

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Teorema de Liouville para Inequações Diferenciais
Elípticas Homogêneas**

Dissertação de Mestrado

ANDRE RODRIGUES DA SILVA

Porto Alegre, 15 de julho de 2016

Dissertação submetida por Andre Rodrigues da Silva*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPGMat – UFRGS)

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo (PPGMap – UFRGS)

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (PPGMat – UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Dedicatória

Gostaria de oferecer este trabalho a meu pai Pedro (*in memoriam*), que sempre apostou no meu potencial, me incentivava nos caminhos que escolhia para minha vida e minha carreira e sempre foi uma referência pessoal para mim.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a minha família, especialmente a minha mãe Maria e a meu irmão Flávio por todo suporte psicológico e financeiro que me foi oferecido para que eu pudesse concretizar esta importante fase da minha vida.

Quero prestar minha gratidão também àqueles que conheci desde que ingressei na UFRGS em 2008. Agradeço ao meu orientador Prof. Leonardo Prange Bonorino por toda sua atenção, prestatividade e acessibilidade para me auxiliar na realização deste trabalho, além de sua paciência e compreensão pelas eventuais dificuldades que tive para concluí-lo. Agradeço também aos professores Jaime Bruck Ripoll por ter me apresentado o Prof. Leonardo para me orientar neste trabalho, Alveri Alves Sant'Anna que me deu a devida atenção e instrução quando tive problemas de saúde durante o curso de mestrado, e Luiz Fernando Carvalho da Rocha que foi um grande motivador para que eu ingressasse no mestrado.

Agradeço também a todos os colegas da graduação e pós-graduação, pela amizade que tive o prazer de criar e toda ajuda que me deram nas disciplinas que fomos colegas.

Enfim, só tenho gratidão por todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse realizar este sonho profissional e pessoal.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo de uma classe de teoremas, que são variações do clássico teorema de Liouville. Este estudo irá mostrar quando uma dada função $u = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ que satisfaça uma determinada inequação diferencial é constante, mostrando contraexemplos de quando as condições necessárias não são todas satisfeitas.

Abstract

In this work we present a study of a class of theorems, which are variations of the classical Liouville theorem. This study will show when a given function $u = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ satisfying a certain differential inequality is constant, showing counterexamples when the necessary conditions are not all satisfied.

Índice

Introdução	1
Preliminares	6
1.1 Pré-requisitos	6
1.2 Construção da função v	9
Provas dos Teoremas 1 e 2 e o Teorema 3	15
2.1 Provas dos Teoremas 1 e 2.....	15
2.1.1 Prova do Teorema 1	15
2.1.2 Prova do Teorema 2.....	16
2.2 Enunciado e Prova do Teorema 3	17
2.3 Prova da Exigência $\bar{u}(x) \geq v(x)$	20
Contraexemplos	23
3.1 Contraexemplo I.....	23
3.2 Contraexemplo II	27
3.3 Contraexemplo III.....	27
3.4 Contraexemplo IV.....	28
Referências Bibliográficas	29

Introdução

Consideremos a classe de teoremas de Liouville para soluções completas de inequações diferenciais elípticas homogêneas da forma

$$\operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Du|)Du\} \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Para desigualdades desse tipo, um número de resultados é conhecido. Por exemplo, uma solução fraca completa não-negativa $u = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da inequação harmônica

$$\Delta u \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^2$$

deve ser constante [1, p. 115]. Uma generalização para o operador p -Laplaciano também ocorre; isto é, uma solução fraca completa não-negativa de

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}\{|Du|^{p-2}Du\} \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^n$$

também deve ser constante, onde $p \geq n$. Para isso, veja Serrin e Zou [2] e, independentemente, Mitidieri e Pohozaev [3]. Estas afirmações foram generalizadas por Mitidieri e Pohozaev [4, 3]; eles provaram 2 (dois) casos principais. Primeiro deles, se

$$0 < \mathcal{A}(t) < C \quad (2)$$

para alguma constante positiva C e para todo $t \geq 0$, então qualquer solução fraca completa de (1) que seja limitada inferiormente deve ser constante para $n = 2$ (também para $n = 1$, mas isso é trivial). O exemplo mais importante nesse caso é a desigualdade da curvatura média

$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^2.$$

Para o segundo caso, eles descobriram uma versão mais generalizada de (1), na qual \mathcal{A} é agora dependente de um conjunto de variáveis x, u, Du . Seu principal resultado é que se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 s^{p-2} \leq \mathcal{A}(x, u, s) \leq c_2 s^{p-2}, \quad p > 1, \quad (3)$$

então qualquer solução fraca completa da inequação

$$\operatorname{div} \{ \mathcal{A}(x, u, Du) Du \} \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^n$$

que seja limitada inferiormente deve ser constante, onde $n \leq p$. Este resultado inclui o caso anterior para a desigualdade do p -Laplaciano.

Além do mais, em todos os casos acima, a restrição quanto a dimensão n é necessária, assim com a direção da desigualdade em (1).

Mais recentemente, Filippucci [5, Teorema 3.3] expande os teoremas de Mitidieri e Pohozaev, considerando a inequação

$$\operatorname{div} \{ h(x) g(u) \mathcal{A}(|Du|) Du \} \leq 0 \quad \text{no } \mathbb{R}^n$$

sob apropriadas condições sobre as funções g e h , e assumindo também para $t > 0$

$$c_1 t^{p-1} \leq t \mathcal{A}(t) \leq c_2 t^{p-1}, \quad p > 1.$$

Um outro caso de interesse, no qual o operador principal é a soma dos operadores p -Laplacianos de diferentes graus, foi obtido por D'Ambrósio.

O propósito deste trabalho é estudar uma classe de teoremas de Liouville estabelecido por J. Serrin em [9]. Isto nos permitirá expandir em alguns casos os

resultados de Mitidieri e Pohozaev, e de Filippucci (conforme Teoremas 1 e 2 abaixo). Por exemplo, mesmo para a inequação harmônica $\Delta u \leq 0$ temos a seguinte afirmação

Para a inequação harmônica $\Delta u \leq 0$ o domínio de u no enunciado do Teorema 1 pode omitir qualquer conjunto finito de pontos, sem afetar a conclusão, onde $n = 2$.

Seguindo, devemos considerar especificamente a inequação (1) com o operador principal \mathcal{A} tendo a forma $\mathcal{A}(t) = t^{p-2}A(t)$, $t > 0$. Exigimos apenas que

- (i) $p > 1$
- (ii) $A \in C([0, \infty))$ com $A(0) > 0$
- (iii) $t^{p-1}A(t)$ seja estritamente crescente para $t > 0$.

O caso de Laplace $\Delta u \leq 0$ ($A(t) \equiv 1, p = 2$); o do p -Laplaciano ($A(t) \equiv 1, p > 1$); e o da curvatura média $A(t) = 1/\sqrt{1 + |t|^2}$, $p = 2$, obviamente satisfazem essas condições, onde para o caso da curvatura média a condição (iii) segue de

$$\frac{d}{dt} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} > 0.$$

Note também que se $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$, então (iii) é equivalente a condição $p - 1 + tA_t/A > 0$ para $t > 0$. De fato, pois $A \in C^1(\mathbb{R}_+) \Leftrightarrow t^{p-1}A(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Logo, pela condição (iii),

$$\frac{d}{dt} (t^{p-1}A(t)) = (p-1)t^{p-2}A(t) + t^{p-1}A_t(t) > 0$$

ou, equivalentemente, $t^{p-2}A(t)[p-1 + tA_t(t)/A(t)] > 0$. Para completar a demonstração, basta provar que $A(t) > 0$ para todo $t > 0$ (pois $t^{p-2} > 0$). De fato, pois se existir algum $t_1 > 0$ tal que $A(t_1) \leq 0$, sendo $A(0) > 0$ temos que

$t_1^{p-1}A(t_1) \leq 0 < t_*^{p-1}A(t_*)$ para algum $0 < t_* < t_1$ suficientemente próximo de zero, contradizendo a condição (iii).

Mostraremos os seguintes teoremas provados em [9]:

Teorema 1. *Seja $u = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ uma solução completa, no sentido das distribuições, da inequação diferencial (1) e limitada inferiormente. Se a função $\mathcal{A}(t) (= t^{p-2}A(t))$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) e $p \geq n$, então u é constante.*

Quando a função $A(t)$ for continuamente diferenciável, a condição (iii) pode ser desconsiderada. Mais precisamente, temos o

Teorema 2. *Seja $A(t) \in C^1([0, \infty))$ com $A(t) > 0$ para $t \geq 0$. Se u for uma solução completa, no sentido das distribuições, da inequação (1) e limitada inferiormente e $p \geq n$ ($p > 1$), então u é constante.*

O caso do operador p -Laplaciano é coberto pelos Teoremas 1 e 2, pois atende as condições (i)-(iii) e $A(t) \equiv 1$ conforme observado anteriormente, assim como também é coberto o caso do operador curvatura média, que também atende as condições (i)-(iii) como também observamos e $A(t) = 1/\sqrt{1 + |t|^2} > 0$.

Finalmente, um surpreendente resultado para o caso de singularidade removível também acontece:

O domínio da u no Teorema 1 pode omitir qualquer conjunto finito de pontos, sem afetar a conclusão, desde que $p = n$ e que a função $A(t)$ satisfaça a seguinte condição adicional

- (iv) $A(t)$ seja limitada superior e inferiormente para todo $t \geq 0$ respectivamente pelas constantes $K > 0$ e $\delta > 0$.

Veja Teorema 3 na Seção 4. Note que a condição (iv) é obviamente satisfeita para o operador Laplaciano e para o p -Laplaciano (com $A(t) \equiv 1$).

O Capítulo 1 enunciará na sua primeira parte proposições a serem utilizadas durante as provas dos Teoremas 1, 2 e 3, que constam na bibliografia listada neste trabalho, enquanto que na sua segunda parte será construída uma função radial v que atende a inequação diferencial inversa a (1), que será utilizada para as provas dos 3 teoremas. Provaremos os Teoremas 1 e 2 no Capítulo 2, assim como apresentaremos o enunciado e prova do Teorema 3. Daremos alguns contraexemplos no Capítulo 3.

Nota. O caso de $p = 2$ do Teorema 1 expande o primeiro caso de Mitidieri e Pohozaev na qual a condição (2) é substituída pelas condições (ii) e (iii). Um exemplo claro onde (2) falha, mas (ii) e (iii) ocorrem é $\mathcal{A}(t) = A(t) = \ln(2 + t), t \geq 0$. De fato, dado $C > 0$ basta tomar $t > e^C - 2$ para que tenhamos $\mathcal{A}(t) > C$, logo (2) falha; mas $A(0) = \ln 2 > 0$ e $t \ln(2 + t)$ é estritamente crescente, portanto (ii) e (iii) são satisfeitas. O Teorema 1 também expande o segundo caso deles, substituindo a condição (3) pelas condições (ii) e (iii). Novamente, um exemplo onde (3) falha, mas (ii) e (iii) ocorrem é $A(t) = \ln(2 + t)$. Da mesma forma, o Teorema (2) provém extensões similares dos resultados de Mitidieri e Pohozaev.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Pré-requisitos

Enunciaremos nesta seção resultados a serem utilizados nas provas dos teoremas deste trabalho. A Proposição 3 será demonstrada aqui. Já as Proposições 1 e 2 terão suas provas omitidas.

Antes de apresentar as proposições, uma definição é necessária. Nos enunciados dos Teoremas 1 e 2, a função $u = u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaz por hipótese a inequação (1) *no sentido das distribuições* (assim como no enunciado do Teorema 3, a ser mostrado adiante). Então, faz-se preciso a

Definição: Dizemos que uma função $u = u(x) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, satisfaz no sentido das distribuições a inequação (1) se

$$\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}(|Du|)Du, D\phi \rangle \geq 0$$

para toda função $\phi \in C_0^1(\Omega)$, com $\phi \geq 0$. Dizemos também que u é uma solução fraca da inequação (1).

Para motivar a definição acima, seja a igualdade $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$, $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(\Omega)$ e $g \in C^1(\Omega)$. Então, se $F = \mathcal{A}(|Du|)Du$ e $g = \phi$ forem funções de classe $C^1(\Omega)$, aplicando o Teorema da Divergência, considerando a desigualdade (1.1), $\phi \geq 0$ em Ω e $\phi = 0$ em $\partial\Omega$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \langle \mathcal{A}(|Du|)Du, D\phi \rangle &= \int_{\Omega} \operatorname{div}\{\phi \cdot \mathcal{A}(|Du|)Du\} - \int_{\Omega} \phi \cdot \operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Du|)Du\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \langle \phi \cdot \mathcal{A}(|Du|)Du, \vec{n} \rangle - \int_{\Omega} \phi \cdot \operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Du|)Du\} \\
&= - \int_{\Omega} \phi \cdot \operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Du|)Du\} \geq 0.
\end{aligned}$$

A primeira proposição é um caso particular do Teorema 1.1.1 de [7] (P. Pucci e J. Serrin):

Proposição 1 (Princípio Forte do Máximo): *Se $u = u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, é uma solução não-negativa da inequação (1) onde*

- (I) $\mathcal{A} \in C((0; \infty))$;
- (II) $t \mapsto t\mathcal{A}(t)$ é estritamente crescente em $(0; \infty)$ e $t\mathcal{A}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$;

então vale o Princípio Forte do Máximo; isto é, se $\inf_{\Omega} u(x) = 0$ e existir $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$ então $u \equiv 0$ em Ω .

Antes de enunciarmos o próximo resultado, que se encontra no livro de D. Gilbarg e N. Trudinger ([8], Lema 7.6), apresentamos a seguinte

Definição: *Seja u uma função localmente integrável em Ω e α um multi-índice qualquer, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Então uma função localmente integrável v é chamada a α -ésima derivada fraca de u se ela satisfaz*

$$\int_{\Omega} \phi v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx$$

para toda função $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ (para toda φ $|\alpha|$ vezes diferenciável em suportes compactos de Ω), onde $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Dizemos então que u é $|\alpha|$ vezes fracamente diferenciável em Ω e escrevemos $u \in W^\alpha(\Omega)$, onde $W^\alpha(\Omega)$ é o conjunto das funções $|\alpha|$ vezes fracamente diferenciável.

Com a definição acima, podemos agora enunciar o Lema 7.6 de [8]:

Proposição 2: Seja $u \in W^1(\Omega)$. Então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} Du^+(x) &= \begin{cases} Du(x) & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \\ Du^-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } u \geq 0 \\ Du(x) & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ D|u|(x) &= \begin{cases} Du(x) & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -Du(x) & \text{se } u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalizamos com uma afirmação também de [7] (Proposição 2.4.2):

Proposição 3: Sejam ξ e η vetores no \mathbb{R}^n , $\mathcal{A}(t)$ uma função real positiva onde $t > 0$ e $\phi(t) = t\mathcal{A}(t)$ estritamente crescente em \mathbb{R}^+ . Então temos

$$\langle \mathcal{A}(|\xi|)\xi - \mathcal{A}(|\eta|)\eta, \xi - \eta \rangle \geq 0$$

sempre que $\xi \neq \eta$.

Prova: Se um dos vetores for $\mathbf{0}$ então o resultado é trivial. De outra forma, sejam $\xi, \eta \neq \mathbf{0}$. Como $\langle \xi, \eta \rangle \leq |\xi||\eta|$ temos que

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}(|\xi|)\xi - \mathcal{A}(|\eta|)\eta, \xi - \eta \rangle \\ &= \mathcal{A}(|\xi|)\xi^2 + \mathcal{A}(|\eta|)\eta^2 - \mathcal{A}(|\xi|)\langle \xi, \eta \rangle - \mathcal{A}(|\eta|)\langle \eta, \xi \rangle \\ &\geq \phi(|\xi|)|\xi| + \phi(|\eta|)|\eta| - \phi(|\xi|)|\eta| - \phi(|\eta|)|\xi| \\ &= \{\phi(|\xi|) - \phi(|\eta|)\}(|\xi| - |\eta|) \geq 0 \end{aligned}$$

pois ϕ é estritamente monótona, com a igualdade ocorrendo quando $|\xi| = |\eta|$, obtendo assim o resultado desejado.

O Princípio Forte do Máximo (Proposição 1) é utilizado nas seções 2.1.1 e 2.2, enquanto que as Proposições 2 e 3 são aplicadas na seção 2.3. Quando citados nas respectivas seções, eles aparecerão destacados em *itálico*.

1.2 Construção da função v

As provas dos Teoremas 1 e 2 dependem da construção de um logaritmo especial de uma solução radial $v = v(r)$ da inequação diferencial inversa

$$\operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Dv|)Dv\} \geq 0. \quad (1.1)$$

Primeiramente, modificamos a função $A(t)$ substituindo-a pela função

$$A_1(t) = \begin{cases} A(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ A(1), & t \geq 1, \end{cases}$$

e, para começar, considere a inequação

$$\operatorname{div}\{\mathcal{A}_1(|Dv|)Dv\} \geq 0, \quad (1.2)$$

onde $\mathcal{A}_1(t) = t^{p-2}A_1(t)$. Supondo que v seja radialmente simétrica em relação a origem 0 e escrevendo $v = v(r)$, com $r = |x|$ a distância radial de um ponto x a origem, temos que

$$\frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{n-1}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \geq 0. \quad (1.3)$$

De fato, sendo v uma função radial então $\mathcal{A}_1(|v'|)v'$ também é radial. Temos então as seguintes igualdades:

$$Dv(x) = v'(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad |Dv| = |v'|, \quad \nabla\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} = \frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \frac{x}{|x|}.$$

Logo, utilizando novamente a igualdade $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F$, $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^1(\Omega)$ e $g \in C^1(\Omega)$, e definindo $g = \mathcal{A}_1(|v'|)v'$ e $F = x/|x|$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{div}\{\mathcal{A}_1(|Dv|)Dv\} \\ &= \operatorname{div}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v' \frac{x}{|x|}\} = \nabla\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \cdot \frac{x}{|x|} + \mathcal{A}_1(|v'|)v' \cdot \operatorname{div}\left(\frac{x}{|x|}\right) \\ &= \frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{n-1}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \end{aligned}$$

Sejam $0 < R < S < \infty$, e seja $m > 0$. Procuramos especificamente uma solução de (1.3) para $R \leq r \leq S$ sob as condições de fronteira

$$v(R) = m, \quad v(S) = 0 \quad (v'(r) < 0). \quad (1.4)$$

De fato, desde que $p \geq n$, é suficiente que v satisfaça a equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{p-1}{r}\mathcal{A}_1(|v'|)v' = 0, \quad (1.5)$$

pois se v satisfaz (1.5) então

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{n-1}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \\ &= \frac{d}{dr}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{p-1}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} + \frac{n-p}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \\ &= \frac{n-p}{r}\{\mathcal{A}_1(|v'|)v'\} \geq 0 \end{aligned}$$

visto que $\mathcal{A}_1(|v'|) \geq 0$ e $v'(r) < 0$. Portanto, v também satisfaz (1.3).

Para mostrar a existência (e unicidade) da solução de (1.4), (1.5), note primeiro que podemos dividir (1.5) por $\mathcal{A}_1(|v'|)v'$ e reescrevê-la

$$\frac{d}{dr} \log\{\mathcal{A}_1(|v'|)|v'|\} + \frac{p-1}{r} = 0, \quad v' < 0, \quad (1.6)$$

e, portanto,

$$\int \frac{d}{dr} \log\{\mathcal{A}_1(|v'|)|v'|\} dr = \int \frac{1-p}{r} dr = (1-p) \log r + d$$

$$\therefore e^{\log\{\mathcal{A}_1(|v'|)|v'|\}} = e^{\log r^{1-p} + d},$$

obtendo

$$\mathcal{A}_1(|v'|)|v'| = \frac{a}{r^{p-1}}, \quad (1.7)$$

onde $a = e^d > 0$ e d é a constante de integração. Pela hipótese (iii), isso pode ser escrito como

$$\varphi(|v'|) = \frac{a}{r^{p-1}},$$

onde $\varphi(t) = t\mathcal{A}_1(t) = t^{p-1}A_1(t)$ é uma função estritamente crescente para $t > 0$, tendendo ao ∞ quando $t \rightarrow \infty$. Seja $\varphi^{-1}(t), 0 \leq t < \infty$, a inversa de $\varphi(t)$ dada por

$$|v'| = \varphi^{-1}\left(\frac{a}{r^{p-1}}\right). \quad (1.8)$$

Logo, por (1.4) ($v(S) = 0$ e $v'(r) < 0$),

$$v(r) = \int_S^r v'(\tau) d\tau = \int_r^S -v'(\tau) d\tau = \int_r^S |v'(\tau)| d\tau.$$

Portanto, por (1.8),

$$v(r) = \int_r^S \varphi^{-1}\left(\frac{a}{\tau^{p-1}}\right) d\tau \quad \text{para } R \leq r \leq S. \quad (1.9)$$

Pondo $r = R$ em (1.9) e usando (1.4), obtemos a seguinte condição inicial sobre a constante de integração a :

$$m = v(R) = \int_R^S \varphi^{-1} \left(\frac{a}{\tau^{p-1}} \right) d\tau.$$

Afirmamos que isso determina (de forma única) $a = a(m, S)$ para R fixo. De fato, pensando na integral do lado direito da igualdade como função de a , vemos que ela desaparece quando $a = 0$, é crescente para todo $a > 0$ (φ^{-1} é estritamente crescente) e, desde que $\varphi^{-1}(\infty)$ é necessariamente ∞ , torna-se infinita quando $a \rightarrow \infty$, o que prova a afirmação. Resumindo, a função $v(r) = v(r, m, S)$ dada por (1.9) com $a = a(m, S)$ é uma solução de (1.4), (1.5). Discutiremos agora propriedades adicionais da solução (1.5). Desde que $A_1(0) > 0$ e $A_1(t) \equiv A(1) > 0$ para $t \geq 1$, segue que A_1 tem um limite superior $K > 0$ para todo $t \geq 0$. Logo, por (1.7),

$$|v'|^{p-1} A_1(|v'|) = \mathcal{A}_1(|v'|) |v'| = \frac{a}{r^{p-1}}$$

$$\therefore |v'| = \left(\frac{a}{A_1(|v'|)} \right)^{1/p-1} \frac{1}{r} \geq \left(\frac{a}{K} \right)^{1/p-1} \frac{1}{r}, \quad a = a(m, S), \quad (1.10)$$

e, assim,

$$m = \int_R^S \varphi^{-1} \left(\frac{a}{\tau^{p-1}} \right) d\tau = \int_R^S |v'(\tau)| d\tau \geq \int_R^S \left(\frac{a}{K} \right)^{1/p-1} \frac{1}{\tau} d\tau.$$

Calculando a última integral temos,

$$m \geq \left(\frac{a}{K} \right)^{1/p-1} \log \left(\frac{S}{R} \right).$$

Então,

$$a \leq m^{p-1}K / \left(\log \frac{S}{R} \right)^{p-1}, \quad (1.11)$$

fornecendo assim um limite superior para $a = a(m, S)$. Por sua vez, por (1.8) e φ^{-1} ser estritamente crescente,

$$\begin{aligned} |v'| &= \varphi^{-1} \left(\frac{a}{r^{p-1}} \right) \leq \varphi^{-1} \left(\frac{a}{R^{p-1}} \right) \\ \therefore |v'| &\leq \varphi^{-1} \left(\frac{m^{p-1}K}{(R \log S/R)^{p-1}} \right), \quad R \leq r \leq S. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Então se S for suficientemente grande, digamos $S \geq R e^{mK^{(1/p-1)}/RA_1(1)^{(1/p-1)}} = \sigma(m)$, segue que

$$|v'(r)| \leq \varphi^{-1} \left(\frac{m^{p-1}K}{(RmK^{1/(p-1)}/RA_1(1)^{1/(p-1)})^{p-1}} \right) = \varphi^{-1}(A_1(1)) = 1$$

(pois $\varphi(1) = 1^{p-1} \cdot A_1(1) = A_1(1)$). Logo, $A_1(|v'|) = A(|v'|)$, o que implica $\mathcal{A}_1(|v'|) = \mathcal{A}(|v'|)$ e a função v dada por (1.9) satisfaz a inequação inversa (1.1). A seguir, por (1.10) e usando (1.4),

$$v(r) = \int_S^r v'(\tau) d\tau = \int_r^S |v'(\tau)| d\tau \geq \int_r^S \left(\frac{a}{K} \right)^{1/p-1} \frac{1}{\tau} d\tau.$$

Calculando a última integral obtemos

$$v(r) \geq \left(\frac{a}{K} \right)^{1/p-1} \log \left(\frac{S}{r} \right), \quad a = a(m, S). \quad (1.13)$$

Por outro lado, assim como em (1.10), também temos

$$|v'| = \left(\frac{a}{A_1(|v'|)} \right)^{1/p-1} \frac{1}{r} \leq \left(\frac{a}{\delta} \right)^{1/p-1} \frac{1}{r},$$

onde $\delta > 0$ é um limite inferior para $A_1(t)$, $t > 0$. Assim, analogamente a (1.13),

$$v(r) \leq \left(\frac{a}{\delta}\right)^{1/p-1} \log\left(\frac{S}{r}\right).$$

Pondo $r = R$, obtemos

$$m = v(R) \leq \left(\frac{a}{\delta}\right)^{1/p-1} \log\left(\frac{S}{R}\right),$$

ou seja,

$$a \geq m^{p-1} \delta / (\log S/R)^{p-1}.$$

Substituindo a na equação (1.13) tem-se

$$\begin{aligned} v(r) &\geq \left(\frac{m^{p-1} \delta}{K(\log S/R)^{p-1}}\right)^{1/p-1} \log \frac{S}{r} \\ &= m \left(\frac{\delta}{K}\right)^{1/p-1} \frac{\log S/r}{\log S/R}, \quad R \leq r \leq S. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Capítulo 2

Provas dos Teoremas 1 e 2 e o Teorema 3

2.1 Provas dos Teoremas 1 e 2

2.1.1 Prova do Teorema 1

Visto que a solução dada $u = u(x)$ de (1) seja limitada inferiormente, podemos definir $M = \inf_{\mathbb{R}^n} u(x) > -\infty$. Assim $\bar{u}(x) = u(x) - M$ tem como ínfimo 0 e obviamente também é uma solução $C^1(\mathbb{R}^n)$ de (1) tendo 0 como sua maior cota inferior. Supomos, para começar, que $\bar{u} > 0$ em \mathbb{R}^n , pois caso contrário teríamos $\bar{u}(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Mas então, pelo *Princípio Forte do Máximo*, temos

$$\bar{u}(x) \equiv 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

o resultado exigido, ou seja, $u(x) \equiv M$.

Com $\bar{u}(x) > 0$, seja R fixado e escolhemos

$$m = m(R) = \inf_{|x|=R} \bar{u}(x) > 0. \quad (2.1)$$

A função $v(r)$, $R \leq r \leq S$, então satisfaz a inequação (1.1) quando $S \geq \sigma(m)$, enquanto \bar{u} satisfaz (1). Exigimos agora que

$$\bar{u}(x) \geq v(|x|) \quad \text{para } R \leq |x| \leq S. \quad (2.2)$$

Assumindo por um instante que a exigência seja válida (demonstração na seção 2.3), podemos completar a prova. De fato, tomando $|x| = r = \sqrt{RS}$ em (1.14), obtemos a notável desigualdade (observe que $S/\sqrt{RS} = \sqrt{S/R}$)

$$\bar{u}(x) \geq v(|x|) \geq m \left(\frac{\delta}{K} \right)^{1/p-1} \frac{\log S/\sqrt{RS}}{\log S/R} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\delta}{K} \right)^{1/p-1}. \quad (2.3)$$

Como (2.3) é válida para todo $S \geq \sigma(m)$, segue que

$$\inf_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) \geq \frac{1}{2} m \left(\frac{\delta}{K} \right)^{1/p-1}. \quad (2.4)$$

Mas $\bar{u} > 0$ em \mathbb{R}^n e $\inf_{\mathbb{R}^n} \bar{u} = 0$, isto é, necessariamente $\inf_{|x| \rightarrow \infty} \bar{u}(x) \geq 0$. Isto contradiz (2.4) e a prova está agora completa.

2.1.2 Prova do Teorema 2

Seja $C > 0$ tal que $A(t) \leq C$ para $t \leq 1$. Como $A \in C^1[0, \infty)$ e $A(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, então $|tA_t(t)|/A(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Logo, existe uma constante $c > 0$ tal que $|tA_t(t)|/A(t) < p - 1$ para $0 < t < c$; ou seja, $p - 1 + tA_t(t)/A(t) > 0$, do que resulta $t^{p-1}A(t)$ estritamente crescente para $0 < t < c$. Seja agora

$$A_c(t) = \begin{cases} A(t), & 0 \leq t \leq c, \\ A(c), & t \geq c. \end{cases}$$

É claro que $t^{p-1}A_c(t)$ é estritamente crescente para todo $t > 0$. Além do mais existem constantes $K > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\delta \leq A_c(t) \leq K, \quad t \geq 0.$$

Podemos agora proceder analogamente como na prova do Teorema 1, observando que na construção da função v deve-se substituir a função $\mathcal{A}_1(t)$ pela função $\mathcal{A}_c(t) = t^{p-2}A_c(t)$, que atende as condições (i)-(iii), e consequentemente teremos

$\varphi(t) = t^{p-1}A_c(t)$. Além do mais, devemos tomar $S \geq Re^{mK^{1/p-1}/cRA_c(c)^{1/p-1}}$ e teremos

$$|v'(r)| \leq \varphi^{-1} \left(\frac{m^{p-1}K}{(RmK^{1/(p-1)}/cRA_c(c)^{1/(p-1)})^{p-1}} \right) = \varphi^{-1}(c^{p-1}A_c(c)) = c$$

(pois $\varphi(c) = c^{p-1}A_c(c)$). Assim $A_c(|v'|) = A(|v'|)$, o que implica $\mathcal{A}_c(|v'|) = \mathcal{A}(|v'|)$. A partir daí, procede-se exatamente como no Teorema 1, visto que a hipótese (iii) é satisfeita para A_c .

2.2 Enunciado e Prova do Teorema 3

Retornamos agora para a generalização do Teorema 1 com singularidade removível observada na introdução, a qual pode ser definida explicitamente com a seguinte afirmação:

Teorema 3. *Seja P um conjunto finito de pontos no \mathbb{R}^n , e seja $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus P)$ uma solução no sentido das distribuições da inequação diferencial (1) em $\mathbb{R}^n \setminus P$, a qual é limitada inferiormente. Se a função $\mathcal{A}(t) = t^{p-2}A(t)$ satisfaz as condições (i)-(iii) da introdução, valendo também a condição (iv) e $p = n$, então u é constante em $\mathbb{R}^n \setminus P$.*

Prova. Pela condição (iv) existem constantes $K > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\delta \leq A(t) \leq K$ para $t \geq 0$ ($A(t)$ é limitada). Como consequência, não é preciso no início da prova alterar a função $A(t)$ para a função $A_1(t)$, e também não é preciso posteriormente fazer $|v'(r)| \leq 1$, como na prova do Teorema 1. Procedemos agora como na prova do Teorema 1, onde $\bar{u}(x) = u(x) - M$, $M = \inf_{\mathbb{R}^n} u(x) > -\infty$; ou seja, 0 é o ínfimo de \bar{u} . Suponhamos que \bar{u} não seja identicamente nula e $\bar{u} > 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus P$ (*Princípio Forte do Máximo*). Então, para cada ponto $x_i \in P, i = 1, \dots, k$, existe uma constante $m_i > 0$ e uma constante $R_i > 0$ tal que

$$\bar{u}(x) \geq m_i$$

quando $|x| = R_i$, onde R_i é tão pequeno que u é uma solução de (1) no conjunto $B_{2R_i}(x_i) \setminus \{x_i\}$. Podemos assegurar que $\bar{u}(x) = u(x) - M$ obedece

$$\bar{u}(x) \geq v_i(|x|) \geq m_i \left(\frac{\delta}{K}\right)^{1/p-1} \frac{\log |x|/S}{\log R_i/S}, \quad S \leq |x| \leq R_i. \quad (2.5)$$

De fato, como $p = n$, podemos construir soluções v_i de (1.3) resolvendo a equação (1.5) (note que como $p = n$, o sinal de $v_i(r)$ não interessa). Além disso, substituindo (1.4) por

$$v_i(S) = 0, \quad v_i(R_i) = m_i \quad (v_i'(r) > 0)$$

temos então

$$v_i(r) = \int_S^r \varphi_i^{-1} \left(\frac{a_i}{\tau^{p-1}} \right) d\tau \quad (S \leq r \leq R)$$

onde a_i é tal que

$$m_i = v_i(R_i) = \int_S^{R_i} \varphi_i^{-1} \left(\frac{a_i}{\tau^{p-1}} \right) d\tau.$$

Se $v = v_i$ em (1.10), integrando de S a r tem-se

$$v_i(r) \geq \left(\frac{a_i}{K}\right)^{1/p-1} \log \left(\frac{r}{S}\right). \quad (2.6)$$

Analogamente a (2.6),

$$v_i(r) \leq \left(\frac{a_i}{\delta}\right)^{1/p-1} \log \left(\frac{r}{S}\right)$$

e, pondo $r = R_i$, obtemos

$$m_i = v_i(R_i) \leq \left(\frac{a_i}{\delta}\right)^{1/p-1} \log\left(\frac{R_i}{S}\right),$$

ou seja,

$$a_i \geq m_i^{p-1} \delta / (\log R_i/S)^{p-1}.$$

Substituindo a_i em (2.6), pondo $r = |x|$ e usando $\bar{u}(x) \geq v(|x|)$, chegamos a desigualdade (2.5).

Seja agora $|x| = r = \sqrt{R_i S}$ em (2.5) para obter

$$\bar{u}(x) \geq \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\delta}{K}\right)^{1/p-1}, \quad |x| < R_i$$

como em (2.3). Por sua vez

$$\inf_{x \rightarrow x_i} \bar{u}(x) \geq \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\delta}{K}\right)^{1/p-1} > 0. \quad (2.7)$$

Além disso, pelo argumento do Teorema 1, existe $R > 0$ e $\tilde{C} > 0$ tal que $\bar{u}(x) \geq \tilde{C}$ para $|x| > R$. Logo, a partir disso e de (2.7),

$$\inf_{\Phi} \bar{u} \geq \min_i \left\{ \tilde{C}; \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\delta}{K}\right)^{1/p-1} \right\} = C > 0,$$

onde $\Phi = \bigcup_{i=1}^k B_{2R_i}(x_i) \setminus \{x_i\} \cup (\overline{B_R(0)})^c$.

Lembremos que $\bar{u} > 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus P$ e $\inf_{\mathbb{R}^n \setminus P} \bar{u}(x) = 0$. Portanto,

$$0 = \inf_{\mathbb{R}^n \setminus P} \bar{u} = \inf_{\mathbb{R}^n \setminus \Phi} \bar{u},$$

pois $\inf_{\Phi} \bar{u} \geq C > 0$. Como $\mathbb{R}^n \setminus \Phi$ é compacto, já que $\mathbb{R}^n \setminus \Phi \subseteq B_R(0)$ e Φ é aberto, então existe x_0 tal que

$$\bar{u}(x_0) = \inf_{\mathbb{R}^n \setminus \Phi} \bar{u} = 0.$$

Mas isso contradiz o fato de $\bar{u} > 0$ e a prova está completa.

Observação: Diferentemente dos Teoremas 1 e 2, que têm como hipótese $p \geq n$, no Teorema 3 devemos ter $p = n$. No Capítulo 3, Seção 3.4, mostraremos que o Teorema 3 falha quando $p > n$.

2.3 Prova da Exigência $\bar{u}(x) \geq v(|x|)$

O que vai se provar aqui é um caso particular do chamado Princípio da Comparação. Suponhamos por contradição que a exigência seja falsa. Então existe um ponto x_0 com $R < |x_0| < S$ tal que $\bar{u}(x_0) < v(|x_0|)$, enquanto também tem-se $\bar{u} \geq v$ quando $|x| = R$ e $|x| = S$ por (1.4) e (2.1). Seja $c = v(|x_0|) - \bar{u}(x_0) > 0$ e $\bar{\bar{u}} = \bar{u} + c$. Podemos supor aqui, sem perda de generalidade, que x_0 é tal que $v(|x_0|) - \bar{u}(x_0) = \max_{R \leq |x| \leq S} v(|x|) - \bar{u}(x) > 0$. Então

$$\bar{\bar{u}}(x) \geq v(|x|)$$

para todo $R \leq |x| \leq S$, com $\bar{\bar{u}}(x_0) = v(|x_0|)$. Seja $\varepsilon \in (0, c)$ e definimos o conjunto

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : R \leq |x| \leq S, \bar{\bar{u}}(x) - \varepsilon < v(|x|)\}. \quad (2.8)$$

Claramente, $x_0 \in \Gamma$. Além disso,

$$\bar{u} - \varepsilon > \bar{u} - c = \bar{u} \geq v, \quad \text{quando } |x| = R \text{ e quando } |x| = S.$$

Logo, $\bar{\Gamma}$ é um subconjunto compacto não-vazio de $R < |x| < S$. Considere a função teste

$$\phi = (v - \bar{u} + \varepsilon)^+. \quad (2.9)$$

Claramente $\phi \geq 0$, enquanto que ϕ se anula fora de Γ . Além disso, pela *Proposição 2*, $D\phi = Dv - Du$ em q.t.p. em Γ e $D\phi = 0$ fora de Γ .

Como u satisfaz (1) no sentido das distribuições então

$$\int_{\Gamma} \langle \mathcal{A}(|Du|)Du, D\phi \rangle \geq 0.$$

Com um cálculo inteiramente análogo ao usado para motivar a definição da página 6, tem-se

$$\int_{\Gamma} \langle \mathcal{A}(|Dv|)Dv, D\phi \rangle \leq 0.$$

Subtraindo as duas integrais,

$$\int_{\Gamma} \langle \mathcal{A}(|Dv|)Dv - \mathcal{A}(|Du|)Du, D\phi \rangle \leq 0. \quad (2.10)$$

Pela *Proposição 3*, como $D\phi = Dv - Du$ em q.t.p. em Γ , segue que o integrando em (2.10) é não-negativo. O integrando deve, portanto, se anular em q.t.p. em Γ . Logo, novamente pela *Proposição 3*, temos

$$Dv = Du \quad \text{em } \Gamma.$$

Mas então $D\phi = Dv - Du = 0$ em Γ , e assim $\phi \equiv$ constante em componentes conexas de Γ . De fato, essa constante deve ser 0 desde que $\phi = 0$ em $\partial\Gamma$; isto é, $\phi \equiv 0$ em Γ . Noutras palavras,

$$v - \bar{u} + \varepsilon = 0 \quad \text{em } \Gamma$$

conforme (2.9) e Γ seria um conjunto vazio, contradizendo a definição (2.8) de que Γ é não-vazio, pois $x_0 \in \Gamma$. Assim, a exigência está provada.

Capítulo 3

Contraexemplos

Nesta seção mostraremos 4 diferentes contraexemplos:

- I. O Teorema 1 falha quando $p < n$;
- II. O Teorema 2 falha quando $p = n$ e o domínio da solução é $B \setminus P$, onde B é uma bola finita;
- III. O Teorema 1 falha quando o sinal da inequação (1) é inversa;
- IV. O Teorema 3 falha quando $p > n$.

3.1 Contraexemplo I

Consideremos a função $w = \varepsilon(1 + |x|^2)^{k/2}$, onde $\varepsilon > 0$, $k < 0$. Denotando a expressão (1) por I , vamos avaliá-la, pondo $|w'| = t$ e $w' = -t$ (pois $w'(r) = \varepsilon k(1 + r^2)^{(k-2)/2}r \leq 0$) e utilizando mais ao final a relação $\mathcal{A}(t) = t^{p-2}A(t)$,

$$\begin{aligned}
I &= \operatorname{div}\{\mathcal{A}(|Dw|)Dw\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{A}(|w'|)w' \frac{x_i}{|x|} \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ \mathcal{A}'(|w'|) \frac{w'}{|w'|} w'' \frac{x_i}{|x|} w' \frac{x_i}{|x|} + \mathcal{A}(|w'|)w'' \frac{x_i}{|x|} \frac{x_i}{|x|} + \mathcal{A}(|w'|)w' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) \right\} \\
&= \mathcal{A}'(|w'|)|w'|w'' \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|x|^2} + \mathcal{A}(|w'|)w'' \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|x|^2} + \mathcal{A}(|w'|)w' \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) \\
&= \mathcal{A}'(|w'|)|w'|w'' + \mathcal{A}(|w'|)w'' + \mathcal{A}(|w'|)w' \frac{n-1}{r} \\
&= \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[\frac{\mathcal{A}'(t)}{\mathcal{A}(t)}rw'' + \frac{rw''}{t} + \frac{-t}{t}(n-1) \right] = \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[\left(\frac{-t\mathcal{A}'(t)}{\mathcal{A}(t)} + \frac{-t}{t} \right) \frac{rw''}{w'} - (n-1) \right] \\
&= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[\left(t \frac{(p-2)t^{p-3}A(t) + t^{p-2}A'(t)}{t^{p-2}A(t)} + 1 \right) \frac{rw''}{w'} + (n-1) \right] \\
&= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[(p-2 + \frac{tA'(t)}{A(t)} + 1) \frac{rw''}{w'} + (n-1) \right] \\
&= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r} [(p-1+E) \frac{rw''}{w'} + (n-1)], \tag{3.1}
\end{aligned}$$

onde $E = E(t) = tA'(t)/A(t)$ assumindo-se, neste e nos contraexemplos a seguir, que $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Esta identidade é válida para qualquer função radial tal que $w'(r) \leq 0$. Calculando w'' e rw''/w' , tem-se

$$\begin{aligned}
w'' &= \varepsilon k(k-2)(1+r^2)^{(k-4)/2}r^2 + \varepsilon k(1+r^2)^{(k-2)/2} \\
\frac{rw''}{w'} &= r \frac{\varepsilon k(k-2)(1+r^2)^{(k-4)/2}r^2 + \varepsilon k(1+r^2)^{(k-2)/2}}{\varepsilon k(1+r^2)^{(k-2)/2}r} = \frac{(k-2)r^2}{1+r^2} + 1 \\
&= \frac{1+(k-1)r^2}{1+r^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[(p-1+E) \frac{1+(k-1)r^2}{1+r^2} + (n-1) \right] \\
&= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[\frac{p-1+E + [(p-1)k - p + 1 + E(k-1)]r^2 + (n-1)r^2 + n-1}{1+r^2} \right] \\
&= -\frac{t\mathcal{A}(t)}{r(1+r^2)} [p-1+E + (n-1) + [(p-1)k + n - p + (k-1)E]r^2].
\end{aligned}$$

Então, a menos de um fator positivo,

$$I = -(p-1+E + (n-1)) - [(p-1)k + n - p + (k-1)E]r^2.$$

Mostramos na introdução que se $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$ então $p-1+E > 0$. Logo, $I \leq 0$ sempre que

$$(p-1)k + n - p + (k-1)E \geq 0. \quad (3.2)$$

Para começar, quando $p < n$, devemos identificar um subconjunto Λ daqueles operadores \mathcal{A} os quais satisfazem as condições (i)-(iii) e para os quais uma apropriada escolha (limitada) de k faça com que tenhamos $I \leq 0$; isto é, isso produz um contraexemplo para o Teorema 1 para o conjunto Λ e para $p < n$. Especificamente, tomemos Λ como o subconjunto dos operadores obedecendo (i)-(iii) tais que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} E(t) < n - p \quad (p < n). \quad (3.3)$$

Neste caso, se ε for suficientemente pequeno, então para alguma constante $\mu \in (0,1]$ temos

$$E = E(t) \leq (1-\mu)(n-p), \quad \text{para } t \leq \varepsilon \quad (3.4)$$

(note aqui que $|w'| = \varepsilon|k|r(1+r^2)^{(k-2)/2} \leq \varepsilon|k| \leq \varepsilon$, se $|k| \leq 1$). Usando (3.4), a condição (3.2) é agora garantida por

$$\begin{aligned}
& (p-1)k + n - p + (k-1)(1-\mu)(n-p) \\
&= (p-1)k + (1-\mu)(n-p)k + n - p - (1-\mu)(n-p) \\
&= [(p-1) + (1-\mu)(n-p)]k + \mu(n-p) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

pois $(p-1)k + n - p + (k-1)E \geq (p-1)k + n - p + (k-1)(1-\mu)(n-p)$.

A desigualdade (3.5) é satisfeita para $p < n$ e para todos parâmetros k tais que

$$0 > k > \frac{\mu(n-p)}{(p-1) + (1-\mu)(n-p)}.$$

Logo, se k atende a condição acima e $|k| \leq 1$ por (3.4), então (3.2) acontece. Para completar a prova, afirmamos que $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} E(t) = 0$ para toda função $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$ que satisfaça as condições (i)-(iii), ou seja, o conjunto dos operadores que satisfazem (i)-(iii) e para os quais não existe k tal que $I \leq 0$ é vazio. De fato, caso contrário existiria alguma função $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$, e um intervalo $0 < t < t_0$ tal que

$$\frac{tA'(t)}{A(t)} \geq c > 0 \quad \therefore \quad tA'(t) \geq cA(t) \geq d > 0 \quad \therefore \quad A'(t) \geq \frac{d}{t}.$$

Integrando,

$$A(t) \leq d \log t + C.$$

Se $t \rightarrow 0$, então $A(t) \rightarrow -\infty$, contradizendo a condição (ii). Logo para A satisfazendo (i)-(iii) existe k tal que $I \leq 0$, isto é, existe w solução de (1) limitado e não-constante. Isto completa o contraexemplo para o Teorema 1 quando $p < n$.

Exemplo. Quando $A \equiv 1$, como no caso do operador p -Laplaciano, temos $E = 0$, logo

$$(p-1)k + n - p + (k-1)E = (p-1)k + n - p \geq 0,$$

ou seja, $I \leq 0$ quando $0 > k \geq (p - n)/(p - 1)$. No caso do operador curvatura média, $E \leq 0$ pois

$$A'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+t^2)^3}} < 0 \Rightarrow E(t) = \frac{tA'(t)}{A(t)} \leq 0$$

já que vimos anteriormente que $A(t) > 0$ para o operador curvatura média. Logo, $(p - 1)k + n - p + (k - 1)E \geq (p - 1)k + n - p$, pois $k \leq 0$ e o mesmo valor de k é o suficiente.

3.2 Contraexemplo II

Sem perda de generalidade, podemos supor que $P = \{0\}$ e $B = \{|x| < 1\}$. Procuramos uma função w em $B \setminus \{0\}$ tal que (1) acontece, mas w não seja constante. Consideremos $w = \log(1/r)$, $r < 1$. No caso do p -Laplaciano, temos $A \equiv 1$ e $E = 0$. Como $w' = 1/r$ e $w'' = -1/r^2$ tem-se $rw''/w' = -1$. A menos de um fator positivo, com $p = n$, encontramos então

$$I = -[(p - 1 + E)(-1) + (n - 1)] = p - n + E = E \leq 0,$$

como queríamos.

3.3 Contraexemplo III

Considere a função $w = |x|^2$. Então $w' = 2r$, $w'' = 2$, e $rw''/w' = 1$. Como neste caso $w' > 0$, fazendo calculo análogo ao de (3.1), obtemos

$$I = \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} [(p - 1 + E) \frac{rw''}{w'} + (n - 1)] = \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} [(p - 1 + E) + n - 1] > 0,$$

onde $p - 1 + E > 0$ visto que $A \in C^1(\mathbb{R}_+)$ conforme assumimos no contraexemplo I; isto é, a função positiva não-constante $|x|^2$ satisfaz a inequação (1) com o sinal da desigualdade invertida.

3.4 Contraexemplo IV

Seja $w = |x|^{(p-n)/(p-1)}$. Então, escrevendo $|x| = r$,

$$w' = \frac{p-n}{p-1} r^{\left(\frac{1-n}{p-1}\right)},$$

$$w'' = \frac{(p-n)(1-n)}{(p-1)^2} r^{\left(\frac{1-n}{p-1}-1\right)},$$

$$\frac{rw''}{w'} = \frac{1-n}{p-1}.$$

No caso do p-Laplaciano, temos $A \equiv 1$ e $E = 0$. Como $w' > 0$, fazendo cálculo análogo ao de (3.1), tem-se

$$I = \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[(p-1+E) \frac{rw''}{w'} + (n-1) \right] = \frac{t\mathcal{A}(t)}{r} \left[(p-1) \frac{1-n}{p-1} + (n-1) \right] = 0,$$

ou seja,

$$\operatorname{div} \{ \mathcal{A}(|Du|) Du \} = \Delta_p w = 0$$

para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Referências Bibliográficas

1. M. N. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, New York (1967).
2. J. Serrin and H. Zou, “*Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities*”, *Acta Math*, 189, 79-142 (2002).
3. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, “*Some Generalizations of the Bernstein Theorem*”, *Differential Equations* 38, 373-378 (2002).
4. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, “*A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities*”, *Proc. Steklov Inst. Math.* 234, 1-362 (2001).
5. R. Filipucci, “*Nonexistence of positive weak solutions of elliptic inequalities*”, *Nonlinear Anal.* 70, 2903-2916 (2009).
6. L. D’Ambrosio, “*Liouville theorems for anisotropic quasilinear inequalities*”, *Nonlinear Anal.* 70, 2855-2869 (2009).
7. P. Pucci and J. Serrin, *The Maximum Principle*, Birkhauser (2007).
8. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1971).
9. J. Serrin, “*The Liouville Theorem for Homogenous Elliptic Differential Inequalities*”, *Journal of Mathematical Sciences* (2001).