UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

RENORMALIZAÇÃO E PROPRIEDADES CRÍTICAS DO MODELO DE POTTS CONTÍNUO COM QUEBRA EXTERNA DE SIMETRIA*

Marcia Cristina Bernardes Barbosa

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Walter K. Theumann, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Porto Alegre
1984

"...
Join the crazed institution of the stars be the man that you think (know) you really are".
- Ian Anderson -

Ao Felipe

Agradeço a

Walter Karl Theumann pela orientação;

Miguel Angelo C. Gusmão pelas valiosas discussões;

Maria Cecília do Amaral pelo trabalho de datilografia;

meus colegas de sala (e freqüentadores também) pelo estímulo e interesse demonstrados;

meus pais por me possibilitarem uma formação científica;

Silvio Goulart pelas correções.

SUMÁRIO

RESUMO

A renormalização e o comportamento crítico da teoria de campo contínuo em ϕ^3 para o modelo de Potts de p estados com quebra externa de simetria entre os vetores de estado é investigada no presente trabalho. Primeiramente, da forma usual, é obtido o modelo contínuo, a partir do modelo de Potts discreto. É mostrado que quebra de simetria no último gera quebra de simetria quadrática e trilinear no modelo contínuo. Após, é aplicado teoria renormalizada de perturbações à teoria de campo em ϕ^3 no caso simétrico a fim de ilustrar o procedimento do grupo de renormalização mostrando as importantes diferenças entre esta e a renormalização da teoria de campo vetorial em ϕ^4. Regularização com subtração mínima generalizada, à ordem de dois loops, é então aplicada ao modelo contínuo, na representação Priest e Lubensky, com quebra de simetria quadrática e trilinear, em dois casos diferentes. Um, com quebra de simetria que favorece o ordenamento segundo uma única componente "longitudinal" dos campos e outro que favorece ordenamento transversal. No primeiro, só o ponto fixo (instável) gaussiano é obtido, um resultado que permanece válido a todas as ordens em teoria de perturbações, o que confirma um argumento físico que sugere a ausência de transição de fase. A segunda forma de quebrar a simetria gera um "crossover" a um modelo de Potts de (p - 1) estados, com os expoentes críticos η e ν, para p geral, fornecendo uma confirmação para o processo de regularização e renormalização.

1 - INTRODUÇÃO

Propriedades de equilíbrio de sistemas físicos tais como a densidade ou a magnetização são, em geral, funções analíticas de variáveis externas ao sistema tais como a temperatura, a pressão ou um campo magnético.

Em pontos determinados do diagrama de fases tais funções podem apresentar descontinuidades, indicando que aí há uma transição de 1ª ordem (Figura 1.1).

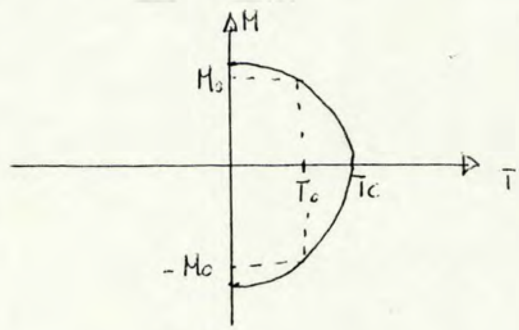


FIGURA 1.1 - Gráfico da magnetização x temperatura a campo nulo

Em T ≤ Tc há uma descontinuidade no valor da magnetização, ou seja, há uma transição de primeira ordem que termina em um ponto crítico em Tc (transição de segunda ordem).

No caso de tais funções serem contínuas, mas suas derivadas (calor específico, compressibilidade e susceptibilidade) serem divergentes em uma dada temperatura, tem-se uma transição contínua de 2ª ordem (transição gás-líquido em $T = T_c$ e transição ferro-paramagnetismo em $T = T_c$) (Figura 1.1 e Figura 1.2).

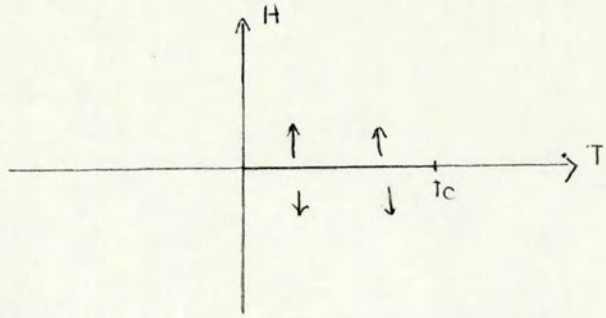


FIGURA 1.2 - Gráfico campo magnético x temperatura - Para $T<T_c$ há magnetização mesmo na ausência de campo. Para $T>T_c$ não há magnetização na ausência de campo (ver Figura 1.1). Em $T=T_c$ há uma transição de segunda ordem.

Expressa-se o comportamento singular de tais funções e de suas derivadas em regiões próximas à temperatura crítica via expoentes críticos[1].

Para um sistema magnético: $\epsilon = \dfrac{T - T_c}{T_c}$

$$M_{H=0} \sim (-\epsilon)^{\beta} \qquad \text{(MAGNETIZAÇÃO)} \qquad (1.1)$$

$$C_{H=0} \sim (\epsilon)^{-\alpha} \qquad \text{(CALOR ESPECÍFICO)} \qquad (1.2)$$

$$\chi_T \sim (\epsilon)^{-\gamma} \qquad \text{(SUSCEPTIBILIDADE)} \qquad (1.3)$$

$$\xi \sim (\epsilon)^{-\nu} \qquad \text{(COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO)} \qquad (1.4)$$

$$G_c(\vec{r}) \sim |\vec{r}|^{-(d+2-\eta)} \qquad \text{(FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO NO PONTO CRÍTICO)} \qquad (1.5)$$

Tais expoentes mantêm entre si relações de scaling como, por exemplo, $\gamma = (2-\eta)\nu$.

Observa-se universalidade nos sistemas físicos, ou seja, todos os sistemas físicos com um conjunto de parâmetros comuns, tais como a dimensão do sistema, o alcance da interação e a simetria do parâmetro de ordem, apresentam mesmo comportamento crítico.

Esta dissertação versa a respeito da renormalização do modelo de Potts de p estados[2], e da obtenção consistente das propriedades termodinâmicas. Tem-se por objetivo obter a natureza da transição de fase no modelo de Potts com quebra de simetria entre os estados, mediante teoria renormalizada de perturbações, à ordem de dois loops. No caso da transição ser de 2ª ordem, confere-se a consistência do cálculo dos expoentes críticos.

O interesse físico deste modelo reside no fato de que sua versão de 3 estados explica, entre outras coisas, a transição de cristais líquidos de uma fase nemática para isotrópica[3,4], a transição de fase estrutural de um cristal cúbico ($SrTiO_3$) para a fase tetragonal[5], e a transição magnética num cristal cúbi co em presença de um campo magnético diagonal [111][6]. Sua versão de 2 estados corresponde ao modelo de Ising, sua versão de um único estado descreve o comportamento crítico da percolação[7] e o limite de zero estados está relacionado a uma rede de resistência elétrica aleatória

O modelo é definido pelo hamiltoniano :

$$H = - J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{r}') \qquad (1.6)$$

onde os spins clássicos $\vec{S}(\vec{r})$ sobre uma rede podem estar em p estados (orientações) dados pelos vetores de Potts $\vec{a}_i$ $i = 1,2...p$ que definem os vértices de um hipertetraedro de $n = p - 1$ dimensões. A soma é, por simplicidade, sobre vizinhos próximos.

Graficamente, representa-se por (ver Figura 1.3):

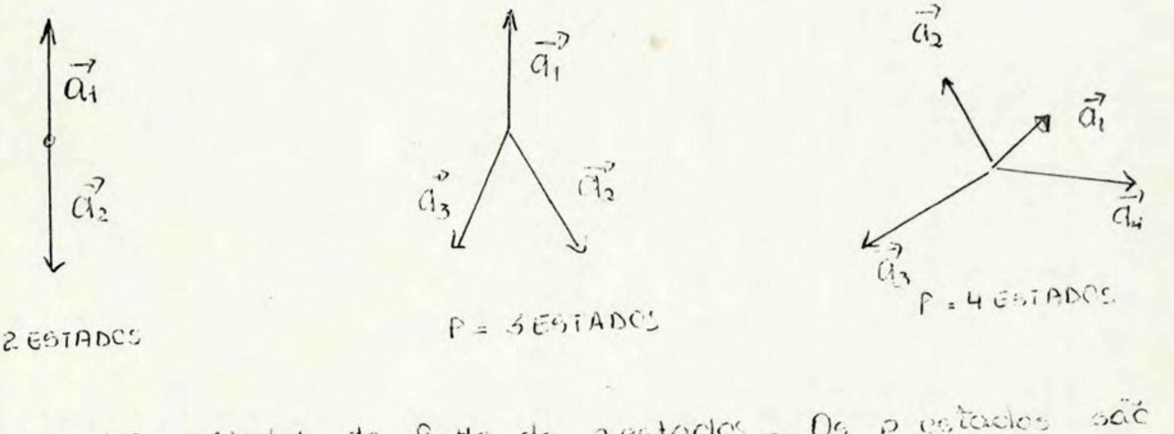


FIGURA 1.3 - Modelo de Potts de p estados - Os p estados são representados por vetores apontando para os vértices de um hipertetraedro de p-1 dimensões.

Tais vetores apresentam as seguintes propriedades:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} = 0 \qquad (1.7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p-1} a_i^{\alpha} a_j^{\beta} = \delta_{ij} - \frac{1}{p} \qquad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} a_i^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (1.9)$$

onde $(\alpha,\beta) = 1,2,\ldots,p-1$ são as componentes de $\vec{a}_i$.

Uma das possíveis formas de resolver o problema do cálculo das propriedades termodinâmicas e das funções de correlação, consiste em, usando a transformação de Hubbard-Stratonovich[8], obter-se, como será visto no capítulo 2, a expressão para o hamiltoniano efetivo do modelo contínuo que, na representação de Priest e Lubensky no espaço de momentos $\vec{k}$[9], tem a forma:[a]

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{1}{4}\int_{\bar{k}} (\mu^2 + k^2)\, A_\alpha(\bar{k})\, A_\alpha(-\bar{k}) + w_0^3 \int_{\bar{k}}\int_{\bar{k}'} D_{\alpha\beta\gamma}\, A_\alpha(\bar{k})\, A_\beta(+\bar{k}')$$
$$A_\gamma(-\bar{k}-\bar{k}') + O(w_0^4) \qquad (1.10)$$

---

[a] Índices repetidos indicam soma.

onde A_α são os componentes dos campos contínuos, e $\mu^2 = \frac{T - T_0}{T_0}$. Este hamiltoniano permite obter-se expansões via teoria de perturbações no número de "loops", (ou seja, em u_0) para a energia livre e para as funções geratrizes das funções de correlação[10,11]. Como, para todas componentes de spin, o termo de troca J, no hamiltoniano discreto, é o mesmo, equivalentemente, no hamiltoniano contínuo, há uma equivalência entre as componentes dos campos. Diz-se que tal hamiltoniano é simétrico.

Perturbações tais como campo magnético, aplicação de uma tensão ou um potencial químico dão origem a quebras de simetria entre as componentes de campo de um dado sistema. Por exemplo, o composto $SrTiO_3$ acima de T_c = 105 K apresenta simetria cúbica, abaixo da qual TiO_6 gira ao redor de um dos eixos do cubo. É uma transição de 2ª ordem. Sob a ação de uma tensão diagonal reduzem-se os graus de liberdade. Pode-se descrever tal sistema por um modelo de Potts simétrico[12]. A aplicação de uma tensão "levemente" fora da diagonal, dá origem a uma quebra de simetria que pode ser descrita por um hamiltoniano de Potts com quebra de simetria no termo quadrático e trilinear dos campos[13].

Para descrever-se tal sistema é que se resolveu estudar a renormalização, e conseqüente obtenção de expoentes críticos, do modelo de Potts com quebra de simetria.

Tal sistema é descrito por um hamiltoniano da forma:

$$H = - \sum_{\langle \vec{r}\,\vec{r}\,' \rangle} \sum_{i} J^i \, S^i(\vec{r}) \, S^i(\vec{r}\,') \qquad (1.11)$$

com interações diferentes J^{i} segundo as componentes dos spins.

Novamente, faz-se uma passagem para o contínuo, como será visto no capítulo 2. A quebra de simetria no termo de troca gera quebra de simetria nas componentes do campo A_{α}, separando-as em n-m componentes transversais e m componentes longitudinais. Tem-se quebra de simetria nos termos de ordem quadrática e cúbica.

O hamiltoniano contínuo, para este caso, é dado por:

$$\mathcal{H}_{eff} = -\frac{1}{4}\int_{\bar{K}}\left[(\mu_1^2+K^2)\,A_{\mu}(\bar{K})\,A_{\mu}(-\bar{K}) + (\mu_2^2+K^2)\,A_q(\bar{K})\,A_q(-\bar{K})\right] + \int_{\bar{K}}\int_{\bar{K}'}$$

$$\left[u_0 D_{\mu\nu\eta}\; A_{\mu}(\bar{K})\,A_{\nu}(\bar{K}')\,A_{\eta}(-\bar{K}-\bar{K}') + 3w_0 D_{\mu qr}\; A_{\mu}(\bar{K})\,A_q(\bar{K}')\,A_r(-\bar{K}-\bar{K}')\right.$$

$$\left. + 3w_0\, D_{qrs}\; A_q(\bar{K})\,A_r(\bar{K}')\,A_s(-\bar{K}-\bar{K}')\right] + O(u^4) \qquad (1.12)$$

onde $\mu_1^2 = \frac{T - T_0}{T_0}$ e $\mu_2^2 = \frac{T - T_0'}{T_0'}$ com e temperaturas críticas das componentes longitudinais e transversais na teoria livre. Os índices gregos representam componentes longitudinais e os latinos, transversais.

Podem-se obter resultados para o modelo de Potts na teoria livre (campo médio) que consiste em substituir-se o hamiltoniano de interação de partículas por um hamiltoniano de 1 partícula sob a interação de um campo efetivo. Teorias de campo médio fornecem basicamente dois resultados: o tipo de transição e, no caso de transição de 2ª ordem, obtêm-se os expoentes críticos.

Sabe-se que a teoria de campo médio diz que a transição será de 1ª ordem para $p > 2$ e de 2ª ordem se $p \leq 2$[14]. Estes resultados são bons para a teoria simétrica. Para a teoria com quebra de simetria os resultados são mais complicados, como foi mostrado recentemente[15].

Por ser um modelo que despreza flutuações, a teoria de campo médio não fornece bons resultados para o valor de expoentes críticos no caso de interação que não seja de alcance infinito. Correções ingênuas, via teoria de perturbações, à teoria de campo médio geram divergências a cada ordem em $d \leq 6$.

Para introduzirem-se flutuações de uma forma consistente, faz-se teoria renormalizada de perturbações que consiste em obterem-se propriedades termodinâmicas através do cálculo de funções de correlação ordem por ordem em uma expansão em termos dos acoplamentos trilineares u_o, v_o e w_o. Obtêm-se funções de correlação do cálculo de funções de vértice irredutíveis de 1 partícula[10,11]. Tais funções divergem. Eliminam-se as divergências com renormalização de funções de onda e constante de acoplamento e renormalização de massa, como será visto no capítulo 3.

Em alternativa ao trabalho com o grupo de renormalização[16] (GR) de Priest e Lubensky[9] para o modelo de Potts simétrico, Amit[17] descreveu a renormalização com teoria renormalizada de perturbações e fazendo regularização dimensional e renormalização por subtração mínima de pólos dimensionais. Considerou a transição de 1ª ordem para $p > 2$ e de 2ª ordem para $p \leq 2$, muito embora tenha encontrado pontos fixos acessíveis para $\frac{10}{3} > p \geq 1$. Pytte[14] indica que, para $2 < p < \frac{10}{3}$, este resultado está relacionado a uma transição de 1ª ordem próxima a um pon to spinodal, ou seja, a uma região de metaestabilidade.

Igualmente a renormalização do modelo de Potts com P (>1) estados e quebra de simetria quadrática e trilinear à ordem de 1 loop foi verificada por Walter Theumann[18], usando regularização dimensional e subtração mínima generalizada de pólos dimensionais em ϵ e de divergências em massa[19]. Encontra-se como resultado à ordem de 1 loop, pontos fixos para a transição de primeira ordem no modelo de 3 e 4 estados. O modelo de Potts para o problema de percolação (P = 1) com quebra de simetria quadrática e trilinear foi estudado por W.Theumann e Alba Theumann[20]. O conteúdo desta dissertação tem por objetivo: i) estudar a renormalização formal do modelo de Potts simétrico e não simétrico, à ordem de 2 loops e, ii) calcular os expoentes críticos, continuando a análise feita à ordem de 1 loop por Walter Theumann nas refs. (15) e (18), do tipo de transição que ocorre em sistemas com quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento longitudinal. Resultados parciais deste trabalho foram apresentados recentemente[21].

No capítulo 2, descreve-se brevemente o modelo, reproduzindo-se a obtenção (que não se acha de forma explícita na literatura) de uma teoria de campos contínuos em ϕ^3 para o modelo discreto sobre uma rede sem quebra de simetria entre as componentes. Faz-se, então, de forma análoga, a obtenção de uma teoria de campos em ϕ^3 para o modelo de Potts discreto com quebra de simetria entre as componentes. Verifica-se, neste estágio, que uma maneira consistente de fazer-se quebra de simetria no modelo contínuo é considerando quebra de simetria no termo quadrático e trilinear.

A renormalização explícita do modelo de Potts numa teoria de campos contínuos não se acha na literatura e o objetivo do capítulo 3 é demonstrar a renormalizabilidade do Modelo de Potts simétrico e não simétrico para qualquer temperatura, na fase desordenada, obtendo-se o procedimento de renormalização a ser seguido na temperatura crítica nos capítulos seguintes.

No capítulo 4, estuda-se o comportamento crítico do modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear, favorecendo o ordenamento longitudinal à ordem de 2 loops.

Resultados obtidos com a quebra de simetria favorecendo ordenamento longitudinal induzem a um estudo do comportamento crítico do modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento transversal no capítulo 5.

No capítulo 6 apresentam-se as conclusões e observações sobre possíveis extensões do trabalho.

Nos apêndices, calculam-se os coeficientes tensoriais e as integrais relacionadas às funções de vértice usadas nos capítulos da dissertação.

2 - O MODELO DE POTTS

2.1 - Definição do Modelo

O modelo de Potts é uma generalização do modelo de Ising[1] para mais de dois componentes. Assim como o modelo de Ising descreve spins em interação que podem ser paralelos ou antiparalelos, pode-se imaginar um modelo que descreva sistemas de spins confinados a um plano, com cada spin apontando para uma das q's direções especificadas pelos ângulos:

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{q} \qquad n = 1, \ldots, q \qquad (2.1)$$

Tal modelo chama-se modelo de Potts planar, e seu hamiltoniano é dado por:

$$H = -\sum_{\langle \vec{r}\,\vec{r}\,' \rangle} J(\theta_{\vec{r}\,\vec{r}\,'}) \qquad (2.2)$$

$$J(\theta) = -\epsilon_1 \cos\theta \qquad (2.3)$$

onde a soma sobre $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ é sobre os primeiros vizinhos e $J(\theta)$ é proporcional ao angulo entre os estados em que se encontram dois sítios quaisquer.

Outro modelo, chamado de modelo de Potts "standard" é dado por:

$$H = -\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}'\rangle} J(\theta_{\vec{r},\vec{r}'}) = -\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}'\rangle} \varepsilon_2 \, \delta_{Kr}(n_{\vec{r}}, n_{\vec{r}'}) \qquad (2.4)$$

O modelo de Potts "standard" representa uma interação ferromagnética para $\varepsilon_2 > 0$ e antiferromagnética para $\varepsilon_2 < 0$. Neste modelo, a interação é nula para o caso dos spins estarem em estados diferentes.

Outra formulação para o modelo de Potts "standard" seria escrevendo-o de forma a ressaltar a sua simetria em um espaço de q-1 dimensões. Reescreve-se (2.4) da forma:

$$n_{\vec{r}} \rightarrow i \qquad n_{\vec{r}'} \rightarrow j$$

$$\delta(i,j) = \frac{1}{p}\left[1 + p \quad \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j\right] \qquad (2.5)$$

onde $\vec{a}_i$ i = 1...p são p vetores unitários, apontando nas p direções de um hipertetraedro de p-1 dimensões. O hamiltoniano, para esta formulação, fica da forma:

$$H = -\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}'\rangle} \frac{\varepsilon_2}{p}\left[1 + p \quad \vec{a}_{i\vec{r}} \cdot \vec{a}_{j\vec{r}'}\right] \qquad (2.6)$$

onde os vetores a_i apresentam as seguintes propriedade .

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p-1} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} = \delta_{ij} - \frac{1}{p}$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} a_i^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (2.7)$$

Pode-se, ainda, reescrever o hamiltoniano (2.6) da forma:

$$H = -\sum_{\langle \vec{r}\vec{r}' \rangle} J_{\vec{r},\vec{r}'} \vec{S}_{\vec{r}} \vec{S}_{\vec{r}'} \qquad (2.8)$$

onde $\vec{S}_{\vec{r}}$ está em um dos $\vec{a}_i$ i = 1...p estados de Potts. O hamiltoniano da forma (2.8) é conveniente para obter-se uma formulação contínua. A soma sobre $\langle \vec{r}\vec{r}' \rangle$ é sobre os primeiros vizinhos.

2.2 Formulação Contínua do Modelo de Potts

2.2.1 Caso Simétrico

A formulação contínua do modelo de Potts pode ser obtida, como foi indicado por Zia and Wallace[22], usando a transformação de Hubbard-Stratonowich[8]. Como o trabalho da ref. 22 não apresenta uma dedução explícita da formulação contínua, isso é feito a seguir.

Partindo-se de (2.8), acrescentando-se um termo de interação com o campo magnético, pode-se obter a função de partição:

$$Z\{h\} = \sum_{\{S_{\vec{r}}\}} e^{+\beta \sum_{\langle \vec{r}\vec{r}'\rangle} J_{\vec{r}\vec{r}'} \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{S}_{\vec{r}'} + \beta \sum_{\vec{r}} \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{h}_{\vec{r}}} \tag{2.9}$$

onde a soma sobre é sobre as configurações. Escreve-se:

$$\beta J_{\vec{r}\vec{r}'} = K_{\vec{r}\vec{r}'}$$

$$\beta \vec{h}_{\vec{r}} = \vec{H}_{\vec{r}} \tag{2.10}$$

Usando a identidade matemática[8,11b]

---

[b] Faz-se soma sobre índices repetidos.

$$e^{\sum_{\bar{r}\bar{r}'\sigma} S_{\bar{r}\sigma} K_{\bar{r}\bar{r}'} S_{\bar{r}'\sigma}} = C \int \left(\prod_{\bar{r}\rho} d\bar{A}_{\bar{r}\rho} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{4} \bar{A}_{\bar{r}\sigma} K^{-1}_{\bar{r}\bar{r}'} \bar{A}_{\bar{r}'\sigma} + \bar{A}_{\bar{r}\sigma} S_{\bar{r}\sigma} \right\} \tag{2.11}$$

os índices gregos indicam n = p-1 componentes dos vetores de Potts.

Substituindo-se (2.11) em (2.9), obtém-se:

$$Z\{H\} = \sum_{\{S_{\bar{r}}\}} \int \left(\prod_{\bar{r}\rho} d\bar{A}_{\bar{r}\rho} \right) \exp\left\{ \sum_{\sigma\bar{r}\bar{r}'} -\frac{1}{4} \bar{A}_{\bar{r}\sigma} K^{-1}_{\bar{r}\bar{r}'} \bar{A}_{\bar{r}'\sigma} + \sum_{\bar{r}\sigma} (\bar{A}_{\bar{r}\sigma} + H_{\bar{r}\sigma}) S_{\bar{r}\sigma} \right\} \tag{2.12}$$

Fazendo-se a transformação $\bar{A}_{\bar{r}\sigma} \rightarrow \tilde{A}_{\bar{r}\sigma} - H_{\bar{r}\sigma}$:

$$Z\{H\} = \sum_{\{S_{\bar{r}}\}} \int \left(\prod_{\bar{r}\rho} d\tilde{A}_{\bar{r}\rho} \right) \exp\left\{ \sum_{\bar{r}\bar{r}'\sigma} -\frac{1}{4} (\tilde{A}_{\bar{r}\sigma} - H_{\bar{r}\sigma}) K^{-1}_{\bar{r}\bar{r}'} (\tilde{A}_{\bar{r}'\sigma} - H_{\bar{r}'\sigma}) + \sum_{\bar{r}\sigma} \tilde{A}_{\bar{r}\sigma} S_{\bar{r}\sigma} \right\} \tag{2.13}$$

Como a soma sobre as configurações só atua no último termo e (2.13), pode-se efetuar tal somatório separadamente; utilizando os vetores $a_i = \{a_i^{\alpha}\}$ de 2.1;

$$\sum_{\{S_{\vec{r}}\}} e^{\sum_{\sigma \vec{r}} \tilde{A}_{\vec{r}\sigma} S_{\vec{r}\sigma}} = \sum_{i} e^{\sum_{\sigma \vec{r}} \tilde{A}_{\vec{r}\sigma} a_{i\vec{r}}^{\sigma}} \qquad (2.14)$$

onde a soma sobre i é a soma sobre estados, a soma sobre σ é a soma sobre componentes e a soma sobre $\vec{r}$ soma sobre os sítios.

Fazendo-se a expansão da exponencial:

$$\sum_{\{S_{\vec{r}}\}} e^{\sum \tilde{A}_{\vec{r}\sigma} S_{\vec{r}\sigma}} = \sum_{i} \prod_{\vec{r}} e^{\sum_{\sigma} \tilde{A}_{\sigma\vec{r}} a_{i\vec{r}}^{\sigma}} \qquad (2.15)$$

Faz-se uma nova expansão da exponencial e logo a exponenciação do logarítmo de toda a expansão, obtendo-se:

$$\sum_{i} \prod_{\vec{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{\sigma} \tilde{A}_{\vec{r}\sigma} a_{\vec{r}i}^{\sigma} \right]^n = e^{\ln \prod_{\vec{r}} \sum_{i,p,\sigma_1 \ldots \sigma_p} \frac{1}{p!} \tilde{A}_{\vec{r}\sigma_1} \ldots \tilde{A}_{\vec{r}\sigma_p} a_{i\vec{r}}^{\sigma_1} \ldots}$$

$$\sum_{i}\prod_{\bar{r}} e^{\sum_{\sigma}\tilde{A}_{\sigma\bar{r}}\, a^{\sigma}_{i\bar{r}}} = \exp\sum_{\bar{r}} \ln\Big[\sum_{i,\sigma_1\ldots\sigma_p,p} \frac{1}{p!}\,\tilde{A}_{\bar{r}\sigma_1}\cdots\tilde{A}_{\bar{r}\sigma_p}\, a^{\sigma_1}_{i,\bar{r}}\cdots a^{\sigma_p}_{i,\bar{r}}\Big] \qquad (2.16)$$

Faz-se nova troca de variáveis para que se tenha uma expressão que não dependa do inverso da temperatura junto aos campos A, ou seja, faz-se

$$A_{\bar{r}\sigma} = \sum_{\vec{r}'} \frac{1}{2}\, K^{-1}_{\bar{r}\bar{r}'}\,\tilde{A}_{\bar{r}'\sigma} \qquad (2.17)$$

No limite contínuo, a nova variável $A_{\bar{r}\sigma}$ torna-se $A_{\sigma}(x)$, a integral múltipla irá tornar-se uma integral funcional e a expressão (2.13) ficará da forma[c]:

$$Z\{H\}\propto \int \mathcal{D}A\ \exp\Big\{\int\!\!\int \big[-A_{\sigma}(x)\,k(x-x')\,A_{\sigma}(x')\big]\,dx\,dx' + \int H_{\sigma}A_{\sigma}(x)\,dx$$
$$\int \ln\Big[\sum_{i\,p\,\sigma_1\ldots\sigma_p} \frac{2^p}{p!}\,k(x-x')\,k(x-x'')\ldots k(x-x^p)\,A_{\sigma_1}(x')\ldots A_{\sigma_p}(x^p)\,a_i^{\sigma_1}\ldots a_i^{\sigma_p}\Big]dx'\ldots dx^p\,dx \qquad (2.18)$$

[c] Soma é indicada com índices repetidos.

Fazendo-se uma transformada de Fourier:

$$Z\{H\} \propto \int DA \exp\left\{ \int_{\bar{k}} \left[-A_\alpha(\bar{k}) K(\bar{k}) A_\alpha(-\bar{k}) + H_\alpha(-\bar{k}) A_\alpha(\bar{k}) \right] + \right.$$

$$+ \int \ln \int_{\bar{k}} \cdots \int_{\bar{k}^{(p)}} e^{i(\bar{k}+\cdots+\bar{k}^{(p)})\cdot \bar{x}} \sum_{i,p,\sigma_1 \ldots \sigma_p} \frac{2^p}{p!} K(\bar{k}) \ldots K(\bar{k}^{(p)}) A_{\sigma_1}(\bar{k}) \ldots A_{\sigma_p}(\bar{k}^{(p)})$$

$$\left. a_i^{\sigma_1} \ldots a_i^{\sigma_p} \, dx \right\} \qquad (2.19)$$

Expandindo-se o logarītmo e reagrupando termos de mesma ordem:

$$Z\{H\} \propto \int DA \exp\left\{ \int_{\bar{k}} -A_\alpha(\bar{k}) A_\alpha(-\bar{k}) \left[K(\bar{k}) - 2\|K(\bar{k})\|^2 \right] + H_\alpha(-\bar{k}) \right.$$

$$A_\alpha(\bar{k}) + \int_{\bar{k},\bar{k}'} \frac{2^3}{3!} D_{\alpha\beta\gamma} K(\bar{k}) K(\bar{k}') K(-\bar{k}-\bar{k}') A_\alpha(\bar{k}) A_\beta(\bar{k}') A_\gamma(-\bar{k}-\bar{k}')$$

$$\left. + \int_{\bar{k},\bar{k}',\bar{k}''} K(\bar{k}) K(\bar{k}') K(\bar{k}'') K(-\bar{k}-\bar{k}'-\bar{k}'') \left[\frac{2^4}{4!} E_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{2^4}{2!^3} S_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] A_\alpha(\bar{k}) A_\beta(\bar{k}') A_\gamma(\bar{k}'') A_\delta(-\bar{k}-\bar{k}') \right\}$$

$$D_{\alpha\beta r} = \sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} a_i^{\beta} a_i^{r}$$

$$E_{\alpha\beta r\delta} = \sum_{i=1}^{p} a_i^{\alpha} a_i^{\beta} a_i^{r} a_i^{\delta}$$

$$S_{\alpha\beta r\delta} = \frac{1}{3} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{p} \left(a_i^{\alpha} a_i^{\beta} a_j^{r} a_j^{\delta} + a_i^{\alpha} a_i^{r} a_j^{\beta} a_j^{\delta} + a_i^{\alpha} a_i^{\delta} a_j^{\beta} a_j^{r} \right) \quad (2.20)$$

Faz-se a expansão de $K(\bar{K})$ atē 2ª ordem em $\bar{K}$ jā que hā interesse no estudo da região de baixos momentos.

$$K(\bar{K}) = K_o(1 - \rho^2 K^2) \quad (2.21)$$

$$K(\bar{K}) = \sum_{R} K(R)\, e^{i\bar{K}\cdot\bar{R}} = \sum_{R} K(R) - \frac{1}{2}\sum_{R} (K.R)^2\, K(R) + \dots \quad (2.22)$$

Da comparação de (2.21) com (2.22), obtēm-se

$$K_o = \sum_{R} K(R) = Z\beta J_o \quad (2.23)$$

onde Z ē igual ao nūmero dos primeiros vizinhos,

$$K_0\rho^2 K^2 = \frac{1}{2}\sum_{R} K(R)\,(K\cdot R)^2 \sim K_0 a^2 K^2 \qquad (2.24)$$

a é igual a constante de rede.

Vê-se de (2.23) que K_0 é inversamente proporcional à temperatura. Para uma temperatura $T_0 = 2zJ_0$, a parte livre da função de partição Eq. (2.20), ou seja, só o termo quadrático é dada por

$$Z_0\{H\} \propto \int DA \exp\left\{-\int_K A_\alpha(\vec{K})\, A_\alpha(-\vec{K})\, K_0\left[(1-2K_0)+\rho^2 K^2(4K_0-1)\right]\right\} \qquad (2.25)$$

para K = 0, é tal que permite o crescimento arbitrário da amplitude do campo, gerando divergências nas funções de correlação.

Escreve-se, desta forma, o hamiltoniano do sistema como uma expansão em torno da temperatura T_0, ou seja, nas proximidades da região onde a teoria livre é instável. T_0 é a temperatura crítica da teoria sem interação. A expansão tem a forma:

$$1 - 2K_0 = \frac{T - T_0}{T_0} + O(T-T_0)^2$$

O hamiltoniano livre terá, então, a forma

$$-\beta H_o = -\frac{1}{2}\int_{\bar{k}}\left[\frac{T-T_o}{T_o}+\rho^2 k^2\right] A_\alpha(\bar{k})\, A_\alpha(-\bar{k}) \qquad (2.26)$$

Acrescentando-se ao hamiltoniano livre os termos cúbicos e quártico, obtém-se (para campo externo nulo):

$$\mathcal{H} = -\beta H$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\int_{\bar{k}}\left(\frac{T-T_o}{T_o}+\rho^2 k^2\right) A_\alpha(\bar{k})\, A_\alpha(-\bar{k}) + \int_{\bar{k},\bar{k}'}\frac{\lambda'}{3!} D_{\alpha\beta\gamma}$$

$$A_\alpha(\bar{k})\, A_\beta(\bar{k}')\, A_\gamma(-\bar{k}-\bar{k}') + \int_{\bar{k},\bar{k}',\bar{k}''}\left[\frac{f_o'}{4!} E_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{h_o'}{4!} S_{\alpha\beta\gamma\delta}\right] A_\alpha(\bar{k})$$

$$A_\beta(\bar{k}')\, A_\gamma(\bar{k}'')\, A_\delta(-\bar{k}-\bar{k}'-\bar{k}'')$$

$$\lambda' = 1 - 3\,\frac{(T-T_o)}{T_o} + O(T-T_o)^2$$

$$f_o' = 1 - 4\,\frac{(T-T_o)}{T_o} + O(T-T_o)^2$$

$$h_o' = 3 - 12\,\frac{(T-T_o)}{T_o} + O(T-T_o)^2 \qquad (2.27)$$

Faz-se a mudança de variáveis de A_α para $A_\alpha \rho\sqrt{2}$ obtendo-se:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4}\int_{\vec{k}} (k^2+\mu^2)\, A_\alpha(\vec{k}) A_\alpha(-\vec{k}) + \frac{\lambda}{3!}\int_{\vec{k},\vec{k}'} D_{\alpha\beta\gamma}\, A_\alpha(\vec{k}) A_\beta(\vec{k}')$$

$$A_\gamma(-\vec{k}-\vec{k}') + \int_{\vec{k},\vec{k}',\vec{k}''} \left(\frac{f_o}{4!} E_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{h_o}{4!} S_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) A_\alpha(\vec{k}) A_\beta(\vec{k}') A_\gamma(\vec{k}'') A_\delta(-\vec{k}-\vec{k}'-\vec{k}'')$$

$$(2.28)$$

$$\lambda = \frac{\lambda'}{2\rho^3\sqrt{2}}$$

$$f_o = \frac{f_o'}{4\rho^4}$$

$$h_o = \frac{h_o'}{4\rho^4} \qquad (2.29)$$

Para obter-se uma expressão explícita para $D_{\alpha\beta\gamma}$, $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$, deve-se escolher uma representação para os vetores $\vec{a}_i$. Duas representações conhecidas são: representação de Wallace e Young[23] e representação de Priest e Lubensky[9]. O modelo de Potts de 4 estados mostra claramente a diferença entre as duas representações (ver Figura 2.1).

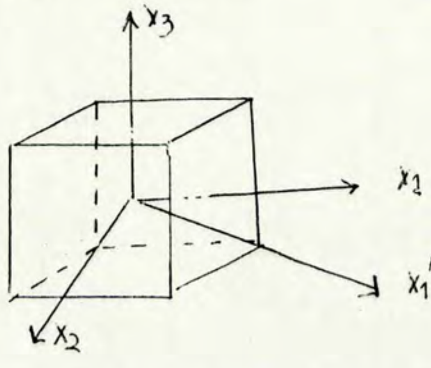


FIGURA 2.1 – Representações – Ilustram-se duas representações: (x1, x2, x3), a de Wallace e Young e (x_1', x_2', x_3'), a de Priest e Lubensky

Para o caso de não haver quebra de simetria, entre as componentes dos estados de Potts, os resultados independem da representação. No entanto, os resultados obtidos, no caso de haver quebra de simetria na representação de Wallace e Young são diferentes dos obtidos na representação de Priest e Lubensky como foi discutido recentemente por W.K.Theumann e M.A.Gusmão[24]. Nesta dissertação será usada a representação de Priest e Lubensky[9] onde a_i^{α} é dado por:

$$a_i^{\alpha} = \left[\frac{p-\alpha}{p-\alpha+1}\right]^{1/2} \times \begin{cases} 0 & \text{se } i<\alpha \\ 1 & \text{se } i=\alpha \\ -1/(p-\alpha) & \text{se } i>\alpha \end{cases} \qquad (2.30)$$

onde i representa os p estados de Potts e α as p-1 componentes. Desta forma $D_{\alpha\beta\gamma}$ é dado por:

$$D_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i a_i^{\alpha} a_i^{\beta} a_i^{\gamma} = \frac{}{[(p-\alpha)(p-\alpha+1)]^{1/2}} \times \begin{cases} -1 & \text{se } \begin{bmatrix} \alpha = \gamma > \beta \\ \alpha = \beta > \gamma \\ \gamma = \beta > \alpha \end{bmatrix} \\ p-\alpha-1 & \text{se } \alpha = \beta = \gamma \\ 0 & \text{OUTROS} \end{cases} \qquad (2.31)$$

2.2.2 Caso com Quebra de Simetria

Certos sistemas físicos apresentam diferentes termos de troca (J) para suas diferentes componentes. Isto indica que a transição se dará preferencialmente em certas componentes, caracterizando uma quebra de simetria no sistema. Assim, caso a quebra de simetria favoreça o ordenamento segundo uma dada componente, o sistema se ordenará à temperatura crítica relacionada à esta componente.

O hamiltoniano discreto para um sistema de spins em interação será dado por:

$$H = - \sum_{\sigma \langle \vec{r}\vec{r}' \rangle}^{p-1} J_{\vec{r}\vec{r}'\sigma} \, S_{\vec{r}\sigma} \, S_{\vec{r}'\sigma} \qquad (2.32)$$

onde $\langle ij \rangle$ é a soma sobre os primeiros vizinhos e σ é a soma sobre as componentes de spin.

Pode-se fazer a transformação de Hubbard-Stratonovich,[8] obtendo-se uma expressão equivalente à (2.20)[d]

$$
\begin{aligned}
Z\{H\} \propto \int DA \exp\Big\{ & -\int_{\bar{k}} A_\alpha(\bar{k})\, A_\alpha(-\bar{k}) \left[K_\alpha(\bar{k}) - 2\,|K_\alpha(\bar{k})|^2 \right] + \\
& \int_{\bar{k}} \sum_i H_\alpha(-\bar{k})\, A_\alpha(\bar{k}) + \int_{\bar{k},\bar{k}'} \frac{2^3}{3!} D_{\alpha\beta\gamma}\, K_\alpha(\bar{k})\, K_\beta(\bar{k}')\, K_\gamma(-\bar{k}-\bar{k}')\, A_\alpha(\bar{k}) \\
& A_\beta(\bar{k}')\, A_\gamma(-\bar{k}-\bar{k}') + \int_{\bar{k},\bar{k}',\bar{k}''} \frac{2^4}{4!} \left[E_{\alpha\beta\gamma\delta} - 3S_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] K_\alpha(\bar{k})\, K_\beta(\bar{k}')\, K_\gamma(\bar{k}'') \\
& K_\delta(-\bar{k}-\bar{k}'-\bar{k}'')\, A_\alpha(\bar{k})\, A_\beta(\bar{k}')\, A_\gamma(\bar{k}'')\, A_\delta(-\bar{k}-\bar{k}'-\bar{k}'')
\end{aligned}
\qquad (2.33)
$$

com diferentes K's para as diversas componentes. Fazendo-se a expansão de $K_\alpha(\bar{k})$ até 2ª ordem, obtém-se :

$$K_\alpha(\bar{k}) = K_{0\alpha} \left[1 - \xi^2 k^2 \right] \qquad (2.34)$$

$K_0 - \frac{\partial K}{\partial k}(k-0)$

---

[d] Índices repetidos indicam soma sobre os mesmos.

Como foi visto para o caso simétrico, o termo de troca modificado $K_{o\alpha}$ é inversamente proporcional à temperatura

$$K_{o\alpha} = z\beta J_{o\alpha}$$

$$K_{o\alpha}\, \rho^2 k^2 = K_{o\alpha}\, a^2 k^2 \tag{2.35}$$

Para uma dada temperatura $T_{o\bar{\alpha}} = 2zJ_{o\bar{\alpha}}$ a função de partição do hamiltoniano livre (sem termos trilineares e quadrático), dada por:

$$Z^o\{H\} \sim \int DA \exp\left\{-\int_{\bar{k}} A_\alpha(\bar{k})\, A_\alpha(-\bar{k})\, K_{o\alpha}\left[1 - 2K_{o\alpha} + \rho^2 k^2\left(4K_{o\alpha} - 1\right)\right]\right\} \tag{2.36}$$

é tal que, em K = 0, a amplitude do campo A_α pode crescer arbitrariamente, pois a distribuição de probabilidade em nada restringe tal crescimento. Esta é a temperatura crítica da componente $A_{\bar{\alpha}}$ dos campos. Cada componente A_α terá, então, diferindo do caso simétrico uma temperatura crítica própria.

Como há interesse no estudo do comportamento crítico em regiões próximas à de temperatura crítica, faz-se uma expansão em redor de $T_{o\alpha}$.

Como nesta dissertação será estudada uma quebra de simetria específica, ou seja, uma quebra de simetria que diferencie uma componente longitudinal com temperatura crítica T_o de p-2 componentes transversais com temperatura crítica T_o', a expressão para a função de partição livre terá a seguinte forma:

$$Z^o\{H\} \propto \int DA \, \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_{\bar{K}}\left[A_1(\bar{K})\,A_1(-\bar{K})\left(\mu_1^2+K^2\right)+\sum_q A_q(\bar{K})A_q(-\bar{K})\left(\mu_2^2+K^2\right)\right]\right\}$$

(2.37)

onde soma sobre q, representa a soma sobre componentes transversais e:

$$\mu_1^2 = \frac{T - T_o}{T_o}\,\frac{1}{\rho^2} \qquad (2.38)$$

$$\mu_2^2 = \frac{T - T_o'}{T_o'}\,\frac{1}{\rho^2} \qquad (2.39)$$

Como há duas possibilidades de ordenamento, há duas possibilidades de temperatura crítica para o sistema se ordenar;

a) $T_o' < T_o$: o ordenamento será segundo as componentes longitudinais, logo será a temperatura crítica;

b) $T_o' > T_o$: o ordenamento será segundo as componentes transversais, logo será a temperatura.

Como para cada tipo de componente longitudinal ou transversal, há uma "temperatura crítica", haverá também, constantes de acoplamento diferentes segundo as componentes. Pode-se, assim reescrever (2.28) da forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4}\int_{\bar{k}}\left[(\bar{k}^2+\mu_1^2)\, A_1(\bar{k})\; A_1(-\bar{k}) + (\bar{k}^2+\mu_2^2)\, A_q(-\bar{k})\, A_q(\bar{k})\right]$$

$$+\frac{\lambda_u}{3!}\int_{\substack{\bar{k}\\ \bar{k}'}} D_{111}\;\; A_1(\bar{k})\, A_1(\bar{k}')\; A_1(-\bar{k}-\bar{k}') + 3\,\frac{\lambda_v}{3!}\int_{\substack{\bar{k}\\ \bar{k}'}} D_{1qr}\;\; A_1(\bar{k})$$

$$A_q(\bar{k}')\;\, A_r(-\bar{k}-\bar{k}') + \frac{\lambda_w}{3!}\int_{\bar{k},\bar{k}'} D_{qrs}\;\; A_q(\bar{k})\; A_r(\bar{k}')\;\; A_s(-\bar{k}-\bar{k}')$$

$$+\; O(A)^4 \qquad\qquad (2.40)$$

$$\lambda_u = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\rho^3}\left[1 - 3\;\frac{T-T_0}{T_0} + O(T-T_0)^2\right] \qquad (2.41)$$

$$\lambda_v = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\rho^3}\left[1 - \frac{T-T_0}{T_0} - 2\,\frac{T-T_0'}{T_0'} + O(T-T_0)^2 + O(T-T_0')^2\right] \qquad (2.42)$$

$$\lambda_w = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\rho^2}\left[1 - 3\;\frac{T-T_0'}{T_0'} + O(T-T_0')^2\right] \qquad (2.43)$$

2.3 Funções de Correlação e Funções de Vértice

Grandezas termodinâmicas são obtidas do cálculo de funções de correlação de N pontos. Partindo-se de um hamiltoniano no contínuo, como o obtido em (2.40) e incluíndo-se a ação de um campo magnético h_α, obtém-se a função de partição da forma:

$$Z\{H\} = \int DA \; \exp\left\{ \mathcal{H} + \int_{\underline{k}} H_\alpha A_\alpha \right\} \qquad (2.44)$$

onde $\mathcal{H}$ é o hamiltoniano dado por (2.40) e $H_\alpha = \beta h_\alpha$ e o termo relacionado ao campo magnético.

A função de correlação de N pontos é dada por:[10]

$$G^{(N)}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(K_1 \dots K_N) = \left. \frac{\delta^{(N)} Z\{H_\alpha\}}{\delta H_{\alpha_1}(-K_1) \; \dots \; \delta H_{\alpha_N}(-K_N)} \right|_{H_\alpha = 0} \qquad (2.45)$$

O cálculo feito com a função de partição livre, ou seja, usando o hamiltoniano sem termos trilineares, fornece expoentes críticos da teoria de campo médio[12]. Para obterem-se melhores resultados para os expoentes críticos, incluem-se, via teoria de perturbações, os termos trilineares.

Faz-se, assim, em forma standard[10,11] um cálculo em perturbações, ordem por ordem no número de loops (integrais de momento), das funções de correlação de N pontos.

Como só partes conexas[e] contribuem para a função de correlação

$$G_{c\,\alpha_1 \dots \alpha_N}^{(N)}(k_1 \dots k_N) = \left. \frac{\delta^N F\{H_\alpha\}}{\delta H_{\alpha_1}(-k_1) \dots \delta H_{\alpha_N}(-k_N)} \right|_{H_\alpha = 0} \qquad (2.46)$$

onde F é a função geratriz das funções de correlação conexas. F é também a energia livre sendo dada por:

$$F\{H_\alpha\} = \ln Z\{H_\alpha\} \qquad (2.47)$$

A expansão ordem por ordem das funções de correlação conexas gera diagramas sucessivamente mais complexos. Como a parte irredutível dos diagramas é suficiente para obterem-se resultados físicos[10,11], pode-se obter todos os resultados do cálculo de funções de vértice irredutíveis de uma partícula. Tais funções são obtidas, fazendo-se uma transformada de Legendre de forma a expressar a energia livre não como função do campo magnéti

---

[e] Diagramas que não apresentam subdiagramas separados, ou seja, sem nenhum propagador ligando.

co, e sim, como função do valor esperado do campo,

Assim, define-se função de vértice como[10,11]:

$$\Gamma^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(k_1 \ldots k_N) = \frac{\delta^N \Gamma\{\bar{A}\}}{\delta \bar{A}_{\alpha_1}(-k_1) \ldots \delta \bar{A}_{\alpha_N}(-k_N)} \qquad (2.48)$$

onde $\Gamma\{\bar{A}\} = \sum_{\alpha} \bar{A}_\alpha H_\alpha - F\{H_\alpha\}$

A função de vértice de dois pontos, irredutível de uma partícula (I1P), relaciona-se à função de correlação via[10,11]:

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha_1 \alpha_2}(k) = \frac{1}{G_c(k)} \qquad (2.49)$$

A função de vértice I1P de dois pontos, a momento zero, $\Gamma^{(2)}_{\alpha\alpha}(k)\Big|$ é a susceptibilidade. Para a função de correlação conexa de N pontos,

$$G^{(N)}_{c\,\alpha_1 \ldots \alpha_N}(k_1 \ldots k_N) = G^{(2)}_{c\,\alpha_1\alpha_2}(k_1) \ldots G^{(2)}_{c\,\alpha_{N-1}\alpha_N}(k_N)\, \Gamma^{(N)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}(k_1 \ldots k_N) + Q^{(N)}$$

$$Q^{(N)} \equiv \sum_{\ell} G^{(2)}_{c\,\alpha_1\alpha_2}(k_1) \ldots G^{(2)}_{c}(k_N)\, \Gamma^{(N-\ell)}(k_1 \ldots k_\ell)\, \Gamma^{(\ell)}(k_{\ell+1} \ldots) \qquad (2.50)$$

De (2.48), obtém-se:

$$\Gamma\{A\} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} \int dx_1 \ldots dx_N\, \Gamma^{(N)}_{i_1 \ldots i_N}(x_1 \ldots x_N)\, \bar{A}_{i_1} \ldots \bar{A}_{i_N}$$

Fazendo-se a transformada de Fourier de $\Gamma^{(N)}$ e usando a invariança translacional:

$$\Gamma\{\bar{A}\} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^d}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} \int dK_1 \ldots dK_{N-1}\, \bar{\Gamma}^{(N)}_{i_1 \ldots i_N}(K_1 \ldots K_{N-1})\, \bar{A}_{i_1}(-K_1) \ldots \bar{A}_{i_N}(-K_1 \ldots -K_{N-1})$$

(2.51)

No caso dos campos serem uniformes por desprezarem-se flutuações, o potencial efetivo é dado por:

$$\Gamma\{\bar{A}\} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{(2\pi)^d}{N!} \sum_{i_1 \ldots i_N} \bar{\Gamma}_{i_1 \ldots i_N}(0, \ldots, 0)\, \bar{A}_{i_1} \ldots \bar{A}_{i_N} \qquad (2.52)$$

O comportamento crítico foram da temperatura crítica está relacionado a uma função de vértice $\Gamma^{(N,L)}$, com inserção de L operadores A^2 através de[10]:

$$\Gamma^{(N)}(k_i, t, u, k) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!}\, t^L\, \Gamma^{(N,L)}(k_i, \rho_i, t=0, u, k) \qquad (2.53)$$

A função de vértice de N pontos e L inserções de A^2 é dada então por[10,11]:

$$\Gamma^{(N,L)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{N+L}}(k_1 \ldots k_N, q_1 \ldots q_L) = \frac{\delta^{(N+L)}\Gamma\{\bar{A}\}}{\delta \bar{A}_{\alpha_1}(-k_1) \ldots \delta \bar{A}_{\alpha_N}(-k_N)\, \delta t(-q_1) \ldots \delta t(-q_L)} \tag{2.54}$$

e seu cálculo é feito juntando-se ao hamiltoniano um termo da forma $\frac{1}{2} t \bar{A}^2$.

A função de vértice irredutível de uma partícula de N pontos com inserção de A^2 é conhecida como função de vértice I1P com inserção de ϕ^2. Por ser mais usual, os campos A_α serão (no texto dos próximos capítulos) designados por ϕ_α.

3 - RENORMALIZAÇÃO DO MODELO DE POTTS CONTÍNUO

O objetivo deste capítulo é o estudo da renormalização do modelo de Potts contínuo, ou seja, da teoria de Potts em ϕ^3, que não se acha feito em forma explícita na literatura, seguindo as linhas gerais da renormalização numa teoria em ϕ^4, exposta na literatura[10,11]. Há particularidades da renormalização numa teoria em ϕ^3 que são diferentes da teoria em ϕ^4, e que é importante assinalar. Essas diferenças independem do fato da teoria ser escalar ou vetorial (o caso do modelo de Potts).

Fazendo-se teoria renormalizada de perturbações, usando, como parâmetro de expansão, o número de loops[10,11] (forma diagramática de representar integrais), obtêm-se funções de vértice irredutíveis de 1 partícula (I1P), via expressão (2.48) e hamiltoniano geral (2.40), as quais estão relacionadas as quantidades físicas. A função de vértice, I1P de 2 pontos está relacionada ao inverso da susceptibilidade. À ordem de zero loops, fornece o resultado da teoria de Landau, ou seja,

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha\alpha}(k=0) = \chi_\alpha^{-1} = \mu_\alpha^2 \qquad (3.1)$$

No caso de haver quebra de simetria tal que separe as componentes dos campos em dois tipos: uma longitudinal e p-1 transversais, obtém-se :

$$\Gamma^{(2)}_{11}(k=0) = \chi_1^{-1} = \mu_1^2 = T - T_c, \; \gamma_1 = 1 \qquad (3.2)$$

para a componente longitudinal, e

$$\Gamma^{(2)}_{qq}(k=0) = \chi_2^{-1} = \mu_2^2 = T - T_c' \,, \quad \gamma_2 = 1 \qquad (3.3)$$

para as componentes transversais.

3.1 - Caso Simétrico

No caso de não haver quebra de simetria entre as componentes dos campos, há só uma temperatura crítica e as funções de vértice I1P de dois pontos ficam com uma forma única:

$$\Gamma^{(2)}(k=0) = \chi^{-1} = \mu^2 = T - T_c \qquad (3.4)$$

À ordem de 1 loop, ou seja, a ordem de λ^2, onde λ é a constante de acoplamento sem renormalizar no hamiltoniano (2.29) e onde Λ é um "cut off" de momentos, e o coeficiente B_1 encontra-se no apêndice A e a integral no apêndice B, a função de vértice I1P de 2 pontos em K = 0 fica da forma:

$$\Gamma^{(2)}(k=0) = \mu^2 - \lambda^2 B_1 \bar{I}(k=0, \mu^2, \Lambda) \qquad (3.5)$$

Fazendo-se contagem de potências[f] obtém-se que a integral $\bar{I}$ diverge quadraticamente em d = 6 e $\Lambda \to \infty$. Uma forma de absorver-se esta divergência, fazendo-se finita a expressão para o inverso da susceptibilidade, é definindo-se uma nova massa m_1^2 e uma nova temperatura crítica. Faz-se, assim, μ^2 ser infinita em d = 6 e $\Lambda \to \infty$.

---

[f] Contam-se as potências em momento para determinar a divergência.

Assim sendo, à ordem de 1 loop, o inverso da susceptibilidade é igual a m_1^2, ou seja,

$$\chi^{-1} = m_1^2 = \mu^2 - \lambda^2 B_1 \bar{I}(k=0, \mu^2, \Lambda) \qquad (3.6)$$

$$\mu^2 = m_1^2 + \lambda^2 B_1 \bar{I}(k=0, m_1^2, \Lambda) \qquad (3.7)$$

A função de vértice I1P de 2 pontos ficará então na forma:

$$\Gamma^{(2)}(k) = k^2 + m_1^2 - \lambda^2 B_1 \left(\bar{I}(k, m_1^2, \Lambda) - \bar{I}(k=0, m_1^2, \Lambda) \right) \qquad (3.8)$$

A expressão entre parênteses diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$, pois é composta da subtração de duas divergências quadráticas na mesma função. Elimina-se esta divergência multiplicando-se a função de vértice por uma função Z_ϕ de coeficientes tais que absorvam a divergência.

Introduzindo a função de renormalização

$$Z_\phi = 1 + b_1 g^2 + O(g^3) \qquad (3.9)$$

dada em função da constante de acoplamento renormalizada g, faz-se finita a função de vértice via:

$$Z_\phi \Gamma^{(2)}(k, m_1^2, \Lambda, \lambda) = \Gamma_R^{(2)}(k, m_1^2, g) \qquad (3.10)$$

À ordem de 1 loop, renormalização de constante de acoplamento não é necessária e pode-se utilizar a Eq. (3.9) com λ em lugar de g. Então:

$$\Gamma_B^{(2)}(k,m_1^2,g) = k^2 + m_1^2(1+b_1 g^2) - \lambda^2\left[B_1 \bar{I}(k,m_1^2,\Lambda) - \bar{I}(k=0,m_1^2,\Lambda) - b_1 k^2\right] \quad (3.11)$$

A divergência logarítmica da $\Gamma^{(2)}(k,m_1^2,\lambda,\Lambda)$ em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ é eliminada pela seguinte escolha de b_1:

$$b_1 = B_1 \frac{\partial}{\partial k^2} \bar{I}(k)\Big|_{k^2=0} \quad (3.12)$$

Com isso o coeficiente de m_1^2 passa a ser divergente. Redefine-se a massa para eliminar esta nova divergência. A nova massa m_1^2 é dada por:

$$Z_\phi m_1^2 = m^2 \quad (3.13)$$

Da expressão (2.29), obtém-se uma relação entre o potencial e as funções de vértice I1P de N pontos. À ordem de 1 loop tem-se[g]:

$$U\{A\} = \frac{1}{2}\mu^2 A^2 + \frac{\lambda}{3!} D_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha A_\beta A_\gamma - \frac{\lambda^2}{2} B_1 A_\alpha A_\alpha \bar{I}(k=0)$$
$$+ \frac{\lambda^3}{3!} G_1 D_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha A_\beta A_\gamma I(k=0,\mu^2,\Lambda) + O(\lambda^4) \quad (3.14)$$

---

[g]Os coeficientes B_1 e G_1 encontram-se no apêndice 1. As integrais I(K) e L(K) encontram-se no apêndice 2. Índices repetidos estão sendo somados.

onde A_μ são componentes do campo tiradas da Eq. (2.20) e $D_{\alpha\beta\gamma}$ encontra-se explicitamente na Eq. (2.31). Os termos de quarta ordem, ou mais nos campos, por contagem de potências, são finitos.

A expressão (3.14) apresenta divergências quadráticas (em $\bar{I}(K=0)$) e logarítmica (em $\bar{L}(K=0)$) em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Como, ao desejar-se uma expressão finita para o inverso da susceptibilidade, redefinindo-se a massa, o potencial com esta renormalização de massa também ficará alterado. Substituindo-se (3.7) em (3.14), obtém-se:

$$U\{A\}=\frac{1}{2}m_1^2A^2+\frac{\lambda^3}{3!}D_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha A_\beta A_\gamma+\frac{\lambda^3}{3!}G_1\bar{L}(K=0,m_1^2,\Lambda)A_\alpha A_\beta A_\gamma+O(\lambda^4) \tag{3.15}$$

O potencial continua divergindo logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Tal divergência é eliminada fazendo-se uma redefinição da constante de acoplamento λ de tal forma que a nova constante seja dada por:

$$g_1=\lambda+\lambda^3\,\bar{L}(K=0,m_1^2,\Lambda) \tag{3.16}$$

$$\lambda=g_1-g_1^3\,\bar{L}(K=0,m_1^2,\Lambda) \tag{3.17}$$

Substituindo-se (3.17) em (3.15), obtém-se um potencial dado por:

$$U\{A\} = \frac{1}{2} m_1^2 A^2 + \frac{g_1}{3!} D_{\alpha\beta r} A_\alpha A_\beta A_r + O(g_1^4)$$

que é finito e que não difere até a ordem de g^3 do resultado obtido à ordem de zero loops por substituir a massa sem renormalizar pela massa renormalizar e a constante de acoplamento sem renormalizar pela renormalizada.

À ordem de 1 loop, a função de vértice I1P de 3 pontos é dada por:

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(k_i, \mu^2, \Lambda, \lambda) = D_{\alpha\beta r} \left[\lambda + \lambda^3 G_1 \bar{I}(k_i, \mu^2, \Lambda) \right] \qquad (3.18)$$

E tal que:

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(k_i, \mu^2, \Lambda) = \lambda D_{\alpha\beta r} \qquad (3.19)$$

ou seja, proporcional à constante de acoplamento renormalizada g_1.

Fazendo-se renormalização de massa dada por (3.7) e de constante de acoplamento dada por (3.17) em (3.18), obtém-se:

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(k_i, m_1^2, g_1, \Lambda) = g_1 + g_1^3 G_1 \left(\bar{I}(k_i, m_1^2, \Lambda) - \bar{I}(k_i = 0, m_1^2, \Lambda) \right) D_{\alpha\beta r} \qquad (3.20)$$

Embora originalmente a $\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(k_i, \mu^2, \lambda, \Lambda)$ apresente divergência logarítmica para $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$, ao fazer-se renormalização de constante de acoplamento, subtraindo-se $L(K_i=0,m_1^2,\Lambda)$ de $L(K_i,m_1^2,\Lambda)$ elimina-se tal divergência e a função de vértice dada por (3.20) fica finita em $d=6$ ou $\Lambda\to\infty$.

A renormalização da $\Gamma^{(2)}(K,m_1^2\Lambda\, g_1)$ com função Z_ϕ implica renormalização da função de correlação $G^{(2)}(K,m_1^2\Lambda,g_1)$ que relaciona-se com a função de correlação $G^{(3)}(K_i,m_1^2 g_1,\Lambda)$ via Eq. (2.50). Ā ordem de 0 loops, obtém-se.

$$G_{\alpha\beta r}(K_i,m_1^2\Lambda,g_1)=-g_1 D_{\alpha\beta r}\, G^{(2)}(K_1,m_1^2,\Lambda)\,G^{(2)}(K_2,m_1^2,\Lambda)\;G^{(2)}(K_3,m_1^2,\Lambda)$$

$$=-Z_\phi^{3}\, g_1\, D_{\alpha\beta r}\; G_R^{(2)}(K_1,m_1^2,\Lambda)\,G_R^{(2)}(K_3,m_1^2,\Lambda)\;G_R^{(2)}(K_3,m_1^2,\Lambda) \qquad (3.21)$$

com as funções de correlação renormalizadas, $G_R^{(2)}$. Para

$$Z_\phi^{3/2}\, g_1 = g$$

$$G^{(3)}_{\alpha\beta r}(K_i,m_1^2,g_1,\Lambda) = Z_\phi^{3/2}\; G^{(3)}_{\alpha\beta r,R}(K_i,m_1^2,g) \qquad (3.22)$$

Usando (2.49)

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(K_i,m^2,g) = Z_\phi^{3/2}\;\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta r}(K_i,m^2,g,\Lambda) \qquad (3.23)$$

Para obter-se a expressão do inverso da susceptibilidade ā ordem de 2 loops, calcula-se a função de vértice I1P de 2 pontos em $K=0$ também ā ordem de 2 loops. A função de vértice

I1P de 2 pontos à ordem de 2 loops é dada por todos os coeficientes e integrais que serão apresentados encontram-se nos apêndices A e B, respectivamente, para:

$$\Gamma^{(2)}(K,\mu^2,\Lambda,\lambda) = K^2 + \mu^2 - \lambda^2 B_1 \bar{I}(K,\mu^2,\Lambda) - 2\lambda^4 B_1^2 \bar{I}_2^{(1)}(K,\mu^2,\Lambda)$$
$$-\lambda^4 G_1 B_1 \bar{I}_2^{(2)}(K,\mu^2,\Lambda) \qquad (3.24)$$

O inverso da susceptibilidade é dado por:

$$\chi^{-1} = \mu^2 - \lambda^2 B_1 \bar{I}(K=0,\mu^2,\Lambda) - 2\lambda^4 B_1^2 \bar{I}_2^{(1)}(K=0,\mu^2,\Lambda) - \lambda^4 G_1 B_1$$
$$\bar{I}_2^{(2)}(K=0,m_I^2,\Lambda) \qquad (3.25)$$

À ordem de 1 loop, como já foi dito anteriormente, o inverso da susceptibilidade diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. À ordem de 2 loops, a integral $\bar{I}_2^{(1)}$, por apresentar um subdiagrama quadraticamente divergente, diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$, já a integral $\bar{I}_2^{(2)}$, por contagem de potências, diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Para eliminarem-se estas divergências, redefine-se a massa à ordem de 2 loops da forma:

$$m_I^2 = \chi^{-1} = \mu^2 - \lambda^2 B_1 \bar{I}(K=0,\mu^2,\Lambda) - 2\lambda^4 B_1^2 \bar{I}_2^{(1)}(K=0,\mu^2,\Lambda) - \lambda^4 G_1 B_1 \bar{I}_2^{(2)}(K=0,\mu^2,\Lambda)$$

$$(3.26)$$

ou seja,

$$\mu^2 = m_1^2 + \lambda^2 B_1 \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) + 2\lambda^4 B_1^2 \bar{I}_2^{(1)}(K=0, m_1^2, \Lambda) +$$
$$\lambda^4 G_1 B_1 \bar{I}_2^{(2)}(K=0, m_1^2, \Lambda) + \lambda^4 B_1^2 \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \frac{\partial}{\partial m_1^2} \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda)$$
$$(3.27)$$

Substituindo-se (3.27) e (3.17) e em (3.24), ou seja, fazendo-se renormalização de massa ã ordem de 2 loops e da constante de acoplamento ã ordem de 1 loop, obtêm-se:

$$\Gamma^{(2)}(K, m_1^2, \Lambda) = K^2 + m_1^2 - g_1^2 B_1 [\bar{I}(K, m_1^2, \Lambda) - \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda)] - g_1^4$$
$$\Big\{ 2 B_1^2 \Big[\bar{I}_2^{(1)}(K, m_1^2, \Lambda) - \bar{I}_2^{(1)}(K=0, m_1^2, \Lambda) + \frac{1}{2} \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \frac{\partial}{\partial m_1^2} \Big(\bar{I}(K, m_1^2,$$
$$\Lambda) - \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \Big] + B_1 G_1 \Big[\bar{I}_2^{(2)}(K, m_1^2, \Lambda) - \bar{I}_2^{(2)}(K=0, m_1^2, \Lambda) - 2\bar{I}(K_i=0,$$
$$m_1^2, \Lambda) \bar{I}(K, m_1^2, \Lambda) + 2 \bar{I}(K_i=0, m_1^2, \Lambda) \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \Big] \Big\} \qquad (3.28)$$

Como foi visto anteriormente, o termo de ordem de 1 loop diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$.

Ã ordem de 2 loops, o termo:

$$\bar{I}'(K=0, m_1^2, \Lambda) = 2\bar{I}_2^{(1)}(K=0, m_1^2, \Lambda) + \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \frac{\partial}{\partial m_1^2} \bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \sim \iint^{\Lambda\Lambda} \frac{-2q_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^3 (q_2^2+m_1^2)^2 [(q_1+q_2)^2+m_1^2]}$$
$$(3.29)$$

por contagem de potências, diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. O termo:

$$I'(k,m_1^2,\Lambda)=2\bar{I}_2^{(2)}(k,m_1^2,\Lambda)+\bar{I}(k,m_1^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m_1^2}\bar{I}(k,m_1^2,\Lambda)=$$

$$=\int\!\!\int^{\Lambda\,\Lambda}\left(\frac{-2q_1^2}{(q_2^2+m_1^2)^2(q_1^2+m_1^2)[(q_1-k)^2+m_1^2]\,[(q_1-q_2)^2+m_1^2]^2}-\frac{2q_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^2(q_2^2+m_1^2)[(q_1-k_1)^2+m_1^2]^2[(q_1-q_2)^2+m_1^2]}\right.$$

$$\left.-\frac{k^2}{(q_2^2+m_1^2)^2(q_1^2+m_1^2)[(q_1-k)^2+m_1^2]^2[(q_1-q_2)^2+m_1^2]}\right) \qquad (3.30)$$

apresenta divergência quadrática nas duas primeiras integrais e logarítmica na última. Subtraindo-se (3.28) de (3.29), obtém-se à uma transformação das divergências quadráticas em duas divergências logarítmicas, uma das quais cancela a divergência logarítmica do 3º termo em (3.30).

Ainda à ordem de 2 loops, o termo:

$$I''(k=0,m_1^2,\Lambda)=\bar{I}_2^{(2)}(k=0,m_1^2,\Lambda)-2\bar{I}(k=0,m_1^2,\Lambda)\bar{I}(k=0,m_1^2,\Lambda)$$

$$\simeq\int\!\!\int^{\Lambda\,\Lambda}\frac{-2q_1^2-q_2^2}{(q_1^2+m_1^2)^3(q_2^2+m_1^2)[(q_1-q_2)^2+m_1^2]}-\int\!\!\int^{\Lambda\,\Lambda}\frac{m_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^3(q_2^2+m_1^2)^2[(q_1-q_2)^2+m_1^2]} \qquad (3.31)$$

diverge quadraticamente no 1º termo e logaritmicamente no 2º ao $\Lambda\to\infty$ e em $d=6$.

Ainda à ordem de 2 loops, o termo equivalente:

$$I''(k,m_1^2,\Lambda) = \bar{I}_2^{(2)}(k,m_1^2,\Lambda) - 2\,\bar{I}(k_i=0,m_1^2,\Lambda)\,\bar{I}(k,m_1^2,\Lambda)$$

$$\simeq \iint^{\Lambda} \frac{-2q_1^2 - q_2^2}{(q_1^2+m_1^2)^3[(q_2+k)^2+m_1^2](q_2^2+m_1^2)[(q_1-q_2)^2+m_1^2]} - \frac{m_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^3[(q_2-k)^2+m_1^2](q_2^2+m_1^2)[(q_1-q_2)^2+m_1^2]} \qquad (3.32)$$

diverge quadraticamente no 1º termo e logaritmamente no 2º. Subtraindo-se $I''(k=0,m_1^2,\Lambda)$ de $\bar{I}(k,m_1^2,\Lambda)$, por serem termos de mesma forma, obtêm-se uma divergência logarítmica em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ e um termo finito.

As divergências logarítmicas nos coeficientes de B_1^2 e G_1B_1 não se cancelam como pode constatar-se da forma dos termos e do fato dos coeficientes serem diferentes. O termo total de ordem de 2 loops, portanto, diverge logaritmicamente ao $\Lambda\to\infty$ e em $d=6$.

Como foi visto à ordem de 1 loop anteriormente, as divergências logarítmicas são eliminadas com função de renormalização Z_ϕ. À ordem de 2 loops:

$$Z_\phi = 1 + b_1 g^2 + b_2 g^4 \qquad (3.33)$$

Substituindo-se as expressões para a massa renormalizada dada pela equação (3.13), para a constante de acoplamento renormalizada g dada pela equação (3.19) na equação (3.27) e multiplicando-se a eq. (3.27) pela eq. (3.33) obtêm-se a expressão para a função de vértice I1P de 2 pontos renormalizada dada por:

$$\Gamma_B^{(2)}(k,m^2,g) = k^2 + m^2 - g^2\left[B_1 \bar{I}(k,m^2,\Lambda) - B_1 \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda) - b_1 k^2\right]$$
$$- g^4 \left\{ B_1^2\left[2\bar{\bar{I}}_2^{(1)}(k,m^2,\Lambda) - 2\bar{\bar{I}}_2^{(1)}(k=0,m^2,\Lambda) + \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k,m^2,\Lambda)\right.\right.$$
$$\left. - \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\right] - \left[B_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k,m^2,\Lambda) - B_1 b_1\right.$$
$$\left. m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} I(k=0,m^2,\Lambda)\right] - \left[2 b_1 B_1 \bar{I}(k,m^2,\Lambda) - 2 b_1 B_1 \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\right]$$
$$+ G_1 B_1 \left[\bar{\bar{I}}_2^{(2)}(k,m^2,\Lambda) - \bar{\bar{I}}_2^{(2)}(k=0,m^2,\Lambda) - \bar{I}(k_i=0,m^2,\Lambda)\bar{I}(k,m^2,\Lambda)\right.$$
$$\left.\left. + \bar{I}(k_i=0,m^2,\Lambda)\,\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\right]\right\} \qquad (3.34)$$

1 $B_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k,m^2,\Lambda) - B_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)$

2 $2 b_1 B_1 \bar{\bar{I}}(k,m^2,\Lambda) - 2 b_1 B_1 \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)$

Os termos assinalados são provenientes da renormalização de massa $Z_\phi m_1^2 = m^2$ nas integrais de 1 loop e da renormalização de constante de acoplamento $Z_\phi^{3/2} g_1 = g$ no termo de 1 loop mais o produto do termo de 1 loop da Z_ϕ com o termo de 1 loop da função de vértice.

Tais termos não contribuem já à ordem de 2 loops na teoria em ϕ^4. Esta é uma peculiaridade da teoria em ϕ^3.

À ordem de 1 loop, o valor de b_1 na eq. (3.12) garante que o termo seja finito em $d=6$ e $\Lambda\to\infty$.

À ordem de 2 loops, juntando-se 1 e 2, obtém-se

$$I'''(k=0,m^2,\Lambda)=2B_1 b_1 \bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)+u^2 b_1 B_1 \frac{\partial}{\partial u^2}\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda) \sim \iint^{\Lambda\Lambda} \frac{q_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^3(q_2^2+m_1^2)^3} \qquad (3.35)$$

Juntando-se com $\bar{I}'(k=0,m^2,\Lambda)$, $I'''(k=0,m^2,\Lambda)$, a expressão acima, obtém-se:

$$\bar{I}'(k=0,m^2,\Lambda)-I'''(k=0,m^2,\Lambda)=2B_1^2\iint^{\Lambda\Lambda}\frac{q_1^4}{(q_1^2+m^2)^3(q_2^2+m^2)^3\left[(q_1-q_2)^2+m^2\right]} \qquad (3.36)$$

$q^{-6}\, q^{-2}\, q^4 = q^{-4}\, \Lambda^{(d-4)}$

que, por contagem de potências diverge quadraticamente em $d=6$ e $\Lambda\to\infty$. Igualmente, juntando-se os termos assinalados da expressão (3.34) à integral $I'(k,m^2,\Lambda)$, obtém-se:

$$I'(K,m^2,\Lambda) - I'''(K,m^2,\Lambda) = B_1^2 \int\int^{\Lambda\Lambda} \frac{q_1^4}{(q_1^2+m^2)^2[(q_1-K)^2+m^2](q_2^2+m^2)^3[(q_1-q_2)^2+m^2]}$$

$$+ B_1^2 \int\int^{\Lambda\Lambda} \frac{q_1^4}{(q_1^2+m^2)[(q_1-K)^2+m^2]^2(q_2^2+m^2)^3[(q_1-q_2)^2+m^2]}$$

$$-K^2B_1^2 \int\int^{\Lambda\Lambda} \frac{1}{(q_1^2+m^2)[(q_1-K)^2+m^2]^2(q_2^2+m^2)^3[(q_1-q_2)^2+m^2]} \qquad (3.37)$$

que também diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ em seus dois primeiros termos e logaritmicamente no último. A subtração da expressão (3.36) de (3.37), por ser entre expressões do mesmo tipo que divergem quadraticamente, resulta em uma divergência logarítmica. Parte desta divergência é aumentada pelo terceiro termo de (3.37).

O coeficiente da função de renormalização Z_ϕ à ordem de 2 loops, é tal que faz finitos os termos de ordem de 2 loops da $\Gamma_R^{(2)}(K,m^2,\Lambda)$, ou seja, é dado por:

$$b_2 = \frac{\partial}{\partial K^2}\left\{ B_1^2\left[I'(K,m^2,\Lambda) - I'''(K,m^2,\Lambda)\right] + B_1G_1\, I''(K,m^2,\Lambda)\right\}\Bigg|_{K^2=0} \qquad (3.38)$$

Obtém-se, as condições de normalização:

$$\Gamma_R^{(2)}(k=0,m^2,g) = m^2 \qquad (3.39)$$

$$\partial/\partial k^2\, \Gamma_R^{(2)}(k,m^2,g)\Big|_{k^2=0} = 1 \qquad (3.40)$$

Para calcular-se a função de vértice I1P de dois pontos à ordem de 3 loops, precisa-se da constante de acoplamento renormalizada à ordem de 2 loops. À ordem de 2 loops a constante de acoplamento, como na eq. (3.19), é dada por:

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma}(k_i=0,g_1,\Lambda) = D_{\alpha\beta\gamma}\, g_1 = \lambda + \lambda^3 G_1 \bar{I}(k_i=0\,\mu^2,\Lambda) + 3\lambda^5 G_1^2\, \bar{L}_2^{(1)}(k_i=0,\mu^2,\Lambda) + 3\lambda^5 G_1 B_1\, \bar{L}_2^{(2)}(k_i=0,\mu^2,\Lambda) + \lambda^5 G_2\, \bar{L}_2^{(3)}(k_i=0,\mu^2,\Lambda)$$

(3.41)

Fazendo-se renormalização de massa, dada pela expressão (3.26), e reescrevendo-se convenientemente, obtém-se:

$$\lambda = g_1 - g_1^3 G_1 \bar{I}(k_i=0,\, m_1^2,\Lambda) - g_1^5\Big\{3G_1^2\, \bar{L}_2^{(1)}(k_i=0,m_1^2,\Lambda) + 3G_1 B_1\, \bar{L}_2^{(2)}(k_i=0,m_1^2,\Lambda) + G_2\, \bar{L}_2^{(3)}(k_i=0,m_1^2,\Lambda) + G_1 B_1\, \bar{I}(k=0,m_1^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m_1^2} L(k=0\,m_1^2,\Lambda) - 3G_1^2\, \bar{I}^2(k_i=0,\, m_1^2,\Lambda)\Big\}$$

(3.42)

Substituindo-se a eq. (3.42) na expressão para a função de vér tice I1P de 3 pontos já com renormalização de massa, obtém-se:

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma} = D_{\alpha\beta\gamma}\Big\{ g_1 + g_1^3\, G_1\big[\bar{I}(K_i,m_i^2,\Lambda) - \bar{I}(K_i=0,m_i^2,\Lambda)\big] + g_1^5\Big[3G_1^2\,\bar{L}_2^{(1)}(K_i, m_i^2,\Lambda) - 3G_1^2\,\bar{L}_2^{(1)}(K_i=0,m_i^2,\Lambda) - 3G_1^2\,\bar{I}(K_i,m_i^2,\Lambda)\,\bar{I}(K_i=0,m_i^2,\Lambda) + 3G_1^2\,\bar{I}^2(K_i=0,m_i^2,\Lambda) + G_1B_1\,\bar{L}_2^{(2)}(K_i,m_i^2,\Lambda) - G_1B_1\,\bar{L}_2^{(2)}(K_i=0,m_i^2,\Lambda) - 3G_1B_1\,\bar{I}(K=0,m_i^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m_i^2}\bar{I}(K_i,m_i^2,\Lambda) + 3G_1B_1\,\bar{I}(K=0,m_i^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m_i^2}\bar{I}(K_i=0,m_i^2,\Lambda) + G_2\,\bar{L}_2^{(3)}(K_i,m_i^2,\Lambda) - G_2\,\bar{L}_2^{(3)}(K_i=0,m_i^2,\Lambda)\Big]\Big\} \qquad (3.43)$$

O termo de ordem de 1 loop, por ser a subtração de di vergências logarítmicas, é finito em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. A ordem de 2 loops, o termo:

$$L'(K_i=0,m_i^2,\Lambda) = \bar{L}_2^{(1)}(K_i=0,m_i^2,\Lambda) - \bar{I}^2(K_i=0,m_i^2,\Lambda) = \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-q_1^2}{(q_1^2+m_1^2)^3(q_2^2+m_1^2)^5\left[(q_1-q_2)^2+m_1^2\right]} \qquad (3.44)$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$, e o termo:

$$L^{2}(K_i, m_i^2, \Lambda) = \bar{L}_2^{(1)}(K_i, m_i^2, \Lambda) - \bar{L}(K_i=0, m_i^2, \Lambda)\, \bar{L}(K_i, m_i^2, \Lambda)$$

$$\cong \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)(q_2^2+m_i^2)\left[(q_1-K_1)^2+m_i^2\right]\left[(q_1-K_2)^2+m_i^2\right]\left[(q_1-q_2)^2+m_i^2\right]} \tag{3.45}$$

também diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$ de tal forma que a subtração entre estas duas divergências logarítmicas de termos de mesma forma gera um termo finito.

Ainda à ordem de 2 loops, o termo:

$$L''(K_i=0, m_i^2, \Lambda) = 3\,\bar{L}_2^{(2)}(K_i=0, m_i^2, \Lambda) + \bar{I}(K=0, m_i^2, \Lambda)\frac{\partial}{\partial m_i^2}\bar{I}(K_i=0, m_i^2, \Lambda)$$

$$\cong \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-3\, q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)^4\,(q_2^2+m_i^2)^2\left[(q_1-q_2)^2+m_i^2\right]} \tag{3.46}$$

diverge logaritmamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$. Igualmente o termo,

$$L''(K_i, m_i^2, \Lambda) = 3\,\bar{L}_2^{(2)}(K_i, m_i^2, \Lambda) + \bar{I}(K=0, m_i^2, \Lambda)\frac{\partial}{\partial m_1^2}\bar{I}(K_i, m_i^2, \Lambda)$$

$$\cong \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-q_i^2}{(q_i^2+m_i^2)^2\left[(q_1-K_1)^2+m_i^2\right]\left[(q_1-K_2)^2+m_i^2\right]^2\left[(q_1-q_2)^2+m_i^2\right]}$$

$$- \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{q_1^2}{(q_i^2+m_i^2)\left[(q_1-K_1)^2+m_i^2\right]\left[(q_1-K_2)^2+m_i^2\right]^2 (q_2^2+m_i^2)^2\left[(q_1-q_2)^2+m_i^2\right]}$$

$$-\int\int^{\Lambda\,\Lambda} \frac{q_1^2}{(q_1^2+m_1^2)\left[(q_1-k_1)^2+m_1^2\right]\left[(q_1-k_2)^2+m_1^2\right]^2(q_2^2+m_1^2)^2\left[(q_1-q_2)^2+m_1^2\right]} \qquad (3.47)$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$, por contagem de potências. A subtração de (3.46) de (3.47) dá como resultado um termo finito por ser a diferença entre termos logaritmamente divergentes e de mesma forma. Então, não há divergência no coeficiente de B_1G_1.

O termo também da ordem de 2 loops, $L_2^{(3)}(k_i,m_i^2,\Lambda) - L_2^{(3)}(k_i=0,m_i^2,\Lambda)$ não diverge já que compõe-se da subtração de duas divergências logarítmicas de mesma forma.

Faz-se renormalização com função de onda $Z_\phi^{3/2}$ em (3.41) via (3.13), (3.22) e (3.23), não para tornar finita a $\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma}$ já que esta é finita, e sim como decorrência da renormalização da $\Gamma^{(2)}$, e obtém-se

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma,R} = D_{\alpha\beta\gamma}\Big\{g + g^3G_1\left[\bar{I}(k_i,m^2,\Lambda)-\bar{I}(k_i=0,m^2,\Lambda)\right] + g^5\Big[3G_1^2\bar{L}_2^{(1)}(k_i,$$
$$m^2,\Lambda) - 3G_1^2\bar{L}_2^{(1)}(k_i,m^2,\Lambda) - 3G_1^2\bar{I}(k_i,m^2,\Lambda)\,\bar{I}(k_i=0,m^2,\Lambda) + 3G_1^2$$
$$\bar{I}^2(k_i=0,m^2,\Lambda) + 3G_1B_1\bar{L}_2^{(2)}(k_i,m^2,\Lambda) - 3G_1B_1\bar{L}_2^{(2)}(k_i=0,m^2,\Lambda)$$
$$+ 3G_1B_1\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k_i,m^2,\Lambda) - 3G_1B_1\bar{I}(k=0,m^2,\Lambda)\frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(k_i=0,m^2,\Lambda)$$

$$-3b_1 G_1 \bar{I}(K_i,m^2,\Lambda)+3b_1 G_1 \bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda) - G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i,m^2,\Lambda) +$$
$$+G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda) + G_2\bar{L}_2^{(3)}(K_i,m^2,\Lambda) - G_2 L_2^{(3)}(K_i=0,m^2,\Lambda)\Big]\Big\} \quad (3.48)$$

(c) $-3b_1 G_1 \bar{I}(K_i,m^2,\Lambda) + 3b_1 G_1 \bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda)$

(d) $-G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i,m^2,\Lambda) + G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda)$

onde os termos assinalados são provenientes da substituição da constante de acoplamento intermediário g_1 pela constante de acoplamento renormalizada g e da substituição da massa intermediária m_1^2 pela massa renormalizada m^2. Tais termos não contribuem à ordem de 2 loops na teoria em ϕ^4. Sua contribuição a esta ordem é uma peculiaridade da teoria em ϕ^3.

A expressão (3.48) é finita em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ já que, se ao termo formado por:

$$G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda)+3b_1 G_1 \bar{I}(K_i=0,m^2,\Lambda)=B_1^2\int^\Lambda\!\!\int^\Lambda \frac{3q_1^2}{(q_1^2+m^2)^4(q_2^2+m^2)^3} \quad (3.49),$$

que é logaritmicamente divergente em $d=6$ e $\Lambda\to\infty$, juntar-se convenientemente:

$$-G_1 b_1 m^2 \frac{\partial}{\partial m^2}\bar{I}(K_i,m^2,\Lambda) - 3b_1 G_1 \bar{I}(K_i,m^2,\Lambda) = B_1^2\int^\Lambda\!\!\int^\Lambda \frac{q_1^2}{(q_1^2+m^2)^3(q_2^2+m^2)^2[(q_2-K_1)^2+m^2][(q_2-K_2)^2+m^2]}$$
$$+B_1^2\int^\Lambda\!\!\int^\Lambda \frac{q_1^2}{(q_1^2+m^2)^3(q_2^2+m^2)[(q_2-K_1)^2+m^2]^2[(q_2-K_2)^2+m^2]} + B_1^2\int^\Lambda\!\!\int^\Lambda \frac{q_1^2}{(q_1^2+m^2)^3(q_2^2+m^2)[(q_2-K_1)^2+m^2][(q_2-K_2)^2+m^2]^2},$$

(3.50)

que também é logaritmicamente divergente em $d = 6$ e ao $\Lambda \to \infty$, obtêm-se, por contagem de potências, um termo finito. Obtêm-se, desta forma, uma expressão finita para $\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma}$, exigindo-se que:

$$\boxed{\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta\gamma,R}(K_i = 0, g, m^2) = D_{\alpha\beta\gamma}\, g} \qquad (3.51)$$

Há especial interesse no cálculo de funções de vértice I1P de 2 pontos com inserção de ϕ^2 já que estão relacionadas ao comportamento crítico fora da temperatura crítica.[10]

O expoente do comprimento de correlação, ν^{-1}, é obtido do cálculo de funções de vértice I1P de 2 pontos com inserção de ϕ^2.[10]

Da equação (2.52), obtêm-se, à ordem de 2 loops:

$$\Gamma^{(2,1)} = 1 + 2\lambda^2 B_1 \bar{L}(K_i, \mu^2, \Lambda) + 4\lambda^4 B_1^2 \bar{L}_2^{(1)}(K_i, \mu^2, \Lambda) + 4\lambda^4 B_1 G_1 \bar{L}_2^{(1)}(K_i, \mu^2, \Lambda) + 6\lambda^4 B_1^2 \bar{L}_2^{(2)}(K_i, \mu^2, \Lambda) + B_1 G_1 \bar{L}_2^{(3)}(K_i, \mu^2, \Lambda) \qquad (3.52)$$

Fazendo-se renormalização de massa (3.27) e de constante de acoplamento (3.42), obtêm-se:

$$\Gamma^{(2,1)} = 1 + 2 g_1^2 B_1 \bar{L}(K_i, m_1^2, \Lambda) + g_1^4 \Big\{ B_1^2 \Big[4\bar{L}_2^{(1)}(K_i, m_1^2, \Lambda) + 6\bar{L}_2^{(2)}(K_i, m_1^2, \Lambda) + 2\bar{I}(K=0, m_1^2, \Lambda) \frac{\partial}{\partial m_1^2} \bar{L}(K_i, m_1^2, \Lambda) \Big] + G_1 B_1 \Big[4\bar{L}_2^{(1)}(K_i, \mu^2, \Lambda) - 4\bar{L}_2^{(1)}(K_i, \mu^2, \Lambda) - 4\bar{L}(K_i, m_1^2, \Lambda)\bar{L}(K_i = 0, \mu_1^2, \Lambda) + \bar{L}_2^{(3)}(K_i, m_1^2, \Lambda) \Big\}$$

(3.53)

O termo de ordem de 1 loop é logaritmicamente divergente, por contagem de potências, em $d=6$ e $\Lambda\to\infty$ à ordem de 2 loops, os termos $\bar{L}_2^{(1)}(k_i,m_i^2,\Lambda)$ e $\bar{L}_2^{(3)}(k_i,m_i^2,\Lambda)$ são logaritmicamente divergentes.

O termo,

$$\bar{L}' = 6\,\bar{L}_2^{(2)}(k_i,m_i^2,\Lambda) + 2\,\bar{I}(k=0,m_i^2,\Lambda)\,\frac{\partial}{\partial m^2}\bar{L}(k_i,m_i^2,\Lambda) =$$

$$= \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-2q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)^2[(k_1-q_1)^2+m_i^2][(k_2-q_1)^2+m_i^2](q_2^2+m_i^2)^2[(q_1-q_2)^2+m_i^2]} - \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{2q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)(q_2^2+m_i^2)^2}$$

$$\times \frac{1}{[(k_1-q_1)^2+m_i^2]^2[(k_2-q_1)^2+m_i^2]} - \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{2q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)[(k_1-q_1)^2+m_i^2][(k_2-q_1)^2+m_i^2]^2(q_2^2+m_i^2)[(q_1-q_2)^2+m_i^2]}$$

$$(3.54)$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Igualmente o termo

$$L''(k_i,\mu^2,\Lambda) = 4\,\bar{L}_2^{(1)}(k_i,\mu^2,\Lambda) - 4\,\bar{I}(k_i,\mu^2,\Lambda)\,\bar{I}(k_i,\mu^2,\Lambda) =$$

$$= \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-4q_1^2}{(q_1^2+m_i^2)[(q_1-k_1)^2+m_i^2][(q_1-k_2)^2+m_i^2](q_2^2+m_i^2)^3[(q_1-q_2)^2+m_i^2]}$$

$$(3.55)$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Como são termos que divergem com coeficientes diferentes, suas divergências não se cancelam.

Fazendo-se renormalização com $Z_\phi^2 = 1 + C_1 g^2 + C_2 g^4$ e substituindo-se a massa e a constante de acoplamento intermediárias por suas formas renormalizadas em (3.13) e (3.22), obtém-se:

$$\Gamma_R^{(2,1)} = 1 + g^2\left(2B_1 \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda) + C_1\right) + g^4\Big\{ B_1^2 \Big[4\bar{L}_2^{(1)}(K_i, m^2, \Lambda)$$

$$+ 6\bar{L}_2^{(2)}(K_i, m^2, \Lambda) + 2\bar{I}(K_i{=}0, m^2, \Lambda) \frac{\partial}{\partial m^2} \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda)\Big] - 2m^2 b_1 B_1$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2} \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda) - 6 b_1 B_1 \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda) + 2B_1 C_1 \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda) +$$

$$G_1 B_1 \Big[4\bar{L}_2^{(1)}(K_i, m^2, \Lambda) - 4\bar{I}(K_i, m^2, \Lambda)\bar{I}(K_i{=}0, m^2, \Lambda) + \bar{L}_2^{(3)}(K_i, m^2, \Lambda) \tag{3.56}$$

À ordem de 1 loop, a divergência logarítmica de $L(K_i, m^2, \Lambda)$ é eliminada por:

$$C_1 = -2 B_1 \bar{I}(K_i{=}0, m^2, \Lambda) \tag{3.57}$$

À ordem de 2 loops, o termo

$$L'''(K_i, m^2, \Lambda) = 4B_1^2 \bar{L}_2^{(1)}(K_i, m^2, \Lambda) \qquad + 2 B_1 C_1 \bar{I}(K_i, m^2, \Lambda)$$

$$\simeq \int^{\Lambda}\!\!\int^{\Lambda} \frac{-4 g_1^2 B_1^2}{(q_1^2+m^2)\left[(K_1-q_1)^2+m^2\right]\left[(K_2-q_1)^2+m^2\right](q_2^2+m^2)^3\left[(q_1-q_2)^2+m^2\right]} \tag{3.58}$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$. O termo:

$$L^{(iv)} = -2m^2 b_1 B_1 \frac{\partial}{\partial m^2} I(k_i, m^2, \Lambda) - 6 b_1 B_1 I(k_i, m^2, \Lambda)$$

$$= \int\!\!\int^{\Lambda\Lambda} \frac{2q_1^2 B_1}{(q_1^2+m^2)[(k_1-q_1)^2+m^2][(k_2-q_1)^2+m^2]^2(q_2^2+m^2)^3}$$

$$+ \int\!\!\int^{\Lambda\Lambda} \frac{2q_1^2 B_1}{(q_1^2+m^2)^2[(k_1-q_1)^2+m^2][(k_2-q_1)^2+m^2](q_2^2+m^2)^3}$$

$$+ \int\!\!\int^{\Lambda\Lambda} \frac{2q_1^2 B_1}{(q_1^2+m^2)[(k_1-q_1)^2+m^2]^2[(k_2-q_1)^2+m^2](q_2^2+m^2)^3} \quad (3.59)$$

diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Juntando-se (3.54), (3.53) e (3.59), obtêm-se

$$L^{I}(k_i, m^2, \Lambda) + L^{III}(k_i, m^2, \Lambda) + L^{(iv)}(k_i, m^2, \Lambda) = \int\!\!\int^{\Lambda\Lambda} \frac{-3q_1^4 B_1^2}{(q_1^2+m^2)^4(q_2^2+m^2)^3[(q_1-q_2)^2+m^2]} \quad (3.60)$$

portanto, o coeficiente de g^4 que não contêm $G_1 B_1$, diverge logaritmicamente.

Igualmente, juntando L^{II} e $L_2^{(3)}$, obtêm-se:

$$L^{II}(k_i, m^2, \Lambda) + \bar{L}_2^{(3)}(k_i, m^2, \Lambda) = \int\!\!\int^{\Lambda\Lambda} \frac{-4q_1^4 - 3q_1^2 q_2^2}{(q_1^2+m^2)^3(q_2^2+m^2)^3[(q_1-q_2)^2+m^2]} \quad (3.61)$$

que diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Assim, tanto o coeficiente de B_1^2 como o de $G_1 B_1$ divergem. Tais divergências não se cancelam.

Para eliminarem-se as divergências à ordem de 2 loops, escolhe-se um valor apropriado para C_2, ou seja,

$$C_2 = -B_1^2 \left[L'(k_i=0, m^2, \Lambda) + L'''(k_i=0, m^2, \Lambda) + L^{IV}(k_i=0, m^2, \Lambda) \right]$$

$$- G_1 B_1 \left[L''(k_i=0, m^2, \Lambda) + \bar{L}_2^{(3)}(k_i=0, m^2, \Lambda) \right] \qquad (3.6.2)$$

Assim, faz-se finita a função de vértice I1P de dois pontos com inserção de ϕ^2 com renormalização de massa e constante de acoplamento e função de onda. A condição de renormalização é dada por:

$$\Gamma_R^{(2,1)}(k_i=0, m^2, g) = 1 \qquad (3.6.3)$$

Faz-se a renormalização na temperatura infravermelha crítica onde $m^2=0$, para evitar-se uma divergência ultravioleta, redefinem-se as condições de normalização em termos de um parâmetro de escala de momento[10]

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)}(k=0, g) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial k^2} \Gamma_R^{(2)}(k, g) \Big|_{k^2=k^2} = 1 \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma, R}^{(3)}(k_i, g) \Big|_{PS} = D_{\alpha\beta\gamma}\, g \\ \Gamma_R^{(2,1)}(k_i, g) \Big|_{PS} = 1 \end{cases} \qquad (3.6.4)$$

onde g é dado em função da constante de acoplamento sem renormalizar, à ordem de dois loops, por:

$$g = [1 + b_1 \lambda + \dots]^{3/2} \lambda$$

3.2 - Quebra de Simetria

A função de vértice irredutível de uma partícula de dois pontos pode ser obtida do hamiltoniano (2.40) e via expressão (2.27). À ordem de zero loops é dada, em $K=0$, por (3.1). À ordem de 1 loop foi obtida para o caso simétrico na seção anterior. No caso de haver quebra de simetria, segundo o hamiltoniano visto no capítulo II, para ordem de 1 loop é dada por:

$$\Gamma^{(2)}_{11}(K=0) = \chi^{-1} = \mu_1^2 - \lambda_u B_{11} \bar{I}_1(K=0, \mu_1^2, \Lambda) - \lambda_v^2 B_{12} \bar{I}_2(K=0, \mu_i^2, \Lambda) \tag{3.65}$$

para a componente longitudinal, e

$$\Gamma^{-(2)}_{qq}(K=0) = \chi_1^{-1} = \mu_2^2 - \lambda_v^2 \tilde{B}_{11} \tilde{\bar{I}}_1(K=0, \mu_1^2, \mu_2^2, \Lambda) - \lambda_w^2 \check{B}_{12} \tilde{\bar{I}}_2(K=0, \mu_2^2, \Lambda) \tag{3.66}$$

para as p-2 componentes transversais, onde λ_u, λ_v e λ_w são as constantes de acoplamento sem renormalizar da Eq. (2.40). As integrais e os coeficientes citados estarão nos apêndices. Cada uma des tas integrais diverge quadraticamente em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ por contagem de potências. Para que as susceptibilidades não sejam quantidades divergentes, no limite de $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$, redefinem-se as massas como no caso simétrico, alterando-se, assim, as temperaturas críticas de T_0 e T_0' para T_c e T_c'. Assim μ_1^2 e μ_2^2 passam a ser quantidades divergentes em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ de forma a cancelarem as divergências das integrais.

Logo:

$$\mu_1^2 = m_1^2 + \lambda_u^2 B_{11}\, \bar{I}_1(k=0, \tilde{m}_1^2, \Lambda) + \lambda_v^2 B_{12}\, \bar{I}_2(k=0, \tilde{m}_2^2, \Lambda) \tag{3.67}$$

$$\mu_2^2 = m_2^2 + \lambda_u^2 \tilde{B}_{11}\, \bar{\tilde{I}}(k=0, \tilde{m}_2^2, \tilde{m}_1^2, \Lambda) + \lambda_v^2 \tilde{B}_{12}\, \bar{\tilde{I}}_2(k=0, \tilde{m}_2^2, \Lambda) \tag{3.68}$$

Substituindo-se (3.67) e (3.68) nas expressões para $\Gamma_{11}^{(2)}(k)$ e $\Gamma_{qq}^{(2)}(k)$, obtém-se:

$$\Gamma_{11}^{(2)}(k) = k^2 + \tilde{m}_1^2 - B_{11}\lambda_u^2\left[\bar{I}_1(k, \tilde{m}_1^2, \Lambda) - \bar{I}_1(k=0, \tilde{m}_1^2, \Lambda)\right]$$
$$- \lambda_v^2 B_{12}\left[\bar{I}_2(k, \tilde{m}_2^2, \Lambda) - \bar{I}_2(k=0, \tilde{m}_2^2, \Lambda)\right] \tag{3.69}$$

$$\Gamma^{(2)}_{qq}(k) = k^2 + \tilde{m}_2^2 - \tilde{B}_{11}\lambda_v^2 \left[\bar{\tilde{I}}_1(k,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \bar{\tilde{I}}_1(k=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\right]$$
$$- \tilde{B}_{12}\lambda_w^2 \left[\bar{\tilde{I}}_2(k,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \bar{\tilde{I}}_2(k=0,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\right] \quad (3.70)$$

As diferenças entre expressões quadraticamente divergentes em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$ são quantidades que se combinam gerando uma divergência logarītmica em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$.

Da mesma forma como foi feito no caso simētrico, eliminam-se tais divergências, multiplicando-se as funções de vērtice I1P de dois pontos por funções de renormalização $Z_\phi^{(1)}$ e $Z_\phi^{(2)}$ (renormalização de função de onda) definidas por:

$$Z_\phi^{(1)} = 1 + b_{11}\, g_u^2 + b_{12}\, g_v^2 \quad (3.71)$$

$$Z_\phi^{(2)} \quad 1 + \tilde{b}_{11}\, g_v^2 + \tilde{b}_{12}\, g_w^2 \quad (3.72)$$

e tais que resultam as funções de vērtice renormalizadas,

$$Z_\phi^{(1)}\,\Gamma_{11}^{(2)}(k) = \Gamma_{11,R}^{(2)}(k) \quad (3.73)$$

$$Z_\phi^{(2)}\,\Gamma_{qq}^{(2)}(k) = \Gamma_{qq,R}(k) \quad (3.74)$$

onde as constantes de acoplamento renormalizadas g_u, g_v e g_w são funções de λ_u, λ_v e λ_w tais que, a ordem de 1 loop $g_u=\lambda_u$, $g_v=\lambda_v$ e $g_w=\lambda_w$

Escolhem-se valores para os coeficientes b_{11} , b_{12}, $\tilde{b}_{11}$

e $\tilde{b}_{12}$ tais que absorvam as divergências logarítmicas da $\Gamma_{11}^{(2)}$ e da $\Gamma_{qq}^{(2)}$. Desta forma, os coeficientes são dados por:

$$b_{11} = B_{11} \frac{\partial}{\partial K^2} \bar{I}_1(k, \tilde{m}_1^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \qquad (3.75)$$

$$b_{12} = B_{12} \frac{\partial}{\partial K^2} \bar{I}_2(k, \tilde{m}_2^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \qquad (3.76)$$

$$\tilde{b}_{11} = \tilde{B}_{11} \frac{\partial}{\partial K^2} \tilde{\bar{I}}_1(k, \tilde{m}_1^2, \tilde{m}_2^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \qquad (3.77)$$

$$\tilde{b}_{12} = \tilde{B}_{12} \frac{\partial}{\partial K^2} \tilde{\bar{I}}_2(k, \tilde{m}_2^2, \Lambda) \Big|_{K^2=0} \qquad (3.78)$$

Para evitar as divergências de massa que surgem em decorrência da renormalização com função de onda, faz-se nova renormalização de massa:

$$Z_\phi^{(1)} \tilde{m}_1^2 = m_1^2 \qquad (3.79)$$

$$Z_\phi^{(2)} \tilde{m}_2^2 = m_2^2 \qquad (3.80)$$

Desta forma, obtém-se as seguintes condições de normalização para fazerem-se finitas as funções de vértice I1P de 2 pontos:

$$\Gamma^{(2)}_{ii,R}(k=0, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w) = m_\alpha^2 \quad \begin{cases} \alpha=1 & \text{se } i=1 \\ \alpha=2 & \text{se } i>1 \end{cases} \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma^{(2)}_{ii,R}(k, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w)\Big|_{k^2=0} = 1 \tag{3.82}$$

Para se obter uma expressão finita para o potencial, precisa-se fazer uma nova definição das constantes de acoplamento, como foi visto na seção anterior. Estas novas constantes de acoplamento entram na renormalização das funções de vértice I1P de 2 pontos à ordem de 2 loops que não serão analisadas para o caso de quebra de simetria.

Assim, definem-se as novas constantes de acoplamento, à ordem de 1 loop, da forma:

$$\Gamma^{(3)}_{111}(k=0) = \tilde{g}_u D_{111} = D_{111}\Big\{\lambda_u + \lambda_u^3 G_{11}\bar{L}_1(k_i=0, \mu_1^2, \Lambda) + \lambda_v^3 G_{12}\bar{L}_2(k_i=0, \mu_1^2, \mu_2^2, \Lambda)\Big\} \tag{3.83}$$

$$\Gamma^{(3)}_{1qq} = \tilde{g}_{v}\, D_{111} = D_{111}\Big\{ \lambda_{v} + \lambda_{u}^{2}\lambda_{v}\hat{G}_{11}\bar{\hat{L}}_{1}(k_i=0,\mu_1^2,\mu_2^2) +$$
$$+ \lambda_{v}^{3}\hat{G}_{12}\bar{\hat{L}}_{2}(k_i=0,\mu_2^2,\Lambda) + \lambda_{v}\lambda_{w}^{2}\hat{G}_{13}\bar{\hat{L}}_{3}(k_i=0,\mu_2^2,\Lambda)\Big\}$$

(3.84)

$$\Gamma^{(3)}_{qqq} = \tilde{g}_{w}\, D_{qqq} = D_{qqq}\Big\{ \lambda_{w} + \lambda_{v}^{2}\lambda_{w}\tilde{G}_{11}\bar{\tilde{L}}_{1}(k_i=0,\mu_1^2,\mu_2^2,\Lambda)$$
$$+ \lambda_{w}^{3}\tilde{G}_{12}\bar{\tilde{L}}_{3}(k_i=0,\mu_2^2,\Lambda)\Big\} \qquad (3.85)$$

Fazendo-se renormalização de constante de acoplamento de massa substituindo-se (3.24) e (3.25) nas expressões anteriores, obtêm-se:

$$\lambda_{u} = \tilde{g}_{u} - \tilde{g}_{u}^{3}\, G_{11}\bar{L}_{1}(k_i=0,\tilde{m}_1^2,\Lambda) = \tilde{g}_{v}^{3}\, G_{12}\bar{L}_{2}(k_i=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)$$

(3.86)

$$\lambda_{v} = \tilde{g}_{v} - \tilde{g}_{u}^{2}\,\tilde{g}_{v}\,\hat{G}_{11}\bar{\hat{L}}_{1}(k_i=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \tilde{g}_{v}^{3}\hat{G}_{12}\bar{\hat{L}}_{2}(k_i=0,\tilde{m}_1^2,$$
$$\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \tilde{g}_{1v}\, g_{1w}^{2}\,\hat{G}_{13}\bar{\hat{L}}_{3}(k_i=0,\tilde{m}_3^2,\Lambda) \qquad (3.87)$$

$$\lambda_{w} = \tilde{g}_{w} - \tilde{g}_{v}\,\tilde{g}_{w}^{2}\,\tilde{G}_{11}\bar{\tilde{L}}_{1}(k_i,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \tilde{g}_{w}^{3}\tilde{G}_{12}\bar{L}_{2}(k_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda)$$

(3.88)

Substituindo-se as constantes de acoplamento pelas expressões (3.86), (3.87) e (3.88) nas expressões para as funções de vértices I1P de 3 pontos, à ordem de 1 loop, com renormalização de massa (subtração de momento zero), obtém-se:

$$\Gamma^{(3)}_{111}(K_i) = D_{111}\Big\{ \tilde{g}_u + \tilde{g}_u^3\, G_{11}\Big[\bar{L}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\Lambda) - \bar{L}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\Lambda)\Big] + \tilde{g}_{1v}^3\, G_{12}\Big[\bar{L}_2(K_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \bar{L}_2(K_i=0,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big]\Big\} \quad (3.89)$$

$$\Gamma^{(3)}_{1qq}(K_i) = D_{1qq}\Big\{ \tilde{g}_v + \tilde{g}_u^2\,\tilde{g}_v\,\hat{G}_{11}\Big[\hat{\bar{L}}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \hat{\bar{L}}_1(K_i=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big] + \tilde{g}_v^3\,\hat{G}_{12}\Big[\hat{\bar{L}}_2(K_i,\tilde{m}_2^2,\tilde{m}_1^2,\Lambda) - \hat{\bar{L}}_2(K_i=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big] + \tilde{g}_v^2\,\tilde{g}_w\,\hat{G}_{13}\Big[\hat{\bar{L}}_3(K_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \hat{\bar{L}}_3(K_i=0,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big]\Big\} \quad (3.90)$$

$$\Gamma^{(3)}_{qqq}(K_i) = D_{qqq}\Big\{ \tilde{g}_w + \tilde{g}_v^2\,\tilde{g}_w\,\tilde{G}_{11}\Big[\tilde{\bar{L}}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \tilde{\bar{L}}_1(K_i=0,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big] + \tilde{g}_w^3\,\tilde{G}_{12}\Big[\tilde{\bar{L}}_2(K_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda) - \tilde{\bar{L}}_2(K_i=0,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\Big]\Big\} \quad (3.91)$$

Cada uma das integrais diverge logaritmicamente em $d=6$ e ao $\Lambda \to \infty$, por contagem de potências. As diferenças, portanto, de integrais de mesma forma, diferindo por ter ou não $K_i=0$, são quantidades finitas.

Do mesmo modo como no caso simétrico, renormalização multiplicativa das funções de vértice I1P de 2 pontos gera renormalização multiplicativa das funções de vértice I1P de 3 pontos e renormalização das constantes de acoplamento dadas por:

$$Z_\phi^{(1)^{3/2}} \tilde{g}_u = g_u \qquad (3.92)$$

$$Z_\phi^{(2)} Z_\phi^{(1)\,1/2} \tilde{g}_v = g_v \qquad (3.93)$$

$$Z_\phi^{(2)\,3/2} \tilde{g}_w = g_w \qquad (3.94)$$

$$Z_\phi^{(1)\,3/2} \Gamma_{111}^{(3)}(k_i) = \Gamma_{111_R}^{(3)}(k_i) \qquad (3.95)$$

$$Z_\phi^{(1)\,1/2} Z_\phi^{(2)} \Gamma_{1qq}^{(3)}(k_i) \quad \Gamma_{1qq_R}^{(3)}(k_i) \qquad (3.96)$$

$$Z_\phi^{(2)\,3/2} \Gamma_{qqq}^{(3)}(k_i) \quad \Gamma_{qqq}^{(3)}(k_i) \qquad (3.97)$$

Destas substituições, tiram-se as seguintes condições de normalização:

$$\Gamma_{ijj}^{(3)}(k_i, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w)\Big|_{k_i=0} = D_{jj}\, g_\alpha \begin{cases} i=j=1 & \alpha=u \\ i=1 \quad j>1 & \alpha=v \\ i=j>1 & \alpha=w \end{cases}$$

$$(3.98)$$

Funções de vértice I1P de 2 pontos com inserção ϕ^2 de são importantes para obter-se o comportamento perto da temperatura crítica. São dadas por:

$$\Gamma_{11}^{(2,1)}(K_i) = 1 + 2\lambda_u^2 B_{11}\bar{L}_1(K_i,\mu_1^2,\Lambda) + 2\lambda_v^2 B_{12}\bar{L}_2(K_i,\mu_2^2,\Lambda) \quad (3.99)$$

$$\Gamma_{qq}^{(2,1)}(K_i) = 1 + \lambda_v^2 \tilde{B}_{11}\left[\hat{\bar{L}}_1(K_i,\mu_1^2,\mu_2^2,\Lambda) + \hat{\bar{L}}_2(K_i,\mu_1^2,\mu_2^2,\Lambda)\right] + 2\tilde{B}_{12}\hat{\bar{L}}_3(K_i,\mu_2^2,\Lambda) \quad (3.100)$$

Fazendo-se renormalização de massa e de constante de acoplamento via (3.24) e (3.25), (3.86), (3.87) e (3.88), obtem-se:

$$\Gamma_{11}^{(2,1)}(K_i) = 1 + 2\tilde{g}_u B_{11}\bar{L}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\Lambda) + 2\tilde{g}_i^2 B_{12}\bar{L}_2(K_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda) \quad (3.101)$$

$$\Gamma_{qq}^{(2,1)}(K_i) = 1 + g_v^2\tilde{B}_{11}\left[\hat{\bar{L}}_1(K_i,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda) + \hat{\bar{L}}_2(K_i,\tilde{m}_1^2,\tilde{m}_2^2,\Lambda)\right] + 2\tilde{g}_w^2\tilde{B}_{12}\hat{\bar{L}}_3(K_i,\tilde{m}_2^2,\Lambda) \quad (3.102)$$

Cada integral apresenta divergência logarítmica em $d=6$ e ao $\Lambda\to\infty$. Para diminuir-se tais divergências, multiplicam-se as expressões (3.101) e (3.102) por funções de renormalização $Z_{\phi^2}^{(1)}$ e $Z_{\phi^2}^{(2)}$, elegendo os coeficientes destas funções de forma a absorverem as divergências das integrais. Tais funções são dadas por:

$$Z_{\phi^2}^{(1)} = 1 + C_1^{(1)} g_u^2 + C_2^{(1)} g_v^2 \quad (3.103)$$

$$Z_{\phi^2}^{(2)} = 1 + C_1^{(2)} g_v^2 + C_2^{(2)} g_w^2 \qquad (3.104)$$

Assim, obtém-se expressões finitas para as funções de vértice renormalizadas I1P de 2 pontos e uma inserção de ϕ^2:

$$Z_{\phi^2}^{(1)} \Gamma_{11}^{(2,1)} = \Gamma_{11\,R}^{(2,1)} \qquad (3.105)$$

$$Z_{\phi^2}^{(2)} \Gamma_{qq}^{(2,1)} = \Gamma_{qq\,R}^{(2,1)} \qquad (3.106)$$

tomando-se os seguintes coeficientes para as funções de onda renormalizadas:

$$C_1^{(1)} = -2 B_{11} \bar{I}_1 (k_i = 0, m_1^2, \Lambda) \qquad (3.107)$$

$$C_2^{(1)} = -2 B_{12} \bar{I}_2 (k_i = 0, m_2^2, \Lambda) \qquad (3.108)$$

$$C_1^{(2)} = -\tilde{B}_{11} \left[\bar{\hat{I}}_1 (k_i = 0, m_1^2, m_2^2, \Lambda) + \bar{\hat{I}}_2 (k_i = 0, m_1^2, m_2^2, \Lambda) \right] \qquad (3.109)$$

$$C_2^{(2)} = -2 \bar{B}_{12} \bar{\hat{I}}_3 (k_i, m_2^2, \Lambda) \qquad (3.110)$$

De onde obtêm-se as condições de normalização:

$$\Gamma_{ii,R}^{(2,1)} (k_i, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w) \Big|_{k_i = 0} = 1 \qquad (3.111)$$

3.3 - Condições de Normalização

Obtêm-se expressões finitas para as funções de vértice I1P no limite ultravioleta para $d \leq 6$, fazendo-se renormalização com um número finito de parâmetros para toda ordem na teoria de perturbação. A renormalização é regida, como foi visto por condições de normalização dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial k^2} \Gamma^{(2)}_{ii,R}(k, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w)\Big|_{k^2=0} = 1$$

$$\Gamma^{(2)}_{ii,R}(k=0, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w) = m_\alpha^2 \begin{cases} \text{se } i=1, \ \alpha=1 \\ \text{se } i>1, \ \alpha=2 \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)}_{ijj,R}(k_i=0, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w) = D_{ijj}\, g_\alpha \begin{cases} \text{se } i=j=1, \ \alpha=u \\ \text{se } i\neq j, \ \alpha=v \\ \text{se } i=j>1, \ \alpha=w \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2,1)}_{ii,R}(k_i=0, m_1^2, m_2^2, g_u, g_v, g_w) = 1 \qquad (3.114)$$

Como há interesse no cálculo de propriedades em T_c ou T_c' procuram-se novas condições de normalização, que tendo $m_1^2=0$ ou $m_2^2=0$ não gerem divergências infravermelhas. Tais condições são definidas, para evitar divergências, em termos de parâmetros de escala de momento, ficando da forma:

$$\frac{\partial}{\partial k^2}\Gamma^{(2)}_{ii,R}\,(k, m_\alpha^2, g_u, g_v, g_w)\Bigg|_{k^2=\kappa^2} = 1$$

$$\Gamma_{ii,R}\,(k, m_\alpha^2, g_u, g_v, g_w)\Bigg|_{k^2=\kappa^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{se } \alpha=1\text{, então } i=1 \\ \text{se } \alpha=2\text{, então } i>1 \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2)}_{jj,R}\,(k, m_\alpha^2, g_u, g_v, g_w)\Bigg|_{k^2=\kappa^2} = m_\alpha^2 \quad \begin{cases} \text{se } \alpha=1\text{, } j>1 \\ \text{se } \alpha=2\text{, } j=1 \end{cases}$$

$$\Gamma^{(3)}_{ijj,R}\,(k_i, m_\alpha^2, g_u, g_v, g_w)\Bigg|_{PS} = D_{ijj}\, g_\beta \quad \begin{cases} \text{se } i=j=1\text{, } \beta=u \\ \text{se } i\neq j\text{, } \beta=v \\ \text{se } i=j>1\text{, } \beta=w \end{cases}$$

$$\Gamma^{(2,1)}_{ii}\,(k_i, m_\alpha^2, g_u, g_v, g_w)\Bigg|_{P\bar{S}} = 1$$

(3.115)

onde κ^2 é um parâmetro arbitrário de momentos, e PS, PS são os pontos de simetria[10,11] em analogia com a teoria em ϕ^4.

Nos próximos capítulos serão obtidas explicitamente as expressões para funções de renormalização e constantes de acoplamento renormalizadas para um sistema com quebra de simetria trilinear e quadrática na temperatura crítica. Não serão usadas condições de normalização nem regularização com o cutoff. Será usada regularização dimensional e renormalização com subtração mínima de pólos dimensionais e tais procedimentos serão explicados no pró ximo capítulo.

Seguindo o procedimento standard[10,11] é conveniente introduzirem-se constantes de acoplamento adimensionais u_0, v_0, w_0 (sem renormalizar) e u, v, w (renormalizadas):

$$\lambda_u = u_0\, k^{\epsilon/2}$$

$$\lambda_v = v_0\, k^{\epsilon/2}$$

$$\lambda_w = w_0\, k^{\epsilon/2} \qquad (3.116)$$

$$g_u = u\, k^{\epsilon/2}$$

$$g_v = v\, k^{\epsilon/2}$$

$$g_w = w\, k^{\epsilon/2} \qquad (3.117)$$

onde $k^{\epsilon/2}$, com $\epsilon = 6 - d$ é a dimensão dos acoplamentos.

4 - QUEBRA DE SIMETRIA QUADRÁTICA E TRILINEAR - FAVORECENDO O ORDENAMENTO LONGITUDINAL

4.1 - Introdução

Estuda-se, neste capítulo, a renormalização do modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento segundo a componente longitudinal, ou seja, para $T_c > T_c'$ onde T_c é a temperatura crítica da componente longitudinal e T_c' das componentes transversais.

À ordem de 1 loop, Walter Theumann[18] obteve os expoentes críticos para uma transição de 2ª ordem e suas continuações no ponto spinodal, considerando o acoplamento dividido pela massa como parâmetro de expansão.

Neste capítulo, será analisada a viabilidade de fazer-se a expansão em termos do acoplamento dividido pela massa, olhando-se a renormalização à ordem de dois loops.

Assim sendo, partindo-se do hamiltoniano contínuo para o modelo de Potts com quebra de simetria, obtido no capítulo 2, serão calculadas via teoria renormalizada de perturbações[10,11], usando como parâmetro de expansão o número de loops (forma diagramática de representar integrais de momento) o que origina uma expansão nas constantes de acoplamento também, funções de vértice I1P de 2 e 3 pontos e 2 pontos com inserção de ϕ^2 à ordem de 2 loops. A tais funções de vértice relacionam-se as funções de correlação e o inverso da susceptibilidade.

Fazem-se finitas tais funções de vértice via regularização dimensional e subtração mínima generalizada[19]. Tal renormalização é feita através de renormalização de constantes de acoplamento e funções de renormalização.

Das constantes de acoplamento renormalizadas serão obtidas as funções β de Wilson de cujos zeros sairão pontos fixos.[10] Das derivadas das β's, obtém-se a estabilidade de tais possíveis pontos fixos. Das funções de renormalização podem ser obtidas funções γ_ϕ e γ_{ϕ^2} de Wilson de onde se obtêm os expoentes η e ν^{-1}.

4.2 - Funções de Vértice

Via teoria de perturbações, usando as expressões da seção 2.3, obtêm-se funções de vértice sem renormalizar I1P de 2 pontos, 3 pontos e de 2 pontos com inserção de ϕ^2 à ordem de 2 loops na temperatura crítica da componente longitudinal (ou seja a massa nula: $\mu_1^2=0$) onde a quebra de simetria com as componentes transversais não críticas faz $\mu_1^2\neq 0$ e onde os coeficientes tensoriais e integrais são encontrados nos apêndices.

Após fazer-se renormalização de massa nos propagadores, obtêm-se:

$$\Gamma_{11}^{(2)} = K^2 - \Big\{ B_{11}\bar{I}_1 u_0^2 + B_{12} I_2 v_0^2 + B_{21}^{(1)} I_1^{(1)} u_0^4 + B_{22}^{(1)} \bar{I}_2^{(1)} u_0^2 v_0^2 +$$
$$+ B_{23}^{(1)} I_3^{(1)} v_0^4 + B_{24}^{(1)} \bar{I}_4^{(1)} v_0^2 w_0^2 + B_{21}^{(2)} I_1^{(2)} u_0^4 + B_{22}^{(2)} \bar{I}_2^{(2)} u_0 v_0^3 +$$
$$+ B_{23}^{(2)} \bar{I}_3^{(2)} v_0^4 + B_{24}^{(2)} I_4^{(2)} v_0^2 w_0^2 \Big\} \qquad (4.1)$$

$$\Gamma_{qq}^{(2)} = m_2^2 + \kappa^2 - \Big\{ \check{B}_{11}\tilde{I}_1 v_0^2 + \check{B}_{12}\tilde{I}_2 w_0^2 + \tilde{B}_{21}^{(1)}\tilde{I}_1^{(1)} u_0^2 v_0^2 + \tilde{B}_{22}^{(1)}\tilde{I}_2^{(1)} v_0^4$$
$$+ \left(\tilde{B}_{23a}^{(1)}\tilde{I}_{3a}^{(1)} + \tilde{B}_{23b}\tilde{I}_{3b}^{(1)}\right) v_0^2 w_0^2 + \tilde{B}_{24}^{(1)}\tilde{I}_4^{(1)} w_0^4 + \tilde{B}_{21}^{(2)}\tilde{I}_1^{(2)} u_0 v_0^3 + \tilde{B}_{22}^{(2)}\tilde{I}_2^{(2)} v_0^4$$
$$+ \left(\tilde{B}_{23a}^{(2)}\tilde{I}_{3a}^{(2)} + \tilde{B}_{23b}^{(2)}\tilde{I}_{3b}^{(2)}\right) v_0^2 w_0^2 + \bar{B}_{24}^{(2)} I_4^{(2)} w_0^4 \Big\} \qquad (4.2)$$

$$\Gamma_{111}^{(3)} = \kappa^{\epsilon/2} D_{111} \Big\{ u_0 + G_{11} L_1 u_0^3 + G_{12} L_2 v_0^3 + G_{21}^{(1)} L_1^{(1)} u_0^5 + G_{22}^{(1)} L_2^{(1)}$$
$$u_0^2 v_0^3 + G_{23}^{(1)} L_3^{(1)} u_0 v_0^4 + G_{24}^{(1)} L_4^{(1)} v_0^5 + G_{25}^{(1)} L_5^{(1)} v_0^3 w_0^2 + G_{21}^{(2)} L_1^{(2)} u_0^5$$
$$+ G_{22}^{(2)} L_2^{(2)} u_0^3 v_0^2 + G_{23}^{(2)} L_3^{(2)} v_0^5 + G_{24}^{(2)} L_4^{(2)} v_0^3 w_0^2 + G_{21}^{(3)} L_1^{(3)} u_0^5$$
$$+ G_{22}^{(3)} L_2^{(3)} u_0 v_0^4 + G_{23}^{(3)} L_2^{(3)} v_0^3 w_0^2 \Big\} \qquad (4.3)$$

$$\Gamma_{1qq}^{(3)} = \kappa^{\epsilon/2} D_{1qq} \Big\{ v_0 + \hat{G}_{11}\hat{L}_1 u_0 v_0^2 + \hat{G}_{12}\hat{L}_2 v_0^3 + \hat{G}_{13}\hat{L}_3 v_0 w_0^2 +$$
$$\hat{G}_{21}^{(1)} L_1^{(1)} u_0^3 v_0^2 + \hat{G}_{22}^{(1)}\hat{L}_2^{(1)} u_0^2 v_0^3 + \left[\left(\hat{G}_{23_a}^{(1)} + \hat{G}_{23_c}^{(1)}\right)\hat{L}_{3_a} + \hat{G}_{23_b}\hat{L}_{3_b}\right]$$
$$u_0 v_0^4 + \left(\hat{G}_{24_a}^{(1)}\hat{L}_{4_a}^{(1)} + \hat{G}_{24_b}^{(1)}\hat{L}_{4_b}^{(1)}\right) u_0 v_0^2 w_0^2 + \left[\left(\hat{G}_{25_a}^{(1)} + \hat{G}_{125}^{(1)}\right)\hat{L}_{5a}$$
$$+ \hat{G}_{25_b}^{(1)}\hat{L}_{5_b}^{(1)}\right] v_0^5 + \left[\left(\hat{G}_{26_a}^{(1)} + \hat{G}_{26_c}^{(1)}\right)\hat{L}_{6_a}^{(1)} + \hat{G}_{26_b}^{(1)}\hat{L}_{6_b}^{(1)}\right] v_0^3 w_0^2 +$$
$$\hat{G}_{27}^{(1)}\hat{L}_7^{(1)} v_0 w_0^4 + \hat{G}_{21}^{(2)}\hat{L}_1^{(2)} u_0^3 v_0^2 + \hat{G}_{22}^{(2)}\hat{L}_2^{(2)} u_0^2 v_0^3 + \hat{G}_{23}^{(2)}\hat{L}_3^{(2)} u_0 v_0^4$$
$$+ \hat{G}_{24}^{(2)}\hat{L}_4^{(2)} u v_0^2 w_0^2 + \left(\hat{G}_{25_a}^{(2)}\hat{L}_{5_a}^{(2)} + \hat{G}_{25_b}^{(2)}\hat{L}_{5_b}^{(2)}\right) v_0^5 + \left(\hat{G}_{26_a}^{(2)}\hat{L}_{6a}^{(2)} + \hat{G}_{26_b}^{(2)}\right.$$
$$\left.\hat{L}_{6_b}^{(2)}\right) v_0^3 w_0^2 + \hat{G}_{27}^{(2)}\hat{L}_7^{(2)} v_0 w_0^4 + L_2^{(3)}\Big(\hat{G}_{21}^{(3)} u_0^2 v_0^3 + \hat{G}_{22}^{(3)} u_0 v_0^2 w_0^2 +$$
$$+ \hat{G}_{23}^{(3)} v_0^5 + \hat{G}_{24}^{(3)} w_0^2 v_0^3 + \hat{G}_{25}^{(3)} v_0 w_0^4 \Big) \Big\} \qquad (4.4)$$

$$\Gamma^{(3)}_{999} = R^{\epsilon/2}\, D_{999}\Big\{ w_0 + \tilde{G}_{11}\tilde{L}_1 v_0^2 w_0 + \tilde{G}_{12}\tilde{L}_2 w_0^3 + \tilde{G}^{(1)}_{21}\tilde{L}^{(1)}_1 u_0 v_0^3 w_0 + \tilde{G}^{(1)}_{22}\tilde{L}^{(1)}_2 v_0^4 w_0 + \big[(\tilde{G}_{23_a} + \tilde{G}_{23a})\tilde{L}_{3a} + (\tilde{G}_{23_c} + \tilde{G}_{23_b})\tilde{L}_{3_b}\big] v_0^2 w_0^3 + \tilde{G}^{(1)}_{24}\tilde{L}^{(1)}_4 w_0^5 + \tilde{G}^{(2)}_{21}\tilde{L}^{(2)}_1 u_0^2 v_0^2 w_0 + \tilde{G}^{(2)}_{22}\tilde{L}^{(2)}_2 v_0^4 w_0 + \tilde{G}^{(2)}_{23_a}\tilde{L}^{(2)}_{3_a} v_0^2 w_0^3 + \tilde{G}^{(2)}_{23_b}\tilde{L}^{(2)}_{3_b} v_0^2 w_0^3 + \tilde{G}^{(2)}_{24}\tilde{L}^{(2)}_4 w_0^5 + L^{(3)}_2\big[\tilde{G}^{(3)}_{21} u_0 w_0 v_0^3 + \tilde{G}^{(3)}_{22} v_0^4 w_0 + \tilde{G}^{(3)}_{23} v_0^2 w_0^3 + \tilde{G}^{(3)}_{24} w_0^5\big]\Big\} \tag{4.5}$$

$$\Gamma^{(2,1)}_{11} = 1 + C_{11}L_1 u_0^2 + C_{12}L_2 v_0^2 + C^{(1)}_{21}L^{(1)}_1 u_0^4 + C^{(1)}_{22}L^{(1)}_2 u_0^2 v_0^2 + (C^{(1)}_{23_a}L^{(1)}_{3_a} + C_{23_b}L^{(1)}_2) u_0 v_0^3 + C^{(1)}_{24}L^{(1)}_4 v_0^4 + C^{(1)}_{25}L^{(1)}_5 v_0^2 w_0^2 + C^{(2)}_{21}L^{(2)}_1 u_0^4 + C^{(2)}_{22}L^{(2)}_2 u_0^2 v_0^2 + C^{(2)}_{23}L^{(2)}_3 v_0^4 + C^{(2)}_{24}L^{(2)}_4 v_0^2 w_0^2 + C^{(3)}_{21}L^{(3)}_1 u_0^4 + L^{(3)}_2 (C^{(3)}_{22} u_0 v_0^3 + C^{(3)}_{23} v_0^4 + C^{(3)}_{24} v_0^2 w_0^2) \tag{4.6}$$

$$\Gamma^{(2,1)}_{99} = 1 + \tilde{C}_{11}\hat{L}_1 v_0^2 + \tilde{C}_{12}\hat{L}_2 w_0^2 + \tilde{C}^{(1)}_{21}\hat{L}^{(1)}_1 u_0^2 v_0^2 + \tilde{C}^{(1)}_{22}\hat{L}^{(1)}_2 u_0 v_0^3 + \tilde{C}^{(1)}_{23}\hat{L}^{(1)}_3 v_0^4 + \tilde{C}^{(1)}_{24}\hat{L}^{(1)}_4 v_0^2 w_0^2 + \tilde{C}^{(1)}_{25}\hat{L}^{(1)}_5 w_0^4 + \tilde{C}^{(2)}_{21}\hat{L}^{(2)}_1 u_0^2 v_0^2 + \tilde{C}^{(2)}_{22}\hat{L}^{(2)}_2 v_0^4 + \tilde{C}^{(2)}_{23}\hat{L}^{(2)}_3 v_0^2 w_0^2 + \tilde{C}^{(2)}_{24}\hat{L}^{(2)}_4 w_0^4 + \tilde{C}^{(3)}_{21}\hat{L}^{(3)}_2 + L^{(3)}_2\big[C^{(3)}_{22} v^4 + C^{(3)}_{23} v^2 w^2 + C^{(3)}_{24} w^4\big] \tag{4.7}$$

4.3 - Renormalização

O processo de renormalização compõe-se de 2 partes: a regularização e a renormalização propriamente. A regularização dimensional consiste em resolverem-se as integrais divergentes no limite ultravioleta em $d=d_c$ (dimensionalidade crítica) em função de $\epsilon=d-d_c$, obtendo-se, assim, expressões com pólos em ϵ. Tais pólos são absorvidos pelos coeficientes das constantes de acoplamento e das funções de renormalização. Além dos pólos em ϵ , tais integrais dependem de $m^2/k^2=\frac{T-T_c}{k^2}$ [h] onde T_c é a temperatura crítica das componentes transversais e k um parâmetro de momento. Esta dependência é tal que no ponto crítico $k\to 0$ e $\hat{m}^2\to\infty$. Tal divergência em "massa" também é absorvida pelos coeficientes das constantes de acoplamento e das funções de renormalização. Faz-se, assim, renormalização por subtração mínima generalizada de pólos em ϵ e de massa[10,19].

A renormalização à ordem de 1 loop encontra-se na ref.20. À ordem de dois loops as expressões formais para as funções de renormalização introduzidas no capítulo anterior são :

$$Z_\phi^{(1)} = 1 + b_{11} u^2 + b_{12} v^2 + b_{21} u^2 + b_{22}^{(1)} u^2 v^2 + b_{22}^{(2)} u v^3 + b_{23} v^4 + b_{24} v^2 w^2 \qquad (4.8)$$

---

[h] Por conveniência $\frac{m^2}{k^2}$ será escrito como $\hat{m}^2$ simplesmente

$$b_{11} = -\frac{1}{6\epsilon}c^2(p-2)^2$$

$$b_{12} = -\frac{1}{6\epsilon}c^2(p-2)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\overset{(2)}{Z_\phi} = 1 + \tilde{b}_{11}v^2 + \tilde{b}_{12}w^2 + \tilde{b}_{21}^{(1)}u^2v^2 + \tilde{b}_{21}^{(2)}uv^3 + \tilde{b}_{22}v^4 + \tilde{b}_{23}v^2w^2 + \tilde{b}_{24}w^4$$

$$(4.9)$$

$$\tilde{b}_{11} = -\frac{1}{3\epsilon}c^2\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{12} = -\frac{1}{6\epsilon}c^2 p'(p-3)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\overset{(1)}{Z_{\phi^2}} = 1 + C_1^{(1)}u^2 + C_2^{(1)}v^2 + C_3^{(1)}u^4 + C_4^{(1)}u^2v^2 + C_5^{(1)}uv^3 + C_6^{(1)}v^4 + C_7^{(1)}v^2w^2$$

$$(4.10)$$

$$C_1^{(1)} = -\frac{c^2}{\epsilon}(p-2)^2$$

$$C_2^{(1)} = -\frac{c^2}{\epsilon}(p-2)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\overset{(2)}{Z_{\phi^2}} = 1 + C_1^{(2)}v^2 + C_2^{(2)}w^2 + C_3^{(2)}u^2v^2 + C_4^{(2)}uv^3 + C_5^{(2)}v^4 + C_6^{(2)}v^2w^2 + C_7^{(2)}w^4$$

$$(4.11)$$

As constantes de acoplamento não renormalizadas adi_ mensionais são dadas em função das constantes de acoplamento re_ normalizadas, ou seja,

$$u_0 = u + a_1^{(1)} u^3 + a_2^{(1)} uv^2 + a_3^{(1)} v^3 + a_4^{(1)} u^5 + a_5^{(1)} u^3 v^2 + a_6^{(1)} u^2 v^3 + a_7^{(1)} uv^4 + a_8^{(1)} uv^2 w^2 +$$
$$+ a_9^{(1)} v^5 + a_{10}^{(1)} v^2 w^3 \qquad (4.12)$$

$$a_1^{(1)} = -\frac{3}{4\epsilon} c^2 (p-2)^2$$

$$a_2^{(1)} = \frac{1}{4\epsilon} c^2 (p-2) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_3^{(1)} = \frac{1}{\epsilon} c^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$v_0 = v + a_1^{(2)} u^2 v + a_2^{(2)} v^3 + a_3^{(2)} v w^2 + a_4^{(2)} uv^2 + a_5^{(2)} u^4 v + a_6^{(2)} u^3 v^2 + a_7^{(2)} u^2 v^3 + a_8^{(2)} u^2 v w^2 +$$
$$+ a_9^{(2)} uv^4 + a_{10}^{(2)} uv^2 w^2 + a_{11}^{(2)} v^5 + a_{12}^{(2)} v^3 w^2 + a_{13}^{(2)} v w^4 \qquad (4.13)$$

$$a_1^{(2)} = \frac{c^2}{12\epsilon} (p-2)^2 \quad ; \qquad a_4^{(2)} = \frac{c^2}{\epsilon} (p-2) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_2^{(2)} = -\frac{c^2}{3\epsilon} \left\{ 2 - \frac{1}{4}(p-2) \right\} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_3^{(2)} = -\frac{2}{6\epsilon} p (p-3) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$w_0 = w + a_1^{(3)} v^2 w + a_2^{(3)} w^3 + a_3^{(3)} u^2 v^2 w + a_4^{(3)} u v^3 w + a_5^{(3)} v^4 w + a_6^{(3)} v^2 w^3 + a_7^{(3)} w^5$$
$$(4.14)$$

$$a_1^{(3)} = -\frac{5}{2\epsilon} c^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_2^{(3)} = \frac{c^2}{4\epsilon} p (13-3p) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

onde $c^2 = [p(p-1)]^{-1}$ e as expressões à ordem de 1 loop encontram-se na ref. (18).

De posse de tais expressões formais, obtêm-se os coeficientes da forma detalhada na continuação deste capítulo.

4.3.1 - Obtenção dos Coeficientes de $Z_\phi^{(1)}$ via Renormalização da $\Gamma_{11}^{(2)}$

Obtêm-se os coeficientes de $Z_\phi^{(1)}$ até a ordem de 2 loops exigindo-se que sejam tais que absorvam os pólos dimensionais em ϵ na $\Gamma_{11}^{(2)}$, ou seja, faz-se subtração mínima generalizada de pólos dimensionais ϵ e de massa para obter-se uma expressão finita para $\Gamma_{11,R}^{(2)}$. Portanto, os coeficientes de $Z_\phi^{(1)}$ à ordem de 2 loops são obtidos fazendo-se a substituição das expressões $u_0(u,v,w)=u_0$, $v_0(u,v,w)=v$, e $w_0(u,v,w)=w_0$ até à ordem de 1 loop na eq. (4.1), multiplicando-se pela eq. (4.8) e exigindo-se que $\Gamma_{11,R}^{(2)}$ seja finita. Desta forma,

$$Z_\phi^{(1)}\;\Gamma_{11}^{(2)}(k,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2)=\Gamma_{11,R}^{(2)}(u,v,w,k,\hat{m}^2)$$

obtém-se:

$$b_{21}=\frac{5}{36\epsilon^2}\,c^4\,(p-2)^4\left\{1-\frac{13\epsilon}{60}\right\}$$

$$b_{22}^{(1)}=-\frac{(p-2)^3}{36\epsilon^2}\,c^4\left\{1-\frac{11\epsilon}{12}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{2\epsilon^2}{3}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$b_{22}^{(2)}=-\frac{1}{3\epsilon^2}c^4(p-2)^2\left\{1-\frac{\epsilon}{3}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{11\epsilon^2}{24}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$b_{23}=\frac{1}{9\epsilon^2}c^4\,(p-2)\left\{1-\frac{1\epsilon}{24}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{1\epsilon^2}{24}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$b_{24}=\frac{5}{36\epsilon^2}c^4p(p-3)(p-2)\left\{1-\frac{13\epsilon}{60}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{13\epsilon^2}{60}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

(4.15)

4.3.2 - <u>Obtenção dos Coeficientes de $Z_{\phi}^{(2)}$ via Renormalização da $\Gamma_{qq}^{(2)}$</u>

Os coeficientes de $Z_{\phi}^{(2)}$ até a ordem de 2 loops são obtidos multiplicando-se $Z_{\phi}^{(2)}$ (4.9) por $\Gamma_{qq}^{(2)}$ (4.2) e substituindo-se na $\Gamma_{qq}^{(2)}$, as expressões (4.12), (4.13) e (4.14) até a ordem de 1 loop e exige-se que $Z_{\phi}^{(2)}$ absorva os pólos em ϵ e as divergências em massa da $\Gamma_{qq}^{(2)}$ (subtração mínima generalizada de pólos dimensionais ϵ e de massa). Assim:

$$Z_{\phi}^{(2)}\,\Gamma_{qq}^{(2)}(k,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma_{qq,R}^{(2)}(k,u,v,w,\hat{m}^2)$$

∴ os coeficientes são dados por:

$$\tilde{b}_{21}^{(1)} = -\frac{(p-2)^2c^4}{36\epsilon^2}\left\{1-\frac{11}{12}\epsilon+\epsilon^2\frac{11}{12}\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{21}^{(2)} = -\frac{(p-2)c^4}{3\epsilon^2}\left\{1-\frac{\epsilon}{3}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{3}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{22} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}\left\{p\left[1-\frac{11}{12}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{11}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right.$$
$$\left.-12+4\epsilon+12\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)-4\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)-3\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{23} = \frac{3}{4\epsilon^2}p(p-3)c^4\left\{1-\frac{29}{108}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{29}{108}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{24} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}p^2(p-3)\left\{\left[1-\frac{11}{12}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{11}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right.$$
$$\left.(p-3)\left[-6+2\epsilon-2\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+6\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{3}{2}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right](p-4)\right\} \quad (4.16)$$

4.3.3 - Obtenção dos Coeficientes de $u_0 = u_0(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{111}$

Os coeficientes de $u_0 = u_0(u,v,w)$ ã ordem de 2 loops são obtidos, substituindo-se as expressões (4.13) e (4.14) atē a ordem de 1 loop e a expressão (4.12) atē a ordem de 2 loops, multiplicando-se esta pela função de renormalização $[Z_\phi^{(1)}]^{3/2}$ e exigindo que os coeficientes de sejam tais que absorvam os pōlos em e as divergências em massa (smg - subtração mīnima generalizada de pōlos dimensionais ϵ e de massa), tornando a finita. Assim:

$$[Z_\phi^{(1)}]^{3/2}\, \Gamma^{(3)}_{111}(k_i, \hat{m}^2, u, v, w, \epsilon) = \Gamma^{(3)}_{111,R}(k_i, u, v, w)$$

e os coeficientes de u_0 ã ordem de 2 loops são:

$$a_4^{(1)} = \frac{27}{32\epsilon^2} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{125}{240}\epsilon \right\}$$

$$a_5^{(1)} = -\frac{(p-2)^3 c^4}{36\epsilon^2} \left\{ \frac{17}{48} - \frac{31}{288}\epsilon - \frac{27}{96}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{96}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{13}{72}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_6^{(1)} = -\frac{3}{4\epsilon^2}(p-2)^2 c^4 \left\{ 1 - \frac{5}{18}\epsilon - \frac{7}{6}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{3} \ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{61}{36}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_7^{(1)} = \frac{c^4}{\epsilon^2}(p-2)\Big\{8 - \frac{161}{24}\epsilon - 8\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{161}{24}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + 2\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)$$
$$+(p-2)\Big[\frac{5}{16} - \frac{5}{16}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{64}\epsilon^2\ln^2(m^2+1)\Big]\Big\}$$

$$a_8^{(1)} = -\frac{5}{24\epsilon^2}c^4\, p(p-2)(p-3)\Big\{1 - \frac{13}{60}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{13}{60}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(m^2+1)\Big\}$$

$$a_9^{(1)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2}\Big\{1 - \frac{\epsilon}{12} - \epsilon\ln(m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{12}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(m^2+1) + (p-2)\Big[-\frac{1}{4}$$
$$+\frac{\epsilon}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{16}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\Big\}$$

$$a_{10}^{(1)} = -\frac{5}{4\epsilon^2}c^4\, p(p-3)\Big\{1 - \frac{23}{60}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{23}{60}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\Big\}$$

$$(4.17)$$

4.3.4 - Obtenção dos Coeficientes de $v_0 = v_0(u,v,w)$ via Renormalização de $\Gamma^{(3)}_{1qq}$

Os coeficientes de $v_0 = v_0(u,v,w)$ à ordem de 2 loops são obtidos, substituindo-se as expressões (4.12) e (4.14) até a ordem de 1 loop e a expressão (4.13) à ordem de 2 loops em $\Gamma^{(3)}_{1qq}$, multiplicando-se por $[Z_\phi^{(1)}]^{1/2} Z_\phi^{(2)}$ (4.15) e (4.16) à ordem de 2 loops e exigindo-se que os coeficientes de v_0 sejam tais que absorvam os pólos em ϵ e os termos em massa (smq), tornando a $\Gamma^{(3)}_{1qq,R}$ finita. Assim:

$$[Z_\phi^{(1)}]^{1/2} Z_\phi^{(2)} \Gamma_{1qq}(k_i,u,v,w,m^2,\epsilon) = \Gamma^{(3)}_{1qq,R}(k_i,u,v,w)$$

Os coeficientes obtidos são:

$$a_5^{(2)} = -\frac{17}{288\epsilon^2} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{13}{51}\epsilon \right\}$$

$$a_6^{(2)} = -\frac{c^4}{4\epsilon^2}(p-2)^3 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{9} + \frac{\epsilon}{6}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{9}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{3}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_7^{(2)} = \frac{c^4}{36\epsilon^2}(p-2)^2 \left\{ 32 - \frac{157}{6}\epsilon - 35\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{167}{6}\epsilon^2\ln(m^2+1) + \frac{19}{2}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1) \right.$$
$$\left. +(p-2)\left[\frac{5}{4} - \frac{11}{24}\epsilon - \frac{7}{8}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{3}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right] \right\}$$

$$a_8^{(2)} = -\frac{5}{72\epsilon^2} c^4 (p-2)^2 p(p-3) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_9^{(2)} = -\frac{C^4(p-2)}{6\epsilon^2}\left\{\left[10 - \frac{5}{2}\epsilon - 10\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{2}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{2}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right.$$

$$\left. + (p-2)\left[-\frac{5}{2} + \frac{11}{12}\epsilon + \frac{5}{2}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{25\epsilon^2}{24}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{5}{8}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right\}$$

$$a_{10}^{(2)} = -\frac{5}{4\epsilon^2}p(p-2)(p-3)C^4\left\{1 - \frac{83}{180}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{83}{180}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(m^2+1)\right\}$$

$$a_{11}^{(2)} = \frac{C^4}{6\epsilon^2}\left\{(p-2)^2\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{1}{64}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right] + (p-2)\left[2 - \frac{43}{72}\epsilon\right.\right.$$

$$\left. - 2\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{43}{72}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right] + \left[4 - \frac{67}{18}\epsilon - 4\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)\right.$$

$$\left.\left. + \frac{67}{18}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right\}$$

$$a_{12}^{(2)} = \frac{C^4}{3\epsilon^2}p(p-3)\left\{\frac{115}{12} - \frac{239}{48}\epsilon - \frac{115}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{239}{48}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \right.$$

$$\frac{115}{48}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1) + (p-2)\left[-\frac{5}{12} + \frac{13}{288}\epsilon + \frac{5}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{13}{288}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{5}{48}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right.$$

$$a_{13}^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}C^4 p^2(p-3)\left\{(p-4)\left[-5 + \frac{8}{3}\epsilon + 5\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{8}{3}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{5}{4}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right.$$

$$\left. + (p-3)\left[-\frac{5}{6} + \frac{1}{36}\epsilon + \frac{5}{6}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{1}{36}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{5}{24}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right\} \qquad (4.18)$$

4.3.5 - Obtenção dos Coeficientes de $w_0 = w_0(u,v,w)$ via Renormalização da

Os coeficientes de $w_0 = w_0(u,v,w)$ ã ordem de 2 loops, são obtidos substituindo-se as expressões (4.12) e (4.13) ã ordem de 1 loop e a expressão (4.14) ã ordem de 2 loops em $\Gamma^{(3)}_{qqq}$ multiplicando-se ainda por $\left[Z_\phi^{(2)}\right]^{3/2}$ e exigindo-se que os coeficientes de w_0 sejam tais que absorvam os pólos em ϵ e as divergências em massa, fazendo $\Gamma^{(3)}_{qqq,R}$ finita. Assim, de:

$$\left[Z_\phi^{(2)}\right]^{3/2} \Gamma^{(3)}_{qqq}(k_i,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma_{qqq}(k_i,u,v,w)$$

Os coeficientes são dados por:

$$a_3^{(3)} = -\frac{5}{24\epsilon^2} c^4 (p-2)^2 \left\{1 - \frac{31}{60}\epsilon - \frac{1}{60}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4} \ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_4^{(3)} = -\frac{5}{2\epsilon^2} c^4 (p-2) \left\{1 - \frac{13}{30}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{13}{30}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4} \ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_5^{(3)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2} \left\{ +(p-2)\left[\frac{5}{24} - \frac{31}{288}\epsilon - \frac{5}{24}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{31}{288}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{96}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{115}{24} + \frac{389}{144}\epsilon + \frac{115}{24}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{389}{144}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{115}{96}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right\}$$

$$a_6^{(3)} = \frac{5}{6\epsilon^2} c^4 p \left\{ p \left[7 - \frac{55}{16}\epsilon - 7\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{55}{16}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{7}{4}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right] \right.$$

$$\left. - 27 + \frac{217}{16}\epsilon + 27\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{217}{16}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{27}{24}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_7^{(3)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2} p^2 \left\{ p^2 \left[-\frac{27}{32} + \frac{125}{288}\epsilon + \frac{27}{32}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{125}{288}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{27}{128}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right] \right.$$

$$p \left[\frac{234}{32} - \frac{1044}{288}\epsilon - \frac{234}{32}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{1044}{288}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{234}{128}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right]$$

$$\left. + \left[-\frac{497}{32} + \frac{2259}{288}\epsilon + \frac{497}{32}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{2259}{288}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{497}{128}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right] \right\} \qquad (4.19)$$

4.3.6 - Obtenção dos Coeficientes de $Z_{\phi^2}^{(1)}$ via Renormalização da $\Gamma_{11}^{(2,1)}$

Os coeficientes de $Z_{\phi^2}^{(1)}$ ã ordem de 2 loops são obtidos substituindo-se as expressões (4.12), (4.13) e (4.14) ã ordem de 1 loop em $\Gamma_{11}^{(2,1)}$ e multiplicando-a, ainda, por $Z_{\phi^2}^{(1)}$ e exigindo que os coeficientes sejam tais que absorvam os pólos em ϵ e as divergências em massa (smg), tornando a $\Gamma_{11,R}^{(2,1)}$ finita. Assim:

$$Z_{\phi^2}^{(2,1)} \; \Gamma_{11}^{(2,1)}(k_i, u, v, w, \epsilon, \hat{m}^2) = \Gamma_{11,R}^{(2,1)}(k_i, u, v, w)$$

Os coeficientes são dados por:

$$c_3^{(1)} = \frac{5}{4\epsilon^2} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{23}{60}\epsilon \right\}$$

$$C_4^{(1)} = -\frac{C^4}{\epsilon^2}(p-2)^3\left\{-\frac{13}{12}+\frac{29}{48}\epsilon+\frac{2}{3}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{29}{48}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{\epsilon^2}{6}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$C_5^{(1)} = -C^4(p-2)^2\left\{2-\epsilon-2\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{7}{4}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(m^2+1)\right\}$$

$$C_6^{(1)} = C^4(p-2)\left\{-\frac{5}{6}(p-2)\left[1-\frac{3}{4}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{3}{4}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]+\frac{1}{6}-\frac{19}{24}\epsilon-\frac{\epsilon}{6}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{19}{24}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+$$

$$\left.+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(m^2+1)\right\}$$

$$C_7^{(1)} = -p(p-2)(p-3)\frac{C^4}{\epsilon^2}\left\{-\frac{5}{12}-\frac{7}{48}\epsilon+\frac{5}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{7}{48}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$(4.20)$$

4.4 - Pontos Fixos

Da equação do grupo de Renormalização, obtém-se, como pode ser vista na ref. (10) a função β de Wilson. No caso de haver quebra de simetria no termo trilinear, são três as funções:

$$\beta_u = \left[k \frac{\partial}{\partial k} u \right]_{\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w}$$

$$\beta_v = \left[k \frac{\partial}{\partial k} v \right]_{\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w}$$

$$\beta_w = \left[k \frac{\partial}{\partial k} w \right]_{\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w} \qquad (4.21)$$

onde k é o parâmetro de momento e as derivadas devem ser feitas com acoplamentos sem renormalizar fixos.

Na ref. (18), as funções são calculadas à ordem de 1 loop. Calculam-se β_u, β_v e β_w, tomando-se u_0, v_0 e w_0 à ordem de 2 loops, multiplicando-se por $k^{\epsilon/2}$, ou seja, obtendo-se λ_u, λ_v e λ_w e invertendo as relações $u_0 = u_0(u,v,w)$, $v_0 = v_0(u,v,w)$ e $w_0 = w_0(u,v,w)$ Resolve-se o sistema de equações (4.21), obtendo-se:

$$\beta u = -\frac{\epsilon}{2}\left\{ u + \frac{3}{2\epsilon}(p-2)^2 c^2 u^3 - \frac{c^2}{2\epsilon}(p-2)\frac{uv^2}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{2}{\epsilon} c^2 \frac{v^3}{(\hat{m}^2+1)} \right.$$

$$+ \frac{125}{72\epsilon} c^4 (p-2)^4 u^5 + \frac{(p-2)^3}{\epsilon} c^4 \left[\frac{7}{24} - \frac{13}{18(\hat{m}^2+1)} - \frac{5}{12}\frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)} \right]$$

$$u^3 v^2 + \frac{(p-2)^2}{\epsilon} c^4 \left[-\frac{61}{12(\hat{m}^2+1)} + \frac{51}{12} - \frac{5}{2}\frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)} \right] u^2 v^3 + \frac{161}{36\epsilon}(p-2)$$

$$\frac{uv^4}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{13}{72\epsilon} c^4 p(p-2)(p-3)\frac{uv^2w^2}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{c^4}{3\epsilon}\frac{v^5}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{23}{12\epsilon} p$$

$$\left. (p-3)\, c^4 \frac{v^3 w^2}{(\hat{m}^2+1)} \right\}$$

$$\beta v = -\frac{\epsilon}{2}\left\{ v - \frac{1}{6\epsilon} c^2 (p-2)^2 u^2 v + \frac{2}{3\epsilon} c^2 \left(2 - \frac{1}{4}(p-2) \right)\frac{v^3}{(\hat{m}^2+1)} \right.$$

$$+ \frac{5}{3\epsilon} c^2 p(p-3)\frac{vw^2}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{2}{\epsilon} c^2 (p-2)\frac{uv^2}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{13}{216\epsilon} c^4 (p-2)^4$$

$$u^4 v + \frac{1}{\epsilon} c^4 (p-2)^3 \left[-\frac{1}{9(\hat{m}^2+1)} + \frac{2}{3}\frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)} \right] u^3 v^2 + \frac{1}{\epsilon} c^4 (p-2)^2$$

$$\left[-\frac{7}{54} + \frac{164}{54(\hat{m}^2+1)} + \frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{9(\hat{m}^2+1)} + \frac{3}{216}(p-2) + \frac{(p-2)}{27(\hat{m}^2+1)} + \frac{\ln(\hat{m}^2+1)(p-2)}{36(\hat{m}^2+1)} \right]$$

$$u^2 v^3 + \frac{1}{\epsilon} c^4 (p-2)\left[-\frac{5}{3(\hat{m}^2+1)} - \frac{(p-2)}{12} + \frac{25}{36}\frac{(p-2)}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{(p-2)\ln(\hat{m}^2+1)}{6(\hat{m}^2+1)} \right] u$$

$$- \frac{83}{36\epsilon} c^4 p(p-2)(p-3)\frac{uv^2w^2}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{2}{9\epsilon} c^4 p^2 (p-3)\left[8(p-4) + \frac{(p-3)}{12} \right]$$

$$\frac{vw^4}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{4}{3\epsilon} c^4 p(p-3)\left[\frac{13}{288}(p-2) - \frac{239}{48} \right] v^3 w^2 + \left[\frac{67}{27} + \frac{43}{108}(p-2) \right]\frac{c^4 v^5}{(\hat{m}^2+1)}$$

$$\beta w = -\frac{\epsilon}{2}\left\{ w + \frac{5}{\epsilon} c^2 \frac{v^2 w}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{2}{\epsilon} c^2 p \left[\frac{(p-3)}{4} - (p-4) \right] \frac{w^3}{(\hat{m}^2+1)} \right.$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} c^4 (p-2)^2 \left[-\frac{16}{36} + \frac{1}{72(\hat{m}^2+1)} + \frac{5}{12} \frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)} \right] u^2 v^2 w +$$

$$\frac{1}{36\epsilon} c^4 \left[389 - \frac{31}{2}(p-2) \right] \frac{v^4 w}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{5}{24\epsilon} c^4 p \left[55p - 217 \right]$$

$$\frac{v^2 w^3}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{1}{72\epsilon} c^4 p^2 (125p^2 - 1044p + 2159) \frac{w^5}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{13}{3\epsilon} c^4$$

$$\left. (p-2) \frac{u v^3 w}{(\hat{m}^2+1)} \right\}$$

Como foi demonstrado na ref.(10), os zeros das funções β's fornecem os pontos fixos, ou seja, os parâmetros que fazem a teoria invariante de escala, o que quer dizer que, mudando o parâmetro de escala de momento, não ocorrem mudanças no comportamento assintótico infravermelho das funções de vértice e de correlação.

Tais funções β's são válidas tanto no limite de $\bar{m}^2 \to 0$ como no limite de $m^2 \to \infty$. No primeiro caso, dos zeros de tais funções obtêm-se os pontos fixos da teoria simétrica[17]. No limite de $m^2 \to \infty$, há 4 tipos de pontos fixos:

a) Ponto fixo I:

b) Ponto fixo II:

c) Ponto fixo III:

d) Ponto fixo IV:

Os pontos fixos I, II e III apresentam comportamentos semelhantes (ver Figura 4.1 até a Figura 4.6). A medida que a massa ($\bar{m}^2$) tende a infinito, os acoplamentos divididos por $\epsilon^{1/2}$ crescem. Como o acoplamento não pode ser grande já que é o parâmetro de expansão, escolhem-se valores de ϵ pequenos. Assim, à medida que $\bar{m}^2$ cresce, ϵ decresce. Fazendo-se a renormalização em ordens mais altas no número de loops, ϵ decresce mais rapidamente que $\bar{m}^2$ cresce. Assim sendo, olhando-se a teoria a toda ordem no número de loops, obtém-se $\epsilon = 0$ como único valor possível. Este resultado indica a não validade destes pontos fixos.

O ponto fixo IV é instável, portanto, não há forma de acessá-lo

Os resultados acima indicam que não há ponto fixo es tável, demonstrando que não há possibilidade de ter uma transição de fase com quebra espontânea de simetria. Isto ocorre, pois quebra de simetria favorecendo uma componente longitudinal, favorece o ordenamento segundo um estado (a componente longitudinal, na representação de Priest e Lubensky, coincide com um dos estados). Assim, ao "ligar-se" a quebra de simetria, o sistema ficará diretamente ordenado neste estado.

No próximo capítulo, será estudado o modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento segundo p-2 componentes transversais. Espera-se que, neste caso, haja transição de fase mesmo para $p = 3$, ou seja, ao favorecer-se o ordenamento segundo uma componente transversal (as componentes transversais não coincidem com nenhum estado).

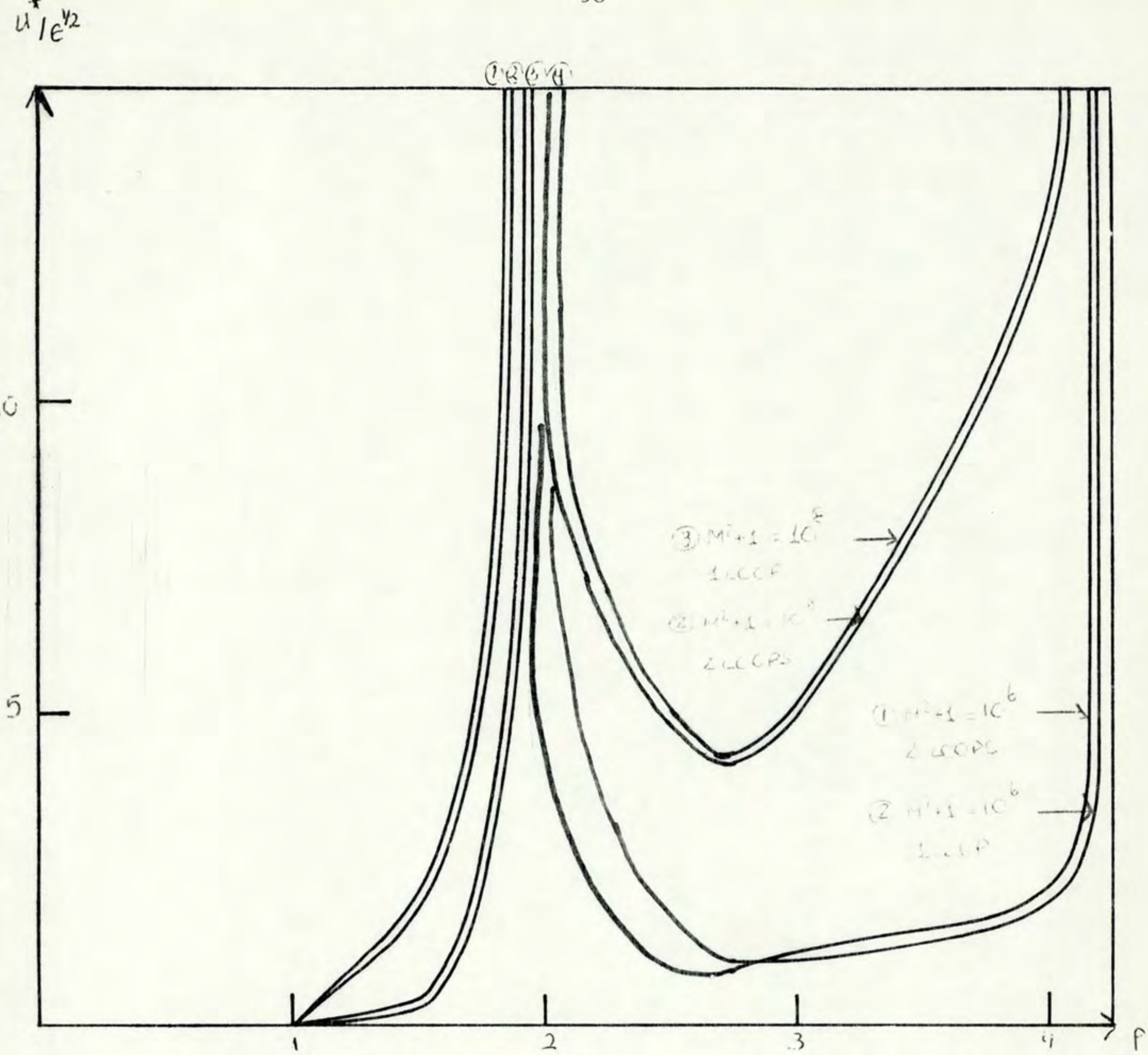


FIGURA 4.1 - Gráfico $u^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ relativo ao ponto fixo I. Plota-se $u^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ à ordem de um e dois loops para valores de massa dados respectivamente por $\hat{m}^2+1 = 10^6, 10^8$. Para que a correção a ordem de dois loops seja pequena, toma-se $\epsilon = 10^{-14}$

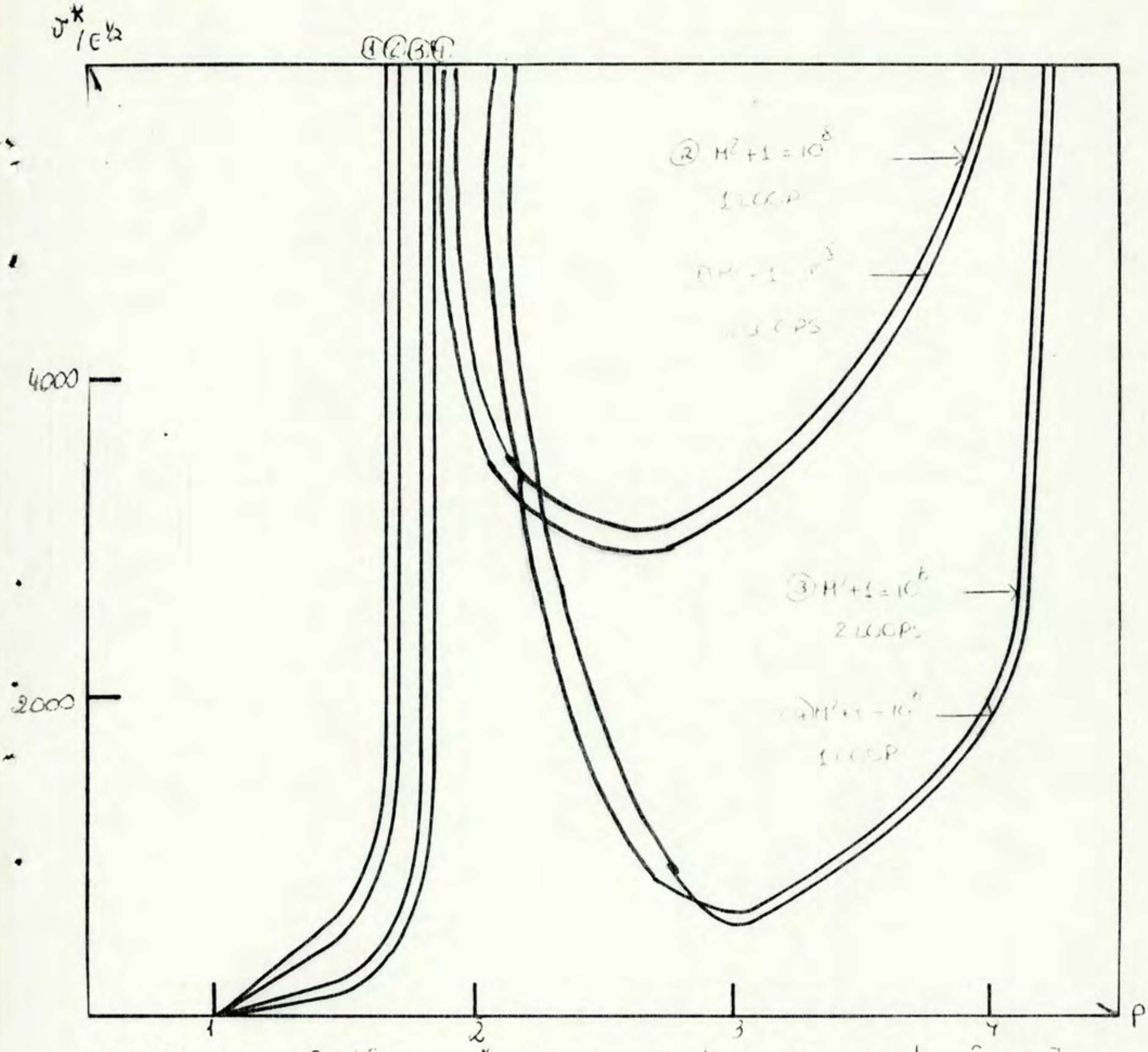


FIGURA 4.2 - Gráfico $v^*/\varepsilon^{1/2} \times p$ relativo ao ponto fixo I - Plota-se $v^*/\varepsilon^{1/2} \times p$ à ordem de um e dois loops para dois valores de massa (10^{6} e 10^{8}). Para que a correção à ordem de dois loops seja pequena, toma-se $\varepsilon \sim 10^{-14}$

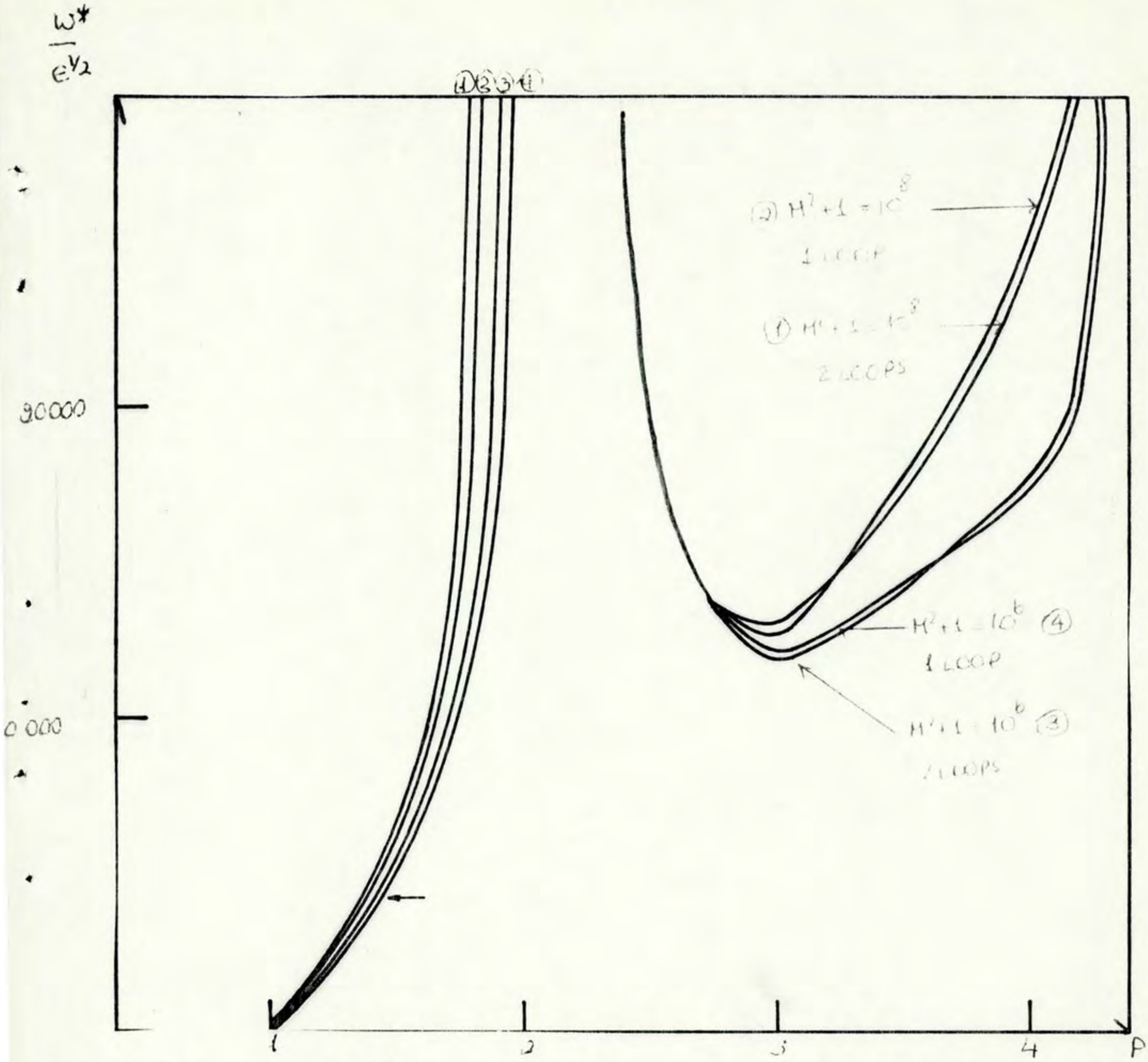


FIGURA 4.3 – Gráfico $w^*/\epsilon^{1/2} \times p$ relativo ao ponto fixo I –

Plota-se $w^*/\epsilon^{1/2} \times p$ para duas massas (10^6 e 10^8) à ordem de um e dois loops. Para que a correção à ordem de dois loops seja pequena, toma-se $\epsilon = 10^{-14}$

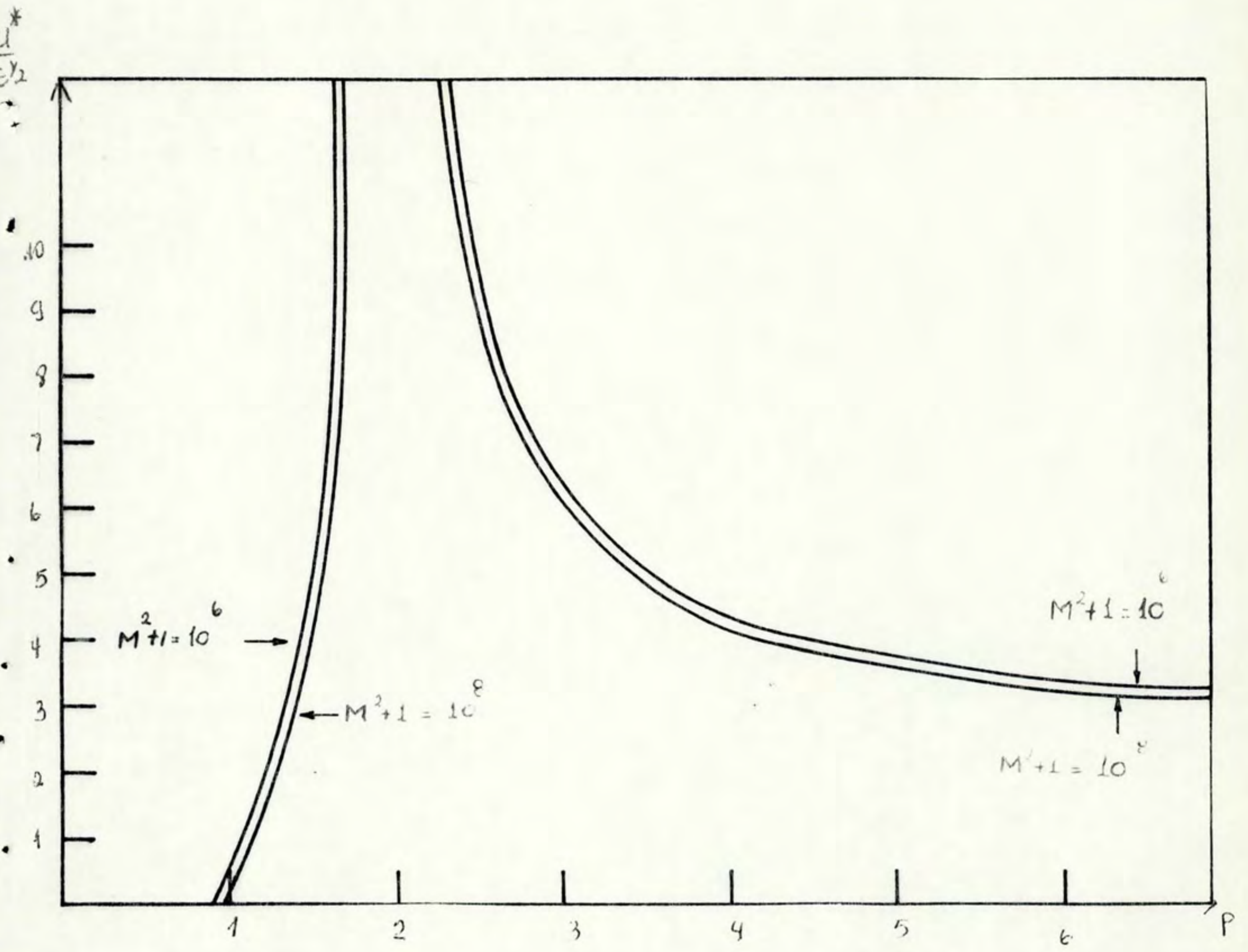


FIGURA 4.4 - Gráfico $u^*/\epsilon^{1/2}$ x p relativo ao ponto fixo II --

Plota-se $u^*/\epsilon^{1/2}$ x p à ordem de um e dois loops para dois valores de massa: 10^6 e 10^8. Para que a correção à ordem de dois loops seja pequena, toma-se $\epsilon = 10^{-14}$

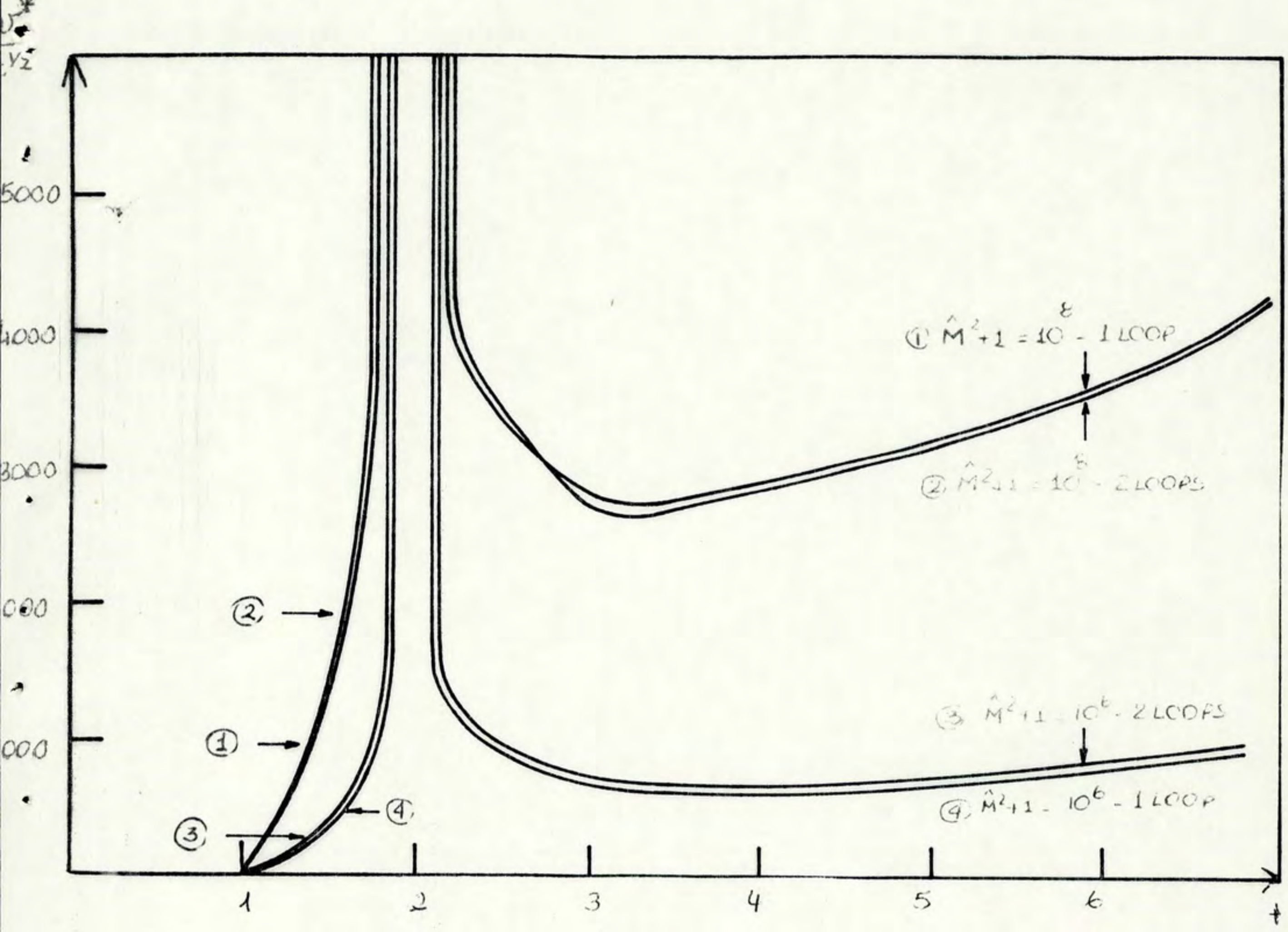


FIGURA 4.5 - Gráfico $v^*/\epsilon^{1/2} \times p$ relativo ao ponto fixo II. Plota-se $v^*/\epsilon^{1/2} \times p$ à ordem de um e dois loops para dois valores de massa 10^6 e 10^8. Para que a correção à ordem de dois loops seja pequena, toma-se $\epsilon = 10^{-14}$

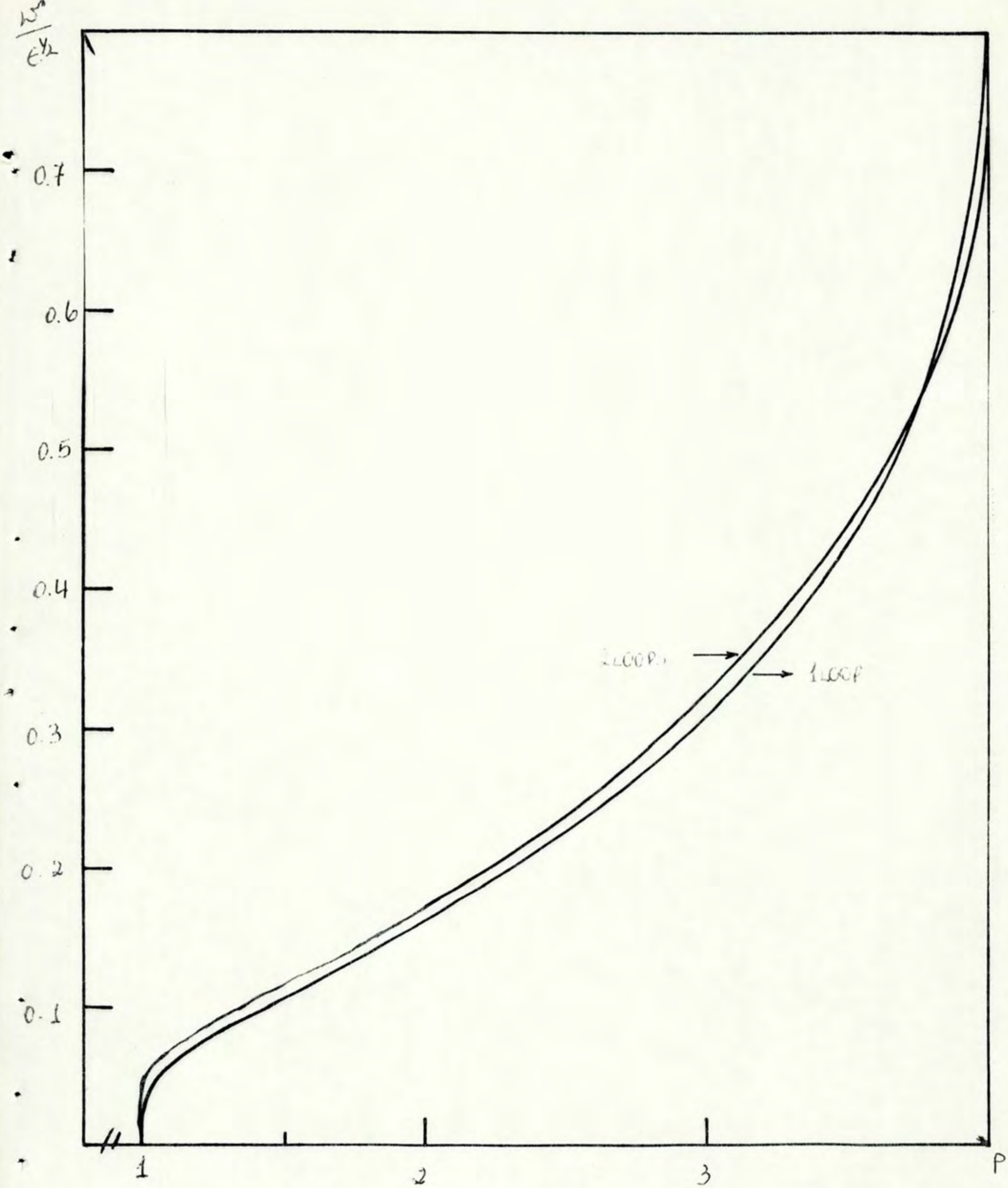


FIGURA 4.6 - Gráfico $w^*/\epsilon^{1/2} \times p$ relativo ao ponto fixo III.

Plota-se $w^*/\epsilon^{1/2} \times p$ à ordem de um e dois loops para

$\epsilon \times (m^2+1) = 0.1$

5 - QUEBRA DE SIMETRIA QUADRÁTICA E TRILINEAR - ORDENAMENTO TRANSVERSAL

5.1 - Introdução

No capítulo anterior, estudou-se o comportamento crítico de sistemas frente a uma quebra de simetria quadrática e trilinear tal que favorecesse o ordenamento segundo uma componente longitudinal. Como conseqüência, observou-se que recaía em um comportamento como se só houvessem um estado, não havendo transição de fase.

Para verificar se tal resultado é decorrente do fato de que favoreceu-se um estado coincidente com uma componente, resolveu-se estudar uma quebra de simetria quadrática e trilinear que favoreça o ordenamento segundo as p-2 componentes transversais.

Neste caso, espera-se recair no comportamento crítico do modelo simétrico de p-1 estados. Espera-se, também, que no limite de $p = 3$, ou seja, de haver uma componente transversal favorecida em relação a uma longitudinal, o sistema se comporte como um sistema simétrico de dois estados (Ising) já que, neste caso, a componente favorecida não coincide com nenhum estado.

Como no outro capítulo, faz-se teoria renormalizada de perturbações. Partindo-se do hamiltoniano (2.40) com quebra de simetria quadrática e trilinear, obtêm-se, via teoria de perturbações, funções de vértice I1P de 2 pontos, relacionada em $K = 0$ ao inverso da susceptibilidade, 3 pontos, relacionada em $K = 0$ às funções β de Wilson e 2 pontos com inserção de ϕ^2 que fornece o comportamento crítico perto de T_c.

Os processos de regularização e renormalização serão os mesmos que os usados no capítulo anterior, diferindo apenas no fato de serem críticas as componentes transversais e não críticas a longitudinal.

As expressões formais para as funções de vértice I1P de 2 e 3 pontos e 2 pontos com inserção de ϕ^2 também serão as mesmas que as usadas no capítulo 4. Os coeficientes tensoriais presentes nas funções de vértices e calculados no apêndice A são os mesmos, pois independem da quebra de simetria. As integrais que compõe as funções de vértice, no entanto, por dependerem da massa de cada propagador, ou seja, do fato daquela componente ser ou não crítica, são diferentes das integrais usadas anteriormente. Podem ser encontradas no apêndice B.

Os coeficientes das funções de renormalização e constantes de acoplamento serão obtidos à ordem de 2 loops.

Das constantes de acoplamento renormalizadas serão obtidas, usando (4.21), as funções β de Wilson à ordem de 2 loops. Das expressões para as β's, obtém-se que os únicos parâmetros de expansão possível são os valores de ponto fixo das constantes de acoplamento renormalizadas, e finalmente obtêm-se os expoentes críticos para ordenamento transversal. Para simplificar os cálculos, os pontos fixos serão obtidos à ordem de 1 loop.

5.2 - Renormalização

Fazem-se finitas as funções de vértice I1P de 2 pon tos, 3 pontos e 2 pontos com inserção de ϕ^2 através de regularização dimensional e subtração mínima generalizada de pólos dimensionais em e de massa. Tal renormalização consiste em absorverem-se os pólos dimensionais em e as divergências de massa em funções de renormalização e constantes de acoplamento renormalizadas. A renormalização é feita na temperatura crítica das componentes transversais. Será feita, neste capítulo, até a ordem de 2 loops para indicar qual seja um bom parâmetro de expansão para as ρ de Wilson, muito embora os pontos fixos sejam calculados à ordem de 1 loop. Como foi visto no capítulo 3, a renormalização é feita ordem por ordem no número de loops. Por este motivo, primeiro se fará a renormalização completa à ordem de 1 loop e, então, à ordem de 2 loops.

5.2.1 - Renormalização à Ordem de Um Loop

Em cada loop renormalizam-se primeiro as $\Gamma^{(2)}$, obtendo-se as expressões para as funções de renormalização $Z_\phi^{(1)}$ e $Z_\phi^{(2)}$, após renormalizam-se as $\Gamma^{(3)}$, usando-se as expressões obtidas para as $Z_\phi^{(1)}$ e $Z_\phi^{(2)}$, obtendo-se as constantes de acoplamento renormalizadas e, então, as $\Gamma^{(2,1)}$, obtendo-se a função de renormalização $Z_{\phi^2}^{(2)}$.

5.2.1.1 - Cálculo dos Coeficientes de $Z_{\phi}^{(1)}$ via Renormalização da $\Gamma_{11}^{(2)}$

Obtêm-se os coeficientes da $Z_{\phi}^{(1)}$, multiplicando-se a expressão formal para a $Z_{\phi}^{(1)}$ (4.8) pela $\Gamma_{11}^{(2)}$ à ordem de 1 loop (4.1), substituindo-se nesta última uo por u, vo por v e wo por w, e exigindo-se que os coeficientes de $Z_{\phi}^{(1)}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais em ϵ e de massa da $\Gamma_{11,R}^{(2)}$.

Então, exigindo-se que:

$$\left[Z_{\phi}^{(1)}\right] \Gamma_{11}^{(2)}(k,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma_{11}^{(2)}(k,u,v,w) \quad (5\ 1)$$

seja finita, obtém-se:

$$b_{11} = -\frac{1}{6\epsilon}(p-2)^2 c^2 \left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$b_{12} = -\frac{1}{6\epsilon} c^2 (p-2) \quad (5\ 2)$$

5.2.1.2 - Cálculo dos Coeficientes de $Z_{\phi}^{(2)}$ via Renormalização da $\Gamma_{qq}^{(2)}$

Obtêm-se os coeficientes da $Z_{\phi}^{(2)}$, multiplicando-se a expressão formal para a $Z_{\phi}^{(2)}$ (4.9) pela $\Gamma_{qq}^{(2)}$ (4.2) à ordem de 1 loop, substituindo-se nesta última uo por u, vo por v e wo por w, e exigindo-se que os coeficientes de $Z_{\phi}^{(2)}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma_{qq,R}^{(2)}$. Então, exigindo-se que :

$$Z_{\phi}^{(2)}\, \Gamma_{qq}^{(2)}(K;u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma_{qq,R}^{(2)}(K,u,v,w) \qquad (5.3)$$

seja finita, obtêm-se:

$$\tilde{b}_{11} = -\frac{1}{3\epsilon}\, c^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(c\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$\tilde{b}_{12} = -\frac{1}{6\epsilon}\, p(p-3)\, c^2 \qquad (5.4)$$

5.2.1.3 - Cálculo dos Coeficientes de $u_o = u_o(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{111}$

Obtêm-se os coeficientes de uo = uo(u,v,w) multiplicando-se $Z_\phi^{(1)}$ obtida em (5.2) pela expressão formal para a $\Gamma^{(3)}_{111}$ (4.3) substituindo-se, nesta última, vo por v, wo por w e uo pela expressão uo(u,v,w) à ordem de 1 loop (4.12) e exigindo-se que os coeficientes de uo = uo(u,v,w) sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{111,R}$.

Então, exigindo-se que:

$$\left[Z_\phi^{(1)}\right]^{3/2} \Gamma^{(3)}_{111}(K_i,u,v,w,\hat{m}^2,\epsilon) = \Gamma^{(3)}_{111,R}(K_i,u,v,w) \quad (5.5)$$

seja finita, obtêm-se:

$$a_1^{(1)} = -\frac{3}{4\epsilon} c^2 (p-2)^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_2^{(1)} = \frac{1}{4\epsilon} c^2 (p-2)$$

$$a_3^{(1)} = \frac{1}{\epsilon} c^2 \quad (5.6)$$

5.2.1.4 - Cálculo dos Coeficientes de $v_o = v_o(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{1qq}$

Obtém-se os coeficientes de $vo = vo(u,v,w)$ multiplicando-se as expressões $Z_\phi^{(1)1/2}$ $Z_\phi^{(2)}$ obtidas via (5.2) e (5.4) pela expressão para $\Gamma^{(3)}_{1qq}$ (4.4) substituindo-se nesta última uo por u, wo por w e vo pela expressão formal $vo = vo(u,v,w)$ (4.13) à ordem de 1 loop, exigindo-se que os coeficientes de $vo = vo(u,w,w)$ sejam tais que absorvam pólos dimensionais ϵ e divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{1qq}$.

Então, exigindo-se que:

$$\left[Z_\phi^{(1)}\right]^{1/2}\left[Z_\phi^{(2)}\right]\Gamma^{(3)}_{1qq}(k_i,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma^{(3)}_{1qq,R}(k_i,u,v,w,\hat{m}^2) \tag{5.7}$$

seja finita, obtém-se:

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{\epsilon}\, c^2 (p-2)^2 \left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_2^{(2)} = -\frac{2}{3\epsilon}\, c^2 \left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\} + \frac{1}{12\epsilon}(p-2)\,c^2$$

$$a_3^{(2)} = -\frac{5}{6\epsilon}\, c^2\, p(p-3)$$

$$a_4^{(2)} = \frac{1}{\epsilon}(p-2)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\} \tag{5.8}$$

5.2.1.5 - Cálculo dos Coeficientes de $w_0 = w_0(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{\varphi\varphi\varphi}$

Obtêm-se os coeficientes de wo = wo(u,v,w) multiplicando-se a expressão $Z_\phi^{(2)\,3/2}$ obtida em (5.4) pela expressão para $\Gamma^{(3)}_{\varphi\varphi\varphi}$ (4.5) substituindo-se nesta última uo por u, vo por v e wo por wo(u,v,w) à ordem de 1 loop (4.14), exigindo-se que os coeficientes de wo = wo(u,v,w) sejam tais que absorvam pólos dimensionais ϵ e divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{\varphi\varphi\varphi,R}$.

Então, exigindo-se que:

$$\left[Z_\phi^{(2)}\right]^{3/2} \Gamma^{(3)}_{\varphi\varphi\varphi}(k_i,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma^{(3)}_{\varphi\varphi\varphi,R}(k_i,u,v,w) \quad (5.9)$$

seja finita, obtêm-se:

$$a_1^{(3)} = -\frac{5}{2\epsilon}c^2\left\{1-\frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_2^{(3)} = \frac{\ell}{\epsilon}c^2 p\left[\frac{1}{4}(p-3)-(p-4)\right] \quad (5.10)$$

5.2.1.6 - Cálculo dos Coeficientes da $Z_{\phi}^{(2)}$ via Renormalização da $\Gamma_{qq}^{(2,1)}$

Obtêm-se os coeficientes da $Z_{\phi^2}^{(2)}$ (4.6b) multiplicando a expressão formal da $Z_{\phi^2}^{(2)}$ (4.11) pela expressão para a $\Gamma_{qq}^{(2,1)}$ à ordem de 1 loop, substituindo-se uo pela expressão uo(u,v,w) obtida em (5.6), vo pela expressão vo(u,v,w) obtida em (5.8) e wo pela wo(u,v,w) obtida em (5.10) e exigindo-se que os coeficientes de $Z_{\phi^2}^{(2)}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma_{qq,R}^{(2,1)}$.

Então, exigindo-se que:

$$Z_{\phi^2}^{(2)}\ \Gamma_{qq}^{(2,1)}(k_i, u, v, w, \hat{m}^2, \epsilon) = \Gamma_{qq,R}^{(2,1)}(k_i, u, v, w) \quad (5.11)$$

seja finita, obtêm-se:

$$C_1^{(2)} = -\frac{2}{\epsilon} c^2 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\hat{m}^2 + 1) \right\}$$

$$C_2^{(2)} = -p(p-3)\frac{c^2}{\epsilon} \quad (5.12)$$

5.2.2 - Renormalização à Ordem de 2 Loops

Igualmente aqui se fará em primeiro lugar a renormalização das $\Gamma^{(2)}$ obtendo-se as funções de renormalização $Z_\phi^{(1)}$ e $Z_\phi^{(2)}$, após faz-se a renormalização das $\Gamma^{(3)}$, usando as funções de renormalização $Z_\phi^{(1)}$ e $Z_\phi^{(2)}$, obtendo, então, expressões para as constantes de acoplamento renormalizadas e, então, obtém-se a $Z_{\phi^2}^{(2)}$ via renormalização da $\Gamma_{qq}^{(2,1)}$.

5.2.2.1 - Cálculo dos Coeficientes da $Z_\phi^{(1)}$ via Renormalização da $\Gamma_{11}^{(2)}$

Obtêm-se os coeficientes da $Z_\phi^{(1)}$ à ordem de 2 loops, multiplicando-se $Z_\phi^{(1)}$ pela $\Gamma_{11}^{(2)}$ à ordem de 2 loops (4.1), onde substitui-se uo por uo(u,v,w) dada por (5.6), vo por vo(u,v,w) dada por (5.8) e wo por wo(u,v,w) dada por (5.10) e exigindo-se que os coeficientes de $Z_\phi^{(1)}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e das divergências de massa.

Então, exigindo-se que:

$$Z_\phi^{(1)} \Gamma_{11}^{(2)}(K, \hat{m}^2, u, v, w, \epsilon) = \bar{\Gamma}_{11,R}^{(2)}(K, u, v, w) \qquad (5.13)$$

seja finita, obtém-se:

$$b_{21} = \frac{5}{36} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{13}{60}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{13}{60}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$b_{22}^{(1)} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}(p-2)^3 \left\{ 1 - \frac{11}{12}\epsilon + \frac{\epsilon^2}{6}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$b_{22}^{(2)} = -\frac{1}{3\epsilon^2}(p-2)^2 c^4 \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{1}{24}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$b_{23} = \frac{c^4}{9\epsilon^2}(p-2) \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{24} - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{3\epsilon^2}{8}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$b_{24} = \frac{5}{36\epsilon^2} c^4 p(p-2)(p-3) \left\{ 1 - \frac{13}{60}\epsilon \right\} \qquad (5.14)$$

5.2.2.2 - Cálculo dos Coeficientes da $Z_{\phi}^{(2)}$ via Renormalização da $\Gamma_{qq}^{(2)}$

Obtém-se os coeficientes da $Z_{\phi}^{(2)}$ à ordem de 2 loops, multiplicando-se $Z_{\phi}^{(2)}$ pela $\Gamma_{qq}^{(2)}$ à ordem de 2 loops (4.2), onde substitui-se uo por uo(u,v,w) dada por (5.6), vo por vo(u,v,w) dada por (5.8) e wo por wo(u,v,w) dada por (5.10) e exigindo-se que os coeficientes de $Z_{\phi}^{(2)}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e das divergências em massa.

Então, exigindo-se que:

$$Z_{\phi}^{(2)}\,\Gamma_{qq}^{(2)}(k,u,v,w,\hat{m}^2,\epsilon) = \Gamma_{qq,R}^{(2)}(k,u,v,w) \qquad (5.15)$$

seja finita, obtém-se:

$$\tilde{b}_{21}^{(1)} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}(p-2)^2\left\{1-\frac{11}{12}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{11}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{21}^{(2)} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}(p-2)\left\{1-\frac{\epsilon}{3}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{3}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{22} = \frac{c^4}{\epsilon^2}\left\{-\frac{1}{36}(p-2)\left[1-\frac{11}{12}\epsilon+\frac{7}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{18}-\frac{13}{216}\epsilon-\frac{5}{18}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{13}{216}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{5}{72}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{b}_{23} = \frac{3}{4}p(p-3)\frac{c^4}{\epsilon^2}\left\{1-\frac{29}{108}\epsilon-\frac{16}{27}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)-\frac{49}{324}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{5\epsilon^2}{108}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right.$$

$$\tilde{b}_{24} = -\frac{c^4}{36\epsilon^2}p^2(p-3)\left\{\left[1-\frac{11}{12}\epsilon\right](p-3)+\left[-6+2\epsilon\right](p-4)\right\} \qquad (5.16)$$

5.2.2.3 - Cálculo dos Coeficientes de $u_0 = u_0(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{111}$

Obtém-se os coeficientes de uo = uo(u,v,w) multiplicando-se $[Z_\phi^{(1)}]^{3/2}$ à ordem de 2 loops (5.11) pela expressão para $\Gamma^{(3)}_{111}$ à ordem de 2 loops (4.3), onde substitui-se vo por vo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.8), wo por wo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.10) e uo pela expressão formal para uo(u,v,w) à ordem de 2 loops (4.12), exigindo que os coeficientes de uo(u,v,w) sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{111,R}$.

Então, exigindo-se que:

$$Z_\phi^{(1)}\, \Gamma^{(3)}_{111}(k_i, u, v, w, \hat{m}^2, \epsilon) = \Gamma^{(3)}_{111R}(k_i, u, v, w) \qquad (5.17)$$

seja finita, obtém-se:

$$a_4^{(1)} = \frac{27}{32\epsilon^2} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{125}{243}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{125}{243}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4} \ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_5^{(1)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2} (p-2)^3 \left\{ \frac{17}{48} - \frac{31}{288}\epsilon - \frac{7}{96}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{7}{144}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{5}{96}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+\right.$$

$$a_6^{(1)} = -\frac{3}{4\epsilon^2}(p-2)^2 c^4 \left\{ 1 - \frac{5}{18}\epsilon + \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{35}{36}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_7^{(1)} = \frac{c^4}{6\epsilon^2}(p-2)\left\{ \frac{5}{16}(p-2) + 8 - \frac{161}{24}\epsilon - 8\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{93}{9}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) \right.$$

$$\left. + 2\epsilon^2\ln^2(m^2+1) \right\}$$

$$a_8^{(1)} = -\frac{5}{24\epsilon^2} c^4 p(p-2)(p-3)\left\{ 1 - \frac{13}{60}\epsilon \right\}$$

$$a_9^{(1)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2}\left\{ -\frac{(p-2)}{4} + 1 - \frac{\epsilon}{12} - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{1}{6}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) \right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_{10}^{(1)} = -\frac{5}{4\epsilon^2} p(p-3) c^4 \left\{ 1 - \frac{23}{60}\epsilon \right\} \qquad (5.18)$$

5.2.2.4 - Cálculo dos Coeficientes de $v_0 = v_0(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{1\phi\phi}$

Obtêm-se os coeficientes de vo = vo(u,v,w) multiplicando-se $[Z^{(1)}_\phi]^{1/2}$ $[Z^{(2)}_\phi]$ à ordem de 2 loops (5.14) e (5.16) pela expressão para $\Gamma^{(3)}_{1\phi\phi}$ à ordem de 2 loops (4.4), onde substitui-se uo por uo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.6), wo por wo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.10) e vo pela expressão formal para vo (u,v,w) à ordem de 2 loops (4.13), exigindo-se que os coeficientes de vo(u,v,w) sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{1\phi\phi,R}$.

Então, exigindo-se que:

$$(Z^{(1)}_\phi)^{1/2} Z^{(2)}_\phi \Gamma^{(3)}_{1\phi\phi}(k_i, u, v, w, \hat m^2, \epsilon) = \Gamma^{(3)}_{1\phi\phi,R}(k_i, u, v, w) \qquad (5.19)$$

seja finita, obtêm-se:

$$a_5^{(2)} = -\frac{17}{288\epsilon^2} c^4 (p-2)^4 \left\{ 1 - \frac{13}{51}\epsilon - \epsilon \ln(\hat m^2+1) + \frac{13}{51}\epsilon^2 \ln(\hat m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat m^2+1) \right\}$$

$$a_6^{(2)} = -\frac{c^4 (p-2)^3}{4\epsilon^2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon}{9} - \epsilon \ln(\hat m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{9}\ln(\hat m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat m^2+1) \right\}$$

$$a_7^{(2)} = \frac{c^4}{\epsilon^2}\frac{(p-2)^2}{36} \left\{ 32 - \frac{314}{12}\epsilon - 32\epsilon\ln(\hat m^2+1) + \frac{314}{12}\epsilon^2\ln(\hat m^2+1) + \frac{32}{4}\epsilon^2 \ln^2(\hat m^2 \right.$$

$$\left. + (p-2)\left[\frac{5}{4} - \frac{11}{24}\epsilon - \frac{3}{8}\epsilon \ln(\hat m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{12}\ln(\hat m^2+1) - \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(m^2+1) \right] \right\}$$

$$a_8^{(2)} = -\frac{5}{72\epsilon^2} c^4\, p(p-2)^2(p-3)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_9^{(2)} = -\frac{c^4}{\epsilon^2}(p-2)\left\{\frac{1}{6}\left[10 - \frac{5}{2}\epsilon - 10\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{2}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{10}{4}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2\right.\right.$$

$$\left.+(p-2)\left[-\frac{5}{12} + \frac{11}{72}\epsilon + \frac{\epsilon}{8}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{144}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{24}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}\right.$$

$$a_{10}^{(2)} = -\frac{5}{4\epsilon^2} c^4\, p(p-2)(p-3)\left\{1 - \frac{83}{180}\epsilon - \frac{1}{3}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{53}{180}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)\right.$$

$$\left. - \frac{\epsilon^2}{12}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_{11}^{(2)} = \frac{c^4}{6\epsilon^2}\left\{\frac{(p-2)^2}{16} + (p-2)\left[2 - \frac{43}{72}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) \frac{59}{72}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{3}{4}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}\right.\right.$$

$$\left. + 4 - \frac{67}{18}\epsilon - 4\epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{67}{18}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_{12}^{(2)} = \frac{c^4}{3\epsilon^2} p(p-3)\left\{(p-2)\left[-\frac{5}{12} + \frac{13}{288}\epsilon\right] + \frac{115}{12} - \frac{239}{12}\epsilon - \frac{85}{12}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)\right.$$

$$\left. + \frac{889}{144}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{55}{48}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_{13}^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2} c^4 p^2(p-3)\left[(p-4)\left[-5 + \frac{8}{3}\epsilon\right] + (p-3)\left[-\frac{5}{6} + \frac{\epsilon}{18}\right]\right\} \qquad (5.20)$$

5.2.2.5 - Cálculo dos Coeficientes de $w_o = w_o(u,v,w)$ via Renormalização da $\Gamma^{(3)}_{\phi\phi\phi}$

Obtém-se os coeficientes de wo = wo(u,v,w) multiplicando-se $[Z^{(2)}_{\phi}]^{3/2}$ à ordem de 2 loops (5.16) pela expressão para a $\Gamma^{(3)}_{\phi\phi\phi}$ à ordem de 2 loops (4.5), substituindo-se uo por uo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.6), vo por vo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.8) e wo pela expressão formal para wo(u,v,w) à ordem de 2 loops (4.14), exigindo-se que os coeficientes de wo(u,v,w) sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma^{(3)}_{\phi\phi\phi;R}$.

Então, exigindo-se que:

$$[Z^{(2)}_{\phi}]^{3/2}\,\Gamma^{(3)}_{\phi\phi\phi}(u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2,k_i) = \Gamma^{(3)}_{\phi\phi\phi,R}(k_i,u,v,w) \quad (5.21)$$

seja finita, obtém-se:

$$a_3^{(3)} = -\frac{5}{24\epsilon^2}c^4(p-2)^2\left\{1-\frac{31}{60}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{31}{60}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_4^{(3)} = -\frac{5}{2\epsilon^2}c^4(p-2)\left\{1-\frac{13}{30}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{13}{30}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$a_5^{(3)} = -\frac{5}{24\epsilon^2} c^4 \left\{ (p-2)\left[1 - \frac{31}{60}\epsilon + \frac{7}{12}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4} \ln^2(\hat{m}^2+1) \right] \right.$$

$$\left. - 23 + \frac{389}{30}\epsilon + 23\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{389}{30}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{23}{4}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$a_6^{(3)} = +\frac{5}{\epsilon^2} c^4 p \left\{ (p-4)\left[1 - \frac{13}{24}\epsilon - \frac{3}{4}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{67}{120}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\epsilon^2}{8} \ln^2(\hat{m}^2+1) \right] + \frac{1}{6}(p-3)\left[1 - \frac{3}{16}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{181}{240}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) \right.$$

$$\left.\left. - \frac{13}{16}\epsilon^2 \ln^2(\hat{m}^2+1) \right]\right\}$$

$$a_7^{(3)} = \frac{c^4}{\epsilon^2} p^2 \left\{ \frac{3}{32}\left[9p^2 - 78p + 169 \right] - \frac{1}{288}\left[125p^2 - 1044p + 2259 \right]\epsilon \right\}$$

$$(5.22)$$

5.2.2.6 - Cálculo dos Coeficientes de $\Gamma^{(2)}_{\phi^2}$ via Renormalização da $\Gamma^{(2,1)}_{qq}$

Obtém-se os coeficientes de $Z^{(2)}_{\phi^2}$ à ordem de 2 loops, multiplicando-se a expressão formal para $Z^{(2)}_{\phi^2}$ (4.11) pela expressão para $\Gamma^{(2,1)}_{qq}$ à ordem de 2 loops (4.7) onde substitui-se uo, vo e wo por suas expressões uo(u,v,w), vo(u,v,w) e wo(u,v,w) à ordem de 1 loop (5.6), (5.7) e (5.8) e exigindo-se que os coeficientes de $Z^{(2)}_{\phi^2}$ sejam tais que absorvam os pólos dimensionais ϵ e as divergências em massa da $\Gamma^{(2,1)}_{qq}$.

Então, exigindo-se que:

$$Z^{(2)}_{\phi^2}\,\Gamma^{(2,1)}_{qq}(k_i,u,v,w,\epsilon,\hat{m}^2) = \Gamma_{qq,R}(k_i,u,v,w) \quad (5.23)$$

seja finita, obtém-se:

$$C_3^{(2)} = -\frac{7}{12\epsilon^2}c^4(p-2)^2\left\{1-\frac{3}{4}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{3}{4}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{3}{7}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$C_4^{(2)} = -\frac{2}{\epsilon^2}c^4(p-2)\left\{1-\frac{\epsilon}{4}-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$C_5^{(2)} = \frac{c^4}{\epsilon^2}\left\{(\frac{25}{6}\left[1-\frac{43}{100}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{43}{100}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{3}{10}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{7}{12}(p-2)\left[1-\frac{3}{4}\epsilon-\frac{5}{7}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{19}{28}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{2}{7}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right]\right\}$$

$$C_6^{(2)} = \frac{79}{12\epsilon^2}c^4p(p-3)\left\{1-\frac{137}{316}\epsilon-\frac{47}{79}\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{121}{316}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{5}{79}\epsilon^2\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$C_7^{(2)} = \frac{c^4}{\epsilon^2}p^2(p-3)\left\{\frac{1}{4}(p-3)\left[1+\frac{1}{12}\epsilon\right]+(p-4)\right\} \quad (5.24)$$

5.3 - Pontos Fixos

De posse das constantes de acoplamento renormalizadas, calculam-se as funções β de Wilson, usando a expressão da referência (10), ou seja:

$$\beta_g = \left(k \frac{\partial g_g}{\partial k} \right)_{\eta\omega} \qquad g = u, v, w$$

η, ω = outras componentes

$$g_g = k^{\epsilon/2} g \qquad ; \qquad g = u, v, w \qquad (5.25)$$

Ā ordem de 2 loops são calculadas usando as expressões para as constantes de acoplamento renormalizadas, multiplicando-se por $k^{\epsilon/2}$ e derivando-se termo a termo. Desta derivação, obtêm-se um sistema cujas incógnitas são β_u, β_v e β_w. Resolvendo-se este sistema de equações, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
\beta_u = -\frac{\epsilon}{2}\Bigg\{ & u + \frac{3}{2\epsilon} c^2(p-2)^2 \frac{u^3}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{c^2}{2\epsilon}(p-2)uv^2 + \frac{125}{72\epsilon} c^4 (p-2)^4 \frac{u^5}{(\hat{m}^2+1)} + \\
& \left[-\frac{5}{8} + \frac{7}{36(\hat{m}^2+1)} + \frac{5\ln(\hat{m}^2+1)}{12(\hat{m}^2+1)}\right] \frac{c^4}{\epsilon}(p-2)^3 u^3 v^2 + \left[-\frac{15}{4} + \frac{35}{12(\hat{m}^2+1)} + \frac{3\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)}\right] \\
& \frac{c^4}{\epsilon}(p-2)^2 u^2 v^3 + \left[-\frac{59}{18} + \frac{93}{12(\hat{m}^2+1)} + \frac{8\ln(\hat{m}^2+1)}{3(\hat{m}^2+1)}\right] \frac{c^4}{\epsilon}(p-2)uv^4 - \frac{13}{72\epsilon} c^4 \\
& p(p-2)(p-3)\, uv^2w^2 + \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3(\hat{m}^2+1)} - \frac{2\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)}\right] \frac{c^4}{\epsilon}(p-2)v^5 \\
& - \frac{23}{12\epsilon} c^4 p(p-3)\, v^3 w^2 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_v = -\frac{\epsilon}{2}\Bigg\{ & v - \frac{1}{6\epsilon} c^2 (p-2)^2 \frac{u^2 v}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{4}{3\epsilon} c^2 \frac{v^3}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{1}{6\epsilon} c^2 (p-2) v^3 + \frac{5}{3\epsilon} c^2 p(p-3) v w^2 \\
& - \frac{2}{\epsilon} c^2 (p-2) \frac{uv^2}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{13}{216\epsilon} c^4 (p-2)^4 \frac{u^4 v}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{1}{9\epsilon} c^4 (p-2)^3 \frac{u^3 v^2}{(\hat{m}^2+1)} + \Bigg[\frac{157}{54(\hat{m}^2+1)} \\
& + (p-2)\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{108(\hat{m}^2+1)} - \frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{36(\hat{m}^2+1)}\right)\Bigg] \frac{c^4}{\epsilon}(p-2)^2 u^2 v^3 + \Bigg[-\frac{5}{3(\hat{m}^2+1)} + (p-2)\Bigg(\frac{7}{12} \\
& + \frac{1}{36(\hat{m}^2+1)} - \frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{3(\hat{m}^2+1)}\Bigg) \frac{c^4}{\epsilon}(p-2) uv^4 + \left[-\frac{5}{6} - \frac{53}{36(\hat{m}^2+1)} + \frac{5\ln(\hat{m}^2+1)}{6(\hat{m}^2+1)}\right] \frac{c^4}{\epsilon} \\
& p(p-2)(p-3)\, uv^2w^2 + \left[\frac{67}{27} + (p-2)\left(\frac{17}{18} - \frac{59}{108(\hat{m}^2+1)} - \frac{\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)}\right)\right] \frac{c^4}{\epsilon} v^5 + \Bigg[-\frac{13}{216} \\
& (p-2) + \frac{889}{108(\hat{m}^2+1)} - \frac{43}{27}\Bigg] \frac{c^4}{\epsilon} p(p-3) v^3 w^2 + \frac{2}{9}\left[8(p-4) + \frac{1}{12}(p-3)\right] \frac{c^4}{\epsilon} p^2 (p-3) v w^4 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_w = -\frac{\epsilon}{2}\Bigg\{ & w + \frac{5}{\epsilon} c^2 \frac{v^2 w}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{c^2}{2\epsilon} p(13-3p) w^3 - \frac{31}{72\epsilon} c^4 (p-2)^2 \frac{u^2 v^2 w}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{13}{3\epsilon} c^4 \\
& (p-2) \frac{uv^3 w}{(\hat{m}^2+1)} + \left[\frac{389}{36(\hat{m}^2+1)} + (p-2)\left(+\frac{1}{16} - \frac{35}{72(\hat{m}^2+1)} + \frac{5\ln(\hat{m}^2+1)}{12(\hat{m}^2+1)}\right)\right] \frac{c^4}{\epsilon} v^4 w + \\
& + \Bigg[p(p-4)\left(-\frac{1}{3} + \frac{67}{6(\hat{m}^2+1)} + \frac{5\ln(\hat{m}^2+1)}{(\hat{m}^2+1)}\right] + p(p-3)\left[-\frac{17}{9} + \frac{181}{72(\hat{m}^2+1)} - \frac{65\ln(\hat{m}^2+1)}{12(\hat{m}^2+1)}\right]\Bigg] \\
& \frac{c^4}{\epsilon} v^2 w^3 + \frac{1}{72\epsilon} c^4 p^2 (125p^2 - 1044p + 2259) w^5 \Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (5.26)
$$

Dos zeros das funções β de Wilson saem os pontos fixos como foi demonstrado por Amit[10]. Por simplicidade, os pontos fixos serão obtidos, usando as funções β até a ordem de 1 loop, ou seja,

$$\beta_u = -\frac{\epsilon}{2}u - \frac{3}{4}(p-2)^2 c^2 \frac{u^3}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{1}{4}(p-2)c^2 u v^2 + c^2 v^3$$

$$\beta = -\frac{\epsilon u}{2} - \frac{3}{4}(p-2)^2 c^2 u^3 + \frac{1}{4}(p-2)c^2 u \mu^2 + c u^3$$

$$\beta_v = -\frac{\epsilon}{2}v + \frac{1}{12}(p-2)^2 c^2 \frac{u^2 v}{(\hat{m}^2+1)} - \frac{2}{3} c^2 \frac{v^3}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{1}{12} c^2 (p-2) v^3$$
$$- \frac{5}{6} c^2 p(p-3)\, v w^2 + (p-2) c^2 \frac{u v^2}{(\hat{m}^2+1)}$$

$$\beta_w = -\frac{\epsilon}{2}w - \frac{5}{2} c^2 C^2 \frac{v^2 w}{(\hat{m}^2+1)} + \frac{1}{4} c^2 p(13-3p)\, w^3$$

$$(5.27)$$

com $\hat{m}^2 = 0$ e $u = v = w$ obtém-se a função β da teoria simétrica.

As expressões até aqui obtidas valem tanto para $\bar{m}^2 \to \infty$ como para $m^2 \to 0$. Neste último caso os resultados obtidos são idênticos aos obtidos na teoria simétrica[17].

Há quatro tipos de pontos fixos:

a) Ponto Fixo I: $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w \neq 0$

b) Ponto Fixo II: $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w = 0$

c) Ponto Fixo III: $u = v = 0$ $w \neq 0$

d) Ponto Fixo IV: $u = v = w = 0$

Os pontos fixos I e II (ver da figura 5.1 até a figura 5.5) apresentam comportamento semelhante. Muito embora sejam possíveis e estáveis geram no limite de $m^2 \to \infty$ expoentes críticos η e ν^{-1} gaussianos.

Para o caso $w \neq 0$ e $u = v = 0$ aparecem pontos fixos para $1 < p < \frac{13}{3}$ como pode ser verificado (ver figura 5.3) na equação (5.28). À ordem de 2 loops este ponto fixo não apresenta grande variação de seu valor (ver figura 5.3), demonstrando que esta é apenas uma correção. À ordem de 1 loop, este resultado corresponde exatamente ao obtido por Walter Theumann para o caso de haver só quebra de simetria trilinear[15].

$$w^{*2} = \frac{2(p-1)}{13-5p}\,\epsilon \qquad (5.28)$$

O ponto fixo do tipo IV, ou seja, $w = v = u = 0$ é o ponto fixo trivial. É instável.

No limite de $p = 3$ estados, ou seja, no caso de haver uma componente transversal e uma longitudinal, o sistema compor ta-se como Ising, ou seja, como se houvesse dois estados. O ponto fixo III reduz os acoplamentos $D_{111}\ u = 0$, $D_{122}\ v = 0$ e $D_{222}\ w = 0$ pois $D_{222} = 0$ e torna-se necessário considerarem-se termos de ordem superior no hamiltoniano. Observa-se aí que a diferença entre o que ocorre quando se quebra a simetria favorecendo o ordenamento segundo uma componente longitudinal ou segundo uma transversal está em que, no primeiro caso, o sistema se ordenará em um estado e, no segundo, em um de dois estados possíveis.

Comparando-se o resultado obtido para o caso simétrico, nesta representação,[15] com o ponto fixo do tipo III à ordem de 1 loop, observa-se que este último nada mais é que um sistema simétrico com p - 1 estados, ou seja, p - 2 componentes, ou seja, a solução simétrica dada por:[10]

$$w^{*2}_{SIM} = \frac{2p}{10-3p}\ \epsilon \qquad (5.29)$$

equivale à solução do tipo III, dada por:

$$w^{*2}_{III} = \frac{2(p-1)}{13-3p}\ \epsilon \qquad (5.30)$$

substituindo-se p por (p - 1).

5.4 - Estabilidade dos Pontos Fixos

Como pode ser obtido de (15) a estabilidade dos pontos fixos é dada pelos autovalores da equação:

$$\lambda R = \Lambda R$$

$$\Lambda_{\alpha r} = \left(\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial r} \right)_{PF} \qquad r = u, v, w \qquad (5.31)$$

onde autovalores positivos indicam a estabilidade. A direção da estabilidade é determinada pelos autovetores R, que não serão determinados neste trabalho. Aqui serão estudadas somente a estabilidade do ponto fixo $u = v = 0$ e $w \neq 0$.

Ponto fixo do tipo III: $w \neq 0$, $u = v = 0$. Apresenta estabilidade em uma direção como pode ser verificado pela tabela abaixo:

TABELA 5.1 - Estabilidade do ponto fixo III à ordem de um loop

p	w_1^*	λ_0	λ_1	λ_2
2	0.16	-0.05	-0.026	0.1
2.5	0.23	-0.05	-0.034	0.1
3	0.31	-0.05	-0.05	0.1
3.5	0.44	-0.05	-0.082	0.1
4	0.8	-0.05	-0.216	0.1

À ordem de 2 loops, continua aparecendo estabilidade somente em uma direção. Para $\epsilon = 0.1$, obtém-se (ver tabela 5.2):

TABELA 5.2 - Estabilidade do ponto fixo III à ordem de dois loops.

p	w_2^*	λ_0	λ_1	λ_2
2	0.174	-0.05	-0.027	0.09
2.5	0.239	-0.05	-0.034	0.09
3	0.324	-0.05	-0.05	0.09
3.5	0.454	-0.05	-0.082	0.09
4	0.737	-0.05	-0.217	0.09

5.5 - Expoentes Críticos

O expoente crítico da função de correlação na temperatura crítica é η e é dado por[10]:

$$\eta = \gamma_\phi^{(2)}(u^*, v^*, w^*) = k \frac{\partial}{\partial k} \left[\ln Z_\phi^{(2)} \right] \qquad (5.32)$$

À ordem de 1 loop é dada por:

$$\gamma_\phi^{(2)} = \frac{1}{3} c^2 \frac{v^2}{(\hat{m}^2 + 1)} + \frac{1}{6} c^2 p(p-3) w^2 \qquad (5.33)$$

que calculado no ponto fixo III fornece à ordem de 1 loop o mesmo resultado que o obtido por Walter K.Theumann[15] (ver na figura 5.4 e na tabela 5.3).

TABELA 5.3 - Expoente crítico da função de correlação à ordem de um loop.

p	w_1^*	η
2	0.16	-0.004
2.5	0.23	-0.003
3	0.31	0
3.5	0.44	0.0064
4	0.774	0.033

À ordem de 2 loops, obtém-se (ver figura 5.4 e tabela 5.4).

$$\eta = \gamma_\phi^{(2)}(w^*) = c^2 p(p-3)\, w^{*2} - \frac{11}{216} p^2 (p-3)^2 c^4 w^{*4} + \frac{p^2 (p-3)(p-4)}{9} c^4 w^{*4} \qquad (5.34)$$

TABELA 5.4 - Expoente crítico da função de correlação à ordem de dois loops.

p	w_2^*	η
2	0.174	-0.005
2.5	0.239	-0.0032
3	0.324	0
3.5	0.454	0.0067
4	0.737	0.028

apenas correções aos resultados obtidos à ordem de 1 loop, não chegando a produzir alterações no comportamento dos expoentes.

A tabela anterior mostra um expoente negativo para $p < 3$, pois realmente não há componente transversal no caso de haver um número de estados menor que 3. Em $p = 3$, observa-se, como o previsto, o resultado do modelo gaussiano, ou seja, $\eta = 0$. Para $\frac{13}{3} > p > 3$, o resultado coincide com o obtido para a teoria simétrica à ordem de 1 loop, nesta representação[15], para $p - 1$ estados, ou seja:

$$\eta_{SIM} = \frac{(p-2)}{3(10-3p)}\,\epsilon \qquad (5.35)$$

que, para um número de estados $(p-1)$, fornece o resultado para o ponto fixo III.

$$\eta_{III} = \frac{(p-3)}{3(13-3p)}\,\epsilon \qquad (5.36)$$

O expoente crítico do comprimento de correlação em regiões próximas à temperatura crítica, ou seja, ν^{-1} é dado por[10]:

$$\nu^{-1} = 2 + \gamma^{(2)}_{\phi^2}(u^*, v^*, w^*) - \gamma^{(2)}_{\phi}(u^*, v^*, w^*) \qquad (5.37)$$

onde

$$\gamma^{(2)}_{\phi^2} = \left[k\, \frac{\partial \ln Z^{(2)}_{\phi^2}}{\partial k} \right]_{PF} \qquad (5.38)$$

À ordem de 1 loop, $\gamma_{\phi^2}^{(2)}$ é dada por:

$$\gamma_{\phi^2}^{(2)} = 6\,\gamma_{\phi}^{(2)} \qquad (5.39)$$

Para o ponto fixo do tipo III, à ordem de 1 loop, obtêm-se o mesmo resultado que o obtido por Walter Theumann, só com a quebra de simetria trilinear sem quebra de simetria quadrática[15] (ver tabela 5.5)

TABELA 5.5 - Expoentes críticos η e ν^{-1} à ordem de um loop.

p	w_1^*	η	ν^{-1}
2	0.16	-0.004	1.98
2.5	0.23	-0.003	1.985
3	0.31	0	2
3.5	0.44	0.006	2.03
4	0.8	0.03	2.15

À ordem de 2 loops, obtêm-se (ver figura 5.5 e tabela 5.6)

$$\gamma_{\phi^2}^{(2)} = p(p-3)\,c^2 w^{*2} - \frac{1}{24}\,c^4 p^2 (p-3)^2 w^{*4} \qquad (5.40)$$

TABELA 5.6 - Expoentes críticos η e ν^{-1} à ordem de dois loops.

p	w_2^*	η	(w^*)	ν^{-1}
2	0.174	-0.005	-0.03	1.975
2.5	0.239	-0.0032	-0.019	1.9842
3	0.324	0	0	2
3.5	0.454	0.0067	0.04	2.0333
4	0.737	0.028	0.179	2.151

apenas correções aos resultados obtidos à ordem de 1 loop, não chegando a produzir alterações no comportamento dos expoentes.

Igualmente aqui, não há muito sentido em falar-se em $p < 3$ pois não há componente transversal. Em $p = 3$ surge o resultado para o modelo gaussiano. Igualmente o resultado para $\frac{13}{3} > p > 3$ fornece o resultado para a teoria simétrica com $p - 1$ estados, ou seja, o resultado para a teoria simétrica[15] à ordem de 1 loop:

$$\nu^{-1}_{SIM} = 2 + \frac{5(p-2)}{3(10-3p)}\,\epsilon \qquad (5.41)$$

para um número de estados $(p - 1)$, fornece o expoente ν^{-1} para o ponto fixo III, dado por:

$$\nu^{-1}_{III} = 2 + \frac{5(p-3)}{3(13-3p)}\,\epsilon \qquad (5.42)$$

Estudos adicionais podem ser feitos para determinar, via cálculo livre com teoria de campo médio, se realmente entre $\frac{13}{3} > p > 1$ a transição, para cada um destes p's, é realmente de segunda ordem ou se há um "ponto spinodal".

Outra análise deixada para posteriori é o estudo dos pontos críticos dos tipos I e II.

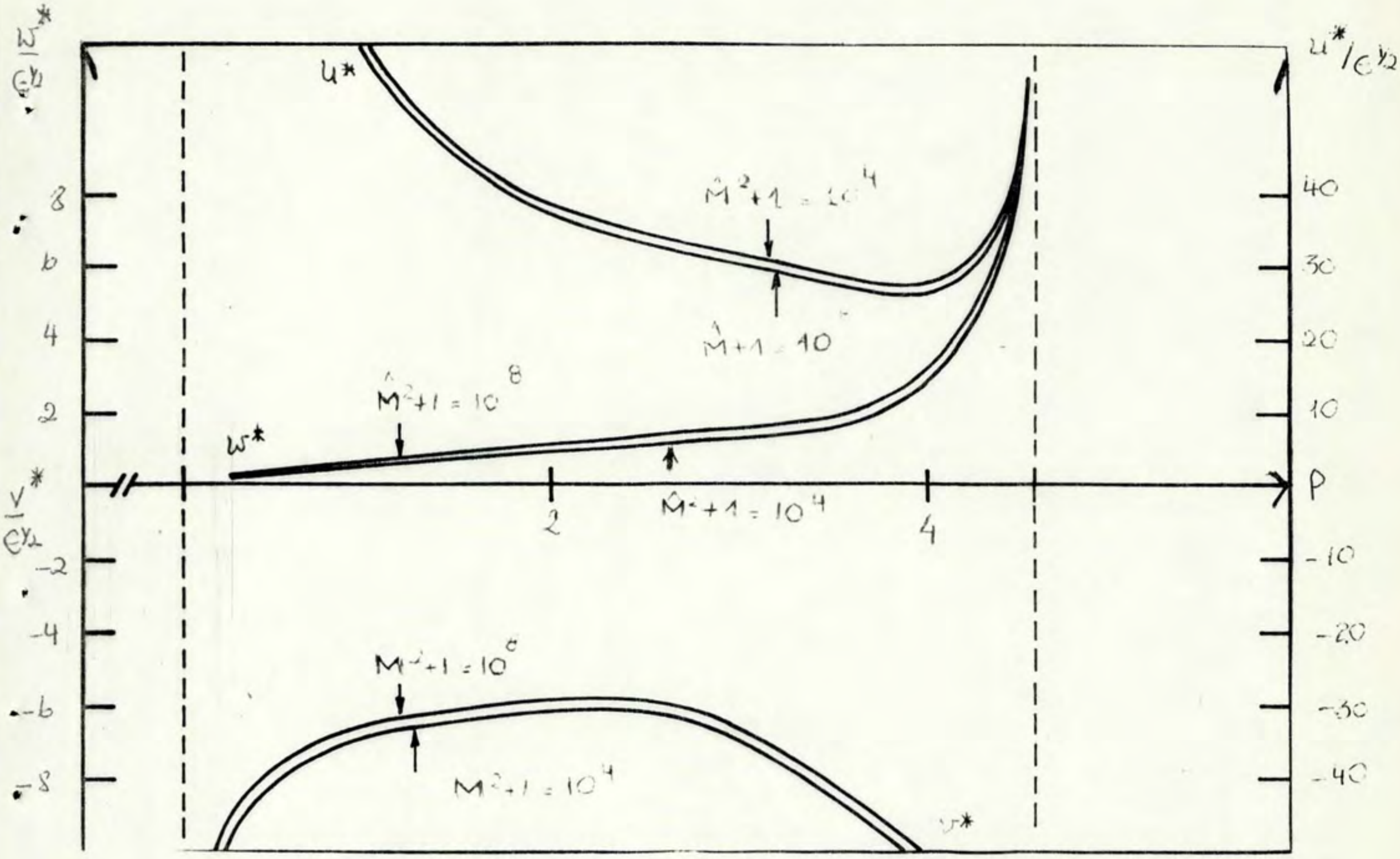


FIGURA 5.1 - Gráfico relativo ao ponto fixo I - Plota-se $u^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$, $v^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ e $w^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ à ordem de um loop para dois valores de massa 10^8 e 10^4

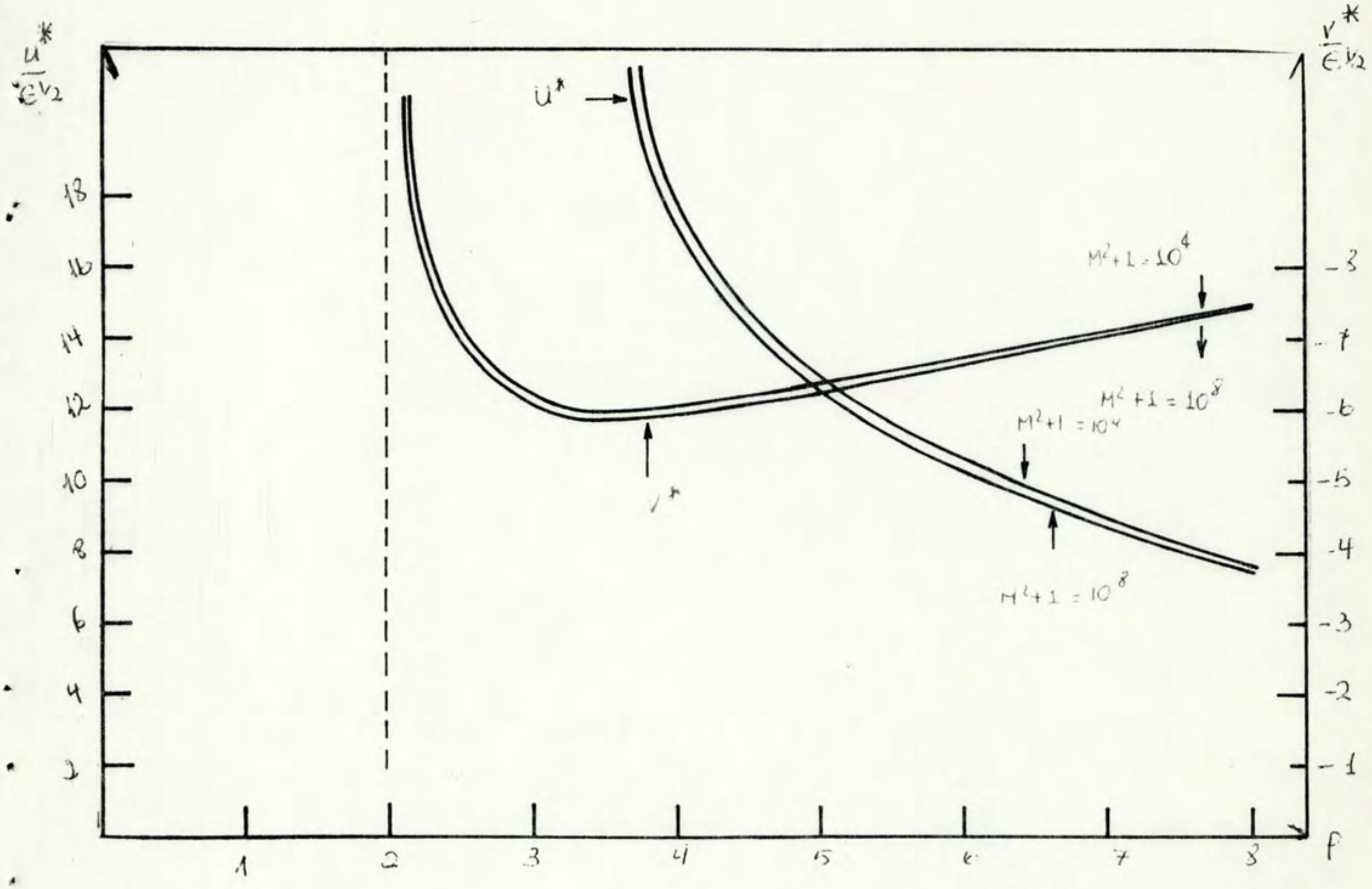


FIGURA 5.2 – Gráfico relativo ao ponto fixo II. Plotam-se $u^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ e $v^*/\epsilon^{1/2} \times \rho$ à ordem de um loop para dois valores de massa. 10^8 e 10^4

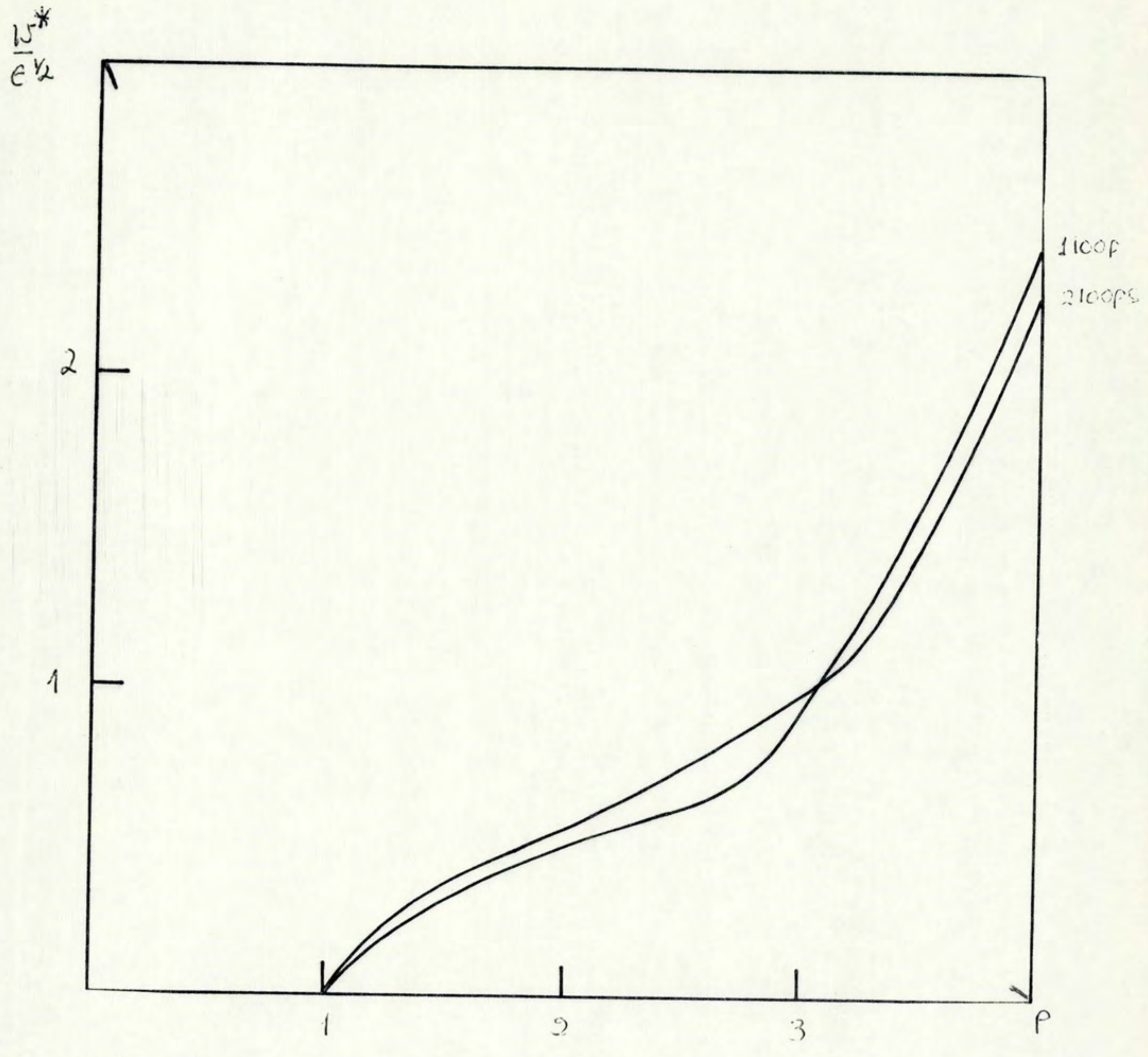


FIGURA 5.3 – Gráfico relativo ao ponto fixo III. Plota-se $w^*/\epsilon^{1/2} \times p$ à ordem de um e dois loops. Toma-se $\epsilon = 0.1$

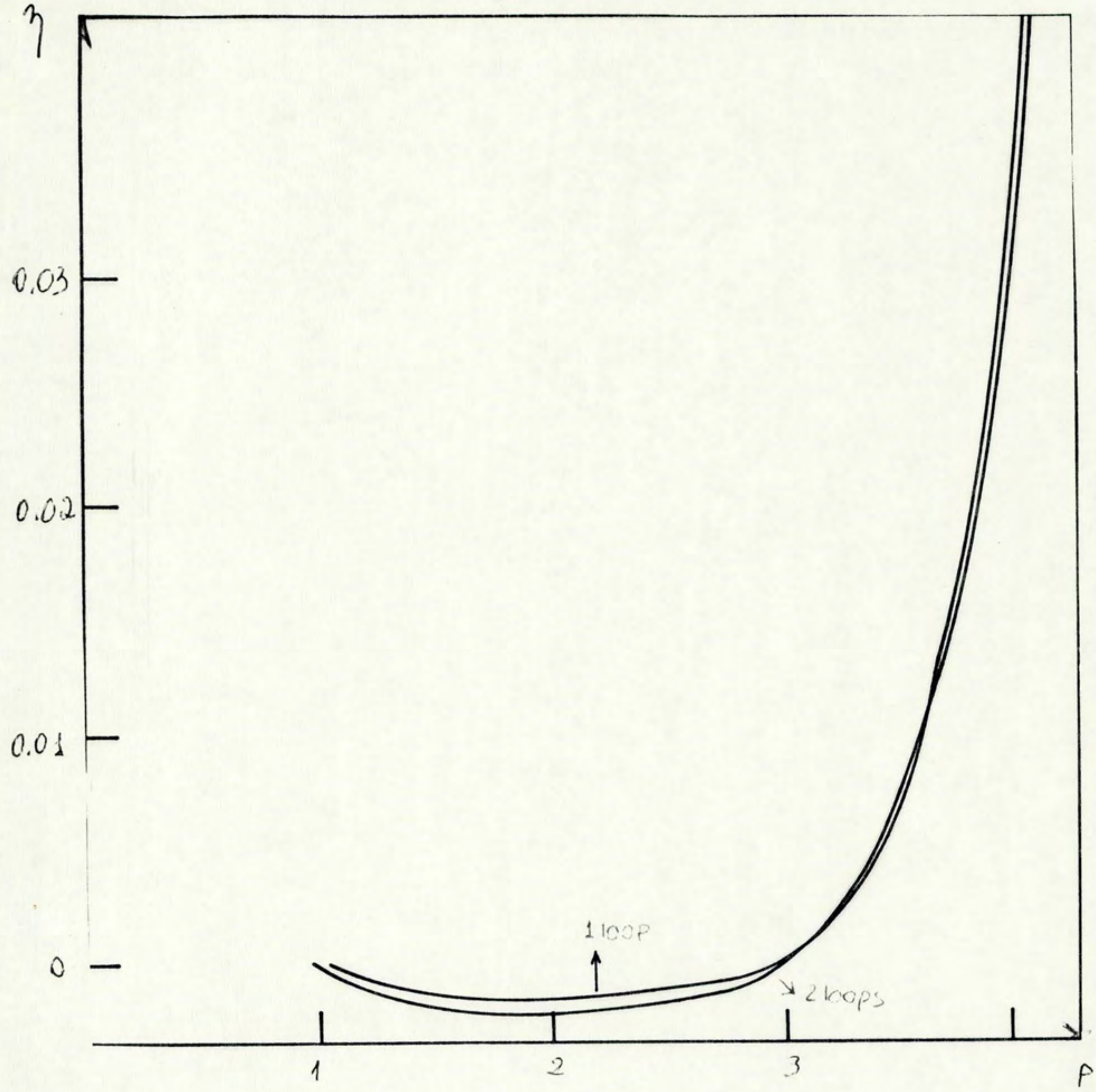


FIGURA 5.4 - Gráfico $\eta \times p$ para o ponto fixo III

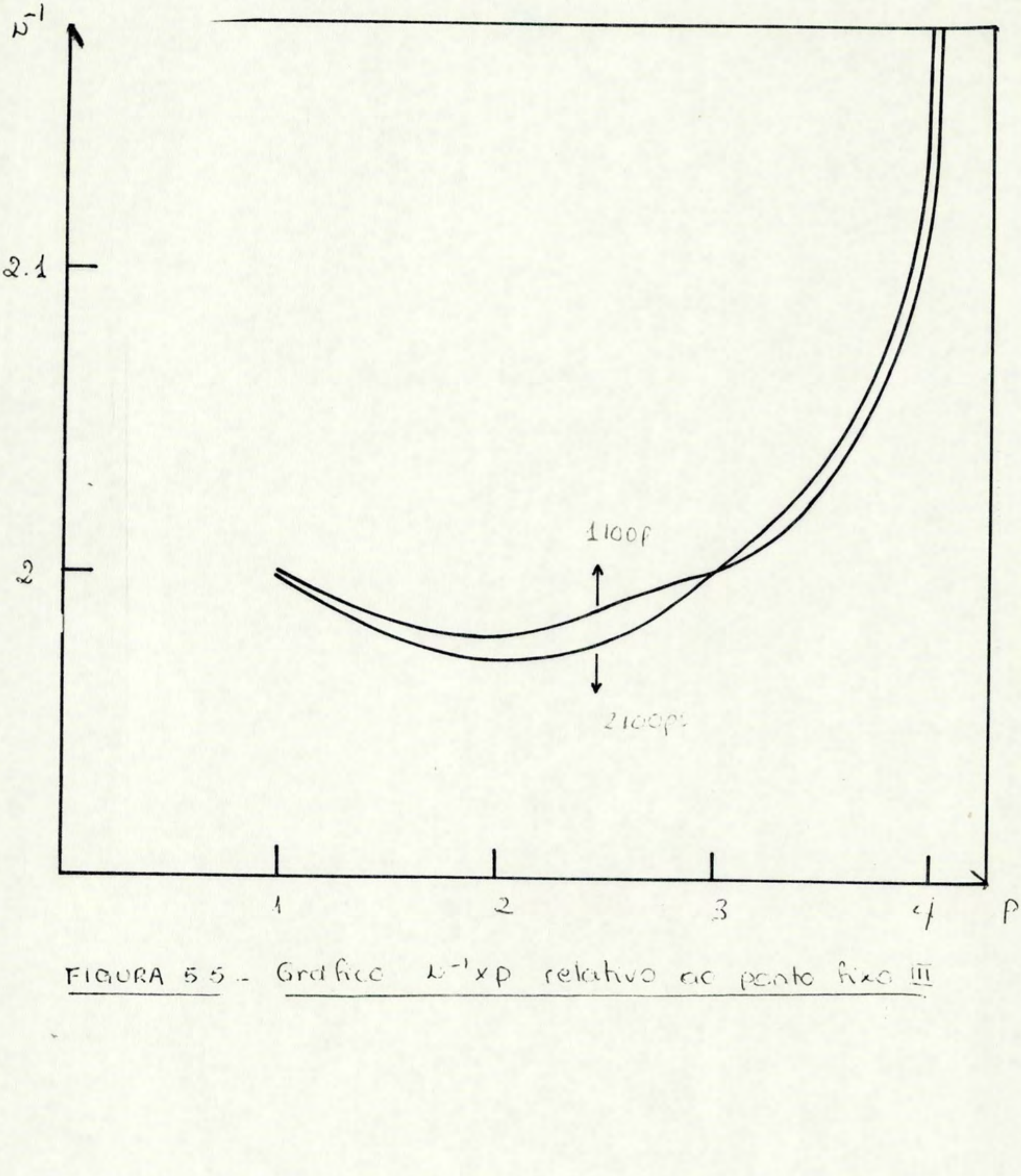


FIGURA 5.5 - Grafico $\nu^{-1} \times p$ relativo ao ponto fixo III

6 - CONCLUSÕES

Esta dissertação teve por objetivo o estudo das transições de fase do modelo de Potts com quebra de simetria. Partiu-se, para tanto, de sua formulação discreta usando um hamiltoniano para um sistema de sítios com diferentes termos de troca para as componentes de spin e, através da transformação de H-S[8], obteve-se um hamiltoniano contínuo com quebra de simetria entre as componentes dos campos. O hamiltoniano contínuo apresenta quebra de simetria no termo quadrático e trilinear de mesma ordem, não podendo-se desprezar nenhuma delas. Tal quebra de simetria indica que o ordenamento se dará favorecendo alguma(s) componente(s) frente às outras. Escolheu-se a representação de Priest e Lubensky para representar os vetores de Potts. Escolheu-se também uma quebra de simetria específica, separando os p - 1 componentes em 1 longitudinal e p - 2 transversais. O hamiltoniano contínuo obtido no capítulo 2 descreve tanto o caso de quebra de simetria favorecendo o ordenamento longitudinal quanto o caso de quebra de simetria favorecendo o ordenamento transversal.

Estudou-se, no capítulo 3, a renormalização formal do modelo de Potts simétrico e com quebra de simetria. A renormalização do modelo de Potts apresenta algumas diferenças se a compararmos com a teoria em ϕ^4. Por exemplo:

i) A renormalização de massa intermediária, na teoria em ϕ^3, não elimina diagramas com inserção de massa existentes na função de vértice sem renormalizar o que ocorre no modelo em ϕ^4.

ii) A renormalização de massa com função de renormalização à ordem de 1 loop produz contribuições à ordem de 2 loops para a teoria em ϕ^3 e não em ϕ^4.

Cabem ressaltar algumas semelhanças entre a teoria em ϕ^3 e a em ϕ^4 como, por exemplo, ambas necessitam do mesmo esquema de renormalização (massa, constante de acoplamento, função de onda), ambas geram diagramas desconexos no processo de renormalização. Tanto a $\Gamma^{(4)}$ como a $\Gamma^{(3)}$ são finitas mesmo sem renormalização com função de renormalização Z_ϕ.

A renormalização formal do modelo de Potts com quebra de simetria segue basicamente o mesmo procedimento da renormalização no caso simétrico. Há uma renormalização para cada massa e mais de uma constante de acoplamento a renormalizar.

Após fazer-se um estudo formal da renormalização do modelo de Potts, necessário para ter conta exatamente das flutuações, com e sem quebra de simetria, passou-se ao cálculo de quantidades físicas para dois casos específicos de modelo de Potts com quebra de simetria.

No capítulo 4, obtém-se o comportamento crítico do modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear tal que favoreça o ordenamento segundo 1 componente longitudinal. A renormalização é feita na temperatura crítica desta componente. Todos os cálculos são feitos para fase desordenada. Como seria de se esperar, a inclusão de flutuações via renormalização gera o comportamento crítico de um modelo de Potts com uma única componente, ou seja, na representação de Priest e Lubensky de um estado. Como só há um estado não há fenômeno crítico já que o sistema se ordena segundo este estado. Tal resultado não é observado à ordem de 1 loop[18], pois a esta ordem a constante de acoplamento dividida pela massa pode ser usada como parâmetro de expansão, encobrindo o fato de que os verdadeiros parâmetros de expansão são os acoplamentos. À ordem de 2 loops, no entanto, verifica-se que este é o bom parâmetro de expansão. Obtêm-se, então, valores altos para os acoplamentos. Tais valores ficam razoáveis tomando-se pequeno. Fazendo-se, no entanto, o cálculo a ordens mais altas no número de loops, obtém-se que devem tomar-se valores cada vez menores para , obtendo-se, a toda ordem no número de loops, $\epsilon = 0$. Não havendo, portanto, ponto fixo.

A importância da obtenção de resultados à ordem de 2 loops está no fato de que somente a esta ordem pode-se estar seguro de qual seja o parâmetro de expansão correto a se utilizar, ou seja, verifica-se que o parâmetro de expansão não contém a massa, só constantes de acoplamento.

Observam-se, portanto, dois comportamentos distintos: sem quebra de simetria $u = v = w = u$, quando o sistema pode se ordenar em qualquer um dos p estados. Ao "ligar-se" a quebra de simetria segundo uma componente, ou seja, segundo um estado na representação de Priest e Lubensky, o sistema fica ordenado nesse estado particular, não havendo mais uma transição de fase com quebra espontânea de simetria.

Para melhor compreender os resultados acima citados, bem como para obter-se o comportamento para quebra de simetria favorecendo mais de uma componente, resolveu-se observar o comportamento crítico do modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear tal que favorecesse o ordenamento segundo $p-2$ componentes transversais. Neste caso, a inclusão de flutuações via renormalização gera um comportamento crítico na fase desordenada idêntico a de um sistema simétrico de $p-1$ estados. No limite de haver uma componente transversal, ou seja, 3 estados, obtém-se um comportamento como se fosse um modelo de Ising (Potts de 2 estados), fornecendo resultados para os expoentes do ponto fixo gaussiano (acoplamentos nulos), muito embora o acoplamento seja não nulo. O hamiltoniano terá o termo em ϕ^3 nulo já que o coeficiente tensorial D_{222} é igual a zero em $p=3$. Novamente devem se levar em conta os termos em ϕ^4 no hamiltoniano.

Os resultados acima citados estão relacionados a um dos pontos fixos, ou seja, $u=0$, $v=0$ e $w \neq 0$. Este ponto fixo apresenta valores para $1 < p < \frac{13}{3}$. Em $p = \frac{13}{3}$ há um "runaway".

O estudo da ordem da transição no modelo de Potts com quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento transversal para este ponto fixo requer uma análise da energia livre que será feita em detalhe posteriormente. Pode-se, entretanto, adiantar-se que, esperando-se que o ordenamento se dê em uma de suas $p-2$ componentes e levando em conta que é comparável ao caso simétrico de $p-1$ estados, espera-se que a transição seja de segunda ordem para $1 < p \leq 3$ e de primeira ordem para $\frac{13}{3} \geq p > 3$, onde este último conjunto de pontos fixos indica ponto spinodal.

O sistema na ausência de quebra de simetria $(m^2 = 0)$, quando $u = v = w = u$, ordena-se em um dos p estados. "Ligando-se" a quebra de simetria haverá um crossover ao comportamento crítico de um sistema de $(p-1)$ componentes que poderá ordenar-se, por quebra espontânea de simetria segundo um dos $(p-2)$ estados correspondentes.

Além do ponto fixo $u = v = 0$ e $w \neq 0$ que gera o comportamento crítico descrito acima, há os pontos fixos $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w = 0$ e $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w \neq 0$ onde um dos acoplamentos é negativo. A compreensão destes pontos fixos só pode ser feita via uma análise da energia livre, que será feita também posteriormente. Observa-se, no entanto, que no limite de $\bar{m}^2 \to \infty$ tais pontos fixos geram expoentes críticos η e ν^{-1} gaussianos.

A importância da obtenção de expressões para as funções de Wilson à ordem de 2 loops está novamente no fato de que só a esta ordem podem-se obter expressões seguras para o parâmetro de expansão, ou seja, verifica-se que não contém a massa.

Do que foi proposto no princípio desta dissertação, ou seja, analisar o comportamento crítico do modelo de Potts na fase desordenada com quebra de simetria entre as componentes, obtiveram-se os seguintes resultados formais:

i) Quebra de simetria entre as componentes de spin no hamiltoniano discreto provoca quebra de simetria entre as componentes dos campos tanto no termo quadrático como no termo trilinear do hamiltoniano contínuo. As duas quebras de simetria são igualmente necessárias.

ii) A renormalização formal do modelo de Potts simétrico e com quebra de simetria requer renormalização de massa, constante de acoplamento e função de renormalização já à ordem de 1 loop. Comparando-se com a teoria em ϕ^4, observa-se que a renormalização de massa não cancela gráficos uma vez que na teoria em ϕ^3, não há gráficos com inserção de massa.

Fazendo-se duas quebras de simetria específicas obtiveram-se os seguintes resultados:

i) A quebra de simetria favorecendo uma única componente (longitudinal ou transversal), na representação de Priest e Lubensky converte o sistema de p estados em um de um estado, no primeiro caso, e de p - 1 estados no segundo.

ii) A quebra de simetria favorecendo p - 2 componentes converte o sistema em um simétrico de p - 1 estados.

iii) Obtêm-se pontos fixos estáveis para $\frac{13}{3} < p < 1$ no caso ponto fixo III ($u = v = 0$ e $w \neq 0$). Como tais pontos fixos, calculam-se expoentes críticos equivalentes aos de uma teoria simétrica de $p - 1 = p'$ estados onde $\frac{13}{3} < p' < 1$.

Ficam, no entanto, algumas questões como por exemplo, a ordem da transição para o ponto fixo $u = 0$, $v = 0$ e $w \neq 0$ e o estudo dos pontos fixos $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w = 0$ e $u \neq 0$, $v \neq 0$ e $w \neq 0$.

ABSTRACT

The renormalization and the critical behavior of the continuum ϕ^3-field theory for the p-state Potts model with broken external symmetry between the state vectors is investigated in the present work. First the continuum model is obtained in standard way from the discrete Potts model. It is shown that broken symmetry in the latter yields quadratic and trilinear symmetry breaking in the continuum model. Next, renormalized perturbation theory is done on the symmetric ϕ^3-field theory to illustrate the renormalization-group procedure and to point out important differences with the usual renormalization of a vector ϕ^4-field theory. Regularization with generalized minimal subtraction, to two-loop order, is then applied to the continuum model, in the representation of Priest and Lubensky, with broken quadratic and trilinear symmetry, in two different cases. One, with symmetry breaking that favors ordering along a single "longitudinal" component of the fields and the other with favored "transverse" ordering. In the first one, only the (unstable) Gaussian fixed point is obtained, a result that remains valid to all orders in perturbation theory and which confirms a physical argument suggesting the absence of a phase transition. The second way of breaking the symmetry yields a crossover to a (p-1)-state symmetric Potts model, with the expected critical exponents η and ν, for general p, provinding a check on the renormalization - regularization procedure.

APÊNDICE A

CÁLCULO DOS COEFICIENTES TENSORIAIS À ORDEM DE 2 LOOPS

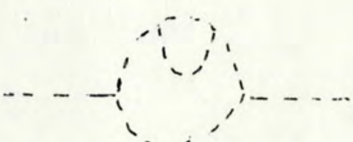
Partindo-se do hamiltoniano contínuo para o modelo de Potts para um sistema com quebra de simetria (2.40) e fazendo teoria de perturbações onde o parâmetro de expansão é o número de loops também equivalente a uma expansão em termos das constantes de acoplamento), obtêm-se funções de vértice I1P via (2.48) como já foi visto anteriormente. Tais funções apresentam integrais que estão diretamente associadas aos propagadores dos loops e coeficientes tensoriais originados pelos $D_{\alpha\beta\gamma}$ e pelos fatores de simetria.

À ordem de 1 loop, os coeficientes tensoriais e as integrais encontram-se calculados nas refs.(15) e (18) respectivamente. À ordem de 2 loops as integrais serão calculadas (regularização dimensional) no apêndice 2. Neste apêndice serão explicitamente calculados os coeficientes tensoriais à ordem de 2 loops que compõe as funções de vértice. Estes coeficientes foram calculados em colaboração com Miguel Gusmão e Walter K.Theumann e conferidos pelos três.

1 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma_{11}^{(2)}$ à Ordem de 2 Loops

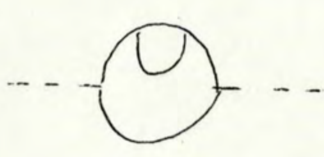
As linhas tracejadas indicam componentes longitudinais (1). Linhas contínuas indicam componentes transversais (P - 2). B_{11} e B_{12} encontram-se em (15).

$$B_{21}^{(1)} = \frac{1}{2} D_{111}^{2} = \frac{1}{2} c^{4}(p-2)^{4} = 2 B_{11}^{2}$$



$$B_{22}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{p-1} D_{111}^{2} D_{1rr}^{2} = \frac{1}{2} c^{4}(p-2)^{3} = 2 B_{11} B_{12}$$

$$B_{23}^{(1)} = \sum_{r=2}^{p-1} D_{1rr}^{4} = c^{4}(p-2) = 2 B_{12} \tilde{B}_{11}$$



$$B_{24}^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{r=2\\ s=2}}^{p-1} D_{1rr}^{2}\left[D_{rss}^{2} + 2 D_{rrs}\right] = \frac{1}{2} c^{4}(p-2)p(p-3)$$
$$= 2 B_{12} \breve{B}_{12}$$

A soma das contribuições dos diagramas da $\Gamma_{11}^{(2)}$ com quebra de simetria deve reproduzir o resultado da teoria simétrica[17]. Isto serve para conferir os resultados obtidos no nosso caso. Com efeito, fazendo

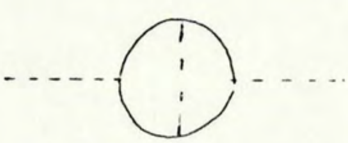
$$B_2^{(1)} = B_{21}^{(1)} + B_{22}^{(1)} + B_{23}^{(1)} + B_{24}^{(1)} = \frac{(p-2)^2}{p^2} = 2B_1^2$$

obtém-se o resultado da teoria simétrica.[17] Da mesma forma conferem-se todos os outros coeficientes tensoriais neste apêndice.

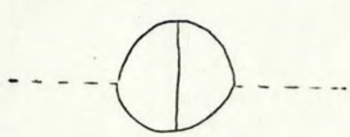
Outros diagramas topologicamente diferentes são:

$$B_{21}^{(2)} = \frac{1}{2} D_{111}^2 = \frac{1}{2} c^4 (p-2)^4 = B_{11} G_{11}$$

$$B_{22}^{(2)} = \sum_{r=2}^{p-1} D_{111} D_{1rr}^3 = -c^4 (p-2)^2 = B_{11} G_{12}$$



$$B_{23}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{p-1} D_{1rr}^4 = \frac{1}{2} c^4 (p-2) = B_{12} \hat{G}_{12}$$



$$B_{24}^{(2)} = \frac{1}{2} \Big[\sum_{\substack{r=2\\ s=2}}^{p-1} D_{1rr}^2 D_{rrs}^2 + \sum_{r=2} D_{1rr} D_{rrr} + \sum_{\substack{r=2\\ s=2}}^{p-1} D_{1rr} D_{1ss} D_{rss}^2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2} c^4 p(p-2)(p-3) = B_{12} \hat{G}_{13}$$

e a soma dá

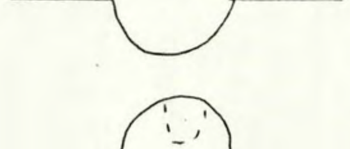
$$B^{(2)}_{21} + B^{(2)}_{22} + B^{(2)}_{23} + B^{(2)}_{24} = \frac{(p-2)(p-3)}{p^2} = B_1 G_1$$

o resultado da teoria simétrica. Nossa notação difere da notação de Amit na ref. 17, da seguinte forma:

NOTAÇÃO USADA POR AMIT [17]	NESTE TRABALHO
α	B_1
β	G_1
β_4	G_2

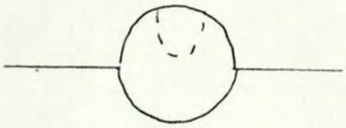
2 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(2)}_{qq}$ à Ordem de 2 Loops

$$\tilde{B}^{(1)}_{21} = \frac{1}{2} D_{1qq}^{2} D_{111}^{2} = \frac{1}{2} c^4 (p-2)^2 = B_{11} \tilde{B}_{11}$$



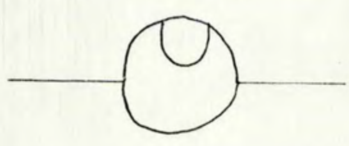
$$\tilde{B}^{(1)}_{22} = \frac{1}{2}\left[D_{1qq}^{4} + \sum_{r=2}^{p-1} D_{1qq} D_{1rr} \right] = \frac{1}{2} c^4 p = \tilde{B}_{11}^2 + B_{12} \tilde{B}_{11}$$

$$\tilde{B}^{(1)}_{23} = \left[\sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1qq}^2 \, D_{qrr}^2 + 3 \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^2 \, D_{qqr}^2 + 2 D_{1qq}^2 \, D_{qqq}^2 + \right.$$



$$\left. + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr}^2 \, D_{qrr}^2 + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1rr}^2 \, D_{qqr} \right] = \frac{3}{2} p(p-3) c^4$$

$$= 3 \tilde{B}_{11} \breve{B}_{12}$$



$$\tilde{B}^{(1)}_{24} = \frac{1}{2} \left[D_{qqq}^4 + D_{qqq}^2 \, D_{qqr}^2 + \sum_{r=2} D_{qqr}^4 + \sum_{r=2} D_{qqr}^2 \, D_{qqs}^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{r=2} D_{qqr}^2 \, D_{rss}^2 + 2 \sum_{s=2,\, r=s+1} D_{qqr} \, D_{rrs} + \sum_{\substack{r=2 \\ s=q+1}} D_{qqr}^2 \, D_{qss}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} c^4 p^2 (p-3)^2 = 2 \tilde{B}_{12}^2$$

e fazendo a soma

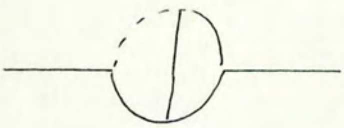
$$\tilde{B}^{(1)}_{21} + \breve{B}^{(1)}_{22} + \breve{B}^{(1)}_{23} + \tilde{B}^{(1)}_{24} = 2 B_1^2$$

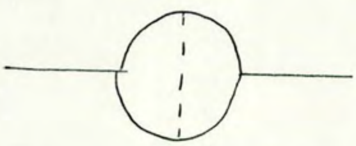
confere de novo com o resultado da teoria simétrica.

Topologicamente diferentes tem-se ainda os diagramas:

$$\tilde{B}^{(2)}_{21} = \frac{1}{2} D_{111} \, D_{1qq} = -c^4 (p-2) = \tilde{B}_{11} \hat{G}_{11}$$

$$\tilde{B}_{22}^{(2)} = \frac{1}{2} D_{1qq}^{2} = c^4 = \tilde{B}_{11} \hat{G}_{12}$$

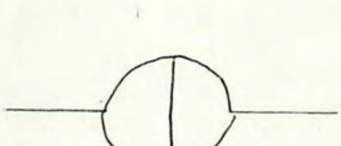




$$\tilde{B}_{23}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big[D_{1qq}^{2} D_{qqq}^{2} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^{2} D_{qqr}^{2} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq} D_{1rr} D_{qqr}^{2}$$

$$+ \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1qq} D_{1rr} D_{qrr}^{2} \Big] = \frac{5}{2} c^4 p(p-3)$$

$$= \tilde{B}_{11} \hat{C}_{113} + \tilde{B}_{12} \tilde{G}_{11}$$



$$\tilde{B}_{24}^{(2)} = \frac{1}{2}\Big[D_{qqq}^{4} + 5 \sum_{r=2}^{q-1} D_{qqq}^{2} D_{qqr}^{2} + 2 \sum_{r=2}^{q-1} D_{qqr}^{4}$$

$$+ 2 \sum_{r,s=2}^{q-1} D_{qqr}^{2} D_{qqs}^{2} + 2 \sum_{\substack{r=s+1 \\ s=q+1}}^{p-1} D_{qrr} D_{qss} D_{rrs}^{2} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qrr}^{3} D_{qqq}$$

$$+ \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qrr}^{4} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qrr}^{2} D_{rrr}^{2} \Big] = \frac{c^4}{2} p^2 (p-3)(p-4) = \tilde{B}_{12} \tilde{G}_{112}$$

e a soma dá:

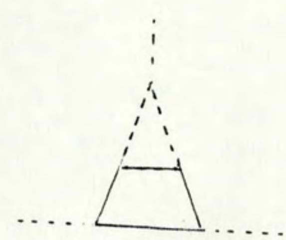
$$\tilde{B}_{21}^{(2)} + \tilde{B}_{22}^{(2)} + \tilde{B}_{23}^{(2)} + \tilde{B}_{24}^{(2)} = B_1 G_1$$

conferindo com o obtido por AMIT[17].

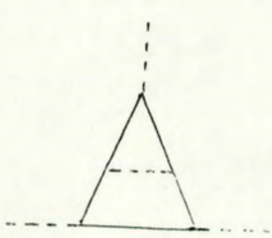
3 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(3)}_{111}$ à Ordem de 2 Loops

$$G^{(1)}_{121} = 3 D^{5}_{111} = 3(p-2)^{4} c^{4} D_{111} = 3 G^{2}_{11} D_{111}$$

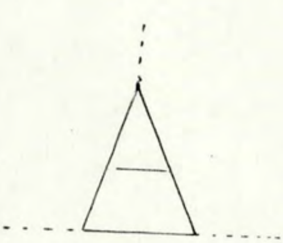
$$G^{(1)}_{122} = 3 \sum_{r=2}^{p-1} D^{2}_{111} D^{3}_{1rr} = -3c^{4}(p-2)^{2} D_{111} = 3 G_{11} G_{12} D_{111}$$



$$G^{(1)}_{123} = 3 \sum_{r=1}^{p-1} D_{111} D^{4}_{1rr} = 3c^{4}(p-2) D_{111} = 3 G_{11} \hat{G}_{12} D_{111}$$



$$G^{(1)}_{124} = 3 \sum_{r=2}^{p-1} D^{5}_{1rr} = -3c^{4} D_{111} = 3 \hat{G}_{11} G_{12} D_{111}$$



$$G^{(1)}_{125} = 3\left[2 \sum_{\substack{r=2 \\ s=r+1}}^{p-1} D_{1rr} D^{2}_{1ss} D^{2}_{rss} + \sum_{\substack{r=2 \\ s=r+1}}^{p-1} D^{3}_{1ss} D^{2}_{rss} + \sum_{r=2}^{p-1} D^{2}_{rrr} D^{3}_{1rr} \right]$$

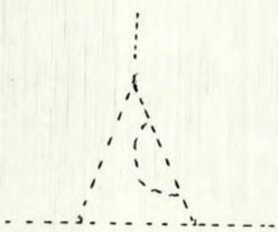
$$= -3p(p-3) D_{111} = 3 \hat{G}_{13} G_{12} D_{111}$$

A soma dá:

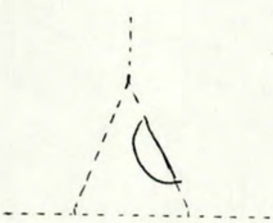
$$G_{21}^{(1)} + G_{22}^{(1)} + G_{23}^{(1)} + G_{24}^{(1)} + G_{25}^{(1)} = 3\, G_1^{\,2} D_{111}$$

conferindo com o obtido por AMIT[17].

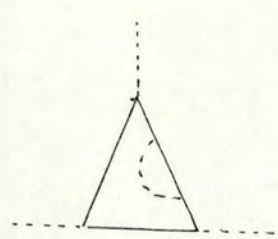
Topologicamente diferentes, tem-se ainda os diagramas:



$$G_{21}^{(2)} = 3\, D_{111}^{5} = \frac{3}{2}\, c^4 (p-2)^4 D_{111} = 3\, B_{11} G_{11} D_{111}$$



$$G_{22}^{(2)} = 3 \sum_{r=2}^{p-1} D_{111}^{3}\, D_{1rr}^{2} = \frac{3}{2} (p-2)^3 c^4 D_{111} = 3\, B_{12} G_{11} D_{111}$$



$$G_{23}^{(2)} = 3 \sum_{r=2}^{p-1} D_{1rr}^{5} = -3 c^4 D_{111} = 3\, G_{12} \tilde{B}_{11} D_{111}$$

$$G_{24}^{(2)} = 6 \sum_{\substack{r=s+1 \\ s=2}} D_{1rr}^{3}\, D_{rrs}^{2} + 3 \sum_{\substack{s=r+1 \\ r=2}}^{p-1} D_{1rr}^{3}\, D_{rss}$$

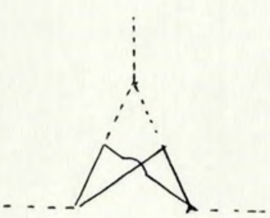
$$= -\frac{3}{2} c^4 p(p-3)\, D_{111} = 3\, G_{12} \check{B}_{12} D_{111}$$

A soma dá:

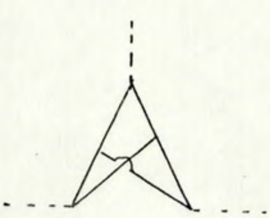
$$G_{21}^{(2)} + G_{22}^{(2)} + G_{23}^{(2)} + G_{24}^{(2)} = 3\, G_1\, B_1\, D_{111}$$

conferindo com o resultado obtido por AMIT[17]. E os diagramas:

$$G_{21}^{(3)} = D_{111}^{5} = \frac{1}{2}(p-2)^4 c^4 D_{111}$$



$$G_{22}^{(3)} = \sum_{r=2}^{p-1} D_{111}\left[D_{1rr}^{4} + D_{1rr}^{2}\, D_{1ss}^{2} \right] = \frac{3}{2}(p-2)c^4 D_{111}$$



$$G_{23}^{(3)} = \sum_{r=2}^{p-1} D_{1rr}^{3}\, D_{rrr}^{2} + \sum_{\substack{r=2 \\ s=r+1}}^{p-1} D_{1rr}\, D_{1ss}\, D_{rss}^{2} = -\frac{1}{2} c^4 (p-3) p\, D_{1}$$

A soma dá:

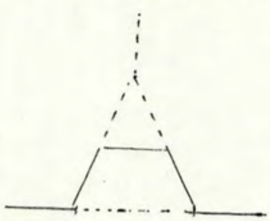
$$G^{(3)}_{21} + G^{(3)}_{22} + G^{(3)}_{23} = G_2$$

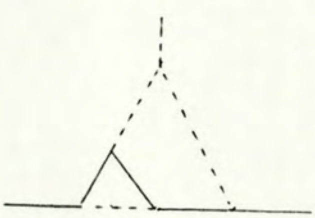
conferindo com o resultado obtido por AMIT[17].

4 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(3)}_{1qq}$ à Ordem de 2 Loops

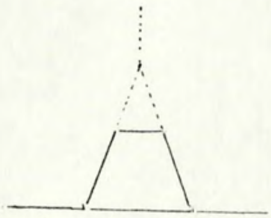
$$\hat{G}^{(1)}_{21} = D^{3}_{111}\, D^{2}_{1qq} = -c^4(p-2)^3 D_{1qq} = G_{11}\,\hat{G}_{11}\, D_{1qq}$$

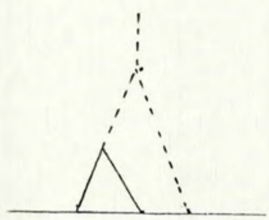
$$\hat{G}^{(1)}_{22} = D^{2}_{111}\, D^{3}_{1qq} = 2c^4(p-2)^2 D_{1qq} = 2\,\hat{G}^{2}_{11}\, D_{1qq}$$





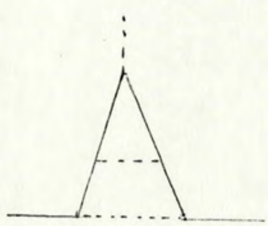
$$G^{(1)}_{23} = 3D_{111}\, D^{4}_{1qq} = 5c^4(p-2)\, D_{1qq} = 5\,\hat{G}_{11}\, G_{112}\, D_{1qq}$$

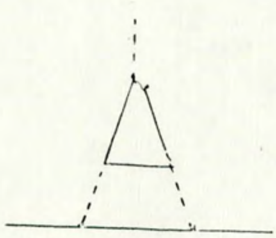




$$\hat{G}^{(1)}_{24} = D_{111}\left[2 D_{1qq}^{2} D_{qqq}^{2} + 2\sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^{2} D_{qqr}^{2} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr}^{2} D_{qrr}^{2} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq} D_{1rr} D_{qqr} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1qq} D_{1rr} D_{qrr}^{2}\right] = -3C^4 p(p-2)(p-3) D_{1qq}$$

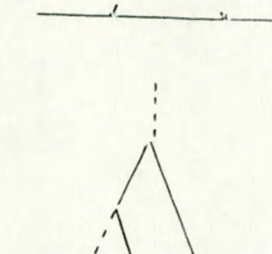
$$= 3\hat{G}_{11}\hat{G}_{13} D_{1qq}$$

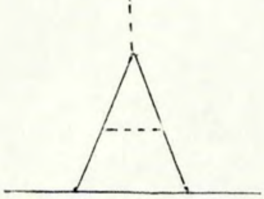


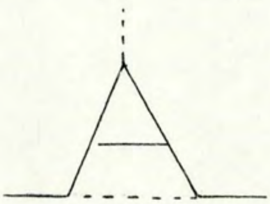


$$\hat{G}^{(1)}_{25} = D_{1qq}^{2}\left[3 D_{1qq}^{3} + \sum_{r=2}^{p-1} D_{1rr}^{3}\right] = (1+p)C^4 D_{1qq}$$

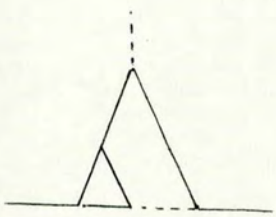
$$= \left[3\hat{G}_{12}^{2} + G_{12}\hat{G}_{11}\right] D_{1qq}$$

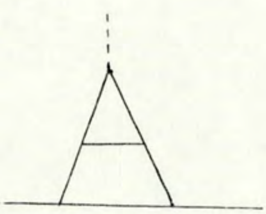






$$\hat{G}^{(1)}_{126} = D^{3}_{1qq}\, D^{2}_{qqq} + \sum_{r=2}^{q-1} D^{3}_{1rr}\, D^{2}_{qqr} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D^{3}_{1rr}\, D^{2}_{qrr}$$
$$+ \sum_{r=2}^{q-1} D^{3}_{1qq}\, D^{2}_{qqr} = 10\, c^{4} p\,(p-3)\, D_{1qq}$$
$$= 10\, \hat{G}_{13}\, \hat{G}_{12}\, D_{1qq}$$





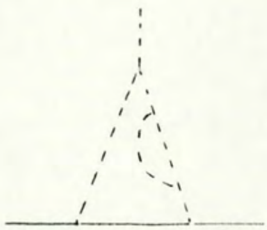
$$\hat{G}^{(1)}_{127} = D_{1qq}\, D^{4}_{qqq} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}\, D^{2}_{qqr}\, D^{2}_{qqq} + 2 \sum D_{1qq}\, D^{4}_{qqr}$$
$$+ \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1qq}\, D_{qrr} + \sum D_{1rr}\, D^{2}_{qqq}\, D^{2}_{qqr} + 2 \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr}\, D^{4}_{qrr}$$
$$= 2\hat{G}^{2}_{13} + \hat{G}_{13}\, \tilde{G}_{12}\, D_{1qq} = c^{4} p^{2} (p-3)(3p-11)$$

A soma dá:

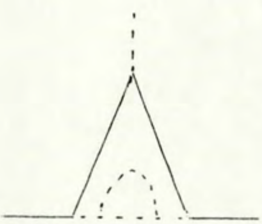
$$\hat{G}^{(1)}_{21} + \hat{G}^{(1)}_{22} + \hat{G}^{(1)}_{123} + \hat{G}^{(1)}_{124} + \hat{G}^{(1)}_{125} + \hat{G}^{(1)}_{126} + \hat{G}^{(1)}_{127} = 3\, G^{2}_{1}\, D_{1qq}$$

o que confere com o resultado obtido por Amit[17].

Outros diagramas topologicamente diferentes são:



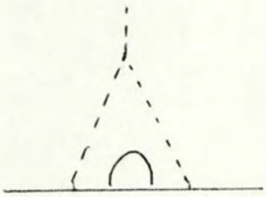
$$\hat{G}^{(2)}_{21} = 2\, D^{3}_{111}\, D^{2}_{1qq} = -\,c^4(p-2)\, D_{1qq} = 2\,\hat{G}_{11}\, B_{11}\, D_{1qq}$$

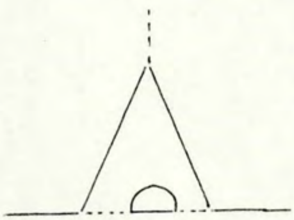


$$\hat{G}^{(2)}_{22} = D^{3}_{1qq}\, D^{2}_{111} = \frac{1}{2}\, c^4 (p-2)^2\, D_{1qq} = \hat{G}_{112}\, B_{11}\, D_{1qq}$$

$$\hat{G}^{(2)}_{23} = D_{111}\, D^{4}_{1qq} + 2 \sum D_{111}\, D^{2}_{1qq}\, D^{2}_{1rr}$$

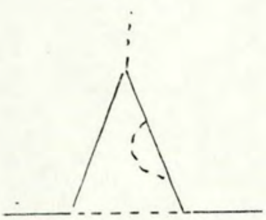
$$= c^4 (p^2 - 3p + 2)\, D_{1qq} = \left[\hat{G}_{11}\, \tilde{B}_{11} + 2\tilde{G}_{11}\, B_{12}\right] D_{1qq}$$

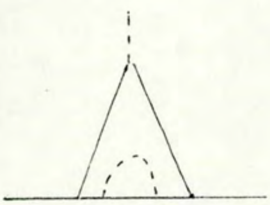




$$\hat{G}^{(2)}_{25} = 3\overset{5}{D}_{1qq} = \frac{1}{2}c^4(p+2)D_{1qq}$$

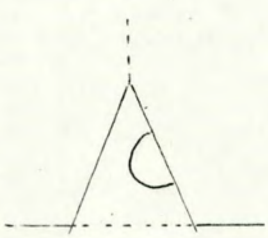
$$= \left[\hat{G}_{12}B_{12} + 2\hat{G}_{12}\tilde{B}_{11}\right]D_{1qq}$$



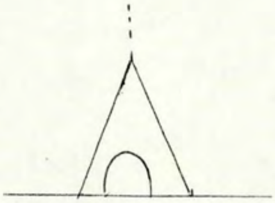


$$\hat{G}^{(2)}_{26} = 3\overset{3}{D}_{1qq}\overset{2}{D}_{qqq} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}\overset{2}{D}_{1rr}\overset{2}{D}_{qqr} + \sum_{r=q+1}^{p-1}\overset{3}{D}_{1rr}D_{qrr}$$

$$+ \sum_{r=2}^{q-1} D_{1rr}\overset{2}{D}_{1qq}\overset{2}{D}_{qqr} = 4c^4 p(p-3)D_{1qq}$$



$$= \left[3\hat{G}_{13}\tilde{B}_{11} + 2\hat{G}_{12}B_{12}\right]D_{1qq}$$



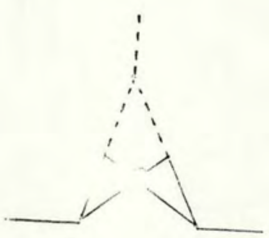
$$\hat{G}^{(2)}_{27} = \frac{3}{2}c^4 p^2(p-3)^2 D_{1qq} = 3\hat{G}_{13}\tilde{B}_{12}D_{1qq}$$

A soma dá: $\hat{G}^{(2)}_{21} + \hat{G}^{(2)}_{22} + \hat{G}^{(2)}_{23} + \hat{G}^{(2)}_{24} + \hat{G}^{(2)}_{25} + \hat{G}^{(2)}_{26} + \hat{G}^{(2)}_{27} = 3G_1B_1D_{1qq}$

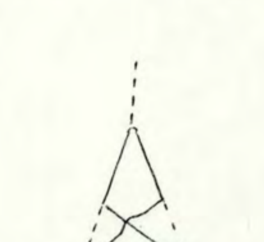
o que confere com o resultado obtido por Amit.[17]

Outros diagramas topologicamente diferentes são:

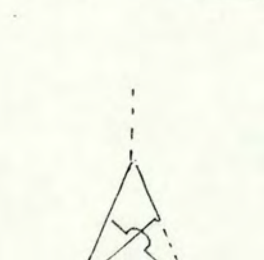
$$\hat{G}^{(3)}_{21} = D_{1qq}^{3} D_{111}^{2} = c^4 (p-2)^2 D_{1qq}$$



$$\hat{G}^{(3)}_{22} = D_{111} D_{qqq}^{2} D_{1qq}^{2} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{111} D_{1rr} D_{qrr} = \frac{c^4}{2} p(p-2)(p-3) D_{1qq}$$



$$\hat{G}^{(3)}_{23} = D_{1qq}^{5} = c^4 D_{1qq}$$



$$\hat{G}^{(3)}_{24} = 4\Big\{ D_{1qq}^{2} D_{qqq}^{3} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr}^{2} D_{1qq} D_{qrr}^{2} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1rr} D_{1qq} D_{qqr}^{3} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^{2} D_{qqr}^{2} \Big\} = 2 c^4 p(p-3) D_{1qq}$$

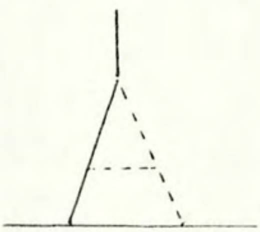
$$\hat{G}^{(3)}_{25} = D_{1qq} D_{qqq}^{4} + \sum_{r=2}^{q-1} D_{1rr} D_{qqq}^{2} D_{qqr}^{2} + 2\sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr} D_{qqq} D_{qrr}^{3} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr} D_{qrr}^{2} D_{rrr}^{2} + 3\sum_{r=2} D_{1qq} D_{qqq}^{2} D_{qqr}^{2} + \sum_{r=2} D_{1qq} D_{qqr}^{4} + \sum_{r=q+1} D_{1qq} D_{qrr}^{4} \Big\} = \tfrac{1}{2} c^4 p^2 (p-3)(p-4)$$

A soma dá:

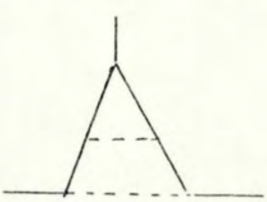
$$\hat{G}^{(3)}_{121} + \hat{G}^{(3)}_{22} + \hat{G}^{(3)}_{23} + \hat{G}^{(3)}_{24} + \hat{G}^{(3)}_{25} = c^4 \, D_{qqq} \frac{(p^2-6p+10)}{p^2} = G_2$$

o que confere com o resultado obtido por Amit[17].

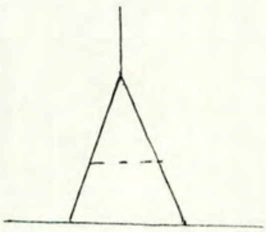
5 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(3)}_{qqq}$ à Ordem de 2 Loops

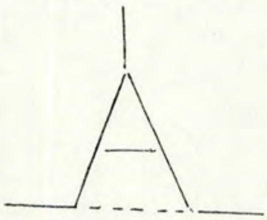


$$\tilde{G}^{(1)}_{21} = 6\, D_{111}\, D^{4}_{1qq} = -6(p-2)c^4 D_{qqq} = 6\,\hat{G}_{11}\,\tilde{G}_{11}\, D_{qqq}$$

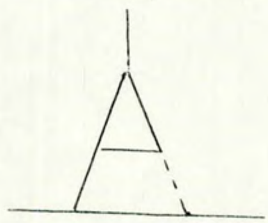


$$\tilde{G}^{(1)}_{22} = D^{4}_{1qq}\, D_{qqq} = 15c^4 D_{qqq} = \left[\frac{\tilde{G}^2_{11}}{3} + 2\hat{G}_{112}\check{G}_{11} + \frac{2}{3}\check{G}_{111}\right] D_{qq}$$



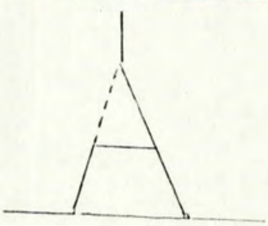


$$\tilde{G}_{23}^{(1)} = 4 D_{1qq}^{2} D_{qqq}^{3} + 3\sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq} D_{1rr} D_{qqr}^{2} D_{qqq} +$$

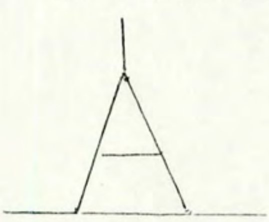


$$+ 10\sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^{2} D_{qqq} D_{qqr}^{2} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1qq}^{2} D_{qrr}^{3} =$$

$$= 6p^{2}(3p-11)c^{4} D_{qqq} = \left[\frac{\tilde{G}_{11}\tilde{G}_{12}}{3} + \check{G}_{11}\check{G}_{12} + \right.$$



$$\left. + \frac{2}{3}\check{G}_{11}\hat{G}_{12} \right] D_{qqq}$$



$$\tilde{G}_{24}^{(1)} = D_{qqq}^{5} + 6\sum_{r=2}^{q-1} D_{qqq}^{3} D_{qqr}^{2} + 6\sum_{r=2}^{q-1} D_{qqq} D_{qqr}^{4} +$$

$$+ 3\sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qqq} D_{qrr}^{4} + \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qrr}^{3} D_{rrr}^{2} = 3c^{4}p^{2}(p-4)^{2} D_{qqq}$$

$$= 3\tilde{G}_{12}^{2} D_{qqq}$$

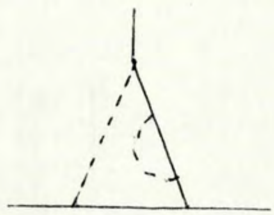
A soma dá:

$$\hat{G}_{21}^{(1)} + \hat{G}_{22}^{(1)} + \tilde{G}_{23}^{(1)} + \check{G}_{24}^{(1)} = 3B_1G_1$$

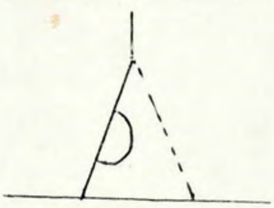
o que confere com o resultado obtido por Amit[17].

Outros diagramas topologicamente diferentes são:

$$\tilde{G}_{21}^{(2)} = 3 D_{111}^{2} D_{1qq}^{2} D_{qqq} = \frac{3}{2} c^4 (p-1)^2 D_{qqq} = 3 B_{11} \tilde{G}_{11} D_{qqq}$$



$$\tilde{G}_{22}^{(2)} = 6 D_{1qq}^{4} D_{qqq} + 3 \sum_{r=2}^{p-1} D_{1qq}^{2} D_{1rr} D_{qqq} = \frac{3}{2} c^4 (p+2) D_{qqq}$$
$$= \left[2 \tilde{G}_{11} B_{11} + B_{12} \tilde{G}_{11} \right] D_{qqq}$$



$$\tilde{G}_{23}^{(2)} = D_{1qq}^{2} D_{qqq} \left[3 D_{qqq}^{2} + 3 \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{qrr}^{2} + 6 \sum_{r=2}^{q-1} D_{qqr}^{2} \right] +$$
$$3 \sum_{r=2}^{q-1} D_{1qq}^{2} D_{qqr}^{3} + 3 \sum_{r=2}^{q-1} D_{1rr}^{2} D_{qqr}^{2} D_{qqq} + 3 \sum_{r=q+1}^{p-1} D_{1rr}^{2} D_{qrr}^{3}$$
$$= 6p^2 - 21 p c^4 D_{qqq} = \left[2 \tilde{G}_{11} \breve{B}_{12} + 3 \breve{B}_{11} \tilde{G}_{12} \right] D_{qqq}$$

$$\tilde{G}_{24}^{(2)} = \frac{3}{2} c^4 p^2 (p-3)(p-4) = 3 \tilde{G}_{12} \breve{B}_{12}$$

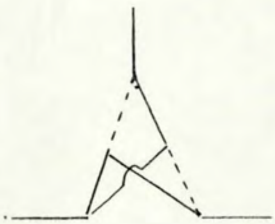
A soma dá:

$$\tilde{G}_{21}^{(2)} + \tilde{G}_{22}^{(2)} + \tilde{G}_{23}^{(2)} + \tilde{G}_{24}^{(2)} = 3 B_1 G_1$$

o que confere com o resultado obtido por Amit[17].

Outros diagramas topologicamente diferentes são:

$$\tilde{G}^{(3)}_{21} = 2\, D_{111}\, D^{3}_{1qq}\, D_{qqq} = -(p-2)\, c^4\, D_{qqq}$$



$$\tilde{G}^{(3)}_{22} = 3\, D^{4}_{1qq}\, D_{qqq} = 3 c^4\, D_{qqq}$$

$$\tilde{G}^{(3)}_{23} = 2\, D^{2}_{1qq}\, D^{3}_{qqq} + \sum_{r=} D_{1qq}\, D_{1rr}\, D^{3}_{qqr} + \sum_{r=} D_{1qq}\, D_{1rr}\, D_{qr}$$

$$= 3 c^4 .\, p(p-4)\, D_{qqq}$$

$$\tilde{G}^{(3)}_{24} = \frac{1}{2} c^4 p^2 (p^2 - 8p + 17)\, D_{qqq}$$

A soma dá:

$$\tilde{G}^{(3)}_{21} + \tilde{G}^{(3)}_{22} + \tilde{G}^{(3)}_{23} + \tilde{G}^{(3)}_{24} = -(p^2 - 6p + 10)\, \frac{D_{qqq}}{p^2} = G_2$$

o que confere com o resultado obtido por Amit[17].

6 - Cālculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(2,1)}_{11}$ ā Ordem de 2 Loops

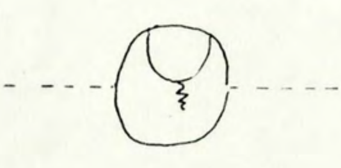
A linha ondulada nos seguintes diagramas indica a inserção em .

$$C^{(1)}_{21_a} = 2\,B^{(1)}_{21}$$

$$C^{(1)}_{22_a} = 2\,B^{(1)}_{22}$$

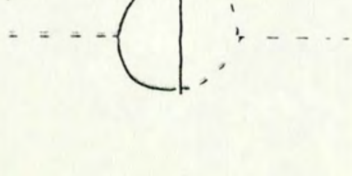
$$C^{(1)}_{24_a} = B^{(1)}_{23}$$

$$C^{(1)}_{24_a} = B^{(1)}_{23}$$

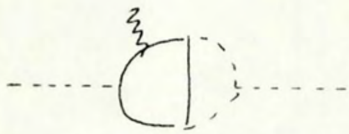


$$C^{(1)}_{25_a} = 2\,B^{(1)}_{24}$$

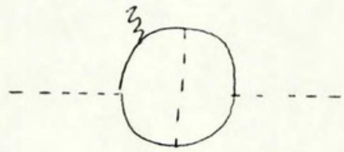
$$C^{(2)}_{21_b} = 4\,B^{(2)}_{21}$$



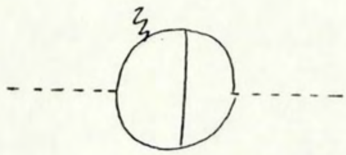
$$C^{(2)}_{23_b} = 2\,B^{(2)}_{22}$$



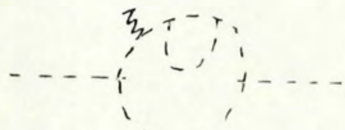
$$C_{23_a}^{(2)} = 4B_{24}^{(2)}$$



$$C_{24_c}^{2} = 4B_{23}^{(2)}$$



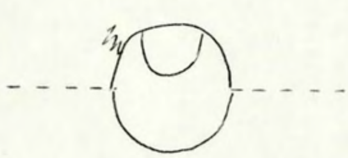
$$C_{25_b}^{(2)} = 4B_{24}^{(2)}$$



$$C_{21_a}^{(2)} = 2B_{21}^{(1)}$$

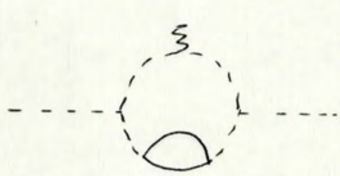
$$C_{22_a}^{(2)} = 2B_{22}^{(1)}$$

$$C_{23_a}^{(2)} = 2B_{23}^{(1)}$$

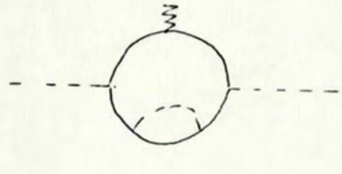


$$C_{24_a}^{(2)} = 2B_{24}^{(1)}$$

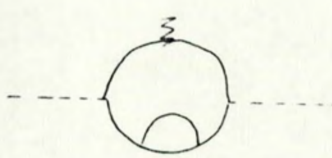
$$C^{(2)}_{21_b} = B^{(1)}_{21}$$



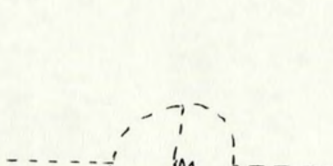
$$C^{(2)}_{22_b} = B^{(1)}_{22}$$



$$C^{(2)}_{23_b} = B^{(1)}_{23}$$

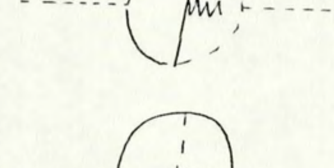


$$C^{(2)}_{24_b} = B^{(1)}_{24}$$

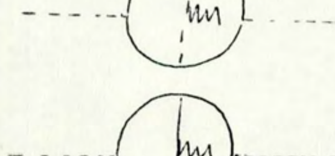


$$C^{(3)}_{21} = B^{(2)}_{21}$$

$$C^{(3)}_{22} = B^{(2)}_{22}$$



$$C^{(3)}_{23} = B^{(2)}_{23}$$

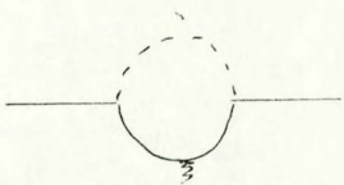


$$C^{(3)}_{24} = B^{(2)}_{24}$$

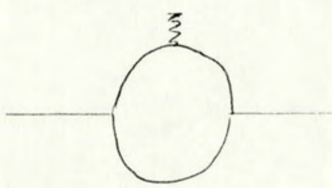
7 - Cálculo dos Coeficientes Tensoriais da $\Gamma^{(2,1)}_{qq}$ à Ordem de 1 e 2 Loops

À ordem de 1 loop:

$\hat{C}_{11a} = \tilde{B}_{11}$

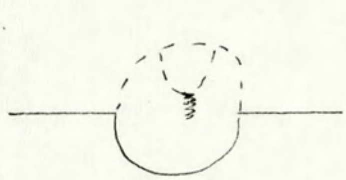


$\hat{C}_{11b} = \tilde{B}_{11}$



$\hat{C}_{12} = 2\tilde{B}_{12}$

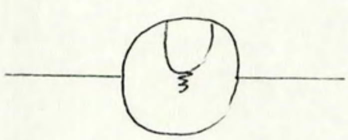
À ordem de 2 loops:



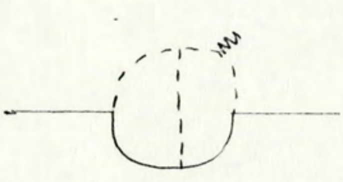
$\hat{C}^{(1)}_{21} = 2\tilde{B}^{(1)}_{21}$

$\hat{C}^{(1)}_{23a} = 2\tilde{B}^{(1)}_{22}$

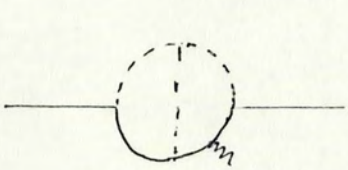
$$\hat{C}^{(1)}_{24_a} = 2\,\tilde{B}^{(1)}_{23}$$



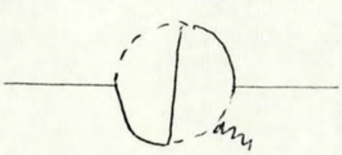
$$\hat{C}^{(1)}_{25_a} = 2\,\tilde{B}^{(1)}_{24}$$



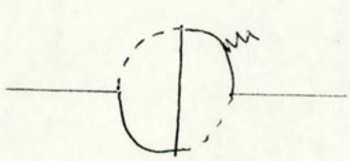
$$\hat{C}^{(1)}_{22_a} = \tilde{B}^{(2)}_{21}$$



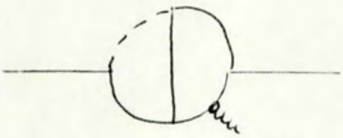
$$\hat{C}^{(1)}_{22_b} = 2\,\tilde{B}^{(2)}_{21}$$



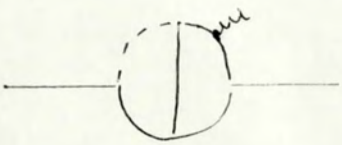
$$\hat{C}^{(1)}_{23_b} = 2\,\check{B}^{(2)}_{20}$$



$$\hat{C}^{(1)}_{23_c} = 2\,\tilde{B}^{(2)}_{22}$$

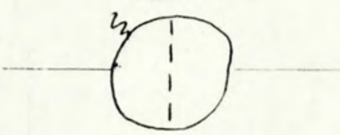


$$\hat{C}^{(1)}_{24_b} = \tilde{B}^{(2)}_{23}$$

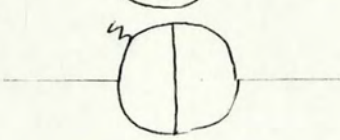


$$\hat{C}^{(1)}_{24_c} = 2\tilde{B}^{(2)}_{23}$$

$$\hat{C}^{(1)}_{24_d} = \tilde{B}^{(2)}_{23}$$



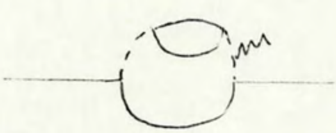
$$\hat{C}^{(1)}_{24_e} = 4\tilde{B}^{(2)}_{23}$$



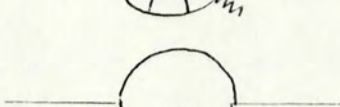
$$\hat{C}^{(1)}_{25_b} = 4\tilde{B}^{(2)}_{24}$$

$$\hat{C}^{(2)}_{21_a} = 2\tilde{B}^{(1)}_{21}$$

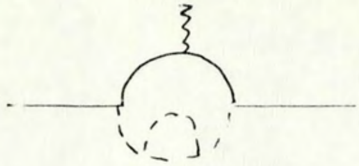
$$\hat{C}^{(2)}_{22_a} = 2\tilde{B}^{(1)}_{22}$$



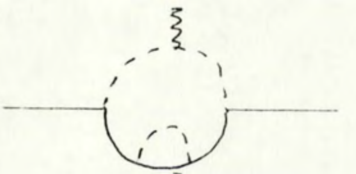
$$\hat{C}^{(2)}_{23_a} = 2\tilde{B}^{(1)}_{23}$$



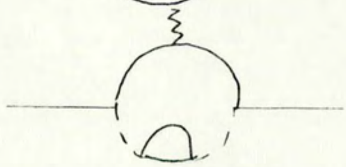
$$\hat{C}^{(2)}_{24_a} = 2\tilde{B}^{(1)}_{24}$$

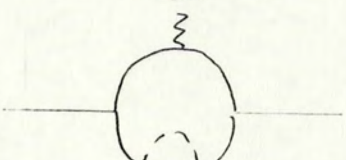


$$\hat{C}^{(2)}_{21_b} = \tilde{B}^{(1)}_{21}$$

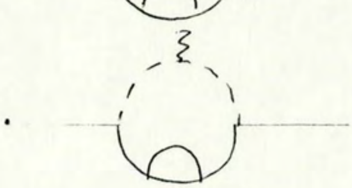


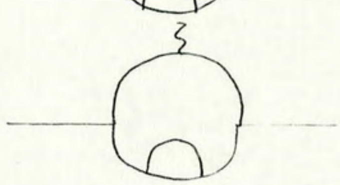
$$\hat{C}^{(2)}_{22_b} = \tilde{B}^{(1)}_{22}$$





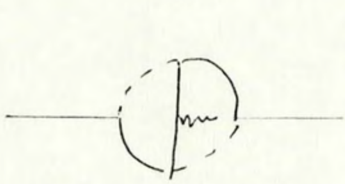
$$\hat{C}^{(2)}_{23_b} = \tilde{B}^{(1)}_{23}$$



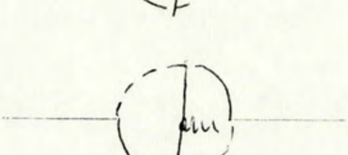


$$\hat{C}^{(2)}_{24_b} = \tilde{B}^{(1)}_{24}$$

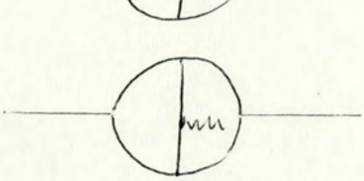
$$\hat{C}^{(3)}_{21} = \tilde{B}^{(2)}_{21}$$



$$\hat{C}^{(3)}_{22} = \tilde{B}^{(2)}_{22}$$



$$\hat{C}^{(3)}_{23} = \tilde{B}^{(1)}_{23}$$



$$\hat{C}^{(3)}_{24} = \tilde{B}^{(2)}_{24}$$

APÊNDICE B

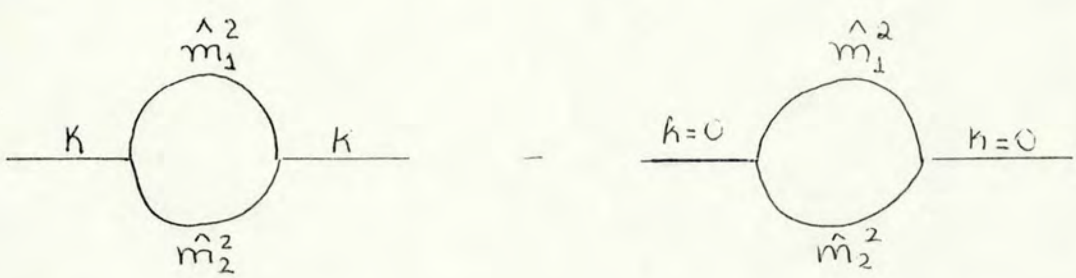
CÁLCULO DAS INTEGRAIS À ORDEM DE 1 E 2 LOOPS

1 - Integrais que Contribuem na $\Gamma^{(2)}(K)$

1.1 - À Ordem de 1 Loop - Para tornar o processo mais simples, será calculada explicitamente a integral mais geral, ou seja, $I(\hat{m}_1^2,\hat{m}_2^2)$ onde $\frac{m^2}{k^2}$ é a massa renormalizada e k um parâmetro de momento. Calcula-se:

$$I(k,\hat{m}_1^2,\hat{m}_2^2) = \bar{I}(k,\hat{m}_1^2,\hat{m}_2^2) - \bar{I}(k=0,m_1^2,m_2^2)$$

que é referente à subtração dos diagramas:



ou seja,

$$I(k,\hat{m}_1^2,\hat{m}_2^2) = \int^{\Lambda} \frac{dq}{(q^2+\hat{m}_1^2)[(q-k)^2+\hat{m}_2^2]} - \int^{\Lambda} \frac{dq}{(q^2+\hat{m}_1^2)(q^2+\hat{m}_2^2)}$$

Usando-se o método de Feynman de fundirem-se vários denominadores nas refs. (22) e (25).

$$I(k, \hat{m}_1^2, \hat{m}_2^2) = \int^{\Lambda}\!\!\int_0^1 \frac{dq\, dx}{\left[q^2 + 2qkx + (k^2 + \hat{m}_2^2)\,x + \hat{m}_1^2(1-x)\right]^2} - \int^{\Lambda}\!\!\int_0^1 \frac{dq\, dx}{\left[q^2 + \hat{m}_2^2\, x + \hat{m}_1^2(1-x)\right]^2}$$

Integrando-se sobre dq, obtém-se

$$I(k, \hat{m}_1^2, \hat{m}_2^2) = \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma(d/2)\,\Gamma(2 - d/2)}{\Gamma(2)} \left\{ \int_0^1 \left[k^2 x(1-x) + \hat{m}_2^2 x + \hat{m}_1^2(1-x)\right]^{\frac{d}{2}-2} - \left[m_1^2(1-x) + m_2^2 x\right]^{\frac{d}{2}-2} dx \right\}$$

Tomando-se $6 - d \equiv \epsilon$, reescreve-se a expressão anterior da forma:

$$I(k, \hat{m}_1^2, \hat{m}_2^2) = \frac{1}{2}\,\Gamma(3 - \epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2 - 1) \int_0^1 \Big\{ \left[k^2 x(1-x) + \hat{m}_1^2(1-x) + \hat{m}_2^2 x\right]$$

$$\left[k^2 x(1-x) + \hat{m}_1^2(1-x) + \hat{m}_2^2 x\right]^{-\epsilon/2} - \left[\hat{m}_2^2 x + \hat{m}_1^2(1-x)\right]\left[\hat{m}_1^2(1-x) + \hat{m}_2^2 x\right]^{-\epsilon/2} \Big\}\, dx$$

Faz-se uma expansão tomando-se a exponencial de um logarítmo.

$$I(k, \hat{m}_1^2, \hat{m}_2^2) = \frac{1}{2}\,\Gamma(3 - \epsilon/2)\,\Gamma(1 - \epsilon/2) \int_0^1 \Big\{ \left[k^2 x(1-x) + \hat{m}_1^2(1-x) + \hat{m}_2^2 x\right] \Big[1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$\ln\left(k^2 x(1-x) + \hat{m}_1^2(1-x) + \hat{m}_2^2 x\right) - \cdots \Big] - \left[\hat{m}_2^2 x + \hat{m}_1^2(1-x)\right]\Big[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(m_1^2(1-x) + m_2^2\right) \cdots \Big]\Big\} dx$$

Tomando-se o caso de quebra de simetria quadrática e trilinear, favorecendo o ordenamento de uma componente longitudinal, na temperatura crítica desta componente, obtém-se:

$$I_1(K) = -\frac{K^2}{3\epsilon}\left\{1 + \frac{7}{12}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln K^2\right\}$$

$$I_2(K,\hat{m}^2) = -\frac{1}{\epsilon}\left[2 - \frac{\epsilon}{2}\right]\left[\frac{K^2}{\epsilon} - \frac{\epsilon}{2}\int_0^1\left[\ln\left[x(1-x)K^2 + \hat{m}^2\right] + \ln(\hat{m}^2+1)\right.\right.$$

$$\left.- \ln(\hat{m}^2+1)\right]x(1-x)K^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_0^1 \hat{m}^2\left[\ln(\hat{m}^2 + K^2(1-x)x) - \ln\hat{m}^2\right] + \frac{\epsilon^2}{8}$$

$$\left.\int_0^1 K^2 x(1-x)K^2\left[\ln^2\left[x(1-x)K^2 + m^2\right] + \ln^2(m^2+1) - \ln^2(m^2+1)\right]\right]$$

assume, no limite $\hat{m}^2 \to \infty$, o valor:

$$I_2(k,\hat{m}^2) = \tilde{I}_2(k,\hat{m}^2) = -\frac{K^2}{3\epsilon}\left\{1 - \frac{3\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3\epsilon^2}{8}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

igualmente,

$$\tilde{I}_1(k,\hat{m}^2) = -\frac{K^2}{3\epsilon}\left\{1 - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{6}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

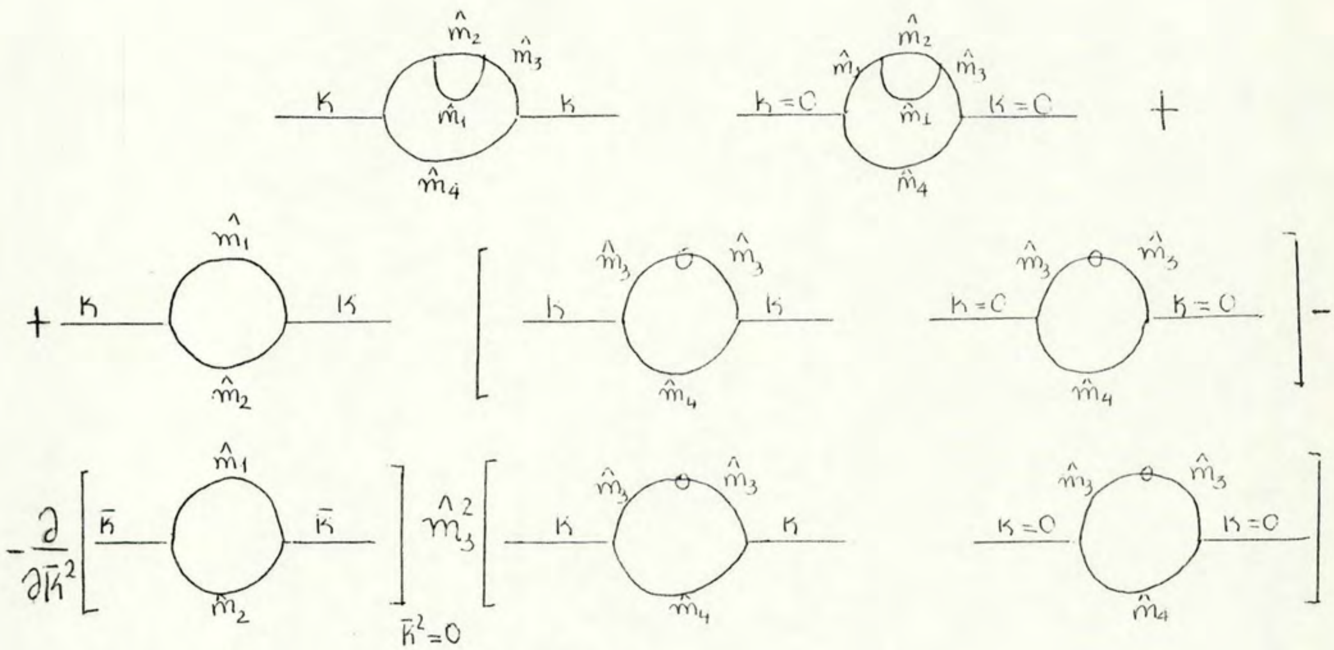
Se, no entanto, a quebra de simetria for tal que favo reça o ordenamento transversal:

$$I_1(k,\hat{m}^2) = -\frac{K^2}{3\epsilon}\left\{1 - \frac{3\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3\epsilon^2}{8}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(m^2+1)\right\}$$

$$\tilde{I}_1(k,\hat{m}^2) = -\frac{1}{3\epsilon}\left\{1-\frac{\epsilon}{3}-\frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{6}\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$I_2(k,\hat{m}^2) = I_2(k,\hat{m}^2) = -\frac{1}{3\epsilon}\left\{1+\frac{7}{12}\epsilon-\frac{\epsilon}{2}\ln k^2\right\}$$

1.2 - <u>Ā ordem de 2 loops</u> - Igualmente, partindo do caso mais geral:



as integrais apresentam a forma:

$$I_2^{(1)}(k,\hat{m}^2) = \bar{\bar{I}}_2^{(1)}(k,\hat{m}^2) - \bar{I}_2^{(1)}(k=0,m^2) + \frac{1}{2}\,\bar{I}(k=0,\hat{m}^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{m}^2}\left[\bar{I}(k,\hat{m}^2) - \bar{I}(k=0,\hat{m}^2)\right] - \frac{\hat{m}^2}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\, I(\bar{k},\hat{m}^2)\Big|_{\bar{k}^2=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\left[\bar{I}(k,\hat{m}^2) - \bar{I}(k=0,\hat{m}^2)\right]$$

$$I_2^{(1)}(k,\hat{m}^2) =$$

$$\int \frac{dq\, d\ell}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(q-\ell)^2+\hat{m}_2^2](q^2+\hat{m}_3^2)^2[(k-q)^2+\hat{m}_4^2]} - \int \frac{dq\, d\ell}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(q-\ell)^2+\hat{m}_2^2](q^2+\hat{m}_3^2)^2(q^2+\hat{m}_4^2)}$$

$$-\int \frac{dq\, d\ell}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)(\ell^2+\hat{m}_2^2)(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(k-q)^2+\hat{m}_4^2]} + \int \frac{d\ell\, dq}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)(\ell^2+\hat{m}_2^2)(q^2+\hat{m}_3^2)^2(q^2+\hat{m}_4^2)}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\int \frac{m_3^2\, d\ell\, dq}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(\bar{k}-\ell)^2+\hat{m}_2^2](q^2+m_3^2)^2[(q-k)^2+\hat{m}_4^2]}\Bigg|_{\bar{k}^2=0}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\int \frac{m_3^2\, d\ell\, dq}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(\bar{k}-\ell)^2+\hat{m}_2^2](q^2+m_3^2)^2(q^2+\hat{m}_4^2)}\Bigg|_{\bar{k}^2=0}$$

Usando o método de Feynman, reagrupam-se os denominadores da forma indicada e integra-se em $d\ell$, obtendo-se:

$$I_2^{(1)}(k,\hat{m}^2) = \frac{1}{2}\Gamma\left(3-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}-1\right)\int_0^1 dq\, dx \left\{ \frac{(q^2+\hat{m}_3^2)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}\left[(k-q)^2+\hat{m}_4^2\right]}\right.$$

$$- \frac{(q^2+\hat{m}_3^2)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2(q^2+\hat{m}_4^2)\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}} + \frac{\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}-\hat{m}_3^2\right)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left(q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)^{\epsilon/2}\left[(k-q)^2+\hat{m}_4^2\right]}$$

$$- \frac{\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}-\hat{m}_3^2\right)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}(q^2+\hat{m}_4^2)} - \frac{\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)^{\epsilon/2}\left[(k-q)^2+\hat{m}_4^2\right]}$$

$$+ \frac{\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)^{\epsilon/2}\left[q^2+m_4^2\right]} + \frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\left[\frac{\left(\bar{k}^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)\hat{m}_3^2}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left(\bar{k}^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}\left[(k-q)^2+\hat{m}_4^2\right]}\right. -$$

$$\left.\left. - \frac{\left(\bar{k}^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)\hat{m}_3^2}{(q^2+\hat{m}_3^2)^2\left(\bar{k}^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}(q^2+\hat{m}_4^2)}\right]_{\bar{k}^2=0}\right\}$$

Para valores grandes de massa, no caso de massa nula, todos os termos a menos dos dois primeiros cancelam-se. Obtem-se:

$$I_2^{(1)}(k,\hat{m}^2) = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma^2(3-\frac{\epsilon}{2})\Gamma(\epsilon/2-1)\Gamma(\epsilon-1)}{\Gamma(\epsilon/2)}\int_0^1 dx1\,dx2\,dx3\;[x1(1-x1)]^{1-\frac{\epsilon}{2}}$$

$$\Big[\; x3^{\epsilon/2} \cdot x2^{\epsilon/2-1}\Big\{k^2 x3(1-x3)+\hat{m}_4^2(1-x3)+\hat{m}_5^2\,x3(1-x2)$$

$$+\Big(\frac{\hat{m}_1^2}{x1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x1}\Big)x2\,x3\Big\}^{-\epsilon+1} - \Big\{\hat{m}_4^2(1-x_3)+\hat{m}_5^2\,x_3(1-x_2)+\Big(\frac{\hat{m}_1^2}{x1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x1}\Big)x_2x_3\Big\}^{-\epsilon}$$

$$x_2^{\epsilon/2-1}\,x_3^{\epsilon/2}\;\Big]$$

Fazendo expansão em ϵ e tomando-se valores $\hat{m}^2$ ou zero para $\hat{m}_1^2, \hat{m}_2^2, \hat{m}_3^2$ e $\hat{m}_4^2$, dependendo se representam parte de propagadores longitudinais ou transversais, obtêm-se os diferentes resultados para as integrais relacionadas aos diferentes diagramas:

$$I_1^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\Big\{1+\frac{25}{12}\epsilon-\epsilon\ln k^2\Big\}$$

$$I_2^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\Big\{1+\frac{25}{12}\epsilon-\epsilon\ln k^2-\frac{15}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{2}\ln k^2\ln(\hat{m}^2+1)\Big\}$$

$$I_3^{(1)} = I_4^{(1)} = \tilde{I}_{3_b}^{(1)} = \tilde{I}_4^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\Big\{1-\frac{7}{12}\epsilon-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{7}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)$$

$$\tilde{I}_1^{(1)} = \tilde{I}_2^{(1)} = \tilde{I}_{3_a}^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\left\{ 1 + \frac{1}{4}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{1}{4}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

Já no caso de quebra de simetria favorecendo o ordenamento transversal, obtém-se:

$$I_1^{(1)} = I_2^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{7}{12}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{7}{12}\epsilon^2 \ln(m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$\bar{I}_3^{(1)} = \tilde{I}_{3_b}^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\left\{ 1 + \frac{25}{12}\epsilon - \epsilon \ln(k^2) - \frac{5}{6}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(m^2+1) + \right.$$
$$\left. + \frac{\epsilon^2}{2} \ln k^2 \ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$\bar{I}_4^{(1)} = \tilde{I}_4^{(1)} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\left\{ 1 + \frac{25}{12}\epsilon - \epsilon \ln k^2 \right\}$$

$$\tilde{I}_1^{(1)} = \tilde{I}_2^{(1)} = \tilde{I}_{3_a} = \frac{k^2}{18\epsilon^2}\left\{ 1 + \frac{1}{4}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{1}{4}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1) \right\}$$

Também à ordem de 2 loops, tem-se:

$$I^{(2)}(k) = \bar{I}^{(2)}(k) - \bar{I}^{(2)}(k=0) =$$

$$= \int \frac{dl\, dq}{(q^2+\hat{m}_1^2)\,[(q-k)^2+\hat{m}_2^2]\,(l^2+\hat{m}_3^2)\,[(q-l)^2+\hat{m}_4^2]\,[(q+l)^2+\hat{m}_5^2]}$$

$$- \int \frac{dl\, dq}{\underbrace{(q^2+\hat{m}_1^2)(q^2+\hat{m}_2^2)}_{1}\,\underbrace{(l^2+\hat{m}_3^2)[(q-l)^2+\hat{m}_4^2]}_{2}\,[(q+l)^2+\hat{m}_5^2]}$$

Agrupam-se os denominadores, seguindo o método de parâmetros de Feynman conforme o indicado, obtendo-se:

$$I^{(2)}(k,\hat{m}^2) = \frac{\Gamma^2(3-\frac{\epsilon}{2})\,\Gamma(\epsilon-1)}{4} \int_0^1 dx\,dy\,dz\,dw \; z^{1-\epsilon/2}\,(1-z)^{\epsilon/2-1}$$

$$w^{\epsilon/2-1}\,(1-w) \Bigg\{ \Big[k^2 y(1-w)(1-z) + k^2 x w - k^2 x^2 z w +$$

$$+ \hat{m}_1^2 (1-x) w + \hat{m}_2^2 x w + \frac{\hat{m}_5^2}{z} w(1-z) + \hat{m}_3^2 (1-y)(1-z)(1-w)$$

$$+ \hat{m}_4^2\, y(1-z)(1-w) - (1-z)\left[k y(1-w) + q x w \right]^2 \Big]^{1-\epsilon} -$$

$$- \Big[\hat{m}_1^2 (1-x) w + \hat{m}_2^2 x w + \frac{\hat{m}_5^2}{z} w(1-z) + \hat{m}_3^2 (1-y)(1-z)(1-w)$$

$$+ \hat{m}_4^2\, y(1-z)(1-w) \Big]^{1-\epsilon} \Bigg\}$$

No caso de quebra de simetria quadrática e trilinear, favorecendo o ordenamento longitudinal em $T = T_c$, onde T_c é a temperatura crítica da componente longitudinal e para $\hat{m}^2 \to \infty$, onde $\hat{m}^2$ está relacionada às componentes transversais, obtém-se:

$$I_1^{(2)}(k) = -\frac{k^2}{3\epsilon^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2}\epsilon - \epsilon \ln k^2 \right\}$$

$$\bar{I}_2^{(2)}(K,\hat{m}^2) = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 + \frac{1}{6}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln K^2 + \ln K^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$I_3^{(2)} = I_4^{(2)} = \tilde{I}_{3_b} = \tilde{I}_4^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{7\epsilon}{6} - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{7\epsilon^2}{6}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{I}_1^{(2)} = \tilde{I}_2^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{1}{3}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{1}{3}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{I}_{3_a}^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{3\epsilon}{4} - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

No caso de haver quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento transversal, as integrais são calculadas na temperatura crítica das componentes transversais e para $m^2 \to \infty$ onde $\hat{m}^2$ é a massa dos propagadores longitudinais. Obtém-se:

$$I_1^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{7\epsilon}{6} - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{7\epsilon^2}{6}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$I_2^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 + \frac{1}{6}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln K^2 + \frac{\epsilon^2}{4}\ln K^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{3\epsilon^2}{8}\ln(\hat{m}^2+1)\right.$$
$$\left. - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$I_3^{(2)} = \tilde{I}_{3_b}^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 + \frac{3}{2}\epsilon - \epsilon\ln K^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\ln K^2 \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right.$$
$$\left. - \frac{5}{12}\epsilon^2 \ln(m^2+1)\right\}$$

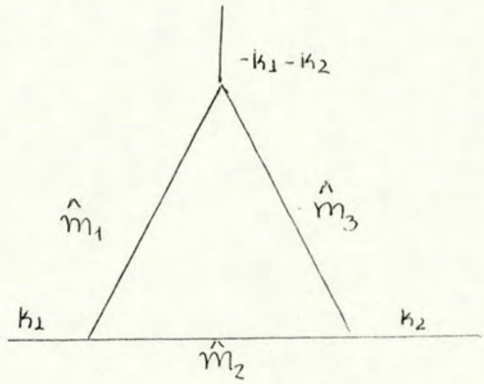
$$I_4^{(2)} = \tilde{I}_4^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{3}{2}\epsilon - \epsilon\ln K^2\right\}$$

$$\tilde{I}_1^{(2)} = \tilde{I}_2^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 - \frac{1}{3}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{1}{3}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{I}_{3_a}^{(2)} = -\frac{K^2}{3\epsilon^2}\left\{1 + \frac{7}{12}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln K^2 + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln K^2 \ln(\hat{m}^2+1)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{24}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

2 - Integrais que Contribuem na $\Gamma^{(3)}(K)$

2.1 - Ã Ordem de 1 Loop - Para tornar o processo mais simples, será calculada a integral mais geral



$$L(k_i) = \bar{L}(k_i) = \int \frac{dq}{(\hat{m}_1^2+q)\left[(q-k_1)+\hat{m}_2^2\right]\left[(q+k_2)^2+\hat{m}_3^2\right]}$$

Usando o método de Feynman:

$$L(k_i) = \frac{1}{2}\Gamma(3-\epsilon/2)\Gamma(\epsilon/2)\int_0^1 \frac{dx_1\,dx_2\;\theta(1-x_1-x_2)}{\left[x_1k_1^2(1-x_1)+x_2k_2^2(1-x_2)-2k_1k_2x_1x_2+\hat{m}_1^2(1-x_1-x_2)+\hat{m}_3^2x_1+\hat{m}\right.}$$

Faz-se a expansão em ϵ, obtendo-se:

$$L(k_i) = \frac{1}{2}\Gamma(3-\epsilon/2)\Gamma(\epsilon/2)\int_0^1 dx_1\,dx_2\;\theta(1-x_1-x_2)\left\{1-\frac{\epsilon}{2}\ln\left[k_1^2x_1(1-x_1)+k_2^2x_2(1-x_2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\hat{m}_1^2(1-x_1-x_2)+\hat{m}_2^2x_1+\hat{m}_3^2x_1-2k_1k_2x_1x_2\right]+\dots\right\}$$

Para o caso simétrico na temperatura crítica em $T=T_c$, obtém-se:

$$\boxed{L(K_i) = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \epsilon L\right\}}$$

No caso de haver quebra de simetria quadrática e trilinear onde $\hat{m}^2 \to \infty$:

$$L(K_i) = \frac{1}{2}\Gamma(3-\epsilon/2)\Gamma(\epsilon/2)\int_0^1 dx_1\, dx_2\, \Theta(1-x_1-x_2)\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln\left[K_1^2 x_1(1-x_1)\right.\right.$$

$$\left. + K_2^2 x_2(1-x_2) - 2K_1K_2 x_1 x_2 + \hat{m}_1^2(1-x_1-x_2) + \hat{m}_3^2 x_1 + \hat{m}_2^2 x_2\right] - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)$$

$$\left. + \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) \cdots \right\}$$

Se a quebra de simetria favorecer o ordenamento das componentes longitudinais, as integrais calculadas em $T = T_c$ (temperatura crítica das componentes longitudinais) e para $\hat{m}^2 \to \infty$ ("massa" das componentes transversais) apresentam a forma:(*)

$$L_1 = -\frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \epsilon L\right\}$$

$$L_2 = \hat{L}_3 = \tilde{L}_2 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3}{8}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\tilde{L}_1 = \hat{L}_2 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

Se a quebra de simetria favorecer o ordenamento segundo as componentes transversais, as integrais calculadas na temperatura crítica destas componentes e para $\hat{m}^2 \to \infty$, onde $\hat{m}^2$ está relacionada às componentes longitudinais, ficam da forma[i]:

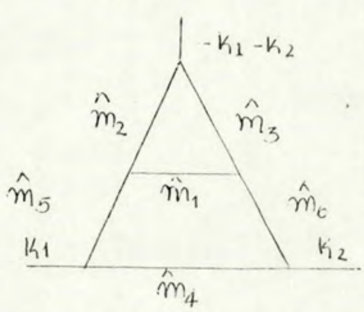
$$L_1 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3}{8}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$L_2 = \hat{L}_3 = \tilde{L}_2 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \epsilon L\right\}$$

$$\hat{L}_1 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{8}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_2 = \tilde{L}_1 = \frac{1}{\epsilon}\left\{1 - \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

2.2 - <u>À Ordem de 2 Loops</u> - Há três tipos de integrais que contribuem para $\Gamma^{(3)}(K_i)$ à ordem de 2 loops.



$$L_2^{(1)}(K_i) = \bar{L}_2^{(1)}(K_i) = \iint \frac{dl\, dq}{(l^2+\hat{m}_1^2)[(l+q+K_1)^2+\hat{m}_2^2][(K_2-q-l)^2+\hat{m}_3^2](q^2+\hat{m}_4^2)[(q+K_1)^2+m_5^2][(K_2-q)^2+m_6^2]}$$

① ② ③ ④

---

i

$$L = \int_0^1 dx_1\, dx_2\, \Theta(1-x_1-x_2)\ln\left[K_1^2 x_1(1-x_1) + K_2^2 x_2(1-x_2) - 2K_1K_2x_1x_2\right]$$

Usando-se o método de Feynman, fundindo-se os denominadores na ordem indicada e integrando-se em ② e ④, obtém-se:

$\boxed{\text{TIPO 1}}$

$$L_2^{(1)}(K_i) = \frac{\Gamma^2(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon)}{4}\int_0^1 dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5\; x_5^{\epsilon/2-1}(1-x_5)^2$$

$$x_2\,[x_2(1-x_2)]^{-\epsilon/2}\,\theta(1-x_3-x_4)\Big\{K_1^2 x_3(1-x_5)+K_2^2 x_4(1-x_5)+\hat{m}_4^2$$

$$(1-x_3-x_4)(1-x_5)+\hat{m}_5^2 x_3(1-x_5)+\hat{m}_6^2 x_4(1-x_5)+\big[K_1^2 x_2 x_1 x_5$$

$$(1-x_2x_1)+K_2^2 x_5 x_1(1-x_1)[1-x_2(1-x_1)]-2x_1x_2(1-x_1)K_1$$

$$K_2x_5+\hat{m}_1^2 x_5(1-x_2)+\hat{m}_2^2 x_5 x_1 x_2+\hat{m}_3^2 x_5 x_2(1-x_1)\big]\,x_2^{-1}(1-x_2)^{-1}$$

$$-\big[(K_1x_3-K_2x_4)(1-x_5)+[K_1x_1-K_2(1-x_1)x_5]\big]^2\Big\}^{\epsilon}$$

No caso de haver quebra de simetria quadrática e trilinear, fazendo-se a expansão da exponencial do logarítmo das potências em ϵ, obtém-se:

$$L_2^{(1)} = \Gamma^2(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon)\int x_5^{\epsilon/2-1}(1-x_5)^2\,x_2\,\theta(1-x_3-x_4)\Big\{1-\epsilon$$

$$\ln\big[K_1^2x_3(1-x_3)+K_2^2x_4(1-x_4)-2K_1K_2x_3x_4+\hat{m}_4^2(1-x_3-x_4)+\hat{m}_5^2x_3$$

$$+\hat{m}_6^2x_4\big]-\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\epsilon\ln(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{2}\ln^2\big[K_1^2x_3(1-x_3)+K_2^2x_4(1-x_4)$$

$$-2K_1K_2x_3x_4+\hat{m}_4^2(1-x_3-x_4)+\hat{m}_5^2x_3+\hat{m}_6^2x_4\big]-\frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)+\frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\ln^2(\hat{m}^2+1)+\dots\Big\}\Big\{1-\frac{\epsilon}{2}\ln x_2(1-x_2)+\dots\Big\}\Big\{1-\epsilon$$

$$\ln\left\{\frac{O(x_5\neq 0)}{O(x_5=0)}\right\} - \frac{\epsilon}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon}{2}\Big[1 +$$

$$\ln x2(1-x2) + L\Big]\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon}{2}\Big[1+\ln x2(1-x2) + L\Big]$$

$$\ln(\hat{m}^2+1)\Big\}$$

$$O(x_5) = \Big[k_1^2 x_3(1-x_3) + k_2^2 x_4(1-x_4) - 2k_1k_2x_3x_4 + \hat{m}_4^2(1-x_3-x_4) + \hat{m}_5^2 x_3 + \hat{m}_6 x_4\Big]$$
$$(1-x_5) + \Big[k_1^2 x_2 x_1 x_5(1-x_2x_1) + k_2^2 x_5 x_2(1-x_1)[1-x_2(1-x_1)]-2x_1x_2$$
$$(1-x_1)k_1k_2x_5 + \hat{m}_1^2 x_5(1-x_2) + \hat{m}_2^2 x_5 x_1 x_2 + \hat{m}_3^2 x_5 x_2(1-x_1)\Big]x_2^{-1}(1-x_2)^{-1}$$
$$- x_5^2[k_1x_1 - k_2(1-x_1)]^2 - (k_1x_3 - k_2x_4)(k_1x_1 - k_2(1-x_1))\,x_5(1-x_5)$$

Se a quebra de simetria for tal que favoreça o ordenamento segundo o componente longitudinal, as integrais calculadas na temperatura crítica da componente longitudinal e para $\hat{m}\to\infty$ onde $\hat{m}$ está relacionada aos propagadores transversais, terão a forma:

$$L_1^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon L\right\}$$

$$L_2^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon L - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1)L\right\}$$

$$L_3^{(1)} = L_4^{(1)} = L_5^{(1)} = \hat{L}_{4a}^{(1)} = \hat{L}_{6a}^{(1)} = \hat{L}_{7a\,b}^{(1)} = \hat{L}_{3a\,d}^{(1)} = \tilde{L}_4^{(1)}$$

$$L_3^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{5}{4}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_1^{(1)} = \hat{L}_2^{(1)} = \hat{L}_{3_b}^{(1)} = \hat{L}_{5_b}^{(1)}$$

$$\hat{L}_{5_b}^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{ 1 + \frac{\epsilon}{4} - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}^{(1)}_{3_{\substack{a\\c}}} = \hat{L}^{(1)}_{5_{\substack{a\\c}}} = \hat{L}^{(1)}_{\substack{6\\b\\c}} = \hat{L}^{(1)}_{6_{\substack{b\\c}}} = \tilde{L}^{(1)}_{1_{\substack{a\\b}}} = \tilde{L}^{(1)}_{\substack{2_a\\c}} = \tilde{L}^{(1)}_{3_{\substack{b\\c}}}$$

$$\hat{L}^{(1)}_{3_{\substack{a\\c}}} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{3}{4}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3}{4}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

Se a quebra de simetria for tal que favoreça o ordenamento segundo as componentes transversais, as integrais calculadas na temperatura crítica destas componentes para $\hat{m}^2 \to \infty$, onde $\hat{m}^2$ está relacionada à componente longitudinal, terão a forma:

$$L_1^{(1)} = L_2^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{5}{4}\epsilon - \epsilon \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$L_3^{(1)} = \hat{L}_{4a}^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon L - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2 L \ln(m^2+1)\right\}$$

$$L_4^{(1)} = L_{6a}^{(1)} = \tilde{L}_{3_{a \atop d}}^{(1)}$$

$$L_4^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon L - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2 L \ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$L_5^{(1)} = \hat{L}_{7_{a \atop b}} = \tilde{L}_4^{(1)}$$

$$L_5^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{4}\epsilon - 2\epsilon L\right\}$$

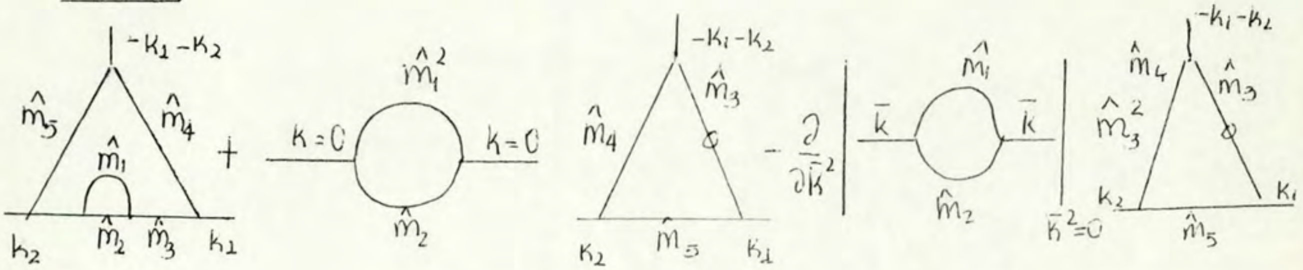
$$\hat{L}_1^{(1)} = \hat{L}_2^{(1)} = \hat{L}_{3_b}^{(1)} = \hat{L}_{4_b}^{(1)} = \hat{L}_{5_b}^{(1)}$$

$$\hat{L}_1^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 - \frac{3}{4}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{3}{4}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_{3_{a \atop c}}^{(1)} = \hat{L}_{5_{a \atop c}}^{(1)} = \hat{L}_{6_{b \atop c}}^{(1)} = \tilde{L}_1^{(1)} = \tilde{L}_{2_{a \atop c}}^{(1)} = \tilde{L}_{3_{b \atop c}}^{(1)}$$

$$\hat{L}_{3_a}^{(1)} = \frac{1}{2\epsilon^2}\left\{1 + \frac{\epsilon}{4} - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$\boxed{\text{TIPO 2}}$



$$L^{(2)}(k_i,\hat{m}^2) = \bar{L}^{(2)}(k_i,\hat{m}^2) + \frac{1}{3}\,\bar{I}(k=0)\,\frac{\partial}{\partial \hat{m}^2}\bar{L}(k_i) - \frac{\hat{m}^2}{3}\,\frac{b_1}{B_1}\,\bar{L}(k_i)$$

$$\bar{L}^{(2)}(k_i,\hat{m}^2) = \int \frac{d\ell\, dq}{\underbrace{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(q-\ell)^2+\hat{m}_2^2]}_{1}(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+k_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-k_2)^2+\hat{m}_5^2]}$$

$$-\int \frac{d\ell\, dq}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)(\ell^2+\hat{m}_2^2)(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+k_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-k_2)^2+m_5^2]}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\int \frac{d\ell\, dq}{(\ell^2+\hat{m}_1^2)[(\bar{k}-\ell)^2+\hat{m}_2^2](q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+k_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-k_2)^2+\hat{m}_5^2]}$$

Usando o método de Feynman, reagrupam-se os termos em 1. Integrando em ℓ, obtém-se:

$$L^{(2)}(K_i,\hat{m}^2) = \int_0^1\!\!\int \frac{dx_1\,dq\;\Gamma(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2-1)\,[x_1(1-x_1)]^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+K_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-K_2)^2+\hat{m}_5^2]\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\frac{\epsilon}{2}-1}}$$

$$-\int_0^1\!\!\int \frac{dx_1\,dq\;\Gamma(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2-1)\,[x_1(1-x_1)]^{1-\epsilon/2}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+K_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-K_2)^2+\hat{m}_5^2]\left[\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}-\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2-1}} -$$

$$+\int_0^1\!\!\int \frac{\partial}{\partial\bar{K}^2}\left.\frac{dx_1\,dq\;\Gamma(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2-1)\,[x_1(1-x_1)]^{1-\epsilon/2}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+K_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-K_2)^2+\hat{m}_5^2]\left[\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}+\bar{K}^2\right]^{1-\frac{\epsilon}{2}}}\right|_{\bar{K}^2=0}$$

Sanando-se e subtraindo-se termos convenientes, obtem-se:

$$L^{(2)}(K_i,\hat{m}^2) = \int_0^1\!\!\int \frac{(q^2+\hat{m}_3^2)\,\Gamma(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2-1)\,[x_1(1-x_1)]^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+K_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-K_2)^2+m_5^2]\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}}$$

$$+\int_0^1\!\!\int \frac{\left(\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}-\hat{m}_3^2\right)\Gamma(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2-1)\,[x_1(1-x_1)]^{1-\epsilon/2}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2[(q+K_1)^2+\hat{m}_4^2][(q-K_2)^2+\hat{m}_5^2]\left[q^2+\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}}$$

$$-\int_0^1\!\!\int \frac{dq\, dx_1 \left[\frac{\hat{\omega}_1^2}{x_1} + \frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1} \right] \Gamma(3-\epsilon/2)\, \Gamma(\epsilon/2 - 1)\, \left[x_1(1-x_1)\right]^{1-\epsilon/2}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2 \left[(q+k_1)^2 + \hat{m}_4^2\right]\left[(q-k_2)^2+\hat{m}_5^2\right]\left[\frac{\hat{m}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}}$$

$$+\frac{\partial}{\partial \bar{k}^2}\int_0^1\!\!\int \frac{dq\, dx_1\ \hat{m}_3^2 \left[\frac{\hat{\omega}_1^2}{x_1} + \frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1} + \bar{k}^2 \right] \Gamma(3-\epsilon/2)\, \Gamma(\epsilon/2 - 1)\, \left[x_1(1-x_1)\right]^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{2(q^2+\hat{m}_3^2)^2 \left[(q+k_1)^2 + \hat{m}_4^2\right]\left[(q-k_2)^2+\hat{m}_5^2\right]\left[\bar{k}^2 + \frac{\hat{\omega}_1^2}{x_1}+\frac{\hat{m}_2^2}{1-x_1}\right]^{\epsilon/2}}$$

Agrupa-se uma vez mais os denominadores em q mediante o truque de Feynman, faz-se as integrações sobre parâmetros e a expansão em ϵ.

Se a quebra de simetria for tal que forneça o ordenamento segundo a componente longitudinal, as integrais, na temperatura crítica da componente longitudinal e para $\hat{m}^2 \to \infty$, onde m^2 está relacionada às componentes transversais, são dadas por:

$$L_1^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{11}{12}\epsilon - 2\epsilon L \right\}$$

$$L_2^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{ 1 - \frac{11}{12}\epsilon - 2\epsilon L - \frac{\epsilon^2}{4}\ln(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2 L \ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{12}\ln(\hat{m}^2+1) \right\}$$

$$L_3^{(2)} = L_4^{(2)} = \hat{L}_{6_b}^{(2)} = \hat{L}_7^{(2)} = \tilde{L}_{3_b}^{(2)} = \tilde{L}_4^{(2)}$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{11}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{11}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_1^{(2)} = \hat{L}_{3a_b}^{(2)} = \hat{L}_4^{(2)}$$

$$\hat{L}_1^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 + \frac{7}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{7}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_2^{(2)} = \hat{L}_{5a_b}^{(2)} = \hat{L}_{6_a}^{(2)} = \tilde{L}_1^{(2)} = \tilde{L}_2^{(2)} = \tilde{L}_{3_a}^{(2)}$$

$$\hat{L}_2^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

Se a quebra de simetria for tal que favoreça o ordenamento segundo as componentes transversais, as integrais, na temperatura crítica das componentes transversais e para $\hat{m}^2 \to \infty$, onde $\hat{m}^2$ está relacionado à componente longitudinal, são dadas por:

$$L_1^{(2)} = L_2^{(2)}$$

$$L_1^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{11}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1 + \frac{11}{12}\epsilon^2\ln(m^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$L_3^{(2)} = \tilde{L}_{3_b}^{(2)} = \hat{L}_{6_b}^{(2)}$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{11}{12}\epsilon - 2\epsilon L + \frac{\epsilon^2}{3}\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{\epsilon^2}{4}\ln^2(\hat{m}^2+1) + \epsilon^2 L \ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$L_4^{(2)} = \hat{L}_{7_{a,b}}^{(2)} = \tilde{L}_4^{(2)}$$

$$L_4^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{11}{12}\epsilon - 2\epsilon L\right\}$$

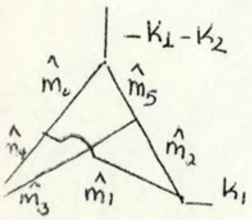
$$\hat{L}_1^{(2)} = \hat{L}_{3_{a,b}} = \hat{L}_4^{(2)}$$

$$\hat{L}_1^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 - \frac{5}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{5}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$$\hat{L}_2^{(2)} = \hat{L}_{5_a}^{(2)} = \hat{L}_{5_b}^{(2)} = \hat{L}_{6_a}^{(2)} = \tilde{L}_1^{(2)} = \tilde{L}_{3_c}^{(2)} = \tilde{L}_1^{(2)} = \tilde{L}_{9_{a,b}}^{(2)}$$

$$\hat{L}_2^{(2)} = -\frac{1}{6\epsilon^2}\left\{1 + \frac{7}{12}\epsilon - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1) - \frac{7}{12}\epsilon^2\ln(\hat{m}^2+1) + \frac{\epsilon^2}{2}\ln^2(\hat{m}^2+1)\right\}$$

$\boxed{\text{TIPO 3}}$



$$L_\ell^{(3)}(k_i,\hat{m}^2) = \bar{L}^{(3)}(k_i,\hat{m}^2) = \int \frac{dl\, dq}{(q^2+\hat{m}_1^2)[(k_1-q)^2+\hat{m}_2^2][(k_2-l)^2+\hat{m}_4^2](l^2+\hat{m}_3^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{[(l+k_1-q)^2+\hat{m}_5^2][(q-l+k_2)^2+\hat{m}_6^2]}$$

Usando o método de Feynman, obtém-se:

$$L^{(3)}(k_i) = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma^2(3-\epsilon/2)\,\Gamma(\epsilon/2+1)\,\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(\epsilon/2+1)}\int \frac{[x_3(1-x_3)]^{-\epsilon/2}\,x_5^{\epsilon/2}\,\theta(1-x_4-x_5)}{[M^2+k_i^2]^{\epsilon}}$$

$$[M^2+k_i^2]^{\epsilon} = \Big\{ \hat{m}_2^2 x_4 + k_1^2 x_4 + \hat{m}_1^2(1-x_4-x_5) - (-k_1x_2 + k_2 - k_2x_2 + k_2x_1)^2$$

$$+ \frac{k_1^2 x_3 + k_2^2 x_3 + k_2^2 x_2 x_3 + k_2^2 x_1 - k_2^2 x_1 x_3 + \hat{m}_5^2 x_2 x_3 + \hat{m}_6^2 x_3 + \hat{m}_3^2}{x_3(1-x_3)}$$

$$+ \frac{\hat{m}_3^2 x_1 x_3 - \hat{m}_3^2 x_1 - \hat{m}_3^2 x_3}{x_3(1-x_3)}\Big\}^{\epsilon}$$

Faz-se a expansão em ϵ, obtendo-se:

$$L^{(3)}(k_i,\hat{m}^2) = \frac{1}{2\epsilon}\Big\{1 - \epsilon\int_0^1 dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,dx_5\;\theta(1-x_4-x_5)$$

$$\left(\ln[M^2-k_i^2] - \ln(\hat{m}^2+1) + \ln[\hat{m}^2+1)\right\}$$

Se há quebra de simetria quadrática e trilinear favorecendo o ordenamento longitudinal, na temperatura crítica da componente longitudinal:

$$L_1^{(3)} = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$L_2^{(3)} = \frac{1}{2\epsilon}\left\{1 - \epsilon\ln(\hat{m}^2+1)\right\}$$

No caso da quebra de simetria favorecer o ordenamento segundo as componentes transversais:

$$L_1^{(3)} = \frac{1}{2\epsilon}\left\{1 - \epsilon \ln(\hat{m}^2 + 1)\right\}$$

$$L_2^{(3)} = \frac{1}{2\epsilon}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FISHER, M.E. The theory of equilibrium critical phenomena. Rep. Prog. Phys., London, 30:615-730, Jan. 1967.

   STANLEY, H.P. Phase transitions and critical phenomena. Oxford, Clarendon, 1971.

2. POTTS, R.B. Some generalized order-disorder transformations. Proc. Cambridge Philos. Soc., London, 48(1):106-9, 1952.

   FISHER, M.E. The renormalization group in the theory of critical behavior. Rev. Mod. Phys., New York, 46(4):597-616, Oct. 1976.

   WU, F.Y. The Potts model. Rev. Mod. Phys., New York, 54(1):235-68, Jan. 1982.

3. PAPOULAR, M. On the behavior of viscosity at the nematic-isotropic transition. Phys. Lett., Amsterdam, 30A(1): 5-6, Sept. 1969.

4. ALEXANDER, S. Continuous phase transition which should be first order. Solid State Commun., Elmsford, 14(11):1069-71.

5. AHARONY, A.; MÜLLER, K.A.; BERLINGER, W. Trigonal-to-tetragonal transition in stressed $SrTiO_3$: a realization of the three-state Potts model. Phys. Rev. Lett., New York, 38(1):33-40, Jan. 1977.

6. MUKAMEL, D.; FISHER, M.E.; DOMANY, E. Magnetization of cubic ferromagnets and the three-component Potts model. Phys. Rev. Lett., New York, 37(10):565-8, Sept. 1976.

7. FORTUIN, C.M. & KASTELEYN, P.W. On randon-cluster model. Physica, Amsterdam, 57(4):536-64, Feb. 1972.

8. HUBBARD, J. Calculation of partition functions. Phys. Rev. Lett., New York, 3(2):77-8, July 1959.

9. PRIEST, R.G. & LUBENSKY, T.C. Critical properties of two tensor models with application to the percolation problem. Phys. Rev. B, New York, 13(9):4159-71, May, 1976.

10. AMIT, D.J. Field theory the renormalization group and critical phenomena. New York, McGraw-Hill, 1978. 336 p.

11. BRELIN, E.; Le GUILLON, J.; ZINN-JUSTIN, J. Field theoretical approach to critical phenomena. In: DOMB, C. & GREEN, M.S. ed. Phase Transition and Critical Phenomena, London, Academic Press, 1976, V. 6, p. 125-244.

12. BLANKSCHTEIN, D. & AHARONY, A. Critical and tricritical points near the Potts model transition of uniaxially stressed $SrTiO_3$. J. Phys. C, London, 14(14):1919-44, May, 1981.

13. FONTANARI, J.F. & THEUMANN, W.K. Effects of trilinear symmetry breaking on the Potts model transition of uniaxially stressed $SrTiO_3$. A ser publicado.

14. PYTTE, E. Renormalization-group calculation of first and second-order phase transitions in the Potts model. Phys. Rev. B, New York, 22(9):4450-61, Nov. 1960.

15. THEUMANN, W.K. First-order phase transitions in the Potts model with trilinear symmetry breaking. Phys. Rev. B, New York, 27(11):6941-53, June, 1983.

16. WILSON, K.G. & KOGUT, J.B. The renormalization group and the expansion. Phys.Rep., Amsterdam, 12C(2):78-199, Aug. 1974.

17. AMIT, D.J. Renormalization of the Potts model. J. Phys. A, London, 9(9):1441-59, Sept. 1976.

18. THEUMANN, W.K. Crossover from first-order and near-spinodal first-order to continuous transitions in the three- and four-state Potts model. Phys. Rev. B, New York, 28(11): 6519-22, Dec. 1983.

19. AMIT, D.J. & GOLDSCHMIDT, Y. Crossover at a bicritical point: asymptotic behavior of a field theory with quadratic symmetry breaking. Ann.Phys., New York, 114(1/2):356-409, Sept. 1978.

20. THEUMANN, A. & THEUMANN, W.K. Symmetry breaking in Potts ϕ^3 field theory. Crossover in random ferromagnets. Phys. Rev. B, New York, 26(7):3856-69, Oct. 1982.

21. BARBOSA, M.C.B. Renormalizabilidade do modelo de Potts com quebra de simetria a ordem de dois loops. In. Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada, VII, São Lourenço, MG, 2-5 maio, 1984 (a ser publicado).

22. ZIA, R.K.P. & WALLACE, D.J. Critical behavior of the continuous n-component Potts model. J.Phys.A, London, 8(9):1495-507, Sept. 1975.

23. WALLACE, D.J. & YOUNG, A.P. Spin anisotropy and crossover in the Potts model. Phys.Rev.B, New York, 17(5):2384-7, Mar. 1978.

24. THEUMANN, W.K. & GUSMÃO, M.A. Crossover exponents for the Potts model with quadratic symmetry breaking. Phys.Rev.B, New York, 30(5):2800-5, Sept. 1984.

25. TIHOOFT, G. & VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. Nucl. Phys. B, Amsterdam, 44(1):189-213, July, 1972.

26. BOLLINI, C.G. & GIAMBIAGI, J.J. Dimensional renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter. Nuovo Cimento B, Bologna, 12(1):20-6, Nov. 1972.

_______. Lowest order divergent graphs in -dimentional space. Phys. Lett. B, 40(5):566-8, Aug. 1972.