UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Estudando matrizes a partir de transformações geométricas

por

Vandoir Stormowski

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Mestre em Ensino de Matemática

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Orientador

Porto Alegre, outubro de 2008.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Stormowski, Vandoir

Estudando matrizes a partir de transformações geométricas / Vandoir Stormowski.—Porto Alegre: PPG-ENSIMAT da UFRGS, 2008.

144 p.: il.

Dissertação (mestrado profissionalizante) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.
Orientador: Brietzke, Eduardo Henrique de Mattos

Dissertação: Ensino de Matemática
ensino, matrizes, operações entre matrizes, transformações geométricas, fractais

Estudando matrizes a partir de transformações geométricas

por

Vandoir Stormowski

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Ensino de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Banca examinadora:

Profa. Dra. Eleni Bisognin
UNIFRA

Profa. Dra. Maria Alice Gravina
UFRGS

Profa. Dra. Maria Paula Gonçalves Fachin
UFRGS

Dissertação apresentada em
17 de outubro de 2008.

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Coordenador PPGEM

AGRADECIMENTOS

Muito tenho a agradecer.

Gostaria de agradecer de maneira muito especial ao professor Dr. Eduardo Brietzke por ter me orientado durante estes anos de mestrado, sempre me incentivando, apoiando e guiando o meu trabalho.

À professora Dra. Maria Alice Graviana por ter sido responsável pela semente, a idéia inicial, que gerou esta dissertação, pelo incentivo durante estes anos de estudo, e pelas valiosas contribuições para o aprimoramento do texto.

À professora Dra. Maria Paula Fachin, que com suas aulas contribuiu significativamente na delimitação do tema.

À professora Dra. Eleni Bisognin, pelas valiosas contribuições.

Ao professor Dr. Marcus Basso, pelo incentivo e apoio dispensados, desde a implementação das atividades até a escritura deste texto.

À colega Lúcia Couto Terra, pelo apoio na implementação das atividades junto ao Colégio de Aplicação da UFRGS. Ao Colégio de Aplicação por ter permitido a implementação das atividades e por ter disponibilizado sua estrutura para que ela acontecesse. Aos alunos que participaram das atividades, propiciando este trabalho.

Ao colega Rodrigo Sychocki da Silva, pela parceria na implementação das atividades, pela elaboração dos applets em Java, pelo apoio e incentivo.

À minha esposa Marcia, que durante estes anos foi muito mais do que companheira e parceira.

E por último, mas de maneira muito especial à UFRGS e todo corpo docente do Instituto de Matemática. Meus pais e minha família são responsáveis pela pessoa que sou, mas todo o resto devo à formação profissional que recebi nesta instituição. Se hoje tenho uma profissão, se tive oportunidade de estudar num curso superior, foi por causa de uma instituição que é pública e gratuita. Só a educação é capaz de modificar estruturas sociais e econômicas. É nisso que continuo acreditando e é por isso que agradeço.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
CAp	Colégio de Aplicação da UFRGS
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
MVT	Mathematical Visualization Toolkit
EC	Enriquecimento Curricular
PUCRS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUCSP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
USP	Universidade de São Paulo
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo central a elaboração, implementação e reflexão sobre uma sequência didática para o estudo de matrizes a partir de transformações geométricas. A sequência didática pretende propiciar ao aluno um estudo que justifique as definições das operações entre matrizes e suas respectivas propriedades, a partir da observação e análise de algumas transformações geométricas, de modo a se refazer o processo histórico da definição e obtenção destes conceitos. Além disso, apresenta algumas atividades de aplicação de matrizes, onde a composição e iteração de transformações geométricas no software Shapari geram algumas figuras fractais.

Como metodologia de trabalho adotamos a Engenharia Didática para a elaboração, implementação e avaliação da sequência didática proposta.

O texto também apresenta uma análise das referências sobre o ensino de matrizes e de transformações geométricas. Começando pelas orientações dos documentos oficiais e passando pela apresentação de diversos estudos sobre o tema, delimitamos e justificamos a nossa proposta de ensino. Além disso, apresentamos um extrato sobre o conhecimento matemático envolvido no tema, de modo que sirva de base para o docente que implementar a sequência didática em sala de aula.

Palavras chave: ensino, matrizes, operações entre matrizes, transformações geométricas, fractais

ABSTRACT

This work has as its main goal the formulation, implementation and contemplation of a didactic sequence to the study of matrices from geometric transformations. The didactic sequence intends to propitiate the student a study which justifies the definitions of operations between matrices and their respective properties, from the observation and analysis of some geometric transformations, so that they are able to redo the historical process of the definition and the acquisition of these concepts. Besides that, it shows some activities to the application of matrices, in which the composition and iteration of geometric transformations in the Shapari software generate some fractals.

We have adopted Didactic Engineering as a methodology to the elaboration, implementation and evaluation of the proposed didactic sequence.

The text also shows an analysis of the references about the teaching of matrices and the geometric transformations. We delimited and justified our teaching proposal by staring with orientations of official documents and showing a series of studies about the theme. Besides that, we show an excerpt about the mathematical knowledge involved in the theme, so that it can be used as basis to the teacher who decides to implement the didactic sequence in the classroom.

Key words: teaching, matrices, operation between matrices, geometric transformations, fractals

1 APRESENTAÇÃO

No início era o caos. Estávamos começando o curso de pós-graduação com muita empolgação, muito entusiasmo, com reflexões sobre diversos tópicos relacionados à matemática e ao ensinar, mas na verdade nenhuma certeza tínhamos acerca de qual assunto explorar como objeto de estudo do mestrado. Com o andar das atividades, certo dia nos foi solicitado que escrevêssemos sobre o tema que pretendíamos pesquisar, e assim foi feito. Dias depois a professora Maria Alice Gravina[1] nos encontrou na sala de aula, e nos fez perceber que estávamos pensando em algo muito elementar e já muito discutido[2], com o que concordamos prontamente. Depois de conversarmos um pouco, nos sugeriu dar uma olhada no tema Fractais e Teoria do Caos[3]. Este tema poderia ser algo interessante para desenvolvermos atividades voltadas para a Educação Básica, pois se tratavam de conceitos desenvolvidos recentemente (e/ou ainda em desenvolvimento) se comparados a outros temas escolares que na sua maioria possuem séculos de desenvolvimento. Aceita a sugestão, estávamos a estudar e a pensar em atividades sobre a Geometria Fractal e a Teoria do Caos que pudessem ser implementados no âmbito escolar.

Logo nas primeiras leituras e discussões sobre o assunto limitamos o trabalho à Geometria Fractal e processos iterativos, deixando o Caos para trás. Definido um tema inicial de pesquisa, começamos os estudos sob orientação do professor Eduardo Brietzke, discutindo, pensando e elaborando formas de tratar o tema na escola.

Nesta etapa as leituras se restringiram às publicações que enfatizavam processos didáticos relacionados ao tema. Após a leitura de algumas referências e da análise mais detalhada da proposta em questão, observamos que a mesma era bastante ampla e poderia ou precisaria ser delimitada. Pensando nas atividades a serem elaboradas e nos pré-requisitos que os alunos precisariam para o desenvolvimento dessas, destacamos alguns dos pré-requisitos que precisariam ser abordados: transformações geométricas, representação matricial das transformações e composição de transformações.

[1] Maria Alice Gravina é docente do Instituto de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS.

[2] O tema foi logo abandonado e nem lembramos mais qual era.

[3] Esta idéia teria surgido a partir de uma palestra do professor Claus Ivo Doering sobre o tema, durante um curso de formação para professores do Ensino Médio.

Focamos nossa atenção nesses tópicos e percebemos que eles não são normalmente abordados no Ensino Médio apesar de previstos e sugeridos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como comentamos no próximo capítulo, e que seu estudo seria um tema muito interessante para ser implementado em sala de aula. Achamos então que apenas estes pré-requisitos destacados já seriam o suficiente para nos determos naquele momento. Decidimos pela abordagem das transformações geométricas e sua representação matricial, e a partir destas gerar algumas figuras fractais. Deste modo, o centro das atividades passou a ser as transformações geométricas e sua representação matricial e, então, tentar dar um significado mais real para as operações entre matrizes além de possibilitar o estudo relacionado de vários temas. Neste momento os Fractais deixaram de ser o centro das atenções didáticas, e se constituíram mais como uma aplicação, uma motivação, um chamariz, ou uma curiosidade para os estudantes. Iterando composições de transformações geométricas obteremos algumas figuras fractais, mas nos deteremos principalmente no estudo de matrizes a partir de transformações geométricas.

É preciso salientar que nesta última etapa de delimitação do tema observamos uma série de singularidades importantes para a constituição e definição do mesmo, das quais destacamos duas:

- as transformações geométricas há algum tempo são fortemente sugeridas pelos PCNs como um tema de abordagem desde as séries finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, e no entanto as mesmas são quase que esquecidas inclusive pelos livros didáticos que apenas recentemente resolveram abordar o assunto, mas ainda de forma muito superficial.

- o estudo de matrizes em geral não possui uma aplicação real que possa justificar sua abordagem em sala de aula. Na maioria das vezes as operações de adição e multiplicação são introduzidas de forma artificial e mecânica, sem apresentar nenhum convencimento sobre o motivo ou a origem da forma peculiar da multiplicação de matrizes, por exemplo. Porque na soma de matrizes operamos termo a termo, e na multiplicação “multiplicamos linhas por colunas”? Qual a origem desta forma estranha de multiplicarmos matrizes? Segundo Eves (2004), a origem histórica da multiplicação de matrizes está na composição das transformações geométricas.

Estas singularidades destacam as transformações geométricas como uma possibilidade de estudo para o Ensino Médio, caracterizando também uma ampliação da abordagem da geometria, que neste nível, muitas vezes fica restrita ao cálculo de áreas de superfícies e volumes de sólidos. Ao mesmo tempo propicia uma abordagem que relaciona geometria e álgebra, tópicos que quase sempre são estudados de forma muito estanque no colégio, indo de encontro ao estudo compartimentado da matemática.

Os tópicos listados inicialmente pareciam ser justificativas mais do que suficientes para nos colocarmos neste processo de elaboração, implementação e validação de atividades didáticas para o Ensino Médio. Em consequência definimos como *o objetivo central do nosso trabalho, a elaboração de uma sequência didática*[4] *para o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas, propiciando uma abordagem que justifique as definições das operações ente matrizes e suas propriedades*, partindo de um olhar sobre a história da matemática.

O objetivo central estava delineado, mas diversos objetivos e expectativas acompanharam o planejamento, a elaboração e implementação da sequência didática. Esperamos que a atividade seja um eixo que tenha diferentes ramificações que possibilitem a interligação entre outros tópicos como: iterações, conceito de infinito, fractais, áreas, progressões, dimensão, etc. Este é um olhar diferenciado sobre o currículo. Procuramos propor uma atividade que interligue diversos conceitos e abordagens, contrapondo com o currículo linear estabelecido.

E como já apresentado em parágrafos anteriores, pretendemos propor conceitos de modo geral pouco abordados na escola, mas que devem receber mais importância como a geometria, as transformações geométricas, os fractais, a argumentação dedutiva. Conceitos que podem e devem ser abordados de forma bastante interligada.

Esperamos destacar também uma forma de abordagem que possibilite leituras algébricas e geométricas, e que propicie a conexão entre áreas de modo geral estudadas separadamente: geometria e álgebra.

A metodologia utilizada foi a *engenharia didática*, por propiciar a investigação e avaliação da sequência didática a partir da implementação e observação da mesma em

[4]Chamamos por *sequência didática* uma sequência de atividades planejadas para a sala de aula, e que estejam encadeadas ou relacionadas entre si.

sala de aula. É uma metodologia que leva em consideração a atuação profissional do docente e suas reflexões sobre esta atuação.

Para que se tenha uma visão geral de como este texto está organizado, faremos a seguir uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 2 apresentaremos os escritos sobre o tema em documentos oficiais, e a sua respectiva adoção nos livros didáticos publicados. São apresentados também estudos recentes versando sobre o ensino de matrizes ou transformações geométricas. Na segunda parte do mesmo capítulo destacamos as questões referentes ao currículo e à metodologia da proposta, bem como as concepções pedagógicas que acompanham e conduzem a sugestão da sequência didática.

No capítulo 3 destacamos a elaboração e os objetivos específicos de cada atividade da sequência didática. Acompanha ainda uma seção sobre os recursos de informática empregados ou que pudessem ser utilizados.

Toda a abordagem da matemática envolvida na proposta será apresentada e discutida no capítulo 4. Além de destacar os principais conceitos matemáticos presentes na sequência didática, faremos também indicações de bibliografia complementar para o caso do leitor querer se aprofundar em algum tópico.

No capítulo 5 é relatada a implementação da atividade para dois grupos de alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp), acompanhada das observações e comentários sobre a atividade desenvolvida. No capítulo 6 apresentamos uma análise para avaliação e/ou validação da sequência didática implementada, bem como as alterações que ocorreram durante o processo de aplicação e consequente reflexão.

2 OS ESCRITOS SOBRE O TEMA E AS CONCEPÇÕES PEDAGÓGICAS DA PROPOSTA

Todo estudo ou análise que se faça no processo de ensino e aprendizagem não ocorre de forma isolada ou completa em si mesma. Os questionamentos, reflexões e/ou as idéias de aperfeiçoamento sobre determinado tema ou assunto surgem de experiências, de leituras, ou de estudos realizados anteriormente. Deste modo, o tema de estudo está relacionado com escritos de outros autores que servem de alicerce e fundamento, ou de ponto de partida para novos questionamentos, aprimoramentos ou contestações. São estas relações, que o tema desta dissertação possui com a bibliografia conhecida, que iremos abordar na primeira seção deste capítulo. Estaremos interessados essencialmente nos escritos que tratem de tópicos que envolvam as questões curriculares, pedagógicas e metodológicas, visto que a abordagem da matemática envolvida será realizada no capítulo 4 deste texto.

Além desta análise de como os tópicos centrais deste trabalho estão referenciados em outros documentos e estudos, o presente capítulo apresenta também a abordagem das concepções pedagógicas que nortearam nosso estudo. Apresentaremos qual a concepção de currículo vinculada à atividade proposta, bem como da metodologia relacionada ao seu planejamento, implementação e avaliação. Esta apresentação será realizada na segunda seção deste capítulo.

2.1 Os escritos sobre Matrizes e Transformações

Para objetivar nossa abordagem, delimitamos nossa exposição de documentos e estudos a aqueles que se referem a matrizes e transformações, dada a sua importância neste estudo, mesmo que o tema possua outras relações que não serão estudadas aprofundadamente aqui[1].

Começamos nossa abordagem com as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) divulgados pelo Ministério da Educação (MEC) por se tratarem de

[1] Este é o caso do tópico fractais que permeia toda a atividade mas não é o centro da mesma. Estes e outros tópicos como as progressões, o conceito de dimensão, e o estudo de áreas serão eventualmente mencionados mas não estudados aprofundadamente neste capítulo, pois não se constituem como centro deste estudo.

indicações e orientações para o ensino de matemática oriundas do órgão máximo responsável pela educação no Brasil. Aproveitamos também para fazer um rápido paralelo com as indicações para o ensino de matemática nos Estados Unidos, encontrados nos *Principles & Standards for School Mathematics* publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Para complementar, analisamos também algumas dissertações e artigos publicados que referenciam matrizes ou transformações, pois se tratam de reflexões e abordagens já realizadas sobre o tema. Em seguida serão descritas as abordagens de alguns livros didáticos em relação ao tema, para que possamos verificar quais das orientações dos documentos oficiais e demais estudos estão atingindo de fato a sala de aula, considerando que muitos destes livros didáticos são utilizados como livro-texto nas escolas.

2.1.1 As orientações e diretrizes de documentos oficiais

Num panorama geral os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) sugerem que os conteúdos matemáticos abordados no Ensino Médio serão de ampliação e aprofundamento daqueles estudados no Ensino Fundamental. Deste modo, mesmo que a atividade tenha sido proposta para alunos do Ensino Médio, começamos nossa análise pelos Parâmetros Curriculares do terceiro e quarto ciclos[2] da educação básica.

Nestes documentos, destacamos que entre os objetivos da matemática para o terceiro ciclo encontramos a indicação de resolução de "situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução" (BRASIL, 1998, p. 65). Para o quarto ciclo, notamos um aprofundamento desta abordagem, quando encontramos nos objetivos da matemática para este ciclo que o aluno consiga "interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano" (BRASIL, 1998, p. 81), e também "produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas" (BRASIL, 1998, p. 82).

[2]Nos PCN o termo terceiro ciclo é utilizado para indicar a 5ª e a 6ª séries, e o quarto ciclo corresponde a 7ª e a 8ª séries. Com a ampliação do Ensino Fundamental para nove anos, algumas escolas estão denominando estas séries de 6º e 7º ano e 8º e 9º ano, respectivamente.

Além de figurarem entre os objetivos da matemática para os ciclos referidos, os Parâmetros Curriculares por diversas vezes mencionam as transformações geométricas[3], dando uma grande importância para o assunto, e dedicando uma página completa para relatar a importância de sua abordagem em sala de aula, confirmado no seguinte extrato[4]:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para este estudo. [...] O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. [...] O estudo das transformações que envolvem a ampliação e redução de figuras é um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. (BRASIL, 1998, p. 124)

Percebemos portanto, que o estudo das transformações geométricas é fortemente indicado pelos documentos oficiais para o Ensino Fundamental. Vejamos agora o que encontramos nas indicações para o Ensino Médio.

Além de outras concepções, uma das idéias dos documentos oficiais é que no Ensino Médio os alunos estão em condição de ampliar e desenvolver campos do conhecimento matemático dos quais devem ter se aproximado no Ensino Fundamental (BRASIL, 1999). E portanto, nos PCNEM poderíamos esperar indicações de aprofundamento do estudo das transformações geométricas. Mas não é isso que se verifica. Nos PCNEM não há uma referência explícita às transformações geométricas como ocorre com os documentos para o Ensino Fundamental. Isto talvez aconteça pela característica diferenciada dos dois documentos. No documento para o Ensino Médio os conteúdos são abordados de forma bem geral e aberta, não abordando conceitos específicos como o que ocorre no documento para o Ensino Fundamental. Talvez por isso tenham sido editados dois documentos complementares, um deles é o *PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* (BRASIL, 2002) e outro é *Orientações curriculares para o Ensino Médio* (BRASIL, 2006), e ambos tratam de tópicos mais específicos para as disciplinas. Mesmo assim, nos documentos citados, a única referência a transformações geométricas ocorre na sugestão de abordar como tema complementar o

[3]Veja o capítulo de matemática para terceiro e quarto ciclos dos Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998) nas páginas 65, 73, 81, 123 e toda a página 124.

[4]O mesmo texto ainda destaca que esta abordagem para estudar semelhança utilizando transformações geométricas, é preferível à comumente usada onde a semelhança é definida a partir de triângulos, e outras figuras poligonais não são estudadas.

aprofundamento do estudo dos números complexos, de modo que se poderia "explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano" (BRASIL, 2006, p. 94), e a eventual abordagem de simetrias como assunto para a "valorização da Matemática no seu aspecto estético" (BRASIL, 2006, p. 93).

Esta quase ausência das transformações geométricas nos PCNEM, contrastando com reiterada referência no documento para o Ensino Fundamental é também percebida por Cerqueira (2005, p. 28), que afirma que o fato está relacionado com a diferença de abordagem dos dois documentos, confirmando o que dissemos anteriormente.

Como já afirmamos, nos textos complementares acima citados não há uma referência direta ao tópico das transformações, mas indica-se o uso das "propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras" (BRASIL, 2002, p. 125) que de acordo com os parâmetros para o Ensino Fundamental devem ser estudas com a abordagem de transformações. E nesse sentido, como se espera que no Ensino Médio haja um aprofundamento das idéias e conceitos estudados no nível anterior (BRASIL, 2002, p. 124), é natural concluir que os conceitos geométricos acima citados sejam abordados via transformações geométricas.

E as matrizes? Evidentemente[5] não são mencionadas para o Ensino Fundamental, embora se recomende muito a "leitura e interpretação de dados expressos em tabelas" (BRASIL, 1998, p. 74), o que consideramos ser uma preparação para o estudo posterior de matrizes, já que estas na maioria das vezes são estudadas com uma introdução via abordagem de tabelas[6].

Pelas características já apresentadas dos PCNEM, quando se fala em assuntos gerais sem detalhar tópicos específicos, neste documento também não aparece a menção explícita ao termo matriz, bem como também não nos documentos complementares. Em todos esses documentos a álgebra citada se refere a aspectos da teoria de números e do estudo de funções.

Os documentos ainda indicam a abordagem da geometria analítica como uma oportunidade para associar "situações e problemas geométricos a suas correspondentes

[5]O termo *matriz* não aparece nas orientações curriculares para o Ensino Fundamental, pois o mesmo não costuma ser utilizado neste nível.

[6]Para mais detalhes sobre o estudo de matrizes via tabelas, veja esta dissertação a partir da página 13.

formas algébricas e representações gráficas e vice-versa" (BRASIL, 2002, p. 125). Esta associação, que nos documentos brasileiros não é abordada com muitos detalhes, é descrita de forma bem mais direta, objetiva e detalhada nos *Standards*[7] dos Estados Unidos, quando destacam como expectativas no ensino secundário (*grades* 9-12)[8] que todos os alunos consigam[9]

> compreender e representar translações, reflexões, rotações, e dilatações de objetos no plano usando esboços, coordenadas, vetores, notação funcional, e matrizes; utilizar diferentes representações para ajudar a compreender os efeitos das transformações simples e suas composições (NCTM, 2000, p. 308).

Este documento é tão mais detalhado que chega ao ponto de mostrar exemplos de atividades, e indica que o aluno deve "aprender a representar estas transformações com matrizes, explorando as propriedades das transformações usando papel gráfico e ferramentas de geometria dinâmica", bem como "compreender que a multiplicação de matrizes de transformações corresponde a compor as transformações representadas"[10] (NCTM, 2000, p. 314). Este grande detalhamento apresentado pelo documento americano contrasta muito com a forma de apresentação dos PCN.

É preciso destacar que os *Standards* citam a aplicação de "transformações e utilização de simetrias para analisar situações matemáticas" como um dos quatro objetivos do estudo de geometria[11] em todos os níveis escolares da educação básica desde a pré-escola (NCTM, 2000, p. 97). Ou seja, as transformações geométricas são indicadas para estudo em cada um dos níveis escolares, acompanhando a evolução da aprendizagem do aluno

[7]*Standards* é o documento americano publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que faz orientações sobre o ensino de matemática, semelhante aos nossos PCN. Para ter acesso ao documento on-line de forma gratuita por 120 dias, cadastre-se pelo site do NCTM em http://www.nctm.org/ ou diretamente em http://standards.nctm.org/.

[8]A educação básica é composta por doze anos, séries, ou graus de estudo, denominados *grades*. O *grade* 12, por exemplo, corresponde ao último ano do nosso Ensino Médio.

[9]Texto original: *understand and represent translations, reflections, rotations, and dilations of objects in the plane by using sketches, coordinates, vectors, function notation, and matrices; use various representations to help understand the effects of simple transformations and their compositions.*

[10]Texto original: *learn to represent these transformations with matrices, exploring the properties of the transformations using both graph paper and dynamic geometry tools*, bem como *Students should understand that multiplying transformation matrices corresponds to composing the transformations represented.*

[11]Os quatro objetivos do estudo de geometria, indicados em todos os níveis escolares americanos, são: (1) *analyze characteristics and properties of two- and three-dimensional geometric shapes and develop mathematical arguments about geometric relationships*, (2) *specify locations and describe spatial relationships using coordinate geometry and other representational systems*, (3) *apply transformations and use symmetry to analyze mathematical situations* e (4) *use visualization, spatial reasoning, and geometric modeling to solve problems.* Para mais informações verifique o documento *Principles & Standards* nas páginas: 96, 164, 232 e 308.

e evoluindo para um maior detalhamento e aprofundamento nas séries mais avançadas, culminando com a indicação direta de uso de matrizes na representação de transformações no ensino secundário.

2.1.2 Estudos já realizados

Para o levantamento de estudos já realizados, optamos pela pesquisa de dissertações em programas de pós-graduação que disponibilizam suas pesquisas em bibliotecas on-line tais como PUCRS, PUCSP, USP, UNICAMP e outras. As obras aqui mencionadas foram destacadas por possuírem alguma relação com a abordagem do ensino de matrizes e/ou transformações geométricas.

O estudo de Cerqueira (2005) apresenta[12] dados sobre a "inserção das isometrias no currículo de matemática" analisando os documentos oficiais e a prática proposta pelos livros didáticos. Verifica que há uma ruptura de abordagem das isometrias se compararmos os documentos oficiais para o Ensino Fundamental e o Médio. Na análise que faz de livros didáticos, observa uma grande diferença de abordagem entre as coleções, de modo que em algumas há referência em todos os volumes, e em outras o tema sequer é mencionado. Ainda apresenta uma sequência de atividades que foram planejadas e aplicadas para o Ensino Médio, abordando transformações geométricas no plano e no espaço, com enfoque da abordagem conceitual de cada transformação e sua representação (via desenhos) no papel. Não é analisada a representação das transformações no plano cartesiano e tão pouco a sua representação matricial.

Apresentando uma pesquisa sobre os "efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes" para o Ensino Médio, Sanches (2002) destaca que a abordagem do estudo de matrizes é, na maioria das vezes, "feita de maneira axiomática, prevalecendo a linguagem Matemática. O conceito de matriz é objeto de estudo e, poucas vezes ferramenta." Em virtude disto a autora propõe atividades partindo de situações-problema que pudessem ser resolvidas com o apoio de matrizes. Sugere situações de

[12] O título da dissertação de Cerqueira é *Isometrias: Análise de documentos curriculares e uma proposta de situações de aprendizagem para o Ensino Médio.* Optamos por apresentar o título das dissertações também nas notas de rodapé, além das referências bibliográficas, por entendermos que propiciam uma visão mais ampla do seu conteúdo no momento da leitura deste texto, complementando as informações destacadas.

aplicação de matrizes, atividades interdisciplinares com outras áreas, e realiza dinâmicas com os alunos:

> com o intuito de introduzir o conceito de soma de matriz organizou-se um grupo de meninos e outro de meninas para formar duas matrizes de mesma ordem. [...], na qual cada elemento que ocupava uma determinada posição no grupo dos meninos unia-se ao elemento que ocupava a mesma posição no grupo das meninas (exemplo: menina a_{31} com o menino b_{31}), formando uma nova matriz.
>
> Os demais conceitos foram introduzidos com dinâmicas similares às relatadas anteriormente. (SANCHES, 2002, p. 80)

O trabalho, embora apresente referências à abordagem das operações entre matrizes, como citado acima, foca a sua análise na abordagem conceitual das matrizes. A multiplicação de matrizes é referida na abordagem histórica e na análise de livros didáticos, mas não aparece nas atividades propostas pela autora. O tema "conceito de matriz" permeia toda a dissertação.

A relação entre transformações geométricas e fractais é abordada na dissertação de Eberson[13] (2004) que apresenta atividades para construção de fractais em ambientes de informática como LOGO, Cabri-Gèométre II, Geometer's SketchPad e GeomeTricks. As atividades estão baseadas em iterações que geram fractais, de modo que poucas referências são feitas às matrizes envolvidas. Em uma das atividades propostas aos alunos, as matrizes são informadas previamente, e indica-se o seu uso para a criação de um sistema de funções iteradas utilizadas na linguagem LOGO. Nas demais atividades as matrizes não são utilizadas.

Com isto pretendemos ter realizado uma síntese sobre os estudos realizados envolvendo matrizes e/ou transformações geométricas. Na análise notamos que o tema transformações geométricas aparece em vários outros estudos, além dos que foram aqui apresentados, como os de Vaz[14] (2004), Accioli[15] (2005), Mega[16] (2001), dentre outros, abordando essencialmente a parte conceitual das transformações geométricas, mas não se utilizando da representação matricial e, por isso, não foram aqui pormenorizados. Quanto

---

[13] A dissertação possui o seguinte título: *Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano.*

[14] O título deste estudo é *O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.*

[15] Este trabalho é intitulado *Robótica e as transformações geométricas: um estudo exploratório com alunos do Ensino Fundamental.*

[16] O título do estudo é *Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série: um estudo comparativo em relação ao material utilizado.*

ao tema matrizes e seu ensino, verificamos que existem poucos estudos realizados em cursos de pós-graduação, de modo que todos os que encontramos foram aqui mencionados.

2.1.3 Nos livros didáticos

Para verificar a aplicação das orientações dos documentos oficiais em sala de aula, decidimos analisar coleções de livros didáticos[17]: duas do Ensino Fundamental e cinco do Ensino Médio. Todas as coleções analisadas neste texto foram avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio[18] (PNLEM).

Analisando a Coleção Novo Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELOS, 2006), que se destina aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental, verificamos que a única menção às transformações geométricas ocorre no último volume, quando é utilizado um único exemplo de ampliação[19] para introduzir o conceito de semelhança. Há também três exercícios para aplicação de ampliações e reduções de figuras[20]. Não é utilizado o plano cartesiano[21] nesta abordagem, embora o livro já o tenha utilizado anteriormente para o estudo de funções. Outras transformações como rotação, translação e reflexão, não são abordadas pela coleção.

Outra coleção do Ensino Fundamental analisada foi Matemática e Realidade (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005), que aborda a ampliação e redução de figuras com papel quadriculado em alguns exemplos e exercícios[22] do último volume, mas também sem

[17]O leitor poderá encontrar a análise de outras coleções de livros didáticos em diversas dissertações, como por exemplo na de Cerqueira (2005, p. 30-62) que traz uma análise de quatro coleções de livros didáticos em relação a abordagem de isometrias (transformações geométricas que preservam ângulos e distâncias). Sanches (2002) também traz uma análise detalhada de seis livros didáticos.

[18]Para mais detalhes veja o Guia de livros didáticos de 2008 do PNLD (BRASIL, 2007), e o catálogo do PNLEM de 2006 (BRASIL, 2004) e de 2009 (BRASIL, 2008). Estes documentos estão disponíveis em http://www.fnde.gov.br O catálogo do PNLEM de 2009 traz comentários sobre oito obras recomendadas para aquisição pelo PNLD, e três delas foram analisadas para esta dissertação. O Catálogo do PNLEM de 2006 apresenta onze obras avaliadas, e duas delas foram analisadas neste texto. Já o Guia do Livro Didático de 2008 do PNLD para o Ensino Fundamental, traz a resenha de dezesseis obras, e duas delas foram analisadas para este estudo. Tanto o PNLD quanto o PNLEM são instrumentos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) do MEC, responsável pela alocação dos recursos federais na educação.

[19]Veja o volume 4 da obra de Andrini (2006) na página 142.

[20]Veja o volume 4 da obra de Andrini (2006) nas páginas 144 e 145.

[21]No exemplo e em um dos exercícios é utilizado papel quadriculado, mas sem a indicação de coordenadas.

[22]Veja o volume 4 da obra de Iezzi (2005) na página 111.

o uso da representação no plano cartesiano. Outras transformações não são estudadas, e os outros volume da coleção não abordam transformações geométricas.

A primeira coleção para o Ensino Médio que analisamos é de Smole e Diniz (2005), que no segundo volume introduz o conceito de matriz a partir de um exemplo de tabela numa planilha eletrônica. No mesmo capítulo são apresentados exemplos de "aplicação" de matrizes para estabelecer se há vôos diretos entre duas cidades, controle de tráfego, etc. Para a multiplicação de matrizes é apresentado um exemplo de notas de um bimestre com pesos diferentes para cada nota, e a média do aluno é obtida como a multiplicação das matrizes de notas e pesos. Gostaríamos de salientar que, além de não ser natural, essa abordagem complica desnecessariamente um problema simples, há muito tempo conhecido e resolvido de outra maneira pelos alunos[23]. Abordagens deste tipo, quando os alunos já possuem solução mais simples, costumam sofrer rejeição em sala de aula.

Nos exercícios são apresentados diversos exemplos clássicos envolvendo produção de itens diferentes por uma indústria, com respectivo custo, número de acessórios, ou outra relação com os itens produzidos, com o objetivo de que se obtenha determinadas respostas com o auxílio da multiplicação e adição de matrizes.

Nesta obra aparece uma referência a transformações geométricas, e ocorre no terceiro volume quando se apresenta a relação da multiplicação de números complexos com a rotação e homotetia das respectivas representações dos números no plano Argand-Gauss. O conjugado de um número complexo z, por exemplo, é interpretado como a reflexão deste em torno do eixo horizontal. Nenhuma outra abordagem das transformações geométricas é realizada.

Outra obra para o Ensino Médio analisada foi a coleção de Longen (2003) onde não encontramos referência ao tema transformações geométricas. As matrizes são introduzidas via conceito de tabelas, seguidas de definições algébricas formais. As operações são definidas formalmente, acompanhadas da listagem de propriedades que, no caso da multiplicação, são verificadas por exemplos.

A operação de multiplicação de matrizes é introduzida com o auxílio do exemplo da figura 2.1, mas parece que o próprio autor não tem muita convicção na clareza e

[23]O processo de cálculo da média ponderada em geral é estudado na 6ª série do Ensino Fundamental.

objetividade pedagógica do exemplo, pois na margem do livro para o professor destaca que o mesmo "deverá ser amplamente discutido para que se possa compreender o procedimento adotado nesta operação" (2003, p. 61).

Observe os números de vitórias, empates e derrotas de cada time:

	Vitória	Empate	Derrota
São Paulo	2	1	0
Palmeiras	1	0	2
Corinthians	2	0	1
Santos	0	1	2

Vamos associar a tabela acima com a matriz A do tipo 4 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Professor: o exemplo dado aqui para falar de multiplicação entre matrizes deverá ser amplamente discutido para que se possa compreender o procedimento adotado nesta operação.

Conforme o regulamento estabelecido para essa fase do campeonato, a vitória corresponde a 3 pontos, o empate, a 1 ponto e a derrota, a nenhum ponto. Observe o quadro e a matriz correspondente B:

	Número de pontos
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figura 2.1: Exemplo proposto na página 61 da obra de Longen (2003).

O exemplo é seguido da definição formal e de exemplos puramente algébricos, para que o aluno treine o processo de multiplicação. Os exercícios em sua maioria são cálculos algébricos e alguns utilizam a multiplicação com "aplicações frágeis e fictícias", pois apresentam situações que de modo geral não necessitam de matrizes para serem abordadas, como:

10. Dois alunos, João e Victor, apresentaram a seguinte pontuação em uma prova de Matemática e em outra prova de Português:

Aluno	Matemática	Português
João	40	60
Victor	90	30

a) Se o peso da prova de Português é 2 e o peso da prova de Matemática é 3, obtenha, por meio do produto de matrizes, a matriz que fornece a pontuação total desses dois alunos.

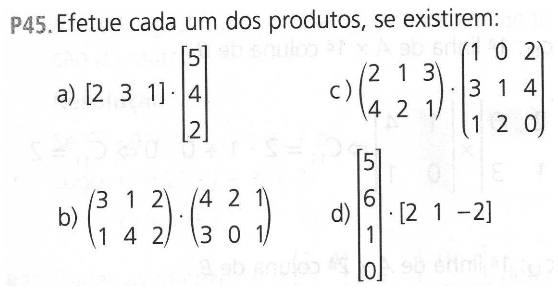
b) Qual deve ser o peso da prova de Matemática, sendo 3 o peso da prova de Português, a fim de que João e Victor apresentem mesma pontuação final?

Figura 2.2: Exercício da página 67 e 68 (LONGEN, 2003).

Novamente problemas que podem ser resolvidos com média ponderada, estudada no Ensino Fundamental e que propicia solução bem mais simples.

A terceira obra analisada foi a coleção para o Ensino Médio de Vasconcellos, Scordamaglio e Cândido (2004) que não aborda o estudo de matrizes e tampouco as transformações geométricas.

A obra[24] de Youssef, Soares e Fernandez (2004) apresenta o estudo de matrizes totalmente via definições algébricas com exemplos e exercícios totalmente abstratos, sem referência a aplicações, tais como mostra a figura:



P45. Efetue cada um dos produtos, se existirem:

a) $[2\ \ 3\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}5\\4\\2\end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2&1\\3&0&1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&4\\1&2&0\end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}5\\6\\1\\0\end{bmatrix}\cdot[2\ \ 1\ \ -2]$

Figura 2.3: Exercício da página 202 da obra de Youssef, Soares e Fernandes (2004).

As transformações geométricas não são abordadas nesta obra.

Analisamos também a obra de Dante (2008) em volume único, que apresenta o conceito de matriz a partir de uma tabela contendo as informações sobre pixels de uma imagem. A multiplicação de matrizes é apresentada como definição, e são apresentados exemplos como a pontuação de uma equipe de futebol que pode ser obtida pela multiplicação de vitórias, empates e derrotas, pela respectiva pontuação por jogo, semelhante ao exemplo apresentado na figura 2.1. No final do capítulo sobre o estudo de matrizes, a autor também apresenta duas páginas[25] com a aplicação de matrizes na computação gráfica, analisando rotações, escala e translação, e a composição destas que é obtida com a multiplicação das matrizes correspondentes[26]. Destacamos que é a única obra em que verificamos a relação entre matrizes e transformações geométricas. No entanto, estas relações são apresentadas como aplicações das matrizes, e não como ponto de partida para o estudo do conceito. O estudo do conceito de matriz, e das respectivas operações, é feita de forma semelhante às outras obras destacadas no presente texto.

[24] Analisamos uma versão anterior daquela avaliada pelo PNLEM 2009.

[25] Vejas as páginas 252 e 253 da obra de Dante (2008).

[26] Em um dos exercícios sobre esta aplicação na computação gráfica são mencionadas as coordenadas homogêneas. Veja mais sobre coordenadas homogêneas na página 63 desta dissertação.

2.2 As concepções pedagógicas da proposta

Levando em consideração as orientações de documentos oficiais e outros estudos, comparados com o que observamos nos livros didáticos, passamos a referir e salientar as concepções pedagógicas que conduziram o trabalho de planejamento, elaboração e implementação da sequência didática. Vamos colocar nossas intenções na proposição das atividades, considerando a questão pedagógica, curricular e metodológica.

2.2.1 Quanto à atividade

Frente ao dados apresentados anteriormente, precisamos destacar que a sugestão de uma sequência didática ocorre pois se pretende apresentar algo de diferente. São exatamente algumas destas intenções, que consideramos diferenciadas, que passamos a elencar.

Começamos por destacar que o primeiro objetivo é que a atividade faça o estudo de conceitos via abordagem histórica. Cabe destacar que não é o fato de citar datas e nomes, mas de propor a atividade de modo que se refaçam os passos na obtenção original e histórica destes conceitos. Isto porque, de acordo com os PCN, "a História da Matemática pode oferecer[27] uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem" e "em muitas situações [...] pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns 'porquês' e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento" (BRASIL, 1998, p. 42, 43). Com o estudo das transformações geométricas e de sua representação matricial, esperamos que o aluno, além de "compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico" (BRASIL, 2002, p. 117), possa perceber que as operações entre matrizes não foram definidas de forma arbitrária, mas que estão relacionadas com outros conceitos matemáticos.

Na análise dos livros didáticos, observamos que todas as obras apresentam a multiplicação de matrizes via definição e sugerem exemplos de aplicação da operação. Estes exemplos propostos são frágeis e artificiais, pois propõem situações de uso da multiplicação em problemas que possuem abordagem mais óbvia e simples sem o uso

[27]Destacamos que de fato isso pode ocorrer em muitos casos mas não sempre, poi existem situações que o processo histórico é muito laborioso e complexo.

de matrizes. É para contrapor estas situações que propomos o estudo das transformações geométricas, fonte e origem das operações matriciais definidas por Arthur Cayley[28]. Além da multiplicação, as transformações geométricas propiciam o estudo da adição de matrizes, e principalmente evidenciam as propriedades de comutatividade (ou não comutatividade) destas operações matriciais, que são percebidas facilmente na observação gráfica e geométrica.

Outra vantagem da abordagem via transformações é propiciar uma melhor compreensão da maneira peculiar de multiplicarmos matrizes. Afirmamos isto pois estamos acostumados a ouvir em sala de aula questionamentos como: "porque na adição somamos elementos correspondentes e na multiplicação não?", "porque a multiplicação tem esta forma estranha?", "poderíamos definir a multiplicação de matrizes de outra maneira?", etc.

A sequência didática também pretende resgatar ou motivar o estudo de conceitos que muitas vezes não são abordados no Ensino Médio: os fractais (como tema complementar) e principalmente as transformações geométricas. No que se refere às transformações geométricas, destacamos que de acordo com estudos de Mabuchi[29] (2000) e Luz[30] (2007), o assunto está negligenciado nas salas de aula e na maioria das obras didáticas, embora há muito tempo "faça parte de propostas curriculares no Brasil e em outros países" (MABUCHI, 2000).

Esta motivação do estudo das transformações geométricas também se justifica por considerarmos que o ensino de geometria é por vezes negligenciado ou reduzido no Ensino Médio, sendo que muitas vezes se resume a cálculos de áreas e volumes de alguns sólidos[31]. O abandono do ensino de geometria já é bastante conhecido, estudado e confirmado no estudo de Pereira[32] (2001) que apresenta oito dissertações sobre o tema.

---

[28]Para mais detalhes sobre os estudos de Cayley, veja as páginas 58 a 64 deste texto. Cabe ainda destacar que as primeiras referências ao que chamamos hoje de matriz, ocorre bem antes de Cayley. Um livro chinês de mais de 2000 anos, apresenta um problema com um sistema de equações do 1º grau, que é resolvido com operações sobre os coeficientes do sistema, dispostos numa tabela (Veja mais detalhes na obra de Boyer (2003).). O destaque de Cayley está na "elaboração" da estrutura algébrica das matrizes.

[29]Estudo com o título de *Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores.*

[30]O título da dissertação é *Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais.*

[31]E mesmo estes cálculos apresentam muito mais uma conotação algébrica, na obtenção e aplicação de fórmulas, do que de fato uma interpretação ou raciocínio geométrico.

[32]O título do estudo é *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.*

Um dos motivos levantados pela autora é a omissão da geometria em livros didáticos, o que passa a confirmar o que observamos na nossa análise em relação à ausência das transformações geométricas nos livros escolares.

A geometria analítica possibilita relacionar conceitos e assuntos matemáticos que na maioria das vezes são abordados separadamente: matrizes e geometria. Esta abordagem possibilita ao aluno "construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles" (BRASIL, 2002, p. 125) o que não deixa de ser uma abordagem interdisciplinar, ou pelo menos vai contra um currículo fragmentado e linear estabelecido.[33]

E por último destacamos o emprego de recursos de informática, não como uma novidade ou uma estratégia diferenciada, mas como um recurso que deve fazer parte do leque de opções do docente tal qual fazem parte o giz, o livro didático, o projetor, o jogo, etc. E desta forma, as atividades devem ser desenvolvidas com os recursos que melhor se adequam a cada momento. Neste contexto, a atividade proposta neste trabalho possui momentos planejados para o laboratório de informática e outros para a sala de aula comum.

Segundo D'Ambrósio, a adoção de recursos tecnológicos em sala de aula deve ocorrer com total naturalidade pelos docentes, "ou serão atropelados pelo processo e inúteis na sua profissão" (1996, p. 60). Destacamos o forte apelo didático que os recursos de informática possuem quanto à visualização e principalmente por possibilitar o movimento, em confronto ao quadro ou papel estáticos.

2.2.2 Quanto ao currículo

O que é currículo? Podemos entendê-lo como uma "estratégia para a ação educativa" (D'AMBROSIO, 1996) que possui três componentes: os objetivos, os conteúdos e métodos.

Como primeiro ponto de partida para pensarmos o currículo temos as orientações dos documentos oficiais encontradas nos Parâmetros Curriculares e textos complementares. Os objetivos gerais para cada nível, série ou disciplina, muitas vezes são

[33]Para o leitor que, além de utilizar a geometria analítica para relacionar geometria e álgebra, estiver interessado numa abordagem histórica para este conceito, veja o estudo de Franzon (2004).

estabelecidos no contexto de cada unidade escolar, em reuniões coletivas ou por diretrizes escolares. E no que se refere a conteúdos específicos, a liberdade individual dos professores na escolha dos objetivos e métodos aumenta. É importante notar que estes componentes possuem um viés de escolha, de opção, por parte do docente. Se levarmos em consideração esta flexibilidade curricular, não podemos falar em o currículo, mas em um currículo. Um currículo que se concretiza em sala de aula, decorrente das escolhas da unidade escolar e do próprio professor.

Quanto aos métodos é que vemos a maior liberdade de escolha para o professor. É claro que se deve considerar questões gerais de metodologia, no entanto observamos que é neste componente que o docente possui maior autonomia na caracterização da metodologia que irá utilizar.

E finalmente os conteúdos. O docente possui liberdade nessa escolha? Embora se possa considerar uma listagem de conteúdos predefinida pelos livros didáticos, pelos vestibulares, ou mesmo pela *herança cultural*[34], percebemos que o professor faz escolhas quando define quais conteúdos terão maior ou menor ênfase durante o ano, e mesmo aqueles que serão abandonados por *falta de tempo*. São opções e escolhas do docente que compõem um currículo.

É claro que nestas opções e escolhas que compõem um currículo, "é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático" (BRASIL, 1999, p. 43) além da relevância do tema no processo de ensino e aprendizagem que devem nortear as escolhas dos docentes. Pensamos que a sequência didática proposta possui este potencial para interligar conceitos e conteúdos e, por isso, pode integrar as escolhas de conteúdos e metodologias que o docente faz.

A sequência didática que propomos não espera que o professor abandone outros conteúdos, mas que possibilite o acréscimo e o resgate de conceitos quase esquecidos no contexto escolar como as transformações geométricas, e a inserção de conteúdos matemáticos de desenvolvimento recente, ou que ainda estejam em desenvolvimento, como a teoria do caos e a geometria fractal. Estes conteúdos, por "apresentarem a matemática

[34]Estamos chamando de herança cultural o fato de conteúdos ou conceitos serem abordados por herança, de um ano para outro, de professores mais experientes para mais jovens, ou apenas porque sempre foi assim.

do futuro[35], são mais interessantes para o jovem" (D'AMBROSIO, 1996, p. 59) e seus conceitos são acessíveis até no nível primário, mesmo que superficialmente.

Além de tudo o que foi apresentado, em primeiro lugar se encontra a forma diferenciada da abordagem do estudo de matrizes que a sequência didática apresenta: apresentando justificativas para a forma da multiplicação peculiar, destacando a origem histórica das operações e sua relação com as transformações geométricas, o estudo das propriedades das operações matriciais através das transformações, e propiciando uma aplicação do conceito de matrizes que vá além dos exemplos superficiais dos livros didáticos.

Frente ao que foi exposto, o leitor poderia questionar: se um currículo é composto de escolhas, poderíamos escolher não tratar do estudo de matrizes? A resposta é afirmativa e esta é uma situação que ocorre com a coleção para o Ensino Médio de Vasconcellos, Scordamaglio e Cândido (2004), onde os autores optaram por não tratar do estudo de matrizes. No entanto, caso se opte por discutir o conceito, que é o que nós defendemos, que esta discussão seja feita por uma abordagem que propicie, além do que destacamos anteriormente, interligações com outros conceitos matemáticos, e que gere motivação e curiosidade nos alunos, e não apenas um treinamento de procedimentos algébricos.

Uma das formas de currículo que a sequência didática deste trabalho visa se opor, é o currículo linear ou sequencial, onde os conteúdos são tratados de forma isolada e compartimentada.

Segundo Pires (2000, p. 9),

> essa linearidade [...] conduz a uma prática educativa excessivamente fechada, em que há pouco espaço para a criatividade, para a utilização de estratégias metodológicas [...], para o estabelecimento de relações entre os diferentes campos da matemática, enfim, para a consecução de metas colocadas para o ensino de Matemática pelas recentes propostas curriculares.

Propomos a organização de um *currículo em rede* conforme sugere Pires (2000), formado por diversos pontos (conteúdos, conceitos) interligados por caminhos (relações) que não sejam únicos. Esta forma de conceber o currículo propicia a relação entre diferentes áreas da matemática ou de outras disciplinas, ao mesmo tempo que necessita de constante construção e renovação.

[35]Nos parece que a expressão mais adequada seria matemática em desenvolvimento recente ou ainda em desenvolvimento.

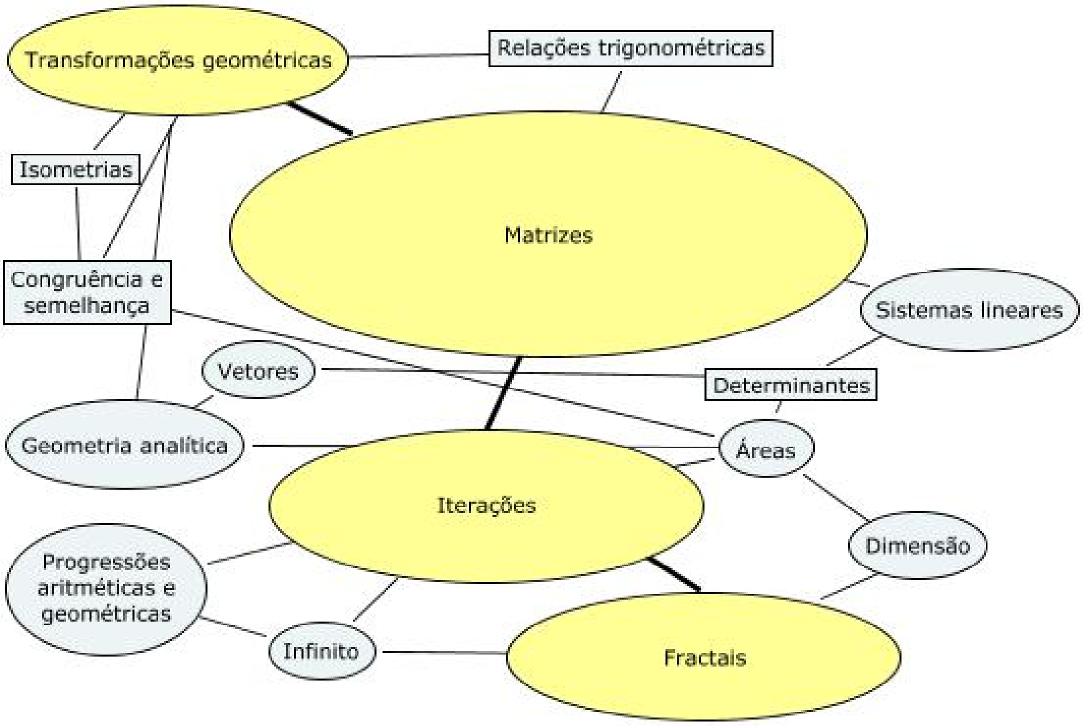


Figura 2.4: Esquema do "currículo em rede" da sequência didática

Deste modo, a sequência didática sugerida possui um eixo que parte das transformações geométricas e vai até a geração de algumas figuras fractais, de modo que o centro de toda a atividade são as matrizes de cada transformação. Toda a atividade está interligada com uma série de outros conceitos matemáticos, que podem ser mais ou menos aprofundados de acordo com o planejamento e os objetivos de cada momento. A figura 2.4 acima apresenta a referida rede curricular para nossa sequência. As elipses maiores destacam os conceitos que tiveram maior importância em nosso planejamento. Os conceitos nos retângulos não foram abordados na nossa implementação, mas são sugestões para o futuro.

É claro que esta rede pode e deve sofrer modificações em cada aplicação e implementação futura, inclusive no redimensionamento da importância de cada conceito, bem como de outras interligações possíveis.

2.2.3 Quanto à metodologia

Em relação à metodologia precisamos destacar duas situações: a metodologia do professor em sala de aula na implementação da sequência didática, e a metodologia do trabalho da dissertação.

Quanto à metodologia do docente na implementação da sequência, consideramos que cada profissional tem liberdade na definição desta, no entanto, optamos por apresentar a que julgamos mais adequada dada a característica da atividade, e que foi utilizada no estágio e primeira implementação em sala de aula.

A sequência didática foi dividida em nove atividades que foram planejadas para duas horas-aula cada. Cada atividade é apresentada ao aluno em papel impresso[36], de modo a reduzir o tempo com cópias do quadro-negro. Cada atividade foi planejada em três momentos. Iniciamos com um momento para a orientação geral da tarefa por parte do professor e dúvidas iniciais. No segundo momento, os alunos fazem a atividade, e o professor atua como motivador e questionador. Sugerimos que o docente não apresente respostas prontas, mas que provoque reflexões que possam levar à solução da dúvida entre os colegas. No terceiro momento, sugerimos o compartilhamento com toda a turma dos resultados obtidos por cada aluno ou dupla, de modo que os alunos apresentem suas idéias e confirmem ou contestem os resultados dos colegas. O professor não deve se restringir a confirmar ou refutar resultados, mas motivar discussões que conduzam para os resultados corretos, e apenas no final fazer um rápido resumo das idéias principais apresentadas. Pensamos que esta forma de atuação do docente privilegia a participação e criatividade dos alunos, valorizando o trabalho e a participação de cada um. Desta maneira, o aluno passa a fazer parte de fato da sala de aula, e não apenas está ali como ouvinte ou cumpridor de ordens.

Em relação à metodologia do nosso trabalho na obtenção de uma sequência didática para o ensino de matrizes, optamos pela *engenharia didática* dadas as suas características que são destacadas por Artigue (1996, p. 196): "um esquema experimental baseado em realizações didácticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

A engenharia didática se coloca como uma metodologia de pesquisa e investigação em sala de aula, baseada no planejamento, elaboração, implementação, observação e análise de sequências didáticas. A teoria da engenharia didática é um referencial para a produção de material ou conhecimento, envolvendo tanto a prática de pesquisa quanto a

[36]No caso da nossa implementação da sequência didática, as folhas entregues para cada aluno eram posteriormente recolhidas para servirem de subsídio para análise posteriores e avaliação de nosso trabalho. Em futuras aplicações o material ficará com o aluno.

prática de ensino. A própria sala de aula e o fazer do professor são integrantes do processo de pesquisa e validação das atividades de ensino propostas.

Segundo Artigue (1996) a engenharia didática possui quatro fases:

i. Análises prévias;

ii. Concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia;

iii. Experimentação;

iv. Análise *a posteriori* e avaliação.

É importante destacar que a engenharia didática se diferencia de outras metodologias pela característica da validação ou avaliação. Em outros métodos a validação costuma ser externa, ou seja, ocorre com a comparação com turmas experimentais e grupos de referência, por exemplo. Na engenharia didática a validação é interna, com o confronto da análise *a priori* e da análise *a posteriori*, confirmando ou não as "hipóteses envolvidas na investigação" (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Nesta dissertação, considerando a sequência didática proposta, as análise prévias foram realizadas no início deste capítulo quando foram analisados documentos oficiais e estudos anteriores, apresentando as orientações gerais para o ensino dos temas centrais da proposta. Complementando esta etapa, ainda apresentamos na seção 2.1.3 a verificação da abordagem feita por alguns livros didáticos.

A concepção e análise *a priori* da sequência didática foram relatadas na seção 2.2.1 deste capítulo e em todo o próximo capítulo, quando serão apresentadas a elaboração, o planejamento e as expectativas de cada uma das atividades da sequência.

A experimentação e análise *a posteriori* serão apresentadas no capítulo 5. A análise *a posteriori* está apoiada nos dados observadas e atividades dos alunos recolhidas durante a implementação da sequência didática.

A avaliação ou validação do processo será descrita no capítulo 6, quando serão confrontadas as análises *a priori* e *a posteriori*.

3 ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE

Neste capítulo apresentamos as atividades da sequência didática que foram planejadas e elaboradas antes da aplicação. É claro que não se pretendia que fosse um material definitivo, e que alterações ou modificações poderiam ocorrer durante e depois da implementação. Alterações de fato ocorreram e serão discutidas e justificadas posteriormente neste texto.

A sequência didática planejada consiste na exploração de algumas transformações geométricas, com o objetivo último de gerar algumas figuras fractais a partir de processos iterativos com o uso de alguns aplicativos computacionais que serão apresentados posteriormente.

As atividades exploram as transformações geométricas planas que de modo geral não são estudadas no ensino médio. Pretende ser uma forma de justificar o estudo de matrizes no ensino médio, e também de apresentar a origem histórica da multiplicação de matrizes. Entendemos que o professor deve atuar de modo que os próprios alunos cheguem a conclusões matemáticas, sem que haja a necessidade de muitas definições iniciais.

A idéia geral da sequência didática é que pretendemos a partir de uma interpretação geométrica das transformações geométricas, obter sua representação algébrica em forma de matrizes. Isto será realizado com a representação das transformações no plano cartesiano e com a consequente análise da relação entre coordenadas dos vértices das figuras transformadas. Esta interpretação algébrica das transformações geométricas, levando em consideração algumas propriedades geométricas, nos permite estudar as operações entre matrizes e também obter algumas figuras fractais em softwares específicos.

As idéias iniciais para a elaboração da sequência didática que será apresentada, surgiu durante a leitura dos artigos de Gluchoff (2006) que apresenta algumas possibilidades de construções de fractais destacando a análise da relação entre coordenadas, e de Bannon (1991) que relata o uso de transformações geométricas para gerar fractais. Junto com os artigos, verificamos que os *Standards* também faziam uma referência explícita à analise de relações entre coordenadas no estudo de transformações e matrizes. Além disso, é muito importante destacar que a obra *Fractals for the Classroom* de Peitgen et al. (1999) foi grande fonte de inspiração para as atividades aqui propostas, dado que apresenta diversas atividades relacionadas ao tema fractais, sendo que algumas delas também tratam da análise das transformações geométricas e sua representação matricial.

Dentro da concepção da engenharia didática, este capítulo tem o objetivo de colocar a concepção e análise *a priori* das situações da sequência didática, apontando a elaboração das atividades e os objetivos que pretendem ser alcançados com a mesma.

É importante destacar que na análise *a priori* e apresentação das atividades a seguir, serão utilizados diversos termos e conceitos sem uma definição inicial. Caso o leitor tenha dúvidas em relação a algum conceito comentado, poderá obter estas informações no capítulo 4, página 40 deste texto.[1]

A sequência didática elaborada foi dividida em nove atividades, de modo que cada uma pudesse ser desenvolvida em duas horas-aula. No texto que segue, as atividades foram separadas em quatro seções (blocos), de acordo com as características das atividades. Optamos por apresentar no texto apenas uma idéia geral de cada atividade e os objetivos que pretendemos alcançar com sua implementação. As atividades na íntegra se encontram no *Apêndice B* na página 98. A seguir passamos a descrever as atividades que elaboramos e posteriormente implementamos.

3.1 Estudando e analisando transformações.

Neste bloco de atividades figuram aquelas de primeiro contato com as transformações geométricas, e da obtenção de suas respectivas representações matriciais. Nesta primeira etapa da sequência didática não sugerimos o estudo da translação, o que ocorrerá na atividade 6 a presentada na página 36. Este bloco de atividades, conforme citado anteriormente, possui inspiração no artigo de Gluchoff (2006), nos *Standards* (NCTM, 2000) e no livro de Peitgen et al. (1999).

[1]Optamos por apresentar a fundamentação matemática dos conceitos envolvidos, depois da apresentação das atividades, pois consideramos que seria mais didático primeiro apresentar um motivo para estudar uma série de conceitos que estão relacionados com a atividade. Isto fará com que o leitor perceba, no momento da leitura da fundamentação matemática, a necessidade da apresentação de alguns conceitos e a não apresentação de outros. Foi apenas uma opção nossa, pois preferimos primeiro ter uma noção geral do que se pretende, para que então se tenha uma motivação de fazer um estudo mais aprofundado e detalhado dos conceitos envolvidos. No entanto, caso o leitor prefira, poderá ler primeiro o capítulo 4 e em seguida o capítulo 3, sem que haja perda de entendimento do texto.

3.1.1 Atividade 1 - primeiro contato com a rotação e a reflexão.

É uma atividade inicial para que os alunos possam reconhecer as transformações de rotação e reflexão, identificando características e peculiaridades. O professor poderá trazer exemplos diversos destas transformações com imagens e exemplos de simetrias, para que assim os alunos possam fazer suas observações. Depois deste contato inicial o assunto se restringe à transformação de reflexão, e os alunos são incentivados a representar essa transformação com desenhos livres. Continuando a atividade, será fornecido material para que a reflexão seja também representada no plano cartesiano, dando atenção especial a polígonos que possuam vértices indicados por coordenadas.

O objetivo da atividade é apresentar algumas transformações geométricas aos alunos, de modo que identifiquem peculiaridades, características e regularidades.

3.1.2 Atividade 2 - identificando relações entre as coordenadas.

Nesta atividade esperamos que os alunos identifiquem relações entre as coordenadas dos vértices das figuras iniciais e das transformadas. Estudaremos as reflexões em torno dos eixos coordenados (abscissas e ordenadas) e das retas $y = x$ e $y = -x$, bissetrizes dos quadrantes. Anotando os vértices numa tabela e observando alguns casos particulares, pretendemos que os alunos consigam estabelecer genericamente a relação entre as coordenadas dos vértices da figura inicial e final. A partir desta relação se consegue um sistema de duas equações envolvendo as coordenadas citadas.

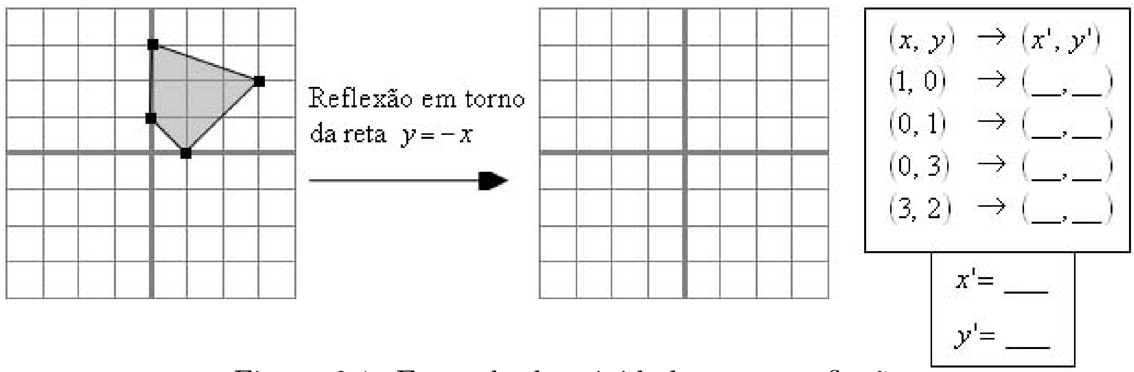


Figura 3.1: Exemplo de atividade para a reflexão.

Mostraremos aos alunos que estas equações poderiam ser escritas de forma diferente: a forma matricial[2]. Neste nível, basta que o aluno identifique a matriz como uma tabela com os coeficientes do sistema de equações. A matriz dos coeficientes assim obtida será chamada de matriz da transformação. Talvez não seja necessário usar o termo "matriz" já desde o início, e também não se espera discutir a multiplicação[3] de matrizes na representação do sistema. Basta que os alunos identifiquem a tabela com coeficientes do sistema. Pode-se começar falando em tabelas de valores, e em atividades posteriores falar que estas tabelas são chamadas de matrizes em matemática.

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -x \\ y' = y \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{array}\right. \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Para concluir a atividade os alunos são convidados a encontrar a matriz (ou tabela de coeficientes) de cada uma das quatro reflexões estudadas até aquele momento.

3.1.3 Atividade 3 - identificando as matrizes das rotações.

Tendo já estudado as reflexões, passamos a analisar agora as rotações centradas na origem. O estudo se restringe às rotações com ângulos de giro múltiplos de 90°. Isto para que não seja necessário nenhuma relação trigonométrica[4]. Obter as relações entre as coordenadas dos vértices da figura inicial e final, e a partir destas, a matriz de cada rotação estudada, tal como fora feito na atividade anterior com as reflexões. Fazer com que os alunos observem uma certa semelhança entre as matrizes das rotações e reflexões estudadas, e que, embora semelhantes, produzem resultados muito diferentes[5]. Para que

[2]Este é um momento que julgamos necessário uma intervenção mais preponderante do professor mostrando outras formas de representação do sistema de equações. Isso porque provavelmente os alunos teriam muitíssimas dificuldades de ter esta "inspiração" e representar o sistema a partir de matrizes. Basta pensarmos na origem histórica e percebemos que esta etapa não foi imediata e nem tão natural, e portanto não podemos esperar isto dos alunos.

[3]A multiplicação de matrizes será abordada em outra atividade, o que fará com que a representação matricial do sistema de equações seja algo mais razoável.

[4]Precisamos salientar que o fato de não se tratar das relações trigonométricas foi apenas uma opção nossa para não fugirmos do foco da atividade em si. Não entanto, é importante notar que para a atividade normal de sala de aula seria um riquíssimo momento para relacionarmos com a trigonometria, e assim associarmos mais um tópico da matemática em torno da atividade além da álgebra e geometria: a trigonometria.

[5]As matrizes das reflexões e rotações estudadas possuem entradas com os valores $1, -1$ e 0 e por isso são visualmente parecidas.

tal observação aconteça, sugerimos que os alunos apresentem um resumo das matrizes estudadas e o nome da respectiva transformação geométrica.

O objetivo desta atividade é semelhante ao da anterior, muda apenas a transformação estudada. Espera-se que o aluno amplie sua visão sobre o conteúdo quando fizer o comparativo entre as matrizes de transformações diferentes.

3.1.4 Atividade 4 - "praticando" no aplicativo MVT.

Após um momento inicial de primeiro contato com o aplicativo, os alunos devem confirmar, com a ajuda do aplicativo MVT (Mathematical Visualization Toolkit), que as matrizes das rotações e reflexões obtidas nas atividades anteriores estão corretas[6]. Para tanto solicitaremos que os alunos observem os valores obtidos no resumo da atividade anterior, e os insiram no aplicativo observando o resultado obtido. Caso haja alguma discordância do resultado obtido e do previsto, propiciar uma discussão entre os alunos.

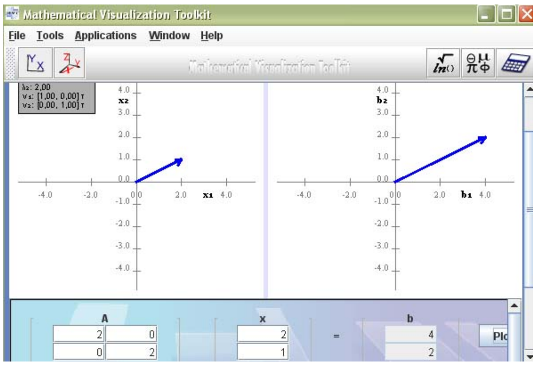


Figura 3.2: O aplicativo MVT.

Prosseguindo na atividade, serão apresentadas matrizes com valores diferentes de 1, -1 e 0, e espera-se[7] que os alunos concluam que estas matrizes geram "dilatações" e "contrações" de acordo com o valor das entradas de cada matriz[8]. Em parte isto pode ser observado como a multiplicação de matriz por escalar, embora nem todas as matrizes apresentadas sejam desta forma.

[6]Convém notar que é a primeira atividade prevista para ser realizada no laboratório de informática. As atividades anteriores estão previstas para sala de aula normal, mas nada impede de que as mesmas também possam ser realizadas no laboratório de informática utilizando algum aplicativo ou applet construído por exemplo com o Régua e Compasso ou Cabri-Géometre.

[7]Note que mesmo as matrizes compostas apenas com esses valores, podem gerar dilatações.

[8]Caso se considere razoável, pode-se motivar a observação de que estas transformações "deformam" as figuras, enquanto que nas atividades estudadas anteriormente isto não acontecia.

Analisando a figura 3.2 notamos que o MVT apresenta[9] as transformações, dadas pelas matrizes, aplicadas a um vetor. Isto traz uma limitação para a atividade, pois nem sempre vamos ter uma idéia correta do que acontece com o todo, analisado apenas o que acontece com um vetor, principalmente quando estudamos apenas alguns casos particulares. Mesmo para quem já conhece as transformações geométricas, poderá ter dificuldades de interpretar a transformação de cisalhamento[10], por exemplo, no aplicativo MVT.

3.2 Recursos de informática de apoio

Antes de continuarmos no relato da elaboração das atividades, vamos fazer uma breve apresentação dos aplicativos utilizados ou que poderão ser utilizados na aplicação da atividade em sala de aula.

Inicialmente tínhamos previsto apenas a utilização do MVT e do Shapari. Como o MVT se mostrou limitado para o que queríamos, elaboramos alguns applets em Java que propiciassem uma melhor visualização das transformações em estudo.

Meses depois da implementação desta atividade tomamos conhecimento do aplicativo GeoGebra. Este aplicativo não foi utilizado na nossa implementação, mas com certeza será utilizado na próxima oportunidade, principalmente no que se refere à exploração inicial das transformações geométricas. Em virtude disso está colocado aqui.

3.2.1 MVT

O site *Multimedia Educational Resources for Learning and Online Teaching* (MERLOT), disponível em http://www.merlot.org, apresenta uma quantidade grande de material para diversas áreas de ensino. Neste repositório encontramos o MVT, que pretende ser uma ferramenta para visualização de representações gráficas em matemática, além de apresentar soluções algébricas de algumas situações. Abrange desde a solução de sistemas lineares, até a representação de séries de Fourier. Possui grande facilidade de uso, pois não requer instalação e pode ser executado diretamente de um CD ou pen drive.

[9] Para estudar as transformações no MVT, devemos acessar o menu *Applications* e item *2D Matrix Mapping App*, conforme indica a figura 3.3 na página 30.

[10] Para mais informações sobre o cisalhamento, veja página 52 deste texto.

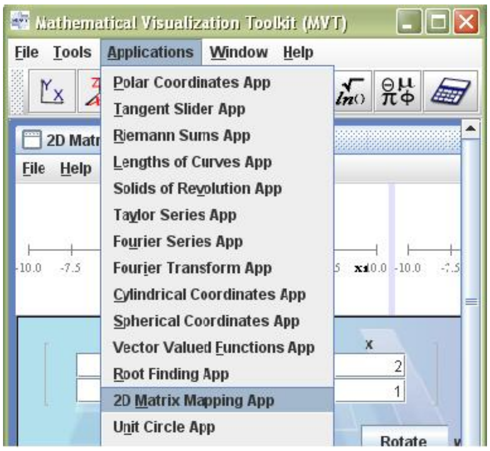


Figura 3.3: Interface do MVT

O aplicativo foi desenvolvido pelo departamento de matemática aplicada da *University of Colorado at Boulder*, e também está disponível no endereço do departamento em http://amath.colorado.edu/java/. É totalmente gratuito e também pode ser utilizado on-line no endereço anterior.

3.2.2 Applets Java

No transcorrer das atividades o MVT se mostrou limitado para a visualização das dilatações e cisalhamentos que as transformações podem propiciar. Isto porque, o MVT aplica a transformação num vetor, dificultando a observação e análise das transformações citadas. Para facilitar esta visualização por parte dos alunos, contamos com o apoio de Rodrigo Sychocki da Silva[11] que desenvolveu applets em Java construídos a partir do software Cabri-Géomètre, e que estão disponíveis em http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/

Outra vantagem destes applets em relação ao MVT, é a possibilidade de movimento e interação. Alterando o valor dos parâmetros de entrada das matrizes de transformação, se visualiza imediatamente o que acontece com a figura transformada.

Após a elaboração destes applets em Java, o MVT deixou de ser utilizado para a sequência didática desta dissertação.

[11]Na época da implementação da atividade e da elaboração deste applet, Rodrigo era graduando em Licenciatura em Matemática, e colaborou ativamente na implementação desta atividade. Concluiu a graduação em 2007/2.

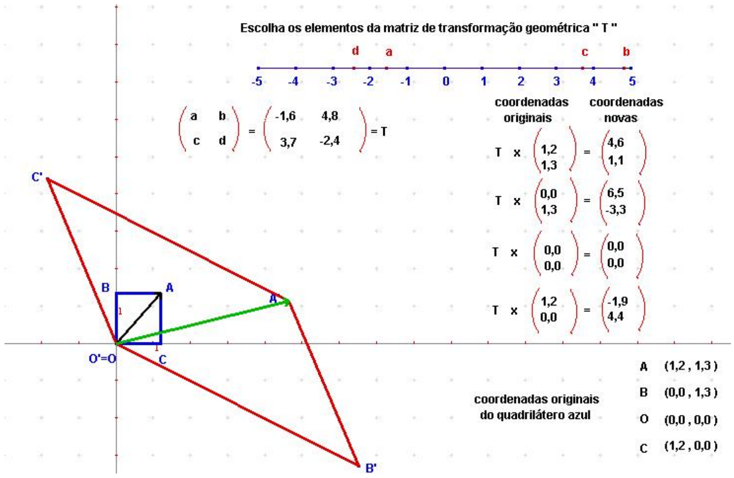


Figura 3.4: Interface dos applets Java on-line

3.2.3 Shapari

É o aplicativo que mais foi utilizado na sequência didática. A sua principal característica é de propiciar a aplicação de uma transformação repetidas vezes (iteração). O software permite que se edite transformações e também que se faça mais de uma transformação ao mesmo tempo.

Está disponível para download em http://www.spelunkcomputing.com. As figuras obtidas com o implemento das transformações pré-definidas ou de outras implementadas, possuem grande apelo estético, atraindo a atenção e curiosidade do aluno para o processo de sua geração.

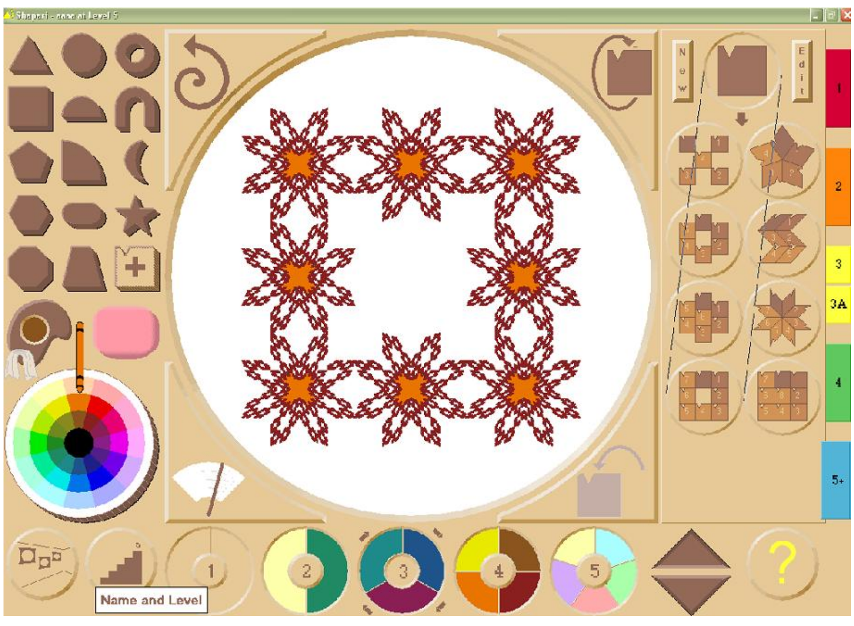


Figura 3.5: Interface do Shapari

Para entendermos o seu funcionamento, vamos fazer uma breve descrição de alguns de seus recursos[12].

A figura 3.5 apresenta a interface do Shapari. No centro temos um círculo onde irão aparecer as figuras selecionadas e as respectivas transformações. As figuras que podem ser selecionadas encontram-se à esquerda do círculo central, e as transformações pré-definidas estão à direita.

Para podermos editar transformações ou ainda criar outras novas, devemos proceder da forma que passamos a descrever. Inicialmente, no rodapé do software encontra-se uma "escada" onde podemos indicar o nível de uso do software, e você deve indicar o nível 4 ou 5 para poder editar as transformações. Em seguida, para criar uma nova transformação clique em *New* no canto superior direito. Para editar uma transformação, selecione-a e depois clique em *Edit*. Irá aparecer uma janela de edição, da qual recortamos o destaque apresentado na figura 3.6. Nesta figura percebemos que a exibição das figuras e transformações do Shapari ocorrem no primeiro quadrante, numa região quadrada de lado 1. Este é um fato importante na edição das transformações. Rotações de 180°, por exemplo, levam figuras para o terceiro quadrante. Para podermos visualizá-las no Shapari devemos usar a translação adequada, e "trazê-las" para o primeiro quadrante.

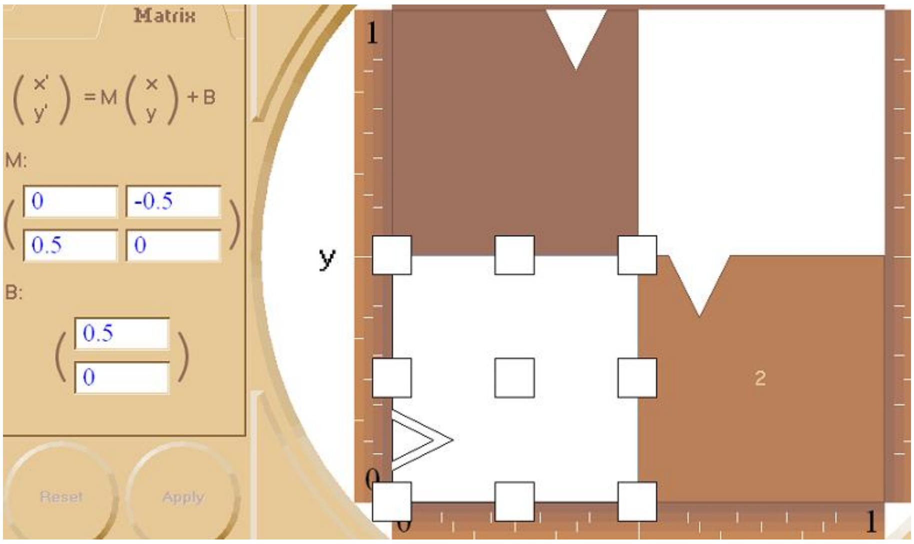


Figura 3.6: Editando no Shapari

[12]Para informações mais detalhadas de seu funcionamento, o leitor poderá consultar o manual do usuário no site http://www.spelunkcomputing.com.

Estas características influenciam na forma matricial das transformações que o Shapari possui. Na figura 3.6 visualizamos a forma $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, onde B é a matriz de translação[13].

Outro fato importante a considerar é a forma com que o Shapari processa as transformações. Em cada transformação editada, a figura original é aquela dentro do quadrado unitário do primeiro quadrante. Observando a figura 3.7 notamos que a transformação T_A faz uma redução da figura original composta com uma reflexão em relação ao eixo horizontal, seguida de uma translação.

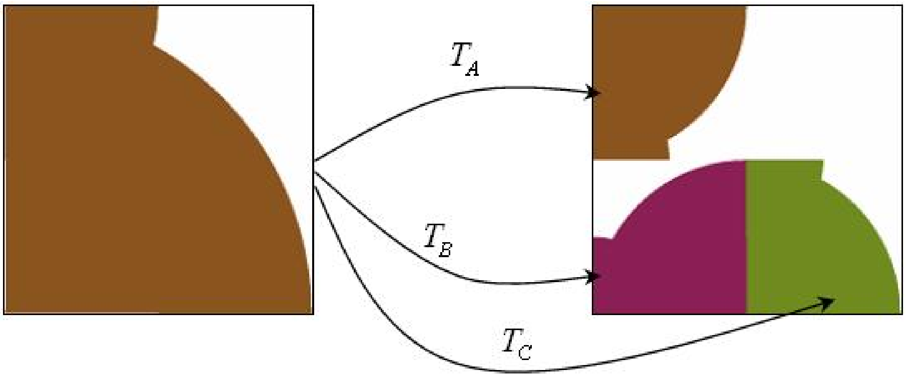


Figura 3.7: As transformações no Shapari

Da mesma forma ocorre com as outras transformações, que possuem como ponto de partida a figura original. Aplicando estas transformações por diversas vezes (iterando), obtemos a sequência de figuras que termina com uma figura fractal. A sequência comentada aparece na figura 3.8.

Figura 3.8: Iterando no Shapari

3.2.4 GeoGebra

É um aplicativo de geometria dinâmica (régua e compasso) acompanhado de recursos algébricos. Esta integração entre construções geométricas, representação gráfica

[13]Esta forma matricial é tema de estudo da atividade 6 da sequência didática, página 36, e a discussão e fundamentação matemática se encontra na página 63 deste texto.

de funções no plano dentre outros recursos, vem acompanhada de uma interface agradável e de simples entendimento. No que se refere à geometria é semelhante a outros softwares mais conhecidos como Cabri-géomètre e Régua e Compasso, mas se destaca na facilidade de implementações algébricas relacionadas com a geometria.

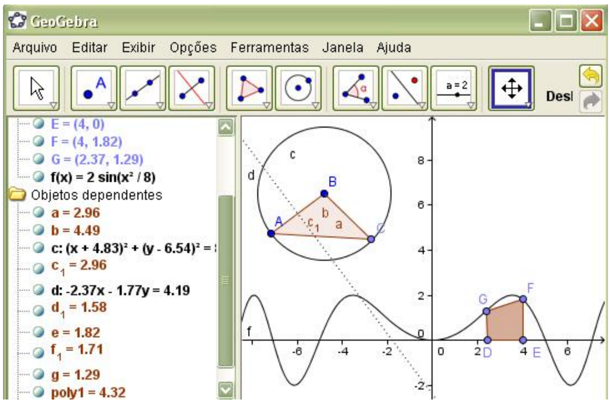


Figura 3.9: Interface do software GeoGebra

Este software será utilizado nas próximas implementações desta atividade, principalmente para o estudo das transformações geométricas. Permite que se explore inicialmente as características geométricas, e em seguida a representação no plano cartesiano acompanhada da interpretação algébrica (equações, matrizes).

O software é totalmente gratuito e está disponível para download em http://www.geogebra.org/cms

3.3 Operações com matrizes.

Neste bloco apresentaremos as atividades relacionadas às operações entre matrizes: sua origem, definição e respectivas propriedades.

3.3.1 Atividade 5 - composição dá origem à multiplicação.

Nesta atividade esperamos que os alunos "refaçam" o processo histórico da origem da multiplicação de matrizes, tal como o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) definiu: a partir da composição de transformações. Deste modo, também se espera que eles percebam o motivo da maneira peculiar da definição de multiplicação de matrizes.

Começamos pedindo que os alunos obtenham as matrizes de duas transformações realizadas em sequência, como mostra a figura abaixo.

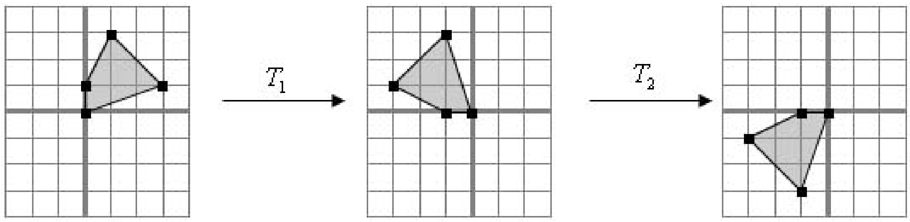


Figura 3.10: Compondo transformações.

Em seguida se interroga sobre a possibilidade de fazer estas duas transformações diretamente, concentrada em apenas uma transformação, e se solicita a matriz desta transformação.

A partir deste momento os alunos tentarão observar a relação entre as matrizes, a partir do estudo dos sistemas de equações que originaram cada matriz.

$$(x,y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (x',y') \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}} (x'',y'')$$

Figura 3.11: As matrizes das transformações.

Com substituições de variáveis esperamos obter a relação direta entre as coordenadas (x, y) e (x'', y''). Este novo sistema será escrito também na forma matricial. E obtemos assim a forma peculiar da multiplicação de matrizes.

Analisando o contexto geométrico das transformações os alunos poderão concluir que a multiplicação de matrizes nem sempre será comutativa, o que também poderá ser observado algebricamente.

Talvez os alunos tenham alguma dificuldade para relacionar a geometria (composição de transformações) com a álgebra (multiplicação das matrizes das transformações) pois enquanto que na geometria temos as transformação T_1 seguida da T_2, a matriz da composição destas transformações será obtida multiplicando-se a matriz da segunda transformação pela da primeira. Esta inversão de ordem pode trazer dificuldades iniciais, mas que poderão ser superadas, inclusive sugerindo a análise da álgebra em questão, conforme vemos abaixo.

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \tag{3.2}$$

3.3.2 Atividade 6 - translações e expressões gerais.

Da mesma forma como foi feito em atividades anteriores os alunos devem tentar estabelecer a relação entre as coordenadas da figura inicial (x, y) e da figura final (x', y'). Devem também tentar estabelecer alguma forma matricial de representação da transformação de translação como foi feito nas reflexões e rotações. O objetivo é que os alunos identifiquem a transformação geométrica translação e sua forma diferente de representação matricial.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Que eles discutam idéias quanto à soma e multiplicação de matrizes, suas diferenças e semelhanças. Poderá se incentivar a observar que também neste caso, a composição de translações poderá ser feita diretamente, e que sua representação matricial é a soma das matrizes das translações, que desta vez é comutativa.

Seguindo a atividade vamos sugerir a composição de rotações (ou reflexões) com translações, e que esta composição resultará numa expressão geral para as transformações estudadas até aqui.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Consideramos importante destacar que o fato de apresentarmos a translação bem depois e separadamente das demais transformações possui uma motivação didática. De modo geral, a translação deveria ser uma das primeiras transformações geométricas a ser estudada, dada que é a mais simples de ser compreendida. No entanto, o leitor deve observar que é a única transformação abordada na sequência didática que possui uma representação algébrica (matricial) diferente das demais, conforme indica a equação 3.3. Quando da composição de transformações com translações, é bem mais comum aplicarmos a translação depois da outra transformação, conforme apresenta a equação 3.4. Estudando primeiro a translação teríamos dificuldades em justificar para os alunos a representação das coordenadas dos pontos por uma matriz-coluna, o que passa a ser natural depois do estudo das outras transformações. É claro que esta foi apenas uma opção nossa, e em aplicações futuras o docente interessado poderá mudar a ordem de estudo das transformações, de acordo com suas concepções pedagógicas.

3.4 Aplicando as transformações para gerar fractais.

Chegamos ao bloco de atividades onde as transformações serão iteradas no software Shapari a fim de se obter algumas figuras fractais.

3.4.1 Atividade 7 - iterando transformações e gerando fractais no Shapari.

Pretendemos que os alunos implementem transformações no Shapari, indicando as respectivas matrizes. Espera-se que eles lembrem das atividades anteriores, e que para compor transformações deverão multiplicar as respectivas matrizes (adicionar no caso da translação). Aplicando diversas vezes estas transformações, as figuras iniciais irão se transformando em figuras "fractais", e esperamos que os alunos observem as características destas figuras (mesmo sem ainda termos caracterizado fractais). Outro fato importante que deve surgir, é que a figura inicial não interfere em nada na figura a ser obtida. O que interfere são as transformações (o processo) utilizadas.

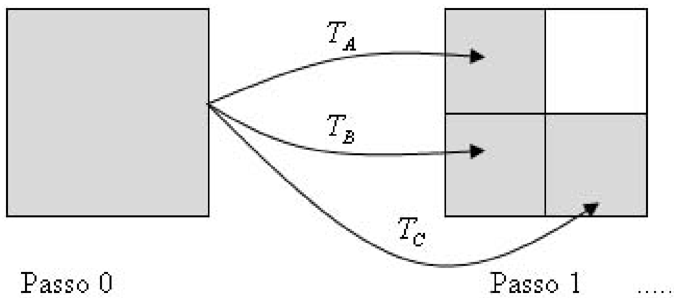


Figura 3.12: As composições no Shapari.

3.4.2 Atividade 8 - analisando figura e obtendo suas iterações.

Nesta atividade o objetivo é que os alunos tomem conhecimento de uma das possíveis características de um fractal: a auto-similaridade[14]. Após uma idéia inicial do

[14]Para mais detalhes sobre auto-similaridade, veja as obras de Barbosa (2002, p. 9), Peitgen et al. (1991a, p. 2, 8) e principalmente a de Mandelbrot, que destaca: "é, com efeito, surpreendente que, se considerarmos uma baía ou uma península representada numa carta de 1/100 000 e depois a reexaminamos numa carta de 1/10 000, nos apercebamos da existência, ao longo do seu contorno, de inúmeras sub-baías e subpenínsulas. Sobre uma carta de 1/1000 podemos ver ainda surgir diversas sub-sub-baías e sub-

que significaria o termo[15], espera-se que os alunos observem algumas figuras fractais, e a partir da análise de partes das figuras que são cópias da figura original, obtenham as transformações (matrizes das transformações) que geraram cada fractal. Para confirmar seus cálculos, poderão testar os resultados no software Shapari.

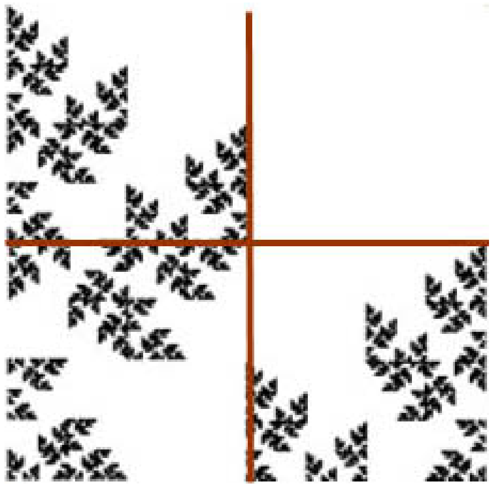


Figura 3.13: Interpretando e obtendo as transformações...

No caso da figura acima, esperamos que os alunos observem que ela é formada por três cópias de si mesma, senda que cada uma destas cópias sofreu a ações de transformações geométricas como a redução (homotetia) e reflexões.

3.5 Ampliando um pouco.

Nesta fase é apresentada uma atividade que tenta levar os estudos um pouco além, apontando relações com outros conceitos, e o vislumbre de conceitos matemáticos não característicos do Ensino Médio, que é o caso da dimensão não inteira.

subpenínsulas, e assim por diante. Não é possível seguir indefinidamente, mas pode-se, ainda assim, ir bastante longe, verificando que, embora as cartas correspondentes aos níveis sucessivos de análise sejam bastante diferentes naquilo que têm de específico, possuem sempre o mesmo caráter global, ou os mesmos traços genéricos. Por outras palavras, somos levados a crer que, a uma escala ampliada, um mesmo mecanismo foi responsável tanto pelos pequenos como pelos grandes pormenores das costas. [...] Diz-se que uma tal costa possui uma homotetia interna, ou que é auto-semelhante." (MANDELBROT, 1998, p. 34, 35).

[15]Pode se sugerir a pesquisa do termo na internet em sites como a Wikipédia: http://www.wikipedia.org

3.5.1 Atividade 9 - um pouco mais sobre as figuras geradas.

Propiciar que os alunos recordem (ou estudem) conceitos de progressões geométricas e promover uma discussão a respeito da área das figuras, o que poderá levar à idéia de dimensão fractal. Esta atividade é baseada no artigo de Sallum (2005) publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM), além de encontrarmos atividades semelhantes no livro de Barbosa (2002, p. 75).

Terminada a tarefa, o professor promoverá uma discussão sobre a área que sobra e a área retirada da figurada. Se a área que sobra é zero, porque ainda enxergamos algo que se parece com uma área? O professor poderá motivar a discussão e apresentar informações sobre a dimensão destas figuras: a dimensão fractal.

Observe que o objetivo central da atividade é a obtenção da área das figuras (e da área retirada) com o auxílio de progressões, e o conceito de dimensão será apenas apresentado pelo professor na discussão final. É claro que esta discussão sobre o conceito de dimensão deverá ser feita de maneira intuitiva, não usando formalismos e definições, e de modo que os alunos possam participar com perguntas e questionamentos.[16]

[16]Esta noção intuitiva de dimensão pode ser abordada de várias formas, que podem ser encontradas na obra de Mandelbrot (1998, p. 32-34, 37-43), e também no livro de Peitgen et al. (1991a) que apresenta inclusive outras atividades para abordar o conceito de dimensão em sala de aula. Na nossa implementação em sala de aula, acabou se sobressaindo a versão de Sallum (2005, p. 6-8), que de certo modo está baseada nas obras citadas. Para uma definição um pouco mais precisa do conceito de dimensão o leitor poderá consultar a página 446 da obra de Anton e Rorres (2001) que apresenta a dimensão topológica e a dimensão de Hausdorff.

4 A MATEMÁTICA ENVOLVIDA

Neste capítulo apresentaremos alguns tópicos da matemática envolvida nas atividades propostas aos alunos. Todo professor de matemática comprometido, além de se dedicar à didática e metodologia da sala de aula, também se preocupa com uma formação sólida nos conceitos matemáticos. Para contribuir com esta tarefa, julgamos imprescindível que se faça aqui uma apresentação dos conceitos matemáticos envolvidos nas atividades que foram propostas.

É evidente que o conteúdo matemático aqui abordado não é de autoria nossa, já que se trata de conteúdos a muito conhecidos. O que se pretende é fazer um relato da matemática envolvida e dar subsídios e indicações para um estudo mais aprofundado e pormenorizado. A abordagem aqui exposta está fortemente vinculada à obra *Coordenadas no plano* de Lima (1992).

4.1 Alguns conceitos básicos

O leitor deve ter observado no capítulo 3 que grande parte das atividades propostas se refere às transformações geométricas e sua representação matricial a partir da observação de coordenadas no plano. Essa representação de coordenadas no plano é bastante conhecida dos estudos do Ensino Médio nos tópicos de Geometria Analítica e da representação gráfica de funções. Muitas vezes este plano é denominado de *plano cartesiano*, numa homenagem à Descartes[1], embora não seja somente devida a Descartes a elaboração do mesmo. Uma boa idéia do que estamos dizendo se encontra em Davis e Hersch (1998, p. 5):

> A geometria analítica, como é correntemente ensinada, implica a determinação de dois eixos perpendiculares num plano, a atribuição de duas coordenadas (ou endereços) a cada ponto geométrico, e a substituição das retas e das curvas por equações algébricas apropriadas. Na sua forma corrente, a geometria cartesiana é devida tanto aos contemporâneos e sucessores de Descartes quanto a ele próprio.

Nas seções que seguem veremos alguns detalhes sobre sistemas de coordenadas no plano, e de algumas transformações geométricas.

[1] René Descartes (1596-1650), nascido na França, foi filósofo, matemático e físico.

4.1.1 Coordenadas na reta

Uma reta é dita orientada se sobre ela escolhermos um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso é chamado negativo. Um ponto qualquer A estará à esquerda do ponto B, se o sentido de A para B for positivo. Se o sentido de A para B for negativo, dizemos que A está à direita de B.

Um eixo é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O chamado de origem. A cada ponto de um eixo podemos associar um único número real x, denominado de *coordenada* do ponto sobre o eixo em questão. Seja x a distância de um ponto P qualquer sobre o eixo até a origem O, $x = d(P, O)$. Se o ponto P estiver à direita de O, associamos a ele o número real positivo x. Se o poto P estiver à esquerda de O, associamos o número real negativo $-x$. Desta forma todo eixo estará em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais[2], ou seja, todo ponto de um eixo está associado a um único número real, e todo número real corresponde a um único ponto no eixo.

4.1.2 Coordenadas no plano

O conjunto formado pelos *pares ordenados* (x, y) com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, é denotado por $\mathbb{R}^2$. Lembramos que (x, y) é chamado de *par* pois é composto por dois valores, e dito *ordenado* pois a ordem desses valores é importante: se $x \neq y$ então $(x, y) \neq (y, x)$ e portanto, por exemplo, $(1, 4) \neq (4, 1)$.

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano é um sistema onde dois eixos distintos, chamados de eixos coordenados, possuem origem O coincidente, denominada de origem do sistema. Nas etapas seguintes serão considerados apenas sistemas de coordenadas onde os eixos considerados se interceptam perpendicularmente. Para identificar cada um dos eixos os denominaremos de OX e OY, e consideramos OX como eixo horizontal e OY de eixo vertical. Estes eixos coordenados muitas vezes são chamados de *eixo das abscissas* e de *eixo das ordenadas*, respectivamente.

Um plano munido de um sistema de coordenadas, pode ser colocado em correspondência biunívoca com $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto qualquer P do plano, traçamos por

[2]Para mais detalhes sobre esta correspondência ver a obra de Ripoll, Ripoll e Silveira (2006) que apresenta uma construção detalhada da relação biunívoca entre números reais e a reta numérica, se utilizando de um processo de medição via régua decimal infinita.

ele retas perpendiculares aos eixos OX e OY, que encontrarão os eixos em pontos cujas coordenadas serão x e y respectivamente. Desta forma, estabelece-se a correspondência entre o ponto P e o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, dado um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, associamos a ele o ponto P, interseção das retas traçadas perpendicularmente aos eixos OX e OY pelos pontos de coordenadas x e y em cada eixo respectivo. Os números x e y são as coordenadas do ponto P no sistema de eixos fixado: x é a abscissa e y é a ordenada de P. Para indicar o ponto P de coordenadas (x, y) escrevemos $P = (x, y)$.

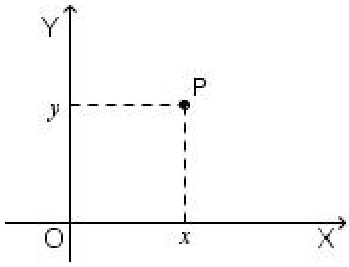


Figura 4.1: Sistema de coordenadas

4.1.3 Vetores

Dada uma reta r, consideramos dois pontos, A e B, sobre a mesma. O segmento de reta com extremidades nesses pontos será denotado AB, e a distância entre os pontos será denominado *comprimento* do segmento e será denotado por $\overline{AB}$.

Da mesma forma que fizemos para o caso das retas na seção 4.1.1, podemos definir um sentido de percurso de A para B, chamado positivo. Um segmento com sentido de percurso definido será chamado de *segmento orientado* e denotado por $\overrightarrow{AB}$. Observe que este segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ está associado a um comprimento (o comprimento do segmento AB), a uma direção (a direção da reta r) e a um sentido (de A para B).

Dizemos que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ representa um *vetor* $\vec{v}$ e o denotamos por $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Seja C um outro ponto qualquer, vamos considerar por este ponto uma reta s que seja paralela[3] à r. Sobre esta reta s podemos considerar um ponto D, de modo que $\overrightarrow{CD}$ tenha mesmo comprimento, mesma direção[4] e mesmo sentido do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Desta forma, temos que $\overrightarrow{CD}$ é um outro representante do vetor $\vec{v}$. Como o ponto

[3]Caso o ponto C pertença à reta r, basta considerar um ponto D sobre a mesma reta, de modo que manteremos a mesma direção de $\overrightarrow{AB}$.

[4]Pois r e s são retas paralelas.

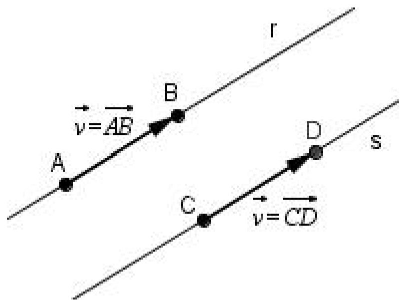


Figura 4.2: O vetor $\vec{v}$.

C acima, pode ser qualquer ponto do plano, notamos que o vetor $\vec{v}$ possui uma coleção (infinita) de segmentos orientados que o representam geometricamente, pois possuem mesmo comprimento, direção e sentido.

Desta forma, um vetor $\vec{v}$ no plano possui infinitos representantes, um partindo de cada ponto do plano. Um representante particular de $\vec{v}$ é o segmento orientado que começa no ponto $O\,(0,0)$ do plano cartesiano.

Vale destacar que, dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto qualquer P, existe um único ponto Q tal que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Donde denotamos que $Q = P + \vec{v}$. Sendo $\overrightarrow{PQ}$ um representante de $\vec{v}$, este fica inteiramente determinado pelos pontos P e Q, e da expressão citada acima temos que $\vec{v} = Q - P$.

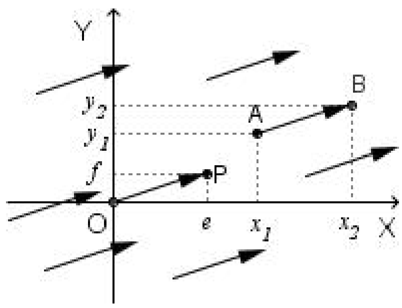


Figura 4.3: Segmentos orientados equivalentes

Algebricamente, dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, os números $e = x_2 - x_1$ e $f = y_2 - y_1$ chamam-se as *coordenadas* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, e escrevemos também $\vec{v} = (e, f)$. Observe que um outro representante possível para o mesmo vetor é o segmento orientado OP, onde O é a origem do sistema e P é o ponto de coordenadas (e, f).

4.2 Transformações geométricas

Conforme Lima (1992), uma *transformação* T no plano Π é uma função $T : \Pi \longrightarrow \Pi$, ou seja, uma função que associa a cada ponto P do plano outro ponto do mesmo plano $Q = T(P)$. O ponto Q é chamado de *imagem* de P pela transformação T.

Tendo sido definido um sistema de coordenadas no plano, uma transformação T pode ser descrita pelas *expressões* que relacionam as coordenadas (x, y) do ponto P com as coordenadas (x', y') do ponto $T\,(P)$.

Após esta definição formal das transformações, precisamos colocar uma pergunta: qual o motivo do adjetivo *geométricas*? Seria alguma peculiaridade geométrica relacionada às transformações? Que propriedade seria essa? Em busca de respostas, constatamos que Lima (1992) se utiliza da expressão *transformações geométricas* apenas para nomear a terceira parte do livro *Coordenadas no plano*, e não a utiliza mais no decorrer do texto. Passa a utilizar apenas a expressão *transformação*, que já definimos anteriormente. Este fato nos passou a impressão de que o termo *transformação* tenha sido utilizado por Lima como sinônimo de *transformação geométrica*.

Na obra de Lay encontramos uma breve referência a "transformadas lineares descritas geometricamente" (LAY, 1999, p. 73) para o caso de algumas transformações no $\mathbb{R}^2$, mas o autor não apresenta uma definição precisa para estas transformações.

De modo geral, não parece existir na literatura uma definição clara e de consenso do que seja uma transformação geométrica. Diante disto optamos por não enunciar uma definição, e usar o termo transformação geométrica em uma sentido mais amplo e não muito rígido. Neste texto, vamos entender que transformações geométricas são aquelas bijeções entre regiões do plano que, de alguma maneira, têm um sentido geométrico, tais como as translações, rotações, simetrias, homotetias e cisalhamentos. Não nos parece resultar daí nenhum prejuízo ao aluno, uma vez que os estudantes parecem já ter uma idéia intuitiva do termo.

Passamos agora a detalhar algumas transformações[5] utilizadas na sequência didática planejada.

[5]Para mais informações e exemplos de exercícios sobre as transformações aqui apresentadas o leitor poderá verificar as páginas 73 e 74 da obra de Lay (1999), e da página 295 a 301 de Anton (2001).

4.2.1 Translação

Segundo os dicionários da língua portuguesa, o termo transladar significa deslocar, mudar de lugar. Numa interpretação geométrica, a translação aplicada a um ponto P, irá deslocá-lo ou mudá-lo de lugar no plano.

Para que este deslocamento esteja bem definido, precisamos estabelecer a direção, o sentido e a distância do mesmo. Observe que estas informações estão associadas ao conceito de vetor, e por isso costumamos dizer que a traslação será definida por um vetor que estabelecerá a direção, o sentido e a distância do deslocamento.

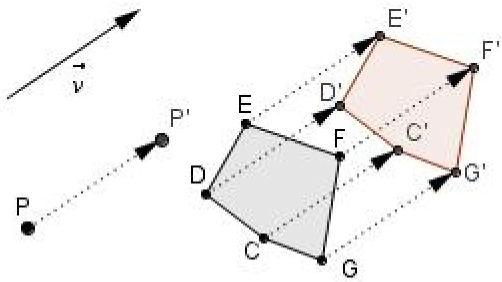


Figura 4.4: Conceito de translação

Para transladar uma figura, basta aplicar a translação em todos os pontos da mesma. Na figura 4.4 vemos a translação definida pelo vetor $\vec{v}$ sendo aplicada nos vértices do polígono $CDEFG$.

Uma translação T determinada pelo vetor $\vec{v}$ transporta qualquer ponto P do plano, na direção, sentido e distância definidas pelo vetor. Se $P = (x, y)$ e $\vec{v} = (e, f)$, observamos que a transformação desloca o ponto P horizontalmente uma distância indicada por e, e verticalmente uma distância indicada por f.

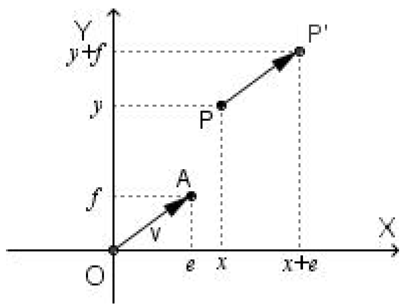


Figura 4.5: Translação

Observe que o sentido deste deslocamento muda caso considerarmos valores positivos ou negativos para e e f, o que está implícito na definição do vetor $\vec{v}$.

Desta forma a translação será dada por $T(P) = P + \vec{v} = (x+e, y+f)$, e as coordenadas (x', y') do ponto $P' = T(P)$ são indicadas pelas equações $x' = x + e$ e $y' = y + f$. Quando temos duas ou mais equações, costumamos representá-las por

$$\begin{cases} x' = x + e \\ y' = y + f \end{cases} \tag{4.1}$$

e chamamos 4.1 de *sistema* de equações.

Elementos[6] da translação: vetor $\vec{v}$.

4.2.2 Rotação

A palavra *rotação* possui origem no verbo rotar, que também significa girar. Para que possamos definir este giro ou rotação, precisamos indicar um ângulo α, que indicará o quão grande será o giro, e um ponto C, que chamaremos de centro, em torno do qual se realizará o movimento.

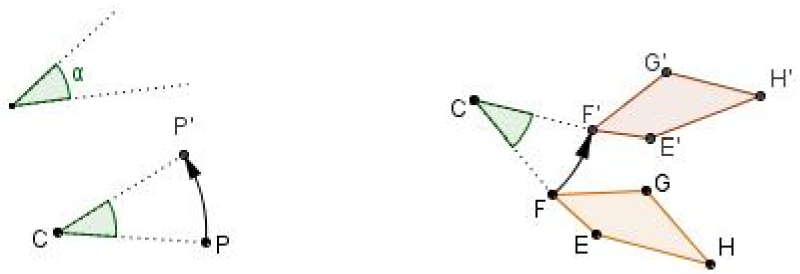


Figura 4.6: Conceito de rotação

Deste modo, para que a rotação fique inteiramente definida e caracterizada precisamos indicar o ângulo de giro e o centro da rotação. Quando o centro da rotação estiver definido, é fácil notar que é o único ponto que, quando aplicada a transformação, não mudará de lugar. Por causa disso costuma ser chamado de *ponto fixo* da rotação.

Elementos da rotação: centro C e ângulo de giro α.

[6]Em cada uma das transformações que apresentarmos, destacaremos os elementos imprescindíveis para que esta transformação esteja bem caracterizada.

Vejamos agora uma análise algébrica. Dado um sistema de coordenadas de origem O, a rotação R de centro[7] O e ângulo α transforma[8] o ponto $P = (x, y)$ no ponto $R(P) = (x', y')$ com

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases} \tag{4.2}$$

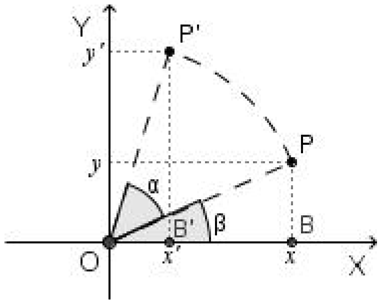


Figura 4.7: Rotação

Vamos demonstrar esta afirmação. Inicialmente definimos que d é o comprimento do segmento OP, ou seja $d = \overline{OP} = \overline{OP'}$. Além disso, pela definição das relações trigonométricas no triângulo retângulo OPB, temos que $x = d \cdot \cos\beta$ e $y = d \cdot \operatorname{sen}\beta$. Da mesma forma, considerando o triângulo $OP'B'$, temos que que $x' = d \cdot \cos(\alpha + \beta)$ e $y' = d \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Expandindo estas últimas relações e substituindo as primeiras obtemos:

$$\begin{array}{ll} x' = d \cdot \cos(\alpha + \beta) & y' = d \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ x' = d \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - d \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta & y' = d \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + d \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha \\ x' = (d \cdot \cos\beta) \cdot \cos\alpha - (d \cdot \operatorname{sen}\beta) \cdot \operatorname{sen}\alpha & y' = (d \cdot \cos\beta) \cdot \operatorname{sen}\alpha + (d \cdot \operatorname{sen}\beta) \cdot \cos\alpha \\ x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha & y' = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{array}$$

As expressões encontradas confirmam o sistema 4.2 apresentado acima.

[7]Neste trabalho apenas consideraremos rotações centradas na origem. Para o caso de rotações com centro em um ponto C qualquer do plano, basta considerar a composição da rotação com translações: transladar para a origem, rotar em torno da origem e, em seguida, transladar para o ponto P. Veja a página 151 da obra de Lay (1999).

[8]Para fins deste trabalho estamos considerando rotações no sentido anti-horário. Observe que não há perda de generalidade, pois na verdade, uma rotação de um ângulo α no sentido horário equivale a uma rotação de um ângulo $2\pi - \alpha$ no sentido anti-horário.

4.2.3 Reflexão

O termo *reflexão* muitas vezes é apresentado a partir de uma interpretação que envolve o reflexo de um espelho, e por isso muitas vezes chamado de espelhamento.

Geometricamente existem dois tipos de reflexões. A reflexão em relação a um ponto e a reflexão em relação a uma reta. No caso da reflexão em relação a um ponto A, a reflexão aplicada a um ponto P gerará um ponto P', tal que A seja ponto médio do segmento PP'.

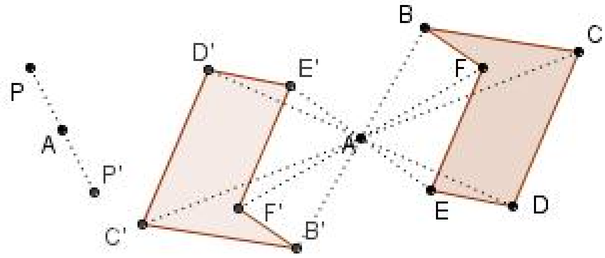


Figura 4.8: Reflexão em relação a um ponto

Observe que esta reflexão em relação a um ponto A é exatamente igual à uma rotação de 180° com centro em A. Ou seja, as rotações já contemplam este tipo de transformação, e desta forma, na sequência deste texto apenas nos referiremos às reflexões em relação à uma reta.

Vamos a elas. No caso das reflexões em relação à uma reta r, a transformação aplicada a um ponto P gerará um ponto P' de tal forma que a reta r seja mediatriz do segmento PP'.

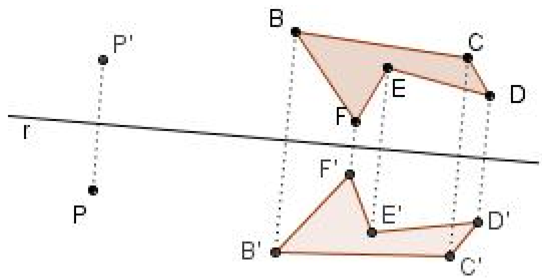


Figura 4.9: Reflexão em relação à reta r.

Como r é mediatriz do segmento PP', a distância entre P' e r é igual à distância entre P e r. Neste caso, costumamos dizer que P' é simétrico de P em relação à r.

Elemento da reflexão em relação à uma reta: a reta r. Basta indicar a reta para que a reflexão em relação à uma reta fique inteiramente definida e caracterizada.

Para realizar uma interpretação algébrica das reflexões em relação à uma reta, inicialmente vamos pensar na reflexão de pontos em torno dos eixos coordenados que pode ser observada na seguinte figura:

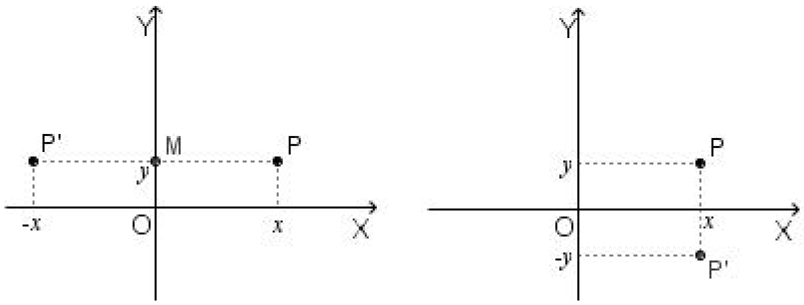


Figura 4.10: Reflexões em relação aos eixos coordenados.

Para a reflexão do ponto $P = (x, y)$ em relação ao eixo das ordenadas, observamos facilmente que o ponto $P' = (x', y') = (-x, y)$, pois o eixo das ordenadas é a bissetriz do segmento PP'. Deste modo, a relação entre as coordenadas de P e seu simétrico P', neste caso é dada pelo sistema

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \tag{4.3}$$

De modo semelhante obtemos a reflexão do ponto $P = (x, y)$ em relação ao eixo das abscissas, de modo que neste caso a relação entre as coordenadas de P e seu simétrico P' é dada por

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \tag{4.4}$$

Ampliando um pouco nosso estudo, podemos estabelecer o ponto simétrico de P em relação a uma reta dada r com equação do tipo $y = mx$ com $m \in \mathbb{R}$ constante.

Se α é o ângulo entre a reta r e o eixo OX, então a reflexão aplicada ao ponto $P = (x, y)$ fornecerá o ponto $P' = (x', y')$ cujas coordenadas são dadas por[9]

[9]A maneira de como chegamos até esta expressão está detalhada no apêndice A que se encontra na página 96 desta dissertação.

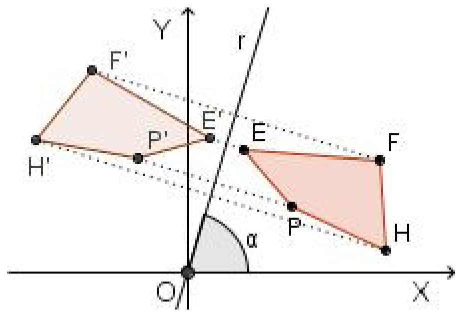


Figura 4.11: Reflexão em relação à reta r no plano cartesiano

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ y' = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \tag{4.5}$$

O leitor deve ter percebido uma semelhança entre a expressão 4.5 acima e a expressão 4.2 obtida na página 47 para a rotação. Esta semelhança de fato ocorre e será abordada na seção 4.3.1 na página 56 deste texto.

4.2.4 Homotetias

As homotetias são as transformações geométricas que geram ampliações e reduções no tamanho de figuras do plano. Ou seja, a homotetia gera figuras semelhantes de razão k. Se temos duas figuras poligonais $ABEDF$ e $A'B'D'E'F'$ que são semelhantes, então temos que os lados correspondentes dos polígonos são proporcionais e que a razão de semelhança é $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'F'}{EF} = \frac{F'A'}{FA}$.

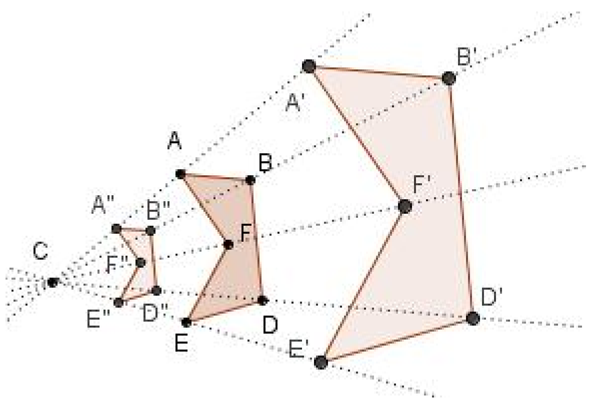


Figura 4.12: Homotetia de razão k

Além da razão, precisamos definir o centro ou foco da homotetia, que na figura 4.12 está indicado pelo ponto C. Na mesma figura, vemos a aplicação de duas homotetias sobre a linha poligonal $ABDEF$. A homotetia de razão $k > 1$ gera uma ampliação de modo que obtemos a figura $A'B'DE'F'$, e a homotetia de razão $0 < k < 1$ resulta na figura $A''B''D''E''F''$ que é uma redução da figura original.

Portanto a homotetia possui dois elementos: o centro C e a razão k, que definem completamente a transformação.

Segundo uma definição mais formal, a homotetia com centro O e razão $k > 0$ é a transformação[10] $H : \Pi \longrightarrow \Pi$ que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $P' = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ (LIMA, 1992).

Com as definições acima, considerando $P = (x, y)$, as coordenadas (x', y') do ponto P' são dadas pelo sistema

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases} \tag{4.6}$$

Observe que com $k > 1$ o vetor $\overrightarrow{OP}$ é ampliado, e desta forma a homotetia gera uma ampliação nas figuras do plano. Da mesma forma que com $0 < k < 1$ obtemos reduções no tamanho da figura.

Na figura 4.13 a seguir, temos uma homotetia de razão $k > 1$, e deste modo o pentágono inicial $ABCDE$ é transformado no pentágono ampliado $A'B'C'D'E'$. Observe que os pontos A e A' dos pentágonos coincidem, pois se encontram exatamente sobre o centro $O(0,0)$ da homotetia

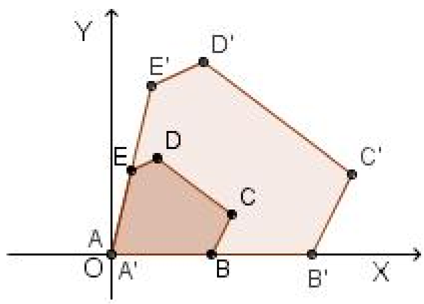


Figura 4.13: Homotetia

[10]Estamos considerando apenas $k > 0$, embora a definição seja válida para qualquer k. Isto porque consideramos que homotetias com razões negativas podem ser obtidas com a composição de uma rotação de 180º com uma homotetia de razão positiva. Da mesma forma, homotetias com centro em outro ponto do plano que não seja a origem O podem ser obtidas com as homotetias consideradas compostas com translações.

4.2.4.1 Dilatação/contração vertical e horizontal

Transformações que deformam (ampliam ou reduzem) as figuras no sentido horizontal em proporção diferente do que no sentido vertical, não são consideradas homotetias.

Estas transformações geram deformações na direção de OX de acordo com o fator k_1, e na direção de OY é utilizado o fator k_2. Deste modo, as coordenadas do ponto P' obtido a partir de P são dadas por

$$\begin{cases} x' = k_1 \cdot x \\ y' = k_2 \cdot y \end{cases} \tag{4.7}$$

A figura abaixo apresenta uma transformação conforme indicada pelo sistema 4.7. Utilizamos $k_1 = 3$, o que dilatou a figura no sentido horizontal, e como adotamos 1 para o valor de k_2, a figura não se deformou no sentido vertical.

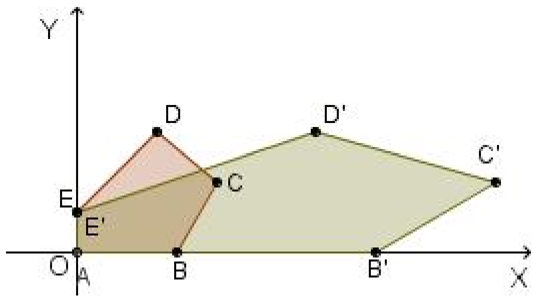


Figura 4.14: Dilatação horizontal

4.2.5 Cisalhamento

Para que tenhamos uma noção do que é o cisalhamento, podemos imaginar uma pilha de folhas de papel. Se mantivermos esta pilha no mesmo lugar, mas a empurrarmos de forma que as folhas mais altas deslizem sobre as mais baixas, então temos um cisalhamento horizontal.

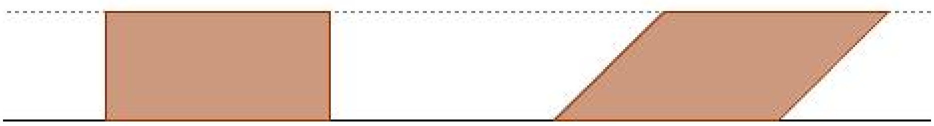


Figura 4.15: Cisalhamento horizontal

É o que a figura 4.15 pretende mostrar. Quanto mais alta a folha estiver na pilha, mais será deslocada. A pilha de folhas continua com a mesma altura mas, no entanto, o cisalhamento deformou a pilha inicial.

O cisalhamento é uma transformação geométrica que desloca horizontalmente ou verticalmente pontos de um plano, de modo que as figuras geométricas são deformadas. Diferentemente da translação, cada ponto $P = (x, y)$ do plano sofre um deslocamento distinto. No que se refere ao cisalhamento horizontal, quanto maior o valor absoluto de y, denotado por $|y|$, das coordenadas do ponto P, mais o ponto sofre a ação da transformação[11]. Esta transformação preserva a coordenada y e move os pontos na direção horizontal de acordo com o valor de y.

A relação entre as coordenadas de um ponto qualquer $P = (x, y)$ do plano, e as coordenadas de $P' = (x', y')$, imagem do ponto P pela transformação de cisalhamento horizontal é dada por

$$\begin{cases} x' = x + y \cdot \tan\theta \\ y' = y \end{cases} \tag{4.8}$$

onde θ é o ângulo em relação ao eixo OY, indicado na seguinte figura:

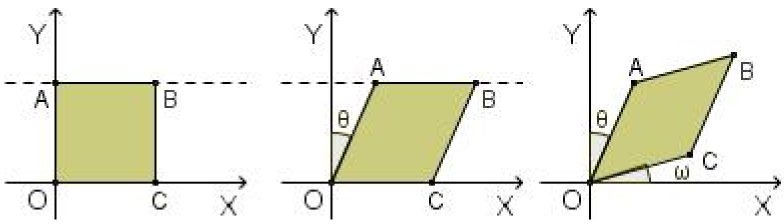


Figura 4.16: Cisalhamento

O cisalhamento apresentado na expressão 4.8 acima ocorre somente na direção horizontal. Se ele ocorrer simultaneamente em ambas as direções teremos uma transformação do tipo:

$$\begin{cases} x' = x + y \cdot \tan\theta \\ y' = x \cdot \tan\omega + y \end{cases} \tag{4.9}$$

onde ω é o ângulo em relação ao eixo OX, indicado na figura 4.16.

[11]O mesmo acontece no cisalhamento vertical em relação à coordenada x do ponto P.

4.3 Composição das transformações geométricas

Vimos nas seções anteriores algumas transformações geométricas básicas que em geral são as mais utilizadas. No entanto muitas outras transformações podem ser obtidas com a aplicação sucessiva das transformações acima, o que chamamos de composição.

Considerando duas transformações T_1 e T_2 no plano Π, a composta $T_2 \circ T_1 : \Pi \longrightarrow \Pi$ é a transformação que associa a cada ponto P do plano Π o ponto $T_2\left(T_1\left(P\right)\right)$. Ou seja, primeiro aplicamos a transformação T_1 a um ponto P e obtemos $P' = T_1\left(P\right)$, e depois a transformação T_2 é aplicada ao ponto P' e obtemos $P'' = T_2\left(P'\right)$.

Para que tenhamos uma idéia mais precisa da composição de transformações, passamos a apresentar alguns exemplos. Os exemplos que seguem apresentam transformações aplicadas em um único ponto $P = (x, y)$, por motivo de simplicidade e objetividade. Para o caso de transformações aplicadas em figuras, basta repetir o processo para cada ponto ou vértice a ser transformado.

4.3.0.1 Rotação de 90° *seguida de rotação de* 45°

Neste primeiro exemplo vamos compor uma rotação de 90°, que chamaremos de R_{90}, seguida de uma rotação de 45° que chamaremos de R_{45}. Veja a ilustração do exemplo.

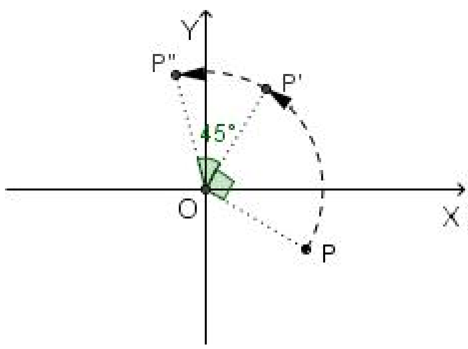


Figura 4.17: Primeiro exemplo de composição

A transformação R_{90} leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (x', y')$. De acordo com a expressão 4.2 da página 47, as coordenadas de P' são dadas por

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos 90° - y \cdot \operatorname{sen} 90° \\ y' = x \cdot \operatorname{sen} 90° + y \cdot \cos 90° \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \tag{4.10}$$

Em seguida, aplicamos a R_{45} no ponto $P' = (x', y')$ e obtemos $P'' = (x'', y'')$, que de acordo com a expressão 4.2 possui a seguintes coordenadas.

$$\begin{cases} x'' = x' \cdot \cos 45° - y' \cdot \operatorname{sen} 45° \\ y'' = x' \cdot \operatorname{sen} 45° + y' \cdot \cos 45° \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y' \end{cases} \tag{4.11}$$

Se quisermos estabelecer a relação entre as coordenadas do ponto inicial P e do ponto final P'', basta substituir os valores de 4.10 em 4.11, e obteremos

$$\begin{cases} x'' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y \end{cases} \tag{4.12}$$

Observe que esta é exatamente a expressão para a rotação de 135°. Concluímos então que, a composição de R_{90} com R_{45} fornece o mesmo resultado de R_{135}: $R_{45}(R_{90}(P)) = R_{135}(P)$. Este resultado também é sugerido pela figura 4.17.

O leitor poderá verificar facilmente que invertendo a ordem das transformações acima, o resultado será o mesmo, ou seja, a composição das transformações deste exemplo é comutativa.

4.3.0.2 Rotação de 90° seguida de reflexão em relação ao eixo OY

No segundo exemplo apresentamos novamente a R_{90}, mas desta vez composta com uma reflexão em relação ao eixo OY. Esta última transformação será nomeada de R_{OY}. Veja a ilustração do exemplo.

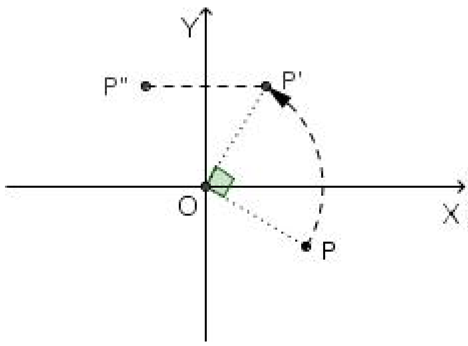


Figura 4.18: Segundo exemplo de composição

A aplicação inicial de R_{90} já foi analisada no exemplo anterior e está apresentada na expressão 4.10.

Passamos então a analisar a reflexão R_{OY} aplicada no ponto P' de modo que obteremos o ponto P'', que segundo a expressão 4.3 da página 49 possui coordenadas dadas por

$$\begin{cases} x'' = -x' \\ y'' = y' \end{cases} \tag{4.13}$$

Relacionando as coordenadas de P com as de P'' temos

$$\begin{cases} x'' = y \\ y'' = x \end{cases} \tag{4.14}$$

que nos indica que a composição de R_{90} com R_{OY} fornece resultado idêntico que a única aplicação da reflexão em relação à reta $y = x$, que denominaremos por $R_{y=x}$. Resumindo: $R_{OY}(R_{90}(P)) = R_{y=x}(P)$.

É importante considerar que se invertermos a ordem das transformações na composição acima, o resultado não será o mesmo. Ou seja, a composição das transformações deste exemplo não é comutativa. É o que observamos na ilustração a seguir.

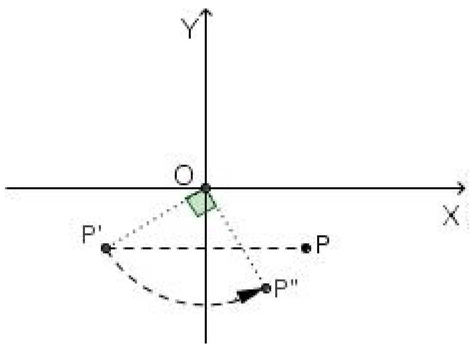


Figura 4.19: Terceiro exemplo de composição

Repetindo o processo deste exemplo, o leitor observará facilmente que a composição das transformações na ordem invertida, resultará na reflexão em relação à reta $y = -x$, ou seja: $R_{90}(R_{OY}(P)) = R_{y=-x}(P)$.

4.3.1 Reflexão obtida com composição

Com o objetivo de apresentar um exemplo mais detalhado matematicamente para a composição de transformações, vamos obter a reflexão em relação a uma reta

r estudada na seção 4.2.3 como a composição de uma reflexão em relação ao eixo OX seguida de uma rotação.

A figura 4.20 abaixo mostra à esquerda a reflexão do ponto P em relação à reta r, já abordada anteriormente. Consideremos como β o ângulo do segmento OP com o eixo OX, e α o ângulo da reta r com o mesmo eixo. Como r passa por O, e é mediatriz do segmento PP', temos que o triângulo OPP' é isósceles e que o ângulo[12] $\widehat{POP'}$ é igual a $2\alpha + 2\beta$.

À direita da figura apresentamos a reflexão do ponto P em relação ao eixo OX e obtemos P', de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e que $\widehat{POP'} = 2\beta$. A seguir aplicamos uma rotação de um ângulo de 2α em P' e obtemos P'', de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'} = \overline{OP''}$ e $\widehat{POP''} = 2\alpha + 2\beta$. Ou seja, o ponto P' da figura da esquerda está exatamente na mesma posição que o ponto P'' da figura da direita, de modo que constatamos geometricamente que esta reflexão pode ser vista como a composição das transformações geométricas já mencionadas.

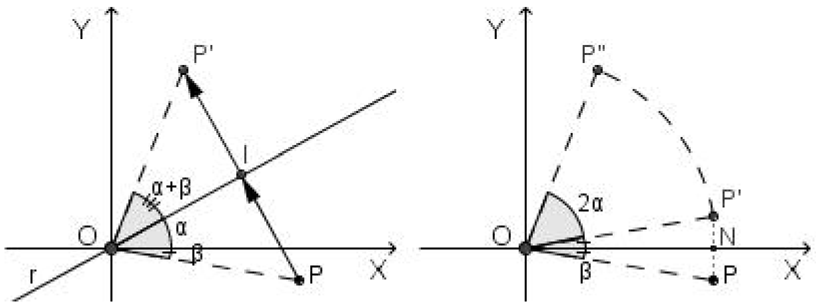


Figura 4.20: Reflexão obtida com composição

Numa interpretação algébrica da mesma situação, vemos que aplicando uma reflexão em relação ao eixo OX no ponto $P = (x, y)$ obtemos $P' = (x', y')$ com $x' = x$ e $y' = -y$. Aplicando agora uma rotação de um ângulo de 2α em P', obtendo assim o ponto $P''\,(x'', y'')$ e, a partir da equação 4.2 na página 47, obtemos:

$$\begin{cases} x'' = x' \cdot \cos 2\alpha - y' \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ y'' = x' \cdot \operatorname{sen} 2\alpha + y' \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \tag{4.15}$$

Substituindo em 4.15 os valores de x' e y' obtidos anteriormente, temos

[12]Estamos utilizando a notação $\widehat{ABC}$ para indicar o ângulo interno do triângulo ABC, no vértice B.

$$\begin{cases} x'' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ y'' = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \tag{4.16}$$

que é idêntica à expressão 4.5 obtida para a reflexão em relação à reta r apresentada na página 50.

4.4 Representação matricial das transformações

Nesta seção passamos a tratar da questão da representação matricial das transformações geométricas, dando um enfoque especial à origem da multiplicação e adição de matrizes.

A noção de matriz é muito antiga, embora não exatamente da forma como a conhecemos hoje, pois a notação, os símbolos e a interpretação, vão mudando ao longo do tempo com influências das mais diversas. Sua primeira aparição teria ocorrido a mais de 2000 anos, numa obra chinesa, onde são utilizadas operações sobre as linhas ou colunas para "resolver sistemas de equações lineares simultâneas", conforme Boyer (2003, p. 134).

Em todas as referências históricas à matrizes[13], elas sempre puderam ser interpretadas da maneira como as entendemos e estudamos em sala de aula atualmente: uma tabela com elementos dispostos em linhas e colunas.[14]

Quanto à questão da representação matricial[15] das transformações geométricas, Cayley[16] teria sido um dos primeiros a estudá-las[17] de forma mais aprofundada. Segundo Eves (2004, p. 552),

[13]O primeiro a utilizar o termo *matriz* teria sido o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850.

[14]Os alunos assimilam facilmente o contexto da matriz como tabela, pois de modo geral o conceito de tabela já é por eles há muito conhecido e utilizado.

[15]É importante destacar que são apenas algumas transformações geométricas que possuem representação matricial. Comentaremos mais a este respeito no final desta seção na página 64.

[16]Matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895).

[17]Veja as obras de Boyer (2003, p. 407) e Eves (2004, p. 552).

> as matrizes surgiram para Cayley ligadas a transformações lineares do tipo $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ onde a, b, c, d são números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y'). Obviamente a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c, d de modo que ela pode ser simbolizada pelo quadro $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ao qual chamamos *matriz* (*quadrada, de ordem 2*).

Desta maneira, podemos obter a matriz[18] de cada uma das transformações estudadas anteriormente, com exceção da translação[19]. Por exemplo, quando estudamos a rotação na página 46 obtivemos o sistema $\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ y' = x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$, donde obtemos agora a matriz $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Com o objetivo de detalhar um pouco mais a representação matricial das transformações estudadas anteriormente, apresentamos um quandro que apresenta o sistema e a matriz de algumas destas transformações geométricas. Esta explicitação é importante pois o conhecimento das matrizes de cada uma das transformações é peça fundamental para o uso adequado do software Sahapari na sequência didática, tal como destacado no capítulo 3 na página 31.

[18]Para mais detalhes sobre a representação matricial de transformações com uma abordagem de álgebra linear veja a obra de Lipschutz (1994, pág. 488-496).

[19]Observe que das transformações estudadas neste capítulo, a translação é a única que não está na forma $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, e sua representação matricial será abordada logo em seguida.

Transformação	**Sistema**	**Matriz da transformação**
Rotação de 90°	$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotação de 180°	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Rotação de 270°	$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotação de 45°	$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
Rotação de 135°	$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo OX	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexão em relação ao eixo OY	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexão em relação à reta $y = x$	$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexão em relação à reta $y = -x$	$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Homotetia	$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Cisalhamento	$\begin{cases} x' = x + y \cdot \tan\theta \\ y' = x \cdot \tan\omega + y \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 1 & \tan\theta \\ \tan\omega & 1 \end{bmatrix}$

O destaque que se dá a Cayley no estudo de matrizes não está no uso destas tabelas para estudos matemáticos, pois como já dissemos, isto não era novidade. A primazia de Cayley está no fato de, a partir do estudo e observação das transformações geométricas, estabelecer e definir operações algébricas entre as matrizes. Baseados nas obras de Boyer (2003) e Eves (2004), vamos tentar verificar como ele teria chegado à definição destas operações.

Começando pela análise da composição de duas transformações geométricas, consideremos a transformação T_1 que transforma o ponto $P = (x, y)$ em $P' = (x', y')$ e a transformação T_2 que leva $P' = (x', y')$ em $P'' = (x'', y'')$ e que possuem as seguintes expressões:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'' = px' + qy' \\ y'' = rx' + sy' \end{cases} \tag{4.17}$$

Como já fizemos anteriormente, as representações das transformações desta composição podem ser indicadas por um único sistema. Para isso substituímos os valores de x' e y' das expressões de T_1 nas expressões de T_2, obtendo:

$$\begin{cases} x' = (ap + br)\,x + (aq + bs)\,y \\ y' = (cp + dr)\,x + (cq + ds)\,y \end{cases} \tag{4.18}$$

Comparando as matrizes, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de T_1, e $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ de T_2, com a matriz $\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$ da composta $T_2\,(T_1\,(P))$, Cayley definiu a operação de multiplicação de matrizes que conhecemos até hoje:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Percebida e entendida esta multiplicação peculiar[20], é bastante natural também pensarmos em representar as coordenadas dos pontos P e P' como matrizes com uma coluna e duas linhas, obtendo assim uma *equação matricial*para as transformações geométricas. Por exemplo para T_1 teríamos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

De modo geral, temos que transformações geométricas deste tipo[21] podem ser expressas pela equação matricial $P' = M \cdot P$, onde M é a matriz dos coeficientes que caracterizam a transformação.

[20] Definir a multiplicação das matrizes como a soma do produto dos elementos da primeira linha da primeira matriz pelos elementos da coluna da segunda matriz, é algo bastante peculiar. Mas nossa exposição pretende lembrar que esta peculiaridade não é arbitrária, e que está diretamente relacionada à composição de transformações geométricas.

[21] Transformações geométricas que podem ser expressas por $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

Esta forma matricial de representar os pontos P e P', nos faz pensar numa forma matricial para representar a translação dada pelo vetor $\vec{v} = (e, f)$. Representando também o vetor $\vec{v}$ como uma tabela (matriz), e observando que a translação expressa na página 46 como $\begin{cases} x' = x + e \\ y' = y + f \end{cases}$, é obtida como a soma de elementos que estão na mesma posição em cada tabela,

$$P' = P + \vec{v}, \tag{4.21}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

e dessa forma obtemos a definição da adição de matrizes:

$$\begin{bmatrix} g \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g+l \\ i+n \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

ou

$$\begin{bmatrix} g & h \\ i & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & m \\ n & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g+l & h+m \\ i+n & j+o \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Para caracterizar a multiplicação de uma matriz por escalar, podemos analisar a extensão do conceito de adição donde

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

e deste modo

$$3 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Como exemplo para o caso das transformações geométricas, considere a homotetia expressa na página 51 como $\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$ que pode ser expressa na forma matricial de duas formas que são idênticas:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Todas as transformações geométricas apresentadas neste capítulo, e uma infinidade de outras que podem ser obtidas com a composição destas, podem ser expressas numa equação matricial mais geral dada por

$$P' = M \cdot P + B, \tag{4.28}$$

onde M e B são matrizes com elementos reais.

Na forma matricial temos[22]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

É importante ressaltar que as transformações estudadas e apresentadas durante este capítulo, tratam apenas de algumas transformações geométricas, e que foram destacadas por estarem diretamente envolvidas ou de alguma forma relacionadas com a sequência didática proposta para a sala de aula, motivo desta dissertação. Estas transformações puderam todas ser expressas na forma $P' = M \cdot P$ ou $P' = M \cdot P + B$. Na primeira delas estão as transformações lineares[23] e no segundo as transformações afins[24]. Ambas estão relacionadas, a grosso modo, com a linearidade das expressões de x' e y' em função de x e y.

---

[22] Outra maneira de representar transformações geométricas com matrizes é utilizar coordenadas homogêneas, de modo que a expressão que envolve as duas matrizes M e B, pode ser indicada apenas em uma matriz. A equação 4.29 poderia ser dada pela matriz 3×3 do sistema $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. Esta forma não estuda as transformações no plano $\mathbb{R}^2$, mas no plano $z = 1$, dentro do espaço $\mathbb{R}^3$. As coordenadas homogêneas são estudadas em geometria projetiva, e muito utilizadas na área de computação gráfica. Para mais detalhes sobre esta forma de representação veja a página 145 da obra de Lay (1999).

[23] Para mais informações sobre a representação matricial de transformações lineares consulte as páginas 138 a 144, e 273 da obra de Anton e Rorres (2001).

[24] Segundo Anton e Rorres (2001, p. 452), "uma transformação afim é uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ da forma $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ onde a, b, c, d, e e f são escalares".

Observe que existem muitas outras transformações que não podem ser expressas por matrizes da forma como fizemos anteriormente. Basta que se tenha uma expressão não linear para x' e y'. Por exemplo, uma transformação expressa como

$$\begin{cases} x' = xy + \frac{1}{x} \\ y' = \operatorname{sen} x + x^2 y^3 \end{cases} \tag{4.30}$$

não pode ser apresentada na forma matricial.

5 APLICAÇÃO E REALIZAÇÃO

Terminada a elaboração da sequência didática e o delineamento de seus objetivos, passamos à etapa de implementação da proposta em sala de aula, com o intuito de verificar a receptividade dos alunos e a validade da implementação frente aos objetivos que pretendem ser alcançados.

Este capítulo, quando apresenta o relato da implementação das atividades propostas em sala de aula acompanhado das observações do docente, pretende realizar as etapas de experimentação e análise *a posteriori* na concepção da engenharia didática.

5.1 Onde ocorreu

A prática de estágio[1] e a respectiva implementação das atividades da sequência didática ocorreram no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp). O CAp possui uma disciplina semestral, com duas horas semanais, denominada Enriquecimento Curricular (EC). Para a realização desta disciplina, os alunos devem optar por alguma atividade entre várias opções oferecidas por docentes e colaboradores. Com o incentivo e apoio da professora Lúcia Couto Terra apresentamos nossa proposta aos alunos.

No dia da exposição das atividades pelos colaboradores e professores aos alunos, percebemos que estávamos numa disputa um tanto quanto desigual, dado que algumas das opções apresentadas aos alunos envolviam química da culinária, meditação, práticas esportivas, etc. Para fins de divulgação e motivação demos especial enfoque à questão das figuras fractais, dado o seu atrativo visual e suas peculiaridades, e que a disciplina oferecida daria condições aos alunos para construir algumas dessas figuras ao final do semestre. Oferecemos a mesma disciplina para alunos do 2º ano e 3º ano do Ensino Médio. Tivemos cinco adesões no 2º ano e seis adesões no 3º ano.

A sequência didática, foco desta dissertação, consistiu em parte das atividades desenvolvidas durante o EC totalizando cerca de nove encontros. Nos outros encontros

[1] O estágio integra os objetivos da disciplina Estágio Supervisionado deste programa de mestrado, e visa experienciar propostas de ensino vinculadas com as dissertações em desenvolvimento.

da disciplina foram apresentadas atividades relacionadas à Geometria Fractal e Teoria do Caos, e por serem atividades que não envolviam transformações geométricas e matrizes, não fizeram parte do objeto deste estudo. Todas as atividades propostas na sequência didática foram desenvolvidas com as duas turmas. Deste modo, de acordo com observações feitas em sala de aula, pequenas adaptações e modificações eram realizadas nas atividades quando oferecidas para outra turma.

Durante a disciplina tivemos a companhia e apoio do licenciando em matemática Rodrigo Sychocki da Silva[2], que participou ativamente das encontros como nosso colaborador e orientador dos alunos.

5.2 Em sala de aula

Os encontros dos participantes da disciplina ocorreram às terças feiras durante o segundo semestre de 2006. O 2º ano e o 3º ano possuíam encontros distintos, de modo que o primeiro grupo começava às 13h30min e o segundo às 15h15min. De acordo com as características de cada atividade as aulas foram desenvolvidas no laboratório de informática do CAp ou numa sala de aula convencional.

Em cada encontro os alunos receberam as atividades a serem desenvolvidas naquele encontro. Cada aluno recebeu uma pequena pasta para guardar suas atividades. Os alunos ficavam com as pastas apenas durante as aulas, e no final de cada encontro elas eram recolhidas para fins de análise e registro das atividades desenvolvidas. Na atividade seguinte recebiam novamente suas pastas para poder consultar o que fora desenvolvido anteriormente.

Vejamos a dinâmica dos encontros. Inicialmente os alunos recebiam as atividades do dia e as respectivas orientações gerais para o seu desenvolvimento. Depois disso os alunos desenvolviam as atividades e os professores atuavam como motivadores e questionadores. A idéia é de que nesta etapa o docente atue como provocador e questionador, sem necessariamente dar respostas fechadas aos alunos. No final de cada encontro tínhamos um momento de discussão do que fora estudado, propiciando a participação

[2]Conforme mencionado anteriormente, Rodrigo concluiu a graduação no segundo semestre de 2007. A sua participação no EC também estava vinculada a atividades da disciplina de graduação Laboratório de Prática de Ensino.

dos alunos e a exposição de suas observações. O professores conduziam os fechamentos motivando um resumo das observações, e projetando encontros futuros.

5.2.1 Atividades 1 a 4 - o estudo de transformações

A primeira atividade apresentada ao grupo, acompanhada dos comentários e orientações dos professores, transcorreu tranquilamente. Inicialmente notamos uma certa expectativa rodeada de dúvidas quanto ao desenvolvimento. Os alunos pareciam inseguros e se manifestavam pouco. Atribuímos isto ao fato da atividade ser nova e desconhecida por eles. Além disso, os professores também não lhe eram conhecidos, acarretando em momentos de ansiedade e incertezas.

Percebemos que o fato de que cada um tivesse que desenhar as transformações fez com que a atividade se mostrasse um pouco cansativa e desestimuladora, pois os alunos diziam saber o resultado a ser desenhado, mas que tinham "preguiça" de fazer esta representação (o desenho) para todas as transformações propostas. A turma do 2º ano levou todo o tempo previsto para concluir a atividade, enquanto que os alunos do 3° ano mostraram mais celeridade e terminaram antes do tempo previsto. Os alunos não tiveram maiores dificuldades, visto que consideramos uma atividade simples para aquele nível escolar.

Terminada a atividade pareceu-nos que os objetivos da atividade foram atingidos pelos alunos. No entanto, para futuras aplicações, propomos que a atividade deva ser reformulada em alguns aspectos. Percebemos que a realização de várias e repetitivas representações gráficas das transformações poderia ser excluída neste momento inicial, já que estas voltam a aparecer nas atividades seguintes. Sugiro que se explore mais as transformações geométricas a partir de simetrias com o auxílio de gráficos, figuras, obras de arte[3], mosaicos, azulejos, tapeçarias, objetos da natureza, etc.

Na segunda atividade, a realização da representação gráfica das transformações foi imediata para os alunos, pois já tinham feito algo semelhante na atividade anterior. Para estabelecer as relações entre as coordenadas dos vértices alguns alunos tiveram um

[3]Além de podermos observar facilmente a simetria na arquitetura, destacamos também as obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972). O site oficial do artista está disponível em http://www.mcescher.com, e apresenta diversas obras do artista que podem ser utilizadas para estudo de simetrias em sala de aula.

pouco de dificuldade no início, talvez por não terem compreendido o que era proposto pois depois de nova explicação demonstraram ter compreendido, realizando as outras atividades corretamente sem maiores questionamentos. Para o 3º ano a representação matricial das transformações foi imediatamente compreendida, pois já haviam estudado matrizes no final do último ano. Os alunos do 2º ano realizaram esta atividade uma semana depois, pois os mesmos tiveram uma aula extra para um primeiro contato com as matrizes. Eles tiveram mais dificuldade na representação matricial das transformações.

Percebemos que as maiores dificuldades da atividade ocorreram na representação matricial das transformações, mas julgamos que era algo natural e esperado, pois muitos alunos tiveram nesta atividade os primeiros contatos com matrizes. Depois deste impacto inicial, e de momentos de dificuldade, a aula transcorreu normalmente, dando a impressão de que os alunos compreenderam o que estavam fazendo. É claro que a noção de matriz é um tanto quanto abstrata, e demorará um pouco mais para ser compreendida de fato, mas julgamos que o objetivo tenha sido alcançado em grande parte, visto que os alunos conseguiram obter as matrizes depois das explicações iniciais.

Reflexões posteriores nos fizeram concluir que aquela aula extra para falar sobre matrizes não se faz necessária, e que o próprio desenvolvimento da atividade propiciará um estudo diferenciado das matrizes[4]. Podemos falar inicialmente apenas numa tabela de valores formados pelos coeficientes de x e y do sistema $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, relativo à cada uma das transformações estudadas. Pensamos que esta seria uma forma muito mais natural de introduzir o conceito de matriz, de modo que o mesmo iria se construir durante a própria atividade, sem a necessidade de definições e exemplos artificiais. Pensamos também que esta abordagem poderia reduzir algumas dificuldades quanto à insegurança dos alunos frente ao tema matrizes. Isto porque percebemos que o fato de chamarmos a atenção dos alunos de estarmos falando em matrizes, parece que os assustou e trouxe insegurança na continuidade da atividade. Achamos que se não tivéssemos chamado tanta atenção para "este conceito novo" a atividade teria seguido normalmente apenas falando em tabelas de coeficientes, e que no final da atividade poderiam passar a ser chamadas de matrizes.

[4]E a pergunta imediata é: e porque não fizeram logo assim? O motivo é que inicialmente nossa preocupação maior era estudar as operações entre matrizes (e suas propriedades) a partir do estudo de transformações geométricas, e só depois percebemos que esta abordagem também é uma ótima oportunidade para a introdução do conceito de matriz.

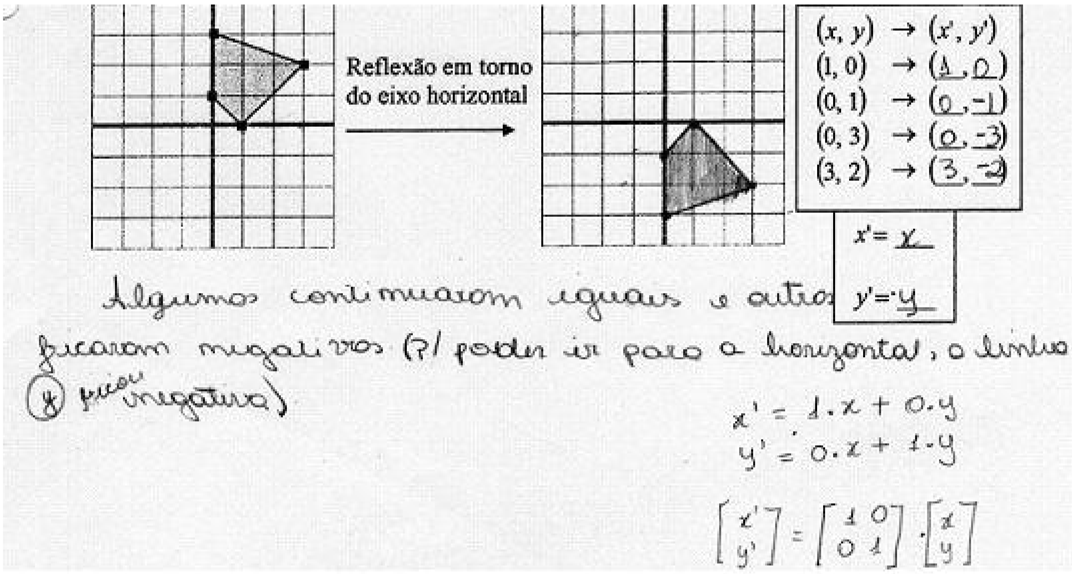


Figura 5.1: Resolução de um(a) aluno(a).

A terceira atividade foi resolvida bem rapidamente pelos alunos, pois eles já haviam feito atividade semelhante com a reflexão. Alguns alunos mostraram curiosidade com as matrizes de rotações de um ângulo qualquer, e comentamos que poderíamos obter estas matrizes genericamente com as relações trigonométricas seno e co-seno, mas que no nosso caso, pelo fato dos ângulos trabalhos serem múltiplos de 90°, os respectivos valores de seno e co-seno se restringiam ao conjunto $\{-1, 0, +1\}$.

No final desta atividade, foi pedido aos alunos para fazerem um resumo das matrizes das transformações geométricas obtidas até então, e neste momento surgiram comentários e controvérsias sobre as matrizes das transformações estudadas: as matrizes de um aluno eram diferentes das do colega, e um aluno possuía matrizes iguais para transformações diferentes. Os próprios alunos discutiram, e corrigiram os seus equívocos.

Foi uma aula muito interessante porque os alunos chegaram rapidamente aos resultados esperados, e promoveram uma comparação de resultados, confirmando valores ou verificando e corrigindo possíveis enganos. Não foram trabalhadas especificamente rotações de ângulos quaisquer, pois achamos que não era necessário para o objetivo da atividade, mas salientamos que a oportunidade seria ótima para usar as relações trigonométricas, e ao mesmo tempo relacionar o assunto com outros tópicos da matemática como a trigonometria e a geometria.

Uma reflexão posterior nos fez perceber que poderíamos ter estudado também rotações com ângulos múltiplos de 45º. É uma maneira interessante de verificar que existem matrizes de transformações que tenham elementos distintos dos do conjunto $\{-1, 0, +1\}$ e que os alunos não fiquem com a falsa impressão de que só estes valores ocorreriam. Estas rotações podem ser estudadas, mesmo que não se queira utilizar relações trigonométricas, pois a sua obtenção pode ser feita a partir da utilização do Teorema de Pitágoras. Estas rotações serão implementadas numa próxima aplicação.

Na quarta atividade levamos os alunos até o laboratório de informática do CAp onde disponibilizamos o aplicativo MVT para que os alunos testassem geometricamente[5] o que as matrizes estudadas até então produziam como resultado, e percebemos que de um modo geral os alunos têm muita facilidade com a utilização de recursos de informática, o que ajudou no andamento da atividade. O aplicativo MVT propicia a visualização da transformação geométrica em um vetor (não definimos vetor para os alunos) que consideramos apenas como uma figura. No entanto, as deformações geradas pela "dilatação" e pela "contração" não ficam muito claras quando aplicadas a um segmento orientado, o que gerou muitas dificuldades na visualização destas transformações pelos alunos do 3° ano.

Como a realização desta atividade pelos alunos do 2º ano apenas ocorreria na semana seguinte, discutimos outras implementações com o colega Rodrigo, e o mesmo desenvolveu um applet Java com o software Cabri-Géomètre II, que está disponível em http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/transformacao_linear/tf.html. Neste applet as transformações geométricas são aplicadas em um retângulo, e as mudanças causadas são muito mais evidentes. Além de propiciar uma melhor visualização do que acontece geometricamente com a figura, também apresenta os valores das coordenadas da figura inicial e da figura transformada.

Na turma do 2º ano usamos este applet, e os resultados foram muito melhores pela melhor visualização das transformações. As entradas a, b, c e d da matriz de transformação $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ podiam ser escolhidos no intervalo de -5 a $+5$ com precisão de uma casa decimal.

[5]Até então tinha sido feita apenas a verificação algébrica no momento de estabelecer as relações entre coordenadas.

Percebemos que os objetivos não foram atingidos completamente com o MVT, pelos motivos já destacados, mas com o applet que implementamos os resultados foram bem melhores porque os alunos puderam visualizar com clareza qual a deformação que cada entrada da matriz causava na figura através da transformação geométrica. Outro fator importante é que os valores das entradas da matriz são escolhidos a partir de uma "barra de rolagem" que propicia deformações automáticas e "contínuas" na figura, o que ajuda na compreensão do que cada entrada da matriz gera na transformação.

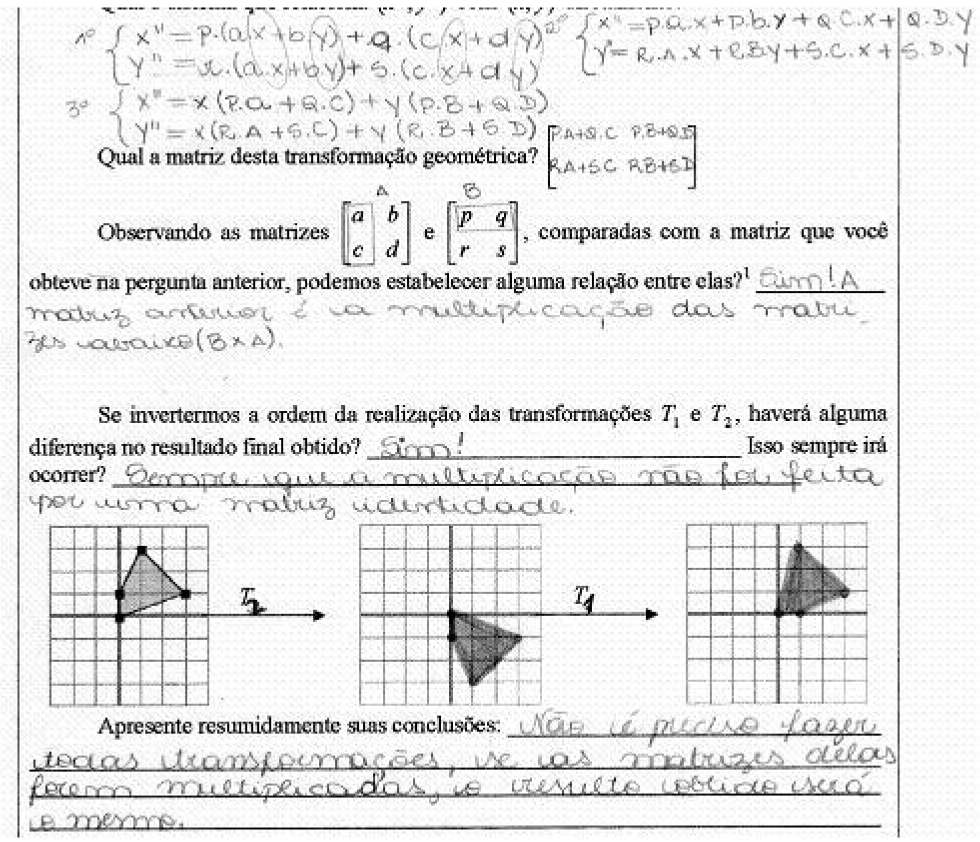
Destacamos que o aplicativo MVT possui muitos recursos para visualização dos mais diversos temas matemáticos, com a grande vantagem de ser totalmente gratuito e não necessitar de instalação, mas o mesmo possui limitações na visualização de certas transformações de modo que não será utilizado numa próxima aplicação desta sequência didática.

5.2.2 Atividades 5 e 6 - operações com matrizes

Nas atividades desta subseção abordamos a origem das operações entre matrizes. A multiplicação entre matrizes será decorrência da decomposição de transformações geométricas, e a adição de matrizes será obtida da translação. É importante destacar que além de motivar a origem das operações entre matrizes, as transformações também propiciam a verificação da propriedade comutativa da adição e da não comutatividade da multiplicação, diretamente relacionadas com os resultados das transformações geométricas.

O início da quinta atividade foi tranqüilo, mas a parte da generalização das transformações geométricas e a interpretação dos sistemas trouxe algumas dificuldades. Tivemos que relembrar aos alunos alguma coisa sobre sistemas lineares. A generalização das transformações é que apresentou maiores dificuldades de compreensão pelo fato dos alunos não estarem muito acostumados com raciocínios genéricos ou com sua representação. Esta afirmação é confirmada pela necessidade maior de intervenções do professor, e por afirmações do tipo: é muita letra professor! Em algumas etapas os alunos "travavam" e pediam mais explicações.

Talvez esta seja a atividade mais "complexa" até aqui proposta, e por isso requer muito cuidado na sua implementação. No entanto, entendemos que esta implemen-



1º $\begin{cases} x'' = p.(ax + by) + q.(cx + dy) \\ y'' = r.(a.x + by) + s.(c.x + dy) \end{cases}$ 2º $\begin{cases} x'' = p.a.x + p.b.y + q.c.x + q.d.y \\ y'' = r.a.x + r.b.y + s.c.x + s.d.y \end{cases}$

3º $\begin{cases} x'' = x(p.a + q.c) + y(p.b + q.d) \\ y'' = x(r.a + s.c) + y(r.b + s.d) \end{cases}$

Qual a matriz desta transformação geométrica? $\begin{bmatrix} PA+QC & PB+QD \\ RA+SC & RB+SD \end{bmatrix}$

Observando as matrizes $\overset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$ e $\overset{B}{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}}$, comparadas com a matriz que você obteve na pergunta anterior, podemos estabelecer alguma relação entre elas?[1] Sim! A matriz anterior é a multiplicação das matrizes abaixo (B x A).

Se invertermos a ordem da realização das transformações T_1 e T_2, haverá alguma diferença no resultado final obtido? Sim! Isso sempre irá ocorrer? Sempre que a multiplicação não for feita por uma matriz identidade.

Apresente resumidamente suas conclusões: Não é preciso fazer todas transformações, se as matrizes delas forem multiplicadas, o resultado obtido será o mesmo.

Figura 5.2: Resolução dos alunos

tação se faz necessária por apresentar uma justificativa histórica plausível para a "maneira tão estranha" de multiplicarmos matrizes. Como a multiplicação de matrizes é obtida pela composição de transformações lineares, os alunos notaram claramente a não comutatividade desta operação, pois uma rotação de 90° seguida de uma reflexão em torno do eixo y gera uma figura resultante diferente do que se fizermos primeiro a reflexão e depois a rotação, e deste modo temos uma "justificativa" geométrica[6] da não comutatividade da multiplicação de matrizes. Alguns alunos perceberam e comentaram que existem composições de transformações geométricas que são comutativas e deram como exemplo a rotação de 180° seguida da reflexão em torno da reta $y = -x$. Este fato mostra que houve um entendimento, pelo menos parcial, da atividade.

Julgamos que nesta atividade precisamos de mais exemplos de composições e uma maior quantidade de casos específicos, e para apenas posteriormente fazer uma generalização mais abstrata. Talvez tenha sido a nossa precipitação de apresentar um único exemplo e logo em seguida a generalização, que tenha trazido e provocado grande

[6] Na verdade esta justificativa geométrica se refere à não comutatividade da composição das transformações geométricas.

parte das dificuldades na generalização proposta. Providenciaremos mais exemplos antes da generalização numa futura implementação.

Na sexta atividade abordamos a translação e a respectiva adição de matrizes. Alguns alunos chegavam corretamente e com facilidade na relação entre as coordenadas pois já haviam feito algo semelhante nas atividades anteriores, mas tinham dificuldade na representação matricial da translação que pode ser expressa como a soma de matrizes. Talvez o que tenha gerado esta instabilidade seja o formato das matrizes neste caso, que serão matrizes 2×1 diferentes das matrizes 2×2 das multiplicações. Esta novidade parece ter gerado alguns percalços, mas a compreensão com a visualização do applet se mostrou muito satisfatória. Destacamos que os alunos fizeram a análise inicial apenas no papel, e só posteriormente testaram suas conclusões no applet Java[7] que está disponível em http://matematicao.psico.ufrgs.br/rodrigo_mat2004/transformacao_linear/tf2.html.

Pensamos que algumas dificuldades na atividade são decorrência natural do processo de ensino-aprendizagem, e de modo geral a visualização das transformações e a possibilidade de interação do applet é um dos fatores importantíssimos na compreensão dos efeitos da matriz de translação na figura final.

5.2.3 Atividades 7 e 8 - iterações no Shapari

Nesta seção apresentamos as atividades que forma desenvolvidas totalmente no laboratório de informática do CAp, utilizando o software Shapari para compor e iterar transformações geométricas para gerar algumas figuras fractais.

Na sétima atividade houve algumas dificuldades iniciais quanto ao uso do software, já que a interface do mesmo não é parecida com a maioria dos softwares que os alunos conhecem. No entanto, mesmo sendo diferente, os recursos do software aparecem em botões grandes, sem poluição visual, o que faz com que o funcionamento do mesmo seja compreendido depois algumas breves explicações.

Nesta atividade os alunos tiveram que implementar as transformações estudadas anteriormente, o que fez com que eles folheassem e pesquisassem sua pasta por diversas vezes para relembrar dados sobre as matrizes. Foi um momento excelente para relembrar as transformações com suas respectivas. Quando eram necessárias transforma-

[7]Observe que este applet para a translação é diferente do apresentado anteriormente.

ções geométricas que não tinham sido estudadas, os alunos foram incentivados a obter estas novas transformações como composição de duas ou mais transformações já vistas, de modo que tinham que multiplicar as respectivas matrizes para obter a matriz da transformação desejada.

Notou-se um ar de surpresa quando uma construção do Shapari era iterada primeiro sobre um quadrado e depois sobre um círculo, mas os resultados finais eram iguais. Comentamos e discutimos que não importa qual a figura inicial, mas o que determinada o resultado obtido com as diversas iterações são as transformações geométricas empregadas no processo. Os alunos comentaram que este resultado final era igual depois de se fazer muitas iterações, e aproveitamos a oportunidade para falar um pouco sobre o conceito de limite, de que a figura fractal[8] era obtida quando o número de iterações era muito grande (o número de iterações tendendo ao infinito). O Shapari possui um comando que repete a mesma iteração por diversas vezes, lembrando o conceito de limite.

Atividade desenvolvida com bastante dinamismo pelos alunos. Mesmo não conhecendo muito o software, os alunos ficaram bastante à vontade com a interface. Consideramos que os objetivos tenham sido alcançados, e destacamos como ponto positivo a criatividade de alguns alunos. Um fato interessante que alguns alunos tentaram criar figuras "fractais" com as letras de seu nome. Outros colegas gostaram e também entraram na brincadeira, cada um querendo fazer letras mais bonitas que os colegas.

Na oitava atividade, começamos com a pesquisa de cada aluno na Internet sobre o termo auto-similaridade, e após alguns comentários socializados pelos alunos e professores, demos desenvolvimento à atividade proposta. No início eles tiveram um pouco de dificuldade, mas depois de algumas orientações, conseguiram desenvolver a atividade individualmente.

Destacamos que o processo de olhar a figura e tentar descobrir como ela foi construída, através da identificação de partes auto-similares ou semelhantes ao todo, propicia um tipo de raciocínio que penso não ser muito comum em sala, fundamental para uma compreensão mais completa do processo. O aluno precisa compreender completamente o processo para poder definir o processo inverso. E neste sentido percebemos que

[8]As figuras fractais da sequência didática são obtidas com um número infinito de iterações. No entanto, depois de algumas iterações não percebemos mais as mudanças a olho nu, e deste modo, não é necessário um número infinito de iterações para a percepção visual de um fractal.

atividade, mesmo com alguns percalços iniciais, alcançou seus objetivos, pois os alunos se mostraram motivados em tentar descobrir qual o processo correto para cada figura.

Destacamos o emprego diferenciado de estratégias: a maioria dos alunos analisou as figuras e tentou perceber quais transformações tinham sido utilizadas nas partes que lhe eram semelhante, no entanto um dos alunos se recusou a utilizar este processo e se colocou a tentar obter a figura sem analisá-la inicialmente pelo processo de tentativa e erro. Este último demorou um pouco mais, mas se mostrou contente ao verificar que o "seu método" também funcionava.

Terminado o que tinha sido proposto, alguns alunos mais curiosos procuraram na internet por figuras fractais e tentaram obtê-las com o Shapari.

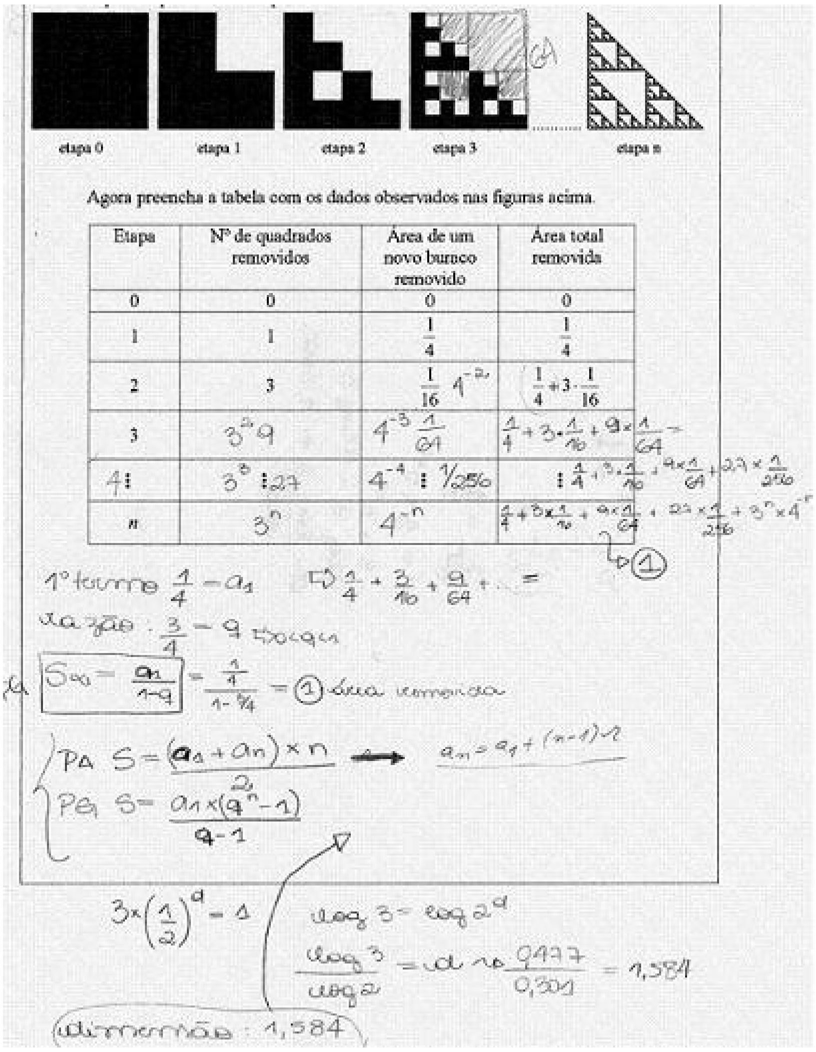
5.2.4 Atividade 9 - ampliando

O objetivo desta última atividade é lançar possibilidades de ampliação deste estudo, e propiciar um breve contato dos alunos com temas que em geral não são abordados no Ensino Médio.

Os alunos preencheram as tabelas da atividade proposta, com orientações do professor quando necessário. Novamente surgiram dificuldades maiores quanto à generalização do raciocínio. Foi necessário recordar alguns conceitos sobre progressões que os alunos do 3º ano não lembravam[9] e que era novidade para o 2º ano. Pelos cálculos, a área que sobrava da figura era igual a zero, no entanto os alunos diziam não concordar porque estavam vendo a figura que parecia ter área. Neste momento, aproveitamos para fazer uma discussão e colocamos a questão da dimensão da figura. Com representações e exemplos no quadro, intuímos qual deveria ser a dimensão da figura e como poderia ser calculada. Os alunos acharam o tema da dimensão inquietante, e fizeram muitas perguntas. Fizemos alguns cálculos testando hipóteses de dimensão para as figuras. A discussão sobre dimensão foi vista de forma não rigorosa mas que fosse percebida facilmente pelos alunos, baseada no artigo de Sallum (2005).

O tema dimensão parece ser um tanto quanto "pesado" para os alunos, mas acho que a oportunidade de discutir o mesmo não poderia ter sido perdida. A aula gerou muitas perguntas dos alunos, algo que considero muito relevante, pois o tema parece ter

[9] O conteúdo havia sido estudado no 2º ano, mas os alunos não lembravam dos detalhes.



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

Agora preencha a tabela com os dados observados nas figuras acima.

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	3	$\frac{1}{16}$ 4^{-2}	$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}$
3	3^2 9	4^{-3} $\frac{1}{64}$	$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+9\times\frac{1}{64}=$
4	3^3 : 27	4^{-4} : $1/256$	: $\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}+9\times\frac{1}{64}+27\times\frac{1}{256}$
n	3^n	4^{-n}	$\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{16}+9\times\frac{1}{64}+27\times\frac{1}{256}+3^n\times4^{-n}$

1

1° termo $\frac{1}{4}=a_1$ $\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots=$

razão $\frac{3}{4}=q$ PG

$\boxed{S_\infty=\frac{a_1}{1-q}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}=1$ área removida

PA $S=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}$ $\longrightarrow$ $a_n=a_1+(n-1)r$

PG $S=\frac{a_1\times(q^n-1)}{q-1}$

$3\times\left(\frac{1}{2}\right)^d=1$ $\log 3=\log 2^d$

$\frac{\log 3}{\log 2}=d \quad \frac{0{,}477}{0{,}301}=1{,}584$

dimensão: 1,584

Figura 5.3: Resolução dos alunos

despertado a curiosidade. Além de fazer alguns cálculos de dimensões, alguns alunos tinham hipóteses da dimensão de outras figuras. Mesmo que o tema não tenha sido compreendido com profundidade, acho que seria possível discutir dimensão com alunos do ensino médio. É claro que sem muitos formalismos e mais como curiosidade. Ótima oportunidade para despertar o interesse dos alunos.

6 ANÁLISE E CONCEPÇÕES POSTERIORES

Neste capítulo pretendemos fazer uma análise da sequência didática que implementamos e ao mesmo propiciar uma avaliação ou validação da proposta frente à metodologia Engenharia Didática.

Sabemos que o processo de validação na Engenharia Didática ocorre internamente, ou seja, no confronto das expectativas e objetivos (análise *a priori*), destacados no capítulo 3, e dos resultados obtidos (*a posteriori*) que foram apresentados no capítulo 5. Neste confronto, que em parte já ocorreu no relato da experiência, consideramos que a sequência didática teria que sofrer algumas alterações. Estas alterações que julgamos necessárias para aprimorar a utilidade e a eficácia da sequência didática, além de projeções de conexões possíveis com outros conceitos, serão pormenorizados no capítulo que segue.

Além disso, faremos alguns comentários sobre a estrutura do CAp, e algumas observações sobre a entrevista que fizemos com um aluno, um ano após a implementação da sequência.

6.1 A estrutura do CAp

Dadas a estrutura e as condições em que ocorreu a implementação da sequência didática planejada, poderiam surgir alguns questionamentos e inquietações quanto à viabilidade de uma implementação futura em condições diferentes. Exatamente por isso optamos por fazer algumas observações.

É importante considerar que a estrutura do CAp possibilitou um ótimo trabalho, principalmente no que se refere ao laboratório de informática sempre disponível e em condições de uso. É notório que a implementação da sequência exige que se tenha um laboratório de informática disponível, principalmente quanto à realização das atividades 7 e 8 que necessitam do aplicativo Shapari para compor e iterar transformações[1]. Ima-

[1] Todas as outras atividades, à exceção da 7 e 8, podem ser realizadas em uma sala de aula convencional. Logo em seguida faremos sugestões de modificações nas atividades inicialmente propostas, utilizando o laboratório de informática em mais atividades, mas fica a critério do docente em adotá-las.

ginamos que a maioria das escolas já possuam laboratório de informática, e que isso não seja empecilho na implementação das atividades[2].

Outro fator a ser considerado é a constituição do grupo de alunos da disciplina de EC. Os alunos optaram por fazer esta disciplina, ao mesmo tempo se mostrando sempre muito participativos e interessados, contribuindo para o bom andamento das atividades. No entanto, mesmo que tenham demonstrado interesse em fazer a disciplina, gostaríamos de destacar que não se tratavam de alunos excepcionais em matemática, mas sim muito interessados[3]. O fato de termos experimentado as atividades em grupos com número reduzido de alunos, não influenciou muito no andamento das mesmas, considerando que a maior parte do tempo as atividades eram realizadas individualmente ou em duplas. Um número maior de alunos talvez trouxesse maior agitação e uma diversidade maior de opiniões para as discussões em grande grupo, o que de forma alguma impediria a realização das atividades. Com mais alunos se necessitará de laboratórios de informática com mais computadores.

Tivemos algumas dificuldades iniciais que estavam relacionadas com o fato de professor e alunos não se conhecerem. Nas primeiras atividades percebemos que alguns alunos se manifestavam pouco nas discussões em grupo, o que foi mudando com o passar do tempo. Imaginamos que quando a sequência for utilizada numa turma em que alunos e professor(a) já se conheçam, estas dificuldades não ocorrerão, propiciando uma boa integração desde o início da atividade.

6.2 As atividades propostas

Sobre as atividades da sequência didática proposta, consideramos que tenham sido proveitosas e enriquecedoras para os alunos, ampliando o campo de visão para conceitos até então desconhecidos e, ao mesmo tempo, possibilitando um aprendizado que justificou peculiaridades operatórias de matrizes, acompanhados de uma aplicação

[2]Mesmo que em algumas escolas ainda não tenhamos laboratórios de informática, consideramos que o uso de mais recursos computacionais nas escolas é uma tendência que irá se confirmar, principalmente se levarmos em consideração políticas públicas que prometem mais investimentos neste setor, inclusive acenando com a possibilidade de computadores portáteis para cada aluno.

[3]Percebemos em aluns momentos que a turma era formada por alunos que integravam um grupo de amigos, de modo que alguns alunos escolheram a disciplina para que pudessem fazer as mesmas atividades dos colegas (amigos).

prática. No entanto, como toda prática docente, precisa ser melhorada e ampliada continuamente. Durante a implementação da sequência didática novas idéias surgiram e algumas foram colocadas em prática imediatamente. Outras idéias surgiram com a análise e reflexão posterior, de modo que serão agora apresentadas e implementadas numa próxima oportunidade.

É importante salientar que a reformulação e adaptação das atividades da sequência didática, modificou bastante o enfoque de algumas atividades. Destacamos o primeiro bloco de atividades, analisado logo a seguir, que passou a ter uma série de atividades com abordagem essencialmente geométricas. Conceitos geométricos ficaram mais evidentes em detrimento de uma abordagem mais algébrica, realizada inicialmente. Este enfoque mais geométrico se concretiza na indicação de uso das ferramentas geométricas do software GeoGebra.

Esta reestruturação com enfoque mais geométrico nas primeiras atividades deu mais importância às definições geométricas das transformações geométricas. Ao mesmo tempo devolve maior importância à geometria nos nossos currículos, repletos de abordagens algébricas. É fácil notar que não pretendemos favorecer uma ou outra área, mas propiciar uma conexão ente as mesmas, dedicando momentos importantes para cada forma de pensamento.

Para maior clareza das mudanças que serão propostas, faremos um paralelo das atividades que foram inicialmente planejadas e implementadas, com as atividades reformuladas que destacam as mudanças sugeridas. O leitor deve recordar que no capítulo 3, quando descrevemos todas as atividades, as mesmas foram divididas em quatro blocos de acordo com as características apresentadas. Vamos retomar cada um desses blocos e indicar as mudanças sugeridas. As atividades planejadas inicialmente serão resumidas de modo bem superficial, dado que já foram pormenorizadas no capítulo 3, e estão apresentadas integralmente no *Apêndice B* na página 98. As atividades reformuladas serão mais discutidas e estão apresentadas na íntegra no *Apêndice C* (página 115).

6.2.1 Estudando e analisando transformações

Neste bloco desenvolvemos atividades para a exploração das transformações geométricas, e percebemos, de acordo com as observações do capítulo 5, a necessidade de melhorias.

O fato de os alunos externarem que parte das primeiras atividades se tornou cansativa, talvez por apresentarem questões parecidas ou pela necessidade de diversas representações gráficas manuais, fez com que substituíssemos integralmente a primeira atividade por duas outras. Uma delas traz imagens de azulejos e obras do artista Escher, apresentando figuras que envolvem reflexões e rotações. Além destas, optamos por apresentar também gráficos de algumas funções que possuem peculiaridades semelhantes. O objetivo é que os alunos identifiquem reflexões e seus eixos, rotações e outras transformações[4].

Na segunda atividade, sugerimos a utilização do software GeoGebra e de seus recursos para apresentar transformações geométricas. Irá diminuir a sensação de repetição de atividades, e propiciar a representação gráfica com movimento (geometria dinâmica) em confronto com a "imobilidade" do desenho manual. Esta forma de estudo evita conclusões precipitadas a partir de casos particulares, pois fornece mobilidade e uma diversidade grande de situações a serem exploradas com o simples movimento do mouse[5]. Esperamos que os alunos inicialmente apenas implementem e manipulem as transformações geométricas apresentadas no ícone da figura 6.1 abaixo[6].

Terminada esta primeira etapa, os alunos serão motivados a estabelecer as coordenadas dos vértices de um polígono com determinada transformação. Para isto poderão utilizar as transformações definidas do software e verificar as coordenadas obtidas na *Janela de álgebra* do GeoGebra. Mesmo com a utilização de recursos computacionais, o aluno deve ser orientado a fazer registro de suas conclusões e resultados obtidos, que

[4]Há a possibilidade do docente promover a exploração de outros gráficos de funções além dos apresentados, e inclusive aprofundar-se na discussão gráfica e algébrica dos mesmos.

[5]Além disso pretende ser um primeiro contato dos alunos com o software GeoGebra, que voltará a ser utilizado nas atividades seguintes.

[6]Consideramos que neste momento os alunos deverão estar focados exclusivamente no entendimento das características geométricas das transformações. Para que não se distraiam com questões algébricas, o docente deve orientar que desabilitem as opções *Eixo* e *Janela de álgebra* do menu *Exibir*. Isto fará com que o software se apresente de maneira idêntica a outros softwares de geometria dinâmica como Cabri-Géomètre e Régua e Compasso.

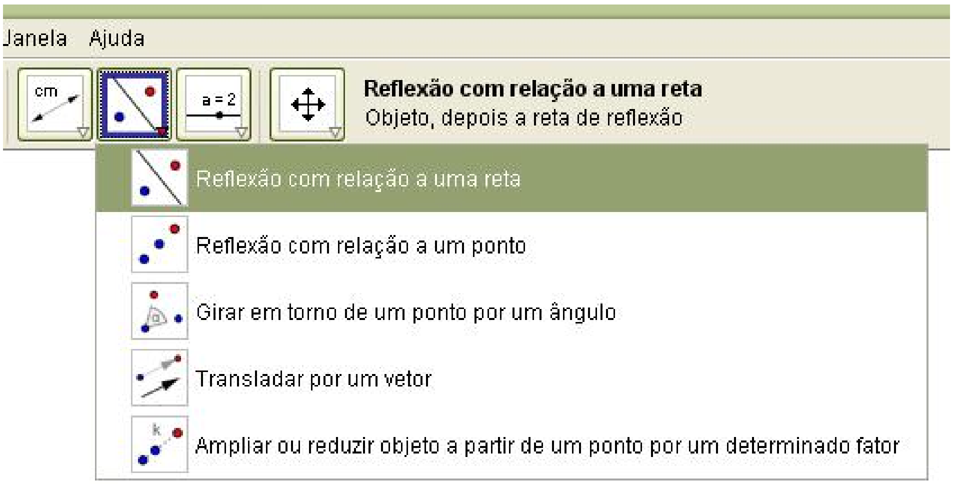


Figura 6.1: Ícone de transformações do GeoGebra.

pode ser feito em papel ou em editores de texto. O registro passa a ser uma fonte de consulta para atividades posteriores e outros estudos.

Nas outras atividades deste bloco foram sugeridas poucas alterações. Na terceira atividade apenas alteramos as indicações de obtenção da matriz de transformação. Na atividade antiga aparecia a expressão matricial do sistema de equações, incluindo a multiplicação de matrizes, o que distorcia o objetivo da atividade. Objetivo este que visa obter a matriz de cada uma das reflexões estudadas. A multiplicação de matrizes e a representação matricial do sistema aparecerão apenas em atividades posteriores, de modo que neste momento a matriz obtida será entendida como uma tabela de coeficientes do sistema. Esta é uma maneira mais natural para a abordagem do conceito de matriz, do que aquela apresentada inicialmente, que de certo modo forçava o aparecimento de uma equação matricial (envolvendo multiplicação) para representar o sistema linear.

O restante da atividade é igual, mas para futuras aplicações sugerimos o apoio do software GeoGebra para estabelecer a relação entre as coordenadas dos vértices das figuras. Como já foi comentado, o uso do software permite a análise de figuras e situações diferentes das apresentadas na folha, além de podermos verificar se os valores obtidos estão corretos.

Na quarta atividade apenas acrescentamos rotações de ângulos de 45º e 135º, para que tenhamos matrizes com elementos diferentes[7] de $+1$, 0 ou -1, evitando conclusões equivocadas a respeito dos elementos das matrizes das rotações.

Na quinta atividade somente acrescentamos alguns exercícios para propiciar o estudo da multiplicação de matriz por escalar, a partir da análise de transformações geradas pelas matrizes[8].

Veja o quadro comparativo:

	Atividade Implementada		**Atividade Reformulada**
1	O professor apresenta aos alunos as transformações geométricas de reflexão e rotação. Após esta apresentação os alunos recebem material para representar reflexões no plano cartesiano, identificando corretamente as coordenadas dos vértices dos polígonos refletidos.	1	Estudo da reflexão, rotação e outras transformações a partir da identificação de elementos destas, em figuras, obras de arte e gráficos de funções.
		2	O estudo das características geométricas das transformações disponíveis no software GeoGebra. Primeiras observações sobre coordenadas e algumas relações algébricas.
2	Estabelecer relações entre as coordenadas dos vértices dos polígonos para obter a matriz de cada uma das reflexões apresentadas.	3	Mesmos objetivos. Mudamos um pouco a redação, e sugerimos o uso do software GeoGebra como apoio no estudo.
3	Estabelecer relações entre as coordenadas de polígonos para obter a matriz das rotações apresentadas.	4	Mesmos objetivos. Acrescentamos atividades para estudar rotações de 45º e 135º.
4	Verificar no aplicativo MVT se as matrizes das transformações obtidas anteriormente estão corretas. Utilizar este aplicativo para observar as transformações obtidas com matrizes diversas. Identificação da "função" de cada um dos elementos da matriz genérica de uma transformação.	5	Trocamos o MVT pelo Applet Java elaborado. Acrescentamos exercícios para o estudo da multiplicação de matriz por escalar e seus reflexos nas transformações (homotetias).

[7] Além dos ângulos citados, podemos utilizar outros que sejam múltiplos de 45º, pois suas matrizes serão obtidas facilmente com o auxílio do Teorema de Pitágoras. Se o docente considerar oportuno, poderá considerar ângulos múltiplos de 30° ou 60°, e neste caso se utilizar das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Estas razões trigonométricas são deduzidas via geometria elementar.

[8] Conforme relatado no capítulo anterior, durante a implementação da atividade passamos a utilizar o Applet Java Transforma 1, elaborado por Rodrigo Sychocki da Silva. O applet continuará a ser usado em implementações futuras.

6.2.2 Operações com matrizes

Neste bloco, em que estudamos a origem e as propriedades das operações ente matrizes a parir das transformações geométricas, acrescentamos mais uma atividade para estudar de forma mais aprofundada a multiplicação de matrizes.

A sexta atividade foi reformulada. Acrescentamos[9] mais casos particulares antes da generalização algébrica da composição de transformações geométricas. Esta generalização possibilita a obtenção do peculiar algoritmo de multiplicação de matrizes. Na implementação percebemos que os alunos tiveram bastante dificuldade no processo de generalização, e por isso decidimos ampliar o número de casos particulares prévios.

Acrescentamos uma atividade na sequência didática para explorar mais a multiplicação entre matrizes. Inicialmente destacamos a possibilidade de escrever o sistema $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, como uma equação matricial[10] dada por $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Depois da obtenção do algoritmo da multiplicação, não havia atividades que explorassem o processo do algoritmo peculiar da multiplicação. Por isso algumas atividades foram acrescentadas, tais como: para obter as coordenadas dos vértices obtidos com a aplicação da reflexão em relação à reta $y = x$ nos pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, -2)$ e $C = (3, -4)$, basta multiplicar a matriz da transformação, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, pela matriz com colunas formadas pelas coordenadas dos pontos.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Observe que a matriz obtida apresenta nas colunas as coordenadas dos pontos obtidos com a aplicação da transformação. Veja o resultado apresentado na figura abaixo.

A atividade que estuda a translação foi ampliada, acrescentando-se exercícios com a composição[11] de transformações quaisquer com a translação, de modo a se estudar

[9] Com o acréscimo de mais casos particulares o professor deve estar atento ao tempo necessário para a realização desta atividade. Planejamos as atividades de modo que cada uma pudesse ser desenvolvida em duas horas-aula. Com o acréscimo realizado consideramos que ela tenha ficado um pouco extensa, mas decidimos não desmembrá-la pois as atividades desmembradas poderiam dificultar a percepção pretendida: a multiplicação de matrizes provém da composição de transformações geométricas.

[10] Observe que agora esta equação faz sentido, pois já se definiu a multiplicação de matrizes.

[11] A composição de duas translações propicia o estudo e a verificação de que a soma de matrizes é comutativa.

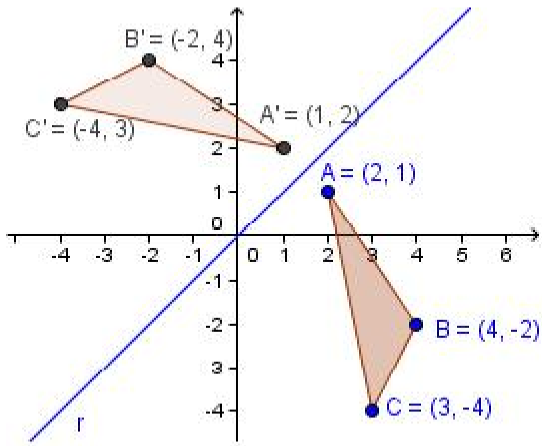


Figura 6.2: Reflexão em relação à reta $y = x$.

a expressão geral[12] $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, que será necessária para a utilização do software Shapari em atividades posteriores.

Vejamos o quadro comparativo deste bloco de atividades:

	Atividade Implementada		**Atividade Reformulada**
5	A partir da análise da composição de transformações geométricas, obter a origem da multiplicação das matrizes. Da mesma forma, vamos estudar a propriedade não-comutativa da multiplicação.	6	Mantivemos os mesmos objetivos. A atividade foi ampliada com mais casos para estudo, antes da etapa de generalização.
		7	Obtenção da equação matricial. Aplicação da multiplicação de matrizes, para obtenção dos pontos transformados.
6	Estudo da translação para obter a operação de adição de matrizes. Promover o estudo da expressão matricial das translações, combinadas com outras transformações.	8	Os objetivos são os mesmos. A atividade foi ampliada com mais questões, propiciando uma melhor compreensão.

6.2.3 Gerando fractais e ampliando um pouco

Nos dois últimos blocos de atividades que tratavam da aplicação de transformações geométricas para gerar fractais no Shapari e de outras possibilidades de estudo, respectivamente, não foram feitas alterações. Consideramos, no entanto, que são atividades que propiciam o acréscimo de outras situações a serem exploradas. Estas questões que envolvem as possibilidades de complemento serão discutidas na seção seguinte, mas não

[12]Podemos também apresentar aos alunos a expressão geral utilizando coordenadas homogêneas (veja página 63). Esta poderia ser uma forma de abordar matrizes de ordem 3×3.

foram introduzidas nas atividades por não se tratarem de objetivo específico da sequência didática planejada.

	Atividade Implementada		**Atividade Reformulada**
7	Compor e iterar transformações geométricas no Software Shapari para gerar algumas figuras fractais.	9	Mesma atividade e mesmos objetivos.
8	Analisar figuras fractais e a partir da observação de partes auto-similares, descobrir o processo como elas foram geradas.	10	Mesma atividade e mesmos objetivos.
9	Sequências numéricas infinitas. Utilizar progressões geométricas para estudar a área das figuras fractais. Conceito de dimensão	11	Mesma atividade e mesmos objetivos.

Não fizemos alterações nas atividades, mas lembramos que o docente deve promover a criatividade e iniciativa dos alunos, para propiciar uma maior participação e envolvimento com o trabalho. Na atividade de geração de fractais no Shapari podemos incentivar a criação de fractais diferentes dos propostos, e quem sabe até promover uma eleição do fractal mais bonito elaborado por cada aluno[13].

Na atividade da identificação do processo que gera o fractal a partir da análise de partes auto-similares podemos sugerir que os alunos criem uma figura fractal, e desafiem um(a) colega para descobrir o processo.

6.3 Possibilidades para o currículo

Uma das concepções de nossa proposta é a construção de um *currículo em rede*, conforme discutimos na página 21. Consideramos que ela tenha sido alcançada, dada a diversidade de conceitos abordados durante a sequência didática, e a grande variedade de interligações com outros conceitos que ela possibilita. Pensamos que esta concepção, de uma sequência com um eixo central mas multifacetada, também tenha chegado aos alunos e percebida na aplicação das atividades. Isto porque no final da implementação pedimos

[13]Quando fizemos a implementação sugerimos a criação de "fractais" que lembrassem as letras dos nomes de cada aluno. É interessante observar na figura E.4, na página 141, que um(a) aluno(a) destacou a *criatividade* como um dos elementos da atividade implementada.

aos alunos para elaborarem um *mapa conceitual*[14], de modo que a produção de cada um confirma nossa afirmação. Para que tenhamos uma idéia do que dissemos, apresentamos abaixo a produção de um dos alunos, enfatizando a interligação entre diversos temas. Alguns outros mapas como o abaixo foram colocados no *Apêndice E* na página 140.

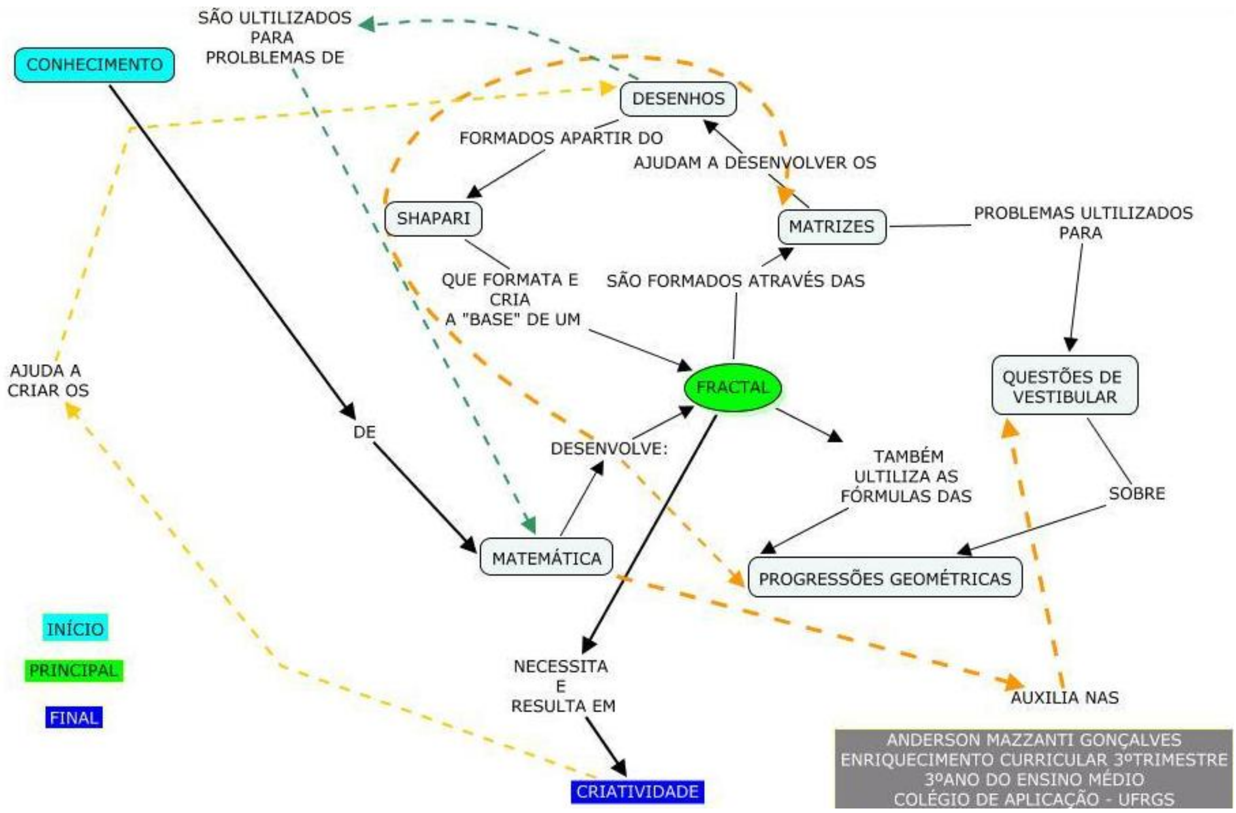


Figura 6.3: Mapa conceitual - aluno

Para contribuirmos um pouco mais com esta idéia de currículo em rede, destacaremos alguns temas que possuem relação com a sequência didática e poderiam ser aprofundados de acordo com o interesse e os objetivos de cada docente.

Isometrias - as transformações geométricas, e dentre elas as isometrias[15], foram utilizadas na sequência didática com o objetivo de estudar matrizes. Mas as suas propriedades geométricas não foram estudadas aprofundadamente. Refletindo sobre a composição curricular do Ensino Médio, pensamos que as transformações geométricas se apresentam como ótima oportunidade de resgate do estudo de geometria, de modo geral

[14]Para fins simplistas consideraremos como sendo um mapa que apresenta uma série de conceitos que se relacionam de determinada maneira. Os alunos já haviam feito mapas conceituais com outros professores em outras disciplinas.

[15]São transformações no plano que preservam as distâncias entre os pontos da figura transformada. As isometrias não alteram o tamanho dos segmentos e nem os ângulos da figura transformada. Como exemplos citamos as rotações, as reflexões e as translações.

tão abandonado. Para contribuir com essa missão sugerimos a combinação da sequência didática desta dissertação com atividades como as sugeridas por Cerqueira[16] (2005) sobre isometrias. Vaz (2004) apresenta atividades que envolvem as isometrias de um software de geometria dinâmica como recurso no processo de prova e demonstração. A atividade foi implementada para os anos finais do Ensino Fundamental mas pode ser adaptada para o Ensino Médio, considerando que a matemática escolar é carente do processo de demonstração. A Robótica pode ser outro tema complementar a ser estudado junto com as transformações geométricas, conforme sugerem os estudos e as atividades elaboradas por Accioli (2005).

Vetor - quando estudamos as translações a palavra *vetor* aparece no software GeoGebra, mas não estudamos o conceito com os alunos, sugerindo apenas uma idéia geral para o movimento das figuras ou pontos. O conceito de vetor é mais um conceito geométrico que pode ser aprofundado na escola, possuindo relações com outros conceitos escolares[17]. Carneiro (2007) nos apresenta uma sequência de atividades para estudar a resolução de sistemas lineares com apoio da geometria vetorial.

Trigonometria - o estudo de rotações de qualquer ângulo propicia uma ótima aplicação para relações trigonométricas ou mesmo funções trigonométricas.

Fractais e progressões geométricas - a última atividade por nós apresentada se destacava pelo uso de progressões geométricas, feita de maneira bastante resumida pois queríamos apenas discutir um pouco o conceito de dimensão com os alunos. No entanto, as progressões geométricas podem ser estudadas de forma mais aprofundada, utilizando o conceito de fractais. É o que sugere Gonçalves (2007) quando apresenta uma sequência didática inteira para estudar progressões geométricas via fractais. Para aprofundar um pouco mais o estudo de fractais e sua relação com transformações geométricas, veja as atividades sugeridas por Eberson (2004) para construir fractais em ambientes computacionais[18].

---

[16] Todas as atividades de autores sugeridas nesta seção, provém de dissertações de mestrado que apresentam sequências didáticas para a sala de aula. Para ter acesso a estas sequências didáticas, basta consultar as referências indicadas que estão disponíveis nos sites das instituições em que foram defendidas.

[17] Na escola, o conceito de vetor costuma ser estudado na física, mas é quase esquecido pela matemática

[18] Anton (2001) apresenta possibilidades da aplicação de matrizes, algumas já abordadas parcialmente neste texto, como: teoria de grafos (pág. 397), jogos de estratégia (pág.405), computação gráfica (pág. 422), fractais (pág. 444), caos (pág. 456), criptografia e outros. Estas aplicações foram planejadas para a Educação Superior, mas podem ser adaptadas para o Ensino Médio.

6.4 A entrevista

Como já dissemos anteriormente, o estágio e a implementação da sequência didática ocorreu no CAp durante o segundo semestre do ano 2006. Cerca de um ano após a implementação da atividade, consideramos que seria interessante fazer alguma entrevista com os alunos para saber se conceitos estudados ainda eram lembrados, e principalmente saber da opinião dos alunos quanto à validade da proposta, se comparada com o ensino regular de matrizes[19]. Dado o tempo que havia passado, apenas conseguimos contato com um dos alunos que havia participado do grupo. Realizamos a entrevista no mês de novembro de 2007 e a mesma está transcrita na íntegra no *Apêndice D* na página 138.

A leitura da entrevista fará com que cada leitor tenha a sua percepção do quanto foi importante a implementação da atividade, mas gostaríamos de destacar a lembrança das operações matriciais pelo aluno: "é, a gente usou multiplicação de matrizes, acho que divisão de matrizes também se não me engano, e soma e subtração também. Mas basicamente era com matriz, assim, a nossa matemática".

Mesmo que o aluno tenha se enganado quanto à divisão, percebe-se que mesmo trabalhando com diversos conceitos como fractais, transformações geométricas, uso de informática, a disciplina foi lembrada pelo estudo das matrizes.

Dado importante a considerar é o relato de que o estudo de matrizes em sala de aula costuma ser pela repetição de exercícios, o que deveras confirma o que se apresenta nos livros didáticos: definições, exercícios, e alguns problemas "frágeis".

O aluno ainda destaca que o fato de ter estudado as matrizes na implementação da sequência didática, facilitou muito o acompanhamento das atividades quando posteriormente o conceito foi visto em sala de aula.

[19]É importante destacar, que quando começamos a atividade, a turma do 2º ano ainda não tinha estudado matrizes.

7 COMENTÁRIOS FINAIS

A definição do tema desta dissertação foi demorada. Exigiu muitas leituras e reflexões. Definido o tema, tínhamos uma certeza: a sequência didática precisava se opor a um currículo linear e compartimentado, e deve abordar conceitos que permitam conexões com diferentes áreas da matemática. consideramos que isto tenha sido alcançado. A atividade motivou o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas, aproximando conceitos de geometria a conceitos de álgebra. A composição e iteração de transformações geométricas, definidas por matrizes, propiciou aos alunos um primeiro contato com a geometria fractal, tema pouco estudado na maioria das escolas.

Consideramos que a compreensão mais adequada de currículo para este tipo de atividades com multi-relações, é a de currículo em rede tal como apresenta Pires (2000) e já discutida na página 21 deste texto. Dado o exposto acima, além das diversas possibilidades de aprofundamentos e relações que esta sequência apresenta e estão descritas na página 85, concluímos que conseguimos atingir esta meta.

É claro que precisamos salientar, que não é somente a utilização desta sequência didática que vai propiciar um currículo em rede, mas principalmente a metodologia utilizada pelo docente na condução das atividades, e a disposição do mesmo na abordagem de temas relacionados e que foram destacados na dissertação como complementares.

Na análise dos escritos sobre o tema, percebemos que os parâmetros curriculares para o Ensino Fundamental incentivam muito o estudo de transformações geométricas. O mesmo não acontece no caso do Ensino Médio, dada a abordagem diferenciada do texto, embora se destaque a necessidade de aprofundamento de estudos realizados no nível anterior. Nos documentos oficiais americanos percebemos o incentivo no estudo de transformações geométricas em todos os níveis escolares, culminando com a sugestão da abordagem matricial das transformações nos últimos anos escolares.

E qual o reflexo destas orientações curriculares nos livros didáticos? A maioria dos livros didáticos faz eventualmente menção às transformações mas não estuda o tema, nem de forma superficial. E quanto às matrizes, na maioria deles os conceitos são introduzidos com exemplos "frágeis", conforme destacamos na página 14, e as operações são definidas genericamente e treinadas com exercícios algébricos. À exceção dos exercícios algébricos, a maioria dos problemas de aplicação de matrizes propostos não necessitam obrigatoriamente de matrizes para serem solucionados. Cabe salientar que a forma com que os livros didáticos são organizados, evidencia o conceito de um currículo linear e compartimentado[1].

A sequência didática elaborada resgata o estudo de transformações geométricas, estabelece relações com matrizes e propicia um estudo diferenciado destas. No caso das matrizes fica claro a necessidade de sua aplicação para gerar fractais no Shapari. É uma situação prática que precisa da aplicação de matrizes.

E o objetivo central deste estudo foi alcançado? Consideramos que sim. Pretendíamos elaborar uma sequência didática para o estudo de matrizes a partir da análise de transformações geométricas, propiciando uma abordagem que justificasse as definições das operações ente matrizes e suas propriedades. A propriedade foi elaborada e implementada. Com o estudo da composição de transformações propiciamos a obtenção da definição das operações entre matrizes, tal como teria ocorrido na história da matemática. Esta abordagem justifica a peculiaridade[2] da multiplicação e propicia justificativas imediatas para a comutatividade ou não das operações.

Mas como toda atividade docente, a sequência didática apresentada não se pretende completa, fechada e terminada. Sempre temos o que acrescentar, o que melhorar, o que modificar, etc. Depois da primeira implementação, verificamos a necessidade de alterações, que foram efetuadas e apresentadas no texto. E além destas, muitas outras reformulações e adaptações deverão ocorrer. Para isto, basta que se pratique e se reflita sobre a prática.

A redação deste texto e a elaboração da sequência didática está integralmente direcionada aos colegas professores, que fazem da sua vida, uma vida docente. Todo o trabalho que tivemos na elaboração, no estudo, implementação, reflexão, reformulação e análise da sequência didática, só fará sentido se esta obra chegar aos professores da rede de ensino. Este é um dos objetivos do mestrado profissionalizante em ensino de matemática, e nosso também: produzir material concreto para ser utilizado em sala de aula, e que de fato este material chegue até as nossas salas de aula.

[1] Vem a calhar a situação em que o pai pergunta ao filho: filho, o que estás estudando em matemática atualmente? Ah, pai. Hoje o professor explicou o capítulo 8, e os exercícios ficaram de tema.

[2] Porque na soma de matrizes operamos termo a termo, e na multiplicação não?

Para contribuir com esta intenção, elaboramos um CD que contenha a integralidade da sequência didática, os applets utilizados em sala de aula e indicações de endereços para conseguir ter acesso aos softwares utilizados. Destacamos que os softwares utilizados se caracterizam pela permissão de uso. O CD está colocado no *Apêndice F*, na última página desta dissertação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACCIOLI, R. M. **Robótica e as transformações geométricas**: um estudo exploratório com alunos do ensino fundamental. 2005. Mestado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2006. Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUM, J. (Org.). **Didáticas das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. p.193–217.

BANNON, T. J. Fractals and Transformations. **Mathematics Teacher**, Reston, p.178–185, March 1991.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal**: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries): matemática**, Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**, Brasília, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). **Matemática : catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio : PNLEM/2006**, Brasília, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações curriculares para o Ensino Médio**, Brasília, vol. 2, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008 : Matemática.**, Brasília, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Matemática : catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio : PNLEM/2009**, Brasília, 2008.

CARNEIRO, P. S. **Geometria Vetorial na escola**: uma leitura geométrica para sistemas de equações. 2007. Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática — UFRGS, Porto Alegre.

CERQUEIRA, A. P. F. de. **Isometrias**: análise de documentos curriculares e uma proposta de situação de aprendizagem para o ensino médio. 2005. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática — PUC/SP, São Paulo.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCON, J. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática - volume único**. 1.ed. São Paulo: Ática, 2008.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A Experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **O Sonho de Descartes**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1998.

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4.ed. São Paulo: Atual, 2003.

EBERSON, R. R. **Um estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano**. 2004. Mestrado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FRANZON, C. R. P. **Análise do livro I do Geometria de Descartes**: apontando caminhos para o ensino da geometria analítica segundo uma abordagem histórica. 2004. Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática — UFRN, Natal.

GLUCHOFF, A. Hands-on Fractals and the unexpected in mathenatics. **Mathematics Teacher**, Reston, vol. 99, n.8, p.570–574, April 2006.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

GONÇALVES, A. G. N. **Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais.** 2007. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática — PUC/SP, São Paulo.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria analítica. São Paulo: Atual, 2005. vol. 7.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. 5.ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar**: conjuntos, funções. São Paulo: Atual, 2004. vol. 1.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F.; OLIVEIRA, C. J. de (Org.). **Etnomatemática, currículo e formação de professores**. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Globo, 1974.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

LIMA, E. L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. vol. 3.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 8.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. vol. 1.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**: teoria e problemas. 3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

LONGEN, A. **Matemática**: uma atividade humana. Curitiba: Base Editora, 2003. Coleção em três volumes.

LUZ, V. A. **Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas**: da reforma da matemática moderna aos dias atuais. 2007. Mestado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas**: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. Mestrado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

MANDELBROT, B. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1998.

MEGA, E. **Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série**: um estudo comparativo em relação ao material utilizado. 2001. Mestrado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: NCTM, 2000.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D.; MALETSKY, E.; PERCIANTE, T. **Fractals for the Classroom**: strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1999. vol. 3.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D.; MALETSKY, E.; PERCIANTE, T.; YUNKER, L. **Fractals for the Classroom**: strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1991. vol. 1.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D.; MALETSKY, E.; PERCIANTE, T.; YUNKER, L. **Fractals for the Classroom**: strategic activities. New York: Springer-Verlag/NCTM, 1991. vol. 2.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escolar**: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. Mestrado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática**: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. da. **Números racionais, reais e compexos.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.57, p.1–8, 2005.

SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. 2002. Mestrado em Educação — Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática - Ensino Médio**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005. Obra em 3 volumes.

VASCONCELLOS, M. J. C. de; SCORDAMAGLIO, M. T.; CÂNDIDO, S. L. **Matemática**: projeto escola e cidadania para todos. São Paulo: Editora do Brasil, 2004. Coleção em três volumes.

VAZ, R. L. **O uso das isometrias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração.** 2004. Mestrado em Educação Matemática — PUC/SP, São Paulo.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDES, V. P. **Matemática - volume único**. São Paulo: Scipione, 2004.

Apêndice A REFLEXÃO EM RELAÇÃO À UMA RETA

Para estabelecer o ponto simétrico de P em relação a uma reta[1] dada r com equação[2] do tipo $y = mx$ com $m \in \mathbb{R}$ constante. Inicialmente traçamos uma reta s perpendicular a r passando por[3] $P = (x_0, y_0)$. Com alguns cálculos obtemos a equação de s que é dada por $y = \dfrac{-x + my_0 + x_0}{m}$.

A retas r e s se interceptam no ponto $I = \left(\dfrac{x_0 + my_0}{1+m^2}, \dfrac{mx_0 + m^2 y_0}{1+m^2}\right)$. Considerando o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{PI} = \left(\dfrac{my_0 - m^2 x_0}{1+m^2}, \dfrac{mx_0 - y_0}{1+m^2}\right)$, transladamos o ponto P pelo vetor $2\vec{v}$, e obtemos o ponto $P' = (x', y')$ cujas coordenadas são dadas por: $x' = x_0 \cdot \dfrac{1-m^2}{1+m^2} + y_0 \cdot \dfrac{2m}{1+m^2}$ e também $y' = x_0 \cdot \dfrac{2m}{1+m^2} - y_0 \cdot \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$

Como a reta r é perpendicular a s, e $\overline{PI} = \overline{IP'}$, temos que r é mediatriz do segmento PP'. E dessa forma P' é simétrico de P em relação à reta r.

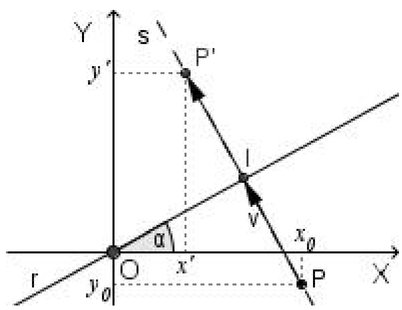


Figura A.1: Reflexão

Para reduzir o tamanho das expressões das coordenadas de P' podemos identificá-las com relações trigonométricas. Considerando α o ângulo entre a reta r e o eixo OX, sabemos que $m = \tan\alpha$ e podemos verificar que $\cos 2\alpha = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$ e que $\operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{2m}{1+m^2}$.

[1]Trataremos aqui apenas de reflexões em relação a retas que passam pela origem, já que reflexões em torno de retas que não passam pela origem podem ser obtidas a partir de uma reflexão deste tipo composta com translações.

[2]Ressaltamos que a expressão geral $y = mx$ envolve também o eixo das abscissas que pode ser expresso pela equação com $m = 0$. No entanto, o eixo das ordenadas não pode ser representado por meio desta expressão.

[3]Estamos utilizando coordenadas (x_0, y_0) para P em vez de (x, y) que usamos anteriormente, para que não haja confusão com as variáveis x e y da reta $y = mx$. Em seguida voltaremos a utilizar (x, y) para favorecer um comparativo com as demais transformações geométricas.

Substituindo estas igualdades nas expressões de x' e y' obtemos o sistema 4.5 logo abaixo. Como x' e y' não estão expressos em função das variáveis x e y da reta $y = mx$, aproveitamos também para substituir as coordenadas (x_0, y_0) de P pelas já utilizadas anteriormente (x, y), com o intuito de favorecer um comparativo entre as expressões de x' e y' de todas as transformações geométricas estudadas neste texto.

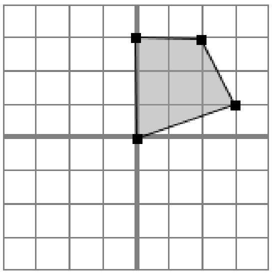
$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \\ y' = x \cdot \operatorname{sen} 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \tag{A.1}$$

Apêndice B ATIVIDADES IMPLEMENTADAS

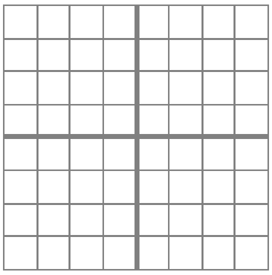
Nome: ________________________________ Data: _________

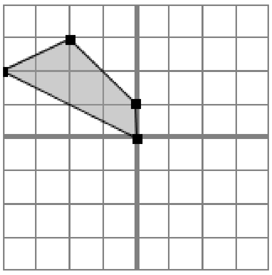
ATIVIDADE 1

Apresente graficamente o resultado de cada transformação geométrica:

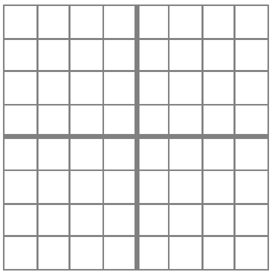


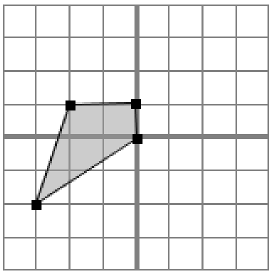
Reflexão em torno do eixo vertical



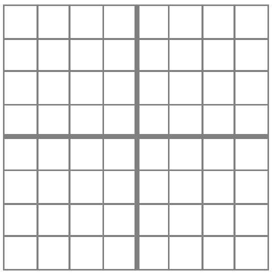


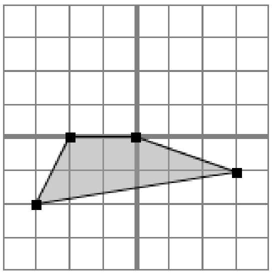
Reflexão em torno do eixo vertical



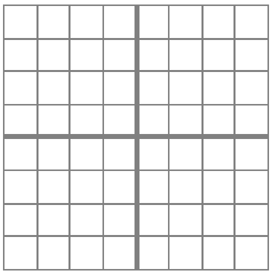


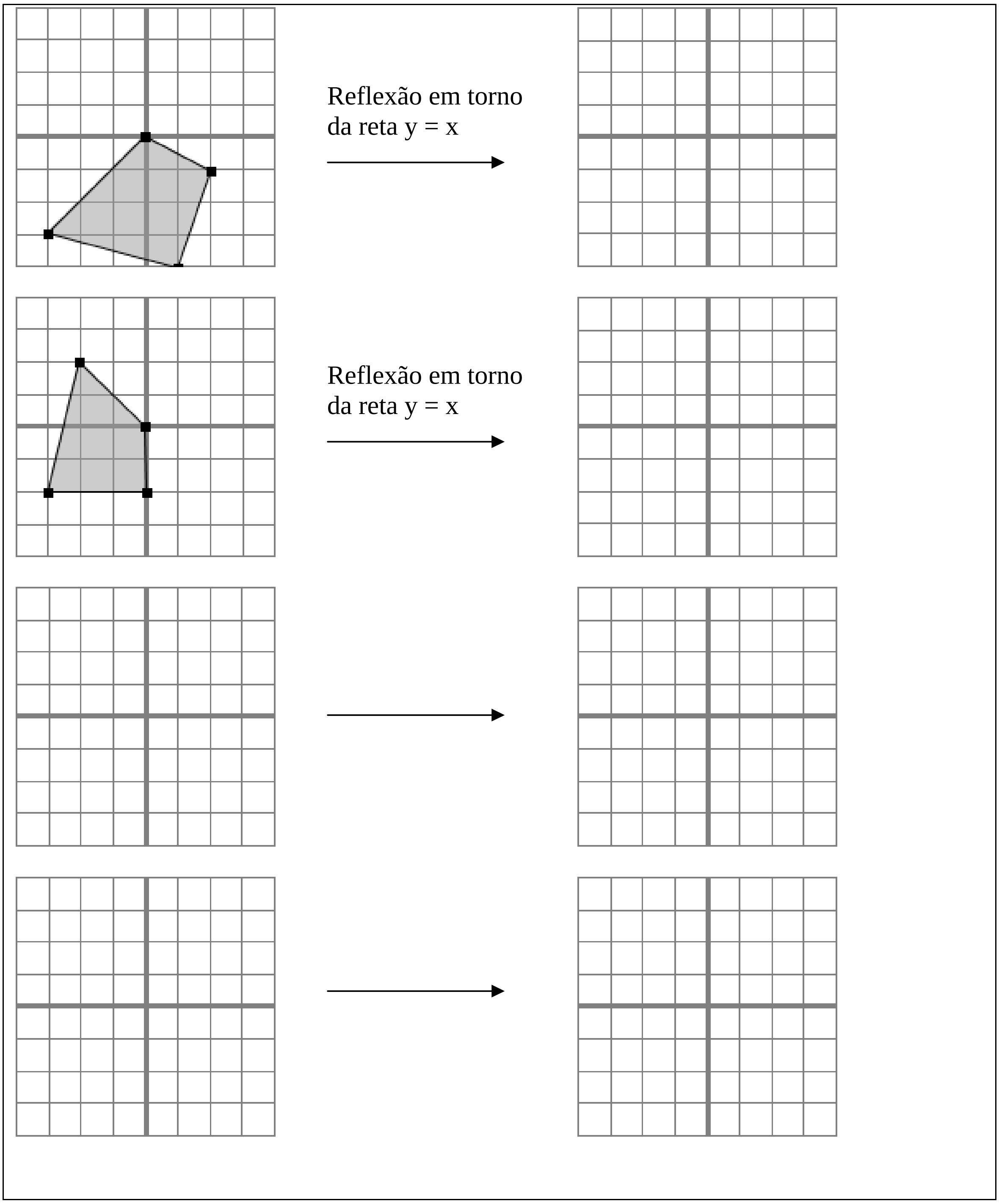
Reflexão em torno do eixo vertical





Reflexão em torno do eixo vertical

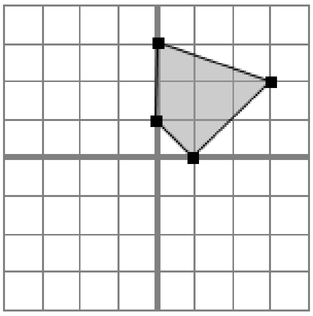



Reflexão em torno
da reta y = x
Reflexão em torno
da reta y = x

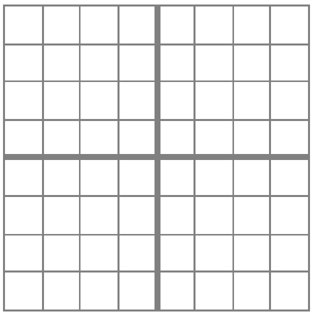
Nome:____ Data: ______________

ATIVIDADE 2

Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida.



Reflexão em torno do eixo vertical



$(x,\ y)$	$\to$	$(x',\ y')$
$(1,\ 0)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 1)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 3)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(3,\ 2)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$

Existe alguma relação entre as coordenadas da figura obtida e as coordenadas da figura inicial?

Qual?____

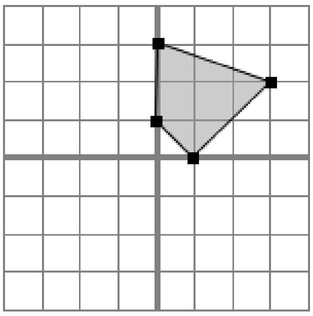
____

Tente generalizar! Para as coordenadas x e y da figura inicial, quais os valores das coordenadas x' e y' da figura obtida?

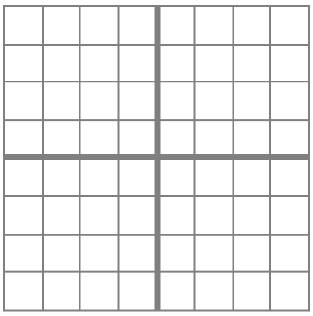
$x' =$ ___

$y' =$ ___

Para as transformações abaixo, obtenha os valores das coordenadas da figura obtida, e tente estabelecer uma relação, tal como no caso anterior, entre as coordenadas da figura final e as coordenadas da figura inicial.



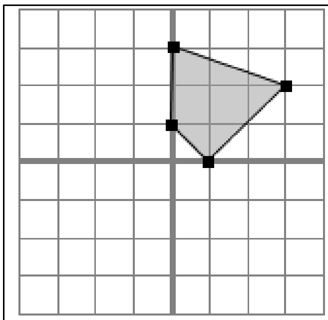
Reflexão em torno do eixo horizontal



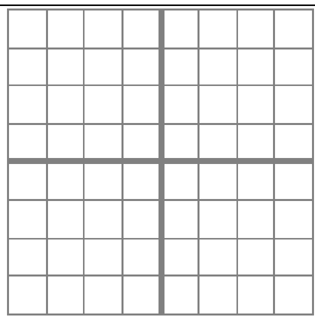
$(x,\ y)$	$\to$	$(x',\ y')$
$(1,\ 0)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 1)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 3)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(3,\ 2)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___



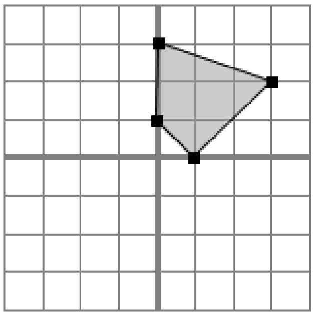
Reflexão em torno da reta y = x



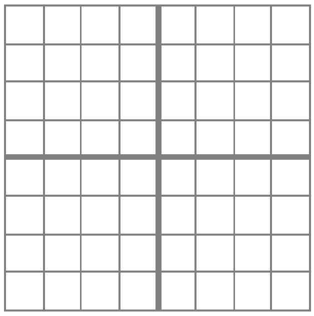
$(x,\ y)$	$\rightarrow$	$(x',\ y')$
$(1,\ 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 3)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(3,\ 2)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$

$x' = \_\_\_$

$y' = \_\_\_$



Reflexão em torno da reta y = - x



$(x,\ y)$	$\rightarrow$	$(x',\ y')$
$(1,\ 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,\ 3)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(3,\ 2)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$

$x' = \_\_\_$

$y' = \_\_\_$

Observe que em todas as transformações anteriores, os valores x' e y' podem ser escritos em função de x e de y. Deste modo, poderíamos tentar expressar todas as transformações de uma maneira semelhante.

No caso da reflexão em torno do eixo vertical obtemos $\begin{matrix} x' = -x \\ y' = y \end{matrix}$. Observe que as duas equações podem ser expressas como $\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$.

Relembrando os conteúdos de resolução de sistemas e matrizes, podemos expressar o sistema acima na forma matricial:

$$\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é chamada matriz da transformação geométrica “Reflexão em torno do eixo vertical”

Obtenha as matrizes das transformações abaixo:

Reflexão em torno do eixo horizontal:

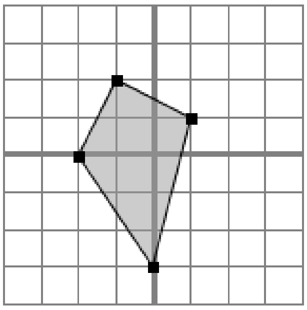
Reflexão em torno da reta $y = x$.

Reflexão em torno da reta $y = -x$.

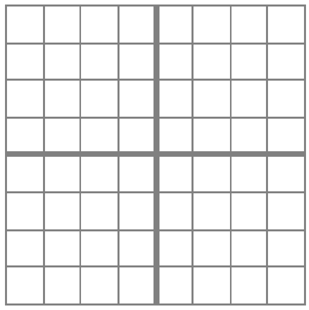
Nome:____ Data: _____________

ATIVIDADE 3

Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida.



Rotação de 90º anti-horária →



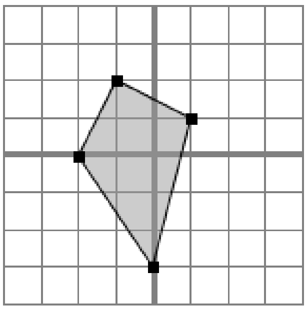
$(x,\ y)$	$\rightarrow$	$(x',\ y')$
$(1,\ 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-1,\ 2)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-2,\ 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,-3)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$

Tal como nas atividades do encontro anterior, tente generalizar a relação entre os valores das x e y da figura inicial, e dos valores das coordenadas x' e y' da figura obtida.

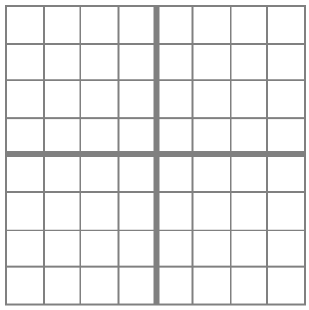
$x' = \_\_\_$

$y' = \_\_\_$

Para as transformações abaixo, obtenha as generalizações para cada caso.



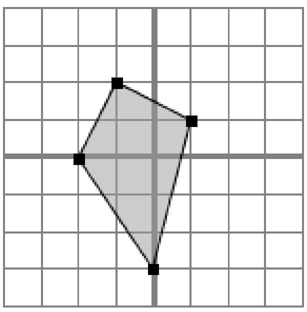
Rotação de 180º anti-horária →



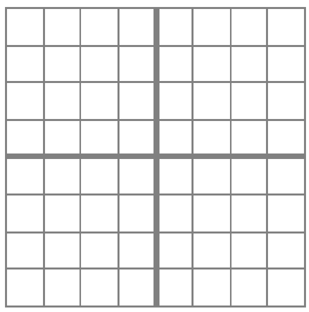
$(x,\ y)$	$\rightarrow$	$(x',\ y')$
$(1,\ 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-1,2)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-2,\ 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,-3)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$

$x' = \_\_\_$

$y' = \_\_\_$



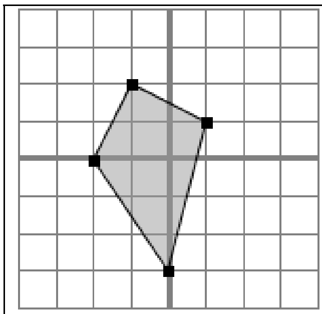
Rotação de 270º anti-horária →



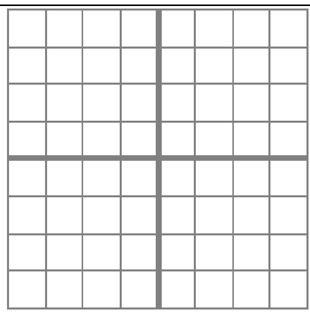
$(x,\ y)$	$\rightarrow$	$(x',\ y')$
$(1,\ 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-1,2)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(-2,\ 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,-3)$	$\rightarrow$	$(\_\_,\_\_)$

$x' = \_\_\_$

$y' = \_\_\_$



Rotação de 360º anti-horária $\longrightarrow$



$$\begin{array}{lcl}(x,\ y) & \to & (x',\ y') \\ (1,1) & \to & (\_\_,\_\_) \\ (-1,2) & \to & (\_\_,\_\_) \\ (-2,\ 0) & \to & (\_\_,\_\_) \\ (0,-3) & \to & (\_\_,\_\_)\end{array}$$

$x' =$ ____

$y' =$ ____

Todas as relações que você obteve podem ser escritas na forma matricial. Desta maneira identificamos a matriz da respectiva transformação geométrica.

Obtenha as matrizes das transformações:

a) Rotação de 90º (anti-horária):
b) Rotação de 180º (anti-horária):
c) Rotação de 270º (anti-horária):
d) Rotação de 360º (anti-horária):

Agora nós já conhecemos as matrizes de algumas rotações e algumas reflexões. No espaço abaixo, faça um resumo das matrizes até aqui obtidas.

Reflexões:	Rotações:
em torno do eixo vertical (y) $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 90º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
Em torno do eixo horizontal (x) $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 180º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
em torno da reta $(y = x)$ $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 270º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
em torno da reta $(y = -x)$ $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 360º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Nome:______________________________________ Data: _____________

ATIVIDADE 4

No final da atividade anterior fizemos um “resumo” das matrizes de algumas transformações estudadas anteriormente. Utilize o Java Applet MVT (e outras aplicações em Java) para verificar se as matrizes de fato proporcionam a transformação desejada.

As transformações que as matrizes proporcionaram corresponderam às suas expectativas? ____

Vamos testar agora, algumas matrizes diferentes das que você obteve anteriormente. Ao lado de cada matriz abaixo, descreva o que acontece com as figuras:

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ____

Estas matrizes geram transformações geométricas?__________________________

Observe que estas transformações “deformam” as figuras, diferentemente do que acontece com rotações e reflexões.

Como poderíamos chamar estas novas transformações?______________________

Indique alguma matriz diferente das anteriores, e que você gostaria de analisar. Comente as transformações obtidas.

Vamos testar mais algumas matrizes?!

$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ____

Há alguma semelhança (ou diferença) entre estas matrizes, e aquelas logo acima?

____

____

Você seria capaz de apresentar um raciocínio geral para estas matrizes? Escreva com suas próprias palavras.____

Tente generalizar, e indicar o que cada um dos valores a, b, c, d determine na transformação. Sugestão: varia um dos valores, mantendo os outros fixos. O que acontece se algum elemento acima for negativo? Explique, utilizando exemplos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a \rightarrow$ ____

$b \rightarrow$ ____

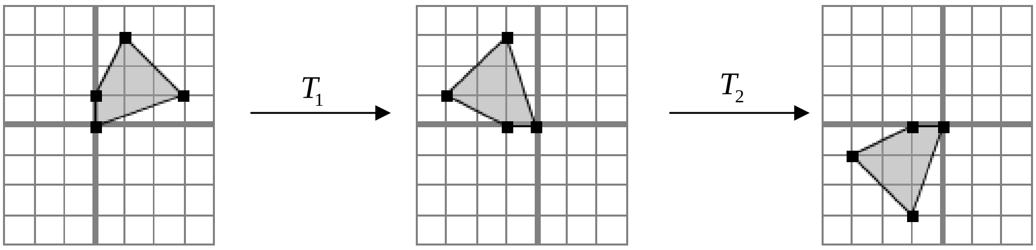
$c \rightarrow$ ____

$d \rightarrow$ ____

Nome:____ Data: _____________

ATIVIDADE 5

Na seqüência de figuras abaixo, um quadrilátero sofre duas transformações geométricas seguidas (T_1 e T_2) que você já conhece. Observe:

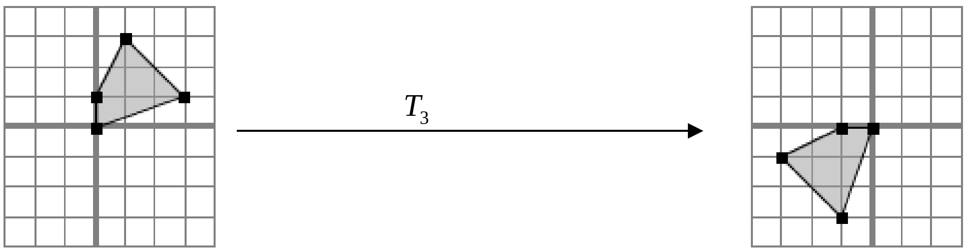


Qual o nome destas transformações? T_1 :

T_2 :

Qual a matriz que gera cada transformação? $T_1 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ e $T_2 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Existe alguma transformação geométrica que faz diretamente a transformação da primeira figura na terceira?



Qual a matriz desta transformação? $T_3 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Observe que T_3 faz diretamente o que T_1 e T_2 fazem em seqüência. Quando isto acontece, costumamos dizer que T_3 é <u>“composta pelas” transformações</u> T_1 e T_2.

Existe alguma relação entre as matrizes das transformações T_1, T_2 e T_3 estudadas nesta atividade?____

Observe que todas as transformações que estudamos até agora, “levam” coordenadas (x, y) em coordenadas (x', y'), e podem ser expressas como um sistema $\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, onde a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é dita matriz da transformação geométrica.

Observe o esquema abaixo que “traduz” duas transformações consecutivas dadas pelas respectivas matrizes.

$$(x, y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (x', y') \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}} (x'', y'')$$

Donde obtemos que:

$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases}$ sistema que relaciona (x', y') com (x, y).

$\begin{cases} x'' = p \cdot x' + q \cdot y' \\ y'' = r \cdot x' + s \cdot y' \end{cases}$ sistema que relaciona (x'', y'') com (x', y').

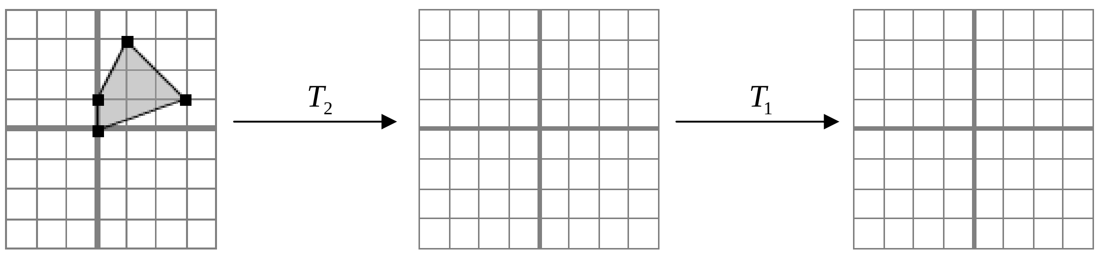
Qual o sistema que relaciona (x'', y'') com (x, y) diretamente?

Qual a matriz desta transformação geométrica? $\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

Observando as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, comparadas com a matriz que você obteve na pergunta anterior, podemos estabelecer alguma relação entre elas?[1] ____________

____

Se invertermos a ordem da realização das transformações T_1 e T_2, haverá alguma diferença no resultado final obtido? __________________________________ Isso sempre irá ocorrer? ____



Apresente resumidamente suas conclusões sobre a atividade de hoje: _____________

____

____

____

____

____Discussão em grande grupo!

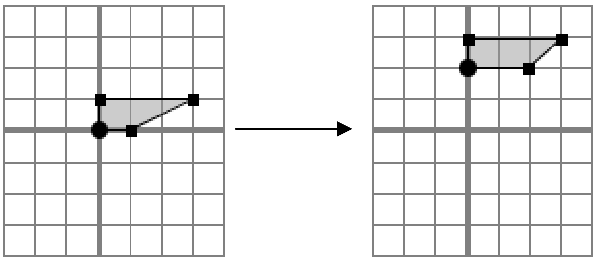
[1] Arthur Cayley (1821-1895), matemático britânico, descobriu e analisou estas relações.

Nome:______________________________________ Data: _____________

ATIVIDADE 6

Verificando um dicionário, o que significa a palavra *transladar*?________________

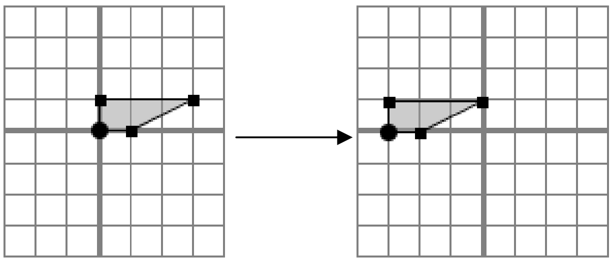
Analisemos algumas transformações chamadas de translações. Identifique a relação entre as coordenadas (x, y) e (x', y').



$(x, y) \to (x', y')$
$(0, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(0, 1) \to (\_\_, \_\_)$
$(1, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(3, 1) \to (\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

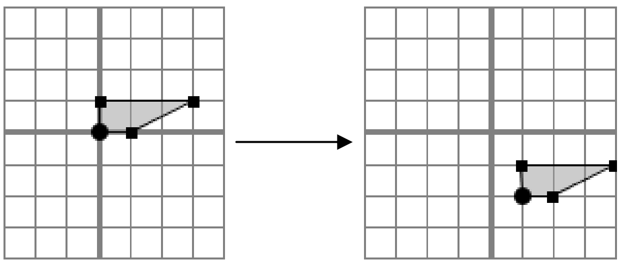
$y' =$ ___



$(x, y) \to (x', y')$
$(0, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(0, 1) \to (\_\_, \_\_)$
$(1, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(3, 1) \to (\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___



$(x, y) \to (x', y')$
$(0, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(0, 1) \to (\_\_, \_\_)$
$(1, 0) \to (\_\_, \_\_)$
$(3, 1) \to (\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___

Podemos expressar estas transformações da mesma maneira que as estudadas anteriormente? Qual a diferença? Como fazer? ____________________________________

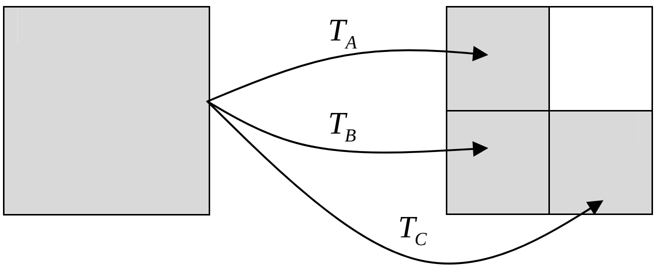
____

Apresente uma forma matricial para estas transformações!

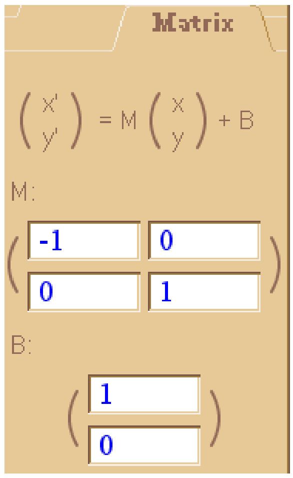
Nome:______________________________________ Data: ____________

ATIVIDADE 7

Analisemos algumas transformações possíveis de serem editadas no Shapari:



Passo 0 Passo 1 .....



Se quisermos construir estas três transformações, é fácil observar que todas elas possuem uma "redução" de 50% horizontal e vertical. Além disso, algumas das transformações também são transladadas. De modo que a maneira geral de representar estas transformações é dada por: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. O software Shapari representa como $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, onde M e B são as matrizes dadas acima.

Obtenha as matrizes de cada uma das transformações apresentadas na figura inicial:

T_A

____

T_B

____

T_C

____

Implemente estas transformações no Shapari. Aplique as transformações diversas vezes numa figura inicial que seja um quadrado. O que acontece com a figura? __________

____

Se a figura inicial for uma circunferência, e aplicarmos as transformações diversas vezes, o que acontece com a figura? ______________________________

____

Aplique as transformações diversas vezes, e descreva a figura final que você obtém:

____

Obs.: Cada figura que você construir, salve com a data de hoje, seu nome, e um número indicando a ordem das figuras obtidas. Exemplo: a 1ª figura que eu fizer será salva por: 2609vandoir1

Além da contração, para cada caso você pode escolher outras transformações para compor T_A, T_B e T_C.

No caso anterior, altere apenas T_A adicionando uma rotação de 90º e observe o que acontece. A figura será muito diferente? Salve e descreva esta figura. ___________________
____

Agora, além da compressão adicione em cada transformação o que está indicado:

$T_A \rightarrow$ reflexão vertical

$T_B \rightarrow$ rotação de 90º

$T_C \rightarrow$ reflexão horizontal

Aplique estas transformações diversas vezes. Salve e descreva a figura obtida: _____
____

Agora é com você! Use a sua criatividade e crie duas figuras diferentes das anteriores, utilizando o mesmo processo. Descreva e salve estas figuras. Não se esqueça de apresentar as matrizes que você utilizou.

Nome:______________________________________ Data: _____________

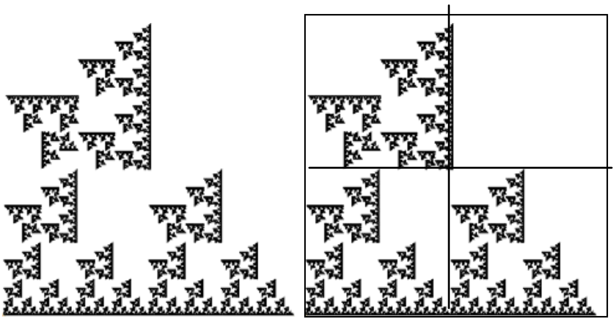
ATIVIDADE 8

O que seria uma figura geométrica auto-similar?

Observe o que encontramos em http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal:

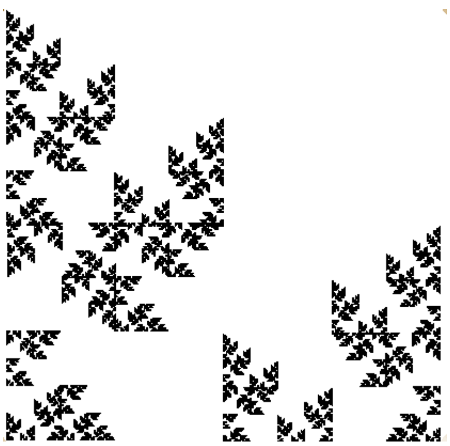
"Um fractal (anteriormente conhecido como curva monstro) é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo."

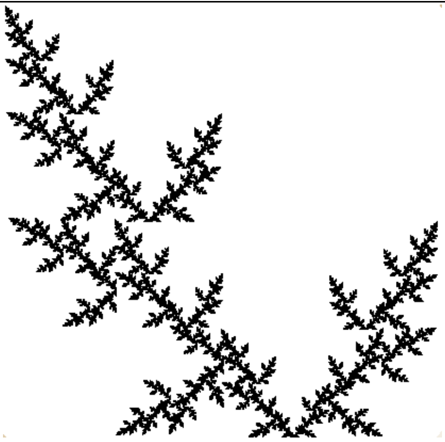
Observe a figura abaixo obtida com o software Shapari. Percebemos nela, partes que são similares (semelhantes) ao todo.

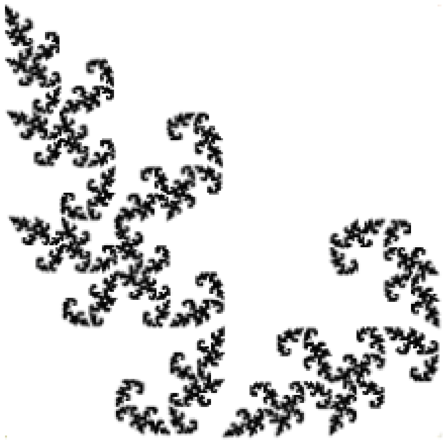


Analisando estas partes similares ao todo, podemos entender a maneira como esta figura foi obtida no Shapari.

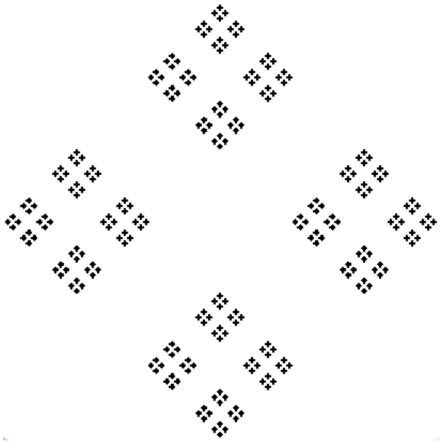
As figuras abaixo foram obtidas com o software Shapari. Identifique as matrizes que foram utilizadas para gerar cada uma destas figuras.

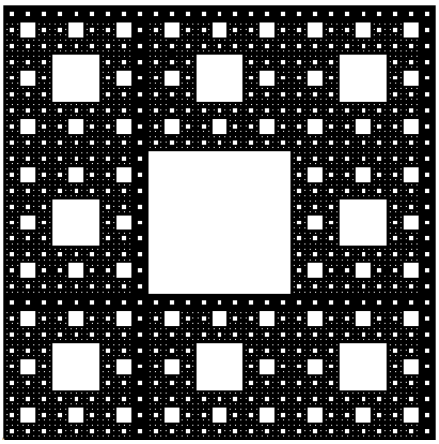






Desafio:

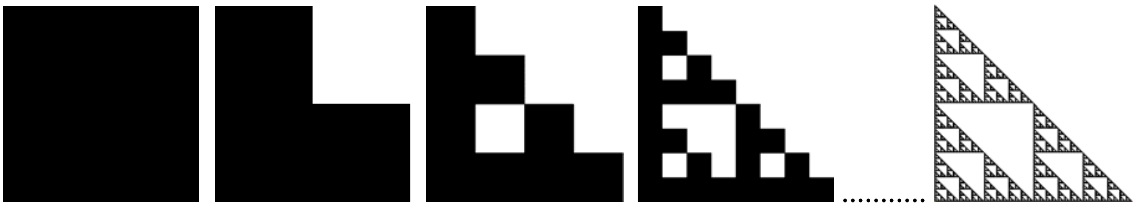




Nome:____ Data: ______________

ATIVIDADE 9

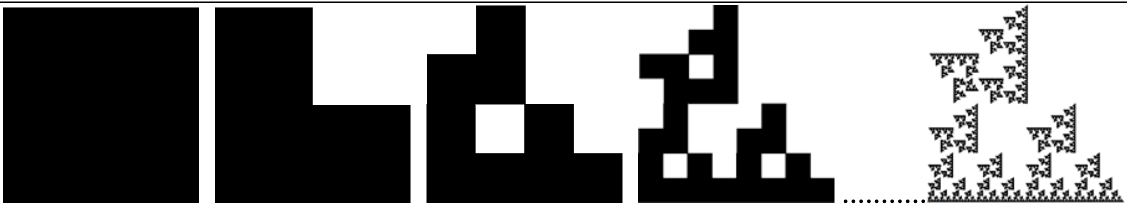
Observe a seqüência de construções obtida com o Shapari, e considere o lado de medida 1 para o quadrado da etapa 0.



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

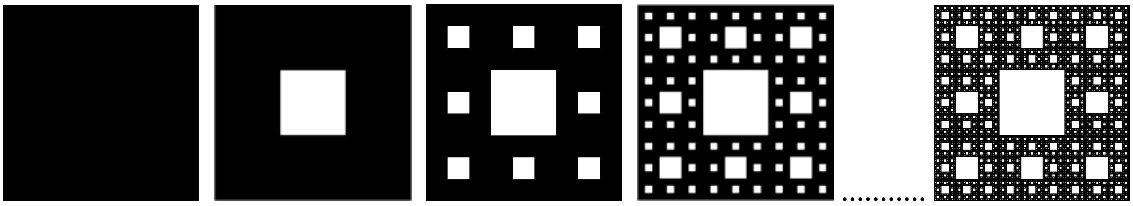
Agora preencha a tabela com os dados observados nas figuras acima.

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}$
3			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0			
1			
2			
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

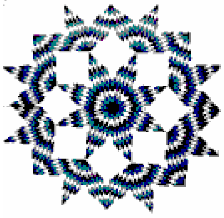
Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0			
1			
2			
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

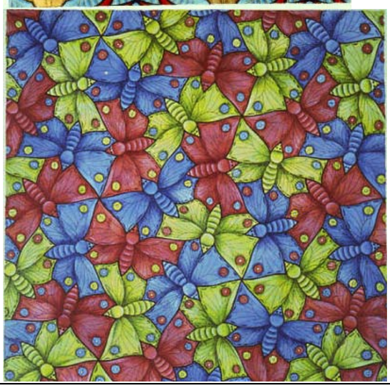
Apêndice C ATIVIDADES REFORMULADAS

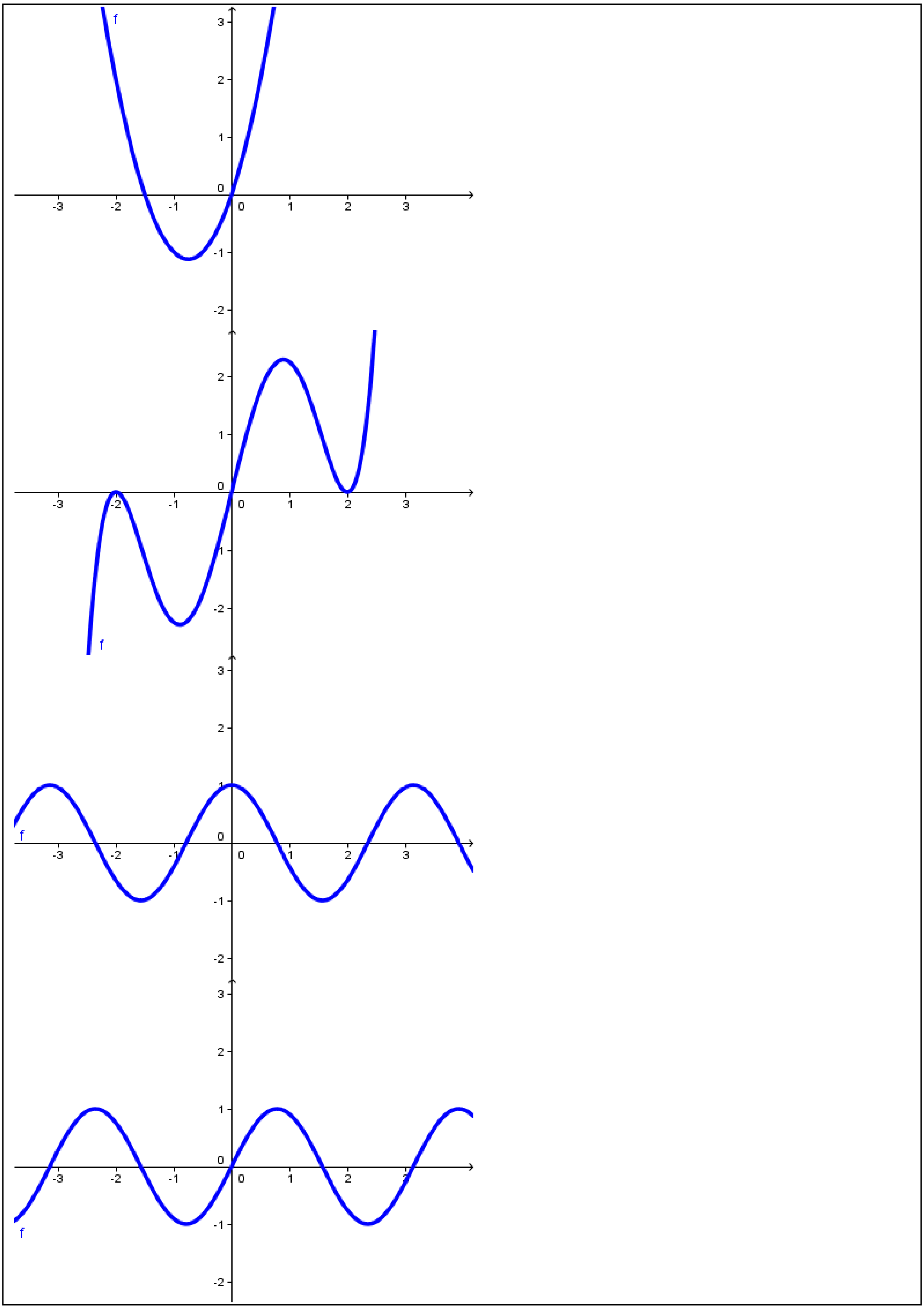
Nome: ___________________________________ Data: _________

ATIVIDADE 1

Em cada figura abaixo, encontre o maior número possível de transformações geométricas utilizadas para obter as figuras, identificando características como: eixos de simetria, ângulos de rotação, etc. Do lado das figuras, descreva as respectivas transformações.



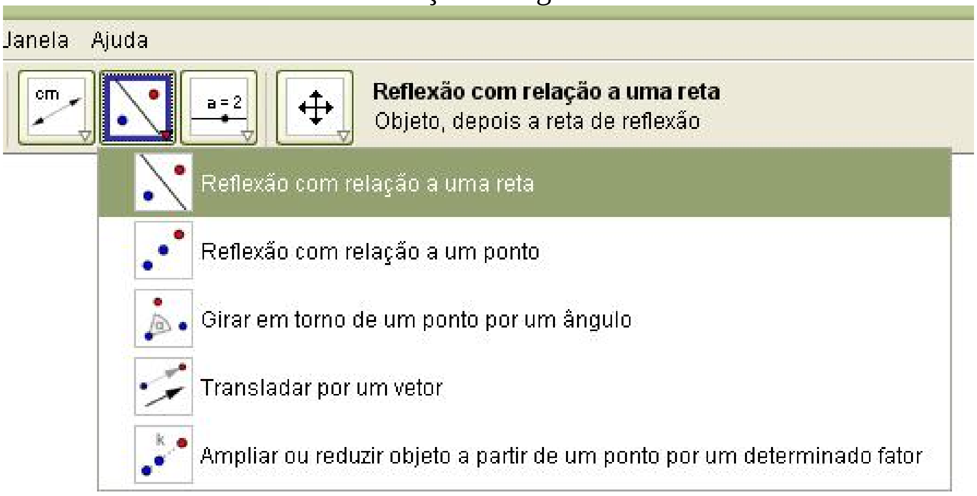



f
f
f
f

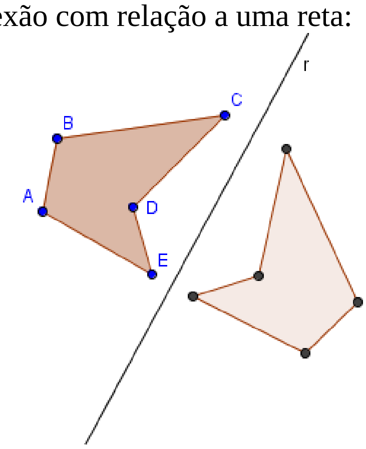
Nome: ________________________________ Data: _________

ATIVIDADE 2

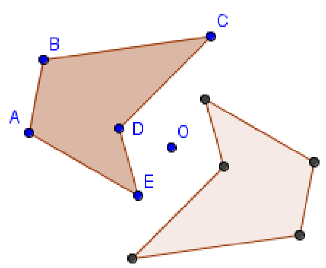
1) No menu *Exibir* do software *GeoGebra*, desative as opções *Eixo* e *Janela de Álgebra*. Agora, a partir das transformações encontradas no ícone apresentado na figura abaixo, construa cada uma das transformações a seguir:



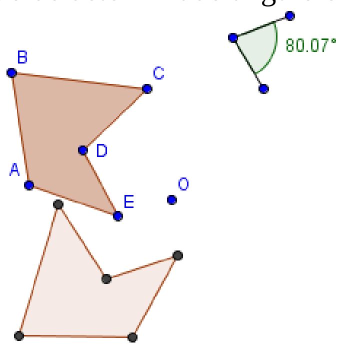
a) Reflexão com relação a uma reta:



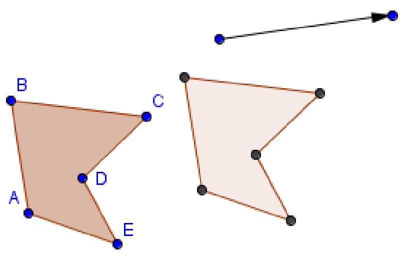
b) Reflexão com relação a um ponto:



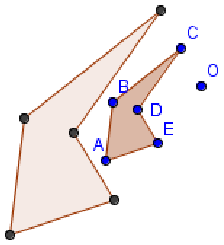
c) Rotação de determinado ângulo em relação ao ponto O.



d) Translação de acordo com um vetor



e) Homotetia em relação a



2) Agora, no menu *Exibir*, reative as opções *Eixo* e *Janela de Gráfico*. Construa o polígono ABCDE, onde A(2,-1), B(1,3), C(2,3), D(3,1) e E(4,1). Indique as coordenadas dos vértices do novo polígono, obtido com a aplicação de cada uma das transformações abaixo:

a) Reflexão em torno do eixo y.

b) Reflexão em torno do eixo x.

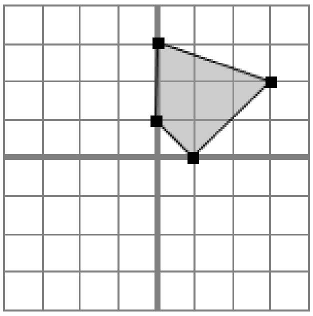
c) Reflexão em torno da reta $y = -x$.

d) Rotação de 45º em relação à origem.

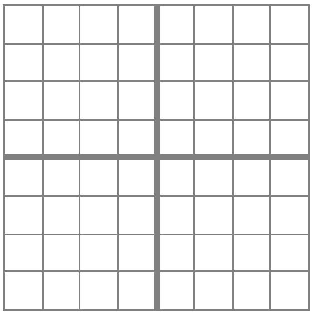
Nome:______________________________________ Data: _____________

ATIVIDADE 3

Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida.



Reflexão em torno do eixo vertical →



(x, y)	$\rightarrow$	(x', y')
$(1, 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, 3)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(3, 2)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$

Existe alguma relação entre as coordenadas da figura obtida e as coordenadas da figura inicial? Qual?____

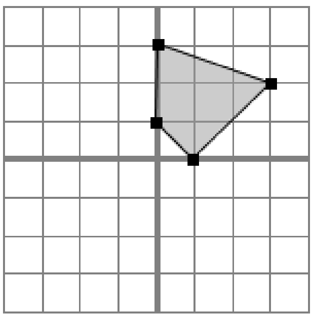
____

Tente generalizar! Para as coordenadas x e y da figura inicial, quais os valores das coordenadas x' e y' da figura obtida?

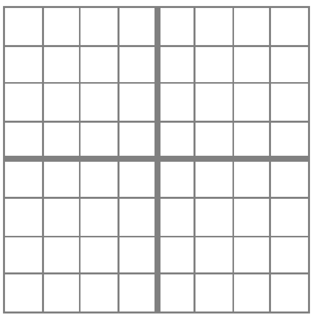
$x' =$ ___

$y' =$ ___

Para as transformações abaixo, obtenha os valores das coordenadas da figura obtida, e tente estabelecer uma relação, tal como no caso anterior, entre as coordenadas da figura final e as coordenadas da figura inicial. Se quiseres, podes movimentar os vértices da figura inicial para verificar se sua conjectura se confirma



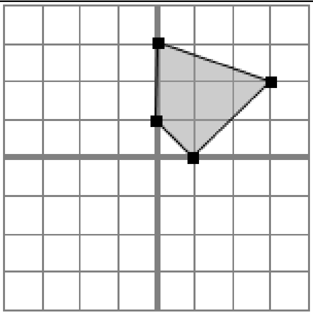
Reflexão em torno do eixo horizontal →



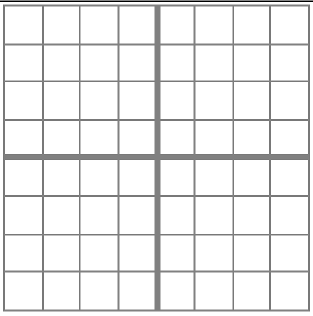
(x, y)	$\rightarrow$	(x', y')
$(1, 0)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, 1)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, 3)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$
$(3, 2)$	$\rightarrow$	$(\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___



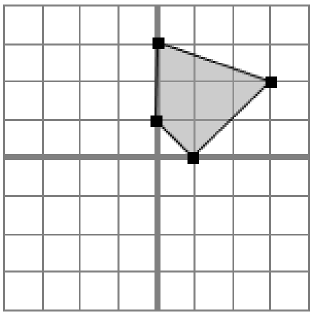
Reflexão em torno da reta y = x



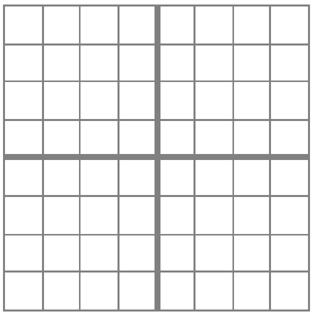
$$
\begin{array}{lcl}
(x,\ y) & \to & (x',\ y') \\
(1,\ 0) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(0,\ 1) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(0,\ 3) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(3,\ 2) & \to & (\_\_,\_\_)
\end{array}
$$

$x' =$ ____

$y' =$ ____



Reflexão em torno da reta y = - x



$$
\begin{array}{lcl}
(x,\ y) & \to & (x',\ y') \\
(1,\ 0) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(0,\ 1) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(0,\ 3) & \to & (\_\_,\_\_) \\
(3,\ 2) & \to & (\_\_,\_\_)
\end{array}
$$

$x' =$ ____

$y' =$ ____

Observe que em todas as transformações anteriores, os valores x' e y' podem ser escritos em função de x e de y. Deste modo, poderíamos tentar expressar todas as transformações de uma maneira semelhante.

No caso da reflexão em torno do eixo vertical obtemos $\begin{matrix} x' = -x \\ y' = y \end{matrix}$. Observe que as duas equações podem ser expressas como $\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$.

Observe que os valores que determinam a relação entre as coordenadas de (x, y) e de (x', y'), são os coeficientes de x e de y das equações do sistema. Observe que estes valores podem ser colocados numa tabela (cuidado com a ordem dos coeficientes).

$$\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

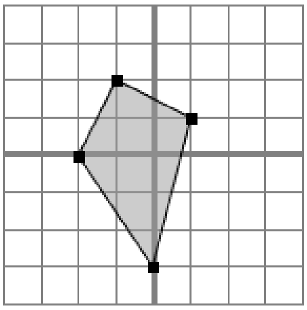
Em matemática costumamos chamar tabelas de matrizes, e deste modo $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é chamada matriz da transformação geométrica "Reflexão em torno do eixo vertical"

Obtenha as matrizes das transformações abaixo:
Reflexão em torno do eixo horizontal:
Reflexão em torno da reta $y = x$.
Reflexão em torno da reta $y = -x$.

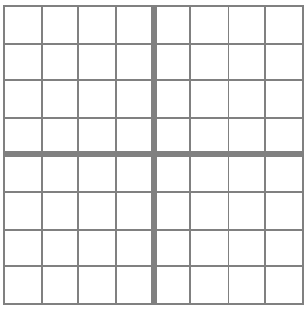
Nome:______________________________________ Data: _____________

ATIVIDADE 4

Faça a representação gráfica de cada transformação, e na tabela da direita identifique as coordenadas dos pontos da figura obtida. Considere a rotação com centro na origem.



Rotação de 90º anti-horária



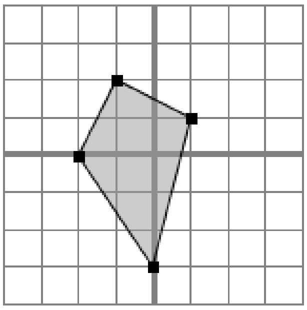
(x, y)	$\to$	(x', y')
$(1, 1)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-1, 2)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-2, 0)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, -3)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$

Tal como nas atividades do encontro anterior, tente generalizar a relação entre os valores das x e y da figura inicial, e dos valores das coordenadas x' e y' da figura obtida.

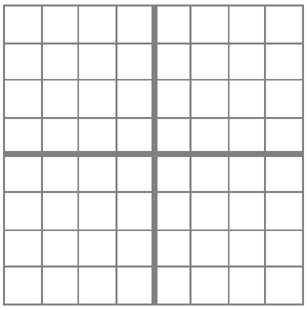
$x' =$ ___

$y' =$ ___

Para as transformações abaixo, obtenha as generalizações para cada caso.



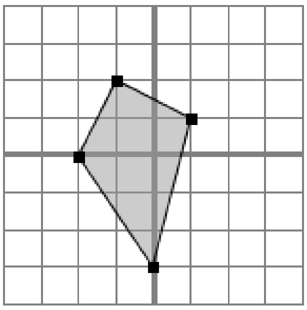
Rotação de 180º anti-horária



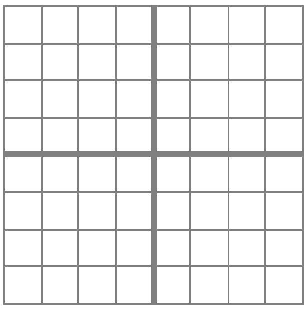
(x, y)	$\to$	(x', y')
$(1, 1)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-1, 2)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-2, 0)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, -3)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___



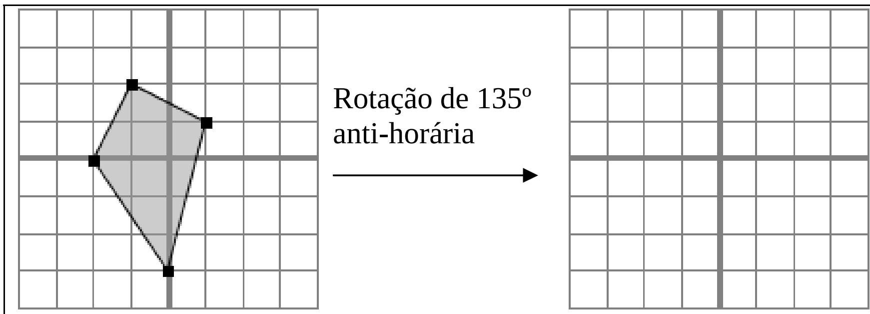
Rotação de 45º anti-horária



(x, y)	$\to$	(x', y')
$(1, 1)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-1, 2)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(-2, 0)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$
$(0, -3)$	$\to$	$(\_\_, \_\_)$

$x' =$ ___

$y' =$ ___



$(x,\ y)$	$\to$	$(x',\ y')$
$(1,\ 1)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(-1,2)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(-2,\ 0)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$
$(0,-3)$	$\to$	$(\_\_,\_\_)$

$x' =$ ____

$y' =$ ____

Todas as relações que você obteve podem ser escritas na forma matricial. Desta maneira identificamos a matriz da respectiva transformação geométrica.

Obtenha as matrizes das transformações:

a) Rotação de 90º (anti-horária):
b) Rotação de 180º (anti-horária):
c) Rotação de 270º (anti-horária):
d) Rotação de 360º (anti-horária):
e) Rotação de 45º (anti-horária):
f) Rotação de 135º (anti-horária):

Agora nós já conhecemos as matrizes de algumas rotações e algumas reflexões. No espaço abaixo, faça um resumo das matrizes até aqui obtidas.

Reflexões:	Rotações:
em torno do eixo vertical (y) $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 90º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
Em torno do eixo horizontal (x) $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 180º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
em torno da reta $(y = x)$ $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 270º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
em torno da reta $(y = -x)$ $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$	de 360º $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Nome:____ Data: _____________

ATIVIDADE 5

No final da atividade anterior fizemos um “resumo” das matrizes de algumas transformações estudadas anteriormente. Utilize o Java Applet Transforma 1, disponível no CD, para verificar se as matrizes de fato proporcionam a transformação desejada.

As transformações que as matrizes proporcionaram corresponderam às suas expectativas? ____

Vamos testar agora, algumas matrizes diferentes das que você obteve anteriormente. Ao lado de cada matriz abaixo, descreva o que acontece com as figuras:

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ____

Estas matrizes geram transformações geométricas?___________________________

Observe que estas transformações “deformam” as figuras, diferentemente do que acontece com rotações e reflexões.

Como poderíamos chamar estas novas transformações?________________________

Vamos testar mais algumas matrizes?!

$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ ____

Há alguma semelhança (ou diferença) entre estas matrizes, e aquelas logo acima? ____

____

Você seria capaz de apresentar um raciocínio geral para estas matrizes? Escreva com suas próprias palavras.____

Tente generalizar, e indicar o que cada um dos valores a, b, c, d determine na transformação. Sugestão: varia um dos valores, mantendo os outros fixos. O que acontece se algum elemento acima for negativo? Explique, utilizando exemplos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$a \rightarrow$ ____

$b \rightarrow$ ____

$c \rightarrow$ ____

$d \rightarrow$ ____

Quando todos os elementos de uma matriz são multiplicados por um mesmo valor constante, podemos representá-la assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Compare as matrizes abaixo, e descreva os resultados das transformações obtidas.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ____

$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$ ____

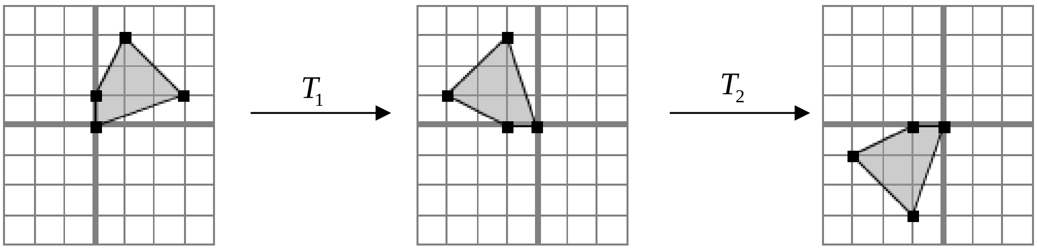
O que de diferente acontece com a transformação, se a matriz é multiplicada por 2? E por 3? E por 4?

O que de diferente acontece com a transformação, se a matriz é multiplicada por 0,5? E por 0,4? E por 0,7?

Nome:____ Data: ______________

ATIVIDADE 6

1) Na seqüência de figuras abaixo, um quadrilátero sofre duas transformações geométricas seguidas (T_1 e T_2) que você já conhece. Observe:

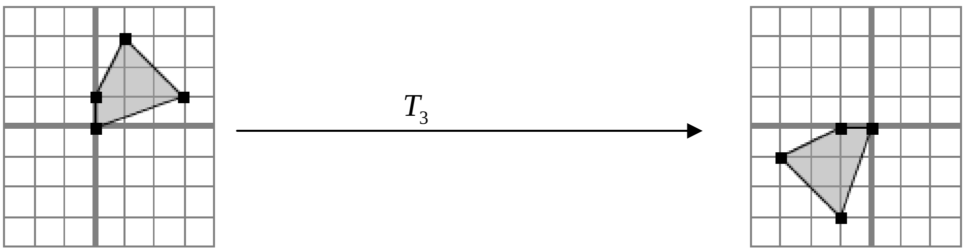


Qual o nome destas transformações? T_1 :

T_2 :

Qual a matriz que gera cada transformação? $T_1 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ e $T_2 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Existe alguma transformação geométrica que faz diretamente a transformação da primeira figura na terceira?

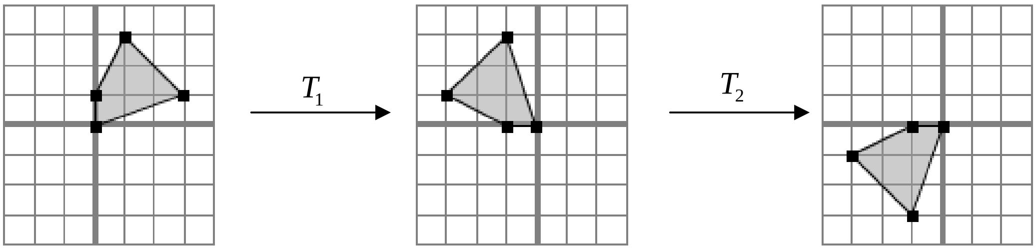


Qual a matriz desta transformação? $T_3 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Observe que T_3 faz diretamente o que T_1 e T_2 fazem em seqüência. Quando isto acontece, costumamos dizer que T_3 é "a composta" das transformações T_1 e T_2.

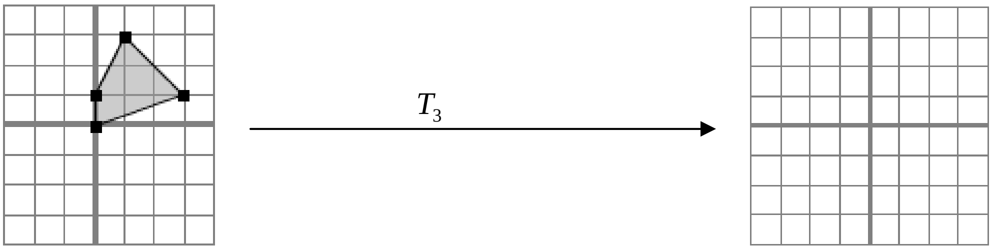
Existe alguma relação entre as matrizes das transformações T_1, T_2 e T_3 estudadas nesta atividade?____

2) Vamos agora repetir o que fizemos na questão anterior, mas considerando T_1 como uma rotação anti-horária de 45°, e T_2 como uma reflexão em torno da reta $y = -x$.



Qual a matriz que gera cada transformação? $T_1 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ e $T_2 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Existe alguma transformação geométrica que faz diretamente a transformação da primeira figura na terceira?



Qual a matriz desta transformação? $T_3 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Observe que todas as transformações que estudamos até agora, "levam" coordenadas (x, y) em coordenadas (x', y'), e podem ser expressas como um sistema $\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é dita matriz da transformação geométrica.

Observe o esquema abaixo que "traduz" duas transformações consecutivas dadas pelas respectivas matrizes.

$$(x, y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (x', y') \xrightarrow{\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}} (x'', y'')$$

Donde obtemos que:

$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases}$ sistema que relaciona (x', y') com (x, y).

$\begin{cases} x'' = p \cdot x' + q \cdot y' \\ y'' = r \cdot x' + s \cdot y' \end{cases}$ sistema que relaciona (x'', y'') com (x', y').

Qual o sistema que relaciona (x'', y'') com (x, y) diretamente? Sugestão: substitua x' e y' do segundo sistema, pelos respectivos valores indicados no primeiro sistema.

Qual a matriz da transformação geométrica que leva (x, y) em (x'', y'')? $\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$

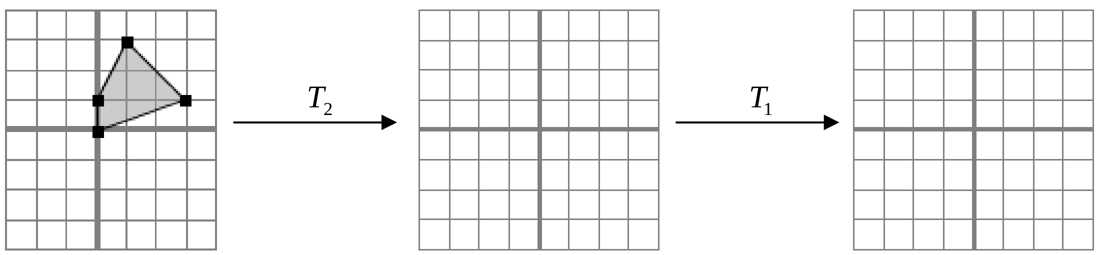
Observando as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, comparadas com a matriz que você obteve na pergunta anterior, podemos estabelecer alguma relação entre elas? Descreva-a:[1] ____

____

____

E dessa forma foi definida a multiplicação da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pela matriz $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, de modo a se obter: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}$

Se invertermos a ordem da realização das transformações T_1 e T_2, haverá alguma diferença no resultado final obtido? ____________________ Isso sempre irá ocorrer? ____



Apresente resumidamente suas conclusões sobre a atividade de hoje: ____________

____

____

____

____

____

____Discussão em grande grupo!

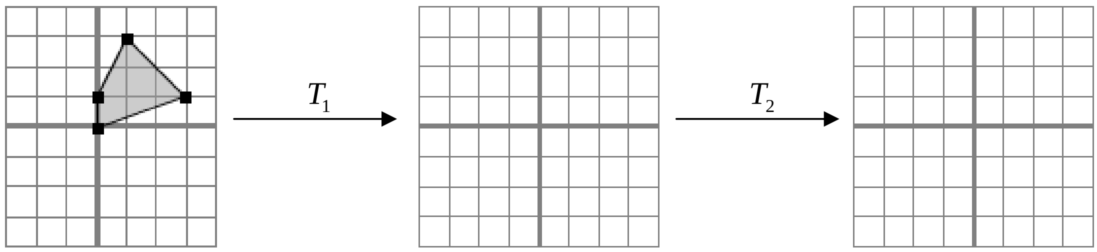
[1] Arthur Cayley (1821-1895), matemático britânico, descobriu e analisou estas relações, e a partir delas definiu a multiplicação de matrizes.

Nome:____ Data: _____________

ATIVIDADE 7

Lembra do que foi estudado na atividade anterior? Faça uma a revisão antes de continuar.

1) Vamos novamente compor uma rotação de 90º seguida de um reflexão em torno da reta $y = x$.



Qual a matriz que gera cada transformação? $T_1 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ e $T_2 \rightarrow \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

Obtenha a matriz da transformação geométrica que faz diretamente a transformação da primeira figura na terceira, efetuando apenas cálculos com as matrizes de T_1 e T_2.

___

2) Agora precisamos remexer nossos neurônios e lembrar da atividade 3. Você lembra? Muito bem! Naquela atividade analisamos as coordenadas dos pontos (x, y) e (x', y') da reflexão em torno do eixo vertical, e obtivemos um sistema: $\begin{cases} x' = -1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{cases}$.

Deste sistema tiramos a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Agora que você conhece multiplicação de matrizes, eu lhe pergunto: a igualdade abaixo é verdadeira ou falsa?

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe que neste caso, os pontos (x, y) e (x', y') foram apresentados como matrizes com 2 linhas e 1 coluna (chamamos de matriz 2×1). Poderíamos apresentar estes pontos como uma matriz diferente?____

A multiplicação acima poderia ser feita de forma diferente?__________________________

___

3) Se refletirmos o ponto $A(2,3)$ em relação ao eixo vertical, qual ponto optemos?

4) Observe que a matriz da reflexão em torno do eixo vertical é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e para respondermos a questão anterior poderíamos ter feito o seguinte cálculo: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$

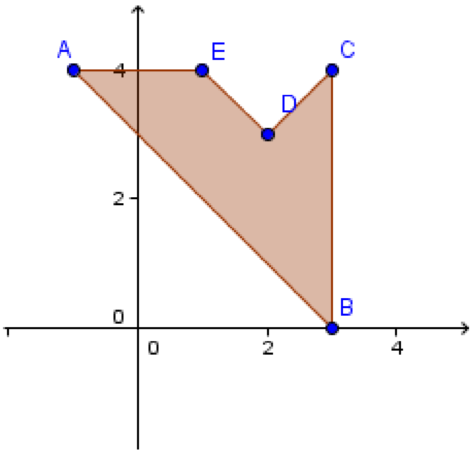
5) Podemos ainda obter a reflexão dos pontos $C(2,\ 4)$, $D(0,-3)$, $E(-2,1)$ em relação ao eixo vertical, efetuando: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$

Confirme seus cálculos, apresentando a transformação acima no software GeoGebra.

6) Considere os pontos $A(-1,\ 4)$, $B(3,0)$, $C(3,\ 4)$, $D(2,\ 3)$, $E(1,\ 4)$. Se quisermos saber os pontos obtidos com uma rotação de 45º, qual multiplicação de matrizes deve ser empregada?

7) Faça o cálculo e obtenha os pontos depois da rotação.

8) Verifique a veracidade das informações implementando a transformação acima no GeoGebra.



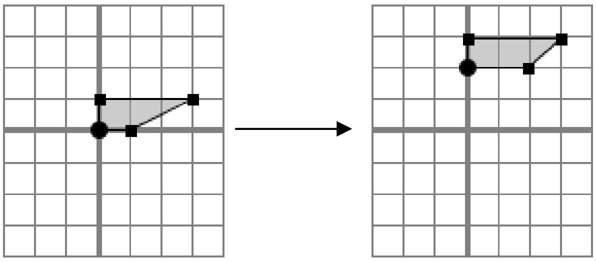
Nome:____ Data: ____________

ATIVIDADE 8

1) Verificando um dicionário ou a Internet, o que significa a palavra *transladar*?_________

____

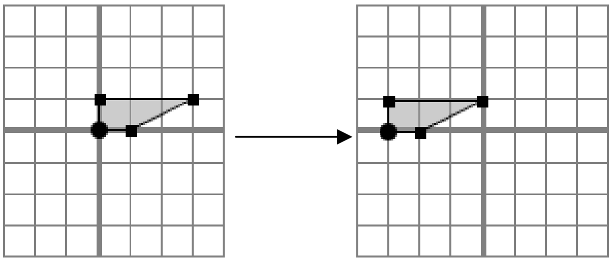
2) Analisemos algumas transformações chamadas de translações. Identifique a relação entre as coordenadas $(x,\ y)$ e $(x',\ y')$.



$(x,\ y) \to (x',\ y')$
$(0,\ 0) \to$ (__,__)
$(0,\ 1) \to$ (__,__)
$(1,\ 0) \to$ (__,__)
$(3,\ 1) \to$ (__,__)

$x' =$ ___

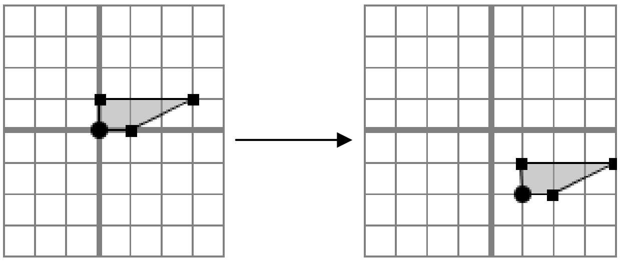
$y' =$ ___



$(x,\ y) \to (x',\ y')$
$(0,\ 0) \to$ (__,__)
$(0,\ 1) \to$ (__,__)
$(1,\ 0) \to$ (__,__)
$(3,\ 1) \to$ (__,__)

$x' =$ ___

$y' =$ ___



$(x,\ y) \to (x',\ y')$
$(0,\ 0) \to$ (__,__)
$(0,\ 1) \to$ (__,__)
$(1,\ 0) \to$ (__,__)
$(3,\ 1) \to$ (__,__)

$x' =$ ___

$y' =$ ___

3) Podemos expressar estas transformações da mesma maneira que as estudadas anteriormente? Qual a diferença? Como fazer? ___________________________________

____

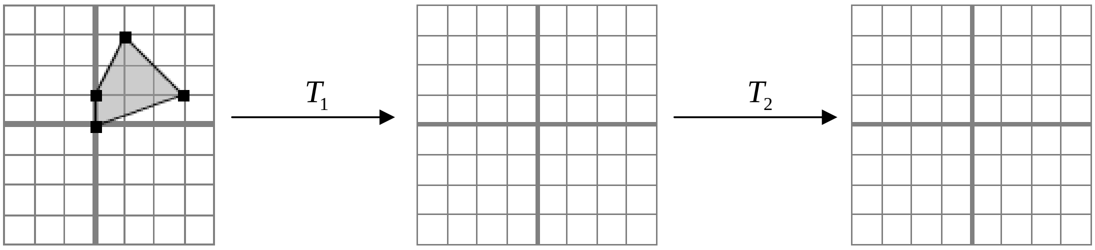
4) Apresente uma forma matricial para estas transformações!

Discussão em grande grupo!

5) Vamos novamente compor transformações: indique a expressão matricial que leva $(x,\ y)$ em $(x',\ y')$ para cada caso.

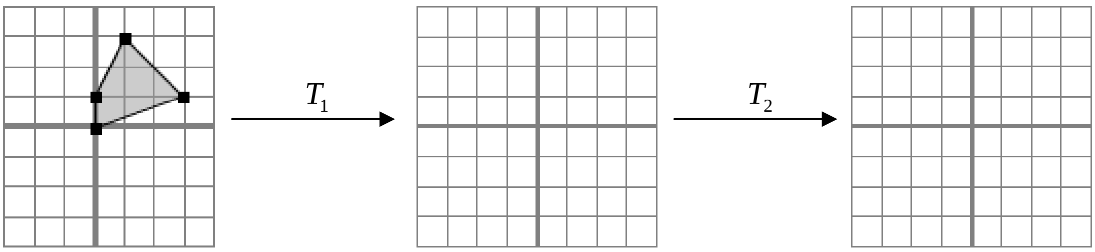
a) T_1: translada 2 unidades para direita e 3 unidades para baixo

T_2: translada 4 unidades para esquerda e 1 unidade para cima.



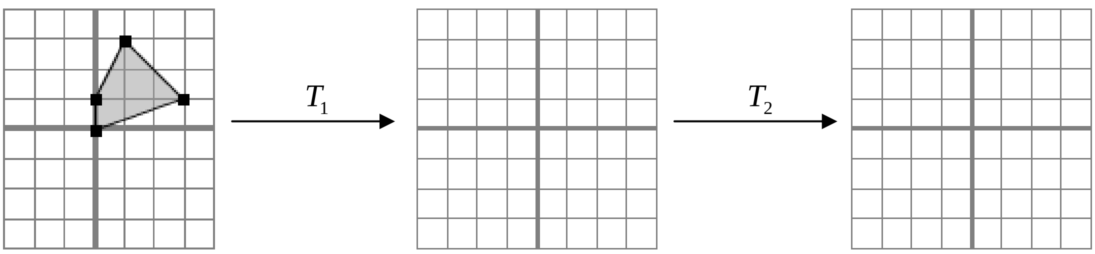
b) T_1: rotação de 270º

T_2: translada 2 unidades para esquerda e 3 unidade para cima.



c) T_1: reflexão em torno da reta $y = -x$

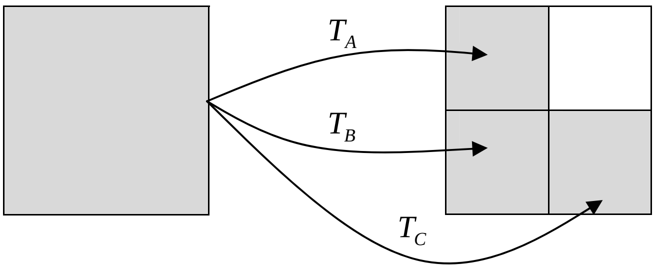
T_2: translada 3 unidades para direita e 4 unidade para cima.



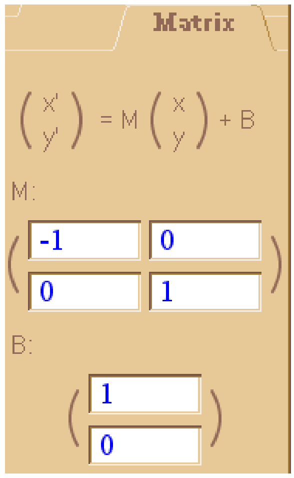
Nome:____ Data: _____________

ATIVIDADE 9

Analisemos algumas transformações possíveis de serem editadas no Shapari:



Passo 0 Passo 1 .....



Se quisermos construir estas três transformações, é fácil observar que todas elas possuem uma "redução" de 50% horizontal e vertical. Além disso, algumas das transformações também são transladadas. De modo que a maneira geral de representar estas transformações é dada por: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. O software Shapari representa como $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$, onde M e B são as matrizes dadas acima.

Obtenha as matrizes de cada uma das transformações apresentadas na figura inicial:

T_A

____

T_B

____

T_C

____

Implemente estas transformações no Shapari. Aplique as transformações diversas vezes numa figura inicial que seja um quadrado. O que acontece com a figura? __________

____

Se a figura inicial for uma circunferência, e aplicarmos as transformações diversas vezes, o que acontece com a figura? ____________________________________

____

Aplique as transformações diversas vezes, e descreva a figura final que você obtém:

____

Obs.: Cada figura que você construir, salve com a data de hoje, seu nome, e um número indicando a ordem das figuras obtidas. Exemplo: a 1ª figura que eu fizer será salva por: 2609vandoir1

Além da contração, para cada caso você pode escolher outras transformações para compor T_A, T_B e T_C.

No caso anterior, altere apenas T_A adicionando uma rotação de 90º e observe o que acontece. A figura será muito diferente? Salve e descreva esta figura. ___________________
____

Agora, além da compressão adicione em cada transformação o que está indicado:

$T_A \rightarrow$ reflexão vertical

$T_B \rightarrow$ rotação de 90º

$T_C \rightarrow$ reflexão horizontal

Aplique estas transformações diversas vezes. Salve e descreva a figura obtida: ____
____

Agora é com você! Use a sua criatividade e crie duas figuras diferentes das anteriores, utilizando o mesmo processo. Descreva e salve estas figuras. Não se esqueça de apresentar as matrizes que você utilizou.

Nome:______________________________________ Data: ____________

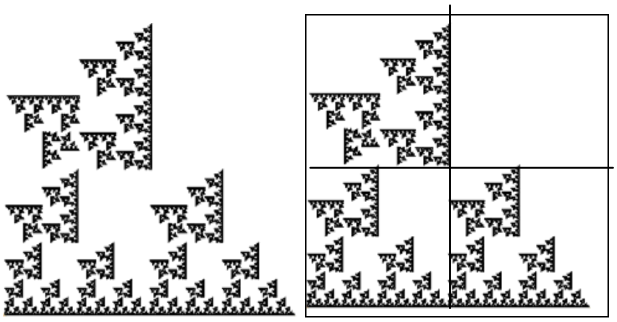
ATIVIDADE 10

O que seria uma figura geométrica auto-similar?

Observe o que encontramos em http://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal:

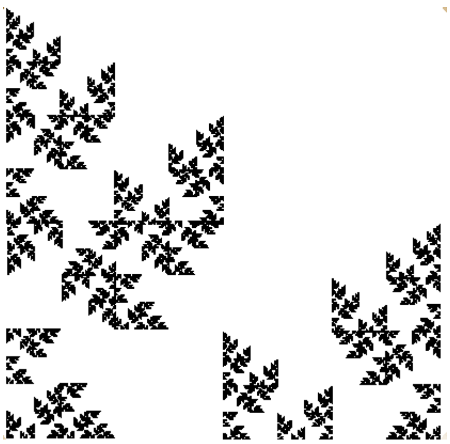
"Um fractal (anteriormente conhecido como curva monstro) é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto-similares. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo."

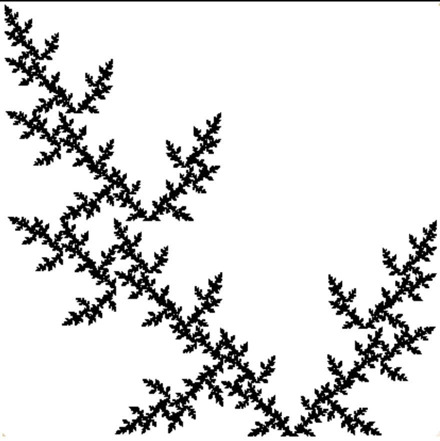
Observe a figura abaixo obtida com o software Shapari. Percebemos nela, partes que são similares (semelhantes) ao todo.

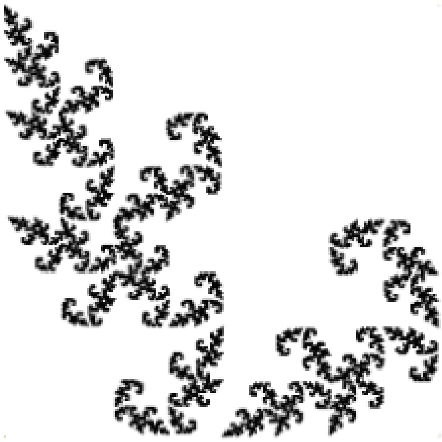


Analisando estas partes similares ao todo, podemos entender a maneira como esta figura foi obtida no Shapari.

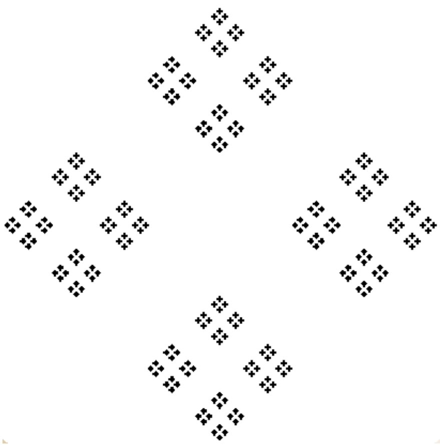
As figuras abaixo foram obtidas com o software Shapari. Identifique as matrizes que foram utilizadas para gerar cada uma destas figuras.

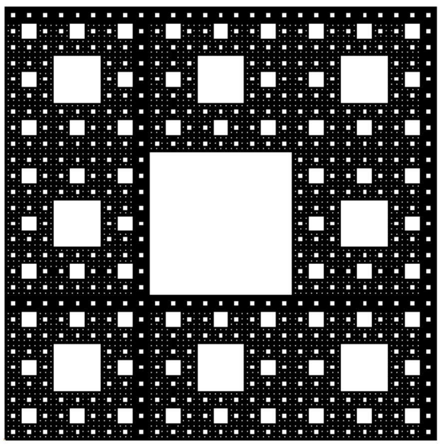






Desafio:

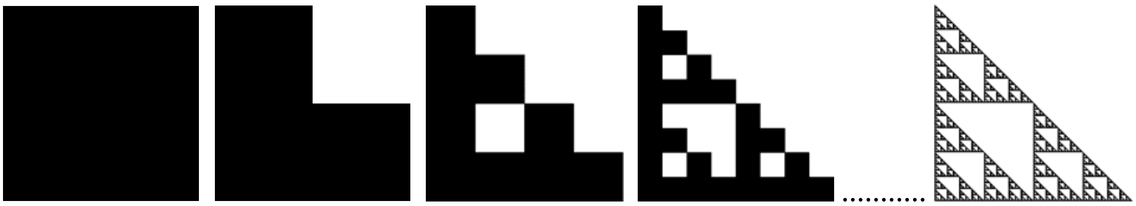




Nome:________________________________ Data: ____________

ATIVIDADE 11

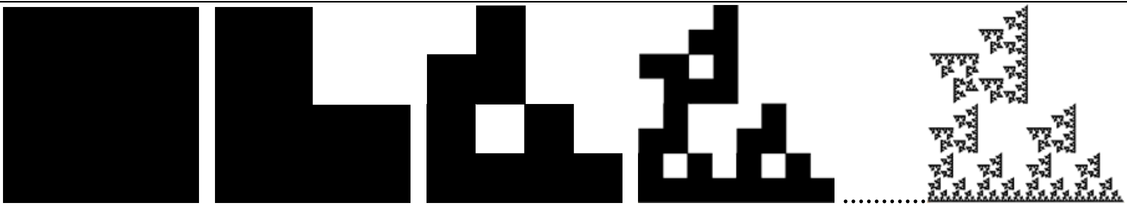
Observe a seqüência de construções obtida com o Shapari, e considere o lado de medida 1 para o quadrado da etapa 0.



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 .... etapa n

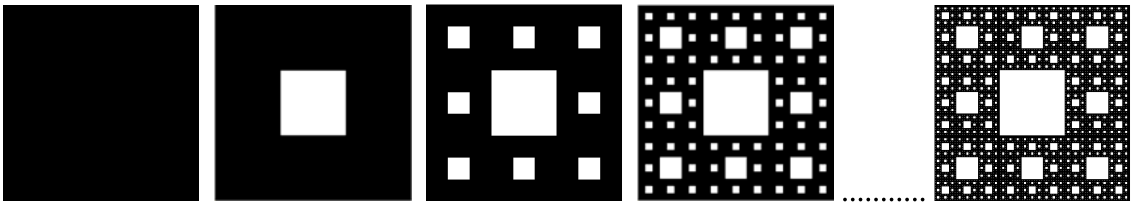
Agora preencha a tabela com os dados observados nas figuras acima.

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{16}$
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0			
1			
2			
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			



etapa 0 etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa n

Etapa	Nº de quadrados removidos	Área de um novo buraco removido	Área total removida
0			
1			
2			
3			
⋮	⋮	⋮	⋮
n			

Apêndice D ENTREVISTA

P - Teu nome completo?

A - W. L. S.

P - Tu lembras das atividades que a gente fez no Enriquecimento Curricular do ano passado, 2006/2?

A - Sim, sim lembro...

P - O que tu lembras?

A - Lembro que a gente trabalhou com matrizes, trabalhamos com os fractais no computador, com programa de computador e tal, vendo a projeção que dava, tal matriz dava a projeção x com o fractal e, que a gente trabalhava com folhas também né, cálculos e tal.

P - E tu lembra da matemática que a gente usou naquele ensino lá, ou seja, o que de matemática tu usou?

A - É, a gente usou multiplicação de matrizes, acho que divisão de matrizes também se não me engano, e soma e subtração também. Mas basicamente era com matriz, assim, a nossa matemática.

P - Antes dessa atividade vocês já tinham estudado as matrizes?

A - Não a gente começou... Na metade do desenvolvimento do Enriquecimento, quando a gente tava trabalhando com matrizes que o professor iniciou na aula mesmo, assim, matrizes.

P - E tu acha que a gente tendo, estudado matrizes no Enriquecimento Curricular, esse fato contribuiu para o estudo formal em sala de aula das matrizes depois?

A - Contribuiu porque quando o professor deu a matéria, a gente já sabia assim,.. já tinha noção total assim do que acontecia, e tal... com as matrizes.

P - E vocês viram mais aplicações de matrizes depois estudando, ou só mais a parte das operações?

A - É a gente viu a parte mais das operações, assim, a parte formal das matrizes nada aplicando assim como a gente fez nos fractais assim, no computador, essas coisas. A gente não teve.

P - E o que mais te chamou atenção na nossa abordagem da parte matricial na nossa atividade?

A - Ah que mudando ... um número decimal assim, uma coisa bem pequena, tu mudava completamente o que o fractal te passava na imagem ali. Tu mudava uma coisa, uma casa decimal, e mudava o desenho e tal. Todo o eixo x e y ali. Bem legal isso daí.

P - Interessante. Tu lembra alguma coisa que a gente viu mais no final da atividade, sobre progressões, alguma coisa da área?

A - Ah progressão aritmética a gente viu um pouco né, e progressão geométrica, que também foi antes da gente ter visto em ... a gente viu um pouco depois, quando deu ...

P - Na sala de aula vocês viram depois?

A - É a gente viu um pouco depois também. Foi bem legal aquele abordagem até, tinha me esquecido disso. É, mas mais a parte formal também na aula assim, a gente não viu nada ...

P - Em sala de aula em geral é visto de maneira mais formal, não tem muita aplicação, quando é que tu vai usar, ou tem exemplos assim? Como é que fica? Em sala de aula é mais a parte formal?

A - Em sala de aula é só fazendo as contas mesmo com problemas. Ah, progressão ...

P - Tu lembra de alguma coisa que a gente falou sobre dimensão de fractal?

A - Dimensões de fractais... não consigo me lembrar direito assim. Me lembro que o senhor falou que fractal é uma coisa que nunca tem fim, é uma coisa infinita. Mas, eu me lembro que tinha alguma coisa a ver com dimensão, mas não me lembro muito bem agora.

Apêndice E MAPAS CONCEITUAIS

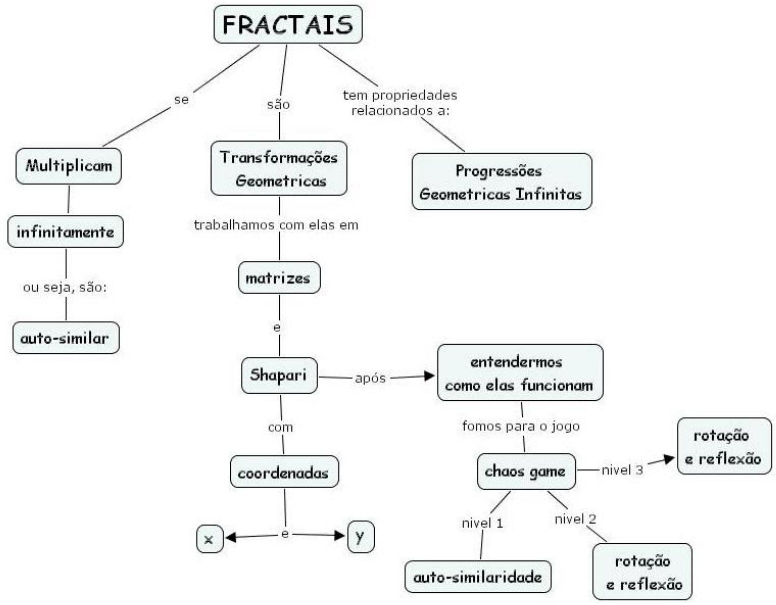


Figura E.1: Mapa conceitual - aluno - 1

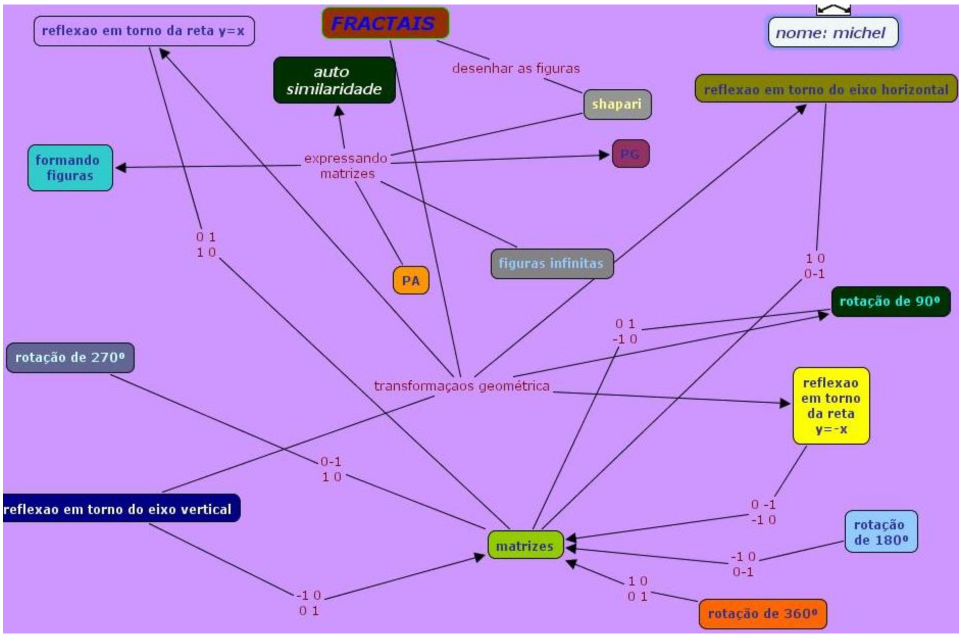


Figura E.2: Mapa conceitual - aluno - 2

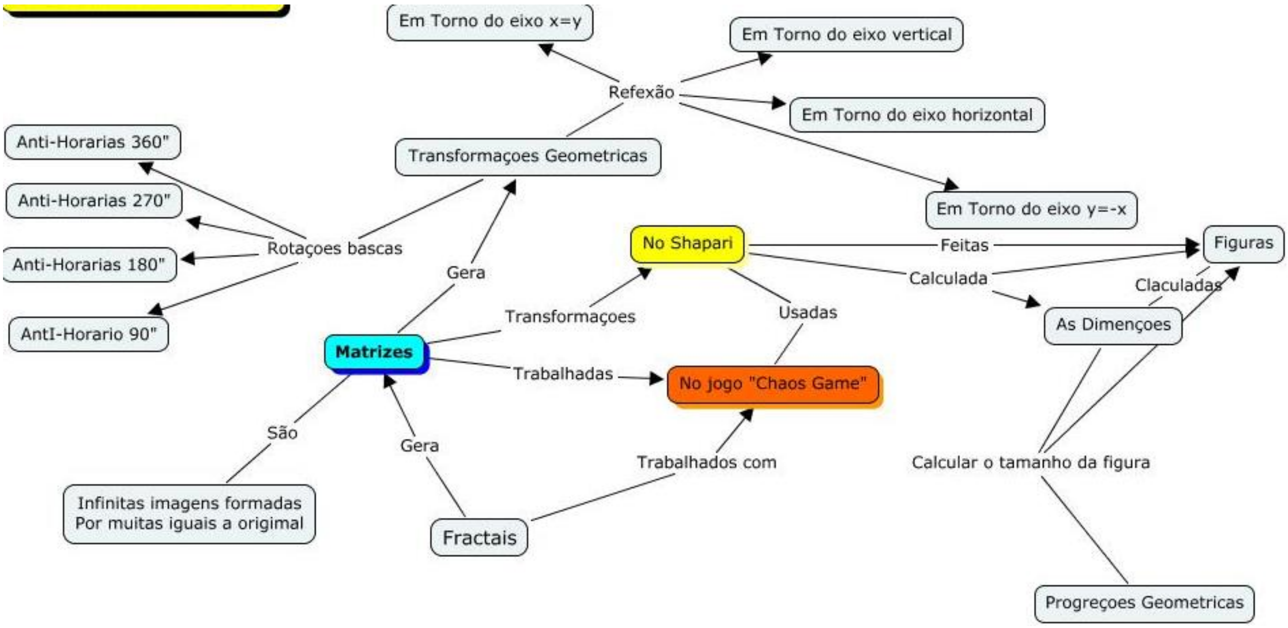


Figura E.3: Mapa conceitual - aluno - 3

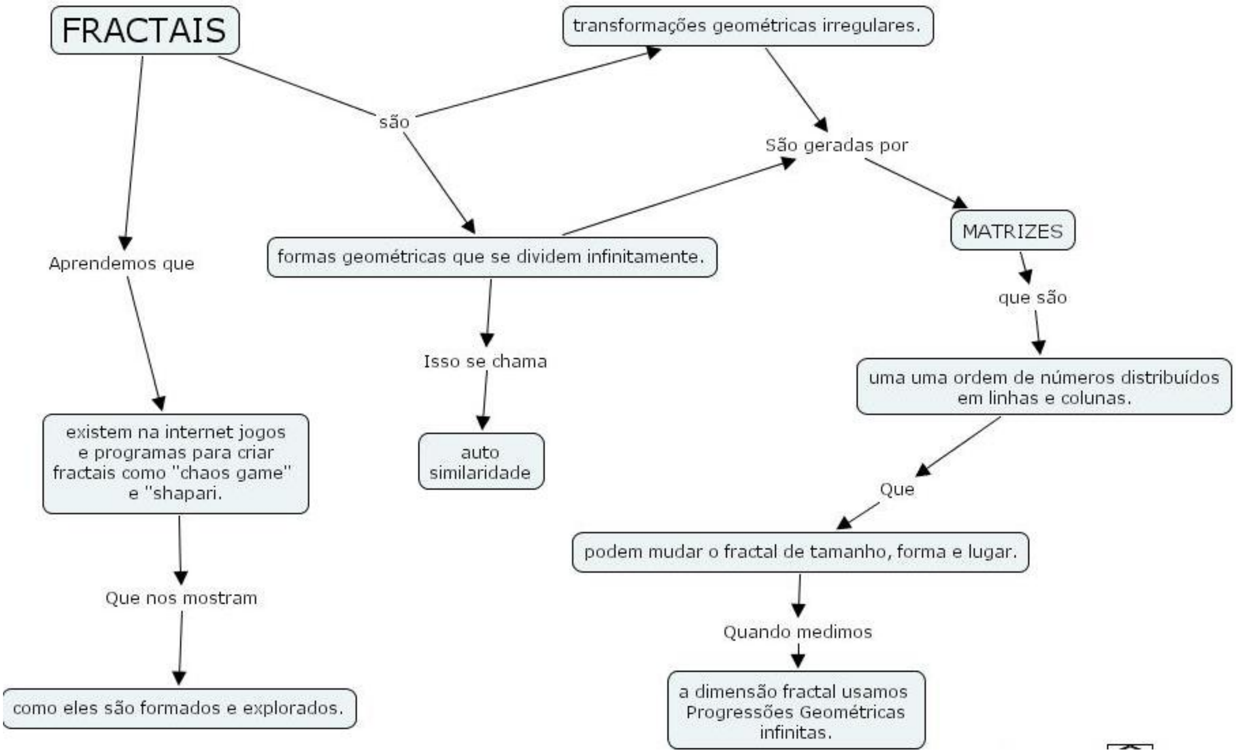


Figura E.4: Mapa conceitual - aluno - 4

Apêndice F FOTOS

Figura F.1: Em sala de aula

Figura F.2: Concentração nos fractais

Figura F.3: Anotando tudo

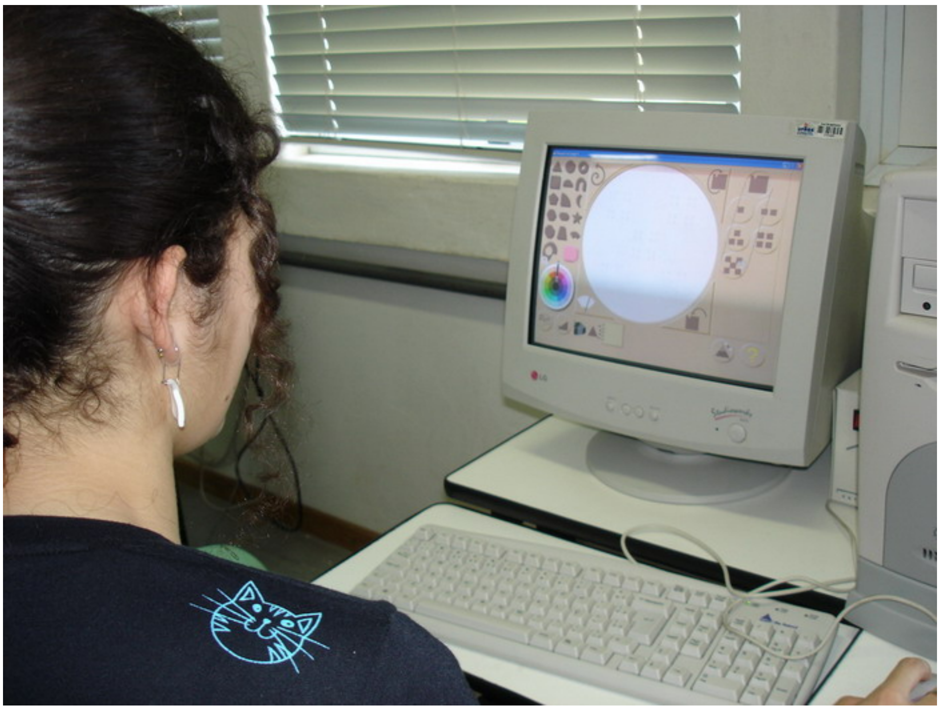


Figura F.4: Trabalhando no Shapari

Apêndice G CD COM A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E APPLETS