

GROEHS

UM ESTUDO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES
EM FOLHAS POLIÉDRICAS UTILIZANDO
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

"TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE POS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA ^{CIÊNCIA} DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
SUL, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIA (Ms. C.)"

ORIENTADOR : PROF. AGUSTIN J. FERRANTE

ESCOLA DE ENGENHARIA - U.F.R.G.S.

PORTO ALEGRE

RIO GRANDE DO SUL - BRASIL

Janeiro de 1975

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Agustin J. Ferrante pela paciência e atenção na orientação deste trabalho.

Aos Prof. José S. G. Franco e Dari A. Antonioli pelo incentivo e apoio que sempre me dispensaram.

A Edison C. P. de Lima pela ajuda, que me prestou, na realização deste trabalho.

Ao grupo de desenvolvimento do projeto LORANE e ao Centro de Processamento de dados da U.F.R.G.S. pela colaboração prestada.

Aos professores, do curso de Pos Graduação em Engenharia Civil da U.F.R.G.S., pelos ensinamentos recebidos.

À U.F.R.G.S. , CAPES e BNDE pelo auxílio financeiro.

Aos funcionários do curso de Pos Graduação por sua Solícitude.

À meus pais,

À minha esposa

e

Ao meu filho

Sinopse.

Neste trabalho procura-se desenvolver dois elementos re-
tangulares com o objetivo de se estudar as tensões e deformações que ocor-
rem em folhas poliédricas, e em estruturas que podem ser aproximadas por me-
io de uma folha poliédrica.

São desenvolvidos dois elementos. Um, segundo a formula-
ção do método dos deslocamentos (modelo compatível) e outro, segundo a for-
mulação híbrida com campo de tensões assumidas.

Foram realizados diversos testes, utilizando ambos ele-
mentos, e comparando-se os resultados obtidos com resultados experimentais
obtidos por diversos experimentadores. A maioria dos testes foi feita com
dois tipos de malha para que se tivesse uma idéia da rapidez da convergên-
cia dos elementos. São apresentadas numerosas tabelas e gráficos com os re-
sultados.

Synopsis.

This work is concerned with the development of general space rectangular elements for the study of the stress and deformation behaviour of folded plate-type structures, and also shell structures which can be approximated by an assemblage of plane elements.

Two elements are developed. One, following the formulation of the displacement method (compatible model) and the other, following the formulation of the hybrid model with assumed stress fields.

Several tests were carried out, using both elements, and comparing the numerical results with experimental results obtained by several other researchers. Most of the tests were done using two types of meshes. The objective was to have an idea of the convergence rate of the elements. Several tables and graphics are presented with the results.

INDICE

	Pag.
<u>NOTAÇÕES</u>	1
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	4
1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	4
1.2 - APLICAÇÕES E IMPORTÂNCIA	5
1.3 - OBJETIVO DESTE TRABALHO	8
<u>CAPÍTULO II - FOLHAS POLIÉDRICAS E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</u>	
<u>NITOS</u>	9
2.1 - GENERALIDADES	9
2.2 - RÁPIDO HISTÓRICO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . .	10
<u>CAPÍTULO III - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</u> .	12
3.1 - PROCEDIMENTO GERAL	12
3.2 - MODELO COMPATÍVEL	17
3.2.1 - Generalidades	17
3.2.2 - Elemento para o estado plano de tensões	20
3.2.3 - Elemento retangular para estudo de placas delga-	
das	24
3.2.3.1 - Relações gerais das placas planas delgadas	
submetidas à flexão	24
3.2.3.2 - Método dos elementos finitos aplicado às	
placas planas delgadas submetidas à flexão	26
3.3 - MODELO HÍBRIDO I	30

3.3.1 - Elemento retangular híbrido, com campo de tensões assumido, para análise de estado plano de tensões	32
3.3.2 - Elemento retangular híbrido, com campo de tensões assumido, para análise de placas delgadas em flexão	39
<u>CAPÍTULO IV - PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DE UM ELEMENTO PARA</u>	
<u>ANALISE DE FOLHAS POLIÉDRICAS</u>	50
4.1 - INTRODUÇÃO	50
4.2 - OBTENÇÃO DO ELEMENTO DE FOLHA POLIÉDRICA	51
4.3 - ROTAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE COORDENADAS LOCAIS PARA GLOBAIS	59
<u>CAPÍTULO V - APLICAÇÕES</u>	65
5.1 - INTRODUÇÃO	65
5.2 - PRIMEIRO EXERCÍCIO	66
5.3 - SEGUNDO EXERCÍCIO	68
5.4 - MODELO 1	70
5.4.1 - Modelo 1 analisado sem vetor de cargas consistente	70
5.4.2 - Modelo 1 analisado com vetor de cargas consistente	76
5.5 - MODELO 2	83
5.6 - MODELO 3	94
5.7 - MODELO 4	100
5.8 - MODELO 5	111

5.9 - MODELO 1 COM DIAFRAGMA	116
<u>CAPITULO VI - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</u>	121
CAPITULO VII - APÊNDICES	124
7.1 - APÊNDICE 1	124
7.1.1 - Condições de convergência no modelo compatível	124
7.1.2 - Condições a serem satisfeitas pelos parâmetros de tensões no modelo híbrido	125
7.1.2.1 - Estado plano de tensões	125
7.1.2.2 - Placas delgadas em flexão	126
7.2 - APÊNDICE 2	126
7.3 - APÊNDICE 3	139
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS</u> :	153

UM ESTUDO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES
EM FOLHAS POLIÉDRICAS UTILIZANDO
O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

"TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE POS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
SUL, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIA (Ms. C.)"

ORIENTADOR : PROF. AGUSTIN J. FERRANTE

ESCOLA DE ENGENHARIA - U.F.R.G.S.

PORTO ALEGRE

RIO GRANDE DO SUL - BRASIL

Janeiro de 1975

NOTAÇÕES

- { } - vetor
- \underline{X} - o sinal \sim indica que X é um vetor ou matriz.
- \underline{X}^T - indica vetor ou matriz transposta do vetor ou matriz \underline{X} .
- m - número de elementos de um corpo.
- i - número de um elemento genérico.
- j, jj - número genérico dos nós, inicial e final, de um elemento no sentido anti-horário.
- ϕ - função interpoladora ou aproximativa.
- $\underline{\sigma}$ - representa o vetor de tensões que ocorrem em um ponto.
- $\underline{\epsilon}$ - representa o vetor das deformações específicas que ocorrem em um ponto.
- \underline{b} - representa o vetor das forças de volume por unidade de volume.
- \underline{P}^0 - representa o vetor de forças prescritas em S_σ .
- S_σ - região do contorno onde atua \underline{P}^0 .
- \underline{U} - representa o vetor de deslocamentos que ocorrem em um ponto.
- V - volume do corpo.
- X, Y, Z - representam as direções dos eixos coordenados locais. Se estiverem afetadas de índice linha representarão coordenadas globais.
- \underline{U}^0 - representa o vetor dos deslocamentos prescrito no contorno S_u .
- S_u - região do contorno onde estão prescritos os deslocamentos \underline{U}^0 .
- τ - indica tensões de corte.
- \underline{p} - representa o vetor de forças de superfície por unidade de superfície.
- n - número de nós que tem o elemento.

- \underline{U}_e - representa o vetor que contém todos os deslocamentos nodais locais do elemento.
- $\underline{D}, \underline{C}$ - matrizes de constantes elásticas.
- $\underline{\epsilon}_o$ - representa o vetor de deslocamentos específicos impostos.
- \underline{k}_e - matriz de rigidez local do elemento.
- \underline{P}_e - vetor de cargas nodais locais equivalentes do elemento.
- \underline{U}' - vetor qualquer de deslocamentos, em coordenadas globais.
- \underline{U} - vetor qualquer de deslocamentos, em coordenadas locais.
- \underline{P}' - vetor qualquer de forças, em coordenadas globais.
- \underline{P} - vetor qualquer de forças, em coordenadas locais.
- \underline{P}_e - vetor de cargas equivalentes do elemento, em coordenadas globais.
- \underline{U}_e - representa o vetor que contém todos os deslocamentos nodais do elemento, em coordenadas globais.
- \underline{K} - matriz de rigidez global (do corpo).
- \underline{P} - vetor de cargas nodais equivalentes global (do corpo).
- \underline{U} - vetor que contém todos os deslocamentos nodais do corpo em coordenadas globais.
- a - comprimento do lado do elemento segundo o eixo local X.
- b - comprimento do lado do elemento segundo o eixo local Y.
- ν - coeficiente de Poisson do material.
- E - módulo de Young do material.
- $\underline{A}, \underline{L}$ - matriz que relaciona os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento com os deslocamentos nodais do mesmo elemento.
- \underline{B} - Matriz que relaciona os deslocamentos nodais do elemento com as deformações específicas em um ponto do elemento.
- $\underline{K}\underline{K}$ - constante.
- u^* - deslocamento de um ponto não situado na superfície média da lâmina segundo o eixo local X.
- v^* - ídem segundo eixo local Y.
- w^* - ídem segundo eixo local Z.
- \underline{D}_b - matriz de constantes elásticas das placas.
- Ω - densidade de energia complementar.

σ^n, β - parâmetros de tensão generalizados.

λ - ângulo formado entre o eixo dos X do sistema de referência e a normal \vec{n} superfície considerada.

R.M.D- elemento retangular do método dos deslocamentos utilizado no estudo de folhas poliédricas. Neste trabalho é tam
bém simbolizado por RMD.

HIBRIDO- elemento retangular, modelo híbrido I, utilizado no estudo de folhas poliédricas.

CAPITULO I

1. Introdução

1.1 Considerações gerais

Neste estudo queremos fazer uma análise de estruturas que a literatura inglesa denomina de "Folded Plates". Pesquisando um termo a ser empregado em português,* encontramos o termo "folha poliédrica"⁽¹⁾, que é definida como sendo "folha constituída de lâminas planas".⁽¹⁾ O termo "lâmina" é definido como sendo "corpo em que uma das dimensões é muito menor do que as outras duas".⁽¹⁾

Poderão existir, fundamentalmente, dois tipos de folhas poliédricas:

- 1) Folha poliédrica prismática ou mais simplesmente folha prismática.⁽¹⁾
- 2) Folha poliédrica não prismática.

Podemos ver na figura 1a uma folha poliédrica prismática. Ela é definida como sendo "folha poliédrica de arestas paralelas".⁽¹⁾ Além disto, usualmente, as duas extremidades são fechadas por meio de outras duas placas finas que recebem o nome de diafragmas.

Na figura 1b podemos ver uma folha poliédrica não prismática. Podemos defini-la como sendo uma folha poli

* TAMBÉM CASCA POLIÉDRICA

édrica de arestas não paralelas. Aqui também poderemos ter ou não diafragmas.

Ambos os tipos podem ainda ter diafragmas paralelos ou não paralelos. Poderão existir, também, diafragmas intermediários, além dos existentes nos extremos da estrutura.

1.2 Aplicações e Importância(2)

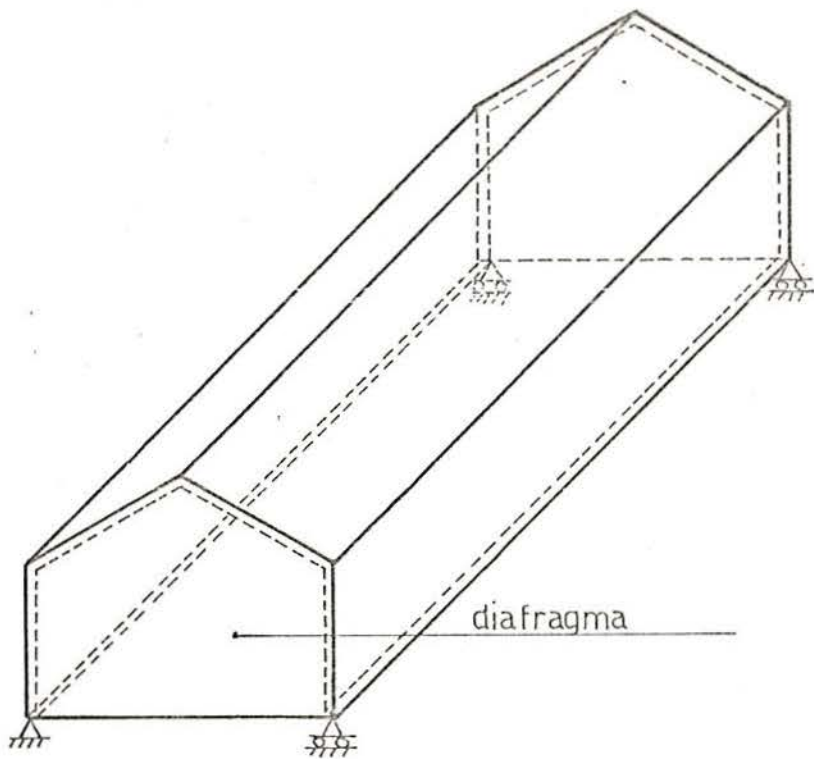
A partir de 1953 houve uma rápida expansão da literatura sobre folhas poliédricas. Isto indica, por si só, um aumento do interesse profissional neste tipo de estrutura.

Em engenharia civil o material mais empregado neste tipo de estrutura é o concreto armado. Entretanto, poder-se-á empregar a madeira, se estiver disponível na região, e, já se realizaram construções deste tipo empregando metal. Neste último caso as vantagens econômicas até agora não estão claramente definidas.

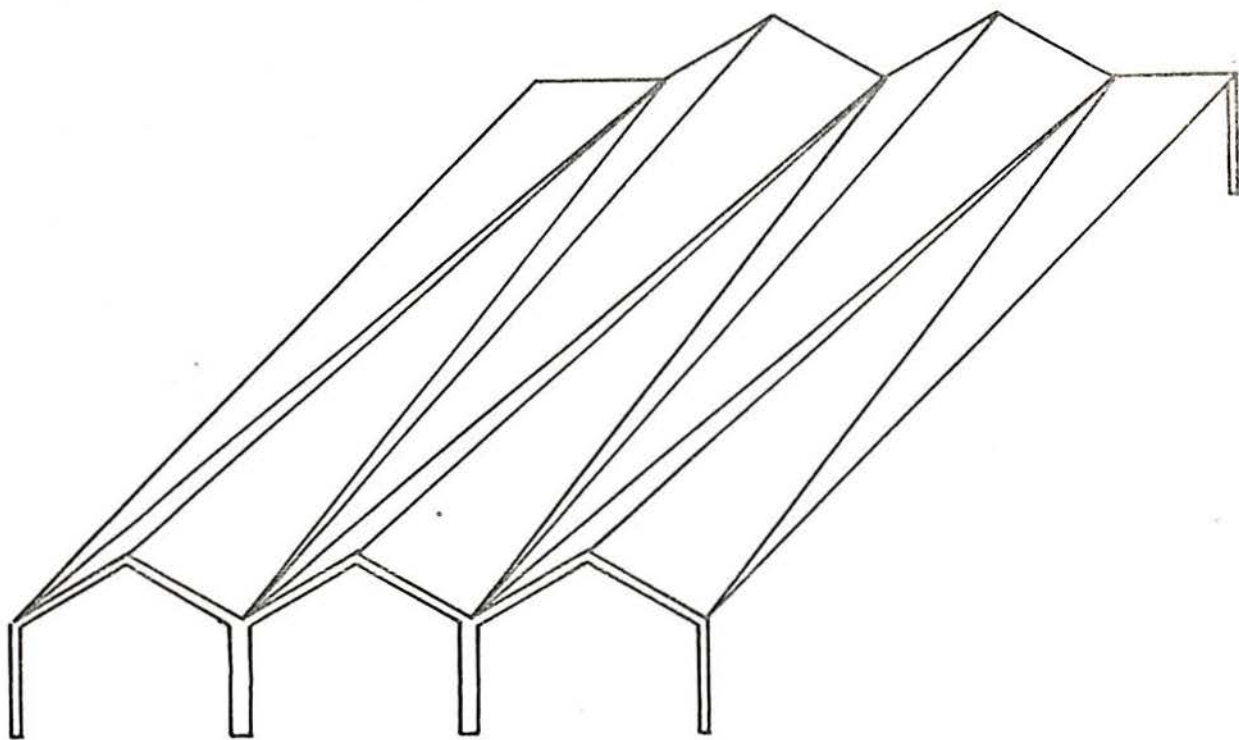
Este tipo de estrutura encontra também aplicações na engenharia mecânica. Aí ela aparece sob as mais diversas formas como estruturas de máquinas, ferramentas, chassis de caminhões, ônibus, etc... Neste caso o material empregado será, normalmente, o aço ou ferro fundido.

Vemos nas figuras 2 e 3 algumas aplicações, em engenharia civil, das folhas poliédricas. Embora a aplicação principal seja na construção de telhados, a folha poliédrica foi adaptada para ser utilizada como reservatório, na construção de assoalhos, e mesmo, na realização de fundações. Em alguns casos treliças constituídas de folhas poliédricas, podem ser usadas com vantagem para se conseguir um bom efeito arquitetônico, sem perda econômica.

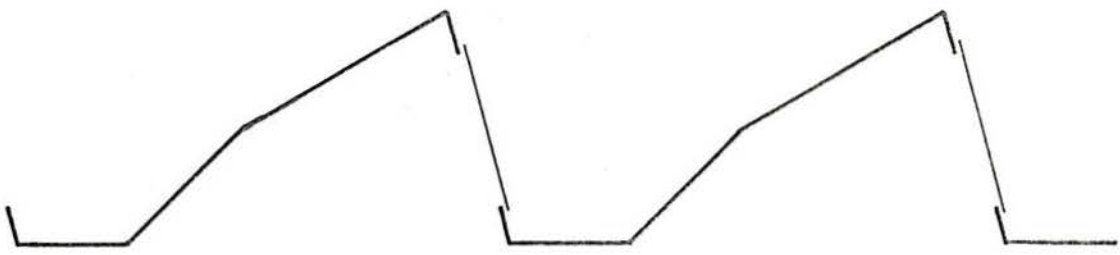
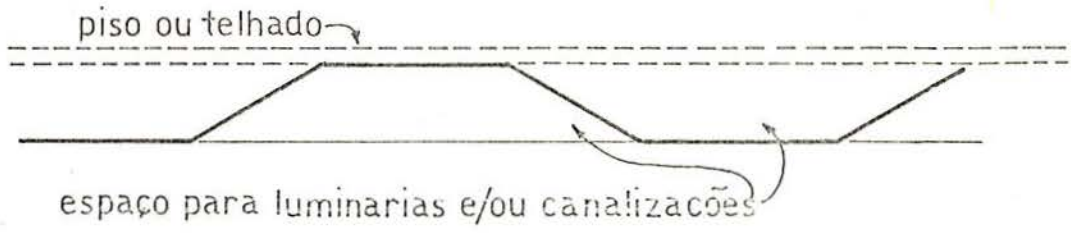
Quando se usa uma folha poliédrica o invólucro é a própria estrutura principal. Isto contrasta com as estruturas convencionais onde se tem placas e vigas, treliças



a) folha poliédrica prismática



b) folha poliédrica não prismática



telhado tipo "shed"

Fig. Nº 2

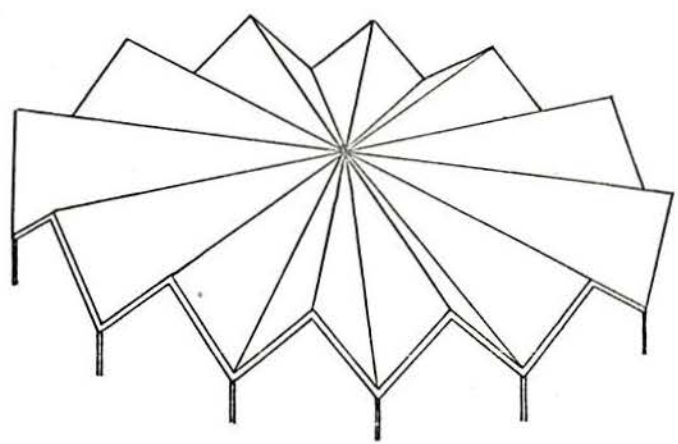


Fig. Nº 3 -telhado do tipo "guarda-chuva"

e cobertura, etc... Nestas estruturas, o invólucro é um sistema estrutural secundário, que não contribue para aumentar a capacidade de resistência da estrutura principal. O resultado disto é uma maior economia quando se usa uma folha poliédrica.

1.3 Objetivo deste Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo a análise de tensões e deformações em folhas poliédricas, através da utilização do método dos elementos finitos. Mais precisamente propõe a utilização de um elemento retangular do método dos deslocamentos (simbolizado neste trabalho simplesmente como R.M.D. ou ainda como RMD), e de um elemento de formulação híbrida com campo de tensões assumidas (simbolizado neste trabalho simplesmente como HIBRIDO), para a realização da análise acima prescrita.

Como será mostrado mais adiante, foi realizada uma série bastante grande de verificações, comparando-se os resultados obtidos utilizando-se o método dos elementos finitos e os resultados experimentais obtidos em modelos por diversos experimentadores. De uma maneira geral os resultados obtidos confirmaram com boa aproximação os resultados experimentais.

Note-se que, como ambos os elementos aqui apresentados são elementos retangulares, eles se prestam para a análise de folhas poliédricas constituídas de lâminas placas retangulares. Servem ainda, para estruturas que possam ser representadas aproximadamente por folhas poliédricas prismáticas, como é o caso de reservatórios e cascas cilíndricas etc...

Foi feito ainda em um dos modelos apresentados uma tentativa para se levar em consideração o diafragma.

CAPÍTULO II

2. Folhas Poliédricas e o método dos elementos finitos

2.1 Generalidades

O estudo das folhas poliédricas foi feito inicialmente na Europa, na década dos 30.⁽³⁾ Entre esta data e o presente um longo caminho foi percorrido, tendo sido feitas numerosas investigações tanto de ordem analítica como experimental. Numerosos métodos analíticos foram desenvolvidos para a resolução deste tipo de estrutura. Estes métodos apresentam entretanto, uma série de problemas que tornam a sua aplicação muitas vezes restrita a certos problemas particulares. Isto conduz a uma perda de generalidade, que nem sempre é interessante. Um outro problema que pode ser citado, é que a estrutura não é considerada como um todo.

Com o método dos elementos finitos, torna-se possível analisar uma folha poliédrica como um todo, e para qualquer condição de apoio e carregamento.

Isto nos dá uma grande generalidade, e torna o método dos elementos finitos particularmente interessante para a análise deste tipo de estruturas. A principal limitação, na aplicação do método, reside no fato de que, a pessoa que o quiser utilizar, deve ter acesso a um computador de bom

tamanho. Com o progresso atual da tecnologia, e com a existência, cada vez mais numerosa, de computadores grandes, este problema tende a desaparecer ou a ser minimizado. Portanto o método dos elementos finitos, devido a sua generalidade de aplicação, tende a se tornar cada vez mais empregado. Isto não apenas no problema particular de folhas poliédricas, mas em estudos que vão desde a análise de uma simples viga até os mais complexos problemas de poluição ambiental. Daí a sua importância e atualidade.

2.2 Rápido Histórico do Método dos Elementos Finitos (3)

Da necessidade de se resolver problemas, de estado plano de tensões e de estado plano de deformações, para a indústria aeronáutica, nasceu o método dos elementos finitos. Ele foi publicado inicialmente em 1956 por Turner e outros. Em 1960 surgiu uma publicação similar, devida a Clough, orientada para aplicações na engenharia civil. Nestes primeiros trabalhos, foram desenvolvidos tanto elementos triangulares como retangulares para problemas bidimensionais. Os resultados obtidos nas aplicações foram bastante precisos.

A aplicação do método na resolução de problemas de flexão de placas encontrou dificuldades, devido a falta de precisão dos elementos triangulares desenvolvidos para este fim.

Contribuições de importância no desenvolvimento de elementos retangulares foram feitas por Melosh (1961 e 1963) e por Zienkiewicz e Cheung (1964). Um trabalho mais antigo de Tocher (1962) incluía vários tipos de elementos triangulares. Clough e Tocher (1965) realizaram um trabalho de comparação, entre a relativa precisão dos elementos triangulares de Tocher, já apresentados, e a de um novo e mais refinado elemento triangular, sugerido por Bazeley (1965). Atualmente existem elementos triangulares e retangulares que fornecem razoável precisão na sua resolução de problemas de engenharia. os elemen-

tos triangulares, entretanto, de uma maneira geral necessitam de malhas muito mais refinadas do que os retangulares, para fornecer resultados com a mesma precisão. Por isso sempre que as condições geométricas o permitam, deve se dar preferência aos elementos retangulares. Além destes aparecem hoje, cada vez mais, quadriláteros que reúnem, a versatilidade geométrica dos triangulares, e a maior precisão dos retangulares.

As estruturas do tipo cascas foram resolvidas combinando-se os elementos do tipo membrana com os de placa. Publicações de valor neste sentido foram feitas por Johnson(1967) e por Clough e Johnson(1968). No trabalho de Johnson(1967) uma estrutura de placa dobrada foi resolvida como um caso especial de estrutura do tipo casca. Connor e Brebbia(1967) apresentaram um elemento retangular curvo. Todos os elementos acima foram desenvolvidos com base no método dos deslocamentos.

O método dos elementos finitos progrediu de tal forma nos últimos dez anos, que surgiram numerosos livros no setor. Surgiram elementos de formulação híbrida e de formulação mista. Em particular Pian⁽¹⁴⁾ desenvolveu vários elementos retangulares de formulação híbrida, com campo de tensões assumidas. Um destes elementos foi implantado por Edison C.P.de Lima⁽⁴⁾ para resolução de placas delgadas em flexão, e um outro por Odilon P.Cavalheiro⁽⁵⁾ para resolução de problemas de estado plano de tensões.

CAPITULO III

3 Formulação do método dos elementos finitos

3.1 Procedimento Geral⁽⁶⁾

O método dos elementos finitos basicamente consiste em se considerar o sólido (corpo, placa, barra etc..) dividido em uma certa quantidade de elementos de forma geométrica definida. Estes elementos se ligam entre si por meio de seus nós. Poderemos ter elementos retangulares, triangulares, cúbicos, de forma tetraédrica etc... Desta forma aproximamos uma estrutura contínua por outra constituída por uma série de elementos de dimensões finitas e de forma geométrica determinada.

Como se pode assegurar que uma tal aproximação seja compatível, isto é, que os deslocamentos e tensões da estrutura formada por elementos sejam, com boa aproximação, os da estrutura real contínua? Em muitos problemas de engenharia existe um funcional Π , tal que, a solução do problema é definida pela expressão:

$$\delta \Pi = 0 \quad (3-1)$$

Esta expressão representa a solução exata

de um problema contínuo que consiste em se encontrar a função , ou funções, analítica que definem o comportamento da variável , ou variáveis desconhecidas, nas quais o problema é formulado , de modo que se cumpra a (3-1).

No método dos elementos finitos o funcional \mathcal{F} exato é substituído por um funcional aproximado \mathcal{F}_a .

O método requer que o contínuo seja dividido em regiões ou elementos finitos. Para cada região, as variáveis do problema são expressas em termos de combinações lineares de polinômios interpoladores, conhecidas as funções de forma ("shape functions"), multiplicadas por parâmetros desconhecidos. Estas expressões definem o comportamento localizado das variáveis do problema sobre o elemento, e a sua seleção representa o ponto crítico do método.

Sobre as bordas do elemento, eventualmente dentro do próprio elemento, um certo número de pontos nodais (nós) são identificados, de tal forma que os valores das variáveis do problema nestes pontos serão expressos pelas funções interpoladoras, ou ainda mesmo, pode se fazer com que nestes pontos os parâmetros desconhecidos sejam as próprias variáveis do problema nestes pontos.

Então o valor do funcional aproximado \mathcal{F}_a sobre o domínio de integração, pode ser tomado como a soma dos valores obtidos para o funcional de cada elemento finito, ou seja :

$$\mathcal{F}_a = \sum_{i=1}^m \mathcal{F}_{ai} \quad (3-2)$$

onde \mathcal{F}_{ai} é o funcional aproximado calculado sobre o elemento "i". O corpo é suposto dividido em "m" elementos.

Sendo α_{j^*} um parâmetro desconhecido genérico, com $j^*=1,2,\dots,k_i$ (k_i = número de parâmetros desconhecidos do elemento i), pode se escrever :

$$\mathbb{V}_a(\alpha_{j^*}) = \sum_{i=1}^m \mathbb{V}_{ai}(\alpha_{j^*}) \quad (3-3)$$

Neste ponto a expressão (3-1) é substituída por :

$$\delta \mathbb{V}_a = 0 \quad (3-4)$$

ou :

$$\sum_{i=1}^m \delta \mathbb{V}_{ai}(\alpha_{j^*}) = 0 \quad (3-5)$$

ou :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\partial \mathbb{V}_{ai}(\alpha_{j^*})}{\partial \alpha_{j^*}} = 0 \quad (3-6)$$

Esta última expressão é um conjunto de equações, cuja solução nos dá os valores de α_{j^*} . Com eles e com as funções interpoladoras, o valor de qualquer variável do problema, em qualquer ponto do domínio de integração, pode ser determinado. Note-se que enquanto a (3-1) representa a solução exata do problema contínuo, a expressão (3-6) representa uma aproximação que corresponde à discretização do problema.

Se a solução aproximada for convenientemente formulada, a medida que se aumentar o nº de nós, e portanto o nº de parâmetros desconhecidos, a solução aproximada deverá convergir para a solução exata.

Até aqui o método dos elementos finitos foi apresentado como um método variacional. Com esta apresentação o método se torna uma ferramenta muito versátil e que pode ser aplicado a inúmeros problemas de engenharia. Podemos, entretanto dar um enfoque físico ao método. Basta para tal supor os elemen

tos, em que foi dividido o contínuo, unidos por meio de um certo nº de pontos nodais. Considerando-se um elemento genérico individualmente, procura-se determinar uma relação causa-efeito entre os deslocamentos nodais e as forças ou tensões.

Esta relação é expressa em forma matricial em termos de coeficientes de rigidez ou flexibilidade. Estabelecida desta forma uma matriz de rigidez ou flexibilidade individual, característica de um elemento genérico, procura-se montar uma matriz de rigidez ou flexibilidade global que será característica de todo o sistema estrutural estudado.

No estudo de mecânica dos sólidos utilizamos os dois enfoques. Inicialmente procuramos através de algum princípio variacional determinar uma expressão do tipo (3-1). A seguir selecionamos as funções interpoladoras e procuramos substituir os parâmetros desconhecidos por certas variáveis incógnitas do problema. Determina-se em seguida uma expressão do tipo (3-4) para um elemento. Esta expressão nos conduz a um sistema de equações, ao nível do elemento, que chamaremos de sistema local. Um sistema de equações local, semelhante, é montado para cada um dos demais elementos. Finalmente usando os "m" sistemas de equações locais podemos montar um sistema de equações global cuja solução nos fornecerá uma série de variáveis incógnitas do problema. Através destas incógnitas assim determinadas pode-se determinar as demais incógnitas desejadas, para cada ponto do domínio de integração.

Deste procedimento surge, ao nível do elemento, uma matriz que pode ser interpretada como sendo uma matriz de rigidez ou flexibilidade do elemento e, ao nível global, uma matriz que pode ser interpretada como sendo uma matriz de rigidez ou flexibilidade global. Teremos ainda ao nível global, um vetor de cargas, cujos valores dependerão das cargas que atuam sobre o sistema estrutural. A resolução do sistema de equações global nos fornecerá um vetor de deslocamentos nodais que são as incógnitas do problema.

Conforme o princípio variacional utilizado e dependendo do comportamento assumido sobre cada elemento pode-se ter quatro diferentes tipos de formulação ou seja quatro tipos básicos de elementos ou modelos.

Modelo compatível - é derivado do princípio da mínima energia potencial. Um campo contínuo de deslocamentos é assumido sobre cada elemento o qual, além disso, deve preservar a compatibilidade de deslocamentos entre os elementos.

As incógnitas do problema discreto são os deslocamentos nodais. Esta alternativa é conhecida como método dos deslocamentos ou método de rigidez.

Modelo de Equilíbrio - é derivado do princípio da energia complementar mínima, e é baseado em campos de tensão em equilíbrio assumidos. As incógnitas básicas do problema discretizado são as tensões nos pontos nodais, embora, eventualmente, as tensões possam ser substituídas pelos deslocamentos nodais. Este modelo é conhecido, normalmente, por método das forças ou flexibilidade.

Modelo híbrido - podemos ter aqui dois tipos de modelos híbridos. O primeiro deles, chamado de tipo I, baseado no princípio da mínima energia complementar modificado ou do princípio variacional generalizado de Reissner. Campos de tensão em equilíbrio são assumidos sobre cada elemento e campos de deslocamento compatíveis somente nas bordas do elemento. As incógnitas finais do problema são os deslocamentos nodais.

Para o modelo híbrido de tipo II, usa-se o princípio da mínima energia potencial modificado. Campos de deslocamento contínuos são assumidos sobre o elemento, enquanto que forças em equilíbrio são consideradas nas bordas do elemento.

Modelo misto -

os modelos mistos são derivados de algum princípio variacional generalizado, como por exemplo o de Reissner. Campos contínuos de deslocamentos, independentemente escolhidos, e campos de tensão em equilíbrio são assumidos sobre o elemento. As incógnitas serão os deslocamentos nodais ou tensões e forças.

Neste trabalho serão utilizados dois modelos: o modelo compatível e o modelo híbrido do tipo I. A seguir damos um resumo da formulação de cada modelo. Para cada modelo devemos utilizar um elemento para estado plano de tensões e um elemento para o estudo de placas delgadas. Em seguida, devemos realizar o acoplamento destes dois elementos, para obtermos um elemento que possa ser utilizado na análise de uma folha poliédrica.

Os quatro elementos básicos já tinham sido desenvolvidos anteriormente, de modo que, aqui nos limitaremos a apresentar um resumo de seu desenvolvimento e citar as referências onde se poderá encontrar um desenvolvimento mais completo.

3.2 Modelo Compatível

3.2.1 Generalidades (7)

O funcional deste modelo é baseado no princípio da energia potencial mínima. Podemos escrever :

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot dV - \int_V \underline{\underline{b}}^T \cdot \underline{\underline{u}} \cdot dV - \int_S \underline{\underline{p}}^{o,T} \cdot \underline{\underline{u}} \cdot dS \quad (3-7)$$

onde :

$$\underline{\sigma}^T = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \}$$

$$\underline{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \}$$

$$\underline{b}^T = \{ b_x \quad b_y \quad b_z \}$$

$$\underline{p}^{o,T} = \{ p_x^o \quad p_y^o \quad p_z^o \}$$

$$\underline{u}^T = \{ u \quad v \quad w \}$$

$\underline{\sigma}$ - representa o vetor de tensões que ocorrem em um ponto.

$\underline{\varepsilon}$ - representa o vetor de deformações específicas que ocorrem em um ponto.

\underline{b} - representa o vetor das forças de volume por unidade de volume.

$\underline{p}^{o,T}$ - representa o vetor de forças prescritas em S_σ .

S_σ - região do contorno onde atua \underline{p}^o .

\underline{u} - representa o vetor de deslocamentos que ocorrem em um ponto.

V - volume do corpo.

X,Y,Z - representam as direções dos eixos coordenados locais.

T - indica vetor ou matriz transposta.

Isto ocorre para um corpo qualquer, elástico-linear, submetido a um sistema de forças. A primeira variação expressão (3-7) é dada por :

$$\delta \Pi p = \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV - \int_V \delta \underline{u}^T \cdot \underline{b} \cdot dV - \int_{S_\sigma} \delta \underline{u}^T \cdot \underline{p}^o \cdot dS \quad (3-8)$$

A condição :

$$\delta \Pi p = 0 \quad (3-9)$$

nos diz que " de todos os possíveis estados de deslocamento ad-

missíveis, aquele que satisfaz o equilíbrio corresponde a um mínimo da energia potencial mínima total".

Por outro lado sabe-se que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_0) \quad (3-10)$$

onde $\underline{\underline{D}}$ é a matriz das constantes elásticas e $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$ é um vetor de deslocamentos impostos.

O próximo passo é procurar uma relação entre o vetor de deslocamentos em um ponto $\underline{\underline{U}}$ e o vetor $\underline{\underline{U}}_e$. Este contém todos os deslocamentos nodais do elemento. Devemos encontrar uma relação do tipo :

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{U}}_e \quad (3-11)$$

A partir daí, por meio de derivação apropriada, pode-se obter :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}}_e \quad (3-12)$$

Dai :

$$\delta \underline{\underline{U}}^T = \delta \underline{\underline{U}}_e^T \cdot \underline{\underline{A}}^T \quad (3-13)$$

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T = \delta \underline{\underline{U}}_e^T \cdot \underline{\underline{B}}^T \quad (3-14)$$

Substituindo a (3-13), (3-14) e (3-10) na (3-8) podemos obter para um elemento a seguinte expressão :

$$\underline{\underline{k}}_e \cdot \underline{\underline{U}}_e - \underline{\underline{P}}_e = \underline{\underline{0}} \quad (3-15)$$

onde :

$$\underline{\underline{k}}_e = \int_V \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot dV \quad (3-16)$$

$$\underline{\underline{P}}_e = \int_V (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_0) \cdot dV + \int_{S_\sigma} \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{P}}^0 \cdot dS \quad (3-17)$$

onde V e S_σ se referem ao elemento.

Lembrando a (3-5) podemos escrever para o sistema global, se não houver necessidade de rotação, o que se segue:

$$\bar{\Sigma}_m (\underline{k}_e \cdot \underline{U}_e - \underline{P}_e) = \underline{0}$$

$$\bar{\Sigma}_m (\underline{k}_e \cdot \underline{U}_e) = \Sigma_m \underline{P}_e$$

e fazendo (o símbolo $\bar{\Sigma}$ indica superposição)

$$\bar{\Sigma}_m (\underline{k}_e \cdot \underline{U}_e) = \underline{K} \cdot \bar{\underline{U}}$$

e

$$\bar{\Sigma}_m \underline{P}_e = \bar{\underline{P}}$$

teremos :

$$\underline{K} \cdot \bar{\underline{U}} = \bar{\underline{P}} \quad (3-18)$$

que vale para o sistema global. Se houver necessidade de rotação o processo é semelhante, como veremos no quarto capítulo.

A matriz \underline{k}_e pode ser interpretada como sendo uma matriz de rigidez do elemento, e \underline{P}_e , como um vetor de cargas nodais equivalentes do elemento.

A matriz \underline{K} pode ser interpretada como sendo uma matriz de rigidez global, e \underline{P} , como um vetor de cargas nodais equivalentes global.

Para que se possa garantir a convergência a matriz \underline{A} deverá cumprir certas condições. Estas condições encontram-se no apêndice 1.

3.2.2 Elemento Para o Estado Plano de Tensões (7)

Podemos escrever, com base na figura 4 e percorrendo os nós no sentido anti-horário a partir do nó 1, que :

$$\bar{\underline{U}}^T = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \}$$

e que :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

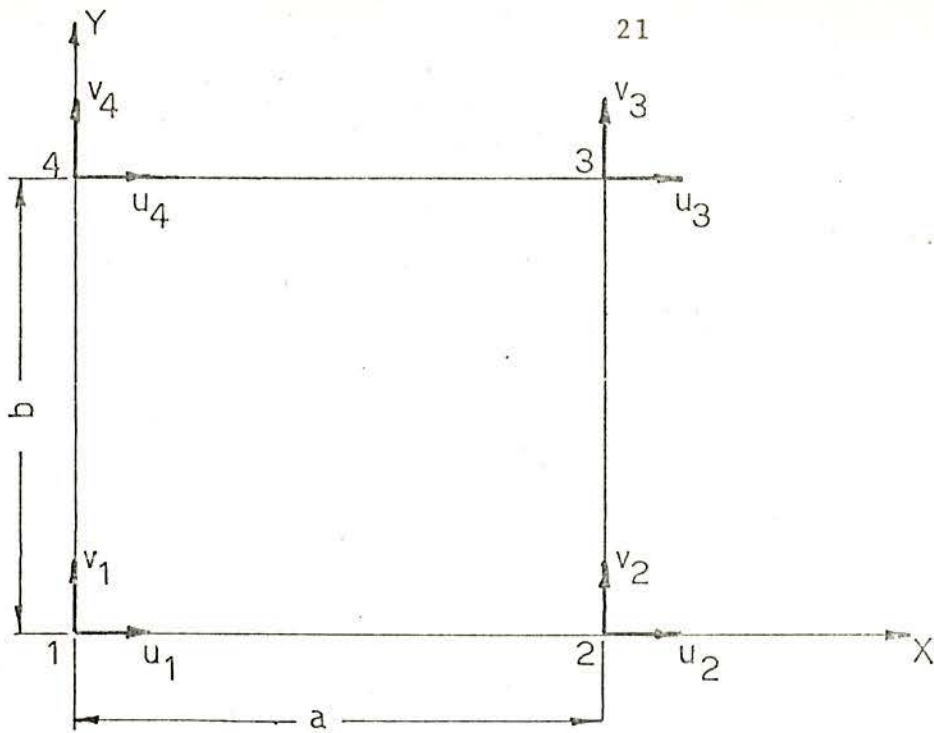


Fig. Nº 4

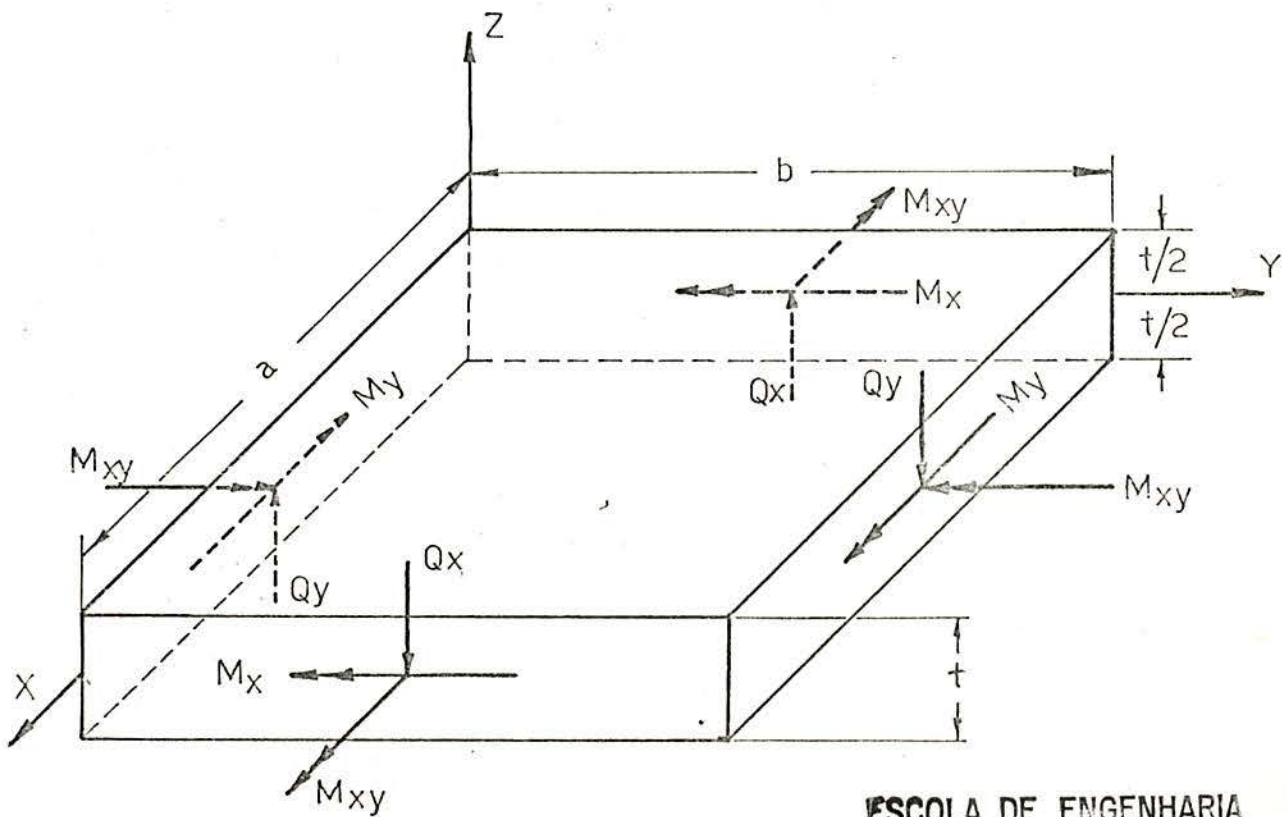


Fig. Nº 5

onde os diversos ψ representam polinômios de interpolação. Os polinômios de interpolação devem cumprir as condições :

$$\psi_n = 1 \quad \text{para o nó } n$$

$$\psi_n = 0 \quad \text{para os nós distintos de } n$$

Além disto os polinômios devem ser lineares sobre os bordos, para que tenhamos compatibilidade. A partir daí podemos escrever :

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\psi_2 = \frac{x}{a} \cdot \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\psi_3 = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b}$$

$$\psi_4 = \frac{y}{b} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

onde "a" e "b" são os comprimentos dos lados do elemento.

Com isto fica perfeitamente determinada a matriz \underline{A} . A matriz \underline{D} é dada por :

$$\underline{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

onde ν é o coeficiente de poisson do material e E é o módulo de elasticidade do material.

Para o elemento de estado plano de tensões temos :

$$\underline{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \}$$

$$\underline{u}^T = \{ u \quad v \}$$

Lembrando as relações da teoria da elasticidade, para estado plano de tensões⁽⁸⁾:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

Lembrando também as expressões (3-11) e (3-19) podemos obter :

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \psi_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_3}{\partial y} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x} & \frac{\partial \psi_4}{\partial y} & \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Empregando a (3-16) e a (3-17) podemos obter a matriz \underline{k}_e e o vetor de cargas nodais equivalentes \underline{P}_e do elemento considerado.

No apêndice 2 temos a matriz \underline{k}_e e o vetor de cargas nodais equivalentes. A matriz \underline{k}_e aparece na "procedure" RIFPR1 enquanto que, o vetor \underline{P}_e é dado na "procedure" VETCAR.

Finalmente a expressão (3-10) nos diz que :

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U}_e \quad (3-21)$$

se considerarmos $\underline{\epsilon}_0 = \underline{0}$. Para este elemento o vetor $\underline{\sigma}$ tem por componentes :

$$\underline{\sigma} = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \}$$

O vetor $\underline{\sigma}$ aparece no apêndice 2 na "procedure" TEFPR1. Tanto \underline{k}_e como $\underline{\sigma}$ foram retirados da referência (9). A região, nas diversas "procedures" onde se encontram as referidas matrizes e vetores, está assinalada com as letras EMDEPT

(elemento do método dos deslocamentos estado plano de tensões).

3.2.3 Elemento Retangular Para Estudo de Placas Delgadas

3.2.3.1 Relações Gerais das Placas Planas Delgadas Submetidas à Flexão.

Consideremos a figura 5. Da teoria geral das placas delgadas em flexão temos:

$$M_x = - \int_z z \cdot \sigma_x \cdot dz \quad (3-22)$$

$$M_y = - \int_z z \cdot \sigma_y \cdot dz \quad (3-23)$$

$$M_{xy} = - \int_z z \cdot \tau_{xy} \cdot dz \quad (3-24)$$

onde M_x e M_y representam momentos fletores por unidade de comprimento e M_{xy} momento torçor por unidade de comprimento.

Também são válidas as relações que envolvem os esforços cortantes :

$$Q_x = - \int_z \tau_{xz} \cdot dz$$

$$Q_y = - \int_z \tau_{yz} \cdot dz$$

As componentes importantes do problema são: o deslocamento w da superfície média da placa e as rotações θ_x e θ_y da normal à superfície média. Para um ponto qualquer, não situado sobre a superfície média, teremos ⁽⁷⁾:

$$u^* = z \cdot \theta_y \quad (3-25)$$

$$v^* = - z \cdot \theta_x \quad (3-26)$$

$$w^* = w \quad (3-27)$$

onde os valores com asterisco referem-se a pontos fora da superfície média.

As deformações específicas serão dadas por:

$$\epsilon_x = z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3-28)$$

$$\epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (3-29)$$

$$\gamma_{xy} = z \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (3-30)$$

$$\gamma_{xz} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Se desprezarmos as deformações por corte (placas delgadas) :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_y \quad (3-31)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_x \quad (3-32)$$

Substituindo nas expressões (3-28), (3-29) e (3-30) temos :

$$\epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$$

ou :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^T = -z \cdot \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right\} \quad (3-33)$$

Lembrando a expressão (3-10) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3-34)$$

para $\underline{\underline{\epsilon}}_0 = \underline{\underline{0}}$. $\underline{\underline{D}}$ é dada pela expressão (3-20).

Lembrando as expressões (3-33) e (3-34), e integrando (3-22), (3-23) e (3-24) obtemos :

$$M_x = - \frac{t^3}{12 \cdot z} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3-35)$$

$$M_y = - \frac{t^3}{12 \cdot z} \cdot (\epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3-36)$$

$$M_{xy} = - \frac{t^3}{12 \cdot z} \cdot (\gamma_{xy} / 2) \cdot \frac{E}{1 + \nu} \quad (3-37)$$

que pode ser posta sob forma matricial :

$$\underline{\underline{M}} = - \frac{1}{z} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3-38)$$

onde :

$$\underline{\underline{M}}^T = \{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \}$$

e chamando :

$$\underline{\underline{D}}b = \frac{t^3}{12} \cdot \underline{\underline{D}} \quad (3-39)$$

teremos :

$$\underline{\underline{M}} = - \frac{1}{z} \cdot \underline{\underline{D}}b \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3-40)$$

3.2.3.2 Método dos Elementos Finitos Aplicado às Placas Planas Delgadas Submetidas à Flexão.⁽⁷⁾

Partindo-se da expressão (3-8) e utilizando a (3-10), chega-se à expressão, válida para um elemento, abaixo:

$$\int_V (\delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}) \cdot dV = \int_V (\delta \underline{\underline{\epsilon}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \delta \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{b}}) \cdot dV + \int_{S_\sigma} \delta \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{P}}^0 \cdot dS \quad (3-41)$$

onde:

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}^T &= \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \} \\ \underline{U}^T &= \{ w \quad \theta_x \quad \theta_y \} \\ \underline{b}^T &= \{ b_z \quad b_{mx} \quad b_{my} \} \\ \underline{P}^{o,T} &= \{ P_z^o \quad M_x^o \quad M_y^o \}\end{aligned}$$

Lembrando a expressão (3-11) podemos escrever :

$$w = \underline{A}w \cdot \underline{U}e \quad (3-42)$$

onde :

$$\underline{U}e^T = \{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \}$$

e $\underline{A}w$ é um vetor de polinômios interpoladores . Na figura 6 são dados os sentidos positivos para os deslocamentos.

Lembrando as expressões (3-31) e (3-32) :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \underline{A}w}{\partial y} \cdot \underline{U}e \quad (3-43)$$

$$-\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \underline{A}w}{\partial x} \cdot \underline{U}e \quad (3-44)$$

e fazendo :

$$\underline{A}^T = \begin{bmatrix} \underline{A}w & \frac{\partial \underline{A}w}{\partial y} & - \frac{\partial \underline{A}w}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (3-45)$$

tem-se :

$$\underline{U} = \underline{A} \cdot \underline{U}e \quad (3-46)$$

Przemieniecki ⁽⁹⁾ fornece o vetor $\underline{A}w$ que reproduzimos no apên -

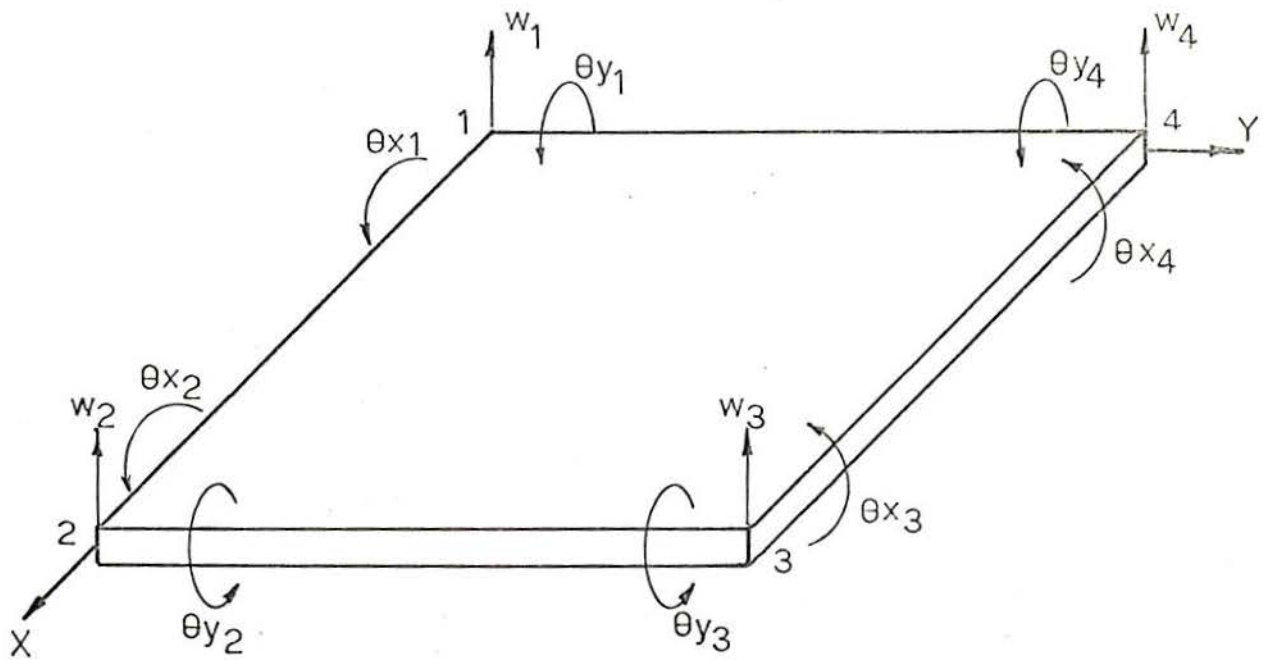


Fig. № 6

dice 2.

Lembrando a expressão (3-33) e a (3-42) podemos escrever :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}}_e \quad (3-47)$$

onde:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} - & z \cdot \frac{\partial^2 \underline{\underline{A}}_w}{\partial x^2} \\ - & z \cdot \frac{\partial^2 \underline{\underline{A}}_w}{\partial y^2} \\ - & 2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 \underline{\underline{A}}_w}{\partial x \cdot \partial y} \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

A matriz $\underline{\underline{B}}$ também é publicada na referência (9) e encontra-se da da no apêndice 2.

A expressão (3-41) pode ser manipulada⁽⁷⁾ através de uma série de substituições e algebrismos, chegando-se no fim à expressão :

$$\underline{\underline{k}}_e \cdot \underline{\underline{U}}_e = \underline{\underline{P}}_e \quad (3-49)$$

onde :

$$\underline{\underline{k}}_e = \int_x \int_y \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}}_b \cdot \underline{\underline{B}} \cdot dx \cdot dy \quad (3-50)$$

$$\underline{\underline{P}}_e = \int_x \int_y (\underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}}_b \cdot \underline{\underline{x}}_o + t \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{b}}) \cdot dx \cdot dy + \int_S \underline{\underline{A}}_\sigma^T \cdot \underline{\underline{P}}^o \cdot dS \quad (3-51)$$

$$\underline{\underline{x}}_o = \frac{1}{z} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_o \quad (3-52)$$

Tanto $\underline{\underline{k}}_e$ como $\underline{\underline{P}}_e$ encontram-se no apêndice 2. A matriz de rigidez $\underline{\underline{k}}_e$ encontra-se na "procedure" RIFPR1, tendo sido obtida da referência (9). O vetor de cargas $\underline{\underline{P}}_e$ en-

contra-se também no apêndice 2 na "procedure" VETCAR.

O cálculo dos momentos M_x, M_y e M_{xy} , para um ponto qualquer do elemento, pode ser feito através das expressões (3-47) e (3-40), que nos conduzem a:

$$\underline{M} = - \frac{1}{z} \underline{D} \underline{b} \cdot \underline{B} \cdot \underline{U} e \quad (3-53)$$

O vetor \underline{M} encontra-se na "procedure" TEFPR1 do apêndice 2. A região, nas diversas "procedures", onde encontram-se as referidas matrizes e vetores está assinalada com as letras EMDPF (elemento do método dos deslocamentos para placas em flexão).

O valor t que aparece no cálculo de diversos vetores representa a espessura da placa ou elemento considerado.

Da teoria geral das placas delgadas em flexão, considerando-se as convenções da figura 5, podemos escrever que :

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3-54)$$

que podem ser utilizadas para se calcular os esforços cortantes Q_x e Q_y . Tais valores são encontrados na "procedure" TEFPR1 do apêndice 2.

3.3 Modelo Híbrido I

O funcional Π_p é função das deformações específicas e implica nas equações de equilíbrio e equações de borda de força. Seria interessante construir um novo funcional cuja condição de estacionaridade envolva as equações de equilíbrio, as relações tensão-deformação específica em cada um dos pontos do sólido, as condições de deslocamento sobre os bordos S_u e as condições de força sobre os bordos S_σ . Um funcional de

tal tipo é o funcional de Reissner, \mathbb{R} , que aparece dado por :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} = & - \int_V \left\{ \Omega(\sigma) + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x \right) \cdot u + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y \right) \cdot v + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z \right) \cdot w \right\} \cdot dV + \int_{S_\sigma} \left\{ (P_x - P_x^0) \cdot u + (P_y - P_y^0) \cdot v + \right. \\ & \left. (P_z - P_z^0) \cdot w \right\} \cdot dS + \int_{S_u} (P_x \cdot u^0 + P_y \cdot v^0 + P_z \cdot w^0) \cdot dS \end{aligned} \quad (3-55)$$

O funcional, da maneira como foi apresentado, aparece na referência (4). O significado dos diversos símbolos é o seguinte :

- Ω - densidade de energia complementar
- $\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$ - tensões axiais
- $\tau_{xy} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{xz}$ - tensões de corte
- $\tau_{zx} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zy}$ - tensões de corte
- $b_x \quad b_y \quad b_z$ - componentes das forças de volume por unidade de volume
- $u \quad v \quad w$ - componentes dos deslocamentos segundo X, Y e Z.
- $P_x \quad P_y \quad P_z$ - componentes das forças de superfície por unidade de superfície.
- $P_x^0 \quad P_y^0 \quad P_z^0$ - componentes das forças prescritas em S_σ .
- S_σ - região do contorno onde estão prescritas as forças P^0 .
- $u^0 \quad v^0 \quad w^0$ - componentes dos deslocamentos prescritos no contorno S_u .
- S_u - região do contorno onde estão prescritos os deslocamentos U^0 .
- S - região total do contorno do corpo.
- V - volume do corpo.

Usando como ponto de partida a expressão (3-55), foram desenvolvidos dois elementos retangulares híbridos com campo de tensões assumidos : um para análise de estado plano de tensões ⁽⁵⁾ e outro para análise de placas em flexão ⁽⁴⁾. Damos a seguir um resumo do desenvolvimento da teoria de cada um deles. Maiores detalhes são encontrados nas referências (4) e (5).

Queremos ainda ressaltar que Pian, em 1964, aplicou a formulação híbrida, por ele desenvolvida, na dedução da matriz de rigidez do elemento retangular, com campo de tensões assumido, para estado plano de tensões ⁽⁵⁾.

Lau, Brebbia e Smith, em 1972, partindo do funcional ΠR (3-55) particularizado para elasticidade plana, estabeleceu todo o equacionamento matricial para o mesmo elemento retangular, em função do ângulo entre a normal a cada lado do elemento e o eixo X do sistema de referência do elemento. Esta última orientação é seguida neste trabalho ⁽⁵⁾.

Na parte de placas em flexão, o trabalho baseia-se no modelo híbrido de Pian para placas em flexão, adotando-se a teoria de Reissner para flexão de placas moderadamente espessas. Faz-se após a particularização para o caso de placas delgadas ⁽⁴⁾.

3.3.1 Elemento Retangular Híbrido, com Campo de Tensões Assumido, Para Análise do Estado Plano de Tensões ⁽⁵⁾

A expressão (3-55) pode ser particularizada para problemas de elasticidade plana tornando-se :

$$\begin{aligned} \Pi R = & - \int_V \left\{ \Omega(\sigma) + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) \cdot u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) \cdot v \right\} \cdot dV + \int_{S_\sigma} \left\{ (P_x - P_x^0) \cdot u + (P_y - \right. \\ & \left. P_y^0) \cdot v \right\} \cdot dS + \int_{S_u} (P_x \cdot u^0 + P_y \cdot v^0) \cdot dS \end{aligned} \quad (3-56)$$

Negligenciando as forças de volume \underline{b} , assumindo expansões para as tensões, de tal forma que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas em cada elemento, isto é :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3-57)$$

e lembrando que :

$$\begin{aligned} \text{a) } u &= u^0 & \text{e} & & v &= v^0 & \text{em } S_u \\ \text{b) } P_x &= P_x^0 & \text{e} & & P_y &= P_y^0 & \text{em } S_\sigma \end{aligned}$$

podemos, a partir da equação (3-56), chegar à :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= - \int_V \Omega(\sigma) \cdot dV + \int_S (P_x \cdot u + P_y \cdot v) \cdot dS - \\ & \int_{S_\sigma} (P_x^0 \cdot u + P_y^0 \cdot v) \cdot dS \end{aligned} \quad (3-58)$$

Fazendo :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^T &= \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \} \\ \underline{\varepsilon}^T &= \{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \} \\ \underline{P}^T &= \{ P_x \quad P_y \} \\ \underline{P}^{0,T} &= \{ P_x^0 \quad P_y^0 \} \\ \underline{U}^T &= \{ u \quad v \} \end{aligned}$$

Para um material elástico-linear, e em face do caráter estático de aplicação da carga :

$$\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \underline{\varepsilon}^T \cdot \delta \underline{\sigma} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon}$$

Isto tudo nos permite escrever a (3-58) da seguinte forma :

$$\mathbb{R} = - \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot dV + \int_S \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{U}} \cdot dS - \int_S \underline{\underline{P}}^{o,T} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot dS \quad (3-59)$$

onde:

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1+\nu) \end{bmatrix}$$

Expandindo os deslocamentos e as tensões , através de parâmetros arbitrários e de funções prescritas $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{\phi}}$, normalmente polinomiais, que dependem das dimensões planas do elemento e das coordenadas cartesianas X e Y de um ponto genérico do elemento, referido a um sistema local ortogonal, podemos escrever :

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{U}}_e \quad (3-60)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\phi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^n \quad (3-61)$$

A função das tensões deve satisfazer a (3-57) e a dos deslocamentos deve assegurar a continuidade dos deslocamentos no contorno.

Sabemos que :

$$\sigma_x \cdot \cos\lambda + \tau_{xy} \cdot \sen\lambda = P_x \quad (3-62)$$

$$\sigma_y \cdot \sen\lambda + \tau_{xy} \cdot \cos\lambda = P_y \quad (3-63)$$

onde λ é o ângulo formado entre o eixo dos X do sistema de referência e a normal à superfície considerada. As expressões a-

cima, (3-62) e (3-63), podem ser postas sob a forma matricial :

$$\underline{P} = \underline{N}' \cdot \underline{\sigma} = \underline{N}' \cdot \underline{\phi} \cdot \underline{\sigma}^n = \underline{N} \cdot \underline{\sigma}^n \quad (3-64)$$

Tendo em conta as (3-60), (3-61) e (3-64) podemos reescrever a equação (3-59) :

$$\pi R = - \frac{1}{2} \cdot \underline{\sigma}^{n,T} \cdot \underline{F} \cdot \underline{\sigma}^n + \underline{\sigma}^{n,T} \cdot \underline{G} \cdot \underline{Ue} - \underline{Pe} \cdot \underline{Ue} \quad (3-65)$$

onde :

$$\underline{F} = \int_V \underline{\phi}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\phi} \cdot dV \quad (3-66)$$

$$\underline{G} = \int_S \underline{N}^T \cdot \underline{A} \cdot dS \quad (3-67)$$

$$\underline{Pe}^T = \int_S \underline{P}^{\sigma^0,T} \cdot \underline{A} \cdot dS \quad (3-68)$$

As condições de estacionaridade do funcional nos conduzem às expressões :

$$- \underline{F} \cdot \underline{\sigma}^n + \underline{G} \cdot \underline{Ue} = \underline{0} \quad (3-69)$$

$$\underline{\sigma}^{n,T} \cdot \underline{G} - \underline{Pe}^T = \underline{G}^T \cdot \underline{\sigma}^n - \underline{Pe} = \underline{0} \quad (3-70)$$

Resolvendo o sistema acima :

$$\underline{Pe} = (\underline{G}^T \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{G}) \cdot \underline{Ue} \quad (3-71)$$

onde fazendo :

$$\underline{ke} = \underline{G}^T \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{G} \quad (3-72)$$

chegamos a nossa conhecida expressão :

$$\underline{P}_e = \underline{k}_e \cdot \underline{U}_e \quad (3-73)$$

Lembrando a (3-61) e a (3-69) :

$$\underline{\sigma} = (\underline{\phi} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{G}) \cdot \underline{U}_e \quad (3-74)$$

e chamando :

$$\underline{T} = \underline{\phi} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{G} \quad (3-75)$$

temos :

$$\underline{\sigma} = \underline{T} \cdot \underline{U}_e \quad (3-76)$$

que nos permite obter as tensões em função dos deslocamentos nodais.

Consideremos as figuras 4 e 7. Na figura 4 representam-se os diversos deslocamentos nodais que compõem o vetor \underline{U}_e . Os deslocamentos U variam linearmente ao longo do contorno do elemento em função dos deslocamentos \underline{U}_e . A matriz \underline{A} é a mesma do elemento retangular do método dos deslocamentos, dada pela (3-19), e não será aqui repetida. O vetor \underline{U}_e é também o mesmo, ou seja :

$$\underline{U}_e^T = \{ u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ }$$

As tensões $\underline{\sigma}$ são também expandidas linearmente em todo o elemento em termos de $\underline{\phi}$, e de cinco tensões arbitrárias assumidas no contorno como indica a figura 7, que formam o vetor $\underline{\sigma}^n$.

A função $\underline{\phi}$ é dada por :

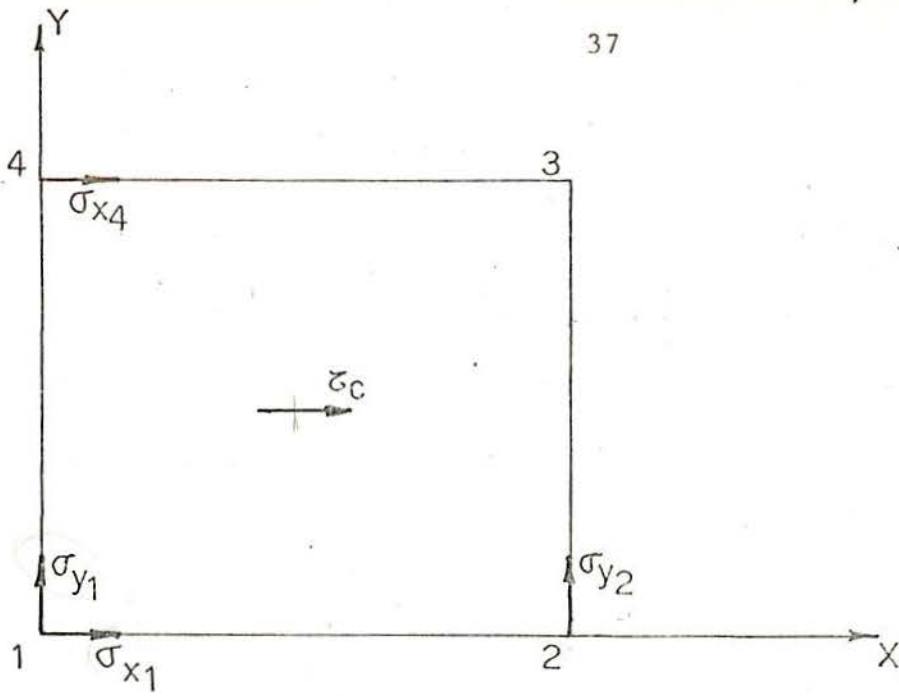


Fig No 7

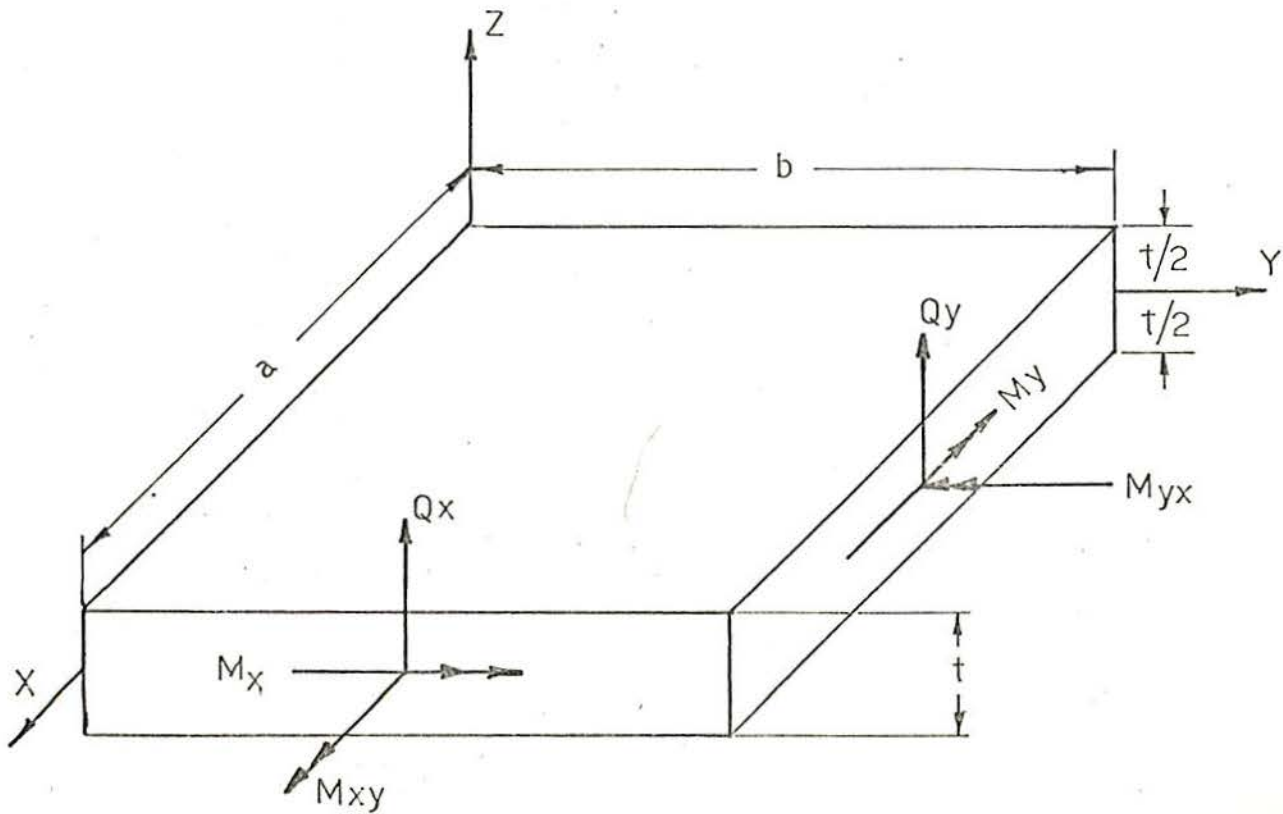


Fig No 8

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} (1-\eta) & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

onde :

$$\xi = x/a \quad \eta = y/b$$

Por outro lado :

$$\underline{\sigma}^{n,T} = \{ \sigma_{x1} \sigma_{x4} \sigma_{y1} \sigma_{y2} \tau_c \} \quad (3-78)$$

Uma ultima matriz a ser determinada é a matriz \underline{N}' . Esta é dada por :

$$\underline{N}' = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \quad (3-79)$$

onde λ é o ângulo formado entre a normal à cada lado do elemento e o eixo dos X local.

No apêndice 1 temos uma nota a respeito de certa condição a ser satisfeita para que o problema tenha solução. Isto diz respeito às equações (3-69) e (3-70).

Com as matrizes acima expostas, e utilizando o formulário dado anteriormente, pode-se determinar as matrizes e vetores \underline{F} , \underline{G} , \underline{P}_e , \underline{k}_e , \underline{T} .

A matriz de rigidez \underline{k}_e aparece no apêndice 3 na "procedure" RIFPR1 enquanto que o vetor \underline{P}_e , com as cargas nodais equivalentes é dado na "procedure" VETCAR, do mesmo apêndice. A matriz \underline{T} aparece na "procedure" TEFPR1 do apêndice 3. A

região, nas diversas "procedures", onde se encontram as referidas matrizes está assinalada com as letras EHEPT (elemento híbrido estado plano de tensões).

3.3.2 Elemento Retangular-Híbrido, com Campo de Tensões Assumido, Para Análise de Placas Delgadas em Flexão ⁽⁴⁾

Antes de mais nada queremos chamar a atenção para o fato de que, no trabalho original as orientações positivas de alguns deslocamentos e momentos, são contrárias às utilizadas neste trabalho. Durante o desenvolvimento resumido, que damos a seguir, resolvemos, por comodidade e simplicidade, manter as mesmas orientações seguidas pelo autor do trabalho original. Também a ordem em que aparecem as componentes de certos vetores, não coincide com a ordem em que estas mesmas componentes aparecem, quando se fez o estudo do elemento retangular de placas pelo método dos deslocamentos. Resolvemos também aqui, durante o desenvolvimento teórico, manter a mesma ordem do trabalho original.

Entretanto, nas "procedures" foram tomadas providências para que tanto as orientações positivas como a ordem das componentes, dentro dos vetores, fossem as mesmas seguidas quando estudamos o método dos deslocamentos, e que é por nós considerado o sistema de referência padrão neste trabalho.

Note-se que no trabalho original a formulação foi desenvolvida para placas moderadamente espessas, sendo depois particularizada para placas delgadas. Aqui seguimos a mesma orientação.

Nas figuras 8 e 9 temos a orientação positiva de momentos e deslocamentos. Para uma tal orientação são válidas as expressões :

$$M_x = \int_z z \cdot \sigma_x \cdot dz$$

$$M_y = \int_z z \cdot \sigma_y \cdot dz$$

(3-80)

$$M_{xy} = - \int_z \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

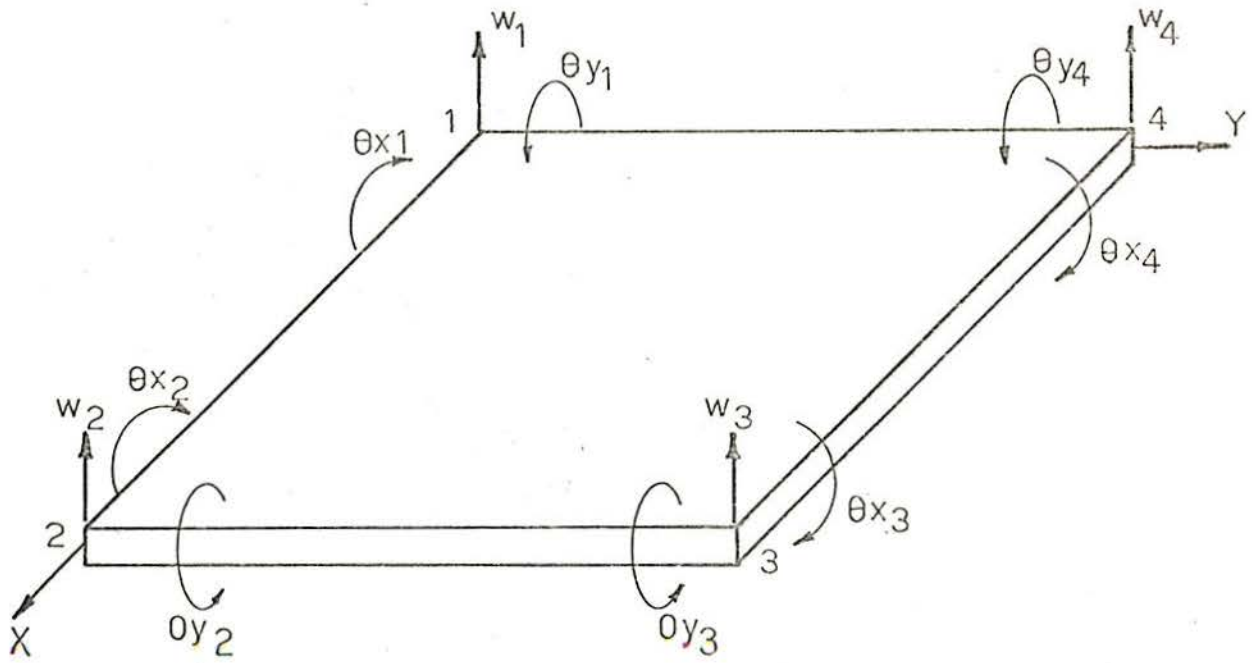


Fig No 9

e:

$$Q_x = \int_z \tau_{xz} \cdot dz \qquad Q_y = \int_z \tau_{yz} \cdot dz \qquad (3-81)$$

e:

$$M_{xy} = M_{yx} \qquad (3-82)$$

As quantidades acima tem o mesmo significado que tinham no ítem 3.2.3.1 .

Ainda da teoria da elasticidade para placas delgadas submetidas a flexão pode-se escrever :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z^o = 0 \qquad (3-83)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \qquad (3-84)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \qquad (3-85)$$

onde P_z^o representa um carregamento distribuído, função de x e y , orientado segundo o eixo Z local(figuras 8 e 9).

Das equações (3-80), supondo que as tensões variem linearmente ao longo da espessura da placa, pode-se obter :

$$\sigma_x = \frac{12 \cdot z \cdot M_x}{t^3} \qquad (3-86)$$

$$\sigma_y = \frac{12 \cdot z \cdot M_y}{t^3} \qquad (3-87)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-12 \cdot z \cdot M_{xy}}{t^3} \qquad (3-88)$$

onde t representa a espessura da placa.

Substituindo as equações (3-86), (3-87) ,

(3-88) nas equações de equilíbrio da elasticidade, desprezando as forças de volume, simplificando os resultados com as equações (3-83), (3-84), (3-85) e utilizando as condições de contorno :

$$\sigma_z = P_z^0 \quad \text{para } z = t/2$$

$$\sigma_z = 0 \quad \text{para } z = -t/2$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{para } z = \pm t/2$$

obtemos :

$$\tau_{xz} = \frac{3 \cdot Q_x}{2 \cdot t} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \cdot z}{t} \right)^2 \right\} \quad (3-89)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3 \cdot Q_y}{2 \cdot t} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \cdot z}{t} \right)^2 \right\} \quad (3-90)$$

$$\sigma_z = \frac{3 \cdot P_z^0}{4} \cdot \left\{ \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot z}{t} - \frac{1}{3} \left(\frac{2 \cdot z}{t} \right)^3 \right\} \quad (3-91)$$

Para um material homogêneo, isotrópico e hookeano, a energia complementar pode ser escrita :

$$\begin{aligned} \int_V \Omega(\sigma) \cdot dV = \frac{1}{2 \cdot E} \int_V \{ & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2 \cdot \nu \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y + \\ & \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z) + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot (\tau_{xy}^2 + \\ & \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \} \cdot dV \end{aligned} \quad (3-92)$$

Pode-se agora, usando-se as expressões acima de modo conveniente, desprezando-se as forças de volume, integrando em relação a z , escrever a (3-55) da seguinte forma :

$$- \mathbb{R} = \int_{\bar{S}} \Omega(\sigma) \cdot d\bar{S} + \int_{\bar{S}} \left\{ \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \cdot (-\theta_y) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right) \cdot (-\theta_x) + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \right. \\
& \left. P_z^0 \right) \cdot w \} \cdot d\bar{S} - \int_{S_u+S_\sigma+S_i} \{ (M_x \cdot \ell^* - M_{xy} \cdot m^*) \cdot \\
& (-\theta_y) + (M_y \cdot m^* - M_{xy} \cdot \ell^*) \cdot (-\theta_x) + (Q_x \cdot \ell^* + \\
& Q_y \cdot m^*) \cdot w \} \cdot dS + \int_{S_\sigma} \{ (M_x \cdot \ell^* - M_{xy} \cdot m^*) \cdot (-\theta_y) + \\
& (M_y \cdot m^* - M_{xy} \cdot \ell^*) \cdot (-\theta_x) + (Q_x \cdot \ell^* + Q_y \cdot m^*) \cdot w \} \cdot dS + \\
& \int_{S_u} \{ (\theta_y^0 - \theta_y) \cdot (M_x \cdot \ell^* - M_{xy} \cdot m^*) + (\theta_x^0 - \theta_x) \cdot \\
& (M_y \cdot m^* - M_{xy} \cdot \ell^*) + (w - w^0) \cdot (Q_x \cdot \ell^* + Q_y \cdot m^*) \} \cdot dS
\end{aligned}$$

(3-93)

onde, Si é a parte do contorno comum com outros elementos vizinhos, ℓ^* e m^* são cossenos diretores da normal ao contorno orientada para fora do mesmo, M_x^0 , M_y^0 , M_{xy}^0 são momentos impostos, Q_y^0 e Q_x^0 são esforços cortantes impostos, θ_x^0 , θ_y^0 e w^0 são deslocamentos impostos e \bar{S} é a área do elemento. Na dedução da equação (3-93) foi considerado :

$$u^* = -z \cdot \theta_y$$

$$v^* = -z \cdot \theta_x$$

(3-94)

$$w^* = w$$

onde os valores com asterisco referem-se a pontos fora da superfície média.

Serão consideradas variáveis independentes os momentos M_x, M_y, M_{xy} e os deslocamentos θ_x, θ_y, w . O esforço cortante deverá satisfazer, no interior do elemento, as equações

de equilíbrio :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (3-95)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3-96)$$

Sendo o esforço cortante derivado dos momentos, as funções de interpolação podem ser escolhidas de tal forma que seja também satisfeita a equação de equilíbrio segundo o eixo Z :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z^o = 0 \quad (3-97)$$

Por outro lado requer-se que sejam cumpridas as condições cinemáticas de contorno em Su :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^o \\ \theta_y &= \theta_y^o \\ w &= w^o \end{aligned} \quad (3-98)$$

Adotando uma notação matricial e levando em consideração a (3-98), podemos escrever a expressão (3-93) sob a forma :

$$- \mathbb{R} = \int_{\bar{S}} \Omega(\sigma) \cdot d\bar{S} - \int_{S_u + S_\sigma + S_i} \bar{T}b \cdot \bar{U}b \cdot dS + \int_{S_\sigma} \bar{T}b^{o,T} \cdot \bar{U}b \cdot dS \quad (3-99)$$

onde :

$$\bar{T}b = \left\{ \begin{array}{l} (M_x \cdot l^* - M_{xy} \cdot m^*) \\ (M_y \cdot m^* - M_{xy} \cdot l^*) \\ (Q_x \cdot l^* + Q_y \cdot m^*) \end{array} \right\}$$

$$\underline{U}^T = \{ -\theta_y \quad -\theta_x \quad w \}$$

e:

$$\underline{T}^0 = \left\{ \begin{array}{l} (M_x^0 \cdot \ell^* - M_{xy}^0 \cdot m^*) \\ (M_y^0 \cdot m^* - M_{xy}^0 \cdot \ell^*) \\ (Q_x^0 \cdot \ell^* + Q_y^0 \cdot m^*) \end{array} \right\}$$

As tensões assumidas são os momentos :

$$\underline{M}^T = \{ M_x \quad M_y \quad M_{xy} \}$$

que podem ser expressos por polinômios completos em X e Y com coeficientes β a determinar . Teremos assim :

$$\underline{M} = \underline{\phi} \cdot \underline{\beta} + \underline{\phi}_p \quad (3-100)$$

$$\underline{Q} = \underline{\psi} \cdot \underline{\beta} + \underline{\psi}_p \quad (3-101)$$

onde:

$$\underline{Q}^T = \{ Q_x \quad Q_y \}$$

As parcelas $\underline{\phi} \cdot \underline{\beta}$ e $\underline{\psi} \cdot \underline{\beta}$ satisfazem a parte homogênea de (3-95), (3-96) e (3-97), ou seja quando $P_z^0 \equiv 0$, enquanto que $\underline{\phi}_p$ e $\underline{\psi}_p$ são soluções particulares destas mesmas equações .

Os esforços que atuam no contorno do elemento podem ser expressos mediante a particularização de \underline{Q} e \underline{M} para os seus diversos lados, e são representados por :

$$\underline{T}^b = \underline{R} \cdot \underline{\beta} + \underline{R}_p \quad (3-102)$$

Os correspondentes deslocamentos \underline{U}_b são expressos em termos de parametros nodais \underline{U}_{be} por intermédio de convenientes funções de interpolação :

$$\underline{U}_b = \underline{L} \cdot \underline{U}_{be} \quad (3-103)$$

Os deslocamentos \underline{U}_b devem garantir a continuidade no contorno do elemento e satisfazer os valores prescritos em S_u , ou seja :

$$\underline{U}_b = \underline{U}_b^o \quad \text{em } S_u \quad (3-104)$$

A energia complementar pode ser expressa por :

$$\int_{\bar{S}} \Omega(\sigma) \cdot d\bar{S} = \int_{\bar{S}} \frac{1}{2} \cdot (\underline{M}^T \cdot \underline{C}_1 \cdot \underline{M} + \underline{Q}^T \cdot \underline{C}_2 \cdot \underline{Q} + \underline{Z}^T \cdot \underline{M}) \cdot d\bar{S} \quad (3-105)$$

onde :

$$\underline{C}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1+\nu) \end{array} \right\} \cdot \frac{12}{E \cdot t^3}$$

$$\underline{C}_2 = \frac{12}{E \cdot t^3} \cdot t^2 \cdot \frac{1+\nu}{5} \cdot \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\underline{Z} = \frac{-12}{E \cdot t^3} \cdot \frac{t^2 \cdot \nu \cdot P_z^o}{5} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Tomando a primeira variação da (3-99) se obtêm :

$$\begin{aligned}
 - \delta \mathcal{R} = & \int_{\bar{S}} \delta \Omega(\sigma) \cdot d\bar{S} - \int_{S_{\sigma} + S_u + S_i} (T_b \cdot \delta U_b + \delta T_b \cdot U_b) \cdot dS + \\
 & \int_{S_{\sigma}} T_b^{o,T} \cdot \delta U_b \cdot dS = 0
 \end{aligned} \quad (3-106)$$

que em virtude da (3-105) vale para um elemento.

Substituindo na (3-106) os valores dados pelas expressões (3-105), (3-100), (3-101) e (3-102) obtemos:

$$- \delta \mathcal{R} = \delta \underline{\underline{\beta}}^T \cdot (\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{H}}_p - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{U}}_{be}) + (\underline{\underline{S}}^T - \underline{\underline{\beta}}^T \cdot \underline{\underline{G}}) \cdot \delta \underline{\underline{U}}_{be} = 0 \quad (3-107)$$

onde :

$$\underline{\underline{H}} = \int_{\bar{S}} (\underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_1 \cdot \underline{\underline{\phi}} + \underline{\underline{\psi}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_2 \cdot \underline{\underline{\psi}}) \cdot d\bar{S} \quad (3-108)$$

$$\underline{\underline{H}}_p = \int_{\bar{S}} (\underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_1 \cdot \underline{\underline{\phi}}_p + \underline{\underline{\psi}}^T \cdot \underline{\underline{C}}_2 \cdot \underline{\underline{\psi}}_p + \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\phi}}^T \cdot \underline{\underline{Z}}) \cdot d\bar{S} \quad (3-109)$$

$$\underline{\underline{G}} = \int_{S_u + S_{\sigma} + S_i} \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot dS \quad (3-110)$$

$$\underline{\underline{G}}_p = \int_{S_u + S_{\sigma} + S_i} \underline{\underline{R}}_p^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot dS \quad (3-111)$$

$$\underline{\underline{S}} = - \underline{\underline{G}}_p + \int_{S_{\sigma}} \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{T}}_b \cdot dS \quad (3-112)$$

Da (3-107) podemos escrever :

$$\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\beta}} + \underline{\underline{H}}_p - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{U}}_{be} = \underline{\underline{0}} \quad (3-113)$$

$$- \underline{\underline{\beta}}^T \cdot \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{0}} \quad (3-114)$$

No apêndice 1 temos uma nota a respeito da existência de solução para o sistema acima.

Da (3-113) :

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{U}}_{be} - \underline{\underline{H}}_p) \quad (3-115)$$

que substituída na (3-114) nos conduz a :

$$\underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{U}}_{be} - \underline{\underline{H}}_p) + \underline{\underline{S}} = 0 \quad (3-116)$$

ou :

$$\underline{\underline{P}}_e - \underline{\underline{k}}_e \cdot \underline{\underline{U}}_{be} = \underline{\underline{0}} \quad (3-117)$$

onde :

$$\underline{\underline{P}}_e = \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{H}}_p + \underline{\underline{S}} \quad (3-118)$$

$$\underline{\underline{k}}_e = \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}} \quad (3-119)$$

$$\underline{\underline{U}}_{be}^T = \{ \theta_{y1} \quad \theta_{x1} \quad w_1 \quad \theta_{y2} \quad \theta_{x2} \quad w_2 \quad \theta_{y3} \quad \theta_{x3} \quad w_3 \quad \theta_{y4} \quad \theta_{x4} \quad w_4 \} \quad (3-120)$$

Os vetores e matrizes acima foram originados da teoria de Reissner para flexão de placas moderadamente espessas, e podem ser particularizadas para as hipóteses da teoria clássica desprezando-se o efeito da deformação devido ao esforço cortante. Deve-se fazer então :

$$\underline{\underline{C}}_2 = \underline{\underline{0}} \quad (3-121)$$

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{0}} \quad (3-122)$$

O vetor $\underline{\underline{U}}_b$ ficará, neste caso, dado por :

$$\underline{\underline{U}}_b^T = \{ -\frac{\partial w}{\partial x} \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \quad w \} \quad (3-123)$$

No elemento por nós utilizado, os momentos são expressos por polinômios completos de segundo grau em x e y . Além disto a matriz L é determinada mediante a utilização de polinômios de Hermite .

Com isto podemos determinar, mediante uma série de algebrismos , que aqui não serão expostos, por se encontrarem no trabalho original , a matriz k_e que se encontra na "procedure" RIFPR1 do apêndice 3. O vetor P_e de cargas nodais equivalentes , para uma carga distribuida sobre a placa segundo o eixo Z local, encontra-se na "procedure" VETCAR do apêndice 3. O vetor de tensões é calculado na "procedure" TEFPR1 do apêndice 3. A região, nas diversas "procedures", onde encontram-se as referidas matrizes e vetores está assinalada com as letras EHPDF (elemento híbrido para placas delgadas em flexão).

As equações (3-95) e (3-96) permitem que calculemos os valores de Q_x e Q_y . Estes valores aparecem na "procedure" TEFPR1 do apêndice 3.

CAPITULO IV

4 Procedimento Para Obtenção de Um Elemento Para Analise de Folhas Poliédricas

4.1 Introdução

O que aqui será comentado vale tanto para um elemento de formulação híbrida como para um elemento do método dos deslocamentos. Vale, alias, para qualquer tipo de elemento contanto que se possua um elemento de estado plano de tensões e outro que faça a analise de placas delgadas em flexão. Os dois elementos nem mesmo precisam ser de formulação semelhante.

Podemos assim, por exemplo, combinar um elemento híbrido de estado plano de tensões com um elemento do método de deslocamentos, para placas delgadas em flexão, e obteremos um elemento válido para a análise de folhas poliédricas.

Zienkiewicz em seu livro ⁽¹⁰⁾ nos dá uma excelente idéia de como proceder para se alcançar o objetivo desejado.

Dois são os problemas que nos resta abordar. Em primeiro lugar precisamos obter a matriz de rigidez, e o vetor de cargas nodais equivalentes de um elemento que per

mita analisar uma folha poliédrica. Em segundo lugar temos de nos preocupar com o fato de que o referido elemento, e portanto, o sistema cartesiano de eixos locais (válido para um elemento), poderá estar inclinado em relação ao sistema cartesiano de eixos global (válido para a estrutura). Este último problema será levado em conta por meio de uma matriz de rotação apropriada.

Focalizamos a seguir a maneira geral de proceder para solucionar cada um dos problemas.

4.2 Obtenção do Elemento de Folha Poliédrica

" Em uma folha poliédrica cada elemento estará submetido a forças no plano e flexão. Em um elemento tais solicitações produzem deformações independentes desde que as deformações locais sejam pequenas " (10). Consequentemente podemos pensar desde logo em montar uma matriz de rigidez utilizando as matrizes de rigidez dos elementos de estado plano de tensões e de placas delgadas em flexão. Como o modo de atuar das solicitações no plano não interfere no modo de atuar das solicitações de flexão, também as duas matrizes de rigidez, depois de unidas, não devem interferir uma com a outra,

Para aclarar as idéias suponhamos o elemento de estado plano de tensões representado por sua equação característica :

$$\underline{P}_e = \underline{k}_e \cdot \underline{U}_e \quad (4-1)$$

onde :

$$\underline{P}_e^{p,T} = \{ P_x^j \quad P_y^j \quad \dots \dots P_x^{jj} \quad P_y^{jj} \}$$

$$\underline{U}_e^{p,T} = \{ u^j \quad v^j \quad \dots \dots u^{jj} \quad v^{jj} \}$$

onde "p" indica estado plano de tensões .

Por sua vez o elemento de placa em flexão pode ser representado pela sua equação :

$$\underline{\underline{P}}_e^f = \underline{\underline{k}}_e^f \cdot \underline{\underline{U}}_e^f \quad (4-2)$$

onde :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P}}_e^{f,T} &= \{ \begin{matrix} j & j & j & \dots & jj & jj & jj \\ P_z & M_x & M_y & & P_z & M_x & M_y \end{matrix} \} \\ \underline{\underline{U}}_e^{f,T} &= \{ \begin{matrix} j & j & j & \dots & jj & jj & jj \\ w & \theta_x & \theta_y & & w & \theta_x & \theta_y \end{matrix} \} \end{aligned}$$

onde o índice "f" indica flexão.

Se a folha poliédrica estivesse em um único plano as cinco deformações acima seriam suficientes e se tornaria imediata a resolução do problema. Entretanto as lâminas que constituem a folha poliédrica não estão contidas no mesmo plano. Como consequência teremos de fazer uma rotação, para obtermos a matriz de rigidez global, o vetor de cargas nodais equivalentes global e os deslocamentos globais. Desta forma, dependendo da posição da lâmina, a deformação angular θ_x e/ou θ_y , em coordenadas locais, poderá dar origem a uma componente θ'_z em coordenadas globais. O mesmo ocorre com o vetor de cargas nodais equivalentes e com a matriz de rigidez.

Com a finalidade de se facilitar a montagem, no programa, da matriz de rigidez global introduz-se em cada nó, devido ao que foi explicado no parágrafo anterior, no estado plano de tensões uma componente local fictícia de deslocamentos θ_z , uma componente local fictícia do vetor de cargas nodais equivalentes M_z . Na matriz de rigidez local introduz-se mais uma coluna e linha que correspondem às duas componentes (de deslocamento e forças) introduzidas.

Como, na matriz local, não desejamos que termos fictícios interfiram com os termos reais, a coluna e a linha extra deverão ser constituídas de zeros, com exceção do

termo que está sobre a diagonal principal. Este último será uma constante KK. Haverá tantas colunas e linhas extras quantos forem os nós do elemento. A equação (4-1) ficará então :

$$\underline{\tilde{P}}_e^{*P} = \underline{\tilde{k}}_e^{*P} \cdot \underline{\tilde{U}}_e^{*P} \quad (4-3)$$

onde :

$$\underline{\tilde{P}}_e^{*P,T} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & j & j & j & \dots & jj & jj & jj \\ P_x & P_y & Mz & & P_x & P_y & Mz \end{array} \right\}$$

$$\underline{\tilde{U}}_e^{*P,T} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} & j & j & j & \dots & jj & jj & jj \\ u & v & \theta_z & & u & v & \theta_z \end{array} \right\}$$

onde $\underline{\tilde{k}}_e^{*P}$ é tal que, num elemento retangular, a terceira, sexta, nona e décima segunda linha e coluna seriam extras e os elementos k_{33}^{*P} , k_{66}^{*P} , k_{99}^{*P} , k_{1212}^{*P} , seriam constantes KK.

Como consequência da independência de causas e efeitos existentes entres o estado plano de tensões podemos conceber o elemento para a análise de folhas poliédricas com uma equação característica que será a seguinte :

$$\left\{ \begin{array}{c} j \\ P_x \\ j \\ P_y \\ j \\ M_z \\ \vdots \\ \vdots \\ jj \\ P_x \\ jj \\ P_y \\ jj \\ M_z \\ \hline j \\ P_z \\ j \\ M_x \\ j \\ M_y \\ \vdots \\ \vdots \\ jj \\ P_z \\ jj \\ M_x \\ jj \\ M_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \tilde{k}_e^{*P} & 0 \\ 0 & \tilde{k}_e^{*f} \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} j \\ u \\ j \\ v \\ j \\ \theta_z \\ \vdots \\ \vdots \\ jj \\ u \\ jj \\ v \\ jj \\ \theta_z \\ \hline j \\ w \\ j \\ \theta_x \\ j \\ \theta_y \\ \vdots \\ \vdots \\ jj \\ w \\ jj \\ \theta_x \\ jj \\ \theta_y \end{array} \right\} \quad (4-4)$$

Se fizermos uma troca conveniente de linhas e colunas da matriz de rigidez, vetor-de cargas nodais equivalentes e vetor de deslocamentos, a expressão (4-4) pode ser posta sob a forma :

$$\tilde{P}_e = \tilde{k}_e \cdot \tilde{U}_e \quad (4-5)$$

onde :

$$\underline{P}_e^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} j & j & j & j & j & j \\ P_x & P_y & P_z & M_x & M_y & M_z \end{array} \dots \begin{array}{cccccc} jj & jj & jj & jj & jj & jj \\ P_x & P_y & P_z & M_x & M_y & M_z \end{array} \right\}$$

$$\underline{U}_e^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} u^j & v^j & w^j & \theta_x^j & \theta_y^j & \theta_z^j \\ u^{jj} & v^{jj} & w^{jj} & \theta_x^{jj} & \theta_y^{jj} & \theta_z^{jj} \end{array} \right\}$$

onde j representa o número do nó do elemento onde está situada a origem do sistema de coordenadas locais e, jj representa o número do nó vizinho percorrendo-se os nós do elemento no sentido horário.

Desta forma vemos como podemos, a partir de um elemento do estado plano de tensões e de um elemento para placas delgadas em flexão, determinar um elemento com cinco graus de liberdade reais e um fictício ao nível do elemento.

Uma nota a respeito da rotação em torno do eixo Z local pode ser encontrada na referência (3):

"A rotação em torno do eixo Z local foi desprezada. Pode-se dizer a favor deste procedimento que esta rotação é muito pequena devido à grande rigidez apresentada pela placa neste sentido. Talvez a melhor justificativa para a omissão desta rotação, é entretanto, o alto grau de precisão dos resultados mesmo quando esta rotação é negligenciada".

Em nosso caso, a matriz \underline{k}_e , que aparece na (4-5), será uma matriz quadrada de 24 x 24 termos. Isto porque tanto o RMD como o HIBRIDO são elementos retangulares com quatro nós por elemento, e, com seis incógnitas por nó. Os vetores \underline{P}_e e \underline{U}_e terão, cada um deles, 24 termos.

Pode-se considerar a matriz \underline{k}_e constituída de dezesseis submatrizes, cada uma com 6 x 6 elementos. Ou seja :

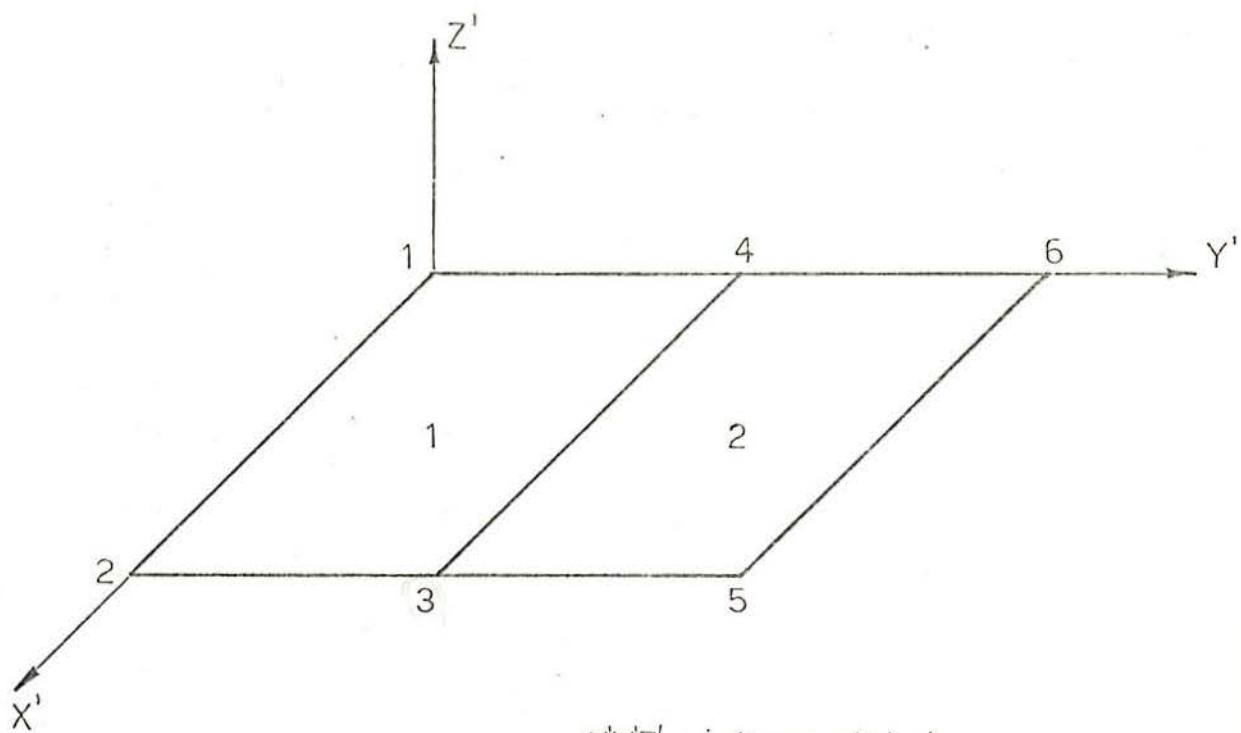


Fig. № 10

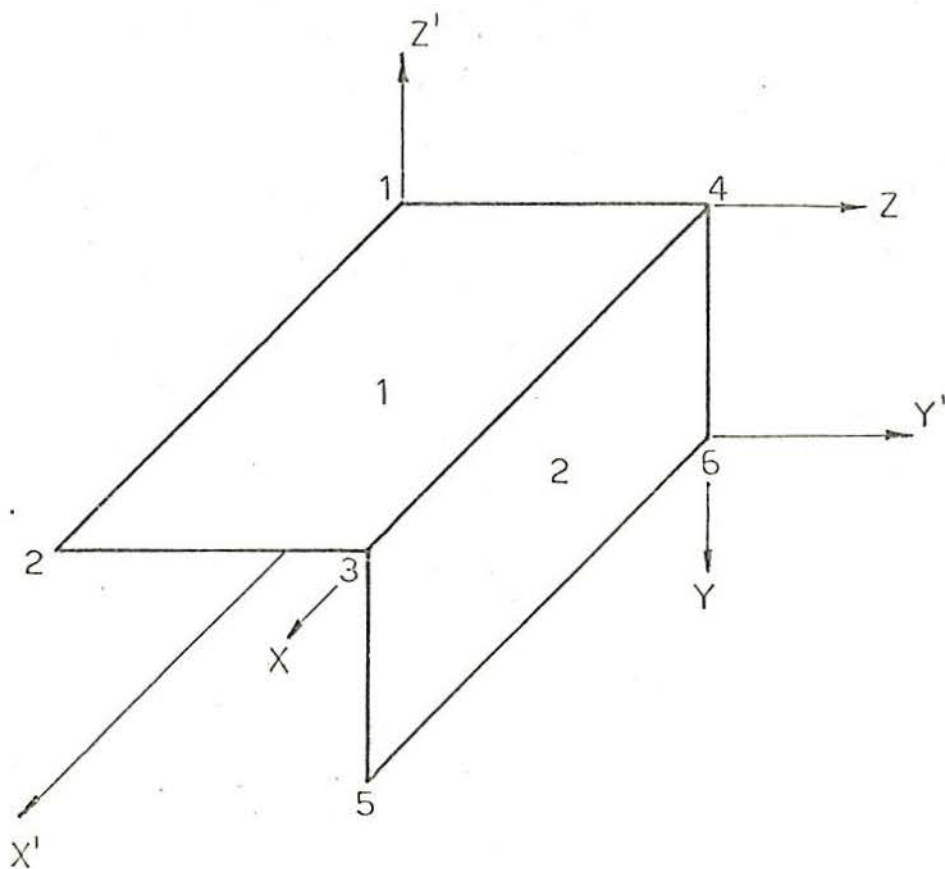
 XYZ' -sistema global XYZ -sistema local

Fig. № 11

$$\underline{\tilde{k}}_e = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{jj} & \tilde{k}_{j\ell} & \tilde{k}_{jo} & \tilde{k}_{jp} \\ \tilde{k}_{\ell j} & \tilde{k}_{\ell\ell} & \tilde{k}_{\ell o} & \tilde{k}_{\ell p} \\ \tilde{k}_{oj} & \tilde{k}_{o\ell} & \tilde{k}_{oo} & \tilde{k}_{op} \\ \tilde{k}_{pj} & \tilde{k}_{p\ell} & \tilde{k}_{po} & \tilde{k}_{pp} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

sendo j, ℓ, o, p os nos do elemento lidos seguindo-se a convenção anti-horária e sendo j o não inicial.

As matrizes da diagonal principal contem as constantes KK . Os demais elementos, da coluna e fila da matriz $\underline{\tilde{k}}_e$ onde se encontra uma destas constantes, são nulos. Portanto se uma destas constantes for nula teremos a matriz $\underline{\tilde{k}}_e$, em coordenadas locais ou globais, singular.

Para exemplificar consideremos agora a figura 10. Nesta figura está representada uma lâmina que está contida no plano XY . Esta lâmina tem dois elementos cuja sequência de numeração de nos é :

elemento 1 \rightarrow 1,2,3,4

elemento 2 \rightarrow 4,3,5,6

e as matrizes de rigidez serão :

$$\underline{\tilde{k}}_e^1 = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \\ \tilde{k}_{31} & \tilde{k}_{32} & \tilde{k}_{33}^1 & \tilde{k}_{34}^1 \\ \tilde{k}_{41} & \tilde{k}_{42} & \tilde{k}_{43}^1 & \tilde{k}_{44}^1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

para o elemento 1 e:

$$\tilde{k}_e^2 = \begin{bmatrix} k_{44}^2 & k_{43}^2 & k_{45} & k_{46} \\ k_{34}^2 & k_{33}^2 & k_{35} & k_{36} \\ k_{54} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ k_{64} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

válida para o elemento 2. A matriz \tilde{K} da lâmina será dada por :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}^1 + k_{33}^2 & k_{34}^1 + k_{34}^2 & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43}^1 + k_{43}^2 & k_{44}^1 + k_{44}^2 & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

(4-9)

Cada uma das matrizes da diagonal principal de \tilde{K} conterão em sua diagonal principal uma constante KK . Os demais termos da coluna ou linha de \tilde{K} onde se encontra a constante KK serão nulos. Portanto, neste caso, se um dos KK for nulo teremos a matriz \tilde{K} singular. Se KK for um outro valor qualquer diferente de zero, o resultado final não será alterado porque M_z local ou global não está acoplado com nenhuma das outras equações (todos os termos da linha de M_z , na matriz \tilde{k}_e e \tilde{K} , são nulos, exceto o da diagonal principal KK^*). O mesmo ocorre com 0_z (todos os termos da coluna do termo KK^* correspondente, na matriz \tilde{k}_e e \tilde{K} , são nulos exceto o próprio termo KK^*). Por isso

quando os nós estão situados sobre lâminas planas, os valores dos diversos KK são feitos iguais a 1 no programa.

Se considerarmos a placa da figura 10 não contida no plano XY , mas num plano inclinado em relação ao mesmo, a matriz de rigidez global K se apresentará de modo diferente. Isto porque teremos de multiplicar as matrizes dos elementos por uma matriz de rotação, como veremos mais adiante. Fisicamente entretanto o problema é o mesmo, e se uma das constantes KK for nula a matriz K global também resultará singular. Logo aqui também devemos fazer as constantes KK iguais a 1.

Suponhamos agora a figura 11. Temos aqui os mesmos dois elementos da figura 10. Entretanto aqui estes elementos formam um ângulo (não estão contidos no mesmo plano). As matrizes k_1^1 e k_2^2 são as mesmas das expressões (4-7) e (4-8). Nos nós 3 e 4 ocorre que o eixo Z local do elemento 2 é o eixo Y local do elemento 1 e vice-versa. Portanto em coordenadas globais ter-se-á nestes pontos o aparecimento de um θ'_z que não é fictício, mas sim real e que estará acoplado com outras equações. Neste caso o valor de KK deve ser zero (porque nosso θ'_z não é mais fictício) e a matriz global não resultará singular. É agora fácil de estender este conceito para quando o ângulo entre os dois elementos é diferente de 90° .

O que aqui mostramos para dois elementos pode ser estendido para m elementos. O raciocínio é análogo.

Concluindo: se os elementos que concorrem em um nó são todos coplanares toma-se $KK = 1$ e em caso contrário toma-se $KK \neq 0$.

4.3 Rotação da Matriz de Rigidez de Coordenadas Locais Para Globais.

Consideremos a figura 12. Ela representa os dois sistemas de coordenadas cartesianas : o sistema X, Y, Z é o sistema local e o sistema X', Y', Z' é o sistema global. Se tivermos um vetor de forças local \vec{P} e seu correspondente em

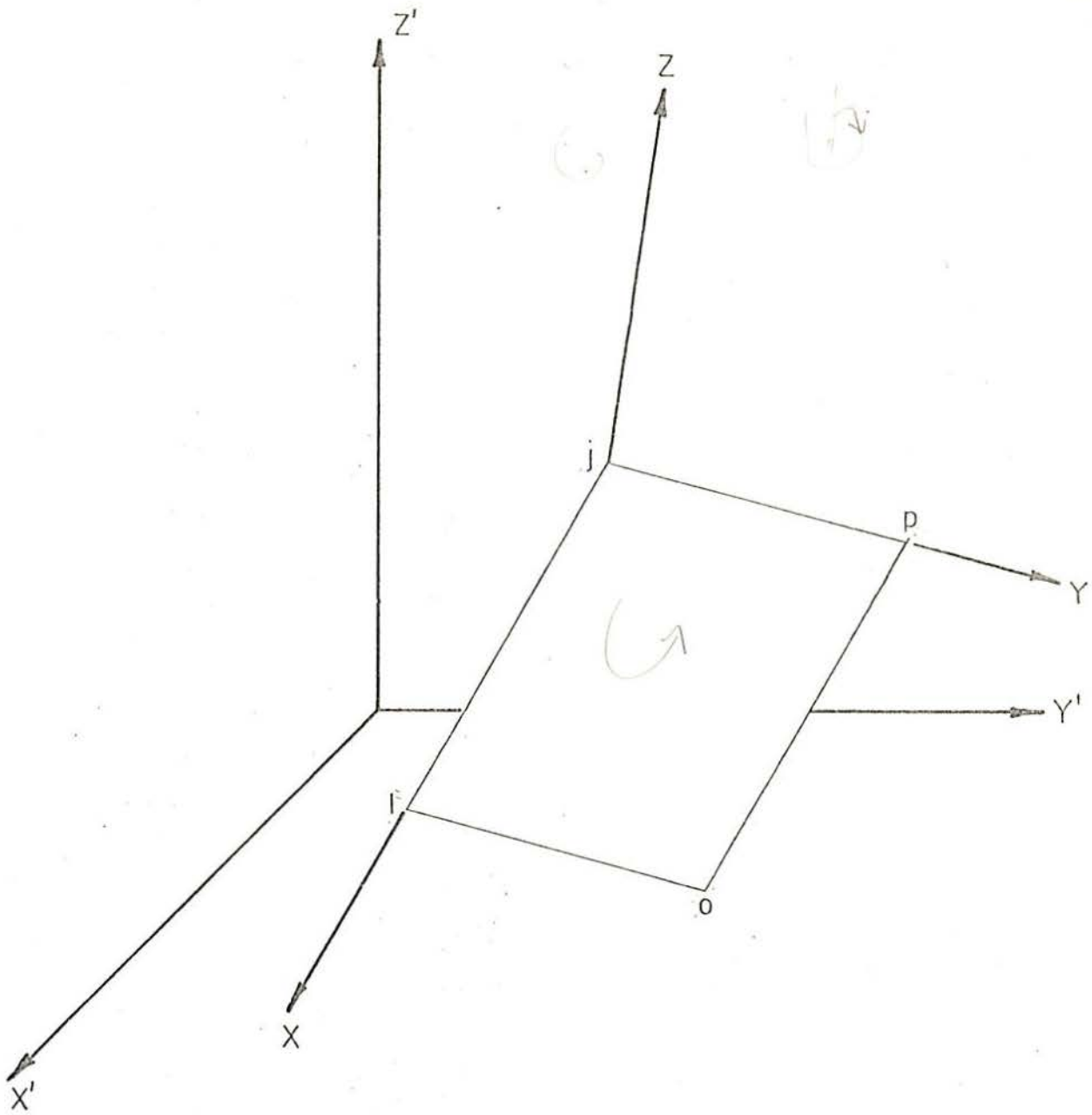


Fig. Nº 12

coordenadas globais for $\bar{\underline{P}}'$, tal que :

$$\begin{aligned}\bar{\underline{P}}^T &= \{ P_x \quad P_y \quad P_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z \} \\ \bar{\underline{P}}'^T &= \{ P'_x \quad P'_y \quad P'_z \quad M'_x \quad M'_y \quad M'_z \}\end{aligned}$$

então pode-se escrever a relação :

$$\bar{\underline{P}} = \underline{r} \cdot \bar{\underline{P}}' \quad (4-10)$$

De uma maneira semelhante se $\bar{\underline{U}}$ representar os deslocamentos em eixos locais e $\bar{\underline{U}}'$ for o vetor correspondente em coordenadas globais, tal que :

$$\begin{aligned}\bar{\underline{U}}^T &= \{ u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z \} \\ \bar{\underline{U}}'^T &= \{ u' \quad v' \quad w' \quad \theta'_x \quad \theta'_y \quad \theta'_z \}\end{aligned}$$

podemos escrever a relação :

$$\bar{\underline{U}} = \underline{r} \cdot \bar{\underline{U}}' \quad (4-11)$$

onde \underline{r} é uma matriz de rotação, de coordenadas globais para coordenadas locais e é dada por :

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} \underline{r}^* & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{r}^* \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

onde \underline{r}^* é uma matriz que envolve cossenos dos diversos ângulos entre os eixos coordenados dos dois sistemas. Assim, se representarmos $\cos(\angle XX') = \phi_{xx}$, etc... , podemos escrever :

$$\underline{r}^* = \begin{bmatrix} \phi_{xx'} & \phi_{xy'} & \phi_{xz'} \\ \phi_{yx'} & \phi_{yy'} & \phi_{yz'} \\ \phi_{zx'} & \phi_{zy'} & \phi_{zz'} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Para o vetor de cargas nodais equivalentes pode-se então escrever :

$$\underline{P}_e = \bar{\underline{R}} \cdot \underline{P}'_e \quad (4-14)$$

onde :

$$\bar{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \underline{r} & \underline{0} & \underline{0} & \dots\dots\dots \\ \underline{0} & \underline{r} & \underline{0} & \dots\dots\dots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{r} & \dots\dots\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

O número de matrizes \underline{r} que entram na confecção de $\bar{\underline{R}}$ é igual ao número de nós que tem o elemento.

Da mesma forma para o vetor de deslocamentos nodais teremos :

$$\underline{U}_e = \bar{\underline{R}} \cdot \underline{U}'_e \quad (4-15)$$

As matrizes \underline{r}^* , \underline{r} , $\bar{\underline{R}}$ são matrizes ortogonais, ou seja, são matrizes onde a transposta da matriz é igual a inversa da matriz. Sendo I a matriz identidade :

$$\begin{aligned}\bar{\underline{r}} \cdot \bar{\underline{r}}^T &= \bar{\underline{r}} \cdot \bar{\underline{r}}^{-1} = \underline{\underline{I}} \\ \underline{r} \cdot \underline{r}^T &= \underline{r} \cdot \underline{r}^{-1} = \underline{\underline{I}} \\ \underline{r}^* \cdot \underline{r}^{*T} &= \underline{r}^* \cdot \underline{r}^{*-1} = \underline{\underline{I}}\end{aligned}\tag{4-16}$$

Logo se um elemento qualquer \bar{e} dado, em coordenadas locais, pela sua equação :

$$\underline{P}_e = \underline{k}_e \cdot \underline{U}_e\tag{4-17}$$

Podemos substituir \underline{P}_e e \underline{U}_e pelos seus valores dados em (4-14) e (4-15). Desta forma obteremos :

$$\bar{\underline{R}} \cdot \underline{P}_e = \underline{k}_e \cdot \bar{\underline{R}} \cdot \underline{U}_e\tag{4-18}$$

Pré-multiplicando ambos os membros da (4-18) por $\bar{\underline{R}}^T$:

$$\underline{P}_e = (\bar{\underline{R}}^T \cdot \underline{k}_e \cdot \bar{\underline{R}}) \cdot \underline{U}_e\tag{4-19}$$

onde :

$$\bar{\underline{R}}^T \cdot \underline{k}_e \cdot \bar{\underline{R}} = \underline{k}_e\tag{4-20}$$

representa a matriz \underline{k}_e em coordenadas globais .

Logo :

$$\underline{k}_e \cdot \underline{U}_e - \underline{P}_e = \underline{0}$$

e lembrando a (3-5) :

$$\bar{\underline{\Sigma}}_m (\underline{k}_e \cdot \underline{U}_e - \underline{P}_e) = \underline{0}$$

ou seja :

$$\sum_{\tilde{m}} (\tilde{k}^e \cdot \tilde{U}^e) = \sum_{\tilde{m}} \tilde{P}^e$$

que pode ser escrita :

$$\tilde{K} \cdot \tilde{U} = \tilde{P}$$

expressão válida para todo o sólido .

Para nossos dois elementos retangulares de quatro nós os valores dos diversos ϕ podem ser facilmente determinados. Se os lados do elemento forem "a" e "b" e se chamarmos de $D_x a$ a projeção do lado "a" sobre o eixo X' etc... , então teremos :

$$\phi_{xx'} = \frac{D_x a}{a}$$

$$\phi_{xy'} = \frac{D_y a}{a}$$

$$\phi_{xz'} = \frac{D_z a}{a}$$

$$\phi_{yx'} = \frac{D_x b}{b}$$

$$\phi_{yy'} = \frac{D_y b}{b}$$

$$\phi_{yz'} = \frac{D_z b}{b}$$

Utilizando-se o conceito de produto vetorial podemos determinar os tres cossenos restantes :

$$\phi_{zx'} = \frac{D_y a \cdot D_z b - D_z a \cdot D_y b}{a \cdot b}$$

$$\phi_{zy'} = \frac{D_x b \cdot D_z a - D_x a \cdot D_z b}{a \cdot b}$$

$$\phi_{zz'} = \frac{D_x a \cdot D_y b - D_y a \cdot D_x b}{a \cdot b}$$

CAPITULO V

5 Aplicações

5.1 Introdução

Este capítulo se destina a mostrar os resultados que podem ser alcançados com os elementos desenvolvidos. Com esta finalidade foram realizados dois exercícios simples e analisados cinco modelos de folhas poliédricas. O último modelo é na verdade um tanque cilíndrico que foi aproximado por meio de uma folha poliédrica, com excelentes resultados conforme mostram os gráficos e tabelas. Os dois exercícios simples servem para mostrar que a parte de estado plano, e a parte de flexão de placas delgadas, estão funcionando em perfeitas condições.

Queremos dizer ainda que os deslocamentos serão dados em coordenadas globais (sistema X', Y', Z') enquanto que as tensões e momentos fletores serão dados em coordenadas locais (sistema X, Y, Z).

Quanto aos deslocamentos u', v' e w' serão considerados positivos os que se derem segundo o sentido positivo dos eixos X', Y', Z' de coordenadas globais. O sentido positivo dos deslocamentos $\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z$ é sempre o anti-horário. Os sentidos positivos dos momentos estão na figura 5. As tensões σ_x e

σ_y serão positivas se forem de tração e negativas se forem de compressão.

Queremos ainda resaltar que as unidades kg e lb, utilizadas mais adiante, são unidades de força e não de massa.

5.2 Primeiro Exercício

Este exercício se encontrava já realizado na referência (5). Justamente por isso foi selecionado para comparação de resultados, e para verificar se a parte de estado plano de tensões dos elementos funcionava a contento.

O exercício consiste de uma barra engastada carregada na extremidade livre. Na figura 13 temos dados do problema. Os resultados foram plenamente satisfatórios e se encontram na tabela 1e2. Aí são mostrados os valores do deslocamento w' na extremidade livre inferior da viga e a tensão σ_x no engaste na parte inferior. O sistema local escolhido é tal que o eixo X é paralelo e de mesmo sentido ao eixo X' e o eixo Y é paralelo e de mesmo sentido ao Z'. A malha utilizada é 6 x 2, e os resultados por nós encontrados estão referenciados por MALHA 6 x 2.

TABELA 1

ELEMENTO: RMD

	Valores de	
	w' (cm)	σ_x (kg/cm ²)
Teoria Técnica das Vigas	- 115,20	- 6,000
MALHA 6x2	- 101,68	- 4,889

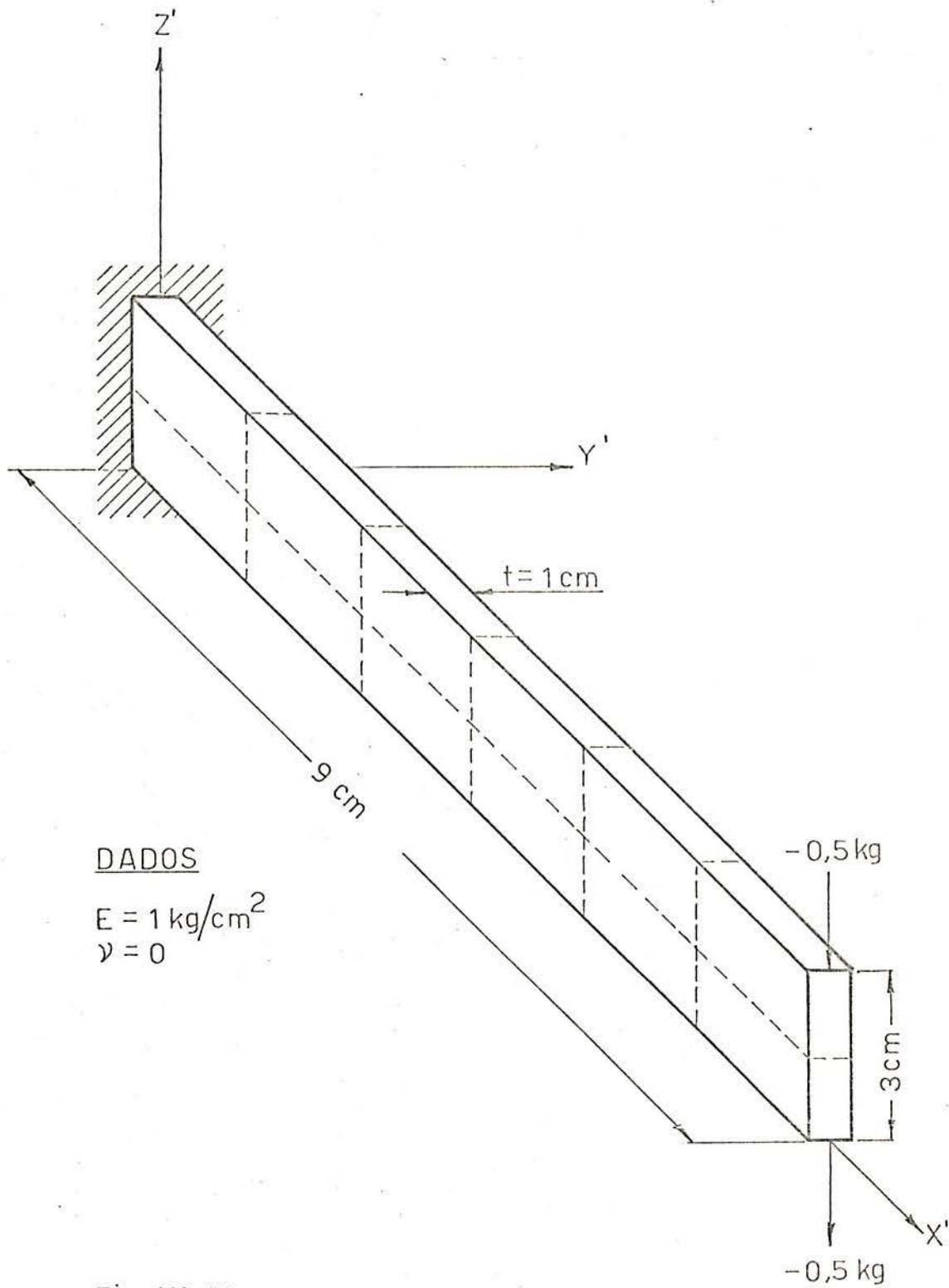


Fig Nº 13

TABELA 2

ELEMENTO: HÍBRIDO

	Valores de w' (cm)	de σ_x (kg/cm ²)
Teoria Técnica das Vigas	- 115,20	- 6,0
MALHA 6x2	- 113,68	- 5,5

Deste exercício podemos concluir que a parte de estado plano de tensões funciona perfeitamente.

O elemento HÍBRIDO apresenta resultados melhores em relação ao RMD. O valor de w' calculado pela teoria técnica das vigas inclui a deformação por corte.

5.3 Segundo Exercício

Este exercício foi extraído da referência (4). Consiste em uma placa engastada nos quatro bordos submetida a um carregamento uniforme vertical. Os dados do problema, bem como a malha empregada, encontram-se na figura 14. Note-se que devido à simetria foi analisada apenas a quarta parte da placa. Usou-se nesta quarta parte uma malha 2x2.

Nas tabelas 3 e 4 aparecem os resultados encontrados. O resultado classificado como EXATO provém da teoria de placas delgadas em flexão, tendo sido calculado com base no formulário encontrado na referência (11). São dados os resultados do deslocamento w' calculado no ponto A (figura 14), e do momento fletor M_x no ponto B (figura 14). O sistema de coordenadas locais tem eixos X, Y e Z respectivamente paralelos aos eixos X' , Y' e Z' globais.

DADOS

$$E = 10920 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

CARREGAMENTO UNIFORME VERTICAL

$$-1 \text{ kg/cm}^2$$

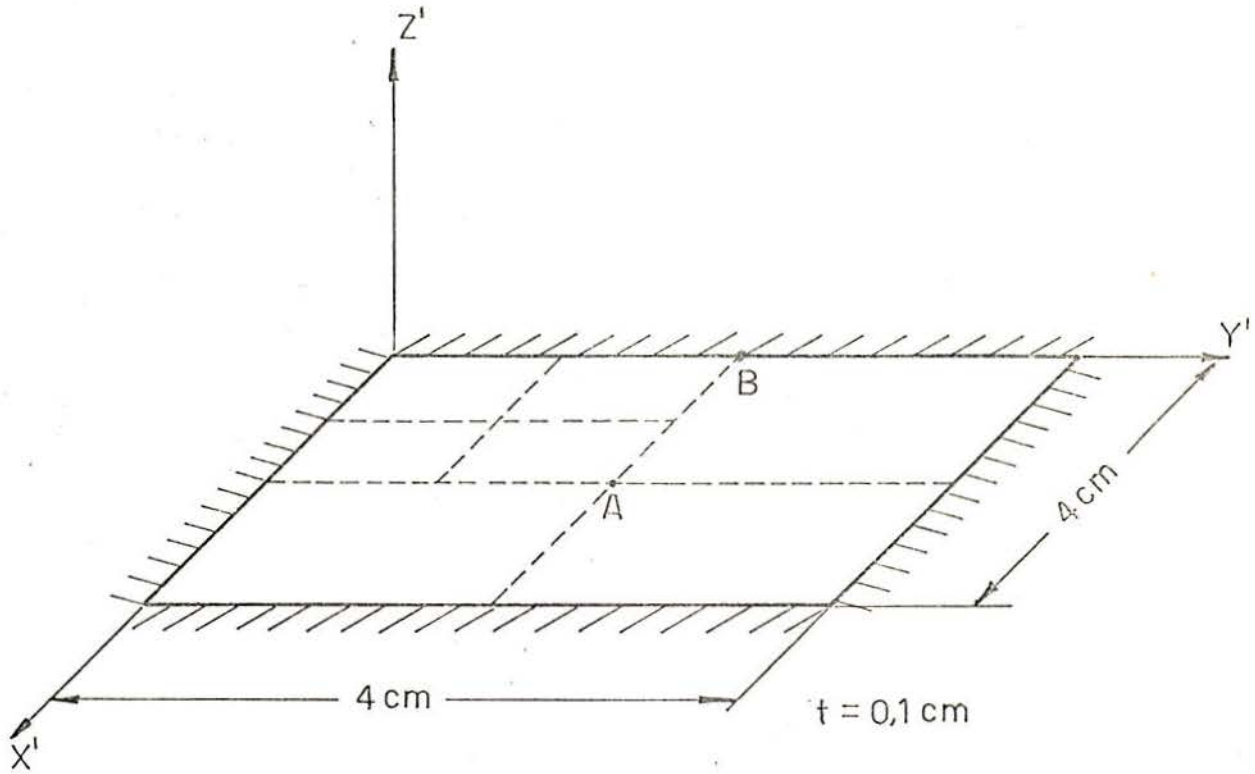


Fig Nº 14

TABELA 3

ELEMENTO:RMD

	Valores w' (cm)	de Mx (kg.cm/cm)
EXATO (11)	- 0,323	- 0,821
MALHA 2x2	- 0,359	- 0,761

TABELA 4

ELEMENTO:HÍBRIDO

	Valores w' (cm)	de Mx (kg.cm/cm)
EXATO	- 0,323	- 0,821
MALHA 2x2	- 0,317	- 0,800

Como vemos a parte de placa delgada em flexão dos elementos funciona também perfeitamente.

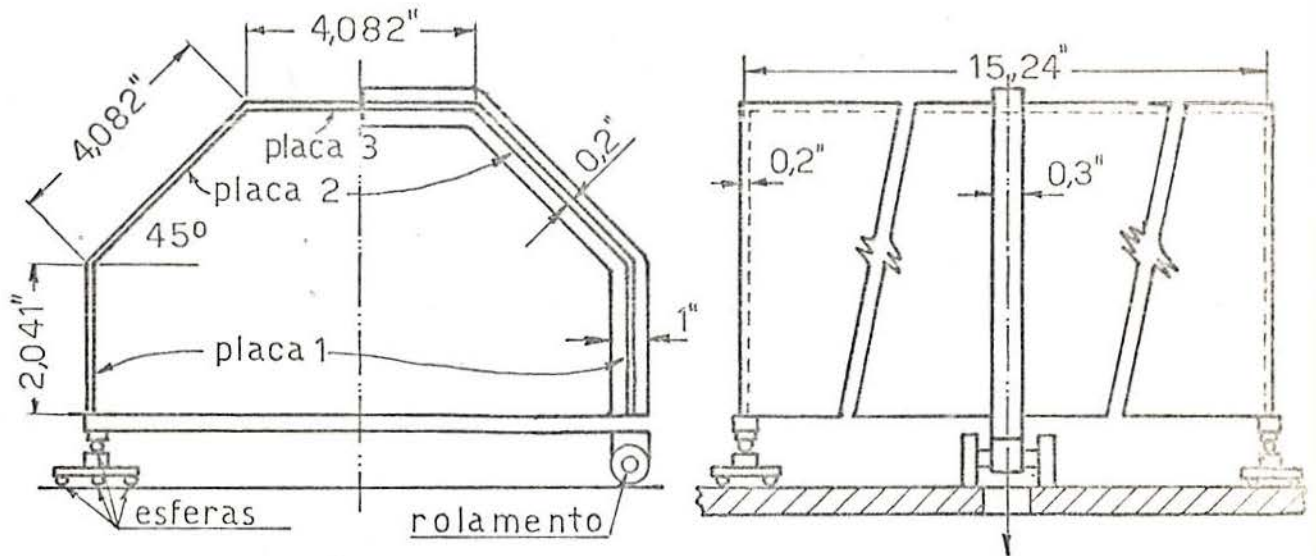
Os resultados por nós encontrados estão referenciados por MALHA 2x2.

5.4 Modelo 1

Este modelo foi analisado experimentalmente com o uso de fotoelasticidade. Esta análise foi publicada em 1967⁽¹²⁾⁽⁸⁾ e tem como autores Robert Mark e Jorge D. Riera.

Podemos ver o modelo e suas principais características na figura 15. Devido às condições de simetria podemos utilizar apenas a quarta parte do modelo. Esta aparece, juntamente com o sistema de referência global, na figura 16. Também na figura 16 está representada a menor malha; das duas, utilizadas na análise. O sistema de referência local é tal que o eixo X é sempre paralelo e de mesmo sentido de X'.

5.4.1 Modelo 1 Analisado Sem Vetor de Cargas Consistente



DADOS

$E = 3560 \text{ psi.}$

$\nu = 0,43$

CARREGAMENTO UNIFORME VERTICAL

placa 3 = $-0,129 \text{ psi.}$

placa 2 = $-0,009 \text{ psi.}$

placa 1 = $-0,009 \text{ psi.}$

Fig. Nº 15 - modelo Nº 1

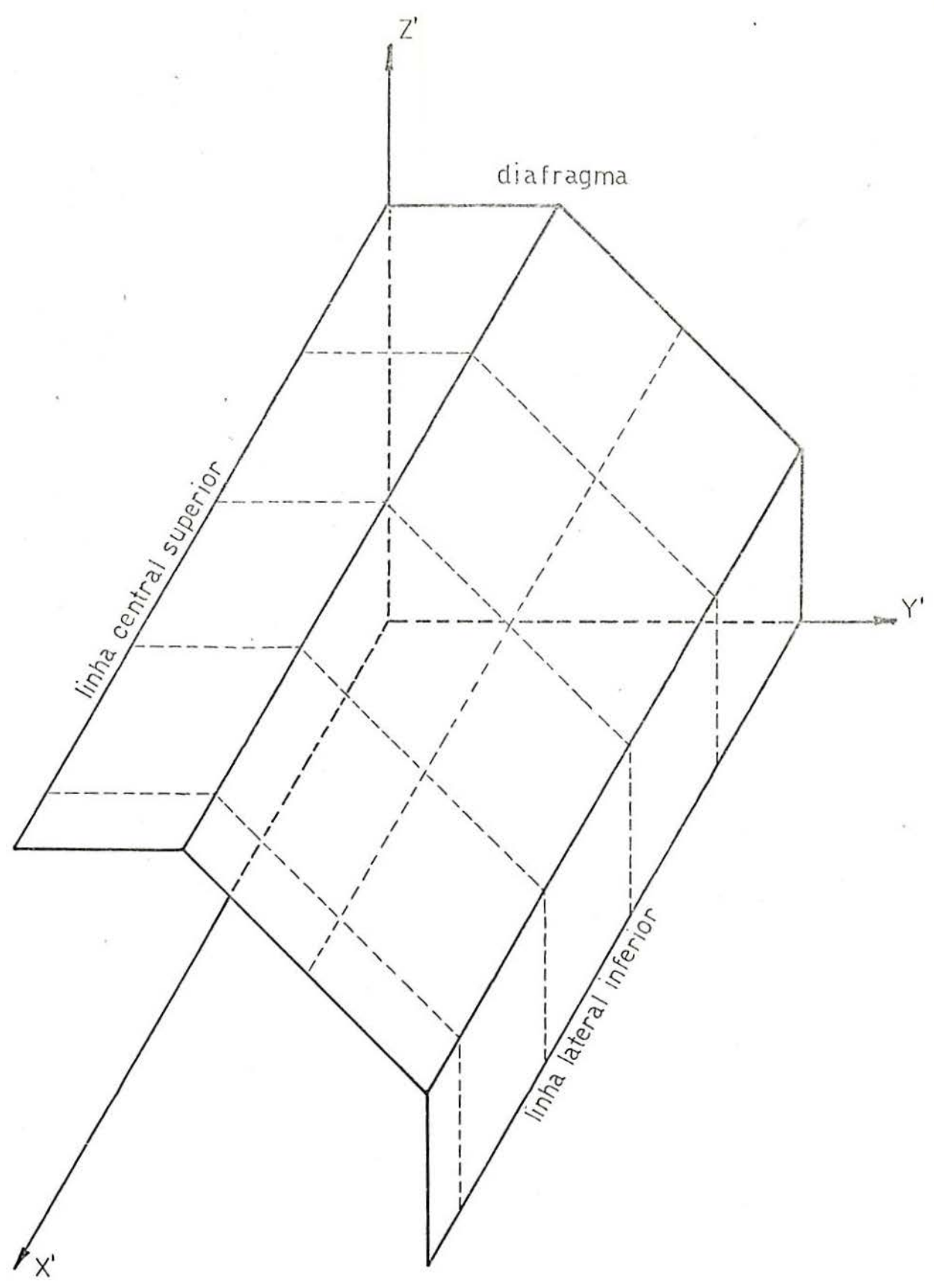


Fig Nº 16 - vista da malha 4x5 - modelo Nº 1

Utilizando o elemento RMD foi feita a análise do modelo 1 sem vetor de cargas consistente, isto é, tomou-se pura e simplesmente a carga distribuída multiplicada pela área do elemento e um quarto deste valor foi concentrado em cada um dos nós do elemento.

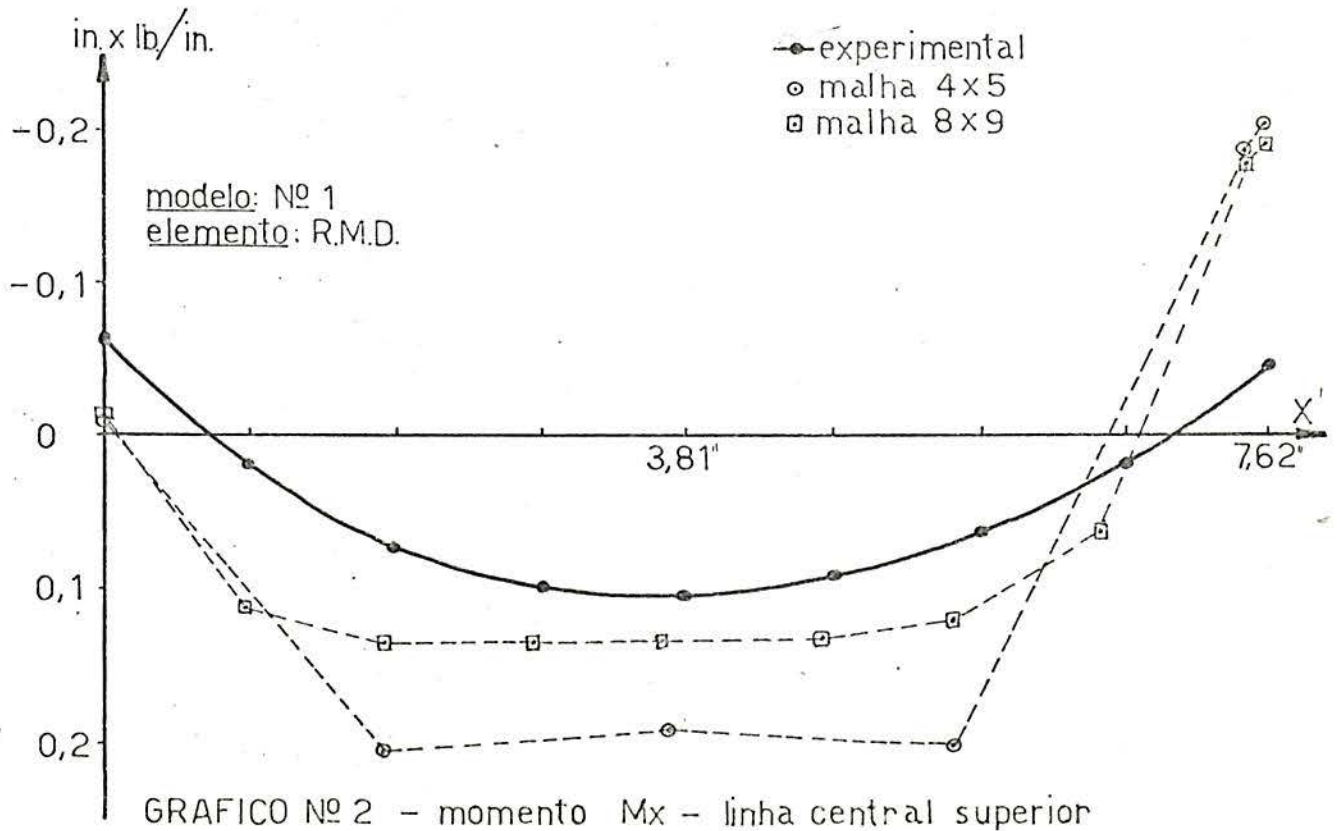
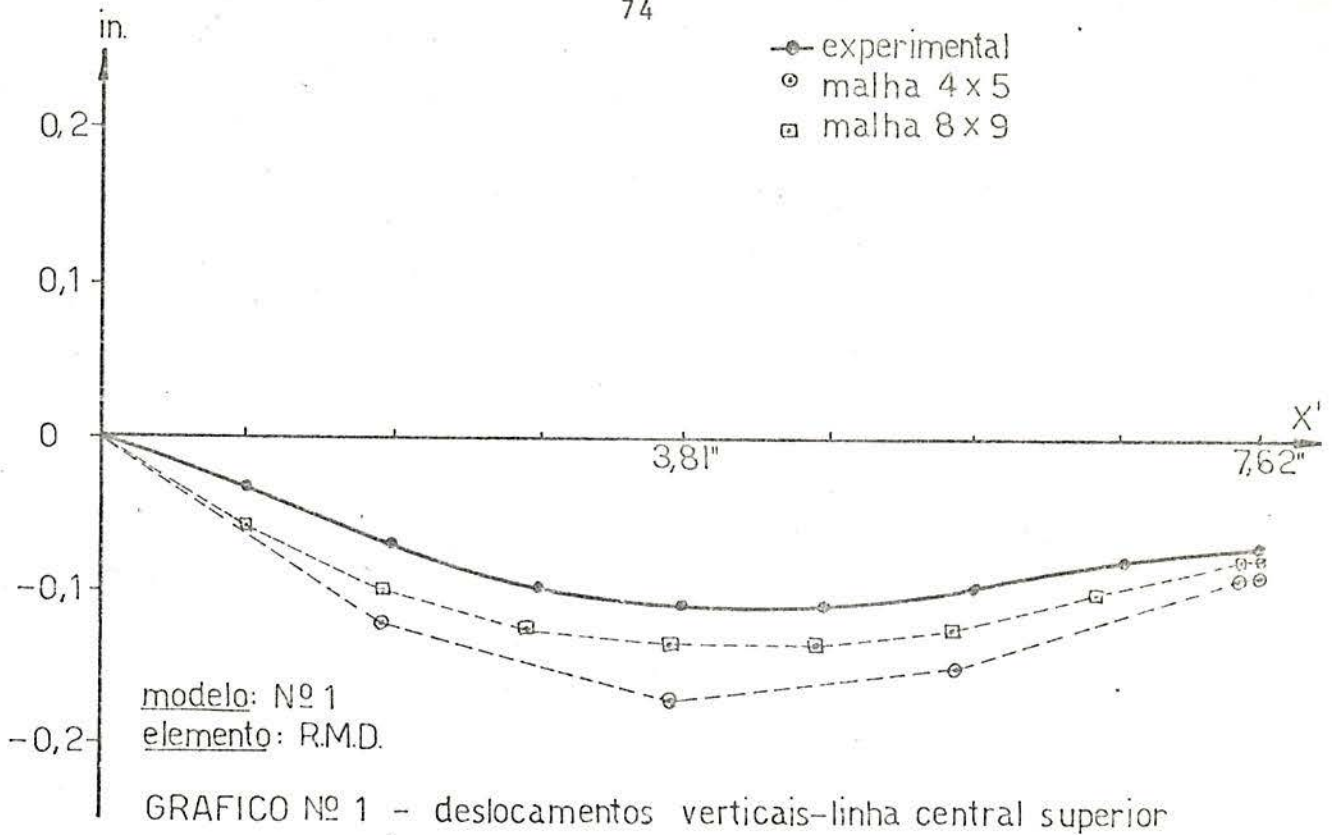
Os resultados aparecem nos gráficos 1, 2, 3 e 4 para malhas de 4x5 e 8x9. Podemos ver que no gráfico 1 a malha mais fina nos dá uma aproximação bastante boa dos resultados experimentais⁽¹²⁾. Entretanto ainda assim os erros são bastante grandes chegando, em certos pontos, a ser próximo de 100%. O gráfico 2 apresenta erros ainda mais consideráveis. Estes ultrapassam 100% de erro em vários pontos. Notamos que para $X'=0''$ o valor do momento experimental é diferente de zero, enquanto nós encontramos um valor nulo. Isto é devido ao fato do diafragma ter sido considerado infinitamente flexível perpendicularmente ao seu plano. Na prática isto não ocorre. Para $X' = 7,62''$ temos uma discrepância muito grande no que diz respeito aos valores encontrados. Aqui o problema se deve, provavelmente, à barra que existe no centro do modelo e que resultou em elementos muito compridos e estreitos provocando uma distorção.

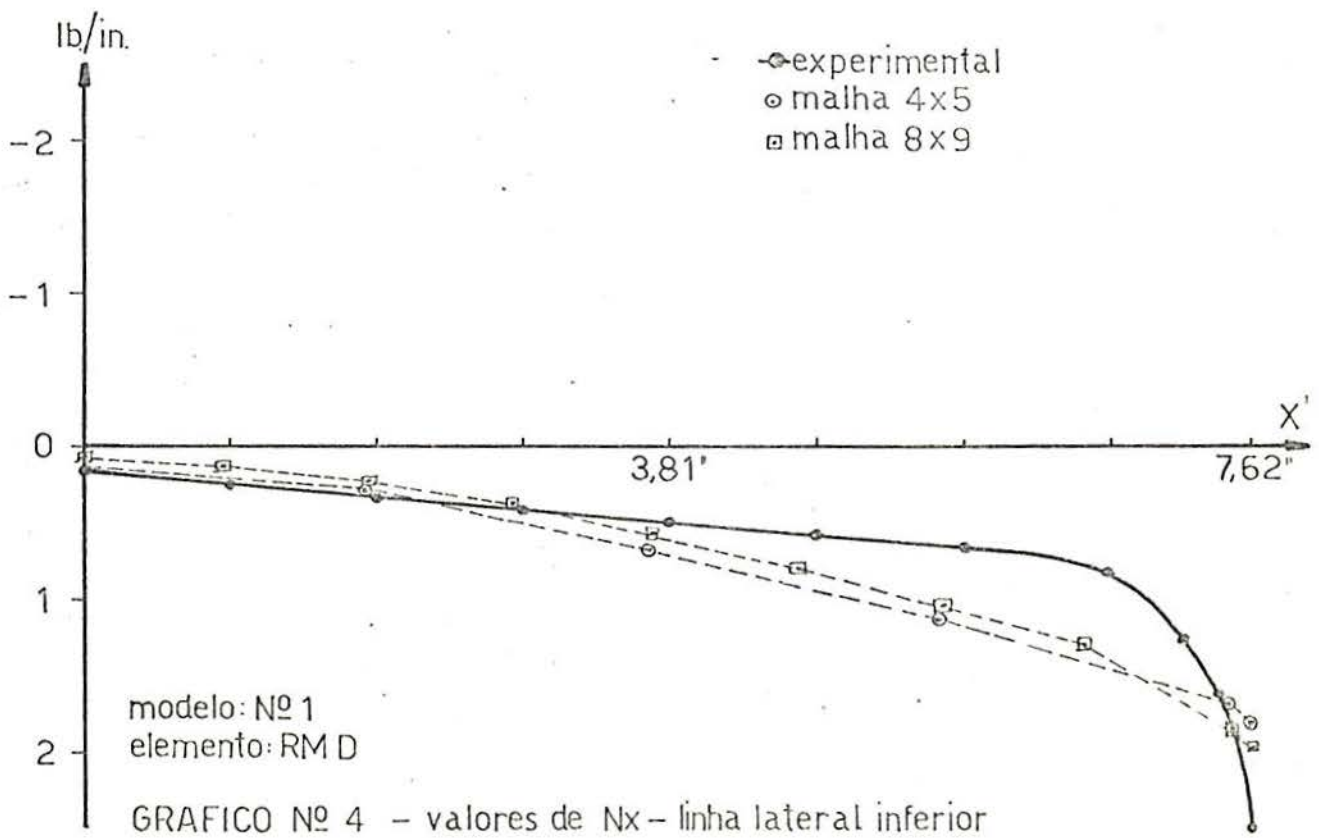
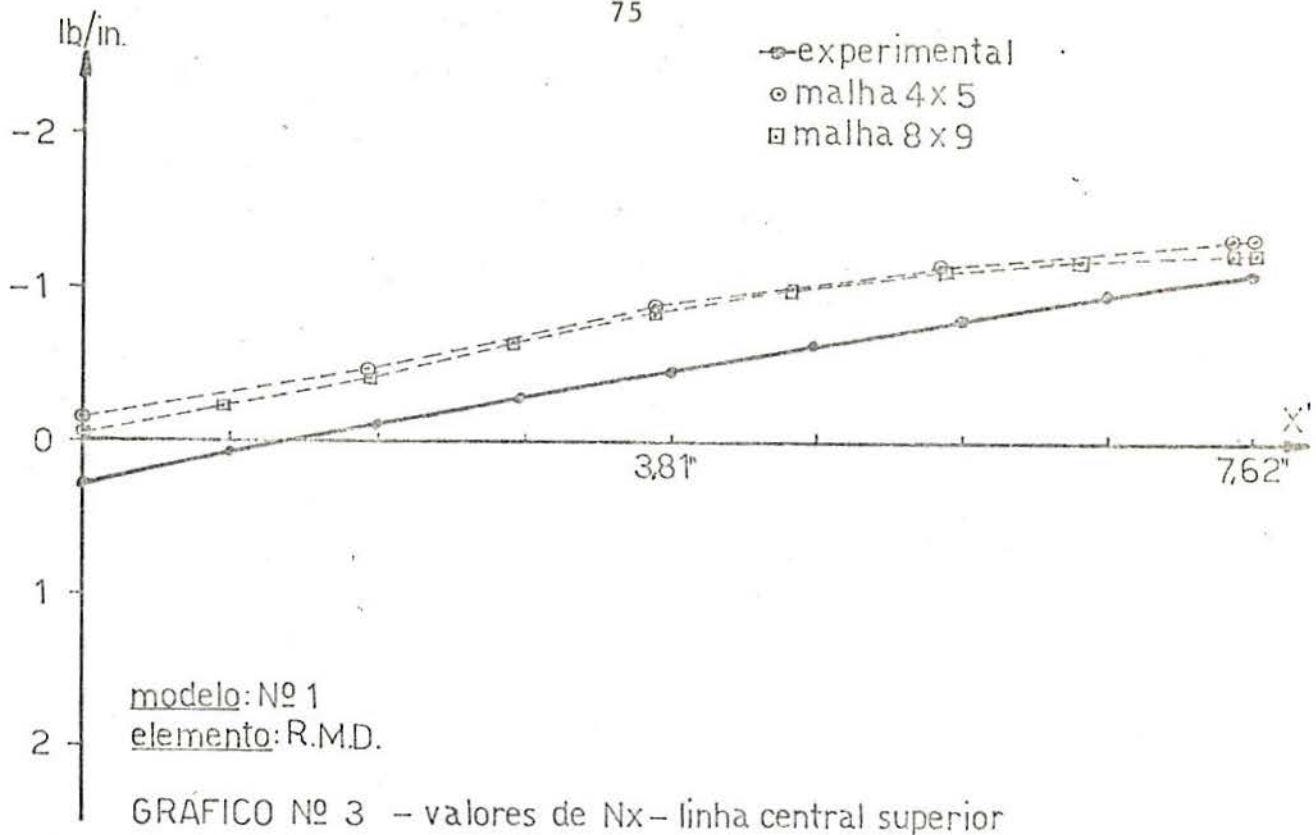
Os gráficos 3 e 4 nos mostram forças N_x por unidade de largura. Como podemos ver no gráfico 3 aparece problema para $X'=0''$ devido, provavelmente, à falta de rigidez do diafragma perpendicularmente ao seu plano.

No gráfico 4 temos problema em $X'=7,62''$. Aí ocorre uma distorção devido à barra da qual já falamos. Não há grande diferença entre os resultados das duas malhas.

Estas distorções nas duas extremidades persistirão, como veremos, mesmo usando o vetor de cargas consistente. Faremos mais tarde uma tentativa para eliminar estes dois problemas.

Comparando estes gráficos com os gráficos 5, 6, 7 e 8, que foram obtidos com o vetor de cargas nodais equiva





lentes consistente, concluimos que não se deve deixar de usar o vetor de cargas consistente.

5.4.2 Modelo 1 Analisado com Vetor de Cargas Consistente

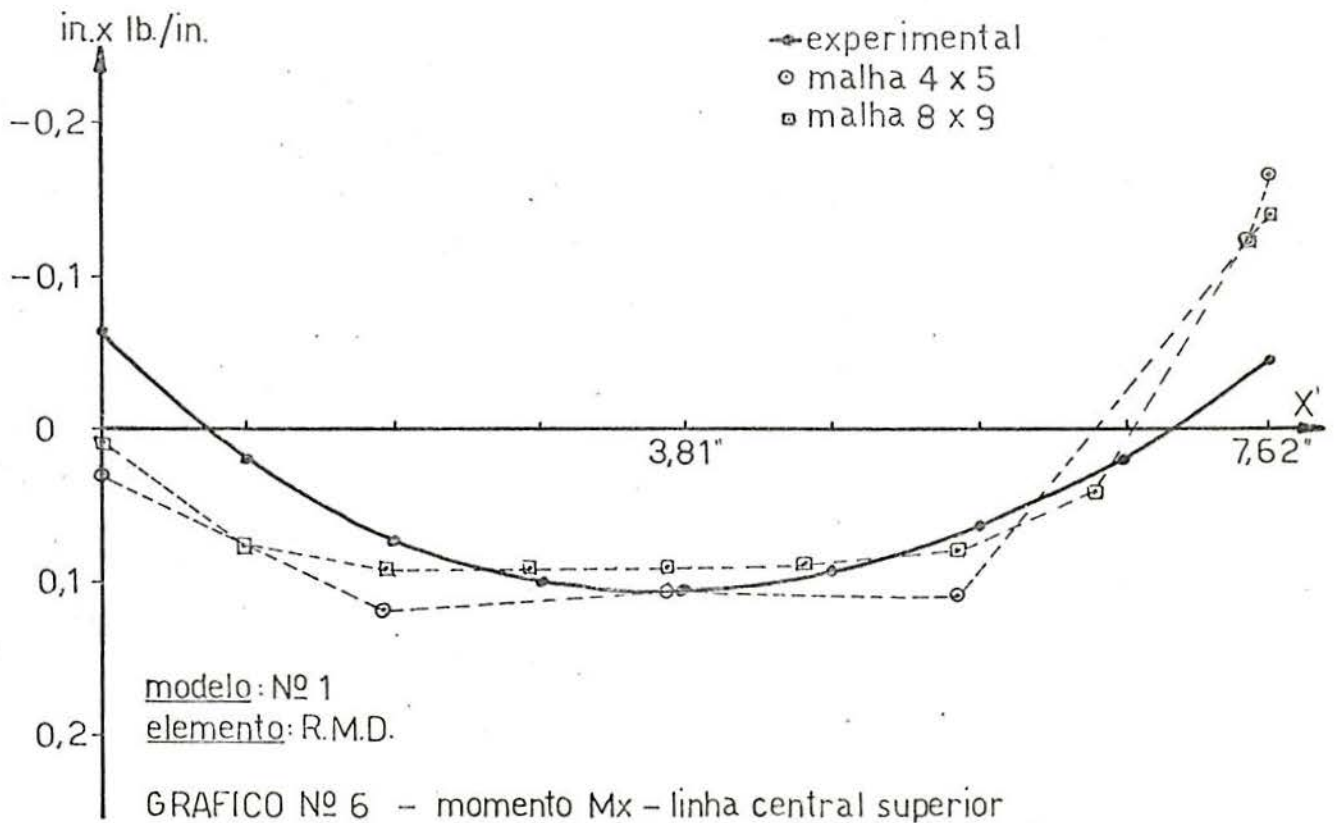
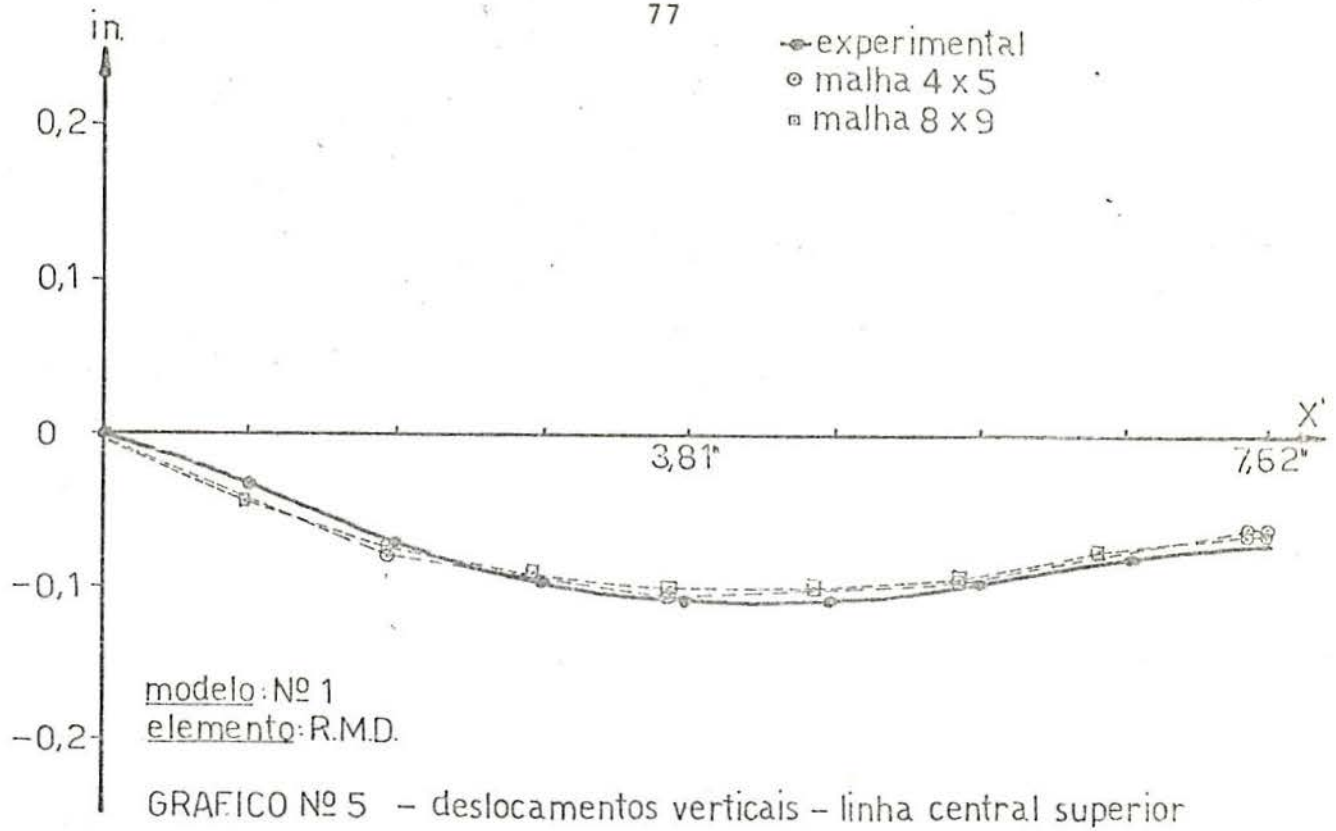
A análise foi feita utilizando-se o elemento RMD e o elemento HIBRIDO. Os resultados aparecem nas tabelas 5 e 6 e nos gráficos 5,6,7,8,9,10,11 e 12.

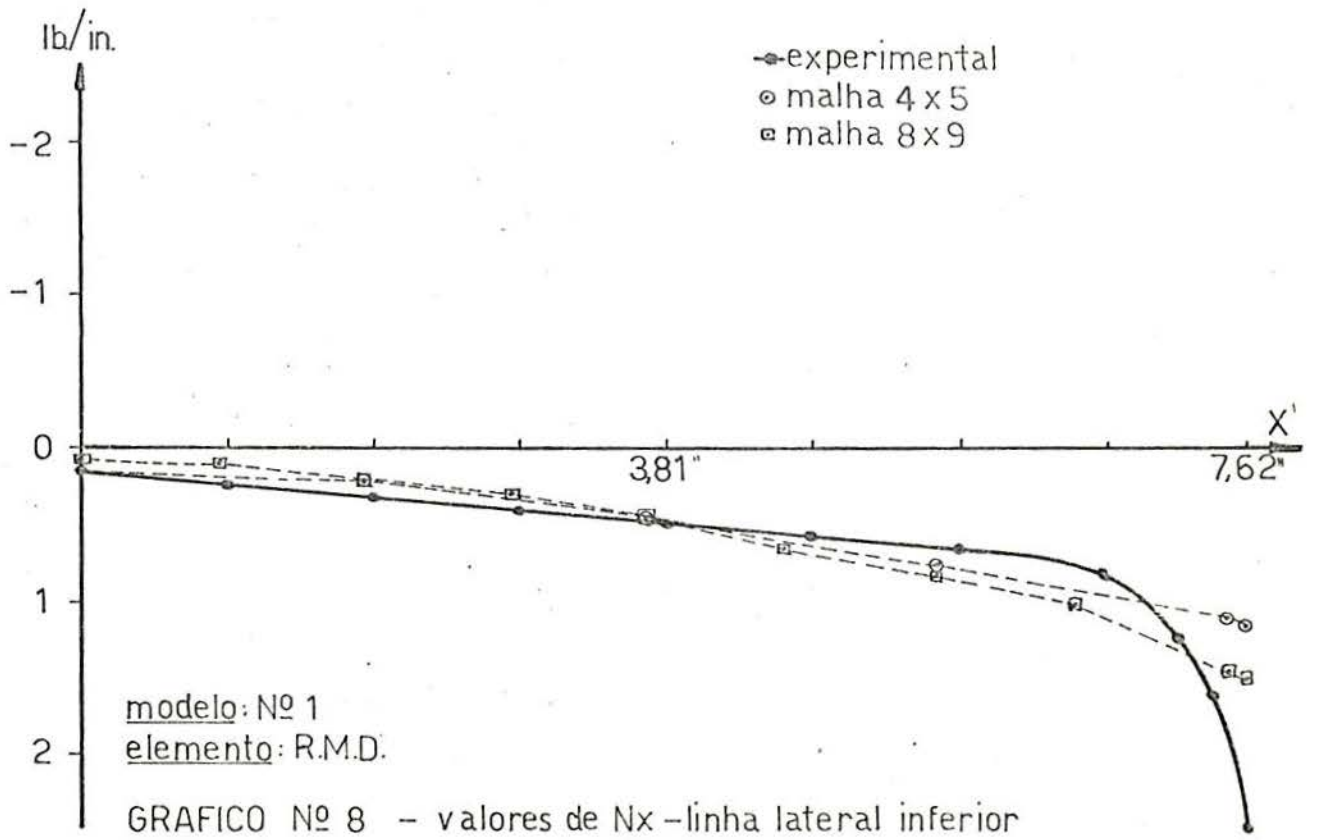
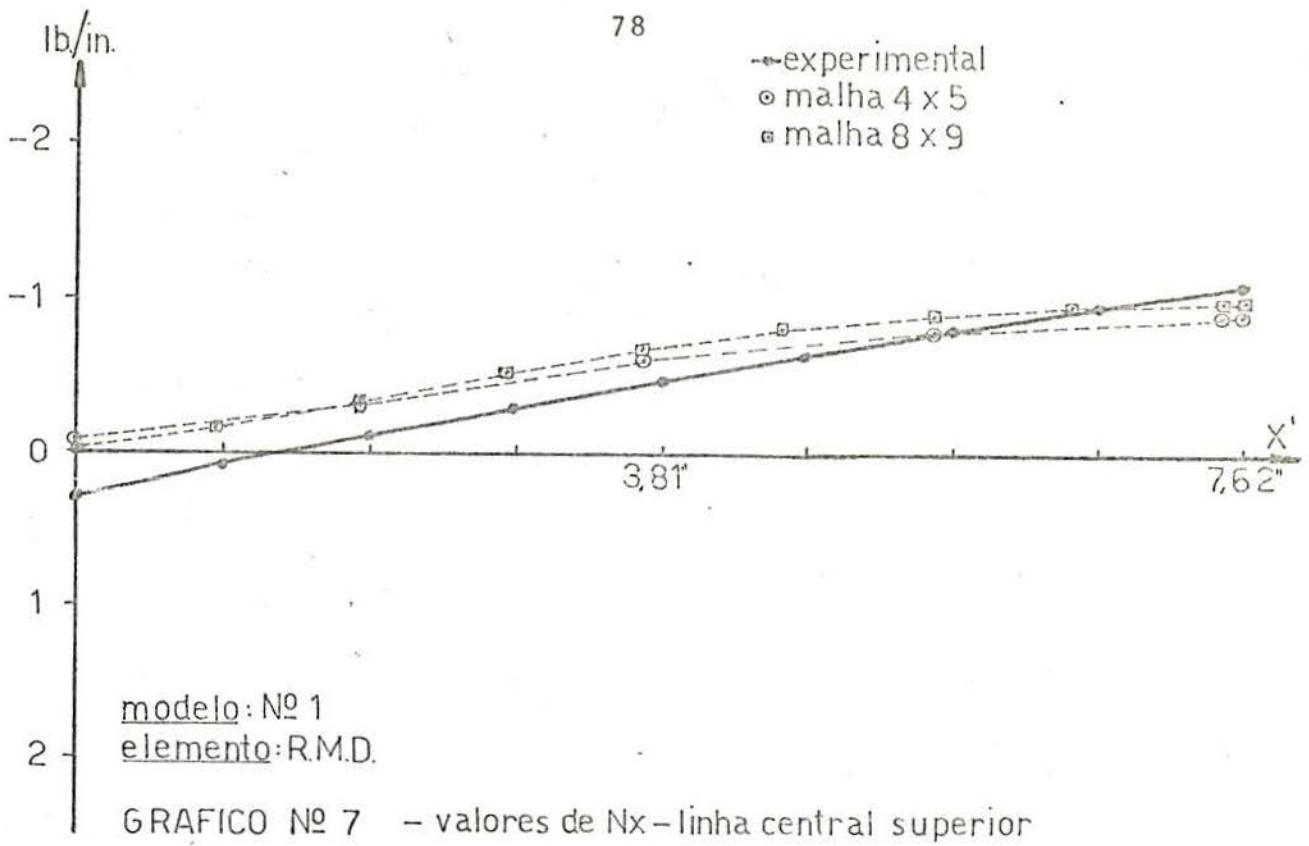
Para o RMD podemos ver que o uso de um vetor de cargas nodais equivalentes consistente possibilitou uma grande melhoria de resultados. É o que nos mostram claramente os gráficos 5 e 6. Também nos gráficos 7 e 8 houve uma visível melhora dos resultados. Persistem todavia os problemas nas extremidades da região analisada. Note-se que há pouca diferença entre os resultados oferecidos pelas duas malhas. Portanto com uma malha grosseira pode-se conseguir um resultado bastante bom.

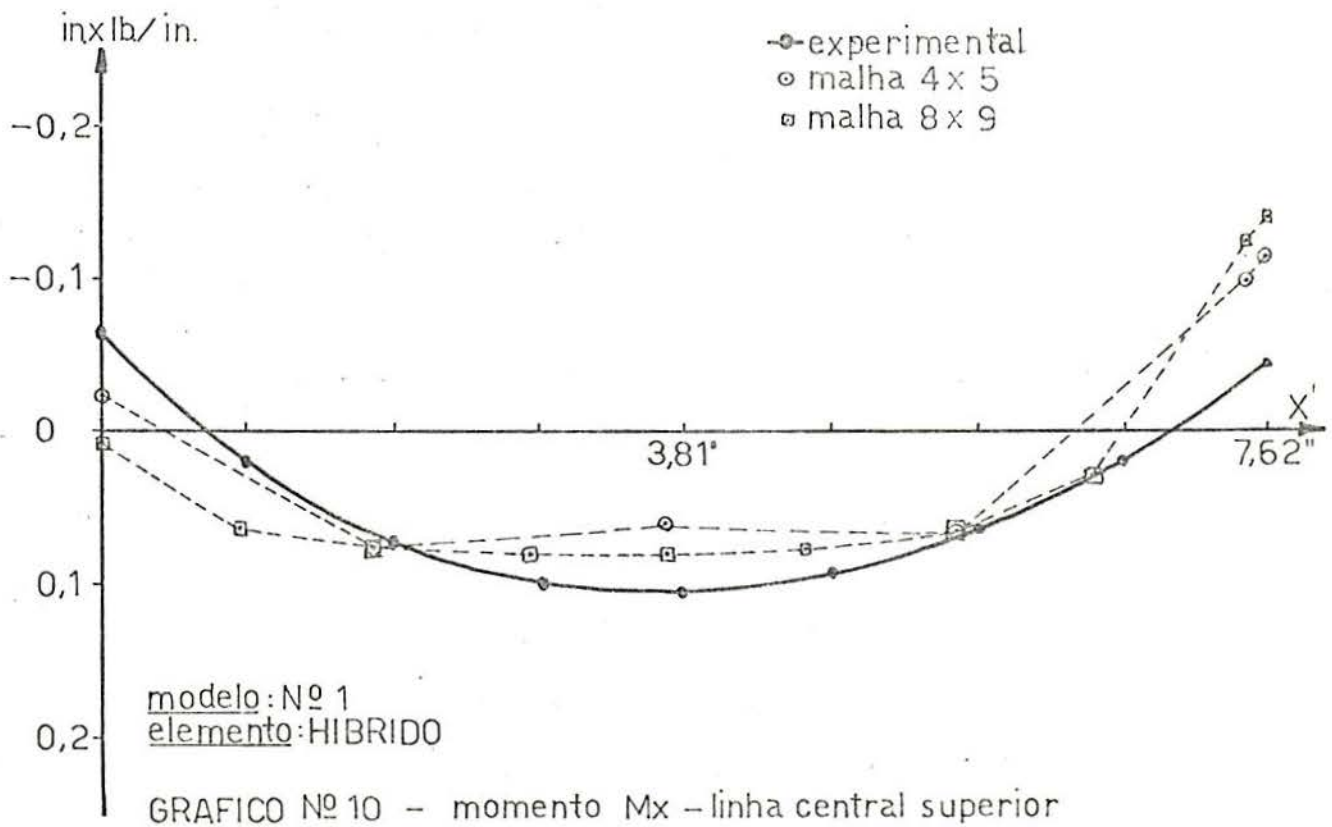
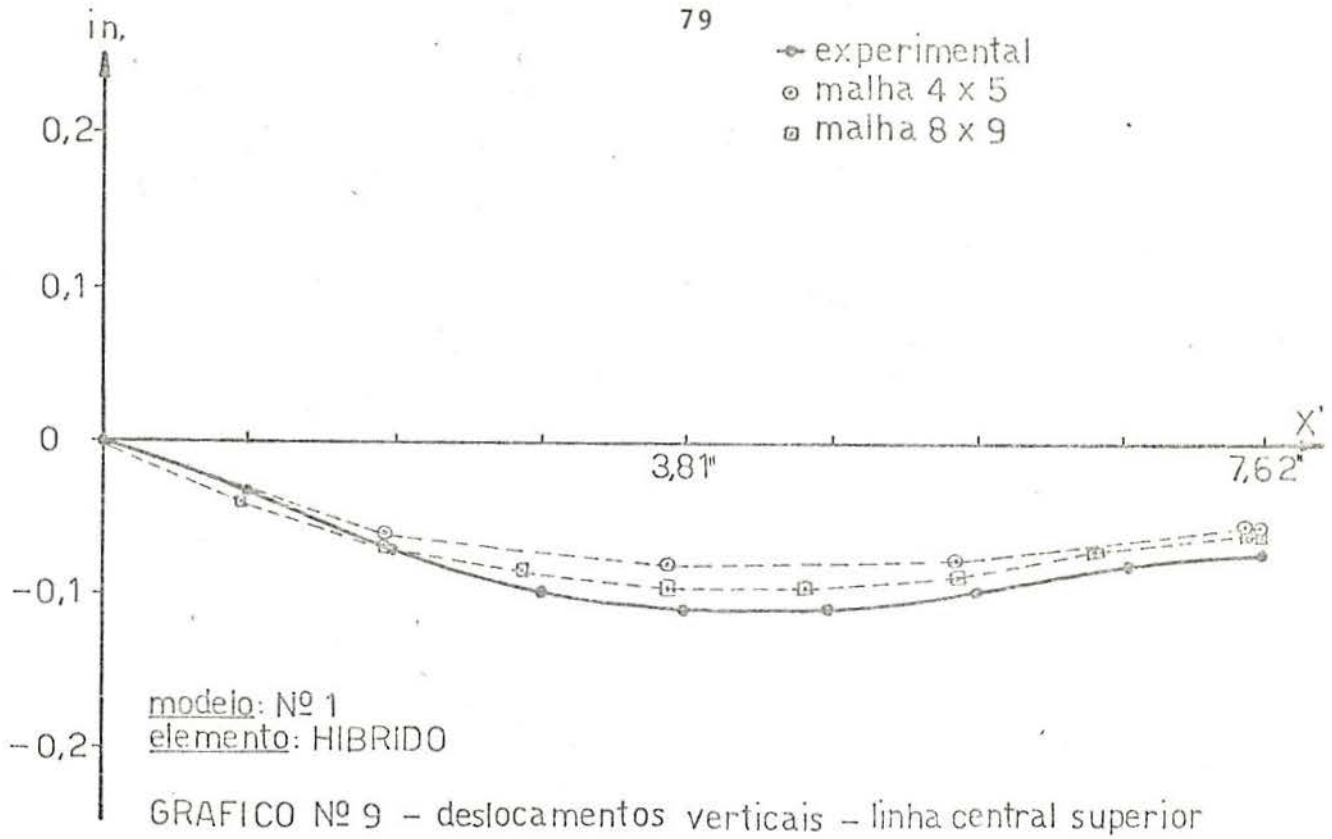
Os resultados obtidos com o uso do HIBRIDO são semelhantes aos obtidos com o RMD. A diferença mais marcante é que enquanto um elemento converge por valores superiores o outro converge por valores inferiores. Também aqui a malha mais grosseira oferece resultados bastante bons. Entretanto queremos resaltar que o tempo gasto na computação utilizando um elemento do tipo HIBRIDO é consideravelmente maior do que o gasto com a utilização do RMD. Sendo os resultados praticamente de mesma qualidade, este último fator depõe favoravelmente a favor do RMD. Para se ter uma idéia damos abaixo os tempos gastos, em segundos, na resolução deste problema para ambas as malhas utilizadas e ambos os elementos :

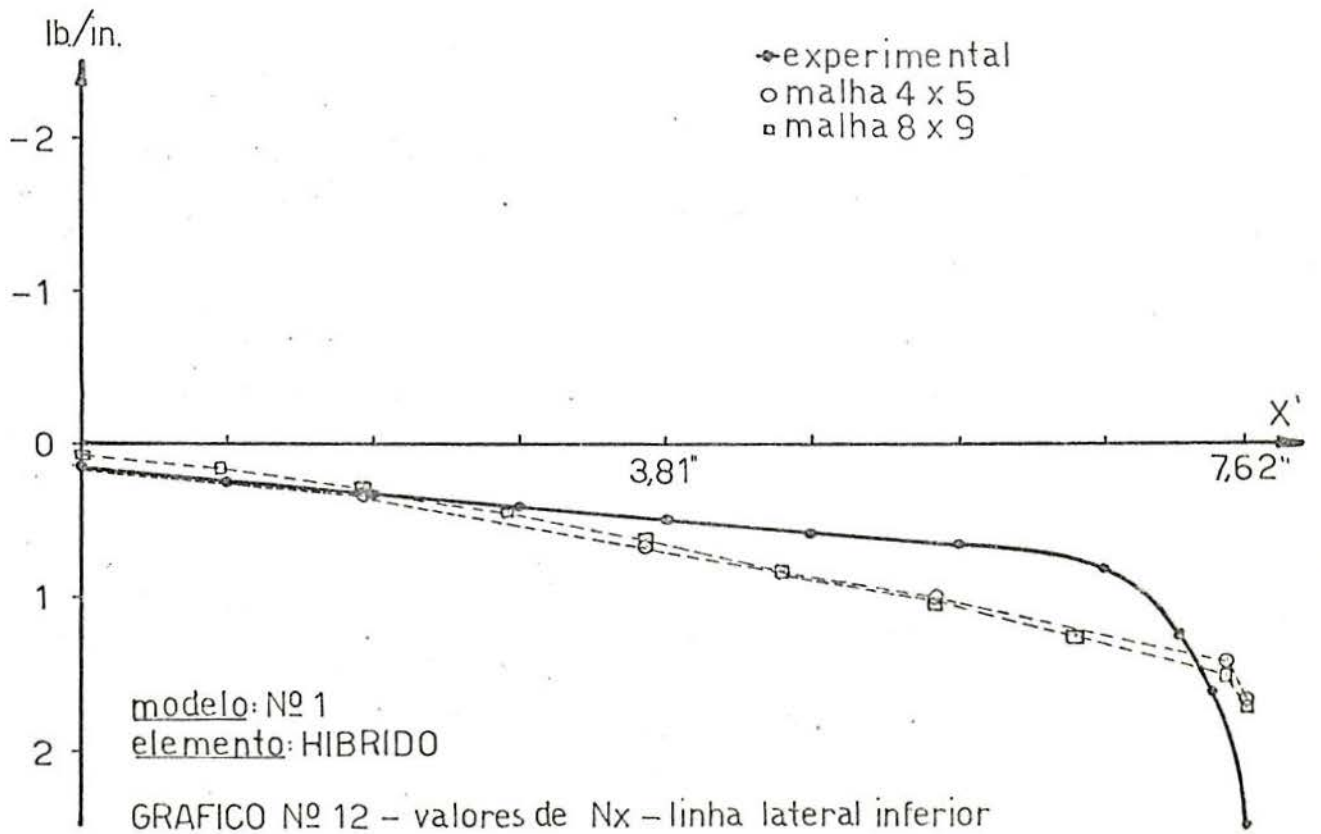
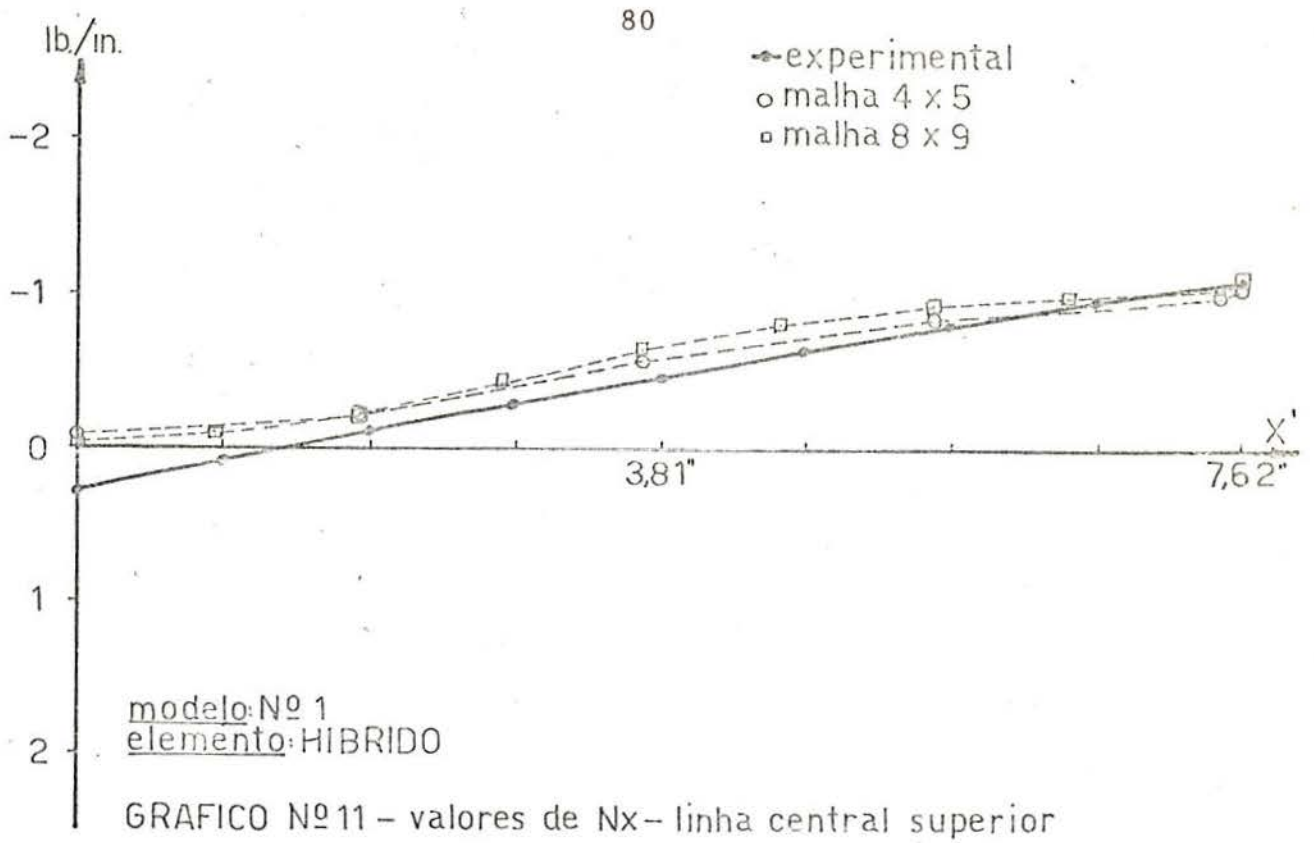
	RMD	HIBRIDO
MALHA 4x5	80,039	168.751
MALHA 8x9	513,876	840.179

Isto nos dá 110% a mais de tempo na malha mais grosseira, e 63% a mais no caso da malha mais fina. Nos demais mo









T A B E L A 5

Modelo No. 1		Elemento: R.M.D.									
Para X' =	0,000	0,934	1,867	2,801	3,735	4,669	5,602	6,536	7,470	7,620	
Deslocamentos verticais (in) - linha central superior											
Experimental	0,000	-0,030	-0,067	-0,097	-0,108	-0,108	-0,100	-0,082	-0,072	-0,072	
Malha 4x5	0,000	-----	-0,078	-----	-0,105	-----	-0,094	-----	-0,060	-0,060	
Malha 8x9	0,000	-0,043	-0,074	-0,092	-0,101	-0,102	-0,093	-0,076	-0,062	-0,062	
Malha 102	-0,014	-0,048	-0,080	-0,102	-0,114	-0,116	-0,107	-0,091	-0,077	-0,077	
Momento Mx (inxlb/in) - linha central superior											
Experimental	-0,062	0,012	0,070	0,100	0,105	0,095	0,072	0,027	-0,027	-0,045	
Malha 4x5	0,030	-----	0,117	-----	0,105	-----	0,109	-----	-0,124	-0,165	
Malha 8x9	0,009	0,077	0,091	0,091	0,090	0,089	0,079	0,035	-0,125	-0,139	
Malha 102	-0,099	0,040	0,082	0,091	0,092	0,091	0,081	0,037	-0,121	-0,136	
Valores de Nx (lb/in) - linha central superior											
Experimental	0,270	0,075	-0,100	-0,275	-0,450	-0,600	-0,775	-0,925	-1,075	-1,100	
Malha 4x5	-0,082	-----	-0,328	-----	-0,605	-----	-0,801	-----	-0,908	-0,913	
Malha 8x9	-0,043	-0,180	-0,354	-0,526	-0,686	-0,819	-0,903	-0,953	-0,984	-0,983	
Malha 102	-0,109	-0,188	-0,318	-0,479	-0,636	-0,772	-0,862	-0,918	-0,948	-0,948	
Valores de Nx (lb/in) - linha lateral inferior											
Experimental	0,160	0,237	0,325	0,400	0,500	0,570	0,650	0,775	1,700	2,500	
Malha 4x5	0,145	-----	0,209	-----	0,485	-----	0,761	-----	1,110	1,151	
Malha 8x9	0,069	0,104	0,211	0,332	0,479	0,647	0,827	1,032	1,445	1,518	
Malha 102	-0,246	1,011	0,483	0,355	0,395	0,507	0,628	0,775	1,060	1,108	

Modelo No. 1

Elemento: HIBRIDO

Para X' =	0,000	0,934	1,867	2,801	3,735	4,669	5,602	6,536	7,470	7,620
Deslocamentos verticais (in) - linha central superior										
Experimental	0,000	-0,030	-0,067	-0,097	-0,108	-0,108	-0,100	-0,082	-0,072	-0,072
Malha 4x5	0,000	-----	-0,059	-----	-0,080	-----	-0,077	-----	-0,055	-0,055
Malha 8x9	0,000	-0,040	-0,068	-0,086	-0,095	-0,096	-0,088	-0,073	-0,061	-0,061
Malha 102	-0,015	-0,046	-0,076	-0,097	-0,108	-0,110	-0,104	-0,089	-0,078	-0,078
Momento Mx (inxb/in) - linha central superior										
Experimental	-0,062	0,012	0,070	0,100	0,105	0,095	0,072	0,027	-0,027	-0,045
Malha 4x5	-0,026	-----	0,077	-----	0,063	-----	0,067	-----	-0,108	-0,117
Malha 8x9	0,008	0,064	0,078	0,079	0,078	0,077	0,066	0,027	-0,127	-0,140
Malha 102	-0,101	0,032	0,070	0,079	0,081	0,080	0,068	0,030	-0,124	-0,137
Valores se Nx (lb/in) - linha central superior										
Experimental	0,270	0,075	-0,100	-0,275	-0,450	-0,600	-0,775	-0,925	-1,075	-1,100
Malha 4x5	-0,074	-----	-0,228	-----	-0,584	-----	-0,860	-----	-1,012	-1,089
Malha 8x9	-0,042	-0,099	-0,248	-0,443	-0,642	-0,817	-0,936	-0,990	-1,047	-1,091
Malha 102	-0,291	-0,196	-0,252	-0,395	-0,581	-0,757	-0,886	-0,951	-1,019	-1,067
Valores de Nx (lb/in) - linha lateral inferior										
Experimental	0,160	0,237	0,325	0,400	0,500	0,570	0,650	0,775	1,700	2,500
Malha 4x5	0,174	-----	0,340	-----	0,684	-----	1,006	-----	1,400	1,650
Malha 8x9	0,075	0,148	0,295	0,453	0,633	0,831	1,033	1,261	1,543	1,697
Malha 102	0,213	1,028	0,517	0,418	0,510	0,653	0,783	0,937	1,196	1,364

delos o HIBRIDO consumiu mais tempo que o RMD. Isto se deve ao fato de que, com a atual programação, temos uma inversão de matriz e montagem da matriz de rigidez dentro do computador. Talvez houvesse possibilidade do tempo ser diminuído pela realização destes passos fora do computador.

Uma última observação diz respeito aos dados experimentais que aparecem nas tabelas. O trabalho original⁽¹²⁾ não continha dados numéricos (apenas gráficos). Devido a isto os dados que ali aparecem foram retirados dos gráficos.

Conforme já dissemos voltaremos mais tarde a analisar este modelo tentando superar os problemas que ocorreram para $X' = 0''$ e $X' = 7,62''$.

5.5 Modelo 2

Este modelo foi analisado experimentalmente por A.C. Scordelis, E.L. Croy e I.R. Stubbs⁽¹³⁾. Podemos ver o modelo na figura 17, bem como suas principais características. Este modelo também é estudado na referência (3) utilizando o método dos elementos finitos com elementos triangulares.

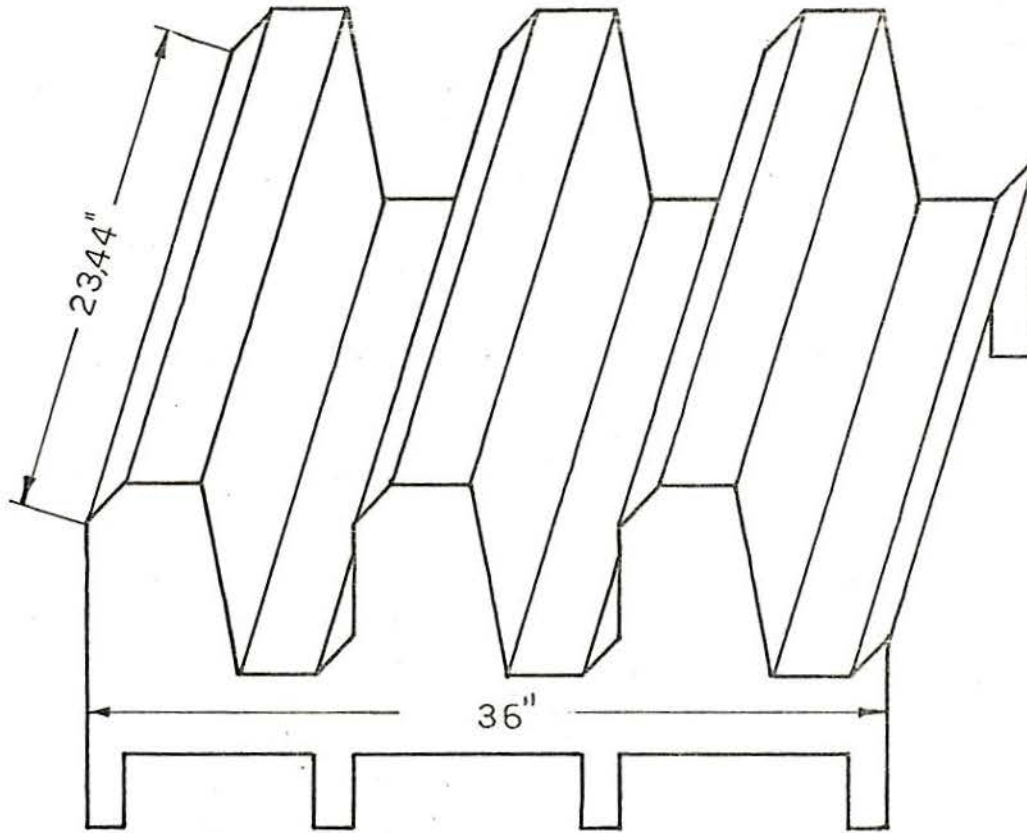
O modelo experimental foi construído de alumínio e é constituído de três folhas poliédricas iguais dispostas como se pode ver na figura 17a. Os resultados experimentais foram retirados da folha poliédrica central. O perfil de cada uma das folhas poliédricas aparece na figura 17b. Os diafragmas foram feitos de chapa de alumínio de 0,19" de espessura. Na figura 17b também é mostrado o carregamento constituído por quatro linhas de carga.

Na figura 18 temos um aspecto da metade da folha poliédrica central e da malha mais grosseira que foi utilizada em sua análise. O sistema de coordenadas locais é tal que o eixo X permanece sempre paralelo e com o mesmo sentido do eixo X' tanto na malha 6x6 como na 6x10. Vemos também o sistema global de eixos coordenados que foi utilizado. A execução da análise

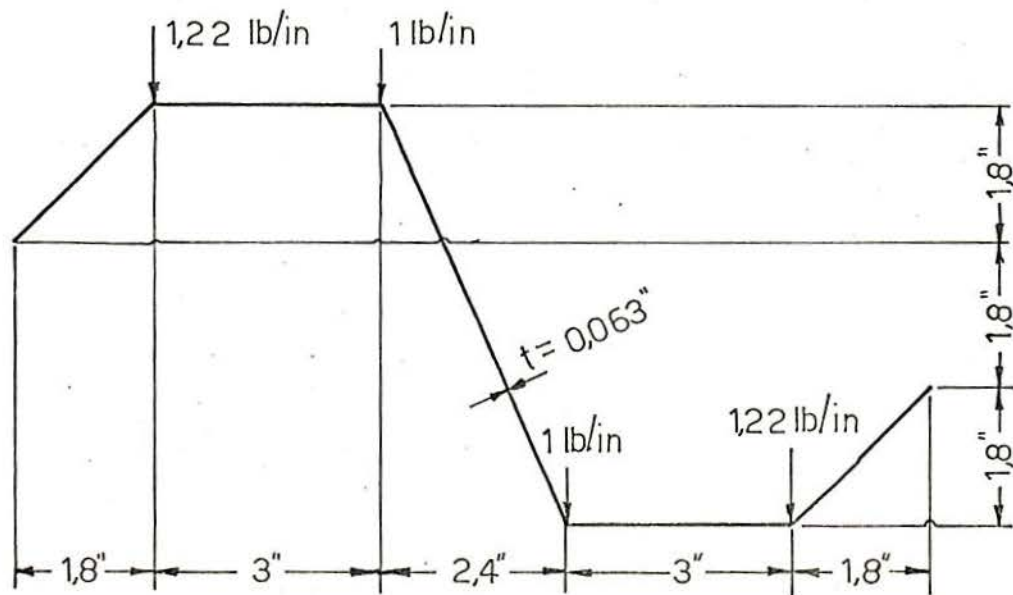
DADOS

$$E = 10,6 \times 10^6 \text{ p.s.i.}$$

$$\nu = 0,333$$



a) vista geral do modelo



b) secção transversal de uma unidade

Fig. Nº 17 - modelo Nº 2

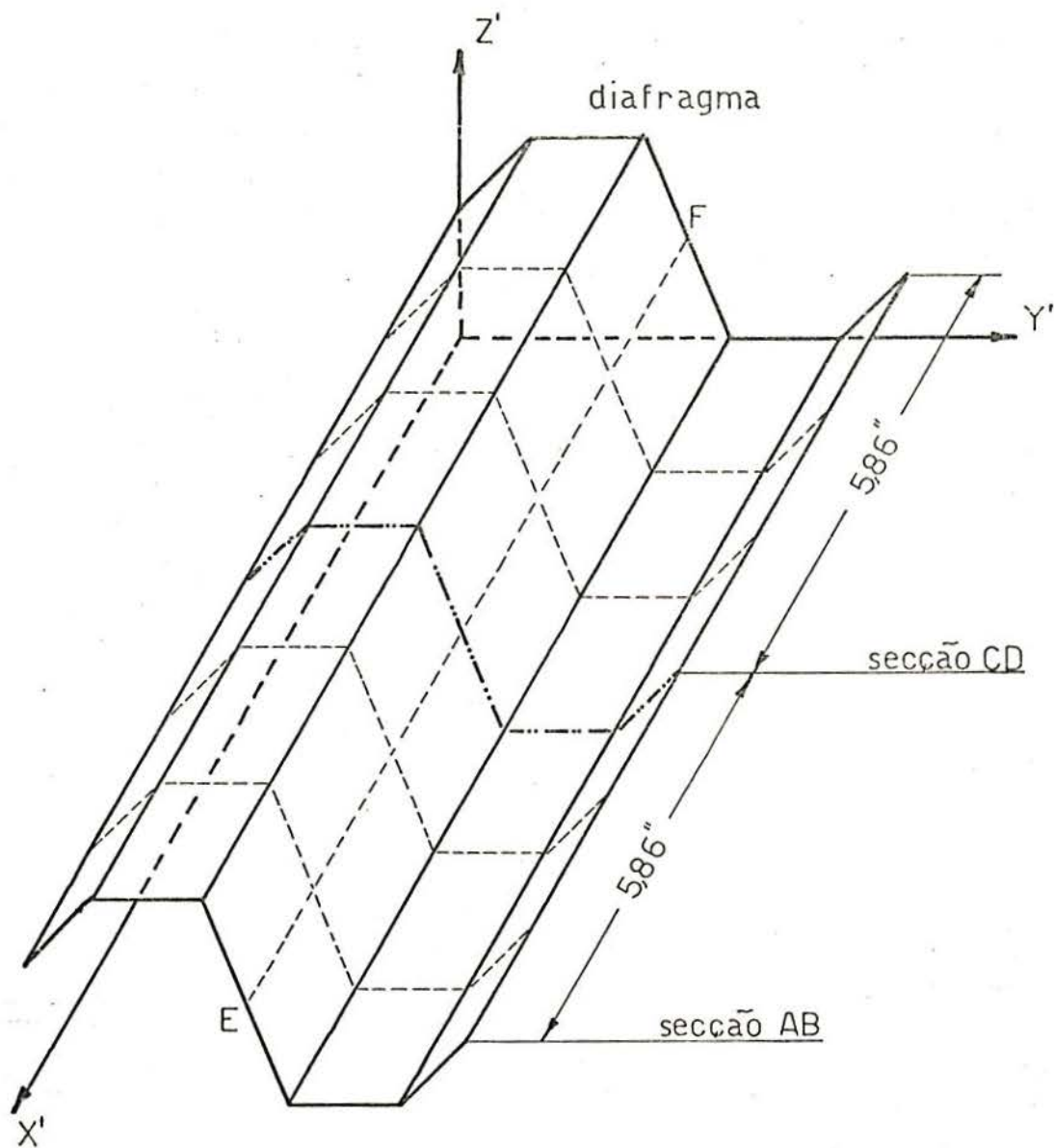
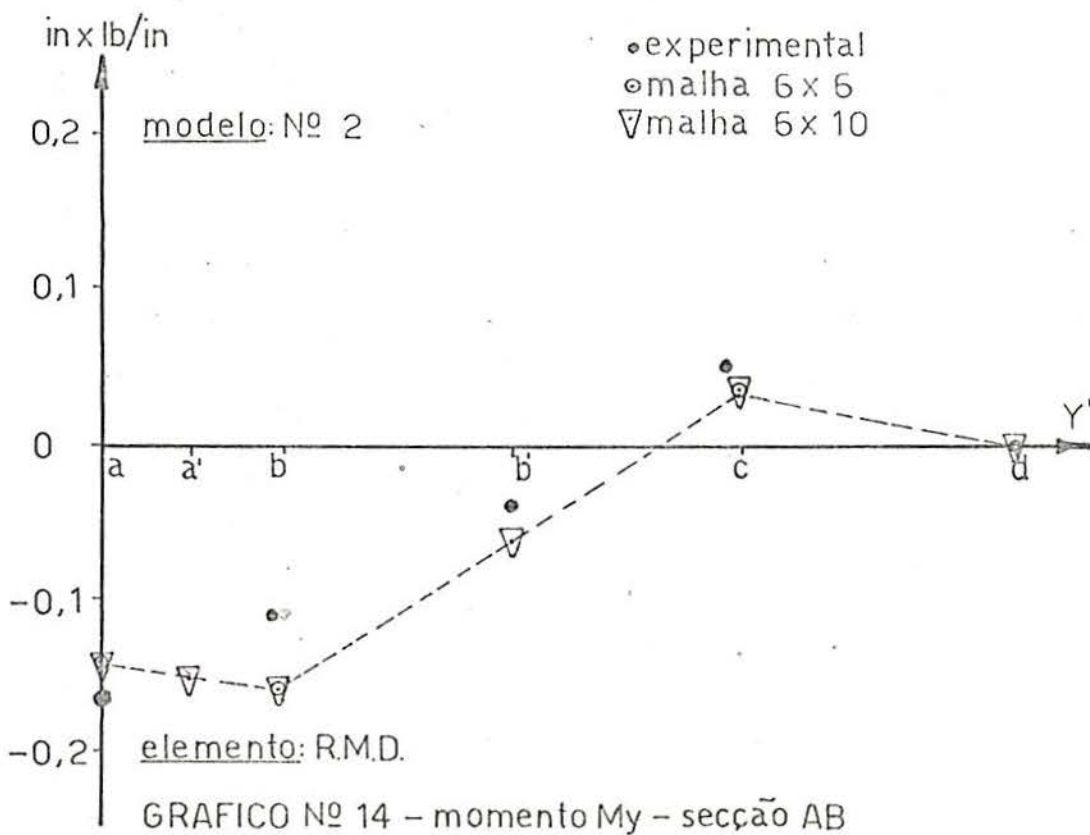
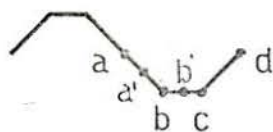
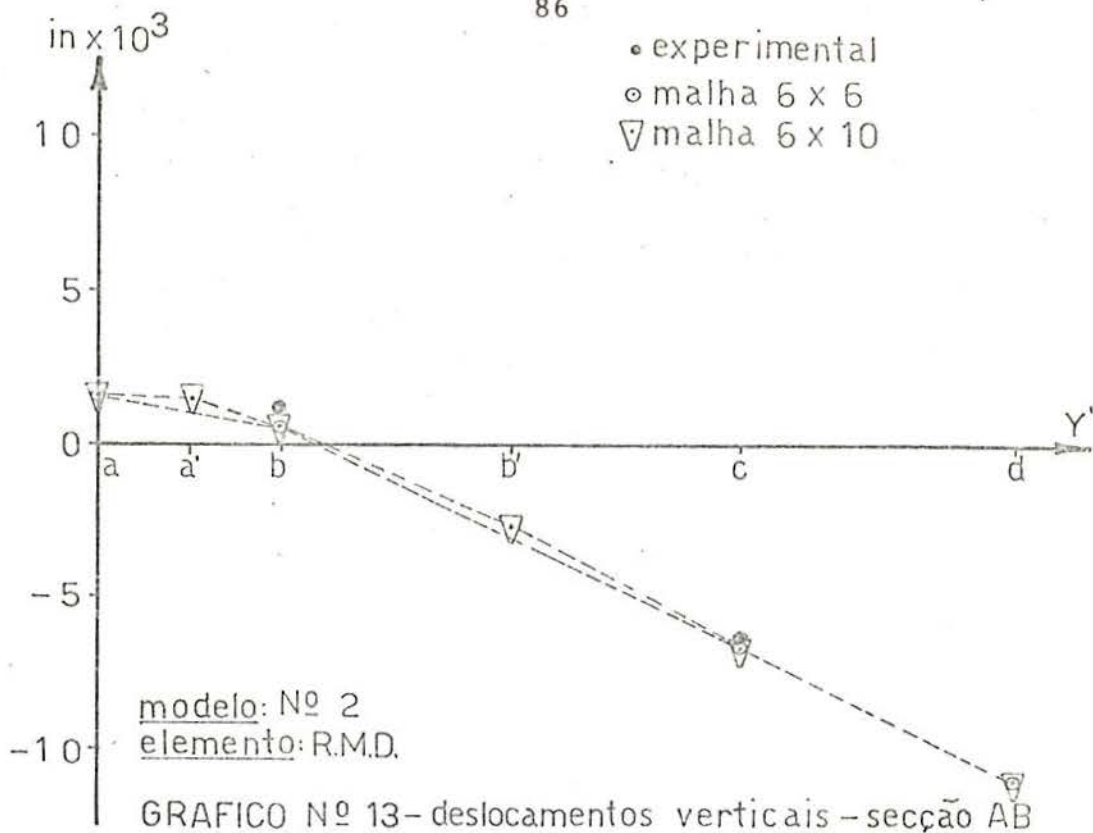
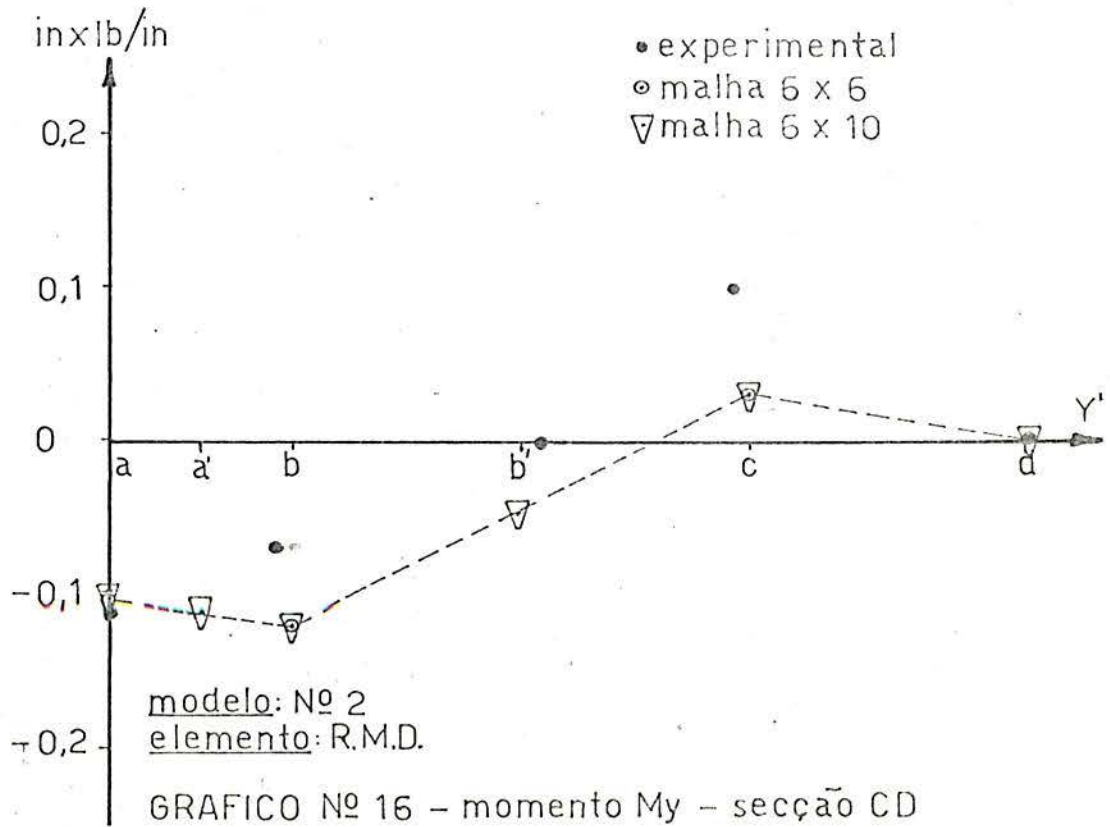
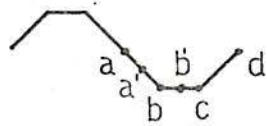
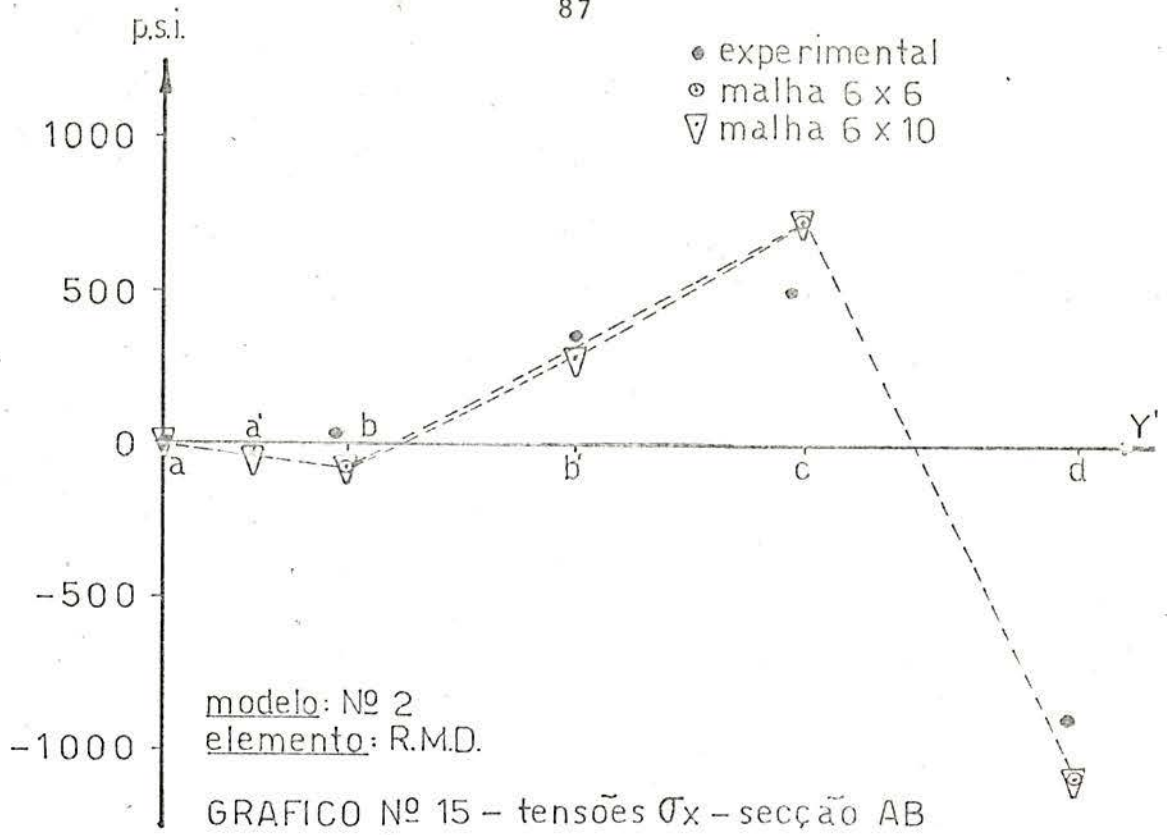
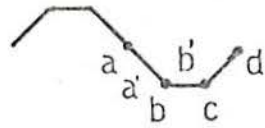
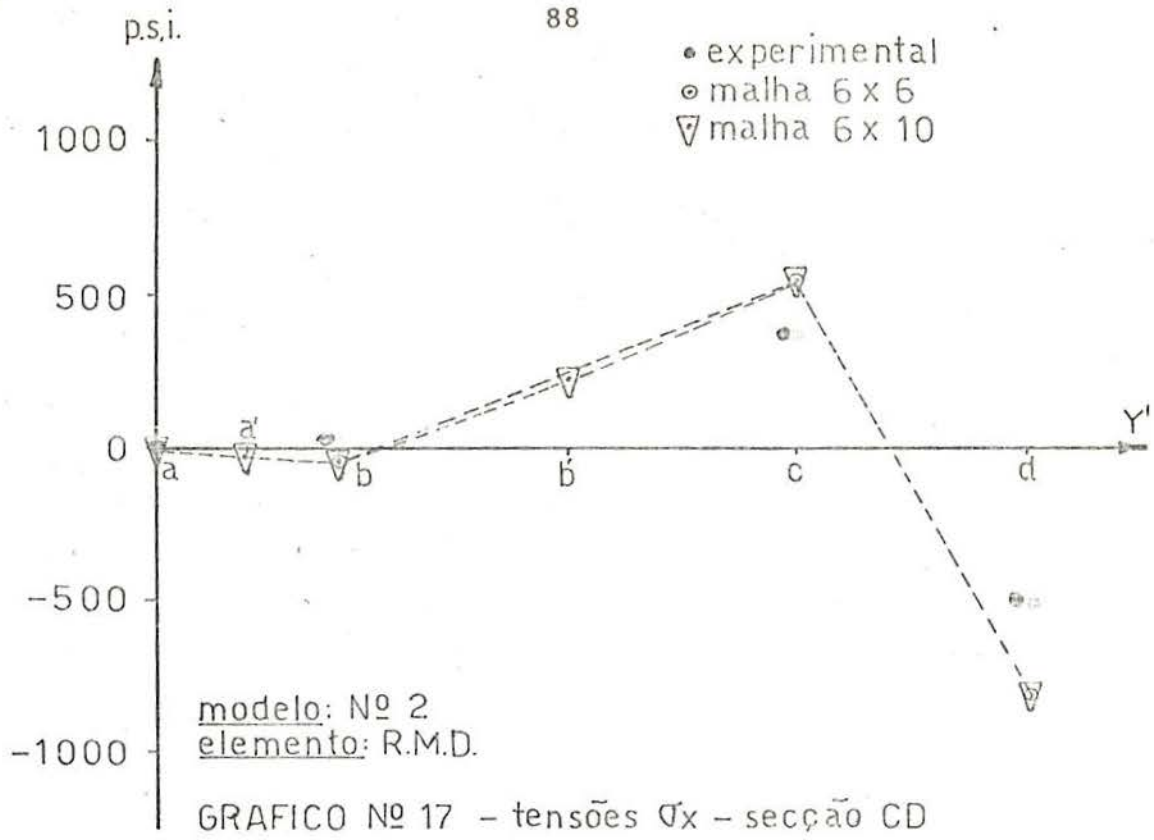
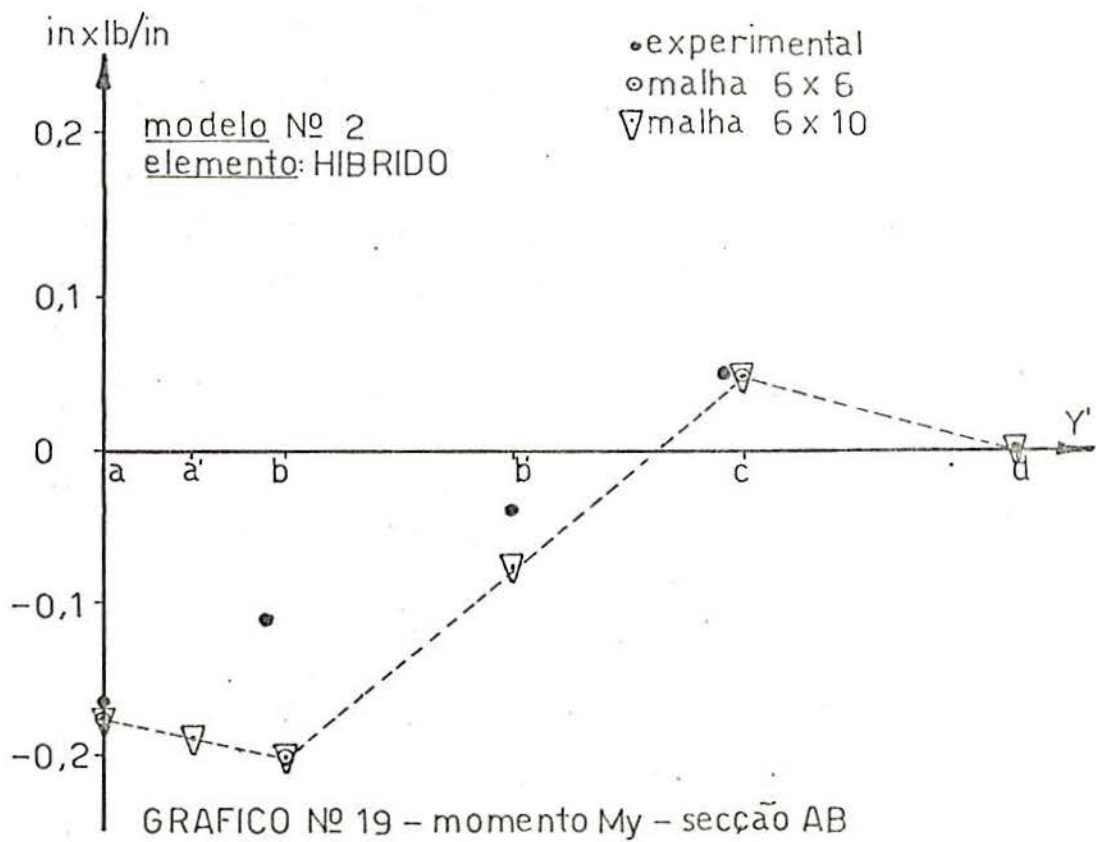
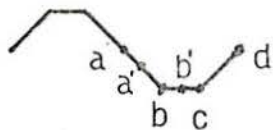
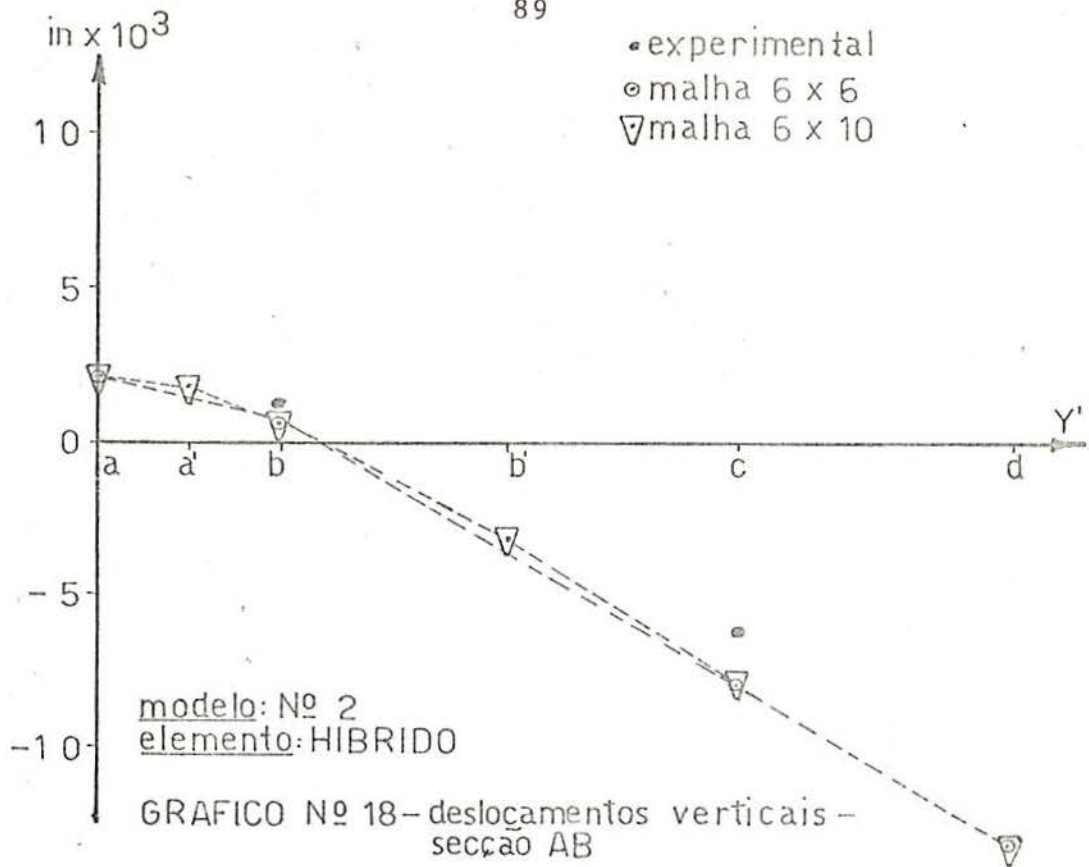


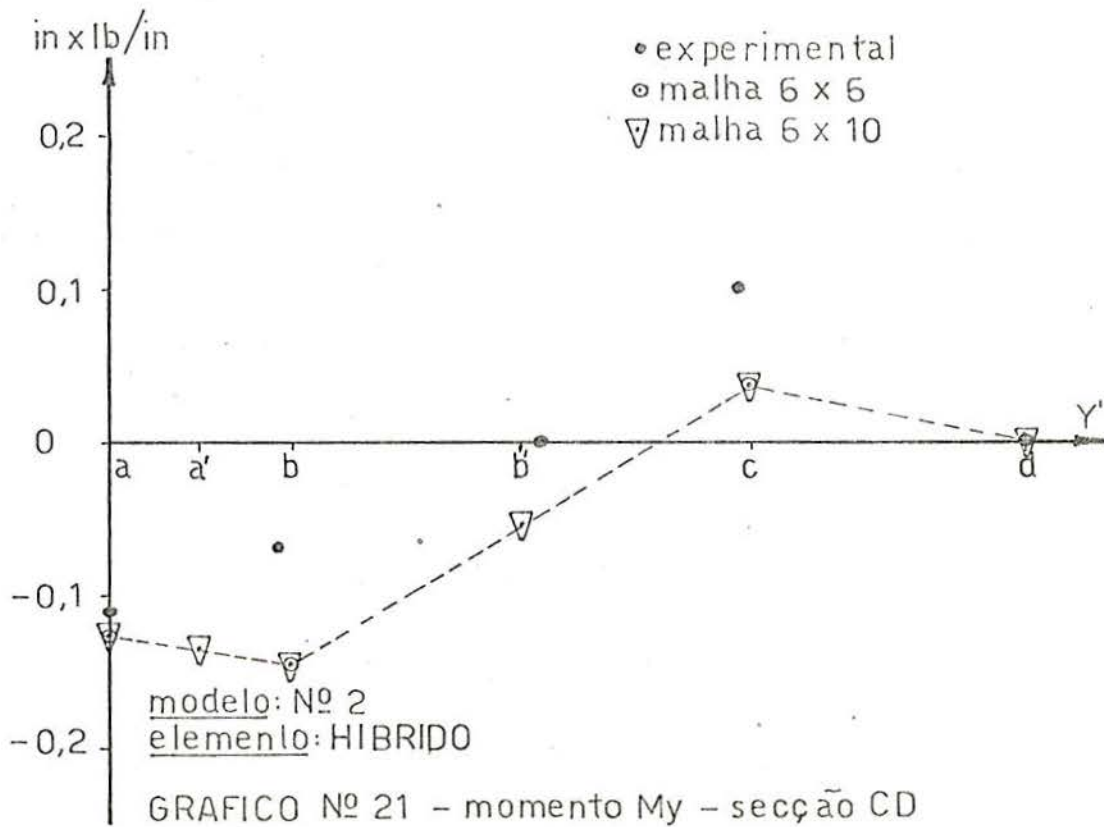
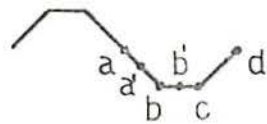
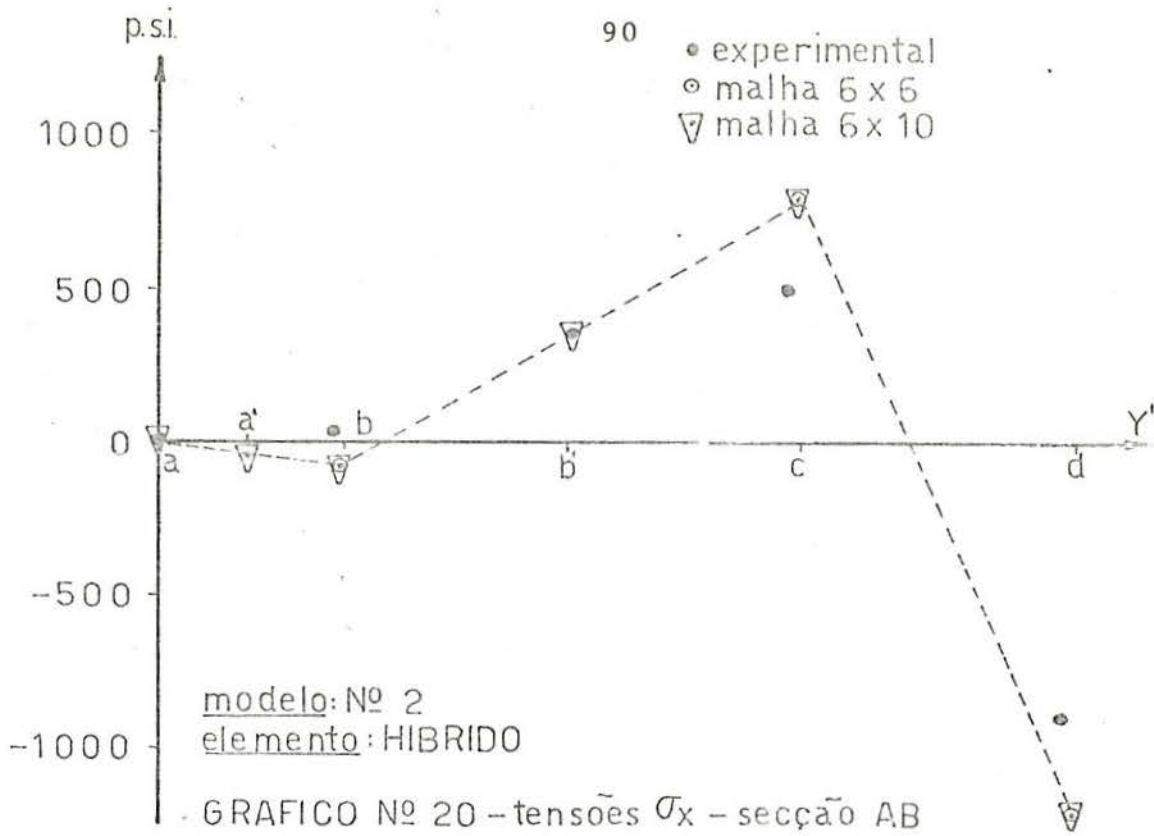
Fig Nº 18 - vista da malha 6 x 6 - modelo Nº 2

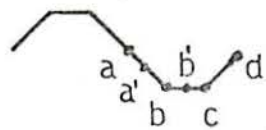
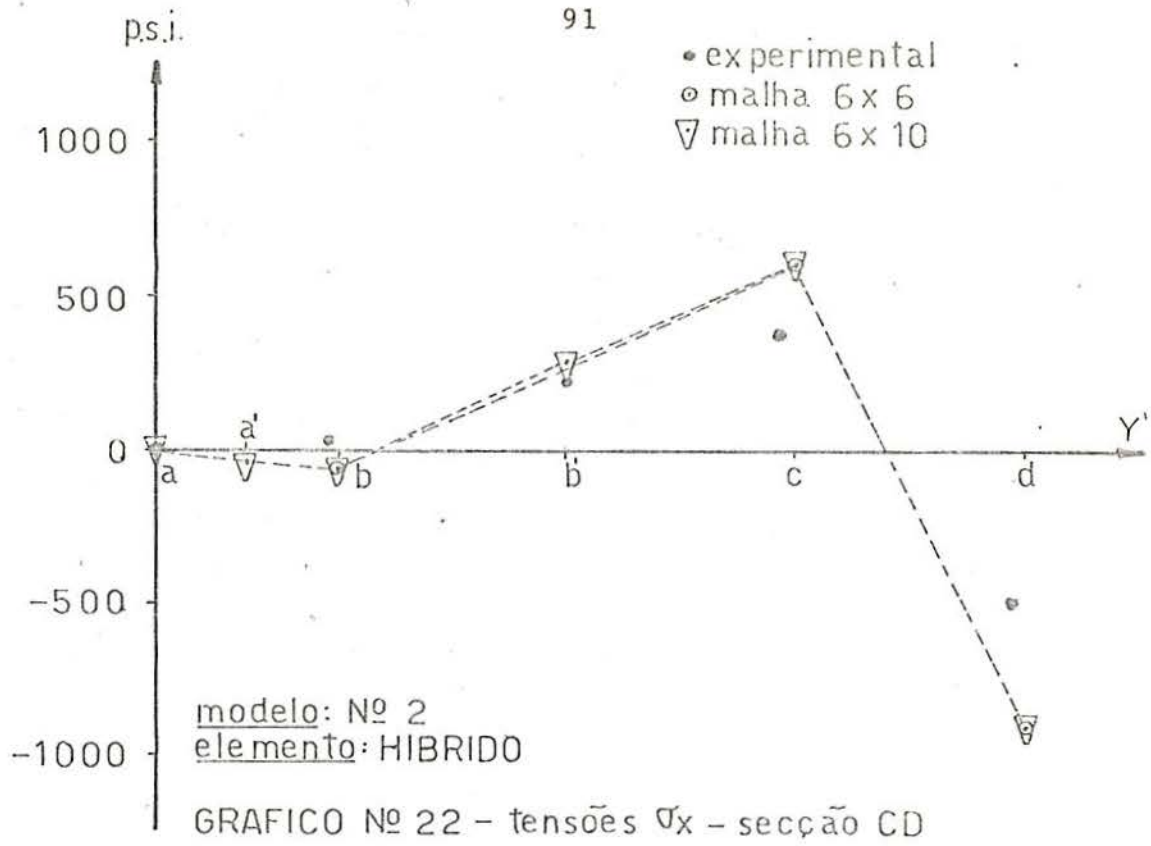












T A B E L A 7

Modelo No. 2	Elemento : R.M.D.					
Para o ponto	a	a'	b	b'	c	d
Deslocamentos verticais ($\text{inx}10^3$) - secção AB						
Experimental	-----	-----	1,200	-----	-6,300	-----
Malha 6x6	1,610	-----	0,570	-----	-6,520	-11,000
Malha 6x10	1,660	1,400	0,600	-2,700	-6,610	-11,200
Momento M_y ($\text{inx}1\text{b/in}$) - secção AB						
Experimental	-----	-----	-0,110	-----	0,050	0,000
Malha 6x6	-0,143	-----	-0,163	-----	0,040	0,000
Malha 6x10	-0,148	-0,153	-0,168	-0,062	0,040	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Experimental	-----	-----	30	-----	480	-900
Malha 6x6	0	-----	-69	-----	724	-1096
Malha 6x10	0	-24	-64	294	728	-1101
Momento M_y ($\text{inx}1\text{b/in}$) - secção CD						
Experimental	-----	-----	-0,070	-----	0,100	0,000
Malha 6x6	-0,102	-----	-0,117	-----	0,030	0,000
Malha 6x10	-0,106	-0,110	-0,121	-0,044	0,030	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção CD						
Experimental	-----	-----	20	-----	380	-500
Malha 6x6	0	-----	-53	-----	542	-820
Malha 6x10	0	-18	-49	217	547	-825

T A B E L A 8

Modelo No. 2	Elemento: HIBRIDO					
Para o ponto	a	a'	b	b'	c	d
Deslocamentos verticais (in x 10 ³) - secção AB						
Experimental	-----	-----	1,200	-----	-6,300	-----
Malha 6x6	2,120	-----	0,840	-----	-7,920	-13,440
Malha 6x10	2,120	1,800	0,830	-3,180	-7,930	-13,470
Momento My (in x lb/in) - secção AB						
Experimental	-----	-----	-0,110	-----	0,050	0,000
Malha 6x6	-0,178	-----	-0,203	-----	0,048	0,000
Malha 6x10	-0,182	-0,188	-0,206	-0,076	0,048	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Experimental	-----	-----	30	-----	480	-900
Malha 6x6	0	-----	-86	-----	798	-1224
Malha 6x10	0	-51	-98	375	815	-1227
Momento My (in x lb/in) - secção CD						
Experimental	-----	-----	-0,070	-----	0,100	0,000
Malha 6x6	-0,127	-----	-0,145	-----	0,037	0,000
Malha 6x10	-0,129	-0,134	-0,148	-0,054	0,036	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção CD						
Experimental	-----	-----	20	-----	380	-500
Malha 6x6	0	-----	-67	-----	598	-919
Malha 6x10	0	-42	-77	284	612	-921

se permitiu também que fossem determinadas as condições de anti-simetria que a linha EF deve cumprir para que possamos analisar apenas uma quarta parte do modelo. Elas são :

$$\begin{array}{ll} u' = 0 & \theta'_x = 0 \\ v' \neq 0 & \theta'_y \neq 0 \\ w' \neq 0 & \theta'_z \neq 0 \end{array}$$

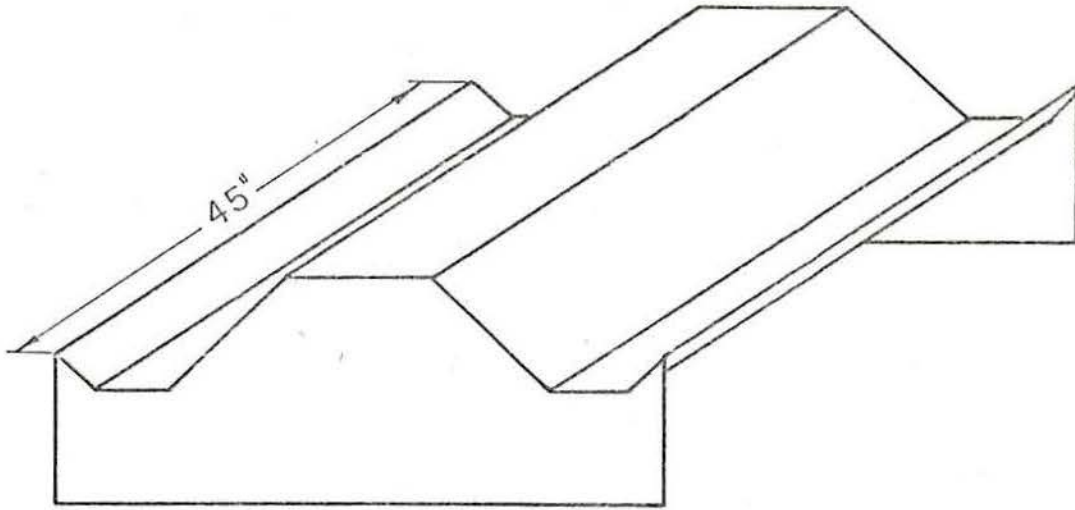
Os resultados da análise são mostrados através de gráficos e de tabelas.

Os gráficos de número 13, 14, 15, 16, 17 nos dão resultado da análise realizada com o RMD com malhas de 6x6 e 6x10. Como se pode observar a diferença de resultados é mínima e muitas vezes não aparece no gráfico havendo superposição de pontos. A comparação com resultados experimentais nos mostra uma aproximação bastante boa dos deslocamentos (gráfico 13) e das tensões (gráfico 15 e 17). No que diz respeito aos momentos a aproximação foi razoável conforme podemos ver pelos gráficos 14 e 16. Os correspondentes valores aparecem tabelados na tabela 7. Queremos fazer notar que os valores experimentais não foram medidos exatamente sobre as arestas mas um pouco a esquerda ou a direita das mesmas. Entretanto os valores por nós calculados são sobre a aresta. A diferença é entretanto mínima e a própria referência (13) fornece os valores, sob a forma de tabelas, nas arestas. Estes são os valores experimentais publicados nas tabelas 7 e 8.

Os resultados do elemento HIBRIDO são muito semelhantes aos apresentados pelo RMD e podem ser vistos nos gráficos 18, 19, 20, 21 e 22 e na tabela 8. As considerações feitas para o RMD valem também para o HIBRIDO e não serão repetidas.

5.6 Modelo 3

A referência (3) analisa um modelo que foi estudado experimentalmente por Beaufait e Gray (1966). Na figura 19a temos uma vista geral do modelo, e na 19b é vista a secção trans-



a) vista geral do modelo

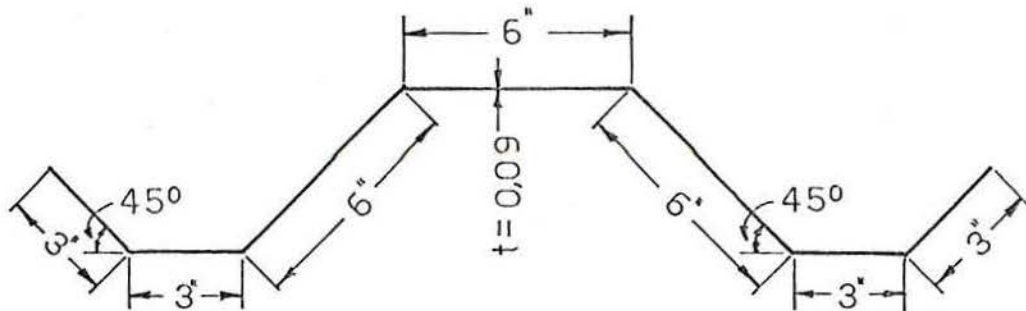
DADOS

$$E = 10,6 \times 10^6 \text{ p.s.i.}$$

$$\nu = 0,33$$

CARREGAMENTO UNIFORME VERTICAL

em todas as placas horizontais = 0,279 psi.



b) secção transversal do modelo

Fig. Nº 19 – modelo Nº 3

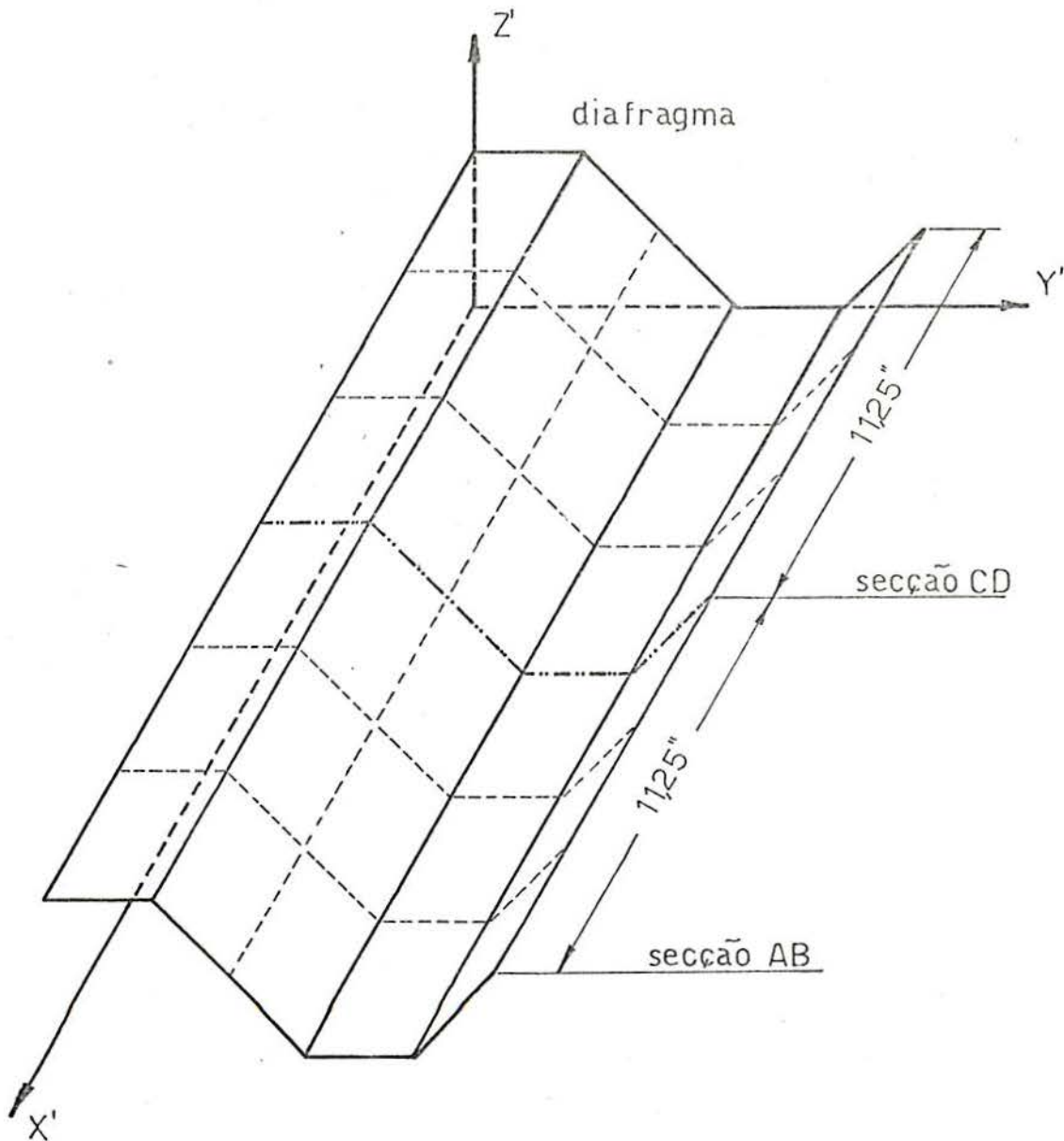
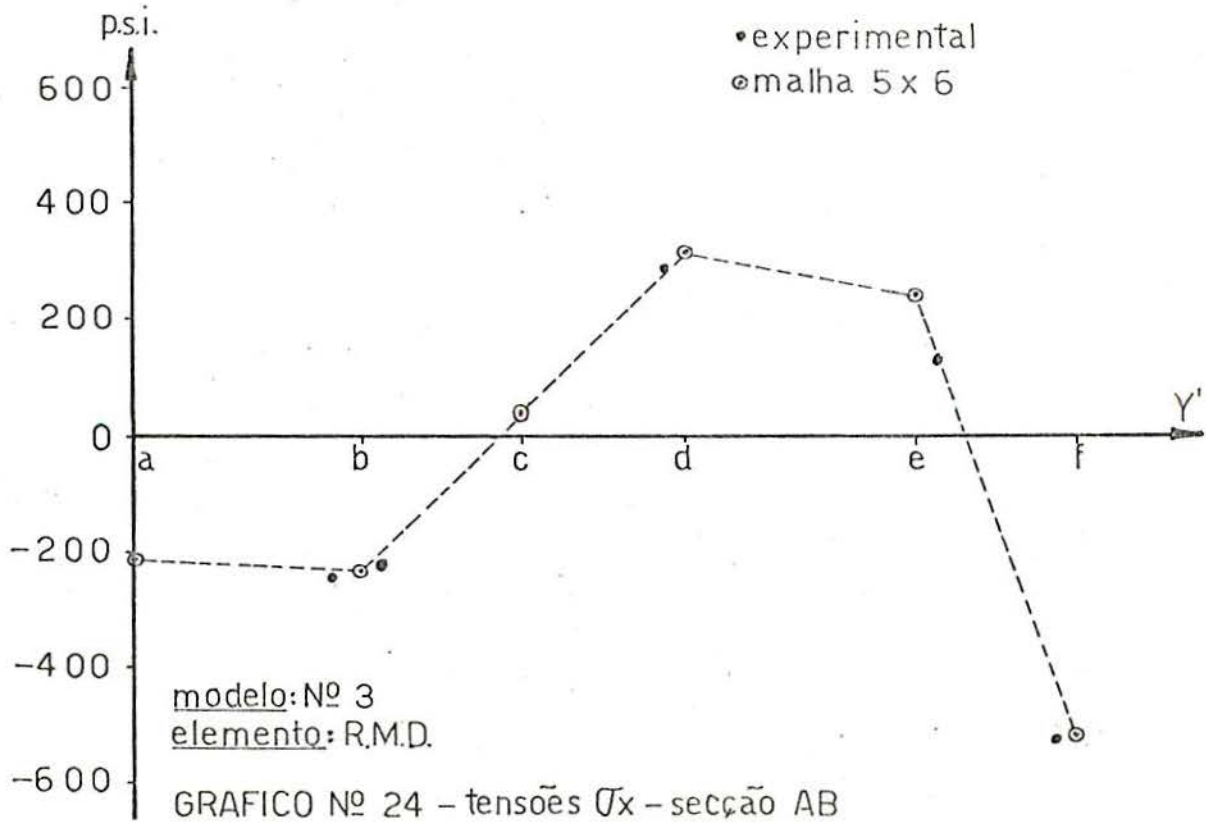
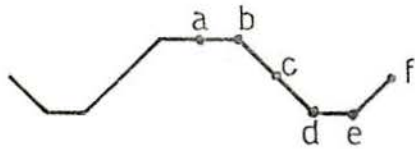
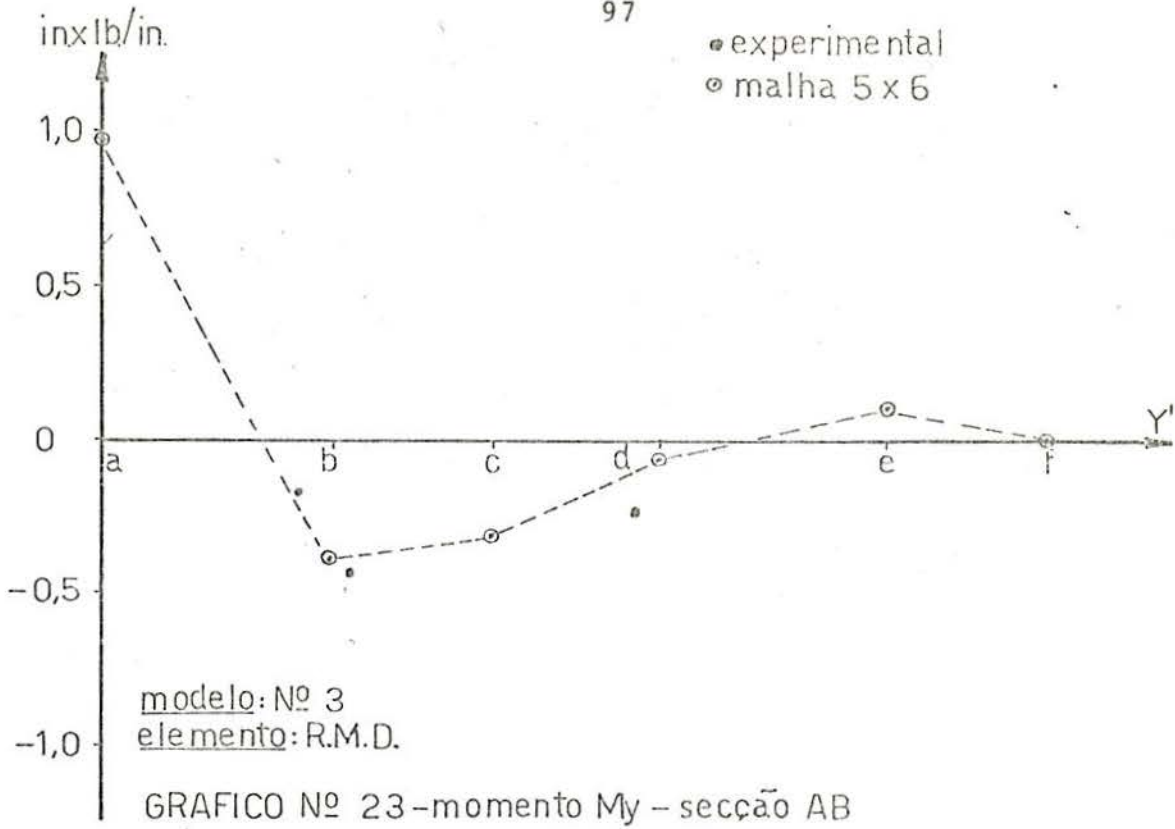
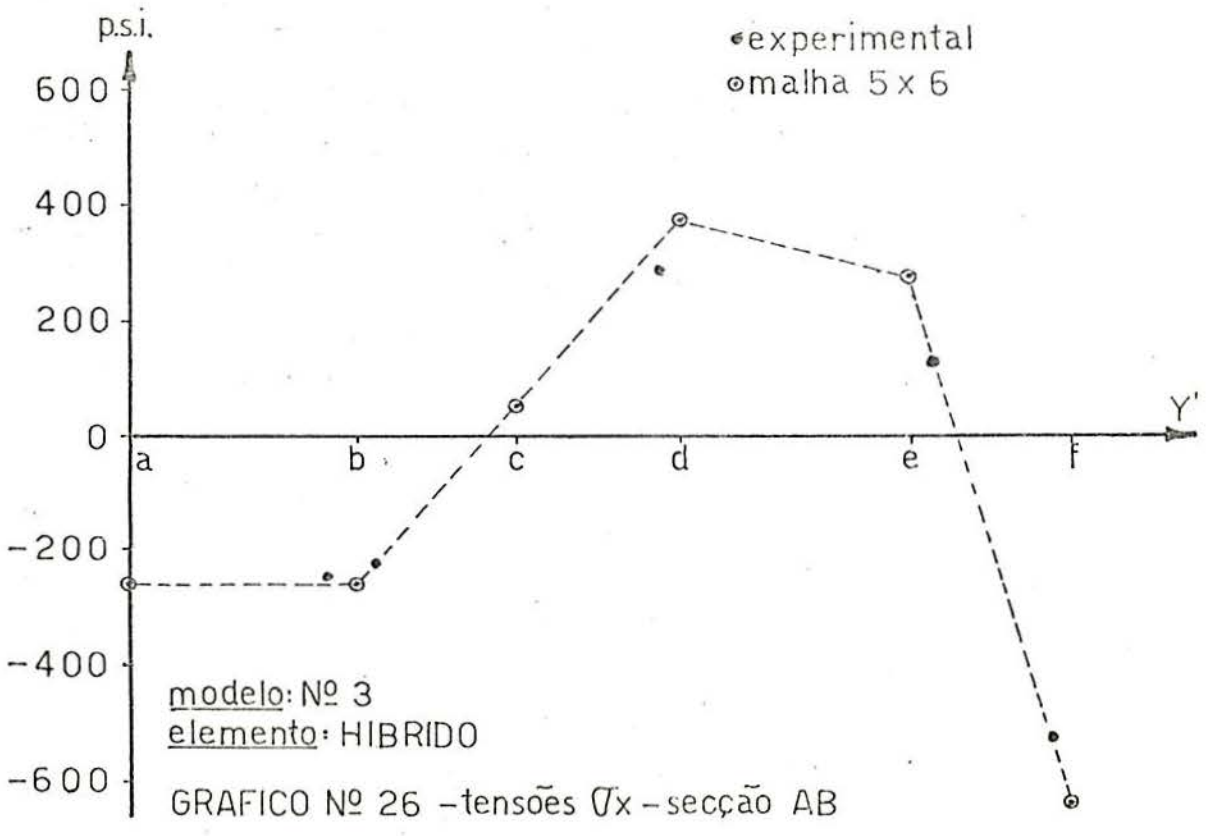
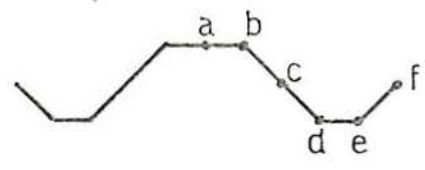
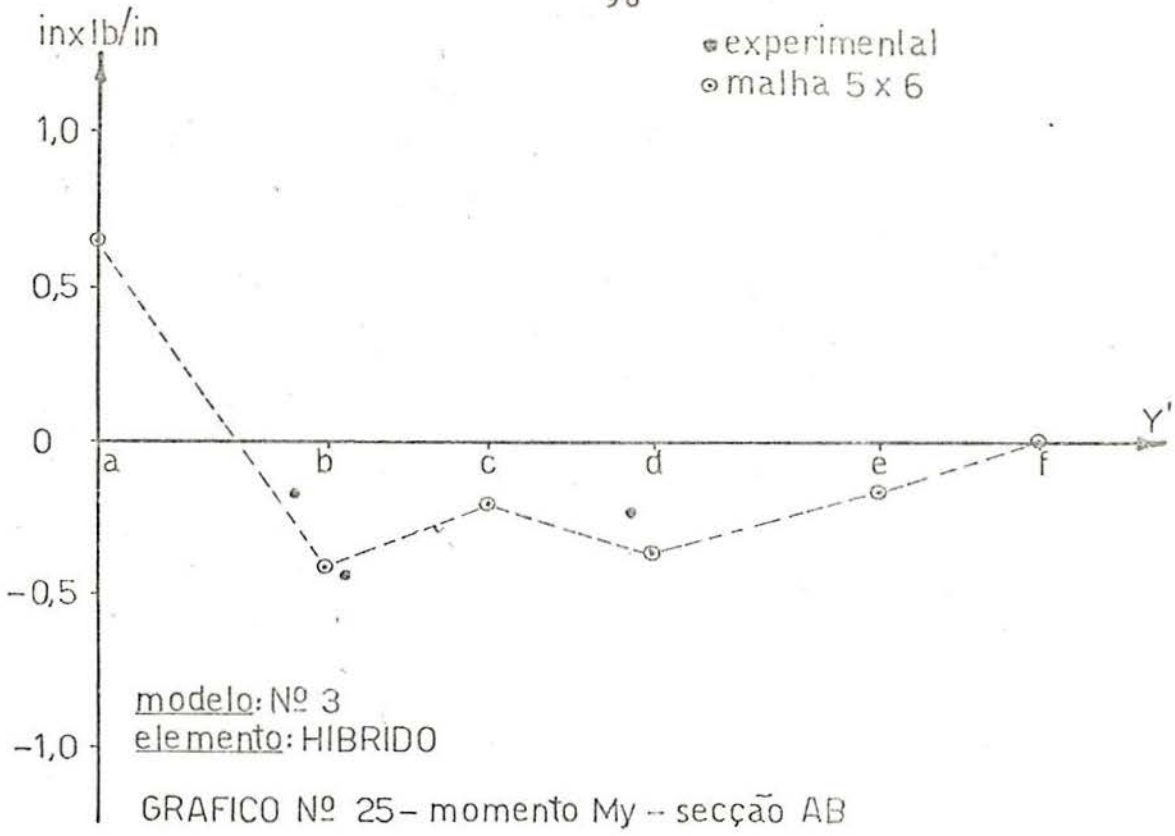


Fig Nº 20 - vista da malha 5 x 6 - modelo Nº 3





T A B E L A 9

Modelo No. 3	Elemento: R.M.D.					
Para o ponto	a	b	c	d	e	f
Momento M_y (inxlb/in) - secção AB						
Malha 5x6	0,979	-0,381	-0,319	-0,056	0,121	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Malha 5x6	-215	-233	39	316	245	-518

T A B E L A 10

Modelo No. 3	Elemento: HIBRIDO					
Para o ponto	a	b	c	e	d	f
Momento M_y (inxlb/in) - secção AB						
Malha 5x6	0,656	-0,413	-0,198	-0,366	-0,161	0,000
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Malha 5x6	-259	-261	57	377	279	-639

versal do modelo. Ainda são vistos os principais dados do problema. O modelo é construído de alumínio. Os diafragmas foram construídos de madeira de uma polegada de espessura e as lâminas foram parafusadas na madeira.

Na figura 20 podemos ver a malha utilizada na análise, bem como o sistema de coordenadas globais. Devido à simetria foi analisada apenas uma quarta parte do modelo. O sistema de coordenadas locais é tal que o eixo X permanece sempre paralelo e de mesmo sentido em relação ao eixo X'.

Os resultados da análise, usando o R.M.D., encontram-se nos gráficos 23, 24 e na tabela 9. Como podemos ver, os resultados da análise com o R.M.D. e os valores experimentais praticamente coincidem. Logo temos neste caso uma grande precisão nos resultados encontrados. Note-se que a malha empregada foi uma malha bastante grosseira 5x6. Aqui os valores experimentais também não foram medidos sobre as arestas, mas um pouco a esquerda ou a direita destas.

Os resultados da análise usando o HIBRIDO, são mostrados nos gráficos 25 e 26 e na tabela 10. Como podemos observar os resultados são semelhantes aos encontrados com o R.M.D.. Aqui também o grau de aproximação entre os resultados experimentais e os resultados da análise com o HIBRIDO é muito bom.

5.7 Modelo 4

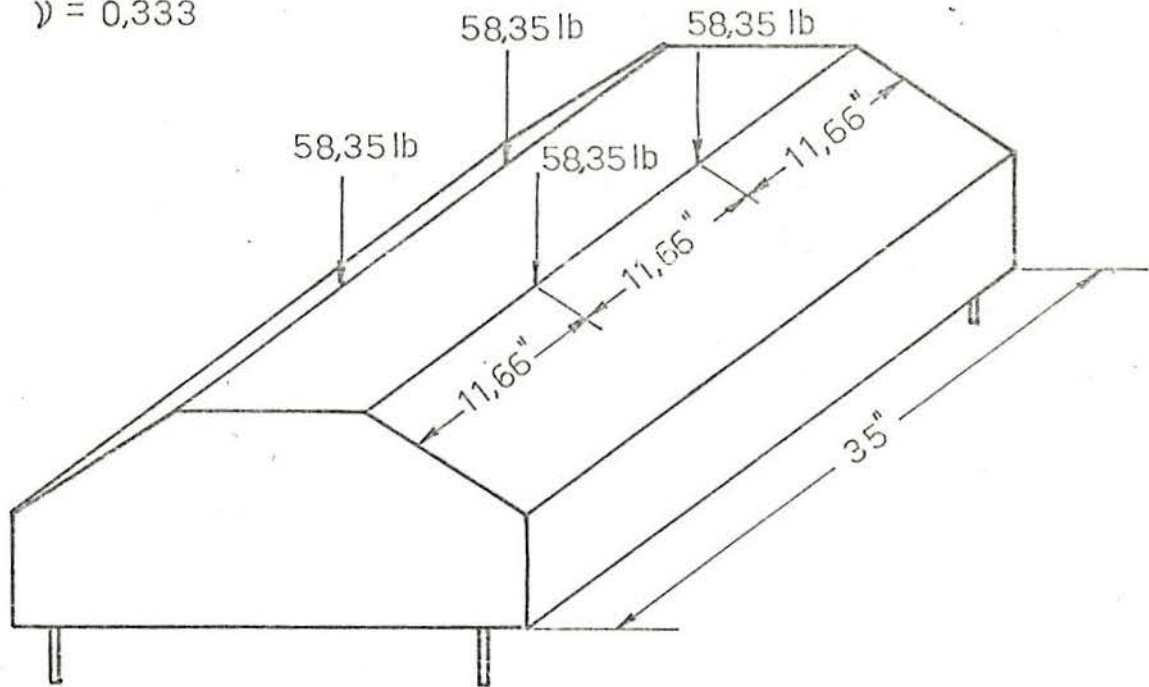
A referência (3) analisa um modelo testado experimentalmente por Gaafar (1954). Tanto a folha poliédrica como os diafragmas foram construídos de chapa de alumínio de 0,13 polegadas de espessura. Os diafragmas foram ligados às lâminas por meio de cantoneiras de aço. Temos na figura 21a uma vista geral do modelo, seu carregamento e principais dados. Na figura 21b vemos uma seção transversal do modelo.

Devido à simetria podemos analisar apenas um quarto do modelo. Esta quarta parte pode ser vista na figura

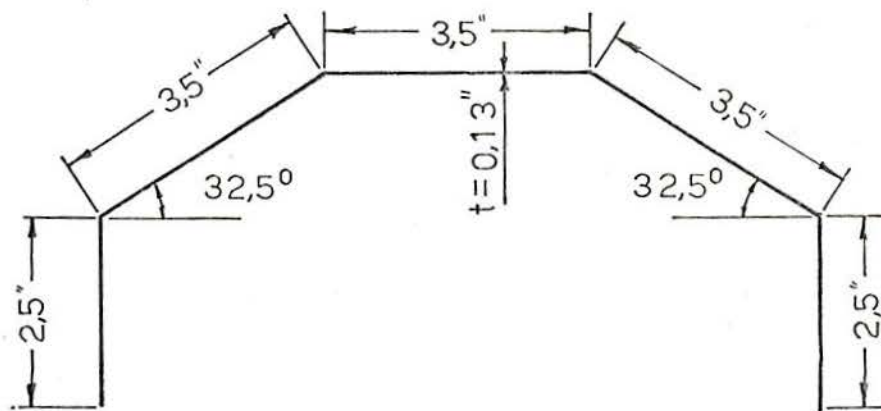
DADOS

$$E = 10,6 \times 10^6 \text{ p.s.i.}$$

$$\nu = 0,333$$



a) vista geral do modelo



b) secção transversal do modelo

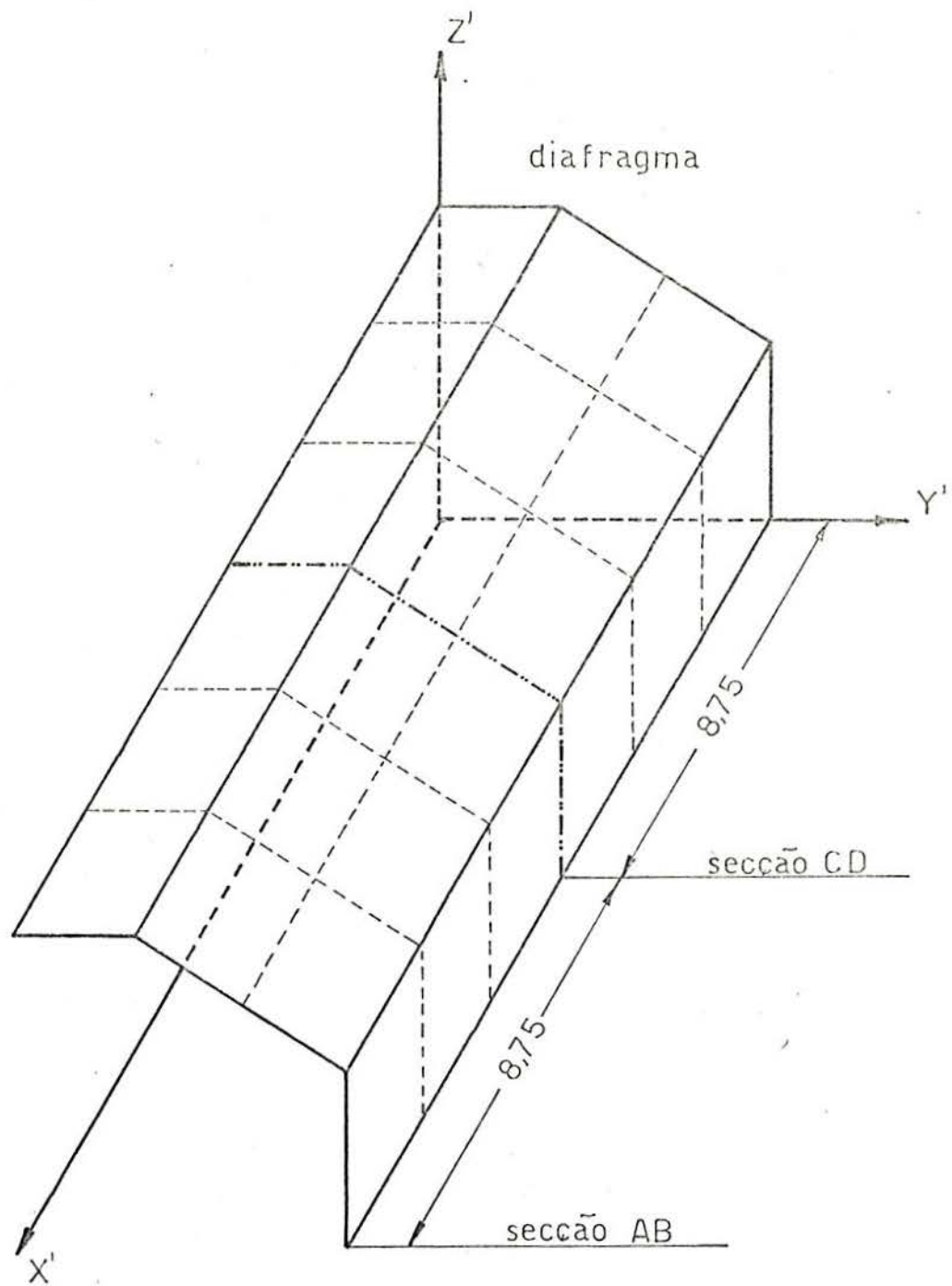
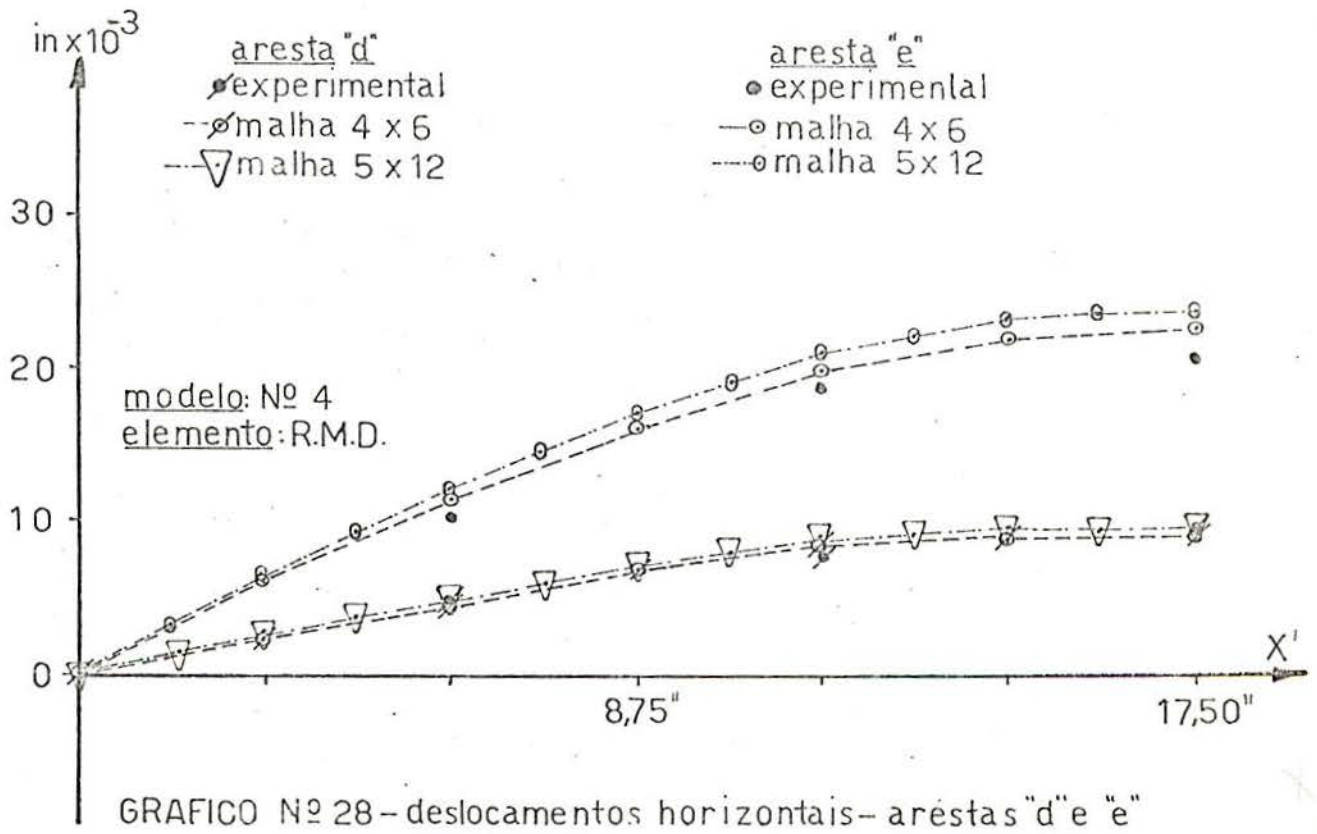
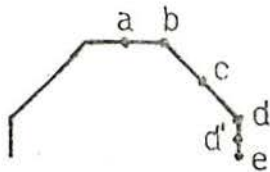
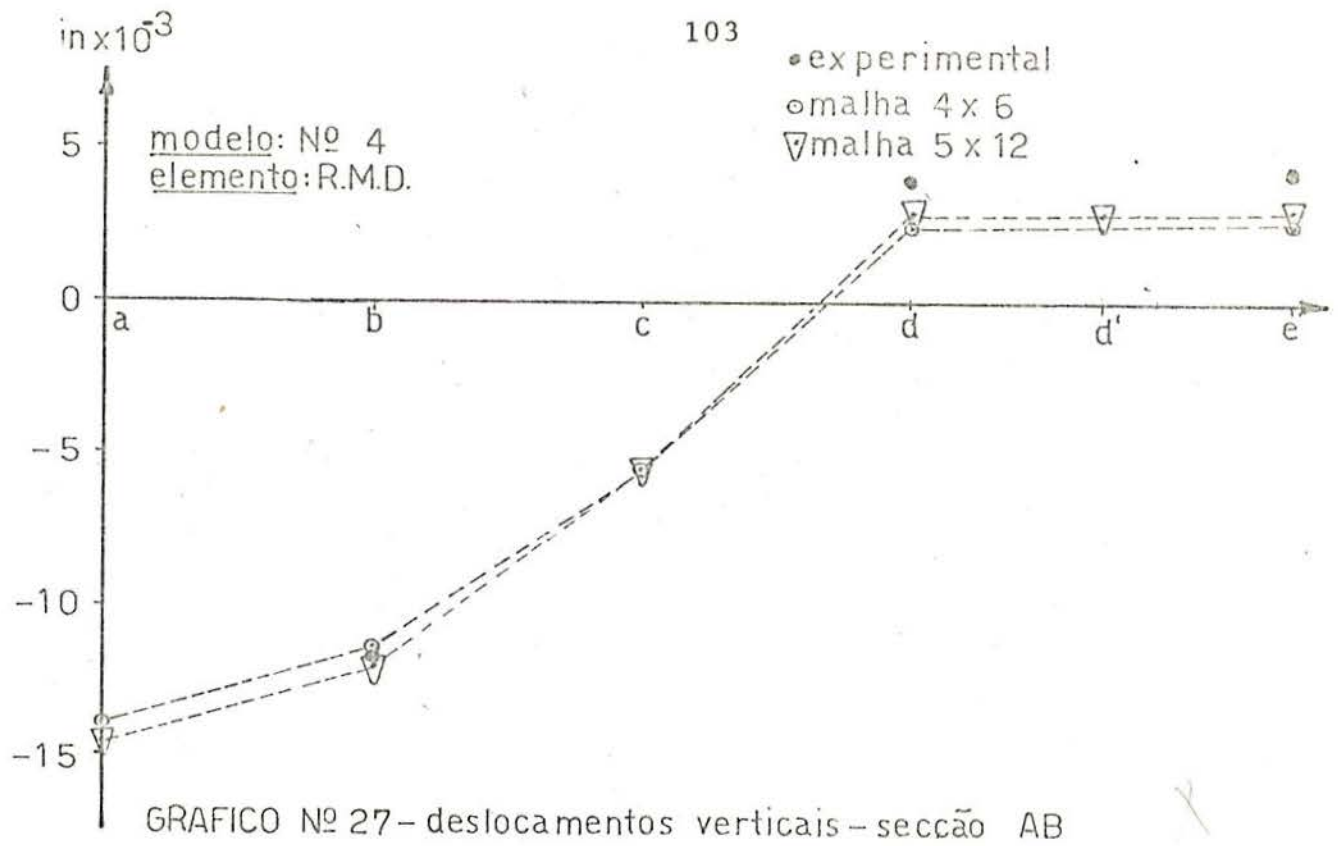
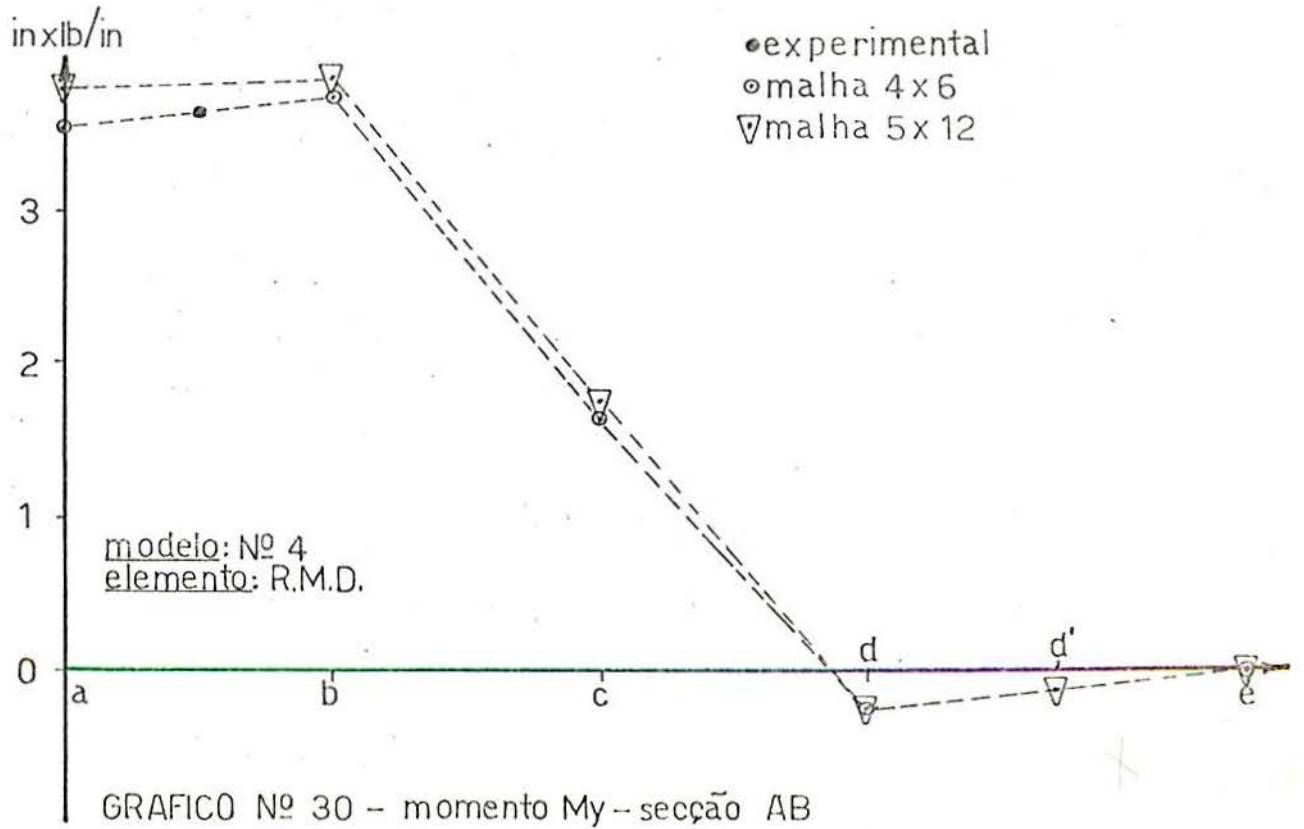
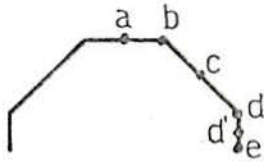
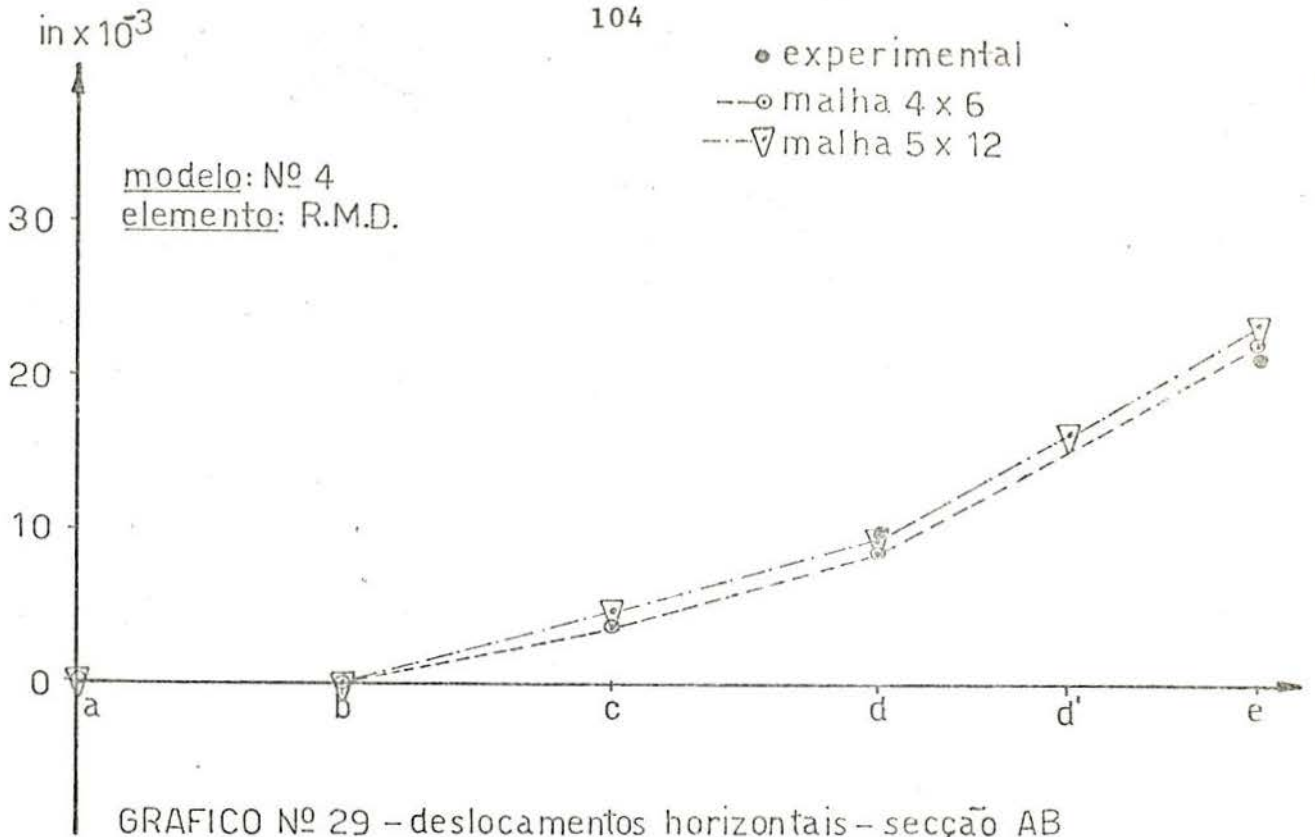


Fig Nº 22 - vista da malha 4 x 6 - modelo Nº 4





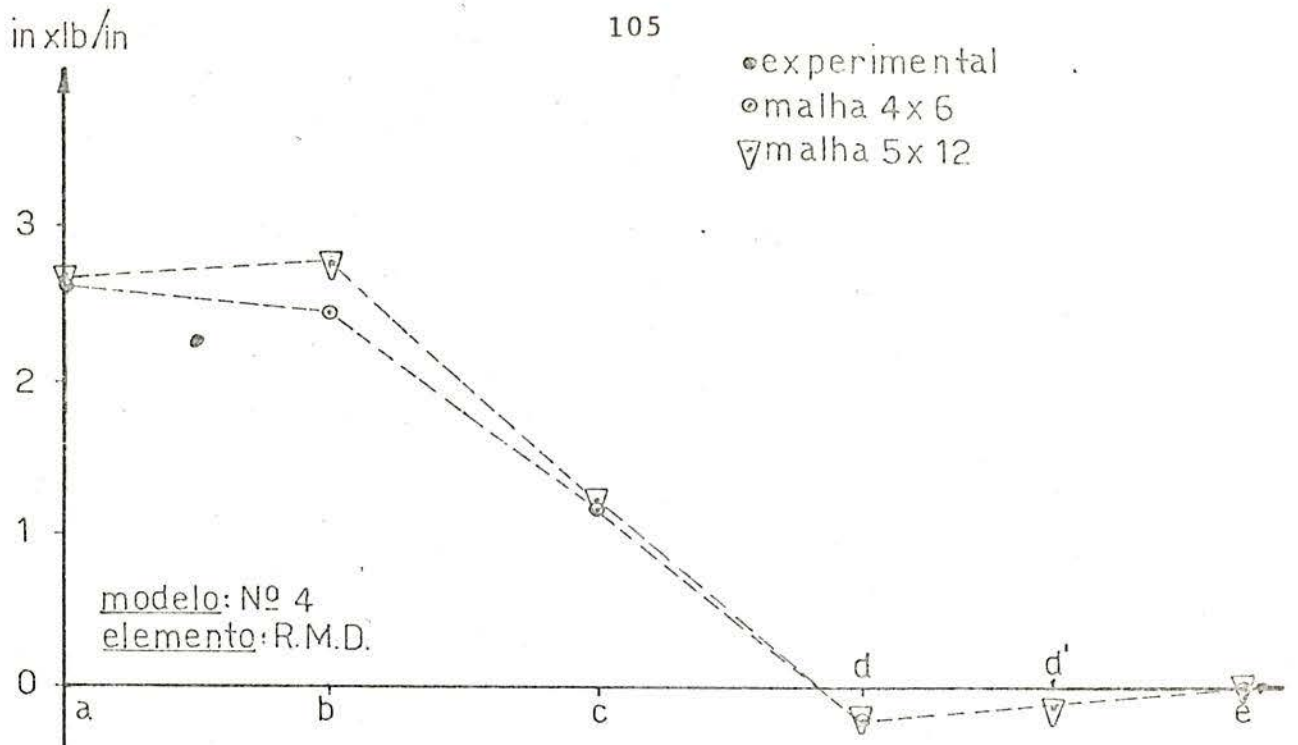


GRAFICO Nº 31 - momento M_y - secção CD

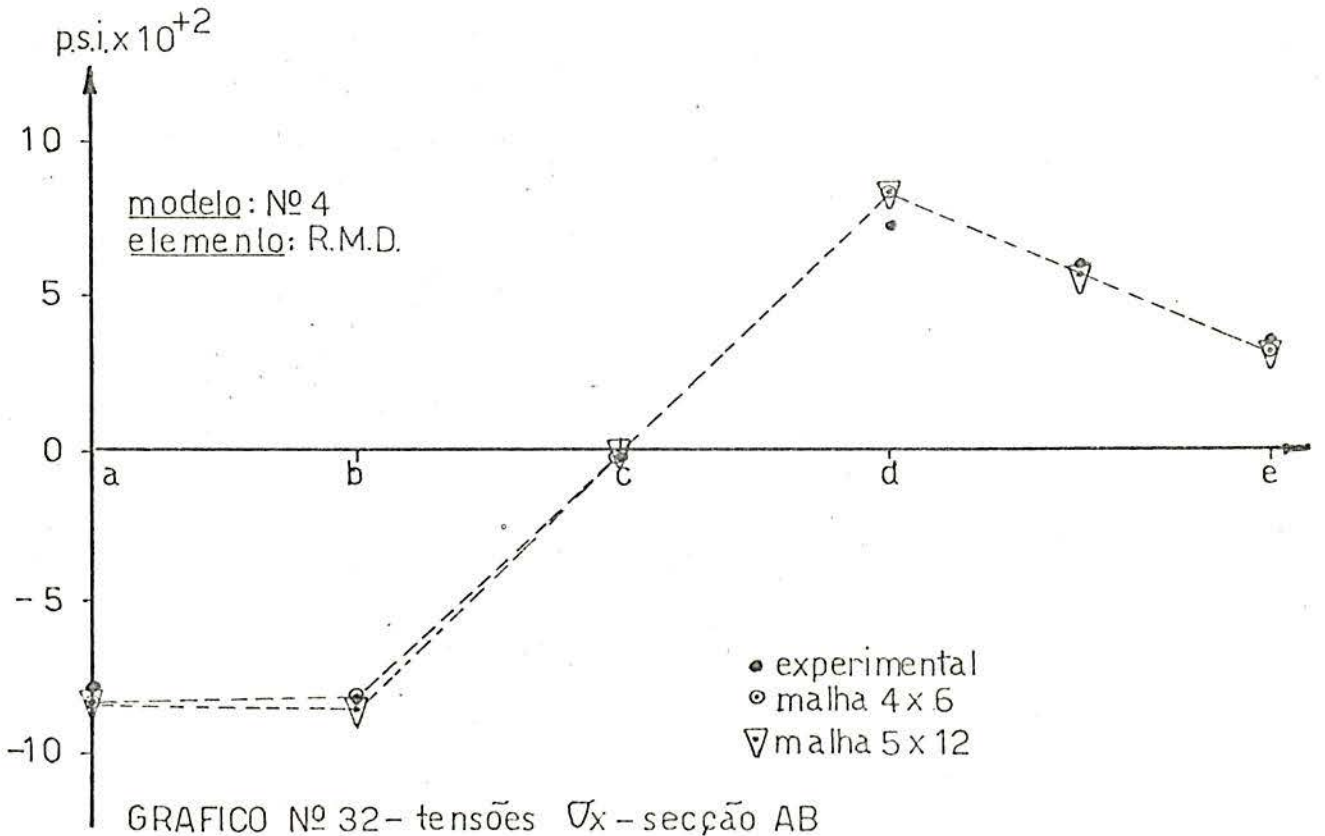
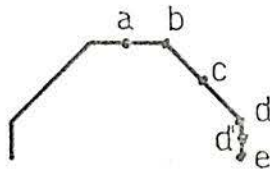
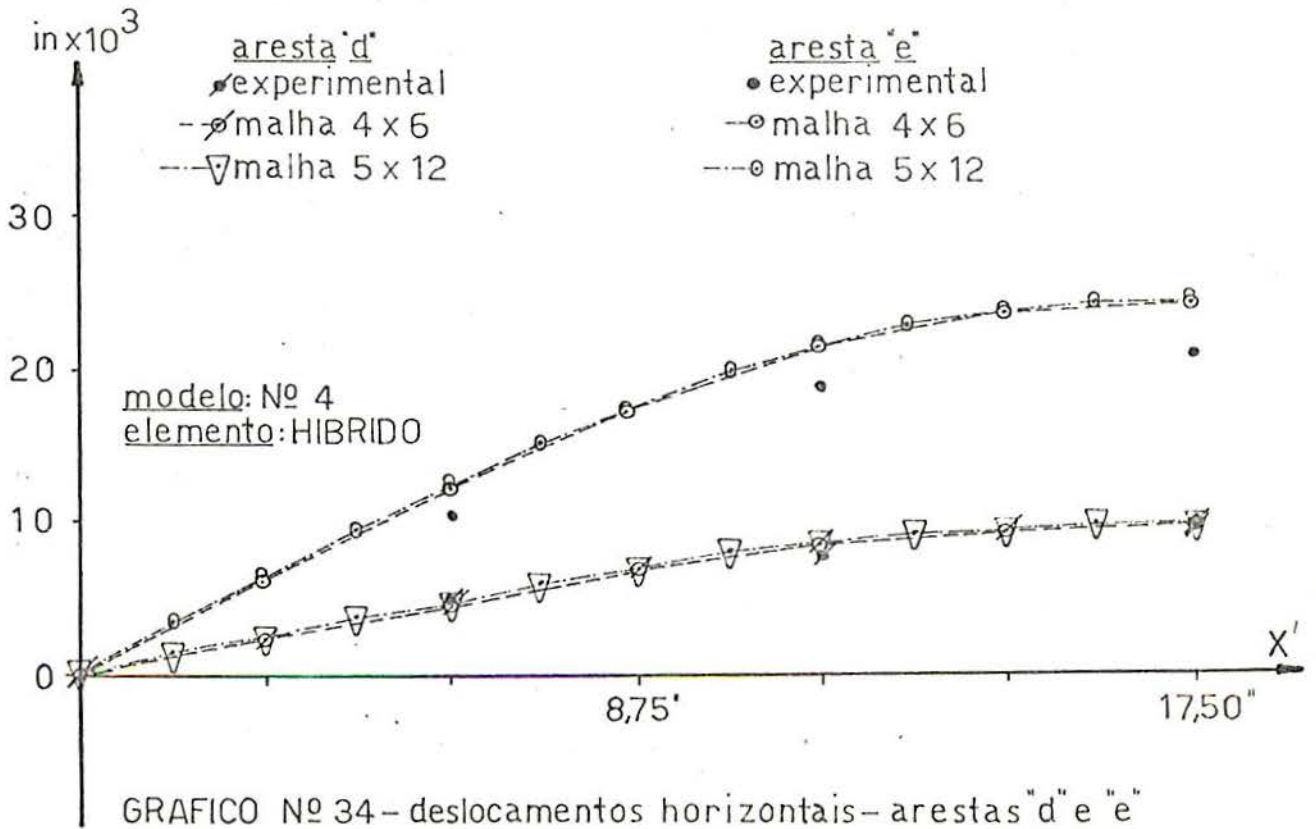
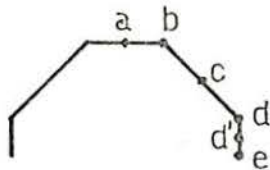
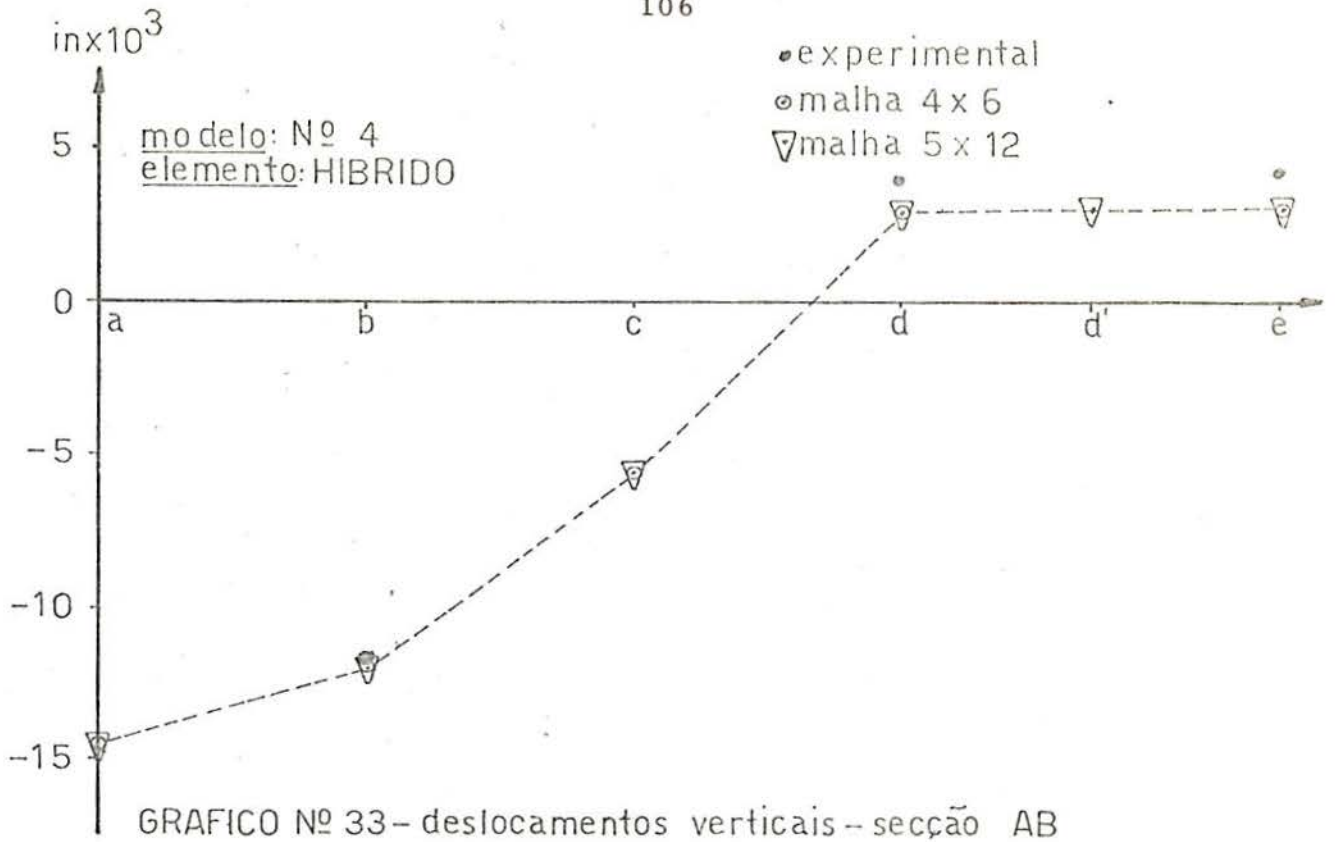
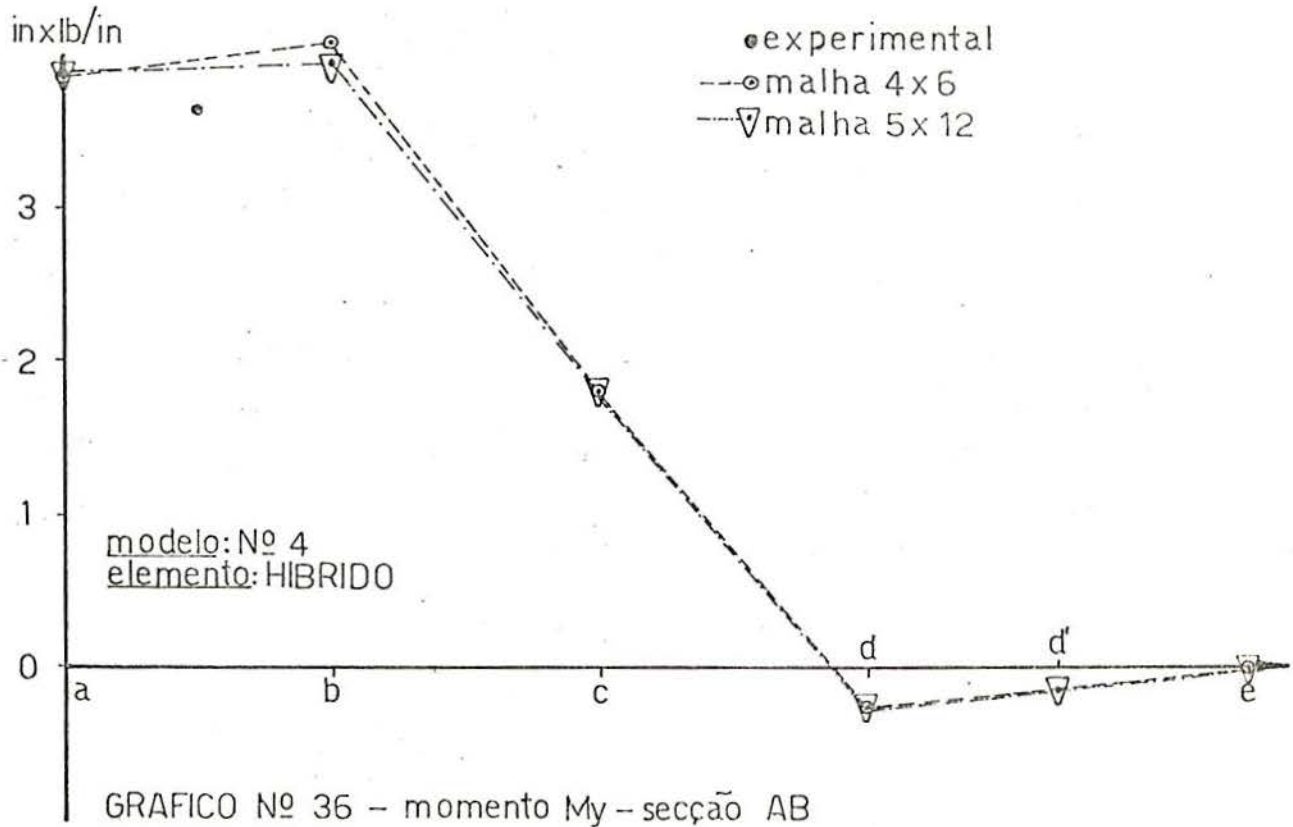
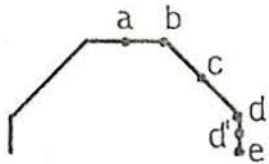
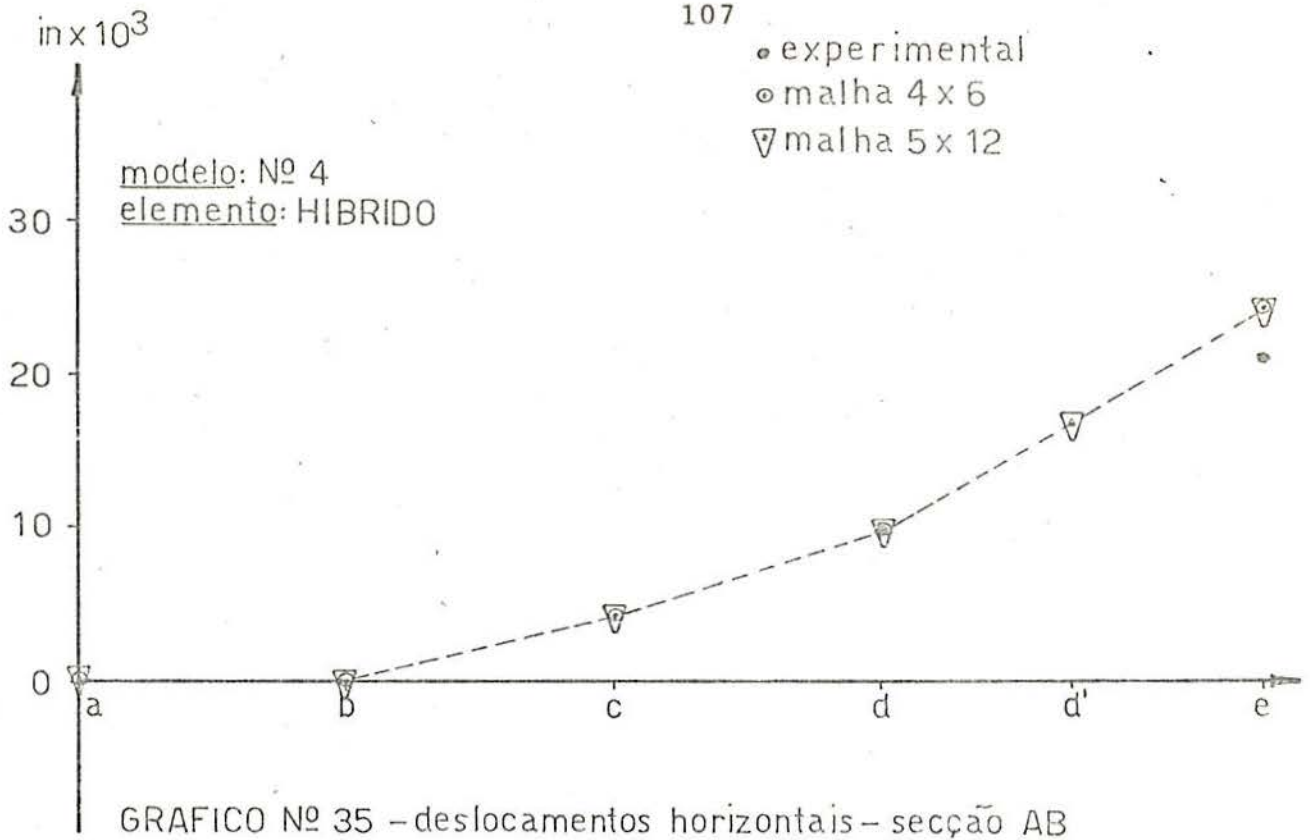
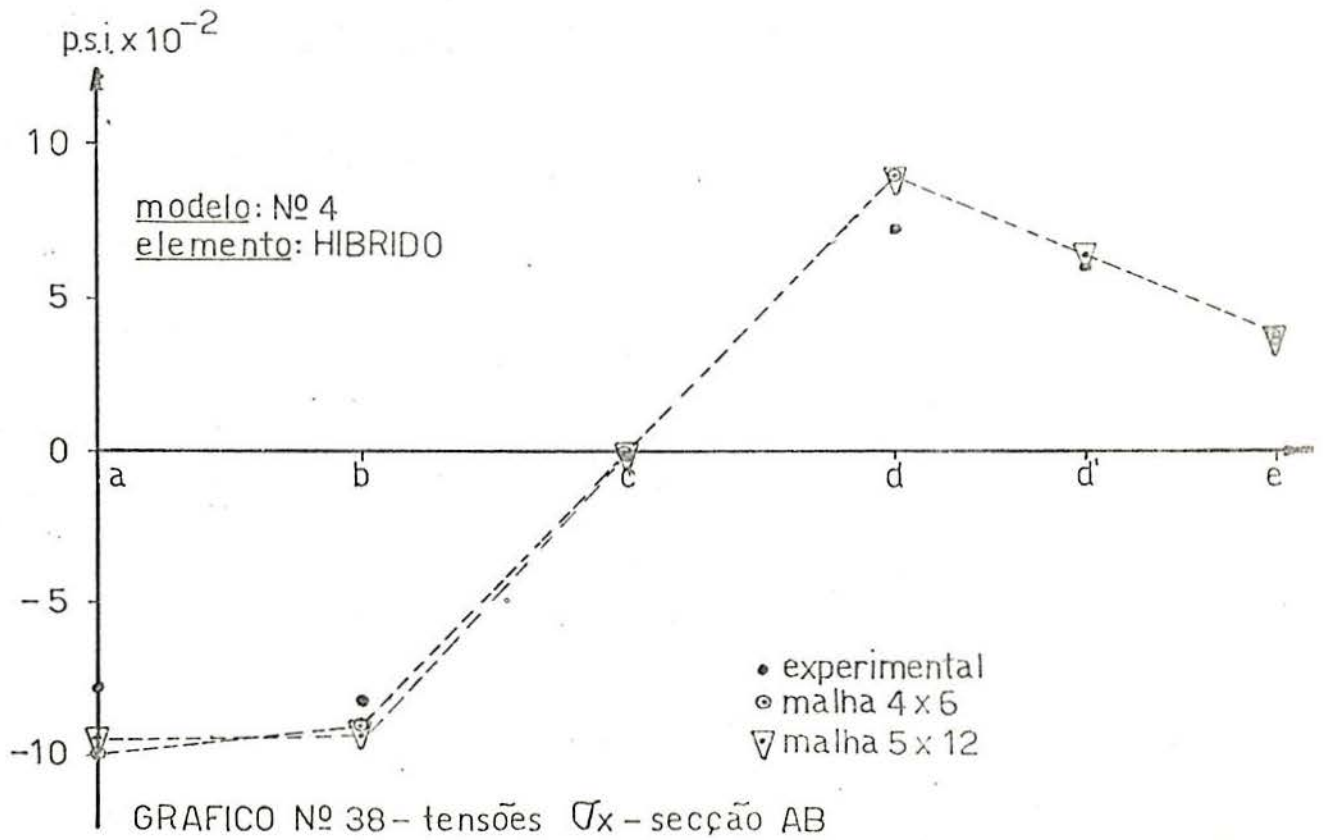
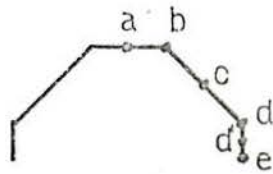
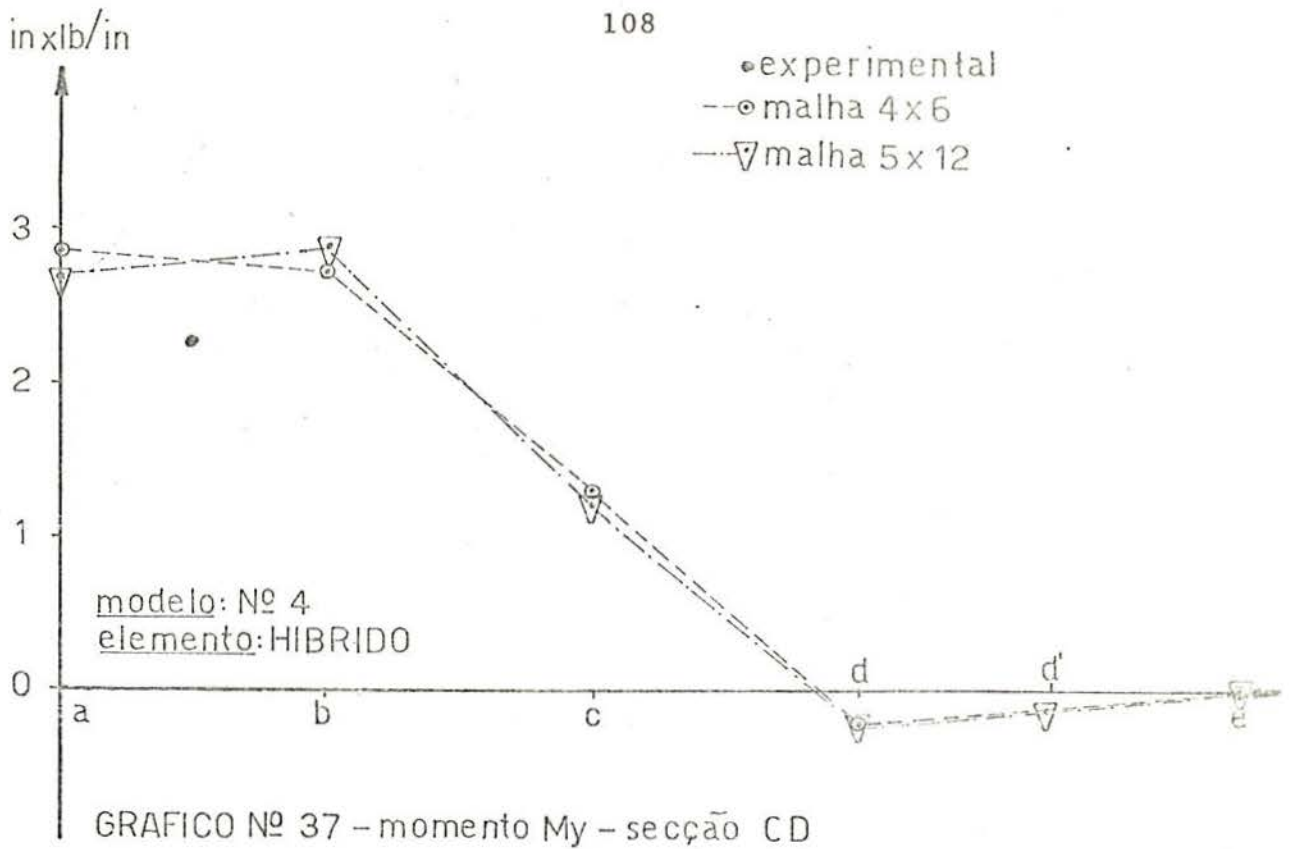


GRAFICO Nº 32 - tensões σ_x - secção AB







T A B E L A 11

Modelo No. 4		Elemento: R.M.D.				
Para o ponto	a	b	c	d	d'	e
Deslocamentos verticais ($\text{inx}10^3$) - secção AB						
Experimental	-----	-12,00	-----	4,00	-----	4,00
Malha 4x6	-14,00	-11,50	- 5,56	2,34	-----	2,39
Malha 5x12	-14,60	-12,00	- 5,67	2,71	2,74	2,76
Deslocamentos horizontais ($\text{inx}10^3$) - secção AB						
Experimental	0,00	0,00	-----	9,68	-----	21,00
Malha 4x6	0,00	0,00	3,86	8,87	-----	22,50
Malha 5x12	0,00	0,00	4,09	9,40	16,60	23,80
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Experimental	-786,6	-826,6	- 26,6	730,7	594,7	365,3
Malha 4x6	-843,0	-821,8	- 18,2	841,6	-----	317,2
Malha 5x12	-833,4	-846,8	4,8	851,4	575,7	317,9
Momento M_y ($\text{inx}1\text{b/in}$) - secção AB						
Malha 4x6	3,532	3,736	1,625	-0,256	-----	0,000
Malha 5x12	3,795	3,865	1,749	-0,286	-0,144	0,000
Momento M_y ($\text{inx}1\text{b/in}$) - secção CD						
Malha 4x6	2,621	2,470	1,188	-0,225	-----	-0,005
Malha 5x12	2,686	2,801	1,214	-0,226	-0,127	0,000
Para $X' =$	2,92	5,83	8,75	11,67	14,58	17,50
Deslocamentos horizontais da aresta "d" ($\text{inx}10^3$)						
Experimental	-----	5,00	-----	8,13	-----	9,66
Malha 4x6	2,28	4,43	6,34	7,81	8,62	8,87
Malha 5x12	2,41	4,70	6,72	8,27	9,13	9,40
Deslocamentos horizontais da aresta "e" ($\text{inx}10^3$)						
Experimental	-----	10,55	-----	18,92	-----	20,94
Malha 4x6	5,79	11,20	16,00	19,70	21,80	22,50
Malha 5x12	6,13	11,90	17,00	20,90	23,10	23,80

T A B E L A 12

Modelo No. 4	Elemento: HIBRIDO					
Para o ponto	a	b	c	d	d'	e
Deslocamentos verticais ($\text{in} \times 10^3$) - secção AB						
Experimental	-----	-12,00	-----	4,00	-----	4,00
Malha 4x6	-14,80	-12,10	- 5,68	2,90	-----	2,94
Malha 5x12	-14,90	-12,20	- 5,72	2,87	2,90	2,92
Deslocamentos horizontais ($\text{in} \times 10^3$) - secção AB						
Experimental	0,00	0,00	-----	9,68	-----	21,00
Malha 4x6	0,00	0,00	4,18	9,62	-----	24,40
Malha 5x12	0,00	0,00	4,19	9,64	17,00	24,40
Tensões σ_x (psi) - secção AB						
Experimental	-786,6	-826,6	- 26,6	730,7	594,7	365,3
Malha 4x6	-1003,8	-907,1	- 9,6	915,0	-----	386,1
Malha 5x12	-953,3	-918,0	9,6	904,3	653,8	386,6
Momento M_y ($\text{in} \times \text{lb}/\text{in}$) - secção AB						
Malha 4x6	3,852	4,088	1,776	-0,285	-----	-0,006
Malha 5x12	3,900	3,966	1,799	-0,292	-0,147	-0,001
Momento M_y ($\text{in} \times \text{lb}/\text{in}$) - secção CD						
Malha 4x6	2,855	2,709	1,297	-0,229	-----	-0,010
Malha 5x12	2,738	2,911	1,239	-0,234	-0,128	0,002
Para $X' =$	2,92	5,83	8,75	11,67	14,58	17,50
Deslocamentos horizontais da aresta "d" ($\text{in} \times 10^3$)						
Experimental	-----	5,00	-----	8,13	-----	9,66
Malha 4x6	2,47	4,81	6,88	8,47	9,35	9,62
Malha 5x12	2,47	4,81	6,90	8,48	9,37	9,64
Deslocamentos horizontais da aresta "e" ($\text{in} \times 10^3$)						
Experimental	-----	10,55	-----	18,92	-----	20,94
Malha 4x6	6,27	12,20	17,40	21,40	23,70	24,40
Malha 5x12	6,28	12,20	17,40	21,40	23,70	24,40

ra 22. Ali também é mostrada a malha mais grosseira que foi por nós utilizada na análise. O sistema de coordenadas locais utilizado foi tal que o eixo dos X é paralelo e tem o mesmo sentido que o eixo X' global

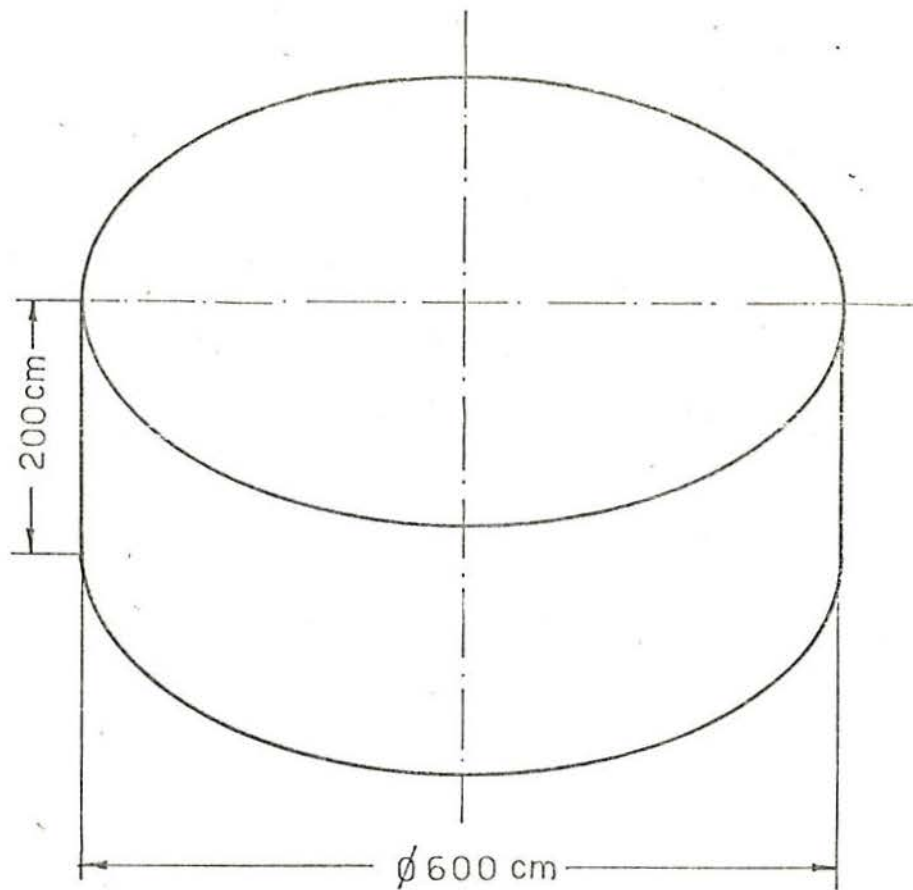
Os resultados da análise empregando o R.M.D. podem ser vistos nos gráficos 27,28,29,30,31 e 32, bem como na tabela 11. Como podemos ver nos gráficos 27,28 e 29 os resultados experimentais e os obtidos pela análise por meio do R.M.D. são praticamente os mesmos. No que diz respeito aos momentos: temos apenas resultados experimentais em um ponto da secção AB e em um ponto da secção CD. Mesmo assim podemos ver, pelos gráficos 30 e 31, que os resultados obtidos pela análise com o R.M.D. se situaram bastante próximos do valor obtido experimentalmente. Finalmente no que diz respeito às tensões σ_x , na secção AB, temos os resultados experimentais e os obtidos com o R.M.D. praticamente coincidindo. Os valores experimentais que aparecem na tabela 11 são retirados dos gráficos, o mesmo acontecendo com os resultados experimentais da tabela 12.

Os resultados da análise com o HIBRIDO podem ser vistos nos gráficos 33,34,35,36,37,38 e na tabela 12. Os resultados são bastante semelhantes aos encontrados com o R.M.D.

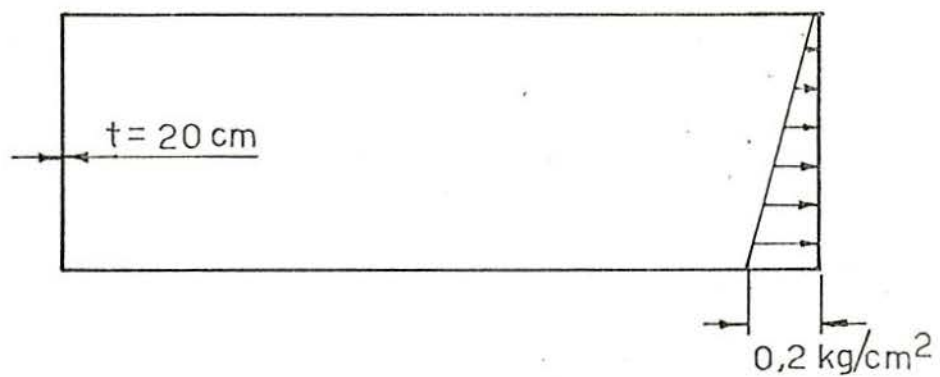
5.8 Modelo 5

Este modelo é teórico não tendo resultados experimentais. Trata-se de um tanque cilíndrico, como podemos ver na figura 23, submetido a um carregamento hidrostático. Na figura 23 aparecem também os dados do problema. Na figura 24 temos representada a malha utilizada na resolução do problema, bem como o sistema de eixos globais utilizado. O sistema de eixos locais foi tomado de tal forma que o eixo X é paralelo e de sentido contrário ao eixo Z'.

Os resultados foram comparados contra resultados obtidos com o elemento CAXR2 do sistema LORANE. Este últi



a) vista geral do modelo



b) secção transversal do modelo

DADOS

$$E = 1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0$$

Fig. Nº 23 - modelo Nº 5

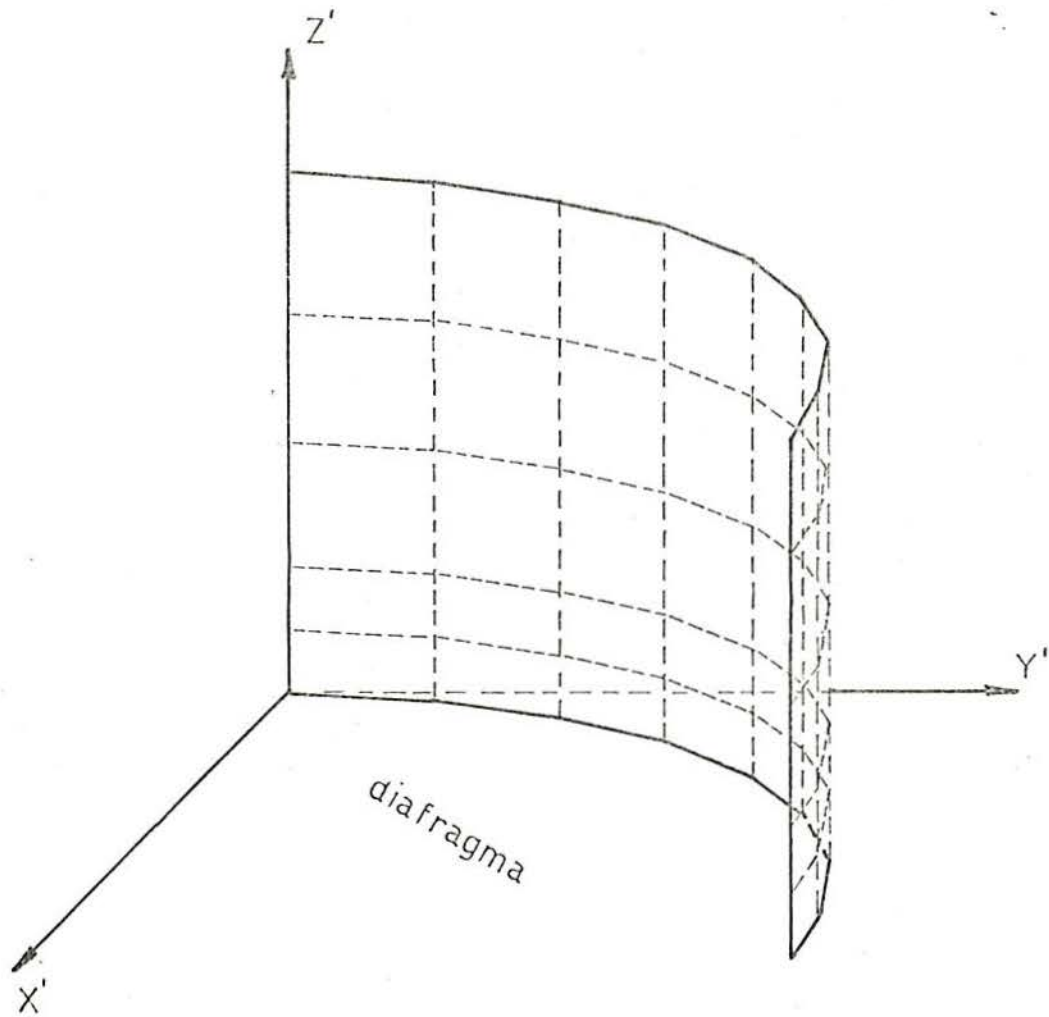
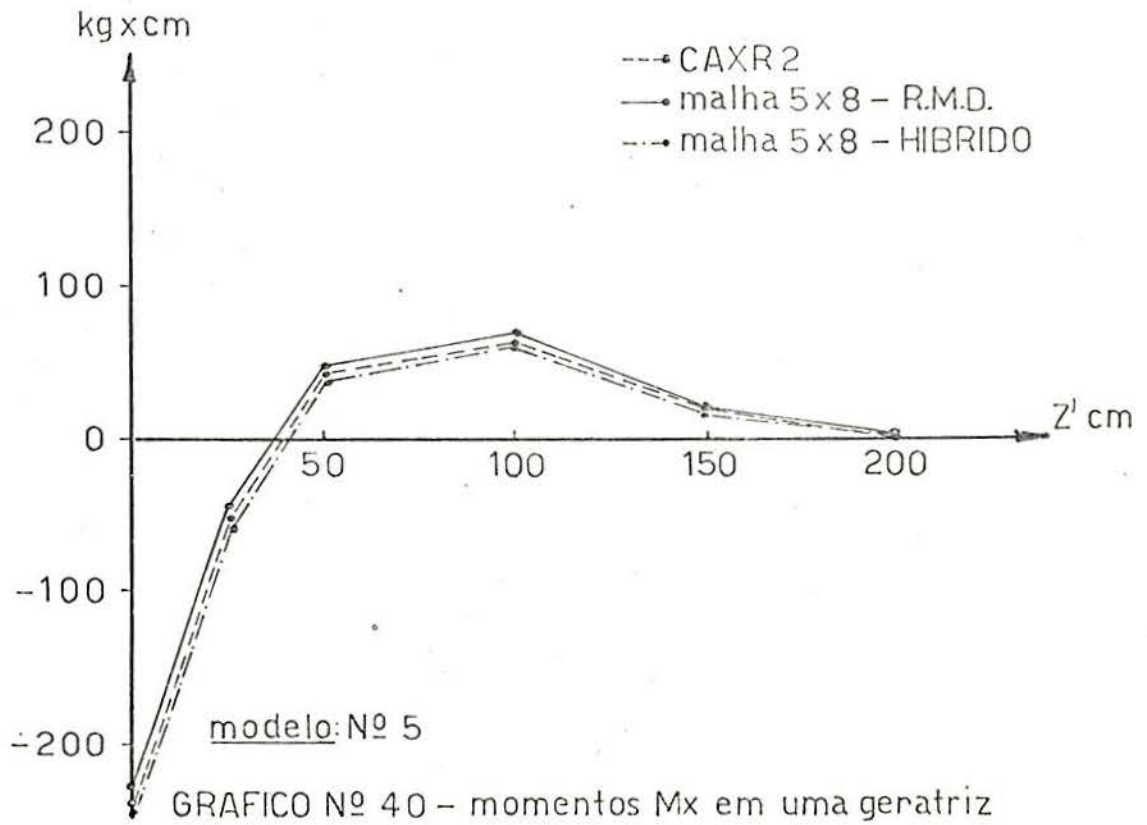
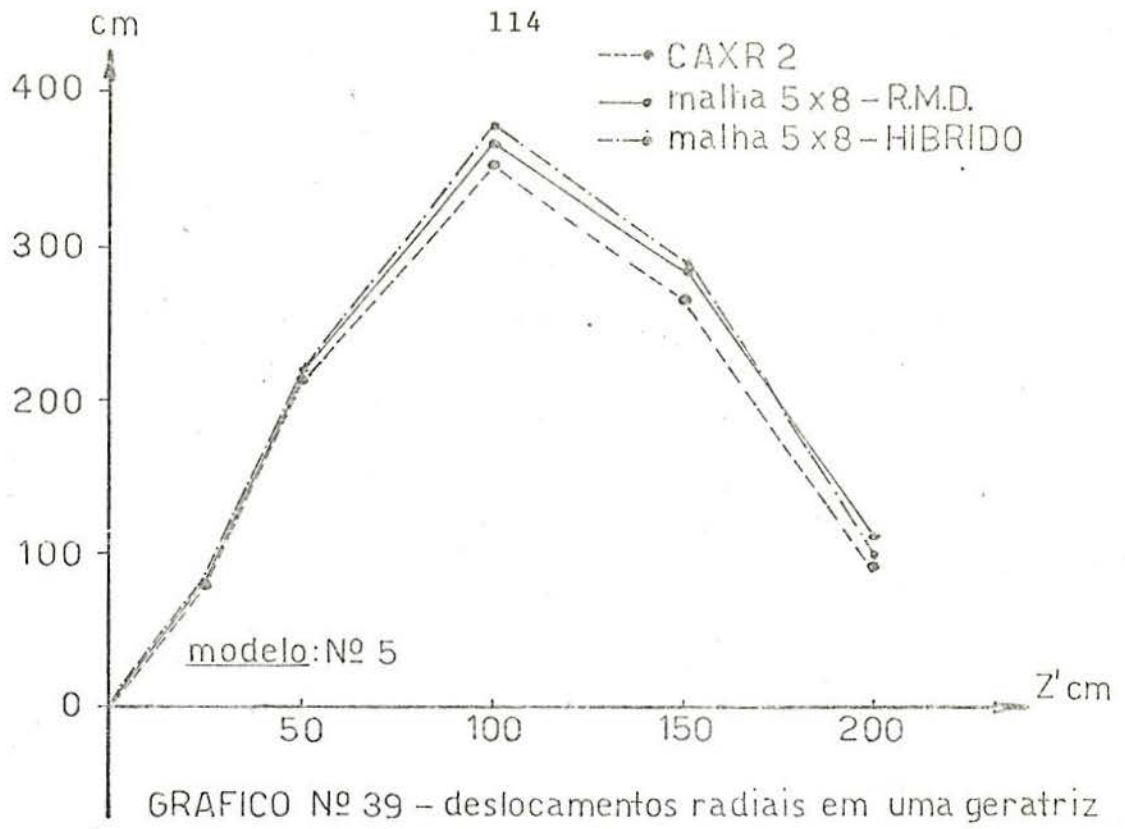


Fig Nº 24 - vista da malha 5 x 8 - modelo Nº 5



T A B E L A 13

Modelo No. 5						
Para Z' =	0	25	50	100	150	200
Deslocamentos radiais em uma geratriz (cm)						
R.M.D.	0,0	79,9	219,3	369,0	288,9	111,9
HIBRIDO	0,0	81,2	223,8	377,8	290,9	97,1
CAXR2	0,0	79,3	214,4	352,8	268,5	94,5
Momentos Mx em uma geratriz (kgxcm/cm)						
R.M.D.	-231,6	- 46,6	48,1	70,7	20,8	5,2
HIBRIDO	-244,4	- 57,6	38,1	63,1	18,4	1,7
CAXR2	-241,9	- 51,1	42,0	64,3	21,9	0,0

mo é um elemento para resolução de cascas axisimétricas. O resultado da comparação pode ser visto nos gráficos 39 e 40. Tanto o elemento R.M.D., como o HIBRIDO apresentaram uma ótima aproximação tanto no que diz respeito aos momentos como no que diz respeito aos deslocamentos radiais. Note-se que a malha empregada é bastante grosseira.

Uma última nota diz respeito ao diafragma. Este foi considerado infinitamente rígido em seu plano e perpendicularmente ao seu plano.

Os resultados comparativos aparecem também na tabela 13.

5.9 Modelo 1 Com Diafragma

Aqui fizemos uma tentativa para levarmos em conta o diafragma, com a finalidade de resolver os problemas que ocorreram para $X' = 0''$.

A malha utilizada foi de 102 elementos e 124 nós. Podemos vê-la na figura 25. Os resultados da tentativa, efetuada tanto com o HIBRIDO como com o R.M.D., podem ser vistos nas tabelas 5 e 6 (malha 102) e nos gráficos 41, 42, 43, 44.

Os resultados obtidos para os deslocamentos verticais na linha central superior do modelo podem ser classificados de excelentes uma vez que a curva experimental e numérica praticamente coincidem (podemos ver isto também nas tabelas), como pode ser observado no gráfico 41. Isto ocorre tanto para o elemento HIBRIDO como para o R.M.D..

Tanto para o HIBRIDO como para o R.M.D., os momentos M_x , que ocorrem na linha central superior, apresentam agora um valor negativo no ponto $X' = 0''$.

Fica desta forma corrigido um dos problemas que ocorria quando não se levava em conta o diafragma (tínhamos então o momento M_x nulo nesta região). De uma maneira geral aqui

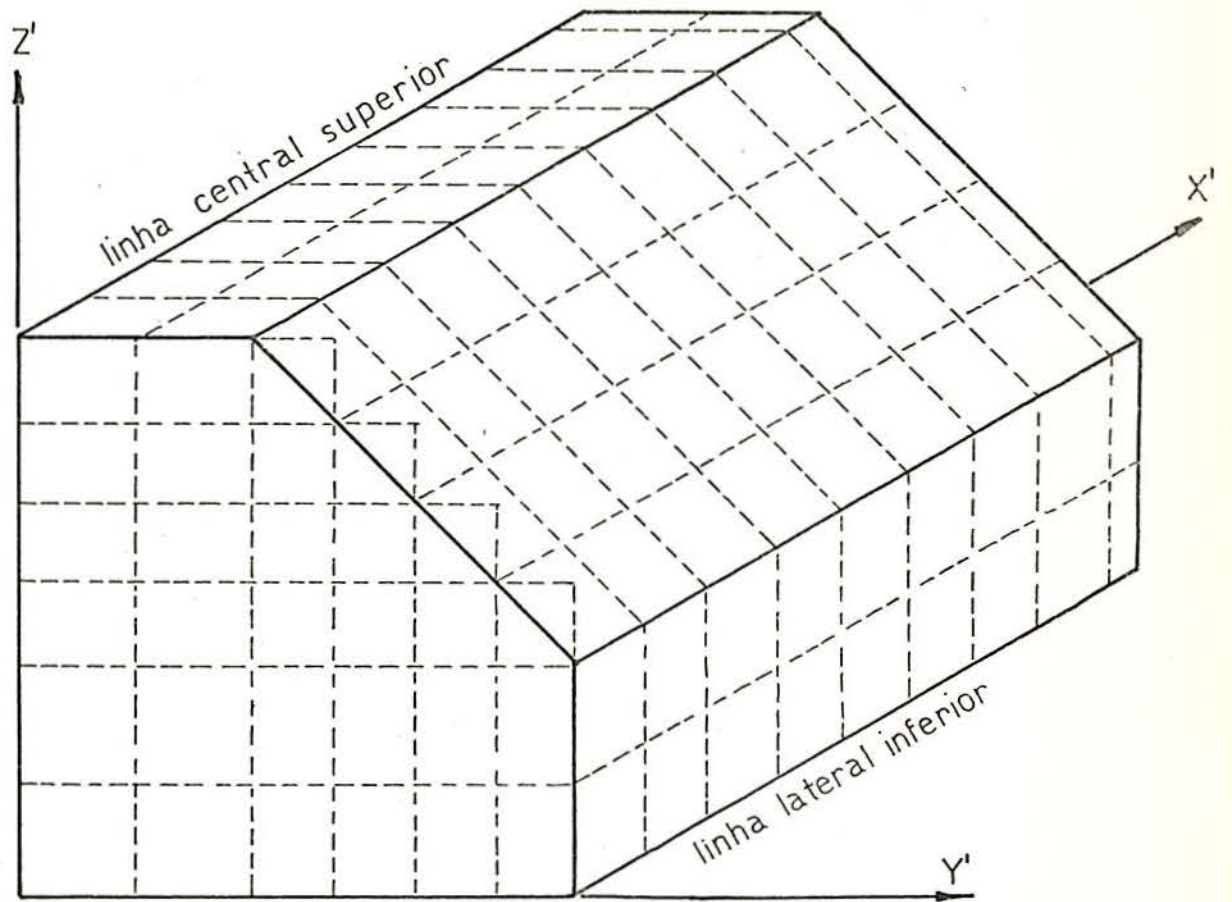
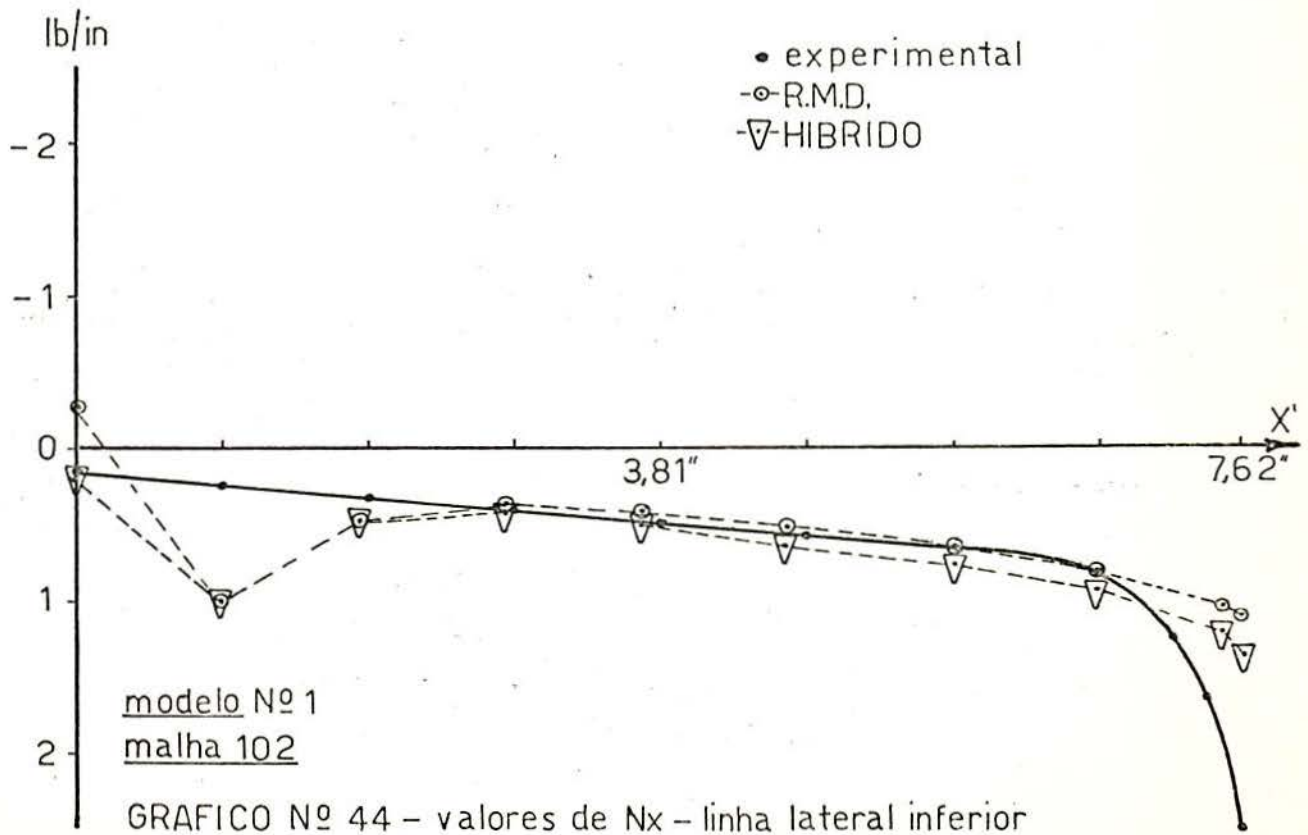
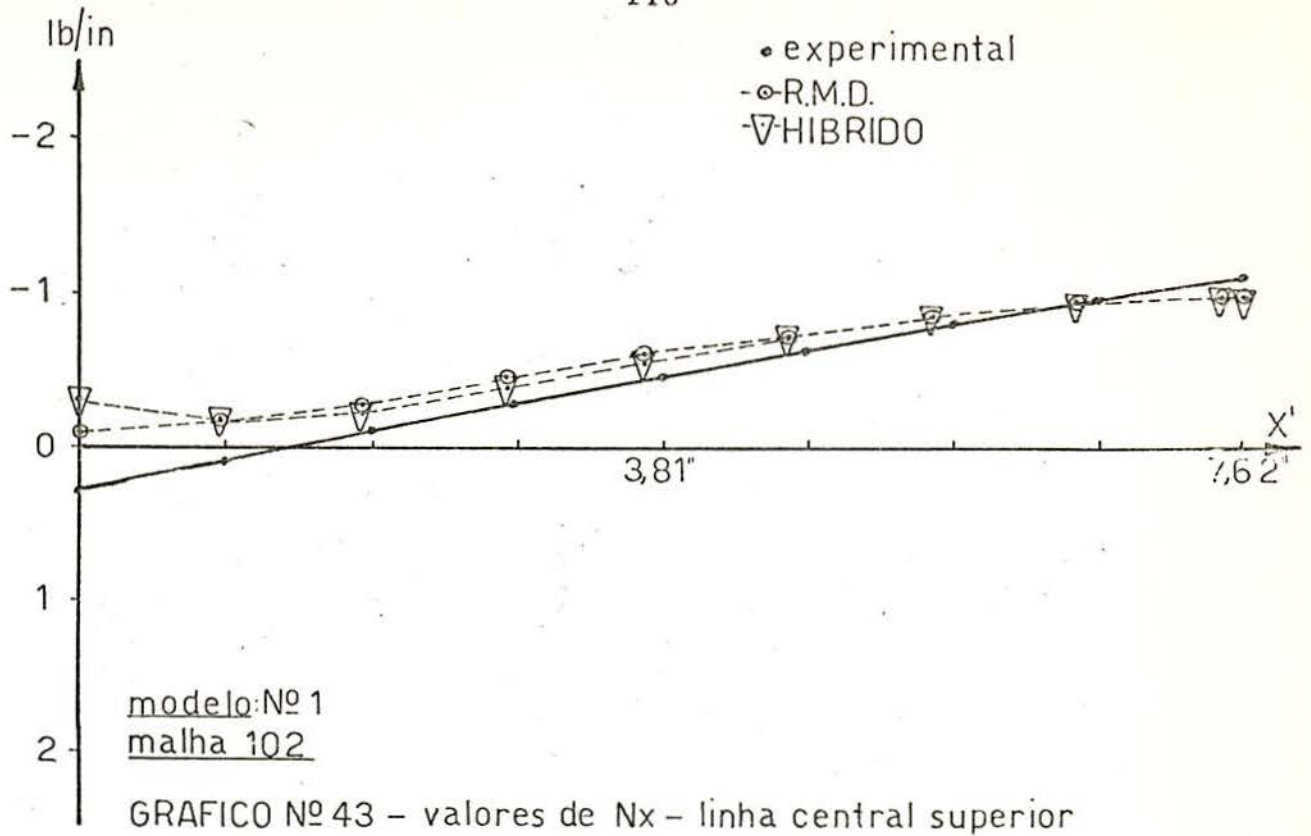
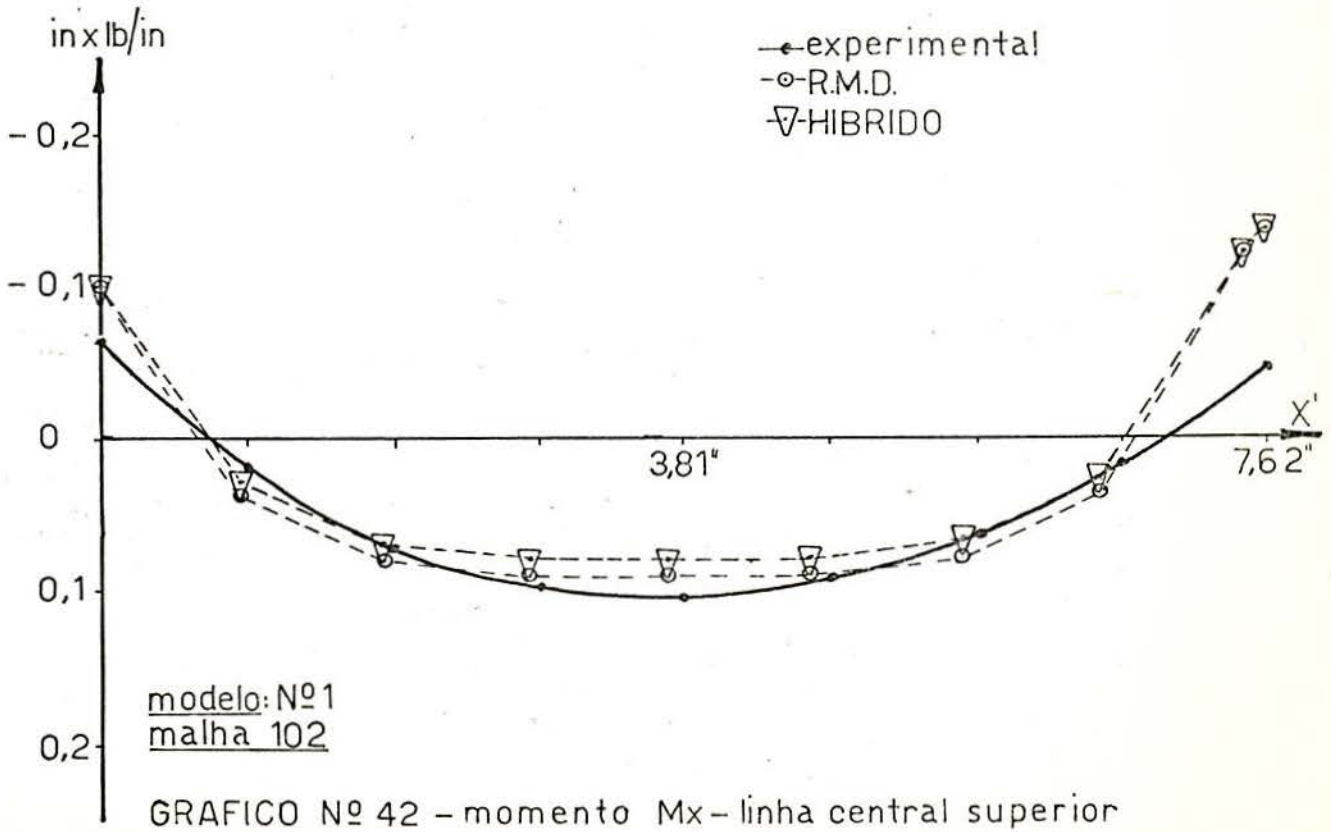
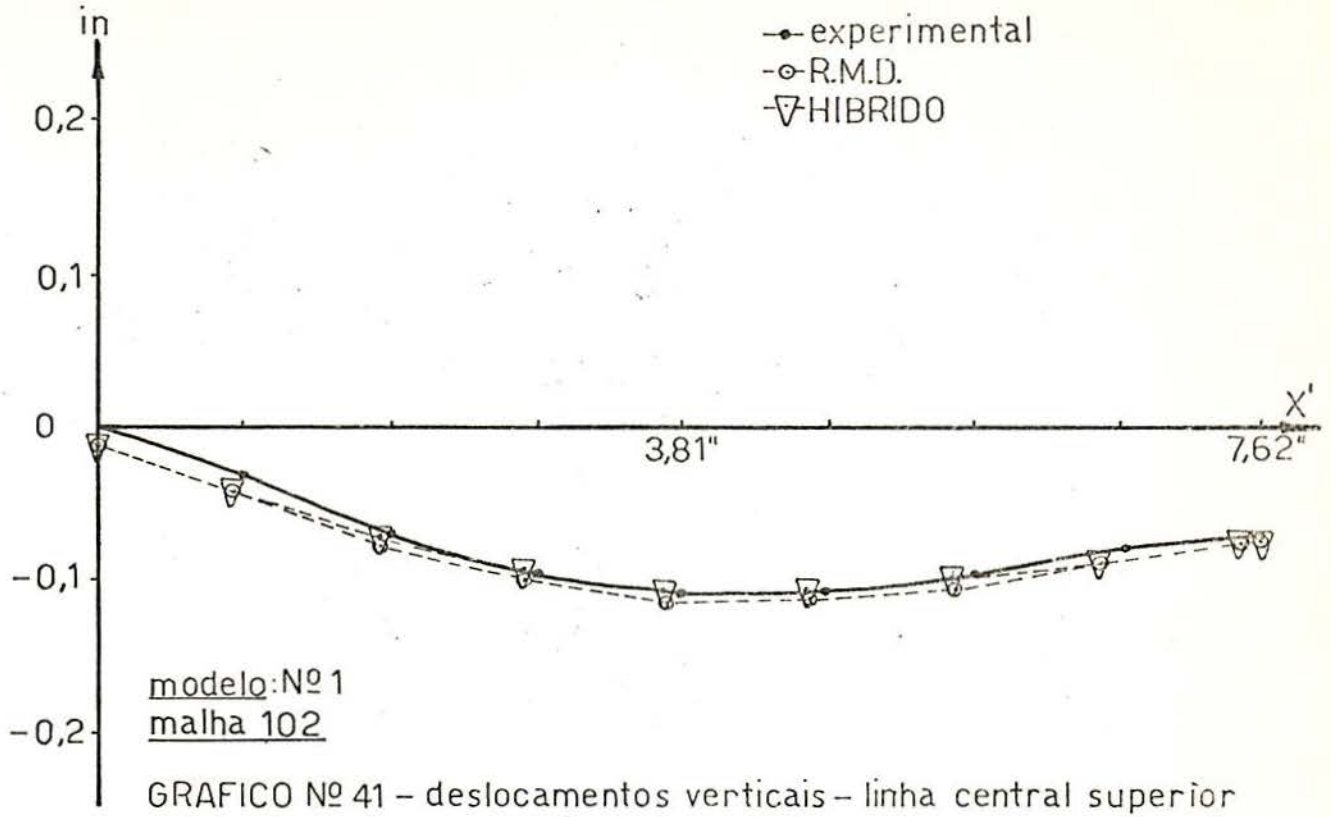


Fig. 25





também há um melhor ajustamento das curvas experimental e numérica.

Observando os gráficos 43 e 44 (especialmente este último) verificamos que o mesmo não ocorre aqui. Os valores N_x apresentam para $X' = 0''$, em ambos os elementos, perturbações bastante grandes afastando-se bastante da solução experimental. Cremos que tal fenômeno ocorre, porque aqui temos os elementos que constituem o diafragma, e os elementos que constituem as lâminas da folha poliédrica formando um ângulo de 90° . Como consequência o deslocamento w , de um elemento do diafragma, coincidirá, em direção (em coordenadas globais), com um deslocamento u ou v de um elemento de uma das lâminas e vice-versa. Ocorre que, no R.M.D., as funções interpoladoras usadas no estado plano (deslocamentos u e v) são lineares, enquanto que as funções interpoladoras usadas na flexão de placas (deslocamento w) é cúbica. Acreditamos que devido a esta diferença nas funções interpoladoras são produzidas as perturbações observadas nos valores de N_x . A maior perturbação, que se verifica no gráfico 44, pode ser explicada se nos lembrarmos que no ponto considerado temos ainda um apoio pontual. Para o elemento HIBRIDO a explicação é semelhante, já que o deslocamento u e v do elemento híbrido de estado plano de tensões, por nós utilizado, é linear enquanto que, o deslocamento w do elemento híbrido de placas em flexão, é também cúbico.

CAPITULO VI

6 Conclusões e Recomendações

Das numerosas verificações realizadas fica claro que o metodo dos elementos finitos pode ser aplicado com boas probabilidades de sucesso na análise de folhas poliédricas.

Podemos reparar pelos numerosos gráficos e tabelas apresentados que tanto o R.M.D. como o HIBRIDO dão resultado bastante semelhantes. Ambos os elementos apresentam de um modo geral bons resultados, quando se comparam os resultados experimentais com os numéricos.

As curvas (experimental e numérica) se aproximam tanto em valores numéricos como na forma geométrica. Ainda queremos ressaltar o fato de que mesmo com malhas grosseiras já se obteve resultados muito bons na maioria dos modelos. Da maneira como foram usados os programas dos dois elementos resalta uma certa vantagem para o R.M.D. no que diz respeito ao tempo. Entretanto as "procedures" do HIBRIDO talvez possam ser reformuladas, na parte de flexão, para se vencer tal obstáculo.

Uma primeira recomendação seria acoplar o elemento híbrido do estado plano de tensões com o elemento do

método dos deslocamentos para flexão de placas. Isto porque o elemento híbrido para o estado plano de tensões apresenta resultados nitidamente superiores aos apresentados pelo elemento correspondente do método dos deslocamentos. Por outro lado o elemento híbrido para flexão de placas, e o elemento para flexão de placas do método dos deslocamentos, apresentam resultados bastante semelhantes com leve vantagem para o elemento híbrido.

Uma outra sugestão é o desenvolvimento de um elemento do tipo quadrilátero para folhas poliédricas para que se possa resolver problemas onde apareçam lâminas triangulares, diafragmas não paralelos etc... A referência (3) contém o desenvolvimento de um elemento triangular para o método dos deslocamentos. Entretanto os resultados ali apresentados mostram a necessidade do emprego de um número muito grande de elementos para se chegar a resultados que obtivemos com as nossas malhas mais grosseiras. Raramente as nossas malhas mais finas chegaram a igualar em número a quantidade de elementos das malhas mais grosseiras da referência (3). Poderia se pensar também em desenvolver um elemento mais refinado que o da referência (3).

A tentativa feita para se levar em consideração o diafragma nos mostra (devido as distorções ocorridas) a provável necessidade de serem desenvolvidos elementos retangulares de estado plano de tensões, com funções interpoladoras de deslocamentos de ordem cúbica para que possam ser acoplados com os já existentes elementos retangulares de flexão de placas.

Finalmente, podemos ainda sugerir o desenvolvimento de um elemento, que leve em consideração a possibilidade de aparecerem problemas onde existam lâminas grossas e não delgadas.

A P Ê N D I C E S

CAPITULO VII

7.1 (Ver 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2) Apendice 1

7.1.1 (Ver 3.2.1) Condições de Convergência no Modelo Compatível (10) (7)

Queremos aqui focalizar certas condições que devem ser obedecidas no método dos deslocamentos, para que fique assegurada a convergência da solução do sistema :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{P}}$$

a medida que se tomam malhas cada vez mais finas. O modelo compatível, sendo derivado do método de Raleigh-Ritz, deve usar funções aproximativas que sejam admissíveis e que tenham completude, isto é, que sejam tais que a solução do sistema seja igual à solução exata, quando o somatório da (3-5) tiver infinitos termos. Na prática, para que isto seja assegurado, temos alguns critérios que devem ser observados, quando serão escolhidas as funções aproximativas que irão constituir a matriz $\underline{\underline{A}}$ da expressão (3-11).

Critério 1 - as funções aproximativas devem ser tais que se dermos um deslocamento de corpo rígido ao elemento, as deformações específicas continuem tendo o mesmo valor que possuíam antes do deslocamento de corpo rígido.

Critério 2 - a medida que se usam malhas mais finas as deformações especí-

ficas tendem a ter menor variação dentro de cada elemento. Se na realidade existem deformações específicas constantes, o elemento deve ser tal que possa reproduzir as deformações específicas de modo exato. Em caso contrário o elemento não apresentará, em geral, boas condições de convergência. Logo as funções aproximativas devem ser tais que, se os deslocamentos nodais do elemento são compatíveis com uma condição de deslocamentos específicos constantes, permitam obter exatamente estas deformações específicas constantes.

No caso em que as funções aproximativas são polinômios interpoladores, os critérios 1 e 2 ficam automaticamente satisfeitos se tomamos um polinômio completo, cuja ordem seja pelo menos igual à ordem da maior derivada que aparece nas relações entre deformações específicas e deslocamentos.

Critério 3 - As funções aproximativas utilizadas devem assegurar a compatibilidade nas linhas divisórias entre os elementos para os deslocamentos e suas derivadas até a ordem $k-1$, onde k é a ordem da maior derivada que aparece nas relações entre deformações específicas e deslocamentos.

7.1.2 Condições a Serem Satisfeitas pelos Parâmetros de Tensões no Modelo Híbrido (14)

7.1.2.1 (Ver 3.3.1) Estado Plano de Tensões

Se considerarmos a expressão (3-5), pode-se escrever a expressão (3-69) e a (3-70), não mais ao nível do elemento mas sim ao nível do corpo, como :

$$(-\underline{F} \cdot \underline{\sigma}^n + \underline{G} \cdot \underline{U}_e)_{i=1,2,\dots,m} \text{ para um elemento } i = 0 \quad (7-1)$$

$$\sum_m (\underline{\sigma}^n, \underline{T} \cdot \underline{G} - \underline{P}_e) \cdot \delta \underline{U}_e = 0 \quad (7-2)$$

A inspeção da (7-2) mostra que se o número de tensões assumidas σ^n de todos os m elementos é menor que o número total de desloca

mentos \underline{U}_e não haverá, em geral, solução para os σ^n . Mesmo que haja solução para os σ^n na (7-2), as incógnitas \underline{U}_e não poderão ser determinadas unicamente da equação (7-1) uma vez que em tais casos o número de incógnitas \underline{U}_e , pelo menos em alguns elementos, é necessariamente maior do que o número de σ^n . Sendo \bar{M} o número total de tensões assumidas σ^n e \bar{N} , o número total de deslocamentos \underline{U}_e , dos quais pelo menos \bar{L} devem ser restringidos, \bar{L} é portanto o número de graus de liberdade da estrutura considerada como um corpo rígido. Então para que o problema tenha solução deveremos ter :

$$\bar{M} - \bar{N} - \bar{L} = 0 \quad (7-3)$$

7.1.2.2 (Ver 3.3.2) Placas Delgadas em Flexão

Da mesma forma que no item anterior podemos aqui escrever as expressões (3-113) e (3-114) para o corpo :

$$(\underline{H} \cdot \underline{\beta} + \underline{H}_p - \underline{G} \cdot \underline{U}_{be})_{\substack{\text{para o elemento } i \\ i=1,2,\dots,m}} = 0 \quad (7-5)$$

$$\sum_m (-\underline{\beta}^T \cdot \underline{G} + \underline{S}^T) \cdot \delta \underline{U}_{be} = 0 \quad (7-6)$$

Aqui as considerações são idênticas às que foram vistas no item anterior e levam à mesma conclusão. Somente que aqui temos os parâmetros de tensão β em lugar dos σ^n .

7.2 (Ver 3.2.2, 3.2.3.1) Apêndice 2

Damos a seguir o vetor \underline{A}_w e a matriz \underline{B} retirados da referência (9) :

$$\tilde{A}_W^T = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \xi\eta - (3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta) - (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2 \\ \quad (1 - \xi)\eta(1 - \eta)^2b \\ \quad -\xi(1 - \xi)^2(1 - \eta)a \\ (3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta) + \xi\eta(1 - \eta)(1 - 2\eta) \\ \quad \xi\eta(1 - \eta)^2b \\ \quad (1 - \xi)\xi^2(1 - \eta)a \\ (3 - 2\xi)\xi^2\eta - \xi\eta(1 - \eta)(1 - 2\eta) \\ \quad -\xi(1 - \eta)\eta^2b \\ \quad (1 - \xi)\xi^2\eta a \\ (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2 + \xi(1 - \xi)(1 - 2\xi)\eta \\ \quad -(1 - \xi)(1 - \eta)\eta^2b \\ \quad -\xi(1 - \xi)^2\eta a \end{array} \right\}$$

onde :

$$\xi = x / a$$

e :

$$\eta = y / b$$

e fazendo :

$$a^* = 6.z/a^2$$

$$b^* = 2.z/a$$

$$c^* = 6.z/b^2$$

$$d^* = 2.z/b$$

$$e^* = 2.z/a.b$$

podemos escrever :

$$\begin{array}{r}
 (1 - 2\xi)(1 - \eta)a^* \quad (1 - \xi)(1 - 2\eta)c^* \quad \{1 - 6\xi(1 - \xi) - 6\eta(1 - \eta)\}e^* \\
 0 \quad (1 - \xi)(2 - 3\eta)d^* \quad (1 - 4\eta + 3\eta^2)b^* \\
 -(2 - 3\xi)(1 - \eta)b^* \quad 0 \quad -(1 - 4\xi + 3\xi^2)d^* \\
 -(1 - 2\xi)(1 - \eta)a^* \quad \xi(1 - 2\eta)c^* \quad \{-1 + 6\xi(1 - \xi) + 6\eta(1 - \eta)\}e^* \\
 0 \quad \xi(2 - 3\eta)d^* \quad -(1 - 4\eta + 3\eta^2)b^* \\
 -(1 - 3\xi)(1 - \eta)b^* \quad 0 \quad \xi(2 - 3\xi)d^* \\
 -(1 - 2\xi)\eta a^* \quad -\xi(1 - 2\eta)c^* \quad \{1 - 6\xi(1 - \xi) - 6\eta(1 - \eta)\}e^* \\
 0 \quad \xi(1 - 3\eta)d^* \quad \eta(2 - 3\eta)b^* \\
 -(1 - 3\xi)\eta b^* \quad 0 \quad -\xi(2 - 3\xi)d^* \\
 (1 - 2\xi)\eta a^* \quad -(1 - \xi)(1 - 2\eta)c^* \quad \{-1 + 6\xi(1 - \xi) + 6\eta(1 - \eta)\}e^* \\
 0 \quad (1 - \xi)(1 - 3\eta)d^* \quad -\eta(2 - 3\eta)b^* \\
 -(2 - 3\xi)\eta b^* \quad 0 \quad (1 - 4\xi + 3\xi^2)b^*
 \end{array}$$

$$\tilde{B}^T =$$

Nas páginas seguintes temos as "procedures" necessárias à montagem do elemento RMD.

Alguns dos símbolos mais usados são :

EE	-	modulo de Young
ANU	-	coeficiente de Poisson
TT	-	espessura da lâmina
SXX	-	σ_x
SYX	-	σ_y
SXY	-	τ_{xy}
MXX	-	M_x
MYX	-	M_y
MXY	-	M_{xy}
QX	-	Q_x
QY	-	Q_y

BURROUGHS B6700 ALGOL COMPILER, VERSION 2.6.002, WEDNESDAY, 01/22/75,

TESTE/RIFPR1
=====

BEGIN

FILE LEIT(KIND=READER), IMPR(KIND=PRINTER);

INTEGER NUMERO;
ARRAY CGLOBAL(1:32);
INTEGER PNC,QNC,NELC;
REAL O1,O2,O3;
ARRAY

 NOR(0:1500),
 E(0:2000),
 T(0:2000),
 X(0:1500),
 Y(0:1500),
 Z(0:1500),

SI(0:150000),
SL(0:0),
RIG(1:32,1:32),

POIS(0:2000),
 REL(1:6),
 NDS(0:32),
 REAC(0:0),
 NDC(0:4000);

LABEL FIN;

INTEGER ITIPO,NELEM,NPT,NAP,NEC,JF,I,J,K,L,N,NPC;
ARRAY TEMP(0:32,0:32);

 INTEGER NPTD,NPTDC,NNC,K1,NEL,NN,N1,N2 ;

INTEGER M;

REAL P1,P2,P3;

INTEGER ARRAY IREL(1:6);

ARRAY VFC(0:0),SEC(0:0);

 PROCEDURE TFFPR(NEL);

 INTEGER NEL;

BEGIN

 INTEGER N;

 ARRAY COORX(1:5),COORY(1:5);

 REAL OX,OY,DEXXX,DEYYY,DEXXY,DEYYX,DEXYY,DEYXX;

 REAL X1,ETA,A,B,ANU,OX1,OY1,DX4,DY4,DZ1,DZ4,EE,TT,AB,COEF,RE,SXX,SYY,SXY

 ,MAX,MYX,MY,MAX,EAX,EYY,EXY;

 INTEGER I1,I2,I3,I4,IP,IQ,I,J;

 ARRAY ROT(1:6,1:5),TEMP(1:6,1:6),U(1:24),V(1:24);

 LABEL PROXIMO,SEGUINTE,OUTRO;

 I1:=NOD(6*(NEL-1)+1);

 I2:=NOD(6*(NEL-1)+2);

 I3:=NOD(6*(NEL-1)+3);

 I4:=NOD(6*(NEL-1)+4);

 DX1:=X(I2)-X(I1);

 DY1:=Y(I2)-Y(I1);

 DZ1:=Z(I2)-Z(I1);

 DX4:=X(I4)-X(I1);

 DY4:=Y(I4)-Y(I1);

 DZ4:=Z(I4)-Z(I1);

 A:=SQRT(DX1**2+DY1**2+DZ1**2);

 B:=SQRT(DX4**2+DY4**2+DZ4**2);

```

ROT(1,1):=DX1/A;
ROT(2,1):=DY1/A;
ROT(3,1):=DZ1/A;
ROT(1,2):=DX4/B;
ROT(2,2):=DY4/B;
ROT(3,2):=DZ4/B;
ANU:=POIS(NEL);
EF:=E(NEL);
TT:=T(NEL);
BF:=B/A;
COEF:=EF*TT/(12.*(1.-ANU*ANU)) ;
AR:=A*3;
ROT(1,3):=(DY1*DZ4-DZ1*DY4)/AB;
ROT(2,3):=(DX4*DZ1-DX1*DZ4)/AB;
ROT(3,3):=(DX1*DY4-DY1*DX4)/AB;
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
FOR IQ:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
    BEGIN
    ROT(IP+3,IQ+3):=ROT(IP,IQ);
    ROT(IP+3,IQ):=0.;
    ROT(IP,IQ+3):=0.;
    END;
FOR N:=1 STEP 1 UNTIL NEC DO
    BEGIN
    FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
        BEGIN
        V(J):=SL(NPTD*(N-1)+JF*(I1-1)+J);
        V(J+6):=SL(NPTD*(N-1)+JF*(I4-1)+J);
        V(J+12):=SL(NPTD*(N-1)+JF*(I3-1)+J);
        V(J+18):=SL(NPTD*(N-1)+JF*(I2-1)+J);
        END;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
        BEGIN
        J(I):=0. ;
        J(I+6):=0. ;
        J(I+12):=0. ;
        J(I+18):=0. ;
        FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
            BEGIN
            U(I):=U(I) +ROT(J,I)*V(J);
            U(I+6):=U(I+6)+ROT(J,I)*V(J+6);
            U(I+12):=U(I+12)+ROT(J,I)*V(J+12);
            U(I+18):=U(I+18)+ROT(J,I)*V(J+18);
            END;
        END;
    WRITE(IMPB,<///," ELEMENTO",IS/" ESTADO DE CARGA",IS//>,NEL,N);
    COORX(1):=0.;COORX(2):=1.;COORX(3):=1.;COORX(4):=0.;COORX(5):=.5;
    COORY(1):=0.;COORY(2):=0.;COORY(3):=1.;COORY(4):=1.;COORY(5):=.5;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 5 DO
        BEGIN
        ETA:=COORY(I);
        XI:=COORX(I);
        SXX:=(-(1.-ETA)*U(1)/A-(1.-XI)*ANU*U(2)/B-ETA*U(7)/A+
            (1.-XI)*ANU*U(8)/B+ETA*U(13)/A+XI*ANU*U(14)/B+
            (1.-ETA)*U(19)/A-XI*U(20)*ANU/B)*EE/(1.-ANU**2);
        SYY:=(-(1.-ETA)*ANU*U(1)/A-(1.-XI)*U(2)/B-ETA*ANU*U(7)/A+
            (1.-XI)*U(8)/B+ETA*ANU*U(13)/A+XI*U(14)/B+
            (1.-ETA)*ANU*U(19)/A-XI*U(20)/B)*EE/(1.-ANU**2);
        SKY:=(-(1.-XI)*U(1)/(2.*B)-(1.-ETA)*U(2)/(2.*A)+
            (1.-XI)*U(7)/(2.*B)-ETA*U(8)/(2.*A)+
            XI*U(13)/(2.*B)+ETA*U(14)/(2.*A)-
            XI*U(19)/(2.*B)+(1.-ETA)*U(20)/(2.*A))*EE*(1.-ANU)/(1.-ANU**2);
        SXX:=((1.-2.*XI)*(1.-ETA)*6.*U(3)/A**2-
            (2.-3.*XI)*(1.-ETA)*2.*U(5)/A+
            (1.-2.*XI)*ETA*6.*U(9)/A**2-
            (2.-3.*XI)*ETA*2.*U(11)/A-

```

EMDEPT

3
3
3
4
4
5
4
4
4

$(1.-2.*XI)*ETA*6.*U(15)/A**2 -$
 $(1.-3.*XI)*ETA*2.*U(17)/A-$
 $(1.-2.*XI)*(1.-ETA)*6.*U(21)/A**2-$
 $(1.-3.*XI)*(1.-ETA)*2.*U(23)/A)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 FYY:=($(1.-XI)*(1.-2.*ETA)*6.*U(3)/B**2+$
 $(1.-XI)*(2.-3.*ETA)*2.*U(4)/B-$
 $(1.-XI)*(1.-2.*ETA)*6.*U(9)/B**2+$
 $(1.-XI)*(1.-3.*ETA)*2.*U(10)/B-$
 $XI*(1.-2.*ETA)*6.*U(15)/B**2+$
 $XI*(1.-3.*ETA)*2.*U(16)/B+$
 $XI*(1.-2.*ETA)*6.*U(21)/B**2+$
 $XI*(2.-3.*ETA)*2.*U(22)/B)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 FXY:=($(1.-6.*XI*(1.-XI)-6.*ETA*(1.-ETA))*2.*U(3)/AB+$
 $(1.-4.*ETA+3.*ETA**2)*2.*U(4)/A-$
 $(1.-4.*XI+3.*XI**2)*2.*U(5)/B+$
 $(-1.+6.*XI*(1.-XI)+6.*ETA*(1.-ETA))*2.*U(9)/AB-$
 $ETA*(2.-3.*ETA)*2.*U(10)/A+$
 $(1.-4.*XI+3.*XI**2)*2.*U(11)/B+$
 $(1.-5.*XI*(1.-XI)-6.*ETA*(1.-ETA))*2.*U(15)/AB+$
 $ETA*(2.-3.*ETA)*2.*U(16)/A-$
 $XI*(2.-3.*XI)*2.*U(17)/B+$
 $(-1.+6.*XI*(1.-XI)+6.*ETA*(1.-ETA))*2.*U(21)/AB-$
 $(1.-4.*ETA+3.*ETA**2)*2.*U(22)/A+$
 $XI*(2.-3.*XI)*2.*U(23)/B)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 MXX:=- $(FXX+ANU*EYY);$ MYY:=- $(EYY+ANU*EXX);$ MXY:=- $(EXY*(1.-ANU)/2.);$
 DFXX:=($-(2./A)*(1.-ETA)*6.*U(3)/A**2+$
 $(3./A)*(1.-ETA)*2.*U(5)/A-$
 $(2./A)*ETA*6.*U(9)/A**2+$
 $(3./A)*ETA*2.*U(11)/A+$
 $(2./A)*ETA*6.*U(15)/A**2+$
 $(3./A)*ETA*2.*U(17)/A+$
 $(2./A)*(1.-ETA)*6.*U(21)/A**2+$
 $(3./A)*(1.-ETA)*2.*U(23)/A)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 DFYY:=($-(1./A)*(1.-2.*ETA)*6.*U(3)/B**2-$
 $(1./A)*(2.-3.*ETA)*2.*U(4)/B+$
 $(1./A)*(1.-2.*ETA)*6.*U(9)/B**2-$
 $(1./A)*(1.-3.*ETA)*2.*U(10)/B-$
 $(1./A)*(1.-2.*ETA)*6.*U(15)/B**2+$
 $(1./A)*(1.-3.*ETA)*2.*U(16)/B+$
 $(1./A)*(1.-2.*ETA)*6.*U(21)/B**2+$
 $(1./A)*(2.-3.*ETA)*2.*U(22)/B)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 DFXY:=($(-5.*(1./B)*(1.-ETA)+6.*ETA*(1./B))*2.*U(3)/AB+$
 $(-4.*(1./B)+6.*(1./B)*ETA)*2.*U(4)/A+$
 $(6.*(1./B)*(1.-ETA)-6.*ETA*(1./B))*2.*U(9)/AB-$
 $(1./B)*(2.-3.*ETA)-ETA*(3./B))*2.*U(10)/A+$
 $(-5.*(1./B)*(1.-ETA)+6.*ETA*(1./B))*2.*U(15)/AB+$
 $(1./B)*(2.-3.*ETA)-ETA*(3./B))*2.*U(16)/A+$
 $(5./B)*(1.-ETA)-6.*ETA*(1./B))*2.*U(21)/AB-$
 $(-4./B)+6./B)*ETA)*2.*U(22)/A)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 DX:=- $(DEXX+ANU*DEY(X))-DEXY*(1.-ANU)/2.);$
 DFXY:=($-(1./B)*(1.-2.*XI)*6.*U(3)/A**2+$
 $(2.-3.*XI)*(1./B)*2.*U(5)/A+$
 $(1.-2.*XI)*(1./B)*6.*U(9)/A**2-$
 $(2.-3.*XI)*(1./B)*2.*U(11)/A-$
 $(1.-2.*XI)*(1./B)*6.*U(15)/A**2-$
 $(1.-3.*XI)*(1./B)*2.*U(17)/A+$
 $(1.-2.*XI)*(1./B)*6.*U(21)/A**2+$
 $(1.-3.*XI)*(1./B)*2.*U(23)/A)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$
 DFYYY:=($-(1.-XI)*(2./B)*6.*U(3)/B**2-$
 $(1.-XI)*(3./B)*2.*U(4)/B+$
 $(1.-XI)*(2./B)*6.*U(9)/B**2-$
 $(1.-XI)*(3./B)*2.*U(10)/B+$
 $XI*(2./B)*6.*U(15)/B**2-$
 $XI*(3./B)*2.*U(16)/B-$
 $XI*(2./B)*6.*U(21)/B**2-$
 $XI*(3./B)*2.*U(22)/B)*EE*TT**3/(12.*(1.-ANU**2));$

EMDPF

```

OXYX:=((-6./A)* (1.-XI)+6.*XI*(1./A))*2.*U(3)/AB-
      (-4./A)+(6./A)*XI)*2.*U(5)/B+
((5./A)*(1.-XI)-6.*XI*(1./A))*2.*U(9)/AB+
(-4./A)+(5./A)*XI)*2.*U(11)/B+
(-6./A)*(1.-XI)+6.*XI*(1./A))*2.*U(15)/AB-
((1./A)*(2.-3.*XI)-XI*(3./A))*2.*U(17)/B+
((5./A)*(1.-XI)-6.*XI*(1./A))*2.*U(21)/AB+
((1./A)*(2.-3.*XI)-XI*(3./A))*2.*U(23)/B)*EE*IT**3/(12.*(1.-ANU**2));
OY:=- (DEYYY+ANU*DEXXY)-(DEYX*(1.-ANU)/2.);
IF I LSS 5 THEN GO TO SEGUINTE ELSE GO TO PROXIMO ;
SEGUINTE:WRITE (IMPR, <"NUMERO DO NO=", I5, X2, "SXX=", F15.5, X2, "SYY=", F15.5,
X2, "SXY=", F15.5, X2, "OX=", F15.5, >, NOD(4*(NEL-1)+1), SXX, SYY, SXY, OX);
      WRITE (IMPR, <"NUMERO DO NO=", I5, X2, "MXX=", F15.5, X2, "MYX=", F15.5,
X2, "MXY=", F15.5, X2, "OY=", F15.5, >, NOD(4*(NEL-1)+1), MXX, MYX, MXY, OY);
GO TO OUTRO ;
PROXIMO :WRITE (IMPR, <"PONTO CENTRAL" , X2, "SXX=", F15.5, X2, "SYY=", F15.5,
X2, "SXY=", F15.5, X2, "OX=", F15.5, >, SXX, SYY, SXY, OX);
      WRITE (IMPR, <"PONTO CENTRAL" , X2, "MXX=", F15.5, X2, "MYX=", F15.5,
X2, "MXY=", F15.5, X2, "OY=", F15.5, >, MXX, MYX, MXY, OY);
OUTRO:END ;
END;
END;

```

4
3

```

PROCEDURE VETCAR(NEL);
INTEGER NEL ;
RFGIN
INTEGER I1, I2, I3, I4, IP, IO, I, J, K;

```

2

```

REAL AB;
REAL A, B, OX1, OY1, DX4, DY4, DZ1, DZ4, OX, OY, OZ;
ARRAY ROT(1:6, 1:6), CARGA(1:24);
I1:=NOD(4*(NEL-1)+1);
I2:=NOD(4*(NEL-1)+2);
I3:=NOD(4*(NEL-1)+3);
I4:=NOD(4*(NEL-1)+4);
OX1:=X(I2)-X(I1);
OY1:=Y(I2)-Y(I1);
OZ1:=Z(I2)-Z(I1);
DX4:=X(I4)-X(I1);
DY4:=Y(I4)-Y(I1);
DZ4:=Z(I4)-Z(I1);
A:=SQRT(OX1**2+OY1**2+OZ1**2);
B:=SQRT(DX4**2+DY4**2+DZ4**2);
AB:=A*B;
ROT(1,1):=OX1/A ;
ROT(2,1):=OY1/A;
ROT(3,1):=OZ1/A;
ROT(1,2):=DX4/B;
ROT(2,2):=DY4/B;
ROT(3,2):=DZ4/B;
ROT(1,3):=(OY1*DZ4-OZ1*DY4)/AB;
ROT(2,3):=(OX4*DZ1-OX1*DZ4)/AB;
ROT(3,3):=(OX1*DY4-OY1*DX4)/AB;
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
FOR IO:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
RFGIN
ROT(IP+3, IO+3):=ROT(IP, IO);
ROT(IP+3, IO):=0.;
ROT(IP, IO+3):=0.;
END;
OY:=O1*ROT(1,2)+O2*ROT(2,2)+O3*ROT(3,2);
OX:=O1*ROT(1,1)+O2*ROT(2,1)+O3*ROT(3,1);
OZ:=O1*ROT(1,3)+O2*ROT(2,3)+O3*ROT(3,3);
CARGA( 1):=OX*A*B/4. ;
CARGA( 2):=OY*A*B/4. ;
CARGA( 7):=OX*A*B/4. ;

```

2

3

3

EMDEPT

```

EMDEPT { CARGA( 8) := QY * A * B / 4. ;
          CARGA(13) := QX * A * B / 4. ;
          CARGA(14) := QY * A * B / 4. ;
          CARGA(19) := QX * A * B / 4. ;
          CARGA(20) := QY * A * B / 4. ;
          CARGA( 3) := QZ * A * B / 4. ;
          CARGA( 4) := QZ * A * (B ** 2) / 24. ;
          CARGA( 5) := -QZ * (A ** 2) * B / 24. ;
          CARGA( 6) := 0. ;
          CARGA( 9) := QZ * A * B / 4. ;
          CARGA(10) := QZ * A * (B ** 2) / 24. ;
          CARGA(11) := QZ * B * (A ** 2) / 24. ;
          CARGA(12) := 0. ;
          CARGA(15) := QZ * A * B / 4. ;
          CARGA(16) := -QZ * A * (B ** 2) / 24. ;
          CARGA(17) := QZ * (A ** 2) * B / 24. ;
          CARGA(18) := 0. ;
          CARGA(21) := QZ * A * B / 4. ;
          CARGA(22) := -QZ * A * (B ** 2) / 24. ;
          CARGA(23) := -QZ * B * (A ** 2) / 24. ;
          CARGA(24) := 0. ;
          FOR I := 1 STEP 1 UNTIL 4 DO
          FOR J := 1 STEP 1 UNTIL 6 DO BEGIN
          CGLOBAL(6 * (I - 1) + J) := 0. ;
          FOR K := 1 STEP 1 UNTIL 6 DO
          CGLOBAL(6 * (I - 1) + J) := CGLOBAL(6 * (I - 1) + J) + ROT(J, K) * CARGA(6 * (I - 1) + K) ;
          END ;
          END ;
PROCEDURE RIFP21(NEL) ;
INTEGER NEL ;
BEGIN
REAL A, B, ANU, DX1, DY1, DX4, DY4, DZ1, DZ4, EE, TT, HE, COEF, AB, UMAP, UMEP,
UM3P, BE2, BEM2 ;
INTEGER I1, I2, I3, I4, IP, IQ, I, J, L, K, KK, LL ;
ARRAY ROT(1:6, 1:6), TEMP(1:6, 1:6) ;
FORMAT F100(8F15.5) ;
I1 := NOJ(4 * (NEL - 1) + 1) ;
I2 := NOJ(4 * (NEL - 1) + 2) ;
I3 := NOJ(4 * (NEL - 1) + 3) ;
I4 := NOJ(4 * (NEL - 1) + 4) ;
DX1 := X(I2) - X(I1) ;
DY1 := Y(I2) - Y(I1) ;
DZ1 := Z(I2) - Z(I1) ;
DX4 := X(I4) - X(I1) ;
DY4 := Y(I4) - Y(I1) ;
DZ4 := Z(I4) - Z(I1) ;
A := SQRT(DX1 ** 2 + DY1 ** 2 + DZ1 ** 2) ;
B := SQRT(DX4 ** 2 + DY4 ** 2 + DZ4 ** 2) ;
ROT(1, 1) := DX1 / A ;
ROT(2, 1) := DY1 / A ;
ROT(3, 1) := DZ1 / A ;
ROT(1, 2) := DX4 / B ;
ROT(2, 2) := DY4 / B ;
ROT(3, 2) := DZ4 / B ;
ANU := POIS(NEL) ;
EF := E(NEL) ;
TT := T(NEL) ;
BE := B / A ;
COEF := EF * TT / (12. * (1. - ANU * ANU)) ;
AB := A * B ;
UMAP := 1. + ANU ;
UMEP := 1. - ANU ;
UM3P := 1. - 3. * ANU ;
FOR IP := 1 STEP 1 UNTIL 24 DO

```

```

FOR I0:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO
RIG(I0,I0):=0.
RIG(1,1):=COEF*(1.0*BE+2.0*UMEP/BE)
RIG(1,2)  I:=COEF*(1.5*UMAP)
RIG(2,1)  I:=RIG(1,2)
RIG(2,2)  I:=COEF*(4./BE+2.0*UMEP*BE)
RIG(7,1)  I:=COEF*(-4.0*BE+UMEP/BE)
RIG(7,2)  I:=COEF*(1.5*UM3P)
RIG(8,1)  I:=-RIG(7,2)
RIG(8,2)  I:=COEF*(2./BE-2.0*UMEP*BE)
RIG(7,7)  I:=-RIG(1,1)
RIG(7,8)  I:=-RIG(1,2)
RIG(8,7)  I:=-RIG(1,2)
RIG(8,8)  I:=RIG(2,2)
RIG(13,1) I:=COEF*(-2.0*BE-UMEP/BE)
RIG(14,1) I:=-RIG(1,2)
RIG(14,2) I:=COEF*(-2./BE-UMEP*BE)
RIG(13,2) I:=-RIG(1,2)
RIG(13,7) I:=COEF*(2.0*BE-2.0*UMEP/BE)
RIG(13,8) I:=RIG(7,2)
RIG(14,7) I:=RIG(8,1)
RIG(14,8) I:=COEF*(-4./BE+UMEP*BE)
RIG(13,13) I:=RIG(1,1)
RIG(13,14) I:=RIG(1,2)
RIG(14,13) I:=RIG(1,2)
RIG(14,14) I:=RIG(2,2)
RIG(19,1) I:=COEF*(2.0*BE-2.0*UMEP/BE)
RIG(19,2) I:=RIG(8,1)
RIG(20,1) I:=RIG(7,2)
RIG(20,2) I:=RIG(14,8)
RIG(19,7) I:=RIG(13,1)
RIG(19,8) I:=RIG(1,2)
RIG(20,7) I:=RIG(1,2)
RIG(20,8) I:=RIG(14,2)
RIG(19,13) I:=RIG(7,1)
RIG(19,14) I:=RIG(7,2)
RIG(20,13) I:=RIG(8,1)
RIG(20,14) I:=RIG(8,2)
RIG(19,19) I:=RIG(1,1)
RIG(19,20) I:=-RIG(1,2)
RIG(20,19) I:=RIG(19,20)
RIG(20,20) I:=RIG(2,2)
RE2:=BE*BE
REM2:=1./BE2
RIG(3,3) I:=(4.0*(RE2+REM2)+0.2*(14.-4.0*ANU))
RIG(3,4) I:=(2.0*REM2+0.2*(1.+4.0*ANU))*B
RIG(3,5) I:=-2.0*BE2+0.2*(1.+4.0*ANU)*A
RIG(4,3) I:=RIG(3,4)
RIG(4,4) I:=(4./3.0*REM2+4./15.0*(1.-ANU))*B*B
RIG(4,5) I:=-ANU*A*B
RIG(5,3) I:=RIG(3,5)
RIG(5,4) I:=RIG(4,5)
RIG(5,5) I:=(4./3.0*BE2+4./15.0*(1.-ANU))*A*A
RIG(9,3) I:=-2.0*(2.0*BE2-REM2)-0.2*(14.-4.0*ANU)
RIG(9,4) I:=-(-REM2+0.2*(1.+4.0*ANU))*B
RIG(9,5) I:=(2.0*BE2+0.2*(1.-ANU))*A
RIG(10,3) I:=RIG(9,4)
RIG(10,4) I:=(2./3.0*REM2-4./15.0*(1.-ANU))*B*B
RIG(10,5) I:=0.
RIG(11,3) I:=-RIG(9,5)
RIG(11,4) I:=0.
RIG(11,5) I:=(2./3.0*BE2-1./15.0*(1.-ANU))*A*A
RIG(9,9) I:=RIG(3,3)
RIG(9,10) I:=RIG(3,4)
RIG(9,11) I:=-RIG(3,5)
RIG(10,9) I:=RIG(9,10)

```

EMDEPT

EMDPF

```

2
RIG(10,10) :=RIG(4,4)
RIG(10,11) := -RIG(4,5)
RIG(11,9) :=RIG(9,11)
RIG(11,10) :=RIG(10,11)
RIG(11,11) :=RIG(5,5)
RIG(15,3) :=-2.*(BE2+BE^2)+1./5.*(14.-4.*ANU)
RIG(15,4) :=(-BE^2+1./5.*(1.-ANU))*B
RIG(15,5) :=(BE2-0.2*(1.-ANU))*A
RIG(16,3) :=-RIG(15,4)
RIG(16,4) :=(1./3.*BE^2+1./15.*(1.-ANU))*B*B
RIG(16,5) :=0.
RIG(17,3) :=-RIG(15,5)
RIG(17,4) :=0.
RIG(17,5) :=(1./3.*BE2+1./15.*(1.-ANU))*A*A
RIG(15,10) :=-(2.*BE^2+0.2*(1.-ANU))*B
RIG(15,11) :=(BE2-0.2*(1.+4.*ANU))*A
RIG(16,9) :=-RIG(15,10)
RIG(16,10) :=(2./3.*BE^2-1./15.*(1.-ANU))*B*B
RIG(16,11) :=0.
RIG(17,9) :=RIG(15,11)
RIG(17,10) :=0.
RIG(17,11) :=(2./3.*BE2-4./15.*(1.-ANU))*A*A
RIG(15,15) :=RIG(3,3)
RIG(15,16) :=-RIG(3,4)
RIG(15,17) :=-RIG(3,5)
RIG(16,15) :=RIG(15,16)
RIG(16,16) :=RIG(4,4)
RIG(16,17) :=RIG(4,5)
RIG(17,15) :=RIG(15,17)
RIG(17,16) :=RIG(16,17)
RIG(17,17) :=RIG(5,5)
RIG(21,3) :=2.*(BE2-2.*BE^2)-0.2*(14.-4.*ANU)
RIG(15,9) :=RIG(21,3)
RIG(21,4) :=-(2.*BE^2+0.2*(1.-ANU))*B
RIG(21,5) :=(-BE2+0.2*(1.+4.*ANU))*A
RIG(22,3) :=-RIG(21,4)
RIG(22,4) :=(2./3.*BE^2-1./15.*(1.-ANU))*B*B
RIG(22,5) :=0.
RIG(23,3) :=RIG(21,5)
RIG(23,4) :=0.
RIG(23,5) :=(2./3.*BE2-4./15.*(1.-ANU))*A*A
RIG(21,9) :=RIG(15,3)
RIG(21,10) :=RIG(15,4)
RIG(21,11) :=-RIG(15,5)
RIG(22,9) :=-RIG(21,10)
RIG(22,10) :=RIG(16,4)
RIG(22,11) :=0.
RIG(23,9) :=RIG(15,5)
RIG(23,10) :=0.
RIG(23,11) :=RIG(17,5)
RIG(21,15) :=RIG(9,3)
RIG(21,16) :=-RIG(9,4)
RIG(21,17) :=-RIG(9,5)
RIG(22,15) :=RIG(21,16)
RIG(22,16) :=RIG(10,4)
RIG(22,17) :=0.
RIG(23,15) :=-RIG(21,17)
RIG(23,16) :=0.
RIG(23,17) :=RIG(11,5)
RIG(21,21) :=RIG(3,3)
RIG(21,22) :=-RIG(3,4)
RIG(21,23) :=RIG(3,5)
RIG(22,21) :=RIG(21,22)
RIG(22,22) :=RIG(4,4)
RIG(22,23) :=-RIG(4,5)
RIG(23,21) :=RIG(21,23)

```

```

RIG(23,22 ):=RIG(22,23)
RIG(23,23 ):=RIG(5,5)
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 10 DO
FOR L:=3 STEP 1 UNTIL 5 DO
FOR K:=3 STEP 1 UNTIL 5 DO
RFGIN
CASE (I-1)OF
RFGIN
RFGIN LL:=L;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+6;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+6;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K ;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+12;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+12;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+18;END#
END#
RIG(LL,KK):=RIG(LL,KK)*COEF*TT*TT/AB#
END#
RIG(6,6):=NORI(I1);
RIG(12,12):=NORI(I2);
RIG(18,18):=NORI(I3);
RIG(24,24):=NORI(I4);
ROT(1,3):=(DY1*OZ4-OZ1*DY4)/AB#
ROT(2,3):=(DX4*OZ1-OX1*OZ4)/AB#
ROT(3,3):=(DX1*OY4-OY1*DX4)/AB#
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
FOR IQ:=1 STEP 1 UNTIL 3 DO
RFGIN
ROT(IP+3,IQ+3):=ROT(IP,IQ);
ROT(IP+3,IQ):=0.;
ROT(IP,IQ+3):=0.;
END#
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 10 DO
RFGIN
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
RFGIN
TEMP(J,K):=0.;
FOR L:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
RFGIN
CASE (I-1)OF
RFGIN
RFGIN LL:=L;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+6;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+6;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K ;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+12;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+6;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+12;END#
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+18;END#
END#
TEMP(J,K):=TEMP(J,K)+ROT(J,L)*RIG(LL,KK);
END#
END#
FOR L:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
RFGIN
CASE (I-1)OF
RFGIN
RFGIN LL:=L;KK:=K;END#
RFGIN LL:=L+6;KK:=K;END#

```

```

RFGIN LL:=L+6;KK:=K+6;END; 5
BFGIN LL:=L+12;KK:=K  ;END; 6
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+6;END; 6
RFGIN LL:=L+12;KK:=K+12;END; 6
RFGIN LL:=L+18;KK:=K;END; 6
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+6;END; 6
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+12;END; 6
RFGIN LL:=L+18;KK:=K+18;END 6
END; 6
RIG(LL,KK):=0.; 5
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
RIG(LL,KK):=RIG(LL,KK)+TEMP(L,J)*ROT(K,J);
END;
END; 4
KK:=1; 3
FOR I:=KK STEP 1 UNTIL 24 DO
RFGIN
FOR J:=KK STEP 1 UNTIL 24 DO 3
RFGIN
RIG(I,J):=RIG(J,I) 4
END; KK:=KK+1
END; 4
END; 3
FIN:END. 2

```

7.3 (Ver 3.3.1 e 3.3.2) Apêndice 3

A seguir temos as "procedures" utilizadas na montagem do elemento HIBRIDO.

Os simbolos mais utilizados são :

- EE - Módulo de Young
- ANU - Coeficiente de Poisson
- TT - espessura da lâmina
- SXX - σ_x
- SYX - σ_y
- SXY - σ_{xy}
- MXX - M_x
- MYX - M_y
- MXY - M_{xy}
- QX - Q_x
- QY - Q_y
- HF - matriz H (elemento híbrido para placas)
- HP - matriz H_p (elemento híbrido para placas)
- GF - matriz G_p (elemento híbrido para placas)
- SE - matriz de rigidez do elemento híbrido para placas.
- G - matriz G (elemento híbrido para placas)
- TP - vetor de cargas equivalentes (elemento híbrido para placas)

BURROUGHS H6700 ALGOL COMPILER, VERSION 2.6.002.

FRIDAY, 01/24/75.

TESTE / KIFPRI
 =====

BEGIN

FILE LEFT(KIND=READER), IMPR(KIND=WRITER)

```

INTEGER NUMBER1
INTEGER KLM1
INTEGER NELC1
ARRAY H(1:17,1:17),G(1:17,1:12),GLOBAL(1:24)
INTEGER QNC,PNC
ARRAY
Q1(0:0),Q2(0:0),Q3(0:0),HF(1:17),
  NORI(0:1500),
  E(0:2000),
  F(0:2000),
  X(0:1500),
  Y(0:1500),
  Z(0:1500),
S1(15000),
  SL(0:0),
  RIG(1:32,1:32),
POIS(0:2000),
  REI(1:6),
  NDS(0:32),
  REAC(0:0),
  NDO(0:4000)
LABEL FIN
INTEGER I1[IPD,NFLEM,NPT,NAP,NEC,JF,I,J,K,L,N,NPC]
ARRAY TEMP(0:32,0:32)
INTEGER NPTD,NPTOC,NNC,K1,NEL,NN,N1,N2
INTEGER M1
REAL P1,P2,P3
INTEGER ARRAY ISEL(1:6)
ARRAY VEC(0:0),SEC(0:0)
PROCEDURE SUB(I,J):
INTEGER NEL
BEGIN
INTEGER I1,I2,I3,I4,I,J
REAL A,B,AA,BB,B2,B2,DX1,DY1,DZ1,DX4,DY4,DZ4,C,D,AB,BA:
I1:=NO(4*(NEL-1)+1)
I2:=NO(4*(NEL-1)+2)
I3:=NO(4*(NEL-1)+3)
I4:=NO(4*(NEL-1)+4)
DX1:=X(I2) - X(I1)
DY1:=Y(I2) - Y(I1)
DZ1:=Z(I2) - Z(I1)
DX4:=X(I4) - X(I1)
DY4:=Y(I4) - Y(I1)
DZ4:=Z(I4) - Z(I1)
A:=SQRT(DX1**2+DY1**2+DZ1**2)
B:=SQRT(DX4**2+DY4**2+DZ4**2)
AA:=A/B
BB:=B/A

```

```

A2:=A9A/5.;
A2:=A9A/5.;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO
G(1,1):=0.;
G(1,4):=-A9A/3.;
G(1,7):=G(1,4);
G(1,10):=G(1,1);
G(2,2):=-A9A/3.;
G(2,5):=G(2,2);
G(2,8):=-G(2,2);
G(2,11):=G(2,8);
G(3,3):=2.;
G(3,6):=-2.;
G(3,9):=2.;
G(3,12):=-2.;
G(4,1):=-A2;
G(4,6):=A2;
G(4,7):=G(4,4)*2.;
G(4,10):=-G(4,7);
G(5,2):=-A2;
G(5,8):=G(5,2)*2.;
G(5,4):=-G(5,5);
G(5,11):=-G(5,2);
G(5,21):=A2/2.;
G(5,3):=-A9A/3.;
G(5,4):=A9A/2.;
G(5,5):=-G(5,2);
G(5,6):=-G(5,3);
G(5,7):=G(5,4);
G(5,8):=G(5,2);
G(5,9):=G(5,6);
G(5,11):=G(5,5);
G(5,12):=G(5,3);
G(7,1):=A2/2.;
G(7,3):=-A9A/3.;
G(7,4):=-G(7,1);
G(7,5):=G(7,3);
G(7,7):=G(7,1);
G(7,8):=A9A/2.;
G(7,9):=-G(7,5);
G(7,10):=G(7,3);
G(7,11):=G(7,8);
G(7,12):=G(7,9);
G(8,2):=G(4,1);
G(8,3):=8;
G(8,5):=G(4,4);
G(8,6):=-8;
G(8,8):=G(3,2);
G(8,9):=G(3,3);
G(8,11):=G(3,5);
G(8,12):=G(3,5);
G(9,1):=G(5,2);
G(9,3):=A;
G(9,4):=G(5,11);
G(9,5):=-A;
G(9,7):=G(9,1);
G(9,9):=G(9,3);
G(9,10):=G(9,4);
G(9,12):=-A;
C:=A9A/12.;
D:=-9A/12.;

```

```

AA:=A**2/5.;
AA:=A**4/5.;
G(10.1):=-3;
G(10.4):=0;
G(10.7):=6(10.4)*3.;
G(10.10):=-6(10.7);
G(11.2):=-6;
G(11.5):=6(11.2)*3.;
G(11.8):=-6(11.5);
G(11.11):=-6(11.2);
G(12.6):=A**4.;
G(12.7):=A**2.;
G(12.9):=A**4;
G(12.10):=A**4;
G(12.12):=-6(12.9);
G(13.5):=A**4;
G(13.6):=6(12.12);
G(13.8):=A**2.;
G(13.9):=6(12.9);
G(13.11):=A**3.;
G(14.2):=A**3/35.;
G(14.3):=-3.*A**7/20.;
G(14.6):=AA;
G(14.8):=-6(14.2);
G(14.9):=-6(14.3);
G(14.7):=AA**2;
G(14.8):=A**3/20.;
G(14.9):=7.*A**3/20.;
G(14.11):=-6(14.3);
G(14.12):=-6(14.9);
G(15.1):=A**3/30.;
G(15.3):=-3.*A**4/20.;
G(15.6):=-A**3/20.;
G(15.9):=-7.*A**3/20.;
G(15.7):=-6(15.9);
G(15.8):=A**2.;
G(15.9):=-6(15.6);
G(15.10):=-6(15.1);
G(15.11):=AA;
G(15.12):=-6(15.3);
G(15.1):=-2.*A**3/15.;
G(16.3):=3.*A**2/5.;
G(16.6):=A**3/5.;
G(16.6):=-3.*A**2/5.;
G(16.7):=-6(16.6);
G(16.9):=-6(16.6);
G(16.10):=-6(16.1);
G(16.12):=-6(16.3);
G(17.2):=-2.*A**3/15.;
G(17.3):=3.*A**2/5.;
G(17.5):=2.*A**3/15.;
G(17.6):=-6(17.3);
G(17.8):=-A**3/5.;
G(17.9):=3.*A**2/5.;
G(17.11):=-6(17.3);
G(17.12):=-6(17.9);
END;

```

```

PROCEED TO 411(NFL);
INTEGER NBL;
BEGIN
  INTEGER I, J, L, M, KK;

```

```

REAL DY4;
REAL DX1,DY1,DZ1,DX4,DY4,A,B,AB,BP,EE,TT,ANU ,V,D,P,R,VH,VA,VC,DET,COEF;
REAL C;
ARRAY S(1:11,1:8), F(1:5,1:6)
IY:=500169*(DEI-1)+11;
IZ:=500169*(DEI-1)+21;
I3:=500169*(DEI-1)+31;
I4:=500169*(DEI-1)+41;
DX1:=X(IZ)- X(I11);
DY1:=Y(IZ)- Y(I11);
DZ1:=Z(IZ)- Z(I11);
DX4:=X(I4)- X(I11);
DY4:=Y(I4)- Y(I11);
DZ4:=Z(I4)- Z(I11);
A:=SQRT(DX1**2+DY1**2+DZ1**2);
S:=SQRT(DX4**2+DY4**2+DZ4**2);
EE:=E(DEL);
TT:=T(DEL);
ANU:=PUS(DEL);
B:=1.-ANU**2;
V:=2.*(1.+ANU);
A4:=A**4;
AB:=A**2*B;
C:=6*B**2;
D:=2*B**3;
E:=B**3*VA;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
F(I,J):=0.;
F(1,1):=(12.-5.*ABD*ANU)/(D*AP);
F(1,2):=(7.*ABD)/(D*AH);
F(1,3):=(-35.-30.*AD*ANU)/(D*C);
F(1,4):=-5.*AD/(D*H);
F(1,5):=-5./ (D**3);
F(1,7):=-5.*ABD/(D*C);
F(2,2):=F(1,1);
F(2,4):=F(1,7);
F(2,5):=(-35.-30*ABD*ANU)/(D*H);
F(2,6):=F(1,5);
F(2,7):=-5./ (D*C);
F(3,3):=7./ (V*AH);
F(3,6):=-5./ (V*C);
F(3,9):=-5./ (V**3);
F(4,4):=(142.-100.*ANU*ANU)/(D*H);
F(4,7):=(12.*ABD)/(D*H);
F(5,5):=(142.-100.*ANU*ANU)/(D*H);
F(5,6):=(12.*ABD)/(D*H);
F(6,6):=12./ (D*H);
F(7,7):=12./ (D*H);
F(8,8):=12./ (V*H);
F(8,9):=12./ (V*H);
F(1,10):=30./A;
F(2,11):=30./A;
F(4,10):=-100./ (A**2);
F(5,11):=-100./ (A**2);
F(10,10):=100./ (A**2**2);
F(11,11):=100./ (A**2**2);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
F(I,J):=F(I,J);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 5 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
F(I,J):=0.;

```



```

V4:=V8444C/144.;
V5:=P8444A0)/140.+V8;
V6:=P8444B0)/140.+V8;
DE1:=VA*VC-V8*V6;
F(1,1):=VC/DE1;
F(1,2):=-V4/DE1;
F(2,1):=F(1,2);
F(2,2):=VA/DE1;
C(3,4):=164.7(444C00);
F(3,4):=F(3,3)*A90;
F(4,3):=F(3,4);
F(4,4):=F(3,4);
F(5,5):=180.7(V8444508);
F(5,6):=180.7(V844455);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
S(I,J):=0.;
S(1,1):=-A84/5.;
S(1,2):=-A844A1/5.;
S(1,3):=-A84/4.;
S(2,1):=-A844A1/5.;
S(2,2):=-A84/5.;
S(2,4):=-A84/4.;
S(3,1):=S(2,4);
S(3,2):=S(2,4);
S(4,2):=A844A1;
S(4,3):=A/2.;
S(5,1):=A844A1;
S(5,4):=A/2.;
S(6,1):=A;
S(6,3):=S(5,4);
S(7,2):=A;
S(7,4):=S(4,3);
S(8,1):=S(4,3);
S(8,2):=S(4,3);
S(9,1):=S(5,4);
S(9,2):=S(5,4);
S(10,2):=-A;
S(11,1):=-A84;
S(3,5):=-A84/5.;
S(3,6):=-A84/5.;
S(4,5):=A;
S(4,6):=A;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
BEGIN
L:=J+1;
H(I,L):=0.;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
H(I,L):=H(I,L)-S(I,K)*F(K,J);
H(L,1):=H(I,L);
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 11 DO
FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
A=H(I,J);
L:=K+1;
H(I,J):=H(I,J)-H(I,L)*S(J,KK);
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO
BEGIN
M:=I+1;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 DO BEGIN

```

```

I:=J+11;
H(L,J):=F(I,J);
END;
COEF:=PI*3/12.;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
H(I,J):=H(I,J)*COEF;
END;

```

```

DEFINITION RIFPMI (NEL);
INTEGER NEL;
REAL;
INTEGER I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,I9,I,J,L,K,KK,LL;

```

```

REAL F;
REAL A,B,ANU,AB,ABB,ABA,EE,IT,DX1,DY1,DZ1,DX4,DY4,DZ4,C,D,HH,GG,
AUXILIARY;

```

```

ARRAY Z(1:5,1:5),TEMP(1:6,1:6),GH(1:12,1:17);
ARRAY S(1:12,1:12);
COMMON F100(5,5);

```

```

I1:=N00(4*(NEL-1) + 1);
I2:=N00(4*(NEL-1) + 2);
I3:=N00(4*(NEL-1) + 3);
I4:=N00(4*(NEL-1) + 4);
DX:=X(I2) - X(I1);
DY:=Y(I2) - Y(I1);
DZ:=Z(I2) - Z(I1);
DX4:=X(I4) - X(I1);
DY4:=Y(I4) - Y(I1);
DZ4:=Z(I4) - Z(I1);
A:=SQRT (DX**2 + DY**2 + DZ**2);
B:=SQRT (DX4**2 + DY4**2 + DZ4**2);

```

```

AB:=A*B;
Z(I1,I1):=X1/A;
Z(I2,I1):=Y1/A;
Z(I3,I1):=Z1/A;
Z(I1,I2):=X4/A;
Z(I2,I2):=Y4/A;
Z(I3,I2):=Z4/A;
Z(I1,I3):=(DY*DZ4-DZ*DY4)/AB;
Z(I2,I3):=(DX*DZ1-DX1*DZ4)/AB;
Z(I3,I3):=(DX*DY4-DY*DX4)/AB;
ANU:=PI*(NEL);
EE:=E(NEL);
IT:=I(NEL);

```

```

FOR I2:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO
FOR I0:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO
RIF(I2,I0):=0.;
AB:=A/B;
ABA:=B/A;
C:=(12.-3.*AB**2)*EE*IT/(36.*(1.-ANU**2));
D:=EE*IT/(6.*(1.-ANU));
E:=EE*IT/(6.*(1.-ANU));
F:=(3.*ANU-1.)*EE*IT/(6.*(1.-ANU**2));
GG:=(6.+3.*AB**2)*EE*IT/(36.*(1.-ANU**2));

```

```

R1S(1,1):=R1S(7,7):=R1S(13,13):=R1S(19,19):=C*ABA+D*ABB;
R1S(1,2):=R1S(13,14):=R1S(2,19):=R1S(7,20):=-H;
R1S(7,3):=R1S(14,20):=R1S(2,13):=R1S(1,14):=-HH;
R1S(1,7):=R1S(13,18):=-C*ABA+D*ABB;
R1S(1,8):=R1S(7,14):=R1S(2,19):=R1S(13,20):=F;
R1S(2,7):=R1S(8,13):=R1S(14,19):=R1S(1,20):=-F;
R1S(1,13):=R1S(7,18):=-(GG*ABA+D*ABB);
R1S(7,13):=R1S(1,18):=GG*ABA-D*ABB;

```

EHEPT

```
RTS(2,2):=RTS(K,K):=RTS(14,14):=RTS(20,20):=C9A8B+D99BA;  
RTS(2,3):=RTS(1,20):=659A43+099BA;  
RTS(2,14):=RTS(1,20):=-069A8B+099BA);  
RTS(K,14):=RTS(2,20):=-C9A8B+099BA;  
FOR I:=2 STEP 1 UNTIL 24 DO  
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL I-1 DO  
RTS(1, J):=RTS(J,1);  
RTS(1,0):  
RTS(0,1):  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO  
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO  
RTS(I, J):=0;  
FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO  
RTS(I, J):=5+(I, J)+6*(KK,1)*6*(KK, J);  
END;  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO  
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO  
RTS(I, J):=0;  
FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO  
RTS(I, J):=SE(I, J)+6*(I, KK)*6*(KK, J);  
END;  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 10 DO  
FOR L:=3 STEP 1 UNTIL 5 DO  
FOR K:=3 STEP 1 UNTIL 5 DO  
CASE (I-1) OF  
RTS(I, L):=L; KK:=K; IP:=L-2; IQ:=K-2; END;  
RTS(I, L):=L+5; KK:=K; IP:=L+1; IQ:=K-2; END;  
RTS(I, L):=L+5; KK:=K+5; IP:=L+1; IQ:=K+1; END;  
RTS(I, L):=L+12; KK:=K; IP:=L+4; IQ:=K-2; END;  
RTS(I, L):=L+12; KK:=K+5; IP:=L+4; IQ:=K+1; END;  
RTS(I, L):=L+12; KK:=K+12; IP:=L+4; IQ:=K+4; END;  
RTS(I, L):=L+18; KK:=K; IP:=L+7; IQ:=K-2; END;  
RTS(I, L):=L+18; KK:=K+5; IP:=L+7; IQ:=K+1; END;  
RTS(I, L):=L+18; KK:=K+12; IP:=L+7; IQ:=K+4; END;  
RTS(I, L):=L+18; KK:=K+18; IP:=L+7; IQ:=K+7; END;  
END;  
END;  
END;  
END;  
END;  
RTS(K, K):=NOR(I(1));  
RTS(12, 12):=NOR(I(12));  
RTS(18, 18):=NOR(I(18));  
RTS(24, 24):=NOR(I(16));  
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO  
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO  
RTS(I, J):=RTS(J, I);  
FOR IP:=2 STEP 8 UNTIL 24 DO  
FOR IQ:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO  
RTS(IP, IQ):=RTS(IP, IQ);  
FOR IP:=3 STEP 6 UNTIL 24 DO  
FOR IQ:=1 STEP 1 UNTIL 24 DO  
RTS(IP, IQ):=RTS(IP+2, IQ);  
RTS(IP+2, IQ):=RTS(IP, IQ);  
RTS(IP, IQ):=4*AL(I, IQ);  
END;  
FOR IQ:=3 STEP 6 UNTIL 24 DO
```

EHPDF

3
3
3
3
3
4
3
3
3
3
3
3
3
3
3

```

FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 24 00
BEGIN
AUXILIAR:=RIG(IP,IP+2);
RIG(IP,IP+2):=-RIG(IP,IP);
RIG(IP,IP):=AUXILIAR;
END;
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 00
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 00
BEGIN
RIG(IP+3,IP+3):=RIG(IP,IP);
RIG(IP+3,IP):=0.;
RIG(IP,IP+3):=0.;
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 10 00
BEGIN
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
BEGIN
TEMP(J,K):=0.;
FOR L:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
BEGIN
CASE (I-1)OF
BEGIN
LL:=L;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+5;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+5;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K+12;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+12;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+14;END;
END;
TEMP(J,K):=TEMP(J,K)+RIG(LL,LL)*RIG(LL,KK);
END;
END;
FOR L:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
BEGIN
CASE (I-1)OF
BEGIN
LL:=L;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+5;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+5;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+12;KK:=K+12;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+5;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+12;END;
BEGIN LL:=L+1;KK:=K+14;END;
END;
RIG(LL,KK):=0.;
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
RIG(LL,KK):=RIG(LL,KK)+TEMP(LL,J)*RIG(K,J);
END;
END;
KK:=1;
FOR I:=KK STEP 1 UNTIL 24 00
BEGIN
FOR J:=KK STEP 1 UNTIL 24 00
BEGIN

```

```

          DT(I,J) = 16(J,I)
          ENO = KK = KK + 1
          ENO
          ENO
    2  QUADREF = VTCAR(NEL,JJ)
      INTEGER JEL,JJ
      REAL
      INTEGER I1,I2,I3,I4,I5,I6,I,J,KK
      REAL DX1,DY1,DZ1,DX4,DY4,DZ4
      REAL QZ,OX,OY,OX,OT,ANG,A,B,AB,BB,C,R,RIV
      REAL ROT(1:3,1:3),GF(1:12),GH(1:12,1:17),CARGA(1:24)
      REAL TR(1:12)
      I1 = NO(1) * (NEL - 1) + 1
      I2 = NO(1) * (NEL - 1) + 2
      I3 = NO(1) * (NEL - 1) + 3
      I4 = NO(1) * (NEL - 1) + 4
      OX1 = X(I2) - X(I1)
      OY1 = Y(I2) - Y(I1)
      OZ1 = Z(I2) - Z(I1)
      OX4 = X(I4) - X(I1)
      OY4 = Y(I4) - Y(I1)
      OZ4 = Z(I4) - Z(I1)
      A = SQRT(OX1**2 + OY1**2 + OZ1**2)
      B = SQRT(OX4**2 + OY4**2 + OZ4**2)
      AB = A * B
      C = A * B * 2
      R = 0.0000001
      W = 0.00000001
      ROT(1,1) = OX1/A
      ROT(2,1) = OY1/A
      ROT(3,1) = OZ1/A
      ROT(1,2) = OX4/B
      ROT(2,2) = OY4/B
      ROT(3,2) = OZ4/B
      RV(1,3) = (OY1 * OZ4 - OZ1 * OY4) / AB
      RV(2,3) = (OX4 * OZ1 - OX1 * OZ4) / AB
      RV(3,3) = (OX1 * OY4 - OY1 * OX4) / AB
      FOR I = 1 STEP 1 UNTIL 3 DO
      FOR J = 1 STEP 1 UNTIL 3 DO
      REAL
      ROT(I*3+1,J) = ROT(I*3,J)
      ROT(I*3+2,J) = 0.
      ROT(I*3+3,J) = 0.
      REAL
      D = 0.1 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,1) +
      0.3 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,2) +
      0.5 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,3) +
      0.7 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,4) +
      0.9 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,5) +
      1.1 * (NEL * (JJ - 1) + NEL) * ROT(1,6)
      FF = 1 / NEL
      TT = 1 / NEL
      A = 100 * M(NEL)
      FOR I = 1 STEP 1 UNTIL 17 DO
      G(I) = 0.
      FOR J = 1 STEP 1 UNTIL 12 DO
      G(I) = 0.
      RIV = 0.2 * (1. + A * J) * 12.7 * (FF * TT ** 3)
      F(I) = 0.00000001 * RIV * 25
      F(I) = 0.0000000001 * RIV * 5
      F(I) = 0.0000000001 * RIV * 8
      W(I) = 0.00000001 * RIV * 4

```

```

NF(13)=NF(12);
NF(16)=0000001978.;
NF(17)=0000001978.;
NF(18)=00000012.;
NF(19)=00000012.;
NF(71)=00000012.;
NF(81)=NF(5);
NF(101)=NF(71);
NF(121)=NF(61);
DO (PFL);
GOTO (PFL);
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO BEGIN
  NF(I,J)=0.;

```

3

```

FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
NF(1,J)=NF(1,J)+5(KK,1)*NF(KK,J);
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO
BEGIN

```

3

```

  TP(1)=0.;
  FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
  TP(1)=TP(1)+5(KK,1)*NF(KK);
  TP(1)=TP(1)+NF(1);
END;

```

3

```

CARGA(1)=00000004.;
CARGA(2)=00000004.;
CARGA(7)=00000004.;
CARGA(8)=00000004.;
CARGA(13)=00000004.;
CARGA(14)=00000004.;
CARGA(15)=00000004.;
CARGA(20)=00000004.;

```

3

EHERT

```

CARGA(3)=TP(3);
CARGA(4)=TP(4);
CARGA(5)=TP(1);
CARGA(6)=0.;
CARGA(9)=TP(8);
CARGA(10)=TP(5);
CARGA(11)=TP(4);
CARGA(12)=0.;
CARGA(16)=TP(4);
CARGA(18)=TP(8);
CARGA(17)=TP(7);
CARGA(19)=0.;
CARGA(21)=TP(12);
CARGA(22)=TP(11);
CARGA(23)=TP(10);
CARGA(24)=0.;

```

EHPDE

```

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 4 DO
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL 5 DO BEGIN
  COLLOCAL(6*(I-1)+J)=0;
  FOR K:=1 STEP 1 UNTIL 5 DO
  COLLOCAL(6*(I-1)+J)=COLLOCAL(6*(I-1)+J)+90T(J,K)*CARGA(6*(I-1)+K);
END;
END;

```

3

3

```

DO (CARGA) (CARGA) (CARGA);
DELETE ALL;
BEGIN
  REAL 04,05;

```

2

INTER 11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110,111,112,113,114,115,116,117,118,119,120,121,122,123,124,125,126,127,128,129,130,131,132,133,134,135,136,137,138,139,140,141,142,143,144,145,146,147,148,149,150,151,152,153,154,155,156,157,158,159,160,161,162,163,164,165,166,167,168,169,170,171,172,173,174,175,176,177,178,179,180,181,182,183,184,185,186,187,188,189,190,191,192,193,194,195,196,197,198,199,200,201,202,203,204,205,206,207,208,209,210,211,212,213,214,215,216,217,218,219,220,221,222,223,224,225,226,227,228,229,230,231,232,233,234,235,236,237,238,239,240,241,242,243,244,245,246,247,248,249,250,251,252,253,254,255,256,257,258,259,260,261,262,263,264,265,266,267,268,269,270,271,272,273,274,275,276,277,278,279,280,281,282,283,284,285,286,287,288,289,290,291,292,293,294,295,296,297,298,299,300,301,302,303,304,305,306,307,308,309,310,311,312,313,314,315,316,317,318,319,320,321,322,323,324,325,326,327,328,329,330,331,332,333,334,335,336,337,338,339,340,341,342,343,344,345,346,347,348,349,350,351,352,353,354,355,356,357,358,359,360,361,362,363,364,365,366,367,368,369,370,371,372,373,374,375,376,377,378,379,380,381,382,383,384,385,386,387,388,389,390,391,392,393,394,395,396,397,398,399,400,401,402,403,404,405,406,407,408,409,410,411,412,413,414,415,416,417,418,419,420,421,422,423,424,425,426,427,428,429,430,431,432,433,434,435,436,437,438,439,440,441,442,443,444,445,446,447,448,449,450,451,452,453,454,455,456,457,458,459,460,461,462,463,464,465,466,467,468,469,470,471,472,473,474,475,476,477,478,479,480,481,482,483,484,485,486,487,488,489,490,491,492,493,494,495,496,497,498,499,500,501,502,503,504,505,506,507,508,509,510,511,512,513,514,515,516,517,518,519,520,521,522,523,524,525,526,527,528,529,530,531,532,533,534,535,536,537,538,539,540,541,542,543,544,545,546,547,548,549,550,551,552,553,554,555,556,557,558,559,560,561,562,563,564,565,566,567,568,569,570,571,572,573,574,575,576,577,578,579,580,581,582,583,584,585,586,587,588,589,590,591,592,593,594,595,596,597,598,599,600,601,602,603,604,605,606,607,608,609,610,611,612,613,614,615,616,617,618,619,620,621,622,623,624,625,626,627,628,629,630,631,632,633,634,635,636,637,638,639,640,641,642,643,644,645,646,647,648,649,650,651,652,653,654,655,656,657,658,659,660,661,662,663,664,665,666,667,668,669,670,671,672,673,674,675,676,677,678,679,680,681,682,683,684,685,686,687,688,689,690,691,692,693,694,695,696,697,698,699,700,701,702,703,704,705,706,707,708,709,710,711,712,713,714,715,716,717,718,719,720,721,722,723,724,725,726,727,728,729,730,731,732,733,734,735,736,737,738,739,740,741,742,743,744,745,746,747,748,749,750,751,752,753,754,755,756,757,758,759,760,761,762,763,764,765,766,767,768,769,770,771,772,773,774,775,776,777,778,779,780,781,782,783,784,785,786,787,788,789,790,791,792,793,794,795,796,797,798,799,800,801,802,803,804,805,806,807,808,809,810,811,812,813,814,815,816,817,818,819,820,821,822,823,824,825,826,827,828,829,830,831,832,833,834,835,836,837,838,839,840,841,842,843,844,845,846,847,848,849,850,851,852,853,854,855,856,857,858,859,860,861,862,863,864,865,866,867,868,869,870,871,872,873,874,875,876,877,878,879,880,881,882,883,884,885,886,887,888,889,890,891,892,893,894,895,896,897,898,899,900,901,902,903,904,905,906,907,908,909,910,911,912,913,914,915,916,917,918,919,920,921,922,923,924,925,926,927,928,929,930,931,932,933,934,935,936,937,938,939,940,941,942,943,944,945,946,947,948,949,950,951,952,953,954,955,956,957,958,959,960,961,962,963,964,965,966,967,968,969,970,971,972,973,974,975,976,977,978,979,980,981,982,983,984,985,986,987,988,989,990,991,992,993,994,995,996,997,998,999,1000.

2

```

SXX,SYY,SXY, SXX,SYY,SXY:
APPAI = (111:5,1:6),V(1:24),J(1:24),I(1:3,1:5),O(1:12),Z(1:17),
DEFI(1:17):
LA=EL DO(12)*SF(6)INTS,PROXIMD
I1:=400I4*(NEL-1)+11:
I2:=400I4*(NEL-1)+21:
I3:=400I4*(NEL-1)+31:
I4:=400I4*(NEL-1)+41:
DX1:=X(I2)-X(I1)
DY1:=Y(I2)-Y(I1)
DZ1:=Z(I2)-Z(I1)
DX4:=X(I4)-X(I1)
DY4:=Y(I4)-Y(I1)
DZ4:=Z(I4)-Z(I1)
A1:=SQRT((DX1**2+DY1**2+DZ1**2))
A4:=SQRT((DX4**2+DY4**2+DZ4**2))
A0:=A**4
AN1:=PI*(NEL):
PE:=E(PEL):
TI:=I(NEL):
F1=(1.-1.99999999)*PEF/((1.-ANJ**2)*AB):
F2=(1.-1.99999999)*PEF/((1.-ANJ**2)*AB):
F3:=ANJ*PEF/((1.-ANJ**2)*AB):
A:=PEF/((1.-ANJ)*AB):
VZ:=0.0+2.*F:
A0:=2.966+F:
DO I1,11:=)X1/A:
DO I2,11:=)Y1/A:
DO I3,11:=)Z1/A:
DO I1,21:=)X4/A:
DO I2,21:=)Y4/A:
DO I3,21:=)Z4/A:
DO I1,31:=)DY1*DZ4-DZ1*DY4)/AB:
DO I2,31:=)DX4*DX1-DX1*DX4)/AB:
DO I3,31:=)DX1*DY4-DY1*DX4)/AB:
FOR IP:=1 STEP 1 UNTIL 3 00
FOR IQ:=1 STEP 1 UNTIL 3 00
DEFI:
DO I(IP+6, IQ+3):=DO I(IP, IQ):
DO I(IP+6, IQ-1):=0.:
DO I(IP-6, IQ+3):=0.:
END:
FOR NI:=1 STEP 1 UNTIL NEC 00
DEFI:
FOR JI:=1 STEP 1 UNTIL 5 00
DEFI:
VI(JI-1)=SL(10*PE*(N-1)+JF*(11-1)+JI):
VI(JI)=SL(10*PE*(N-1)+JF*(12-1)+JI):
VI(JI+1)=SL(10*PE*(N-1)+JF*(13-1)+JI):
VI(JI+4)=SL(10*PE*(N-1)+JF*(16-1)+JI):
END:
FOR LI:=1 STEP 1 UNTIL 6 00
DEFI:
HI(1)=0.:
HI(5)=0.:
HI(12)=0.:
HI(15)=0.:
FOR JI:=1 STEP 1 UNTIL 5 00
DEFI:
HI(1+JI)=HI(1)+DO I(JI,1)*V(JI):
HI(5+JI)=HI(5+JI)+DO I(JI,1)*V(JI+5):
HI(12+JI)=HI(12+JI)+DO I(JI,1)*V(JI+12):
HI(15+JI)=HI(15+JI)+DO I(JI,1)*V(JI+15):

```

3
3
3
4
4
4
5

```

END:
END:
WRITE (IMPR, <<<< " ELEMENTO", IS, " ESTADO DE CARGA", IS, "/>>, NEL, N)
FOR I1:=0.1.2.3.4 DO BEGIN
  X1:=CASE I1 OF (0.,1.,1.,0.,0.5);
  STA:=CASE I1 OF (0.,0.,1.,1.,0.5);
  T1(1,3):=-TE(1,1):=- (A/P(1.-TA)+A/P(1+TA))*A/6.;
  T1(1,4):=TE(1,4):=-TE(1,4):=TE(1,2):=-A*P(A/2.;
  T1(1,7):=-TE(1,7):=(A/P(1.-TA)+A/P(1+TA))*A/6.;
  T1(2,5):=-TE(2,3):=-TE(2,1):=TE(2,7):=-A*P(A/2.;
  T1(2,8):=-TE(2,2):=- (A/P(1.-X1)+A/P(1+X1))*A/6.;
  T1(2,4):=-TE(2,6):=- (A/P(1.-X1)+A/P(1+X1))*A/6.;
  T1(3,7):=TE(3,5):=-TE(3,3):=TE(3,1):=-A*P(A/4.;
  T1(3,8):=TE(3,6):=-TE(3,2):=TE(3,4):=-A*P(A/4.;
  KXX:=0;
  KYY:=0;
  KXY:=0;
  FOR J:=1 STEP 2 UNTIL 8 DO
    FSI:
    K:=CASE J DIV 2 OF (1,2,3,4);
    FOR L:=1,2 DO BEGIN
      KY:=K*TE(1,J+L-1.)*J*(5*(K-1)+L);
      KXY:=K*TE(2,J+L-1.)*J*(5*(K-1)+L);
      KX:=K*TE(3,J+L-1.)*J*(5*(K-1)+L);
    END;
    M(1):=M(5);
    M(2):=-M(4);
    M(3):=M(3);
    M(4):=-M(1);
    M(5):=-M(10);
    M(6):=M(8);
    M(7):=M(17);
    M(8):=-M(15);
    M(9):=M(15);
    M(10):=M(23);
    M(11):=-M(22);
    M(12):=M(21);
    M(13):=M(1);
    M(14):=M(1);
    VE(CAR,NEL,N);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO BEGIN
      ZZ(I):=0.;
    FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 12 DO
      ZZ(I):=ZZ(I)+M(I,KK)*Z(KK);
    END;
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
      ZZ(I):=ZZ(I)-M(I);
    FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO BEGIN
      MTA(I):=0.;
    FOR KK:=1 STEP 1 UNTIL 17 DO
      MTA(I):=MTA(I)+M(I,KK)*Z(KK);
    END;
    KX:=M*MTA(1)+M*MTA(4)+M*MTA(14)+
      M*MTA(5)+M*MTA(10)+M*MTA(20)+
      M*MTA(12)+M*MTA(15)+M*MTA(16)+M*MTA(17);
    KY:=M*MTA(7)+M*MTA(8)+M*MTA(17)+
      M*MTA(11)+M*MTA(18)+M*MTA(13)+M*MTA(20)+
      M*MTA(15)+M*MTA(16)+M*MTA(17);
    KXY:=M*MTA(3)+M*MTA(6)+M*MTA(9)+M*MTA(12)+
      M*MTA(12)+M*MTA(13)+M*MTA(16)+
      M*MTA(15)+M*MTA(18)+M*MTA(17)+M*MTA(20);
    KXX:=-KX+KYY;
  
```

EHEPT

EHPDE

3

```

X1:=BETA(6)-BETA(9)+AAXI*BETA(12)-AAXI*BETA(13)+AAXI*BETA(14)-2.*AAXI*BETA(17);
Y1:=BETA(7)-BETA(9)+BAXI*BETA(13)-BAXI*BETA(12)+AAXI*BETA(15)-2.*AAXI*BETA(16);
OX:=-OX;
OY:=-OY;
IF (IF USS & THEN GO TO SEQUINIE ELSE GO TO PROXIMO 1
SEQUINIE:WRITE(1,APR,<"NUMBER OF NO=">.15,X2,"SXX=">.F15.5,X2,"SYY=">.F15.5,
X2,"SXY=">.F15.5,X2,"OX=">.F15.5>.NO(4*(NFI-1)+1),SXX,SYY,SXY,OX);
WRITE(1,APR,<"NUMBER OF NO=">.15,X2,"MAX=">.F15.5,X2,"MY=">.F15.5,
X2,"MX=">.F15.5,X2,"OY=">.F15.5>.NO(4*(NFI-1)+1),MAX,MY,MX,OY);
GO TO XIRD;
XIRD:WRITE(1,APR,<"POINT CENTRAL" >.X2,"SXX=">.F15.5,X2,"SYY=">.F15.5,
X2,"SXY=">.F15.5,X2,"OX=">.F15.5>.SXX,SYY,SXY,OX);
WRITE(1,APR,<"POINT CENTRAL" >.X2,"MAX=">.F15.5,X2,"MY=">.F15.5,
X2,"MX=">.F15.5,X2,"OY=">.F15.5>.MAX,MY,MX,OY);
XIRD:END;
END;
END;
FIN:END.

```

4
3
2

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIMENTO PORTLAND. Vocabulário de teoria das estruturas. São Paulo, 1964.
2. CAVALHEIRO, O.P. Um estudo de elementos finitos híbridos para problemas de estado plano de deformações. Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS. Tese.
3. DALLY, J.W. & RILEY, W.F. Experimental stress analysis. New York, McGraw-Hill, 1965.
4. DAUGHTRIDGE Jr., A.S. General analysis of folded plates by the finite element method. Ann Arbor, Mich., University Microfilms, 1969.
5. FERRANTE, A.J. O método dos elementos finitos. Porto Alegre, UFRGS, 1972. Notas de aula.
6. FERRANTE, A.J. & BREBBIA, C.A. Finite Element Technique. Finite element method for engineers. Porto Alegre, UFRGS, 1964. cap.4.
7. LIMA, E.C.P. de Elementos finitos para flexão de placas com campo de tensões assumido. Rio de Janeiro, COPPE, 1972. Tese.
8. MARK, R. & RIERA, J.D. Photoelastic analysis of folded-plate structures. Journal of the Engineering Mechanics Division. New York, American Society of Civil Engineers, 93(4):79-93, aug. 1967.
9. PIAN, T.H.H. & TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua. International Journal of Numerical Methods in Engineering, Sussex, 1(1-4):3-28, 1969.
10. PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968.

11. SCORDELIS, A.C.; CROY, E.L.; Stubs, I.R. Experimental and analytical study of a folded plate. Journal of the Engineering Mechanics Division. New York, American Society of Civil Engineers, 87(8):139-60, dec. 1961.
12. TASK COMMITTEE ON FOLDED PLATE CONSTRUCTION. Report on folded plate construction. Journal of the Structural Division. New York, American Society of Civil Engineers, 89(6):365-406, dec. 1963.
13. TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1959.
14. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.e. New York, McGraw-Hill, 1971.