricos. Foram realizadas simulações de Monte Carlo para $n \in \{500, 1000, 2000\}$, com $re = 1000$ replicações, $p \in \{0, 1\}$, $q \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$, $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$, $\phi \in \{-0.7, -0.4, 0, 0.4, 0.7\}$, $u = \{-0.9, -0.8, -0.5, -0.3, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9\}$, $\theta \in \{-0.4, 0, 0.4\}$ e $G \sim N(0, \tau^2)$, onde $\tau^2 \in \{2, 5, 10\}$.

Neste mesmo estudo variamos os valores de c e τ^2 , mas os resultados serão somente comentados. Comparamos a eficiência destes estimadores analisando seus erros quadráticos médios (eqm), vício e variância.

Na tabela 4.11 apresentamos os resultados da Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u = 0.5$, $\lambda = 0.2$, $n = 1000$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$.

Tabela 4.11: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u = 0.5$, $\lambda = 0.2$, $n = 1000$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7332	0.1254	0.4994	0.1944	0.5000	0.1932
vício	0.2332	-0.0746	-0.0006	-0.0056	0.0000	-0.0068
eqm	0.1128	0.0126	0.0004	0.0006	0.0005	0.0006
var	0.0585	0.0070	0.0004	0.0005	0.0005	0.0006
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7854	0.1058	0.4988	0.1878	0.5025	0.1873
vício	0.2854	-0.0942	-0.0012	-0.0122	0.0025	-0.0127
eqm	0.1394	0.0155	0.0009	0.0008	0.0006	0.0008
var	0.0580	0.0067	0.0009	0.0006	0.0006	0.0006
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8274	0.0899	0.4991	0.1824	0.4992	0.1818
vício	0.3274	-0.1101	-0.0009	-0.0176	-0.0008	-0.0182
eqm	0.1601	0.0181	0.0007	0.0009	0.0005	0.0010
var	0.0529	0.0060	0.0007	0.0006	0.0005	0.0007
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8510	0.0788	0.4989	0.1782	0.4999	0.1775
vício	0.3510	-0.1212	-0.0011	-0.0218	-0.0001	-0.0225
eqm	0.1709	0.0199	0.0005	0.0010	0.0006	0.0011
var	0.0477	0.0052	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8757	0.0689	0.4982	0.1729	0.4990	0.1728
vício	0.3757	-0.1311	-0.0018	-0.0271	-0.0010	-0.0272
eqm	0.1834	0.0214	0.0008	0.0013	0.0007	0.0014
var	0.0423	0.0042	0.0008	0.0006	0.0007	0.0006

Para o estimador FT obtivemos alto vício, eqm e variância para as estimativas de u e de λ . Quando aumentamos a probabilidade eleva-se a média, vício e eqm em u , afastando-se do valor que queremos estimar e diminui-se a média para λ , também afastando-se do valor ideal estimado de $\lambda = 0.1$, aumentando-se vício, eqm. A variância de u e λ em ambos os casos,

tiveram redução de variância conforme o aumento da probabilidade c . Para o estimador FTmod obtivemos valores aceitáveis de estimação para u e λ , porém ao aumentarmos a probabilidade c as estimativas ficaram viesadas ocorrendo queda em suas médias e aumento de vício e eqm. Obtivemos resultados excelentes para o estimador MCMC, com leves aumentos e quedas ao elevarmos a probabilidade c , porém nada que afetasse muito vício, eqm e variância.

Logo abaixo, na tabela 4.12, variamos o valor de τ^2 para a Estimação Paramétrica de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u = 0.5$, $\lambda = 0.2$, $n = 1000$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$.

Tabela 4.12: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u = 0.5$, $\lambda = 0.2$, $n = 1000$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8789	0.0647	0.4963	0.1674	0.4982	0.1675
vício	0.3789	-0.1353	-0.0037	-0.0326	-0.0018	-0.0325
eqm	0.1846	0.0222	0.0023	0.0018	0.0008	0.0018
var	0.0410	0.0039	0.0023	0.0008	0.0008	0.0008
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8897	0.0474	0.4911	0.1444	0.4993	0.1457
vício	0.3897	-0.1526	-0.0089	-0.0556	-0.0007	-0.0543
eqm	0.1893	0.0250	0.0054	0.0039	0.0011	0.0037
var	0.0375	0.0017	0.0053	0.0008	0.0011	0.0007
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8610	0.0428	0.4854	0.1268	0.4985	0.1289
vício	0.3610	-0.1572	-0.0146	-0.0732	-0.0015	-0.0711
eqm	0.1868	0.0258	0.0110	0.0063	0.0011	0.0058
var	0.0566	0.0011	0.0108	0.0010	0.0011	0.0007
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8054	0.0444	0.4722	0.1106	0.4979	0.1155
vício	0.3054	-0.1556	-0.0278	-0.0894	-0.0021	-0.0845
eqm	0.1754	0.0253	0.0221	0.0092	0.0016	0.0079
var	0.0822	0.0011	0.0213	0.0012	0.0016	0.0007
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7486	0.0453	0.4739	0.0996	0.4952	0.1056
vício	0.2486	-0.1547	-0.0261	-0.1004	-0.0048	-0.0944
eqm	0.1748	0.0250	0.0314	0.0113	0.0019	0.0096
var	0.1131	0.0011	0.0307	0.0012	0.0019	0.0007

Quando aumentamos para $\tau^2 = 5$ o estimador FT apresentou aumento no vício e no eqm, tanto para u , quanto para λ .

Para FTmod os resultados continuaram satisfatórios para u , porém ao elevarmos a probabilidade, o vício, eqm e variância aumentaram. Para λ as estimativas via FTmod apresentaram um aumento no vício e no eqm quando aumentamos a probabilidade c de contaminação.

No caso do estimador MCMC as estimativas de u continuaram excelentes, com leve queda da média ao elevarmos a probabilidade c , com aumento do vício, eqm e variância. Para λ as estimativas apresentaram redução da média ao ampliarmos a probabilidade c , aumentando consideravelmente o vício e eqm, mantendo a variância constante.

E, na tabela 4.13, aumentamos para $\tau^2 = 10$ para a Estimação Paramétrica de um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 1000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$.

Tabela 4.13: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 1000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8097	0.0474	0.4781	0.1144	0.4963	0.1182
vício	0.3097	-0.1526	-0.0219	-0.0856	-0.0037	-0.0818
eqm	0.1718	0.0247	0.0233	0.0088	0.0012	0.0076
var	0.0760	0.0014	0.0229	0.0015	0.0012	0.0009
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5931	0.0408	0.4390	0.0712	0.4901	0.0817
vício	0.0931	-0.1592	-0.0610	-0.1288	-0.0099	-0.1183
eqm	0.2084	0.0261	0.0735	0.0180	0.0027	0.0148
var	0.2278	0.0008	0.0698	0.0014	0.0026	0.0008
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3155	0.0325	0.4193	0.0524	0.4916	0.0667
vício	-0.1845	-0.1675	-0.0807	-0.1476	-0.0084	-0.1333
eqm	0.2243	0.0281	0.1144	0.0228	0.0033	0.0184
var	0.3496	0.0006	0.1080	0.0010	0.0032	0.0007
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.0305	0.0257	0.3638	0.0425	0.4858	0.0554
vício	-0.4695	-0.1743	-0.1362	-0.1575	-0.0142	-0.1446
eqm	0.3942	0.0303	0.1691	0.0256	0.0044	0.0215
var	0.3178	0.0004	0.1507	0.0008	0.0042	0.0006
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	-0.1469	0.0218	0.3309	0.0353	0.4893	0.0478
vício	-0.6469	-0.1782	-0.1691	-0.1647	-0.0107	-0.1522
eqm	0.5329	0.0318	0.2148	0.0278	0.0048	0.0237
var	0.2235	0.0004	0.1864	0.0006	0.0047	0.0005

Ao aumentarmos para $\tau^2 = 10$ os resultados, em geral, apresentaram alto vício, eqm e variância para todas as estimativas, aumentando-os ao elevarmos probabilidade de contaminação c .

A seguir aumentamos n de 1000 para 2000 e realizamos simulações com os mesmos parâmetros das simulações realizadas acima, representados pelas tabelas 4.14, 4.15 e 4.16.

Tabela 4.14: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7490	0.1191	0.5004	0.1935	0.5007	0.1936
vício	0.2490	-0.0809	0.0004	-0.0065	0.0007	-0.0064
eqm	0.1221	0.0133	0.0002	0.0004	0.0003	0.0005
var	0.0601	0.0068	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8131	0.0955	0.4994	0.1876	0.5001	0.1872
vício	0.3131	-0.1045	-0.0006	-0.0124	0.0001	-0.0128
eqm	0.1537	0.0171	0.0002	0.0005	0.0003	0.0006
var	0.0558	0.0062	0.0002	0.0004	0.0003	0.0004
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7161	0.1308	0.4990	0.1966	0.4996	0.1963
vício	0.2161	-0.0692	-0.0010	-0.0034	-0.0004	-0.0037
eqm	0.1062	0.0115	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
var	0.0596	0.0067	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7929	0.1037	0.4993	0.1912	0.4995	0.1907
vício	0.2929	-0.0963	-0.0007	-0.0088	-0.0005	-0.0093
eqm	0.1437	0.0158	0.0002	0.0004	0.0003	0.0005
var	0.0580	0.0065	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8456	0.0846	0.4995	0.1853	0.4997	0.1849
vício	0.3456	-0.1154	-0.0005	-0.0147	-0.0003	-0.0151
eqm	0.1697	0.0188	0.0003	0.0006	0.0003	0.0006
var	0.0503	0.0055	0.0003	0.0003	0.0003	0.0004

Mesmo aumentando o tamanho amostral n , as estimativas do estimador FT apresentaram um alto vício e eqm, tanto para u , quanto para λ .

Os estimadores FTmod e MCMC obtiveram excelentes resultados estimados para u , mesmo quando aumentamos a probabilidade até $c = 0.05$, com mínimo vício, eqm e variância. Para λ os resultados não foram tão bom quanto as estimativas de u , tendo algum aumento do vício.

Porém em ambos os casos obtivemos excelentes eqm e variância.

Tabela 4.15: Estimacão Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.9443	0.0466	0.4976	0.1675	0.4985	0.1683
vício	0.4443	-0.1534	-0.0024	-0.0325	-0.0015	-0.0317
eqm	0.2180	0.0256	0.0008	0.0015	0.0004	0.0015
var	0.0207	0.0021	0.0008	0.0004	0.0004	0.0005
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.9438	0.0360	0.4936	0.1439	0.4995	0.1457
vício	0.4438	-0.1640	-0.0064	-0.0561	-0.0005	-0.0543
eqm	0.2102	0.0276	0.0034	0.0037	0.0006	0.0034
var	0.0132	0.0007	0.0033	0.0005	0.0006	0.0005
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8707	0.0754	0.4987	0.1822	0.4981	0.1825
vício	0.3707	-0.1246	-0.0013	-0.0178	-0.0019	-0.0175
eqm	0.1830	0.0206	0.0002	0.0006	0.0003	0.0007
var	0.0457	0.0051	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.9563	0.0379	0.4988	0.1554	0.4995	0.1561
vício	0.4563	-0.1621	-0.0012	-0.0446	-0.0005	-0.0439
eqm	0.2212	0.0271	0.0006	0.0024	0.0004	0.0023
var	0.0130	0.0009	0.0006	0.0004	0.0004	0.0004
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.9239	0.0369	0.4918	0.1355	0.4980	0.1366
vício	0.4239	-0.1631	-0.0082	-0.0645	-0.0020	-0.0634
eqm	0.1975	0.0274	0.0034	0.0047	0.0006	0.0044
var	0.0179	0.0008	0.0034	0.0005	0.0006	0.0004

Tabela 4.16: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n = 2000, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8609	0.0387	0.4909	0.1113	0.4971	0.1160
vício	0.3609	-0.1613	-0.0091	-0.0887	-0.0029	-0.0840
eqm	0.1707	0.0268	0.0158	0.0088	0.0010	0.0076
var	0.0405	0.0008	0.0157	0.0010	0.0010	0.0005
$c = 0.02$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.7246	0.0390	0.4501	0.0693	0.4929	0.0821
vício	0.2246	-0.1610	-0.0499	-0.1307	-0.0071	-0.1179
eqm	0.0953	0.0263	0.0594	0.0182	0.0022	0.0144
var	0.1242	0.0007	0.0570	0.0011	0.0022	0.0005
$c = 0.03$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.9369	0.0377	0.4938	0.1438	0.4992	0.1462
vício	0.4369	-0.1623	-0.0062	-0.0562	-0.0008	-0.0538
eqm	0.2076	0.0273	0.0039	0.0038	0.0007	0.0035
var	0.0167	0.0010	0.0039	0.0007	0.0007	0.0006
$c = 0.04$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.8000	0.0401	0.4599	0.0880	0.4950	0.0964
vício	0.3000	-0.1599	-0.0401	-0.1120	-0.0050	-0.1036
eqm	0.1569	0.0263	0.0346	0.0136	0.0015	0.0113
var	0.0669	0.0008	0.0330	0.0011	0.0014	0.0006
$c = 0.05$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.6175	0.0345	0.4225	0.0555	0.4914	0.0730
vício	0.1175	-0.1655	-0.0775	-0.1445	-0.0086	-0.1270
eqm	-0.0538	0.0272	0.0864	0.0218	0.0024	0.0166
var	0.2166	0.0006	0.0805	0.0009	0.0023	0.0004

Ao aumentarmos τ^2 para $\tau^2 = 5$ e $\tau^2 = 10$ os resultados das estimativas do estimador FT apresentaram alto vício, onde para $c = 0.03$ a estimativa de u chegou a ser de 0.4369.

Os resultados do estimador FTmod continuaram ótimos para u , porém ao aumentarmos a probabilidade c as estimativas apresentaram maior vício, eqm e variância. No caso de λ as estimativas apresentaram elevado vício e eqm. Ao elevarmos a probabilidade de contaminação, o vício, eqm e variância aumentaram. Continuamos obtendo resultados extremamente satisfatórios para o estimador MCMC para u , obtendo mínimos vício, eqm e variância mesmo quando aumentamos τ^2 e c , para $\tau^2 = 10$ e $c = 0.05$ respectivamente.

Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 apresentamos representações da Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$, onde variamos $\tau^2 \in \{2, 5, 10\}$.

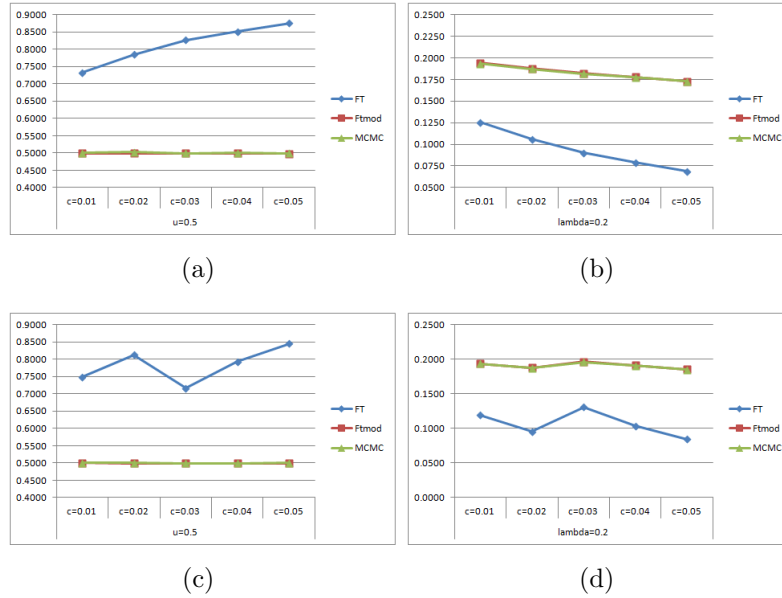


Figura 4.1: Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 2$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$.

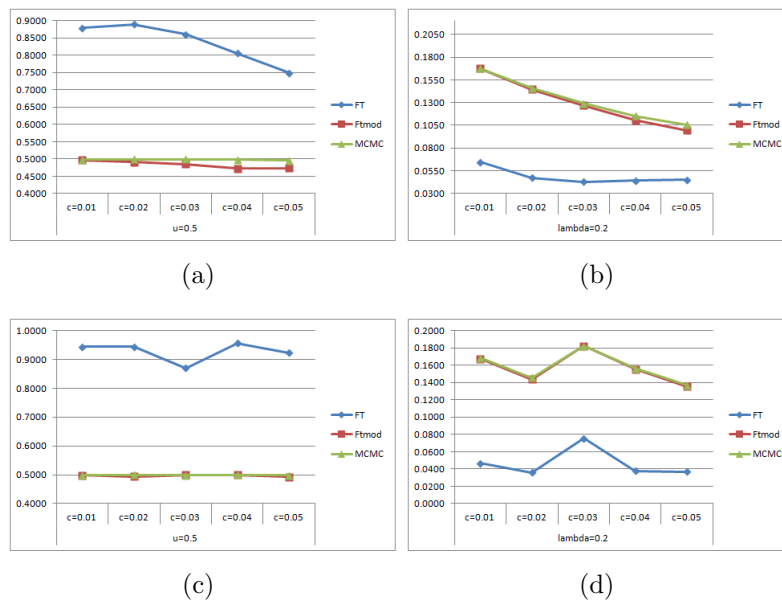


Figura 4.2: Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 1, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{1000, 2000\}, c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 5$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$.

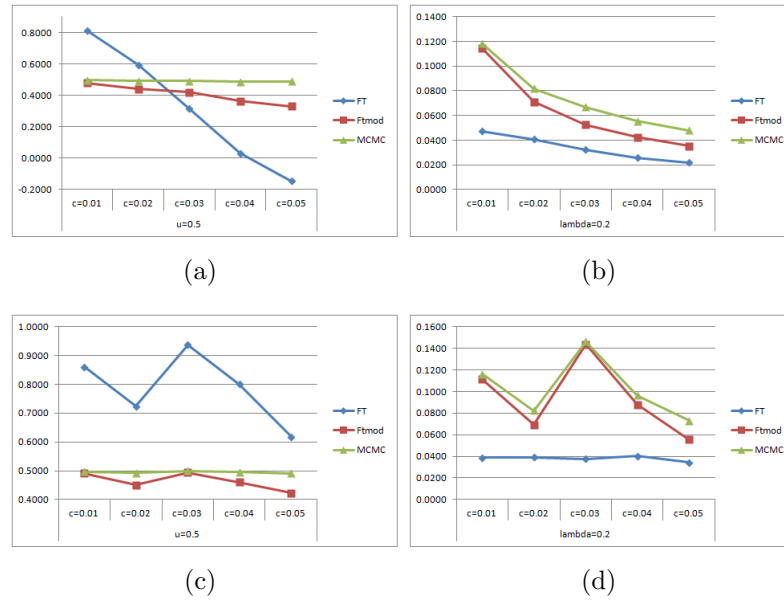


Figura 4.3: Média na Estimação Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \lambda, q)$, quando $k = 1$, $p = 0 = q$, $u = 0.5$, $\lambda = 0.2$, $n \in \{1000, 2000\}$, $c \in \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ e $\tau^2 = 10$: (a) e (b) $n = 1000$; (c) e (d) $n = 2000$.

Os resultados das tabelas 4.17 à 4.26 e das figuras 4.4 à 4.13 abaixo são todos de simulações com $k = 3$, onde variamos $p, q, u, \lambda, \phi, \theta$, para as probabilidades $c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Tabela 4.17: Estimativa Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2959	0.0885	0.2983	0.0850	0.2991	0.0830
vício	0.0041	0.0115	0.0017	0.0150	0.0009	0.0170
eqm	0.0420	0.1699	0.0410	0.1730	0.0408	0.1748
var	0.0003	0.0006	0.0003	0.0008	0.0004	0.0009
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2962	0.0590	0.3009	0.0591	0.2971	0.0584
vício	0.0038	0.0410	-0.0009	0.0409	0.0029	0.0416
eqm	0.0451	0.1957	0.0432	0.1959	0.0438	0.1965
var	0.0036	0.0012	0.0036	0.0015	0.0026	0.0014
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2991	0.0875	0.3020	0.0818	0.2998	0.0798
vício	0.0009	0.0125	-0.0020	0.0182	0.0002	0.0202
eqm	0.0406	0.1705	0.0395	0.1754	0.0403	0.1772
var	0.0002	0.0004	0.0003	0.0005	0.0002	0.0006
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2995	0.0551	0.3014	0.0538	0.2997	0.0575
vício	0.0005	0.0449	-0.0014	0.0462	0.0003	0.0425
eqm	0.0433	0.1990	0.0429	0.2003	0.0430	0.1970
var	0.0031	0.0010	0.0035	0.0012	0.0029	0.0012

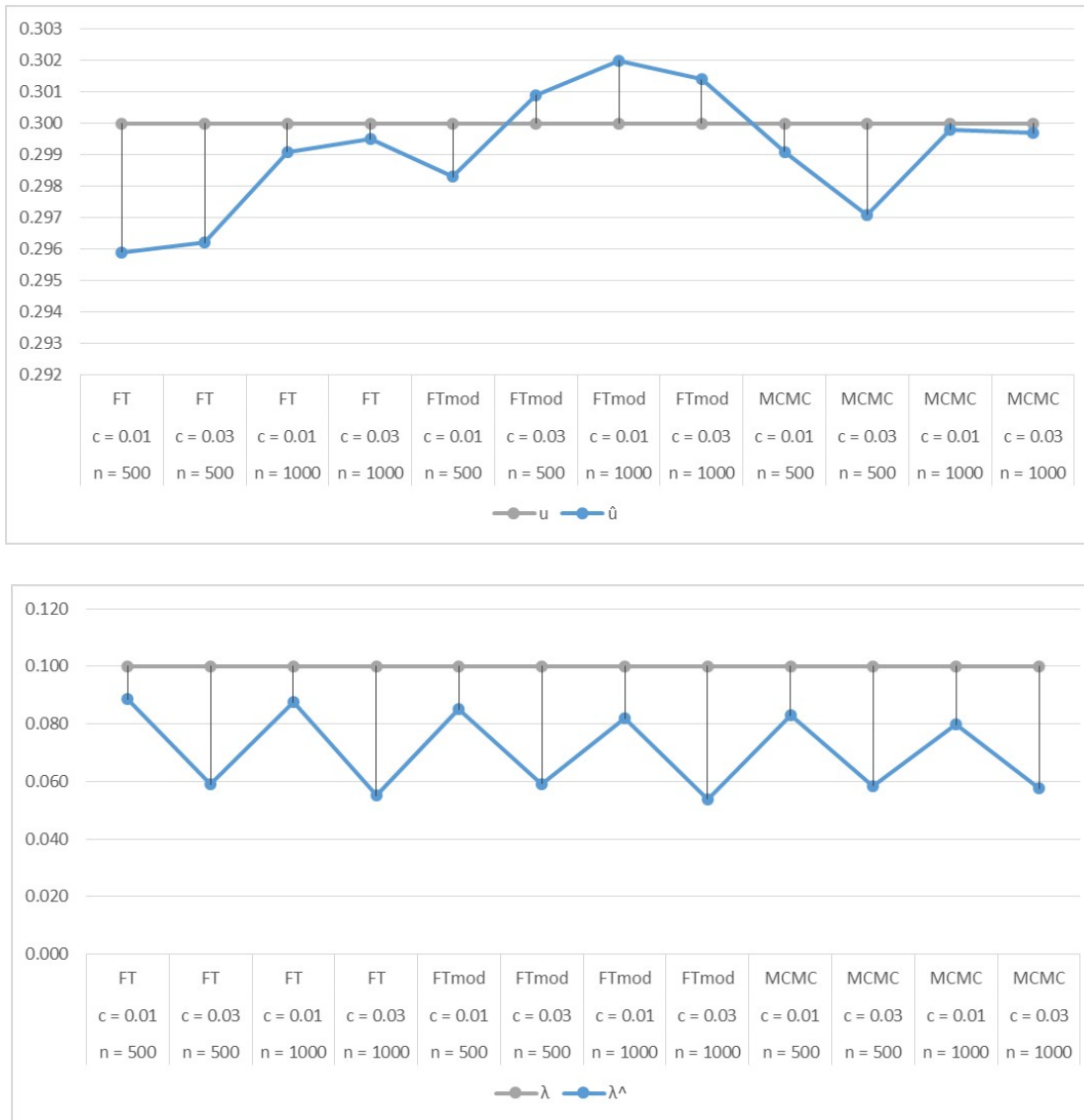


Figura 4.4: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $k = 3$, $p = 0 = q$, $u = 0.3$, $\lambda = 0.1$, $n \in \{500, 1000\}$, $c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

As estimativas para u em todos os casos se mostraram excelentes, com vício, eqm e variância extremamente pequenos. Entretanto, para λ as estimativas apresentaram um vício relativamente grande, tendo resultado melhor no estimador FT, porém com pouca diferença. Ao aumentarmos a probabilidade para $c = 0.03$ aumentaram-se o vício, eqm e variância em todos os casos.

Tabela 4.18: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2962	0.0790	0.2984	0.0722	0.3344	0.1083
vício	0.0038	0.0210	0.0016	0.0278	-0.0344	-0.0083
eqm	0.0420	0.1780	0.0411	0.1839	0.0350	0.1605
var	0.0005	0.0007	0.0005	0.0009	0.0076	0.0071
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3033	0.0461	0.3077	0.0426	0.3363	0.0769
vício	-0.0033	0.0539	-0.0077	0.0574	-0.0363	0.0231
eqm	0.0393	0.2068	0.0406	0.2101	0.0275	0.1827
var	0.0041	0.0010	0.0036	0.0009	0.0099	0.0045
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3001	0.0746	0.3060	0.0680	0.3383	0.0961
vício	-0.0001	0.0254	-0.0060	0.0320	-0.0383	0.0039
eqm	0.0404	0.1815	0.0382	0.1873	0.0362	0.1689
var	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0100	0.0057
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3030	0.0383	0.3041	0.0361	0.3371	0.0712
vício	-0.0030	0.0617	-0.0041	0.0639	-0.0371	0.0288
eqm	0.0382	0.2139	0.0414	0.2159	0.0221	0.1872
var	0.0035	0.0008	0.0031	0.0007	0.0078	0.0043



Figura 4.5: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Quando estimamos u e λ com $\phi = 0.4$ as estimativas dos parâmetros apresentaram pequeno aumento no vício. Entre os três estimadores utilizados, o que melhor se comportou neste caso foi o FTmod para $n = 500$ e FT para $n = 1000$, que obtiveram menor vício, eqm e variância para u . Para λ o melhor estimador foi o MCMC, que obteve menor vício e eqm. Todavia, ao aumentarmos a probabilidade para $c = 0.03$ as estimativas apresentaram, em todos os casos, aumento de vício, eqm e variância.

Tabela 4.19: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2962	0.0955	0.2981	0.0949	0.2902	0.0809
vício	0.0038	0.0045	0.0019	0.0051	0.0098	0.0191
eqm	0.0419	0.1641	0.0411	0.1649	0.0461	0.1781
var	0.0003	0.0005	0.0004	0.0008	0.0055	0.0028
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2990	0.0783	0.2988	0.0771	0.2829	0.0741
vício	0.0010	0.0217	0.0012	0.0229	0.0171	0.0259
eqm	0.0438	0.1791	0.0435	0.1801	0.0471	0.1837
var	0.0034	0.0013	0.0030	0.0012	0.0065	0.0029
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2994	0.0952	0.3011	0.0946	0.2796	0.0737
vício	0.0006	0.0048	-0.0011	0.0054	0.0204	0.0263
eqm	0.0403	0.1641	0.0397	0.1647	0.0551	0.1841
var	0.0001	0.0002	0.0001	0.0004	0.0076	0.0024
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2985	0.0780	0.2970	0.0768	0.2852	0.0668
vício	0.0015	0.0220	0.0030	0.0232	0.0148	0.0332
eqm	0.0438	0.1792	0.0441	0.1802	0.0454	0.1897
var	0.0032	0.0011	0.0029	0.0011	0.0056	0.0025



Figura 4.6: Estimacão Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Ao estimarmos com $\phi = -0.4$ obtivemos o mesmo comportamento que a simulao com $\phi = 0.4$, mas neste caso o estimador MCMC apresentou estimativas viesadas para λ , e para o mesmo parâmetro obtivemos boas estimativas nos estimadores FT e FTmod. Ao contrário do que ocorreu ao estimarmos com $\phi = 0.4$, as estimativas para u melhoraram ao aumentarmos a probabilidade para $c = 0.03$ para $n = 500$. Contudo, ao aumentarmos o n para 1000 as estimativas obtiveram pequena queda de rendimento em todos os casos.

Tabela 4.20: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2963	0.0791	0.2988	0.0777	0.3129	0.0986
vício	0.0037	0.0209	0.0012	0.0223	-0.0129	0.0014
eqm	0.0424	0.1781	0.0411	0.1796	0.0386	0.1645
var	0.0009	0.0009	0.0006	0.0013	0.0036	0.0034
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3073	0.0520	0.3036	0.0559	0.3191	0.0785
vício	-0.0073	0.0480	-0.0036	0.0441	-0.0191	0.0215
eqm	0.0410	0.2019	0.0421	0.1985	0.0378	0.1804
var	0.0039	0.0012	0.0036	0.0013	0.0051	0.0028
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2992	0.0763	0.3075	0.0758	0.3134	0.0905
vício	0.0008	0.0237	-0.0075	0.0242	-0.0134	0.0095
eqm	0.0407	0.1801	0.0376	0.1807	0.0380	0.1700
var	0.0004	0.0006	0.0006	0.0008	0.0031	0.0023
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3006	0.0486	0.3004	0.0527	0.3208	0.0775
vício	-0.0006	0.0514	-0.0004	0.0473	-0.0208	0.0225
eqm	0.0434	0.2048	0.0430	0.2011	0.0368	0.1813
var	0.0036	0.0010	0.0032	0.0010	0.0047	0.0028

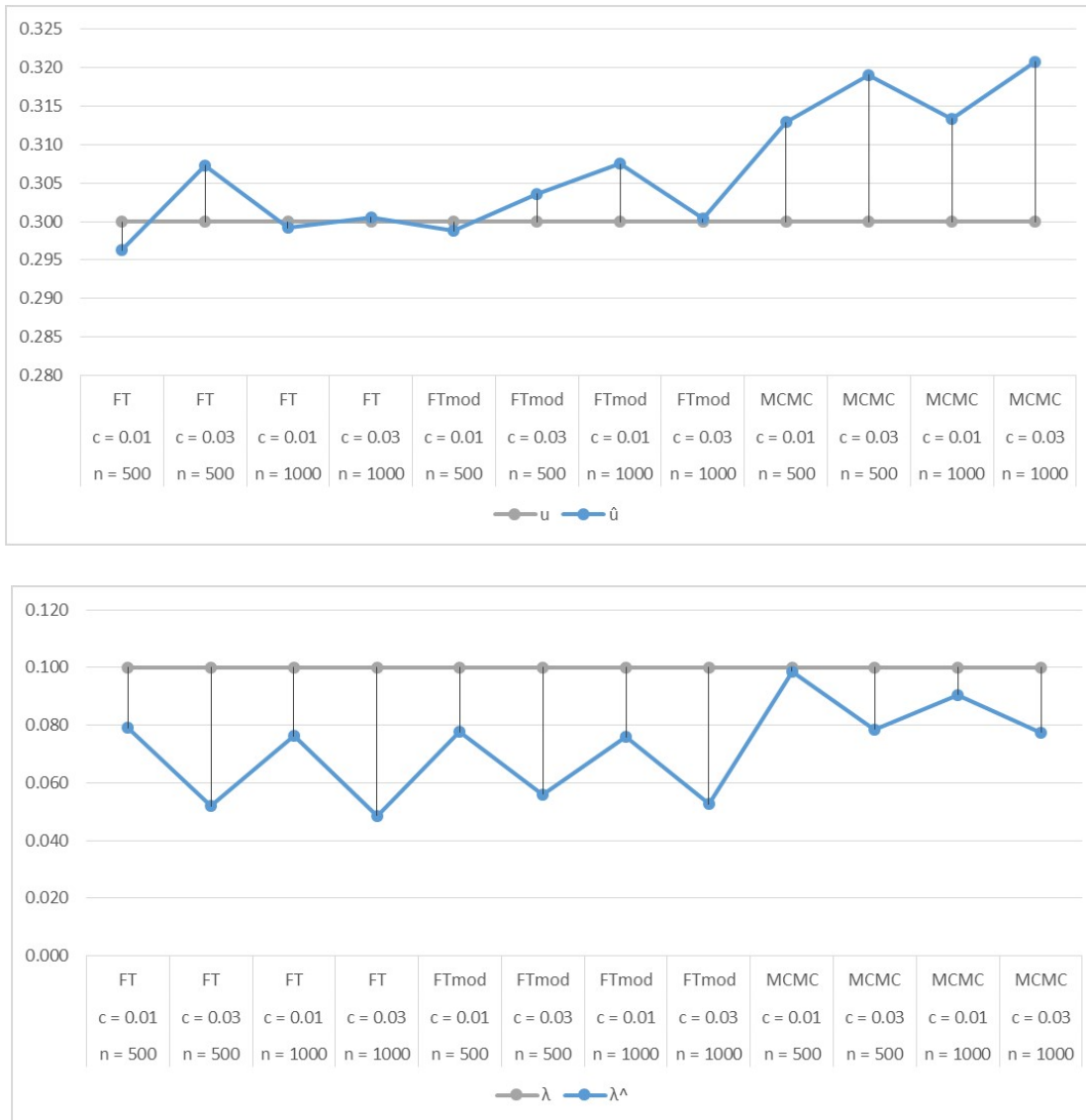


Figura 4.7: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Quando estimamos u e λ com $\theta = 0.4$ para $n = 500$ obtivemos boas estimativas para FT e FTmod, elevando-se o vício das estimativas ao aumentarmos a probabilidade para $c = 0.03$. Em ambos os casos as estimativas para λ apresentaram um vício razoável. O estimador MCMC não obteve boas estimativas para u , porém para λ o resultado foi satisfatório. Contudo, ao aumentarmos a probabilidade c o estimador teve queda de rendimento, com aumento do vício e eqm.

Ao aumentarmos o n para 1000 obtivemos excelentes estimativas para u e mesmo rendimento com λ com os estimadores FT e FTmod, no entanto o estimador MCMC apresentou o mesmo rendimento insatisfatório para u e piorou para λ , com aumento do vício, eqm e variância.

Tabela 4.21: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.2968	0.0945	0.2985	0.0918	0.2920	0.0751
vício	0.0032	0.0055	0.0015	0.0082	0.0080	0.0249
eqm	0.0415	0.1649	0.0410	0.1675	0.0472	0.1827
var	0.0002	0.0005	0.0003	0.0009	0.0040	0.0022
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3007	0.0757	0.2986	0.0705	0.2903	0.0638
vício	-0.0007	0.0243	0.0014	0.0295	0.0097	0.0362
eqm	0.0436	0.1813	0.0437	0.1856	0.0505	0.1920
var	0.0039	0.0013	0.0031	0.0012	0.0066	0.0017
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3001	0.0937	0.3016	0.0901	0.2902	0.0693
vício	-0.0001	0.0063	-0.0016	0.0099	0.0098	0.0307
eqm	0.0401	0.1653	0.0395	0.1684	0.0479	0.1869
var	0.0001	0.0003	0.0001	0.0004	0.0039	0.0014
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.3027	0.0704	0.3015	0.0683	0.2861	0.0603
vício	-0.0027	0.0296	-0.0015	0.0317	0.0139	0.0397
eqm	0.0423	0.1857	0.0424	0.1873	0.0517	0.1949
var	0.0034	0.0011	0.0030	0.0010	0.0059	0.0016

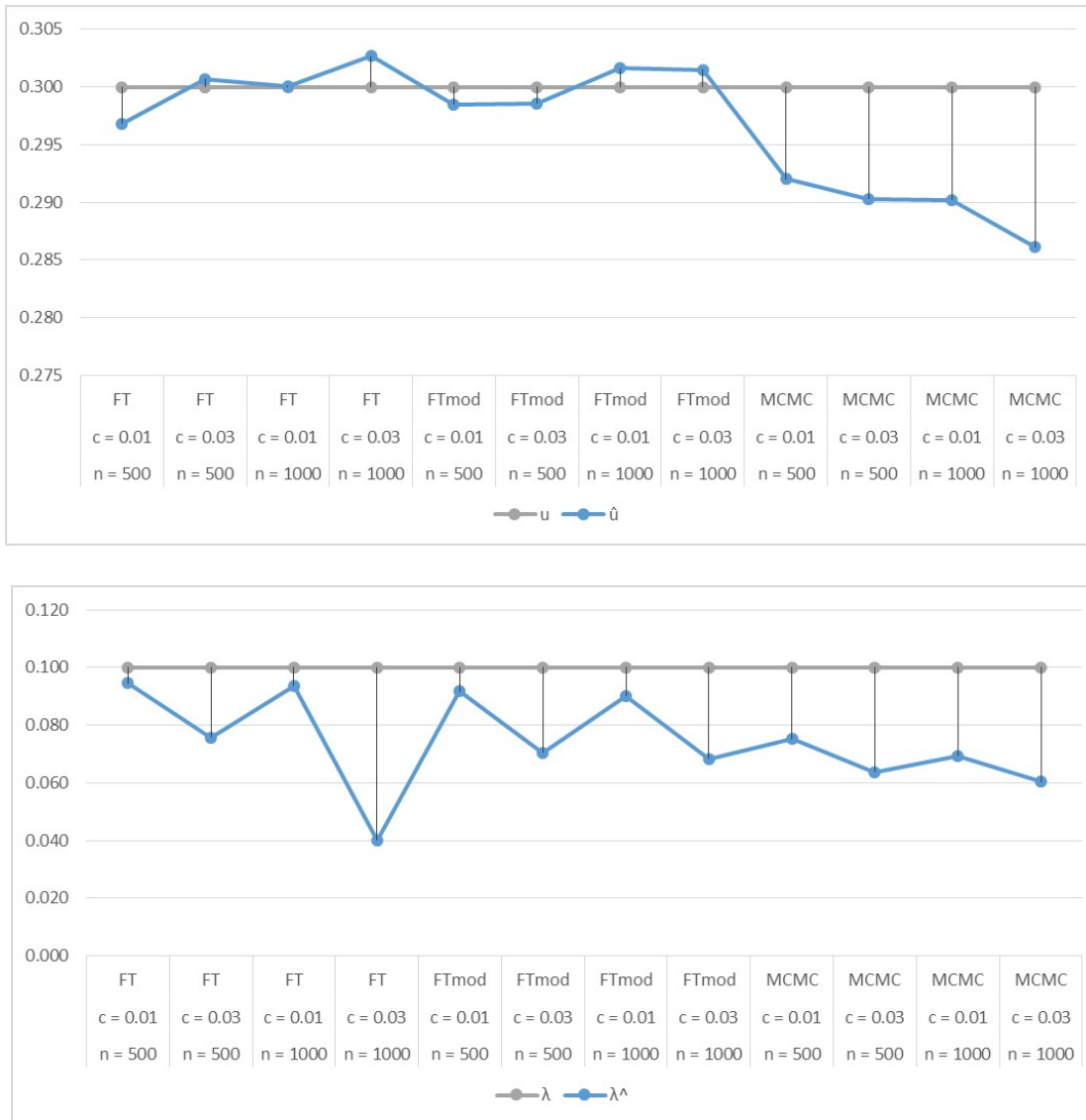


Figura 4.8: Estimacão Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.3, \lambda = 0.1, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Com $\theta = -0.4$ e para $n = 500$, as estimativas para u foram excelentes nos três estimadores estudados, sendo que os estimadores FT e FTmod melhoraram ao aumentarmos a probabilidade e o estimador MCMC obteve pequena queda de precisão. No caso de λ os estimadores FT e FTmod apresentaram ótimas estimativas, porém ao aumentarmos a probabilidade c o aumento do vício, eqm e variância foi evidente. Para MCMC, λ não obteve boa estimacão apresentando, com $c = 0.01$, grande vis e piorando ao aumento da probabilidade c . Ao aumentarmos o n , os estimadores continuaram expondo o mesmo desempenho, com aumento do vício, eqm e variância ao aumentarmos a probabilidade c .

A seguir realizamos as mesmas estimações acima para $u = 0.5$ e $\lambda = 0.2$ para verificarmos seus comportamentos.

Tabela 4.22: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5010	0.1815	0.4981	0.1766	0.4996	0.1751
vício	-0.0010	0.0185	0.0019	0.0234	0.0004	0.0249
eqm	0.0003	0.1025	0.0410	0.1057	0.0408	0.1067
var	0.0003	0.0010	0.0003	0.0011	0.0004	0.0012
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4994	0.1490	0.4968	0.1399	0.4958	0.1418
vício	0.0006	0.0510	0.0032	0.0601	0.0042	0.0582
eqm	0.0451	0.1250	0.0432	0.1318	0.0438	0.1304
var	0.0036	0.0018	0.0036	0.0021	0.0026	0.0021
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4975	0.1834	0.4983	0.1790	0.4989	0.1782
vício	0.0025	0.0166	0.0017	0.0210	0.0011	0.0218
eqm	0.0001	0.1008	0.0395	0.1037	0.0403	0.1043
var	0.0001	0.0006	0.0003	0.0006	0.0002	0.0007
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4969	0.1478	0.4977	0.1461	0.4970	0.1442
vício	0.0031	0.0522	0.0023	0.0539	0.0030	0.0558
eqm	0.0433	0.1254	0.0429	0.1269	0.0430	0.1281
var	0.0031	0.0014	0.0035	0.0016	0.0029	0.0015



Figura 4.9: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0 = q, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

A estimação de u em todos os estimadores estudados obteve excelentes resultados, independente do aumento da probabilidade c e n . Pelo contrário, λ obteve aumento significativo de vício, eqm e variância ao aumentarmos c e n .

Tabela 4.23: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4996	0.1693	0.4982	0.1662	0.5718	0.1815
vício	0.0004	0.0307	0.0018	0.0338	-0.0718	0.0185
eqm	0.0003	0.1106	0.0411	0.1128	0.0350	0.1085
var	0.0003	0.0012	0.0005	0.0014	0.0076	0.0070
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5041	0.1278	0.5017	0.1311	0.5640	0.1506
vício	-0.0041	0.0722	-0.0017	0.0689	-0.0640	0.0494
eqm	0.0393	0.1396	0.0406	0.1380	0.0275	0.1273
var	0.0041	0.0018	0.0036	0.0019	0.0099	0.0075
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4965	0.1713	0.4981	0.1675	0.5591	0.1738
vício	0.0035	0.0287	0.0019	0.0325	-0.0591	0.0262
eqm	0.0002	0.1087	0.0382	0.1113	0.0362	0.1117
var	0.0002	0.0007	0.0006	0.0007	0.0100	0.0053
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5022	0.1278	0.5006	0.1295	0.5620	0.1469
vício	-0.0022	0.0722	-0.0006	0.0705	-0.0620	0.0531
eqm	0.0382	0.1393	0.0414	0.1385	0.0221	0.1289
var	0.0035	0.0015	0.0031	0.0012	0.0078	0.0072



Figura 4.10: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = 0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

As estimativas de u para os estimadores FT e FTmod apresentaram excelentes resultados para $c = 0.01$. Ao aumentarmos tanto c , quanto n , o estimador FT teve queda de rendimento enquanto FTmod continuou apresentando ótimos resultados. As estimativas do estimador MCMC estavam viciadas, com eqm e variâncias altos em todos os casos. As estimativas de λ , também, em todos os casos apresentaram elevado vício, eqm e variância, onde os mesmos elevaram-se ao aumento da probabilidade c e de n .

Tabela 4.24: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5007	0.1895	0.4982	0.1862	0.4800	0.1562
vício	-0.0007	0.0105	0.0018	0.0138	0.0200	0.0438
eqm	0.0002	0.0972	0.0411	0.0995	0.0461	0.1217
var	0.0002	0.0008	0.0004	0.0010	0.0055	0.0046
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4989	0.1689	0.4947	0.1669	0.4783	0.1397
vício	0.0011	0.0311	0.0053	0.0331	0.0217	0.0603
eqm	0.0438	0.1113	0.0435	0.1126	0.0471	0.1330
var	0.0034	0.0017	0.0030	0.0017	0.0065	0.0050
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4987	0.1926	0.4991	0.1898	0.4807	0.1590
vício	0.0013	0.0074	0.0009	0.0102	0.0193	0.0410
eqm	0.0001	0.0949	0.0397	0.0967	0.0551	0.1200
var	0.0001	0.0004	0.0001	0.0005	0.0076	0.0041
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4989	0.1701	0.4991	0.1691	0.4792	0.1378
vício	0.0011	0.0299	0.0009	0.0309	0.0208	0.0622
eqm	0.0438	0.1101	0.0441	0.1106	0.0454	0.1336
var	0.0032	0.0013	0.0029	0.0011	0.0056	0.0041



Figura 4.11: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $k = 3, p = 1, q = 0, \phi = -0.4, \theta = 0, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Ao usarmos $\phi = -0.4$ o comportamento dos estimadores FT e FTmod continuaram parecidos quando estimados com $\phi = 0.4$, com excelentes estimações para u . Para λ , obtivemos pequena redução no vício. As estimativas de MCMC apresentaram em todos os casos, alto vício, eqm e variância, aumentando ao elevarmos c e n .

Tabela 4.25: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5000	0.1725	0.4983	0.1733	0.5192	0.1882
vício	0.0000	0.0275	0.0017	0.0267	-0.0192	0.0118
eqm	0.0004	0.1086	0.0411	0.1082	0.0386	0.1007
var	0.0004	0.0014	0.0006	0.0015	0.0036	0.0035
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5030	0.1416	0.4991	0.1516	0.5273	0.1753
vício	-0.0030	0.0584	0.0009	0.0484	-0.0273	0.0247
eqm	0.0410	0.1305	0.0421	0.1237	0.0378	0.1097
var	0.0039	0.0021	0.0036	0.0023	0.0051	0.0043
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4965	0.1750	0.4978	0.1776	0.5110	0.1923
vício	0.0035	0.0250	0.0022	0.0224	-0.0110	0.0077
eqm	0.0003	0.1064	0.0376	0.1048	0.0380	0.0976
var	0.0003	0.0007	0.0006	0.0009	0.0031	0.0029
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5006	0.1442	0.5002	0.1595	0.5266	0.1723
vício	-0.0006	0.0558	-0.0002	0.0405	-0.0266	0.0277
eqm	0.0434	0.1285	0.0430	0.1179	0.0368	0.1114
var	0.0036	0.0020	0.0032	0.0020	0.0047	0.0040



Figura 4.12: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = 0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Ao mudarmos e estimarmos $\theta = 0.4$ os resultados continuaram excelentes para u através do estimador FT, todavia tivemos um pequeno aumento de vício no estimador FTmod. O estimador MCMC apresentou resultados muito aquém do que esperávamos. Apesar das estimativas de λ terem melhorado, continuaram com um vício elevado, aumentando com o mudança da probabilidade para $c = 0.03$.

Tabela 4.26: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$), quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$	\hat{u}	$\hat{\lambda}$
$c = 0.01, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5009	0.1892	0.4986	0.1850	0.4846	0.1587
vício	-0.0009	0.0108	0.0014	0.0150	0.0154	0.0413
eqm	0.0002	0.0974	0.0410	0.1004	0.0472	0.1196
var	0.0002	0.0008	0.0003	0.0011	0.0040	0.0031
$c = 0.03, n = 500$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5013	0.1662	0.4999	0.1629	0.4829	0.1404
vício	-0.0013	0.0338	0.0001	0.0371	0.0171	0.0596
eqm	0.0436	0.1131	0.0437	0.1151	0.0505	0.1326
var	0.0039	0.0017	0.0031	0.0015	0.0066	0.0033
$c = 0.01, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.4990	0.1904	0.4995	0.1881	0.4885	0.1621
vício	0.0010	0.0096	0.0005	0.0119	0.0115	0.0379
eqm	0.0001	0.0962	0.0395	0.0978	0.0479	0.1168
var	0.0001	0.0004	0.0001	0.0005	0.0039	0.0026
$c = 0.03, n = 1000$						
	FT		FTmod		MCMC	
média	0.5024	0.1685	0.4990	0.1653	0.4867	0.1433
vício	-0.0024	0.0315	0.0010	0.0347	0.0133	0.0567
eqm	0.0423	0.1114	0.0424	0.1132	0.0517	0.1299
var	0.0034	0.0015	0.0030	0.0011	0.0059	0.0027



Figura 4.13: Estimação Paramétrica para um processo k -Factor $\text{GARMA}(p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q)$, quando $k = 3, p = 0, q = 1, \phi = 0, \theta = -0.4, u = 0.5, \lambda = 0.2, n \in \{500, 1000\}, c \in \{0.01, 0.03\}$ e $\tau^2 = 10$.

Para $\theta = -0.4$, FT e FTmod apresentaram resultados extremamente satisfatórios para u , com vício, eqm e variância mínimos. Obtivemos uma boa melhora para a estimação de λ , contudo, com a presença de vício e eqm em todos os casos. O estimador MCMC para este caso obteve resultados similares aos resultados com $\theta = 0.4$, com a presença de vício, eqm e variância, tanto para u , quanto para λ , aumentando com o aumento da probabilidade c .

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Conclusões Gerais

Quando estimamos os parâmetros sem adição de *outliers* e com $p = 0 = q$, todos os estimadores, tanto paramétricos (FT, FTmod e MCMC) como semiparamétricos (GPH e BA) utilizando as metodologias clássica e robustas obtiveram resultados equivalentes e muitos bons, isto é, pequenos vício, eqm e variância. Dentre as metodologias clássica e robusta a metodologia MM obteve melhor desempenho.

Quando $p \neq 0$, os estimadores semiparamétricos, em todas as metodologias, apresentaram um alto vício. Nestas primeiras simulações estes estimadores não apresentaram bom desempenho. Já os estimadores paramétricos continuam apresentando um bom desempenho.

Por serem semiparamétricos (GPH e BA), não podemos estimar todos os parâmetros, portanto simulamos somente os estimadores paramétricos com a presença de *outliers*.

Quando adicionamos os *outliers* pelo método de mistura, no caso de $k = 1$, $p = 1$, com $\phi \in \{-0.7, 0.7\}$ os estimadores FT e FTmod obtiveram bons resultados comparados com o estimador MCMC, isto é, apresentaram menores vício, eqm e variância, tanto na estimativa de u como na de λ , independente do tamanho da amostras, das probabilidades c .

O estimador MCMC também obteve bons resultados na estimação do parâmetro u , no sentido de pequeno vício, tanto para $n = 1000$, como para $n = 2000$. As estimativas também permaneciam boas quando τ^2 aumentava. Quando utilizamos $\tau^2 = 10$ o vício se tornou um pouco maior. Conforme elevamos o valor da probabilidade de contaminação c as estimativas de u apresentam um aumento no vício. Quando utilizamos $\tau^2 \in \{2, 5\}$, o vício permanece constante e pequeno. Na estimação de λ , estes estimadores apresentavam elevação de vício, na maioria dos casos, quando τ^2 e/ou c aumentavam.

Tanto na estimação de u como de λ , o eqm e a variância do estimador FTmod elevava conforme τ^2 e/ou c aumentavam. O estimador MCMC obteve o melhor resultado dentre os estimadores utilizados, obtendo baixo vício, eqm e variância em todos os casos simulados, não apresentando aumento significativo à medida em que aumentava-se a probabilidade c e τ^2 .

No caso de $k = 2$, com $p = 0 = q$, todos os estimadores apresentaram excelentes resultados, independente de c e τ^2 .

Quando aumentamos para $k = 3$ e mantivemos $p = 0 = q$ os resultados das estimações não apresentaram alto vício, eqm e variância, tendo estimativas excelentes para u , independente do tamanho da amostra n e da probabilidade c . Para o parâmetro λ não obtivemos bons resultados

estimados, com altos valores de vício, eqm e variância e um aumento considerável dos mesmos ao aumentarmos a probabilidade c , sendo o valor do tamanho amostral não importante na magnitude das estimativas, neste caso.

Estimando $p \neq 0$, os estimadores FT e FTmod apresentaram excelentes resultados para u e presença de alto vício, eqm e variância para λ , porém para o estimador MCMC obtivemos o efeito inverso. Os resultados apresentaram vício, eqm e variância altos para u e bons resultados para λ quando estimados com $c = 0.01$ e $\phi = 0.4$. Ao aumentarmos a probabilidade c o estimador apresentou elevado vício, eqm e variância. Porém ao estimarmos $\phi = -0.4$ os resultados apresentaram alto vício, eqm e variância.

Quando realizamos as simulações com $q \neq 0$, os resultados, em geral, foram similares à $p \neq 0$. Os estimadores FT e FTmod apresentaram os melhores resultados e o estimador MCMC obteve alto vício, eqm e variância. Em todos os casos, quando aumentávamos a probabilidade c , as estimações perdiam precisão.

Apesar das estimativas de MCMC apresentarem algum vício, eqm e variância, temos que levar em consideração que utilizamos $\tau^2 = 10$, o qual apresentava-se maior instabilidade quando os parâmetros eram estimados com $k = 1$.

Sendo assim, os três estimadores estudados apresentaram excelentes resultados, com poucas alterações de vício, eqm e variância conforme variávamos c , n e τ^2 .

5.2 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Com base no trabalho desenvolvido, diversas vertentes de trabalhos futuros podem ser identificadas. Tais como:

- i) Correção dos estimadores para melhorar as estimativas dos parâmetros dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$) na presença de outliers;
- ii) Estimação dos parâmetros utilizando a representação auto-regressiva infinita dos processos k -Factor GARMA($p, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, q$);
- iii) Simulação com contaminação com *outliers* inovadores, e também com outros tipos de *outliers*;
- iv) Outros modelos de contaminação;
- v) Previsão;
- vi) Aplicação à dados reais;

Referências Bibliográficas

- [1] Baillie, R.T. (1996). “Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 5-59.
- [2] Bary, N.K. (1964). *A Treatise on Trigonometric series*. Vol. II. Pergamon Press, New York.
- [3] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- [4] Bisognin, C. *Estimação e Previsão em Processos Com Longa Dependência Sazonais*. 2007. 132 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- [5] Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- [6] Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- [7] Bustos, O.H. e V.J. Yohai (1986). “Robust Estimates for ARMA Models”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **81**, pp. 155-168.
- [8] Chung, C-F. (1996). “Estimating a Generalized Long Memory Process”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 237-259.
- [9] Collet, J., D. Guégan e P. Valdes-Sosa (2003). “How Shall We Determine the Number and the Location of the Gegenbauer Frequencies? An Empirical Approach”. Note de Recherche IDHE-MORA n° 2003-09.
- [10] Denby, L. e R.D. Martin (1979). “Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **74**, pp. 140-146.
- [11] Draper, N. e H. Smith (1981). *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley.
- [12] Doukhan, P., G. Oppenheim e M.S. Taqqu (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Boston: Birkhäuser.
- [13] Ferrara, L. e D. Guégan (1999). “Estimation and Applications of Gegenbauer Processes”. Preprint INSEE n° 9927.
- [14] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). “Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.

- [15] Gilks, W. R.; Richardson, S.; Spiegelhalter, D. J. (1995). "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model". Chapman and Hall, London.
- [16] Giraitis, L. e R. Leipus (1995). "A Generalized Fractionally Differencing Approach in Long Memory Modelling". *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **35**(1), pp. 53-65.
- [17] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **4**(4), pp. 221-238.
- [18] Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). "An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **1**(1), pp. 15-29.
- [19] Gray, H. L., N-F. Zhang e W.A. Woodward (1989). "On Generalized Fractional Processes". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **10**(3), pp. 233-257.
- [20] Hosking, J.R.M. (1981). "Fractional Differencing". *Biometrika*, Vol. **68**(1), pp. 165-176.
- [21] Hosking, J.R.M. (1984). "Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing". *Water Resources Research*, Vol. **20**(12), pp. 1898-1908.
- [22] Hurst, H.E. (1951). "Long-term Storage Capacity of Reservoirs". *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. **116**, pp. 165-167.
- [23] Koopmans, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time Series*. London: Academic Press.
- [24] Lopes, S.R.C. (2007). "Long-range Dependence in Mean and Volatility: Models, Estimation and Forecasting". In: Vares M.E. e V. Sidoravicius (eds). *EBP*. Rio de Janeiro: Birkhäuser.
- [25] Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2004). "A Comparison of Estimation in Non-Stationary ARFIMA Processes". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. **74**(5), pp. 339-347.
- [26] Mandelbrot, B.B. e J.R. Wallis (1969). "Computer Experiments with Fractional Gaussian Noises. Part One, Averages and Variances". *Water Resources Research*, Vol. **5**(1), pp. 228-241.
- [27] Mandelbrot, B.B. e J.W. van Ness (1968). "Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications". *SIAM Review*, Vol. **10**(4), pp. 422-437.
- [28] Morettin P.A. e C.M.C. Tolo (2004). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.
- [29] Ndongo M., A.K. Diongue e S. Dossou-Gbété (2010). "Estimation of long-memory parameters for seasonal fractional ARIMA with stable innovations". *Statistical Methodology*, **7**, 141-151.
- [30] Peiris, M.S. e N. Singh (1996). "Predictors for Seasonal and Nonseasonal Fractionally Integrated Arima Models". *Biometrika*, Vol. **38**(6), pp. 741-752.

-
- [31] Reisen, V.A. e S.R.C. Lopes (1999). "Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models". *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **80**(2), pp. 269-287.
- [32] Robinson, P.M. (1995). "Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence". *Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 1048-1072.
- [33] Sowell, F. (1992). "Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models". *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, pp. 165-188.
- [34] Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.
- [35] Woodward, W.A., Q.C. Cheng e H.L. Gray (1998). "A k -Factor GARMA Long-Memory Model". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **19**(4), pp. 485-504.
- [36] Yajima Y. (1996). "Estimation of the Frequency of Unbounded Spectral Densities". *Proceedings of the Business and Economic Statistics Section 4-7*, American Statistical Association.