

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Matheus Fronza Rigo

**ARGUMENTAÇÃO E PENSAMENTO GENÉRICO NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Porto Alegre

2016

Matheus Fronza Rigo

**ARGUMENTAÇÃO E PENSAMENTO GENÉRICO NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. Dr. Cydara Cavedon Ripoll

Porto Alegre

2016

Matheus Fronza Rigo

**ARGUMENTAÇÃO E PENSAMENTO GENÉRICO NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dr. Cydara Cavedon Ripoll

Banca Examinadora

Prof.^a Dr.^a Cydara Cavedon Ripoll – Orientadora
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof.^a Dr.^a Elisabete Zardo Búrigo
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Prof.^a Dr.^a Luisa Rodriguez Doering
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, por todo o apoio oferecido durante os anos, pela educação que me deram e por acreditarem em meu potencial.

À minha orientadora, por ter aceitado meu convite, por todas as conversas e reuniões que tivemos e pela tremenda força e determinação, pois mesmo em condições adversas, sempre se manteve próxima, me aconselhando.

Às professoras Elisabete Zardo Búrigo e Luisa Rodriguez Doering por terem aceitado tão prontamente o convite para compor a banca.

À professora Marlusa Benedetti, pela parceria, orientação e apoio durante todo meu período de estágio.

Aos meus colegas e amigos do curso, pelas horas compartilhadas de estudo, pelas conversas de corredor e pelas companhias durante os almoços no RU.

Aos amigos do PIBID, que sempre me apoiaram durante nossa jornada interdisciplinar.

Aos meus amigos do Programa de Licenciaturas Internacionais, por serem minha família, colegas de estudo e parceiros de festa durante os anos em Coimbra.

A todos os meus professores, da UFRGS e da Universidade de Coimbra, por todos os anos de aprendizado.

Aos meus amigos próximos, que mesmo distantes estavam sempre torcendo e me apoiando, não permitindo que eu desistisse.

RESUMO

Este trabalho propõe uma discussão sobre o incentivo à argumentação matemática no ensino fundamental através de uma proposta pedagógica aplicada em uma turma de sétimo ano do Colégio de Aplicação da UFRGS. Usando como base os trabalhos de D'Amore, Fischbein, Hanna, Piaget e Ripoll, considera-se sobre as capacidades cognitivas da criança e sua capacidade de entender e produzir uma argumentação matemática, utilizando pensamento generalizador e pensamento genérico. Tais considerações são avaliadas perante a coleta de dados durante uma atividade envolvendo a criação de conjecturas sobre a adição de números pares e/ou ímpares, inspirada no trabalho de Carvalho. Reflete-se, ao final, sobre o possível impacto do ensino de demonstração na escola e sobre a evolução deste trabalho.

Palavras-chave: Argumentação Matemática. Ensino de Demonstração. Pensamento Genérico.

ABSTRACT

This work is about the presence of mathematical argumentation in elementary school, and presents an experiment applied to a seventh grade of Colégio de Aplicação in Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Based in the works of D'Amore, Fischbein, Hanna, Piaget and Ripoll, and taking into account the students' cognitive capabilities, it is discussed whether they are able to understand and produce some mathematical argumentations, using generalizing and generic thinking. Such considerations are evaluated through data collection during an activity inspired on Carvalhos's work and which aimed the creation by the students of conjectures about sums involving even and odd numbers. At the end, some considerations are presented about the possible impact of proof teaching in school and about the evolution of this work.

Keywords: Mathematical argumentation. Proof Teaching. Generic Thought.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Tabela dos tipos de prova de Balacheff | 14 |
| Figura 2 – Representação das quantidades dos potes | 26 |
| Figura 3 – Aluna A supondo quantidades | 26 |
| Figura 4 – Aluno justificando o conteúdo dos potes | 27 |
| Figura 5 – Exemplo da associatividade para a multiplicação..... | 30 |
| Figura 6 – Justificativa de um aluno para a soma de dois números ímpares quaisquer | 32 |
| Figura 7 – Aluno que não conseguiu expressar-se utilizando os conceitos vistos em aula..... | 33 |
| Figura 8 – Exemplo de justificativa para a soma de um número par qualquer com um número ímpar qualquer..... | 33 |
| Figura 9 – Tabela para exemplo generalizador da comutatividade da multiplicação | 36 |

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| 1. INTRODUÇÃO | 8 |
| 2. REFERENCIAL TEÓRICO | 10 |
| 2.1. SOBRE O USO DE SIMBOLOGIA MATEMÁTICA | 13 |
| 2.2. SOBRE OS ESTÁGIOS DE DESENVOLVIMENTO | 16 |
| 2.3. SOBRE A COLETA DE DADOS | 18 |
| 3. PRATICANDO O PENSAMENTO GENERALIZADOR, PENSAMENTO GENÉRICO E DEMONSTRAÇÕES | 18 |
| 3.1. “COMO QUE FAZ A ADIÇÃO MESMO?” | 19 |
| 3.2. A ADIÇÃO DE NÚMEROS PARES E DE NÚMEROS ÍMPARES | 21 |
| 3.2.1. SOMA DE PARES | 22 |
| 3.2.2. A SEGUNDA AULA | 28 |
| 3.3. COMUTATIVIDADE E ASSOCIATIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO E A PROBLEMÁTICA COM OS NÚMEROS INTEIROS | 35 |
| 3.4. AVALIANDO A TURMA | 37 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS | 39 |
| 4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 41 |
| APÊNDICES | 43 |

1. INTRODUÇÃO

Durante meus anos escolares (Ensinos Fundamental e Médio), acostumei-me a “aceitar as fórmulas matemáticas”, pois raramente me eram apresentadas as argumentações que levavam a elas. Ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática e ser apresentado às demonstrações, percebi, finalmente, que muitas daquelas coisas passaram a fazer sentido, um sentido que até então eu não questionava. As demonstrações nos mostram, por exemplo, o porquê das fórmulas, por meio de um encadeamento de deduções; ao ser apresentado a elas, pude perceber que, afinal, a *ciência matemática* não me foi devidamente apresentada no ensino básico. Quanto mais a matemática é mecanizada, mais ela perde em relações de sentido e menos se ganha em entendimento. A argumentação matemática teve um efeito extremamente positivo para o meu entendimento da matemática, mas, infelizmente, isso aconteceu apenas na Universidade. Em vez de simplesmente aceitar as fórmulas matemáticas, fui convencido da necessidade de se entender o porquê das mesmas, e isto me trouxe uma clareza significativa e estimulante.

Entre os professores que tive no curso de Licenciatura da UFRGS e os professores no curso de Licenciatura da Universidade de Coimbra, onde estudei por dois anos em um programa de dupla diplomação, poucos foram os que incentivaram os licenciandos a utilizarem futuramente demonstrações em suas salas de aula. Constatei também que os trabalhos de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS que citam demonstrações representam aproximadamente 35% do total, mas, desses, são muito poucos os que falam propriamente sobre o uso de demonstração na escola. Sinto que esta porcentagem deveria ser maior, visto que, em livros didáticos, às vezes apenas dois exemplos, para um enunciado que admite infinitos exemplos possíveis, sugerem bastar para o convencimento da veracidade de tal enunciado, o que seguramente não é suficiente para que a ciência matemática o aceite como verdadeiro.

Existem, na literatura, defensores do ensino de demonstração e incentivo à argumentação matemática na escola básica, não só pelo impacto positivo que isto pode trazer a longo prazo para o aluno bem como pela formação de um cidadão em si, se concordamos que uma função essencial da escola é “oferecer *a todos* o acesso e a reflexão sobre o patrimônio científico e cultural da humanidade” (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2016, p. XV). No artigo "Estudo sobre a visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola" de Aguilar Junior e Nasser (2014), pode-se ver que os autores se preocupam com o presente ensino da matemática nas escolas, que visa principalmente à

operacionalização, negligenciando a necessidade da argumentação e da prova matemática como ferramenta para uma maior compreensão dos alunos, como mostram alguns relatos de experiência. Os autores buscam também sondar, entre professores do ensino básico por meio de questionários, o entendimento que estes possuem sobre demonstração matemática, questionando-os sobre seu desempenho como professores nesse quesito. Concordamos que, “como educadores matemáticos, é nossa missão fazer com que estudantes entendam matemática. (...) Em apoio a esta missão, devemos dar um lugar mais proeminente no currículo de matemática para provas que explicam” (HANNA, p. 12, 1990). Se nossos alunos pudessem se convencer, e de forma não passiva, da veracidade das proposições que aprendem, eles poderiam adquirir uma maior autonomia com o raciocínio matemático e talvez depoimentos como “a matéria que mais gosto é a matemática, por que não precisamos ficar decorando as coisas, é só pensar” (CARVALHO, p.118, 2010) seriam mais frequentes.

Durante minha trajetória acadêmica surgiram-me os questionamentos: Por que não fui apresentado antes ao método dedutivo e ao pensamento matemático inerentes à Ciência Matemática? Será que eu e meus colegas de ensino médio e fundamental não teríamos maior êxito ou, no mínimo, maior empolgação em matemática se entendêssemos de onde surgiam tantas fórmulas? Passei boa parte do meu tempo no curso de graduação em Licenciatura em Matemática com estas questões em mente e decidi que meu trabalho de conclusão de curso teria como foco a argumentação matemática e a demonstração na escola básica, tendo, como questão inspiradora,

O estudante tem condições de utilizar pensamento genérico em argumentações matemáticas, que visam uma demonstração nos anos finais do ensino fundamental?

Com esta pesquisa, objetiva-se trabalhar com os alunos conteúdos relacionados às operações básicas da matemática, visto que a deficiência do entendimento destas prejudica o aluno no entendimento e desempenho de muitos outros conteúdos. Pretende-se mostrar aos alunos que é possível provar fórmulas e outras relações na matemática (que serão discutidas mais à frente), sem precisar apenas “tirá-las do bolso”, buscando restaurar assim um sentido para a matemática que vem se ausentando das escolas.

No capítulo 2, é esclarecido o significado do termo *demonstração* utilizado ao longo de todo o trabalho, e são feitas algumas considerações sobre a viabilidade do uso de demonstrações com alunos da Escola Básica, além de ser explicado como foram coletados os dados para a pesquisa. No capítulo 3, são apresentados os planejamentos das atividades bem como sua implementação e reflexões sobre os resultados obtidos. Por fim, o capítulo 4 trata

das considerações gerais sobre o trabalho, explicitando questionamentos do autor e para o leitor sobre o ensino de matemática no nível escolar.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, com o intuito de providenciar bases teóricas que sustentem a reflexão motivada pela pergunta diretriz *Que tipo de pensamento genérico e de argumentação os alunos apresentam quando desafiados a provar que a soma de quaisquer dois números pares é um número par, a soma de quaisquer dois números ímpares é um número par e a soma de um número par qualquer e um número ímpar qualquer é um número ímpar?*, discutiremos os principais temas vinculados a tal pergunta.

Começamos esclarecendo o que significamos, neste trabalho, quando empregamos o termo *demonstração*. Como colocado por Ripoll, Ripoll e Silveira, *demonstração (matemática)* é um *encadeamento de deduções* que “mostram que o resultado afirmado em uma conjectura¹ é uma consequência lógica e irrefutável de resultados matemáticos já aceitos como verdadeiros” (p. 16, 2011, grifos nossos). Ressaltamos, no entanto, que, antes do encadeamento propriamente dito de uma demonstração, há muito mais. Para isso, voltamos a algumas considerações sobre como surge uma demonstração e onde elas se aplicam em nossas discussões.

Quando nos questionamos, por exemplo, se “a soma de dois números pares é um número par”, podemos fazer/testar alguns exemplos, tais como $2 + 2 = 4$, $2 + 4 = 6$ e $4 + 4 = 8$. A partir desses exemplos, podemos *intuir* que a soma de pares é, de fato, par. No entanto, esta intuição não constitui uma demonstração, mas é parte importante do processo de reflexão e argumentação: a partir dos exemplos, todos eles confirmando tal afirmação, esta passa do status de mera afirmação para o status de *conjectura*, e passa-se à etapa da *demonstração*. A demonstração passa a ter um papel irrefutável se pensarmos também no seguinte exemplo: uma vez percebendo-se que os números 3, 5 e 7 são números primos, pode-se acreditar que todo o número ímpar é primo. Os exemplos mencionados permitem-nos apenas formular conjecturas. O que diferencia ambas é o fato de uma provar-se verdadeira enquanto a outra prova-se falsa. É a demonstração que comprova que tais conjecturas têm, afinal, valores lógicos distintos, apesar de ambas terem nascido de uma intuição.

Fischbein (1982) em seu artigo *Intuition and proof* (Intuição e demonstração), explora o papel da intuição na criação de demonstrações. Deixa claro que, para Piaget,

¹ Uma conjectura é uma afirmação matemática sobre a qual se tem alguma evidência da veracidade, mas não a certeza. (RIPOLL, RIPOLL, SILVEIRA, p. 16, 2011)

Uma criança de oito anos não é capaz de aprender ponderadamente o significado e o uso da demonstração matemática por que, nessa idade, ele ainda não dominou as qualidades mentais necessárias: pensamento hipotético-dedutivo, plena capacidade de produzir e provar hipóteses, operações mentais de segunda ordem, etc. (p. 10, 1982)²

mas alerta para o que ele reflete de Piaget sobre processos de pensamento intuitivo, sugerindo que este os considera substitutos para um completo entendimento formal, antes que este seja possível para a criança. Fischbein defende que as “estruturas intuitivas são componentes essenciais de todas as formas de compreensão ativa e de pensamento produtivo” (p. 10, 1982), referindo-se à observação de Piaget sobre as estruturas lógicas, e afirmando que, mesmo após adquirido o entendimento formal, as estruturas intuitivas ainda possuem um importante papel. Fischbein propõe que este tipo de confusão, entre estruturas intuitivas e estruturas formais, se deve à não distinção entre *intuição* e *senso-comum*. Ele explica intuição como uma função simbólica análoga à percepção, de “preparar e guiar a ação” (p. 11, 1982), isto é, como a percepção é a capacidade de perceber/compreender através de situações, objetos ou sensações concretas é também a intuição, mas em condições nas quais não se pode determinar a concretude do objeto/situação/sensação. Derivada de uma forma de conhecimento, ainda que proveniente de um processo inconsciente, a intuição nos permite organizar e premeditar ações por ordem de eficiência, generalizar reações e relações e assumir veracidade, estendendo a validade de uma afirmação para além do conjunto no qual esta é válida, como a conjectura de que todo número ímpar é um número primo, por exemplo, muito parecido com convicções *a priori*.

Mas então, qual é o papel da intuição para a matemática e, mais precisamente, para a demonstração? Fischbein afirma que “acreditar em certas representações ou interpretações significa que você sente que elas aparecem para você como sendo comportamentalmente significativas” (p. 13, 1982), ou seja, é necessário uma espécie de comprometimento pessoal com certa representação/relação, que vem pela forma de credibilidade, aceita ou negada intuitivamente. “Saber e usar a distributividade da multiplicação para a adição: $a(b + c) = ab + ac$ e entender intuitivamente esta lei não são, é claro, a mesma coisa” (p. 12, 1982). Acredito que o papel da intuição para a demonstração em sala de aula é o de proporcionar motivação aos alunos. Naturalmente, somos impelidos a buscar algo em que acreditamos, ao contrário do que não nos é de algum modo atraente. Portanto, intuir a veracidade de uma conjectura, para os alunos, me parece fundamental, pois assim podem surgir as perguntas:

² A partir daqui, citações de Fischbein, Hanna e Piaget serão traduzidas livremente.

“Mas por que isso é verdadeiro? Como é possível essa relação ser válida pra todos esses casos?”.

Sobre os diferentes tipos de demonstração, façamos algumas considerações. Hanna (1990), em *Proof, explanation and exploration: an overview*, apresenta o que é a demonstração no método axiomático-dedutivo, muito comumente encontrado em livros de matemática da academia:

A prova formal de uma dada sentença é uma sequência finita de sentenças tais que a primeira sentença é um axioma³ e as sentenças decorrentes são ou um axioma ou uma dedução ou uma aplicação de regras de inferência de uma sentença precedente, e última sentença é a que queríamos provar (p. 6, 1990).

No entanto, a autora considera em seu outro artigo, *Some pedagogical aspects of proof*, que, das diferentes formas que dispomos para demonstrar uma conjectura,

Os matemáticos parecem valorizar mais uma prova que tenha implicações interessantes para o ramo da matemática ao qual estão incorporados (...). A demonstração é valorizada por trazer relações matemáticas essenciais ao invés de meramente demonstrar a veracidade de um resultado (p. 8, 2000).

Ela assume, assim como outros autores, que existe um entendimento matemático que se dá justamente quando uma demonstração proporciona compreensão, esclarecimento, e afirma que “a demonstração pode fazer sua maior contribuição na sala de aula somente quando o professor é capaz de usar provas que transmitem entendimento” (p.7, 2000).

A autora ressalta ainda que, através dos trabalhos de Lakatos e Tymoczko (1986), se o formalismo imperasse na matemática, esta seria uma ciência restrita a muito poucos. Não queremos, com isso, abster nossas práticas pedagógicas da demonstração, mas reconhecemos que é preciso avaliar se a aplicação do método formal de demonstração é adequada para uma turma de sétimo ano ou para qualquer ano da Escola Básica. O conteúdo que se quer ensinar tem obviamente grande peso nessa avaliação.

Defensora da ideia de que as demonstrações trazidas para a sala de aula devem ser aquelas que promovam entendimento, a autora ainda traz exemplos. Ela defende que o professor deve tentar “trocar uma demonstração, do tipo não-explicativa, por outra igualmente legítima que tenha poder explicativo, que tenha o poder de trazer à tona a mensagem matemática no teorema”. A autora define o que considera uma demonstração explicativa citando o trabalho de Steiner (1978)

Uma demonstração explicativa refere-se à propriedade de caracterização de uma entidade ou estrutura mencionada no teorema, de tal modo que a partir da demonstração, é evidente que os resultados dependem da propriedade. Deve ser

³ Premissa aceita como evidente e verdadeira, indemonstrável.

evidente, isto é, que se substituirmos na demonstração um objeto diferente do mesmo domínio, o teorema desmorona; Mais, devemos ser capazes de ver, enquanto substituimos o objeto, como o teorema muda em resposta. (*Apud.* HANNA, p. 10, 1990)

Sobre o entendimento embutido em algumas demonstrações, Hanna conclui dizendo “como educadores matemáticos, é nossa missão fazer com que estudantes entendam matemática. É minha opinião que, em apoio a esta missão, devemos dar um lugar mais proeminente no currículo de matemática para as provas que explicam” e que um dos passos importantes para esta missão “(...)é identificar provas explicativas adequadas como alternativa para as tantas não-explicativas agora vigentes”.

Feitas estas considerações, surge-nos então a pergunta: Existem demonstrações que oportunizam maior entendimento do conteúdo a nível de escola básica? São, também, relacionadas a essa discussão as perguntas: É possível ensinar demonstrações aos alunos sem calcar em simbologia matemática? E, sobre o caráter cognitivo do ensino de demonstração, alunos de sétimo ano possuem as condições necessárias para compreender algumas demonstrações? Nas seções 2.1 e 2.2 explicitamos nossas expectativas sobre as respostas a essas perguntas. Com o material implementado (ver capítulo 3), ficamos convencidos de que a resposta a todas essas perguntas é *sim*.

2.1.SOBRE O USO DE SIMBOLOGIA MATEMÁTICA

Como sugere D’Amore (2007), a demonstração e o simbolismo matemático não precisam estar diretamente ligados inicialmente. O rigor da representação matemática (simbólica) deve ser trabalhado gradativamente ao longo dos anos. E, no que diz respeito à demonstração, ele afirma que vários autores, inclusive ele, concordam “que o estudante deve envolver-se tanto no plano da produção de demonstração como no plano da reflexão sobre o que se faz quando se elabora uma demonstração” e que Balacheff (1987) considera necessária uma mudança nas prioridades dos estudantes: “Do aluno prático, totalmente orientado para o domínio do saber fazer, passa-se ao aluno teórico cuja justificativa para sua atividade é aquela de conhecer”. (*Apud.* D’Amore, p. 343, 2007).

De fato, ao produzir-se uma demonstração, temos de, através de um encadeamento de deduções, mostrar um resultado anteriormente afirmado, consequência de resultados previamente estabelecidos. Assim, não faz parte dos requisitos e competências de uma demonstração o formalismo simbólico. Por exemplo, podemos dizer, no lugar de $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $a + b = b + a$, que, na adição de quaisquer dois números naturais, a ordem das parcelas não altera o resultado da adição. Em ambas as frases, a com simbologia e a sem simbologia, nos

referimo-nos à comutatividade da adição. Sem nenhuma perda da precisão matemática e do conteúdo matemático da propriedade, mostramos que é possível explicitá-lo sem o uso de linguagem simbólica. Para alunos do sexto e do sétimo ano, uma abordagem que evite simbolismo matemático pode ser uma alternativa para trabalhar-se com as demonstrações em sala de aula, bem como para uma introdução gradual à simbologia matemática. Prioriza-se assim, nestas etapas, a compreensão matemática embutida nas demonstrações.

Balacheff (1987) faz distinção entre os termos *prova* e *demonstração*. Para ele, prova é “uma explicação aceita por uma certa comunidade em um certo momento”, e que tal aceitação pode ser obtida por meio de um debate que pretenda estabelecer um sistema comum de validação entre os interlocutores.

Aguilar Júnior e Nasser (2013), embasados pelo trabalho de Balacheff (1987), consideram a tabela a seguir (Figura 1), dando como exemplo o enunciado “a soma de dois números pares quaisquer resulta um número par”:

| TIPOS DE PROVA (BALACHEFF, 1988) | DESCRIÇÃO | EXEMPLOS |
|---|---|--|
| Empirismo Natural (naive empiricism) | Define-se empirismo natural o exercício de argumentação em que o aluno tira suas conclusões a partir de um pequeno número de “testes” e “experimentos” que realiza. | Os alunos verificam a validade da afirmativa testando vários exemplos: $12 + 26 = 38$; $16 + 20 = 36$ |
| Experimento Crucial (crucial experiment) | Neste tipo de prova, verifica-se a realização de um experimento bastante particular e forte, ou seja, consiste em generalizar o problema e resolvê-lo mediante àquele experimento particular. | Os alunos julgam que, mostrando que a proposição vale com números muito grandes, valerá para todos os demais exemplos possíveis. Ex: $824 + 632 = 1456$; $1890 + 2020 = 3910$ |
| Exemplo Genérico (generic example) | O exemplo genérico, como o termo sugere, é o tipo de prova em que o aluno elege um exemplo como representante da classe de todos os exemplos possíveis que atendem à proposição. Da manipulação deste exemplo tomado, são concluídas propriedades e estruturas. | Ex: $24 + 36 = 2(12 + 18) = 2 \times 30 = 60$; $128 + 26 = 2(64 + 13) = 2 \times 77 = 154$. |
| Experimento Mental (thought experiment) | Segundo Balacheff (1998, p. 219), o experimento mental “evoca a ação, internalizando-a e desligando-se de uma representação particular”. | Se p e q são números pares, então existem números naturais m e n tais que $p = 2m$ e $q = 2n$. Então: $p + q = 2m + 2n = 2(m + n)$, com p e q números naturais. Logo, $p + q$ é par |

Figura 1 – Tabela dos tipos de prova de Balacheff

Nosso interesse, neste texto, não é a “prova”, no sentido de Balacheff. É um requisito para nós que seja a comunidade de matemáticos a avaliadora do valor lógico de uma sentença matemática, e não simplesmente a comunidade dos alunos de uma sala de aula, por exemplo. Por isso, neste texto, não faremos uso do termo *prova*. O que destacamos neste trabalho são

três conceitos diferentes que dizem respeito a três etapas diferentes da argumentação (ainda que não estejamos considerando todas). À reflexão que o aluno faz quando se dá conta de que o argumento feito em um caso particular funciona também para qualquer elemento de uma família denominaremos *pensamento generalizador*. Nem sempre natural, o pensamento generalizador pode precisar de um estímulo do professor para aparecer em sala de aula, pois, em geral, o aluno não consegue perceber sozinho que o mesmo argumento utilizado para demonstrar, por exemplo, a irracionalidade de raiz de dois (ou seja, que não existe número racional cujo quadrado é igual a dois) serve para demonstrar a irracionalidade de raiz de três ou de qualquer outro número primo. Este tipo de pensamento encontra-se embutido no “Exemplo Genérico” descrito por Balacheff. Quando, a partir do pensamento generalizador sobre um exemplo particular, o aluno for capaz de organizar e explicitar sua argumentação desvinculando-se desse exemplo particular e passando a usar um elemento genérico da família que atende a tal generalização, diremos, neste texto, que o aluno está apresentando o *pensamento genérico*, seja com linguagem simbólica ou não. O pensamento genérico, ainda que não necessariamente constitua uma demonstração (pode ser apenas parte dela) está embutido no tipo de prova considerado por Balacheff como “Experimento Mental”. O terceiro conceito, a *demonstração*, que consideramos o tipo de argumentação utilizada na matemática como ciência, com base nas regras de dedução, pode não envolver o pensamento genérico, como nas demonstrações por apresentação de um contra-exemplo ou nas demonstrações que envolvem apenas um número finito de situações.

Ao incentivar os alunos a usar argumentação matemática, os tipos empirismo natural e experimento crucial, *não foram considerados demonstrações*, mas sim uma tentativa inicial do aluno, mais de testar conjecturas, do que de demonstrar afirmações, um argumento matemático insuficiente. Aos alunos que mostraram esse tipo de argumentação fora incentivada uma reformulação da resposta, perguntando-lhes se apenas para aquele(s) caso(s) a afirmação era válida. O tipo exemplo genérico, ainda não considerado como demonstração, foi incentivado de modo que o aluno conseguisse melhorá-lo. O tipo experimento mental, se completo no sentido de abrangência de todos os casos, *é considerado como demonstração*, mas não fora cobrado da turma, apenas incentivei que o aluno buscasse apresentar um argumento que comportasse todos ou a maioria de casos possíveis, sem necessariamente utilizar a linguagem simbólica.

2.2.SOBRE OS ESTÁGIOS DE DESENVOLVIMENTO

Segundo os estudos de Piaget, as capacidades de aprendizagem de uma criança são obtidas por meio do desenvolvimento das estruturas cognitivas, que se dá, no decorrer dos anos, através de estágios mais ou menos definidos pela idade do sujeito. De 0 a 1 ano e meio, tem-se o estágio sensório-motor, até os 6-7 anos de idade tem-se o estágio pré-operatório, entre 7-8 e 11-12 anos, o estágio operatório concreto, e dos 11-12 aos 14-15 anos, o estágio operatório formal. Como este trabalho teve sua implementação em uma turma de sétimo ano do ensino fundamental, focamos nosso discurso no estágio de desenvolvimento operatório formal.

Nesse estágio, segundo Piaget (1972), a criança começa a desenvolver mais sua capacidade de abstração, isto é, ela consegue operacionalizar certas relações que não são concretas, como hipóteses, começando a entender metáforas e sofisticando seu pensamento sobre o objeto, conectando-o a características ou propriedades em comum dentre um grupo de objetos. Acreditamos que, para um aluno compreender e reproduzir uma demonstração, ele precisa pensar genericamente, isto é, trabalhar com a(s) propriedade(s) em comum que possuem os elementos do conjunto em questão ou da operação em questão e que o(s) caracteriza(m).

O pensamento genérico, no contexto matemático, lembra uma forma refinada do pensamento desconectado, definido por Devlin (2008) em *O Gene da Matemática: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático*. Devlin denomina *pensamento desconectado* a habilidade que nosso cérebro tem de lidar com figuras e formas concretas de maneira abstrata. Um unicórnio, por exemplo, é uma criatura inexistente, que possui o corpo de um cavalo com um único chifre pontiagudo projetando-se de seu frontal. À capacidade de visualizar tal criatura, apenas por sua descrição, é o que o autor chama de pensamento desconectado, uma das capacidades que, segundo ele, quanto mais treinada, mais facilita na familiarização com a matemática. O pensamento genérico pode ser visto, então, como a capacidade que temos de converter e relacionar objetos concretos a situações abstratas.

Piaget mostra que o pensamento genérico já é possível com turmas de sétimo ano pois “pensar hipoteticamente e deduzir as consequências que as hipóteses necessariamente implicam (independente da verdade intrínseca ou falsidade das premissas) são operações do pensamento formal” (p. 158, 1972), pensamento este que se desenvolve durante o período entre os 11-12 aos 14-15 anos de idade. O autor explica que, neste estágio, a criança, agora

pré-adolescente, consegue pensar de maneira combinatória, não tendo que associar elementos por semelhanças físicas ou de proximidade, podendo fazer comparações maiores, entre 4 e 4 elementos que apresentem uma mesma característica de “natureza”, por exemplo.

Mas, como Piaget mesmo afirma, a idade em que se iniciam esses estágios pode variar conforme o contexto social em que se encontra a criança. Ele relata que, segundo pesquisas recentes à época, fora descoberto que dependendo de vários fatores, dentre culturais e socioeconômicos, a idade de 11-12 anos poderia não ser o início do estágio operatório formal, podendo iniciar tardiamente durante os 14-15 anos. É possível perceber o estágio em que o aluno se encontra ao oferecer problemas que envolvam raciocínio generalizador, pois, segundo Piaget, “eles não podem (...) resolver fórmulas matemáticas, mas podem descobrir, experimentalmente, métodos exaustivos de trabalhar com elas” (p. 159, 1972). Este método não é infalível, pois como ele mesmo comenta, é possível que a aptidão individual do aluno não seja do tipo lógico-matemática, podendo ser literária ou causal, por exemplo, mas os problemas podem ser adaptados de modo que seja possível observar para qual tipo de formalismo o sujeito tem maior aptidão. O autor considera hipóteses que apontam para a especialização do pensamento no estágio final de desenvolvimento cognitivo do ser humano, mas acaba por considerar as estruturas formais não apenas como de uma única função, função esta que varia conforme as vivências do sujeito, e começam a aparecer durante a pré-adolescência.

Feitas estas considerações, acreditamos que sim, um estudante de sétimo ano do ensino fundamental tem, em geral, as capacidades necessárias para uma iniciação no pensamento generalizador, que se dá, por exemplo, quando o aluno percebe que um argumento que funciona em um caso particular funciona também para qualquer elemento de certo conjunto, e ao pensamento genérico, que organiza e explicita uma argumentação matemática a partir do pensamento generalizador evidenciado, e, conseqüentemente, ao entendimento e até mesmo construções de demonstrações. Podemos ir além, se considerarmos os trabalhos de Fischbein e de Hanna, dizendo que é também possível o uso de demonstrações com alunos de séries anteriores, desde que se tome o cuidado para que a argumentação seja acessível aos alunos, partindo de situações em que a intuição do resultado é mais chamativa do que a lógica e apelando para demonstrações explicativas, e não apenas as expositivas, tudo isso em uma linguagem acessível à criança.

2.3.SOBRE A COLETA DE DADOS

Durante o período de prática pedagógica, relatada no capítulo três, fizemos coletas de dados através de relatórios dos alunos, testes e eventuais questionários. Tive também um caderno de campo, onde escrevia os relatos de cada uma das aulas, assim como frases ou colocações dos alunos que julguei importantes para o andamento da pesquisa, pois, como sugere Goldenberg (2004), “as pessoas têm maior paciência e motivação para falar do que para escrever”. Com perguntas orais durante as aulas temos uma “maior flexibilidade para garantir a resposta desejada”, podendo ser analisados vários aspectos do processo de raciocínio dos alunos. Ainda, como sugere Araújo e Borba (2004), essa coleta de materiais diversos para análise é aconselhável porque a multiplicidade de procedimentos na coleta de dados proporciona credibilidade à pesquisa.

Julgamos necessário também elaborar e aplicar um questionário de avaliação, no qual o aluno avaliasse tanto o papel do professor quanto o seu próprio durante as atividades, possibilitando, para o professor, a compreensão das consequências geradas por suas posturas e, para o aluno, uma auto avaliação. É importante também ressaltar o caráter qualitativo da pesquisa. Como afirmam Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999), Patton (1986) caracteriza a pesquisa qualitativa como sendo interpretativa, pois “partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado”.

3. PRATICANDO O PENSAMENTO GENERALIZADOR, PENSAMENTO GENÉRICO E DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo, relatamos o planejamento para as aulas que envolveram pensamento generalizador, pensamento genérico e argumentação do nível de demonstração. A aplicação da proposta pedagógica deu-se com uma turma de sétimo ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CAp UFRGS). Cabe ressaltar que, durante o período de aplicação dessa proposta, nossa atuação com a turma não foi exclusiva para a pesquisa. Deu-se durante meu período de estágio e nem todo o planejamento realizado foi capaz de comportar demonstrações em sala de aula. Em alguns momentos, esta impossibilidade deveu-se ao conteúdo trabalhado; em outros momentos, deveu-se ao fato de os conceitos necessários para o entendimento da demonstração ainda não estarem disponíveis para os alunos. Para concluir o estágio, eram necessários 14 períodos de observação e 35

períodos de docência e as aulas só começaram a ser planejadas depois do início das atividades, com exceção de uma, planejada durante o segundo semestre de 2015. Devido ao fato de a pesquisa ser realizada durante o período de estágio, a maioria dos planejamentos foi pensada com base nos resultados obtidos durante as aulas – comentados adiante – e, portanto, os planos de aula seguem sua ordem cronológica, com expectativas e resultados a cada aula.

As atividades no Colégio de Aplicação começaram no dia 21 de março de 2016. Começamos nossas observações analisando o perfil da turma e o comportamento desta perante os professores. Percebeu-se que a turma apresentava boa disposição para atividades diversificadas, trabalhando com afinco em sua grande maioria. Durante o período de observação, percebemos certa dificuldade por parte de alguns alunos sobre as operações elementares com os números naturais, o que nos motivou a realizar, em minha primeira aula como ministrante, um questionário sondagem sobre as operações elementares.

3.1. “COMO QUE FAZ A ADIÇÃO MESMO?”

Visto que, durante o período de observações, constatou-se, durante o acompanhamento da turma na resolução de exercícios propostos pela professora regente, que alguns alunos não tinham um bom domínio das operações elementares, foi planejado, para nossa primeira aula, dia 31 de março, um questionário sondagem, com o objetivo de observar que tipo de dificuldades os alunos possuíam e em qual(is) operação(ões). O questionário sondagem encontra-se na seção Apêndices (apêndice A).

O objetivo das primeiras três atividades foi de fazer com que os alunos tentassem recordar os algoritmos das operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e de algumas definições e conceitos do sexto ano, tais como: o que são múltiplos de um número, como encontrá-los/identificá-los e qual a definição de potência. Na questão quatro, o objetivo foi sondar a capacidade dos alunos de trabalharem exercícios dentro de um contexto. Nos exercícios cinco e seis, foi testada a capacidade dos alunos com respeito à comparação de grandezas e, no exercício 7, sondamos seus conhecimentos sobre o cálculo de área e de perímetro de figuras planas. Pretendeu-se, com a última questão, analisar como os alunos verbalizavam seus algoritmos para a adição e a multiplicação. O intuito desta atividade era o de oportunizar ao aluno a problematização de seu próprio conhecimento sobre as operações elementares, abrindo espaço para que se pudesse trabalhar com eles algumas propriedades que muitos usam no cotidiano intuitivamente, como por exemplo, a distributividade da multiplicação em relação à adição e a comutatividade e associatividade das operações de adição e multiplicação. Além disso, tinha-se o objetivo de motivar o aluno a utilizar

argumentos e justificativas para determinar o algoritmo das operações, ou descrever a forma como o usavam. Após a conclusão da atividade, seria feita uma correção em grupo, questionando como cada aluno respondeu as questões e verificando se entre a turma existiam respostas diferentes para uma mesma questão. Como os alunos estavam relembrando conceitos, foi decidido que a segunda aula seria dedicada a resgatar e aprimorar tais conceitos. Pediríamos então, como tema de casa, que os alunos tentassem descobrir o que acontece ao somarmos quaisquer dois números pares, quaisquer dois números ímpares e um número par qualquer com um número ímpar qualquer.

A aplicação da proposta, porém, foi um pouco diferente. Realizadas as apresentações iniciais, e explicada a razão desta pesquisa estar sendo aplicada naquela turma e também notando uma grande dispersão da mesma, tentou-se dialogar com os alunos sobre como eles viam a matemática, como eles percebiam seu significado. A primeira manifestação proferida: “Não sei”. Com mais estímulo, consegui algumas outras respostas, como “Matemática é a ciência que estuda os números”, “É uma ciência exata” e “uma ciência que estuda as formas”, esta última referindo-se à geometria. Falando um pouco sobre padrões, mas percebendo que os alunos não estavam conseguindo acompanhar o raciocínio, talvez pelo desconhecimento do significado da palavra *padrão*, resolvi apresentar a atividade planejada, entregando aos alunos o questionário sondagem (apêndice A), solicitando-lhes que respondessem todos os itens em seus cadernos, com exceção da questão oito (explicitada a seguir), que deveria ser respondida atrás da folha e entregue ao professor no final do período.

Notou-se que, no início, muitos alunos estavam conversando, não focados no trabalho, mas aos poucos, foram melhorando, empenhando-se mais na resolução dos exercícios. Enquanto realizavam as atividades, eu passava entre as classes tirando dúvidas e ajudando os alunos. Percebi que muitos deles estavam com dificuldades nos exercícios envolvendo divisão e multiplicação. Poucos entendiam de fato o algoritmo e alguns alunos apenas pediam para que eu explicasse *o próximo passo*, como se apenas com aquela regra eles chegassem no resultado correto. Próximo do término do período, comecei a recolher os questionários, percebendo que a maioria dos alunos conseguira responder até a questão de número seis. Avaliando a questão de número oito:

Explique, com palavras, como você realiza as seguintes operações:

- a) $23 + 34$ b) $18 + 65$ c) 3×24 d) 12×96

pude perceber que, dos dezoito alunos que responderam, a maioria usou argumentos do tipo “pego o maior, somo com o menor e chego no resultado”, sem explicar os conceitos e/ou proposições envolvidas, provável resultado de fatores como a dificuldade de comunicação

com o novo professor, a falta de prática com este tipo de atividade, a falta de um exemplo que orientasse o raciocínio e enunciado mal redigido. Dos dezoito, doze alunos evidenciaram a estratégia de adição que utilizam: ora, começar o cálculo colocando o número maior em cima ou à esquerda é o que muitos de nós fazemos ao calcular uma adição de números naturais quaisquer fazendo uso, muitas vezes inconscientemente, da propriedade comutativa da adição.

Dois dos dezoito alunos que responderam à questão 8 explicaram suas somas pela separação do número em dezenas e unidades, “Somo o dois com o três, que são dezenas e o três com o quatro, que são as unidades”, mas atrapalharam-se ao tentar explicar o mesmo processo para a multiplicação. Outros dois alunos fizeram a separação entre dezenas e unidades, porém sem explicitar que era isso o que faziam: “Eu somo vinte e trinta (igual a cinquenta) depois três e quatro (igual a sete) e aí eu somo os resultados. $50 + 7 = 57$ ”. Estes alunos explicaram de maneira semelhante a multiplicação do item c), “primeiro faço três vezes quatro, depois três vezes vinte e aí eu somo os resultados. $3 \times 4 = 12, 3 \times 20 = 60, 12 + 60 = 72$ ”, mostrando um uso inconsciente da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Porém, no item d), ambos os alunos conseguiram explicar a multiplicação de 12×96 como $2 \times 96 + 10 \times 96 = 192 + 960 = 1152$, apenas, não separando 96 em nove dezenas e seis unidades.

Pela falta de tempo, diferente de como fora planejado, tive de encerrar a aula tendo corrigido no quadro com os alunos apenas até o exercício quatro e pedindo a eles que, como tema de casa, investigassem a paridade das somas de dois números pares, ímpares e um número par com um número ímpar. Considerou-se a aula produtiva, pois, ainda que os alunos não tivessem correspondido a todas as nossas expectativas, foi possível estabelecer algumas considerações sobre as próximas atividades, que deveriam comportar, por exemplo, uma revisão sobre a soma e a multiplicação de números naturais, envolvendo, entre outras coisas, os conceitos de unidade, dezena, centena, ou seja a decomposição de um número natural no sistema decimal.

3.2. A ADIÇÃO DE NÚMEROS PARES E DE NÚMEROS ÍMPARES

Para a segunda aula com a turma, foi decidido utilizar um plano de aula influenciado e inspirado pelo trabalho de Carvalho (2013). Planejamos, então, continuar corrigindo os exercícios da aula anterior, pois reparei que os alunos tiveram dificuldades com algumas das questões. Após a correção, cobraríamos dos alunos o tema, perguntando-lhes se conseguiram notar algum padrão, no que diz respeito à paridade do resultado, na soma de números pares, na soma de números ímpares e na soma de números pares com números ímpares. Como

surgiram contratempos na prática pedagógica desta atividade, fazemos aqui uma comparação mais minuciosa entre o planejamento e o ocorrido, apresentando o desenvolvimento pensado em partes, seguido de comentários sobre como ocorrera a atividade, além de considerações sobre a implementação.

3.2.1. SOMA DE PARES

Planejamos para a segunda aula uma atividade envolvendo pensamento generalizador e pensamento genérico, motivados pelo tema de casa da primeira aula, sobre a paridade da soma de quaisquer dois números pares, de quaisquer dois números ímpares e de um número par com um número ímpar. Supondo que os alunos não teriam conseguido, em casa, generalizar e/ou criar e organizar justificativas para suas conjecturas, propusemos uma atividade em que o aluno seria confrontado com situações de adição de números pares e de números ímpares, sendo também desafiado a criar uma justificativa que mostrasse que as conjecturas sugeridas por tais adições, a saber,

- i)* O resultado da adição de quaisquer dois números pares é um número par;
- ii)* O resultado da adição de quaisquer dois números ímpares é um número par, e;
- iii)* O resultado da adição de um número par qualquer com um número ímpar qualquer é um número ímpar,

são afirmações verdadeiras, passando-as para o status de teorema (sem fazer uso deste termo em sala de aula). Levando em conta Hanna quando esta diz:

Enquanto explorar e demonstrar são atividades separadas, elas são complementares e reforçam uma a outra. Não apenas são ambas partes da resolução de problemas, no geral, como são ambas necessárias para o sucesso na matemática, em particular. Exploração leva à descoberta, enquanto demonstração é confirmação. (p. 14, 2000)

acreditamos que uma boa maneira de propiciar o entendimento necessário para a elaboração das justificativas, seria o de apresentar aos alunos um experimento, passível de exploração, que, aos poucos, se tornasse uma abstração, e uma conjectura passando para o campo da confirmação, isto é, da demonstração da conjectura.

Assim, planejei a atividade da seguinte maneira. Escolheríamos dois potes com tampa e não transparentes, de modo que o conteúdo não ficasse visível para os alunos com os potes tampados. Para a primeira conjectura, pegaríamos certa quantidade de bolas de gude e as dividiríamos em sacos, de modo que em cada saco tivéssemos duas bolas de gude.

Começaríamos a explicação colocando um saquinho em cada pote perguntando, em seguida, qual o resultado da adição do conteúdo dos dois potes e qual a paridade do resultado. Continuaríamos a atividade aumentando o número de sacos em cada pote, não necessariamente igual para ambos, e perguntando sobre o resultado e a sua paridade. Nossa expectativa era que os alunos perceberiam que os resultados, neste caso, seriam números pares. Daí lançaríamos a conjectura: será que a conclusão vale sempre, para quaisquer números pares que escolhamos? Na expectativa de que respondessem que sim, instalar-se-ia então a conjectura e os alunos seriam então desafiados a justificar o porquê de o resultado continuar sendo par. Para amparar a questão com o concreto, no último exemplo, deveríamos pegar uma quantidade de sacos sem contá-los e colocá-los em cada um dos potes, tampando-os em seguida, de modo que os alunos não poderiam contar a quantidade de sacos que fossem colocados dentro dos potes, tendo que elaborar uma justificativa com base na propriedade característica dos números pares e no conceito de adição. Todas as etapas deveriam ser registradas pelos alunos em uma folha, na forma de um relatório, para ser entregue ao fim da aula. Pensou-se também, ao término dos registros, solicitar aos alunos que lessem suas respostas em voz alta para que pudéssemos confrontá-las e gerar nova discussão sobre as diferentes demonstrações que eventualmente aparecessem.

A implementação da atividade planejada para a essa aula, porém, decorreu de maneira diferente. Ao entrar em sala de aula e perceber certa insegurança por parte dos alunos em relação às últimas questões do questionário sondagem, continuei com a correção do mesmo, prestando atenção ao semblante dos alunos. Durante a correção, reparei que muitos ficaram confusos com a questão de número sete, que versava sobre as áreas de um retângulo e de um hexágono regular. Como o objetivo da aula não era aprofundar conceitos do sexto ano, apenas revisá-los, resolvi prosseguir, sem me ater muito a explicações sobre a área das figuras naquele momento.

Sobre a questão oito, dos vinte e nove alunos da turma, apenas quatro haviam respondido de acordo com o que eu esperava, como comentado anteriormente. Relembrei então à turma a definição de unidade, dezena e centena, explicando para eles que algumas justificativas não foram consideradas satisfatórias, pois não explicavam como o aluno chegara no resultado, mas que isto decorreria de possíveis imprecisões no enunciado da questão e na comunicação entre eu e eles. Mostrei à turma como faz-se a soma em geral (algoritmo por ordens) e expliquei por que aumentávamos uma unidade na ordem das dezenas: quando se tem uma soma com unidades suficientes para completar uma dezena, formamos esta dezena e a adicionamos às demais dezenas. Um processo análogo foi utilizado para explicar o

algoritmo da multiplicação que envolvia reconhecer centenas, dezenas e unidades e multiplicá-las separadamente, como por exemplo, em 13×15 , 3 e 5 são unidades e os dois algarismos 1 representam uma dezena, portanto 10 unidades cada e, ao fazer a multiplicação, deveríamos multiplicar 3×5 , 3×10 e 10×5 , 10×10 , para então somarmos os resultados, obtendo $15 + 30 + 50 + 100 = 195$. Mas como a atenção dos alunos estava começando a desaparecer, não me demorei muito na explicação, ainda que eu constantemente perguntasse aos alunos qual seria o resultado da operação e o que fazer a seguir, como “multiplicamos dois por seis, que dá...”, esperando que completassem a frase. “E agora, fazemos o quê? Por que fazemos isso?”, referindo-me ao item d) do exercício oito.

Contrariamente ao meu planejamento inicial e priorizando o entendimento dos alunos, optei por dedicar um tempo maior para esclarecer as respostas das resoluções de exercícios, para só então continuar com o pretendido, entregando aos alunos folhas pautadas para que eles pudessem escrever seus relatórios. Com dois potes de sorvete, um branco e um azul, dispostos sobre a mesa, me pareceu, naquele momento, que seria uma boa ideia convidar os alunos a posicionarem-se mais próximos à mesa do professor, de modo que todos pudessem ver o conteúdo dos potes. Pedi para que os alunos se reunissem à frente de minha mesa, observando os exemplos e anotando os resultados para os seus relatórios, o que se provou depois uma má ideia. Comecei perguntando aos alunos o que era um número par e como poderíamos defini-lo. Diferente do planejamento, concordamos que seria necessária uma definição dos próprios alunos sobre o que era um número par *para eles*. Analisando os resultados posteriormente, vimos que esta pergunta fora de grande importância para o andamento das atividades, provavelmente sendo melhor aproveitada se proposta anteriormente, no questionário sondagem. No primeiro exemplo, onde coloquei um saco com duas bolas de gude em cada um dos potes, os alunos ainda estavam prestando atenção e focados na atividade, mas como alguns não estavam conseguindo enxergar o que eu fazia, antes de colocar os sacos em cada um dos potes, levantei os sacos para que toda a turma pudesse ver. No segundo exemplo, vi que mais alunos estavam dispersos, quando coloquei uma quantidade par de sacos em um dos potes (dois sacos) e uma quantidade ímpar de sacos no outro pote (três sacos). Os alunos, depois de alguns segundos, perceberam que a quantidade da soma continuaria sendo par. Durante o exemplo, percebi dois tipos de dispersão por parte da turma: alunos dispersos por não estarem interessados e/ou acompanhando o exemplo, que eram poucos, e alunos que já haviam intuído que a soma de quaisquer dois números pares seria também um número par, a maioria. Em resposta a isto, não consumei alguns dos exemplos planejados, apenas verbalizei a operação e pedi que os alunos me

dissessem se a soma seria um número par ou um número ímpar, como, por exemplo, “Se somo doze e dezoito, o resultado é par ou ímpar?”, “Se somo trinta e seis com quarenta e oito, o resultado é par ou ímpar?”, ao passo que os alunos respondiam, “É par!”.

Passei então para o exemplo genérico. Peguei certa quantidade de sacos sem contá-las e as coloquei no pote azul. O restante dos sacos, coloquei no pote branco e tampei-os de imediato. Perguntei aos alunos “E agora, não sei quantas bolas de gude tenho em cada pote, mas posso, ainda assim, afirmar que a soma destas quantidades é um número par?”. Grande parte dos alunos ficaram confusos com a pergunta, sendo que muitos resistiram ao fato de não poderem contar a quantidade exata, tentando levantar os potes para que, com a luz, conseguissem ao menos estimar as quantidades. Poucos alunos agora concordavam com a certeza anterior de que o resultado da adição do conteúdo dos potes seria par. Pedi que pensassem em como poderíamos descrever aquela situação. Tive de prosseguir a aula com as sugestões que recebi, tentando encontrar uma maneira de explicar a eles como poderiam representar o conteúdo das caixas sem dizer exatamente quantas unidades havia dentro delas. Sugeri que os alunos utilizassem letras, símbolos ou nomes para denotar as quantidades de cada pote, o que pareceu ajudar a maioria dos alunos sobre como representar as quantidades. O objetivo desta atividade também era o de incentivar os alunos a fazerem abstrações, porém, talvez esta abordagem tenha sido um pouco precipitada, no seguinte sentido: Dei-me conta posteriormente que, quando introduzi o exemplo generalizador, eu deveria ter perguntado, por exemplo, se poderíamos afirmar que a quantidade de cada um dos potes era um número par, pergunta que serviria como uma primeira abstração para só então, perguntar sobre a soma do conteúdo de ambos os potes. Levei um bom tempo (e perdi boa parte da atenção da turma) tentando explicar como eles poderiam representar as quantidades e, quando concluíram, criando uma justificativa para o resultado da adição de dois números pares quaisquer, já estávamos no fim do período, portanto pedi que, para finalizar a aula, eles anotassem no relatório “o que é um número ímpar” e pensassem comigo como poderíamos representar diferentes números ímpares usando as bolas de gude. Eventualmente, os alunos sugeriram que poderíamos tirar uma bolinha de um dos saquinhos e somá-la aos outros saquinhos, de quantidades pares, formando um número ímpar. Para formar o número cinco, então, precisaríamos de dois saquinhos com duas bolas de gude e um com uma bolinha.

Após a aula, observando os relatórios entregues, vi que alguns alunos não escreveram as perguntas que fiz a eles; um aluno inclusive, entregou o relatório em branco. Percebi também que a maioria dos alunos não souberam definir ou não escreveram o que era um número par e apenas metade da turma compreendeu como denotar as quantidades que não

conhecíamos, no exemplo final, da soma de dois números pares quaisquer. Na Figura 2, tem-se um exemplo de como um dos alunos representou cada uma das caixas, sem impor valores para as quantidades:

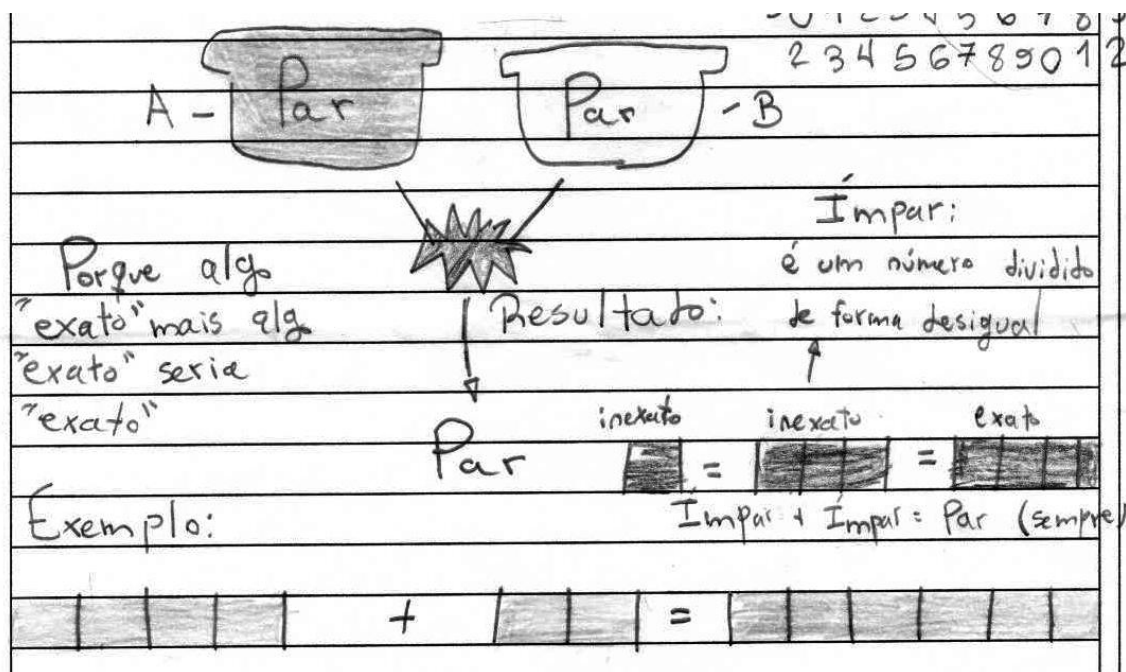


Figura 2 – Representação das quantidades dos potes

Muitos tentaram explicitar ou imaginar uma quantidade para os números de bolas de gude nas caixas, como mostra a Figura 3.

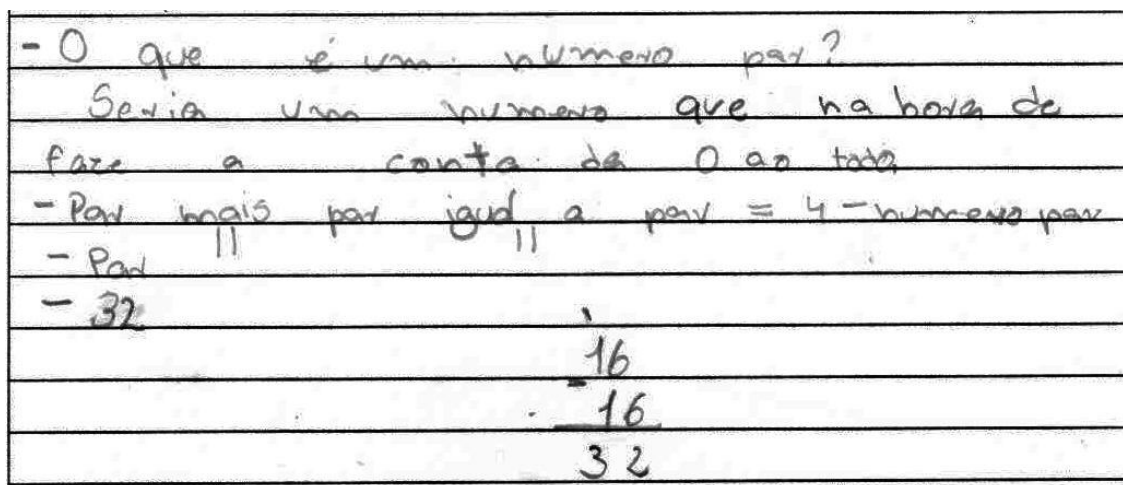


Figura 3 – Aluna A supondo quantidades

Ao justificar o que era um número par, a aluna A diz "Seria um número que na hora de 'fazer' a conta da 0 ao todo". Ao tentar representar as quantidades do terceiro exemplo, a aluna supõe quantidades iguais nos dois potes, ainda que durante a explicação eu tenha ressaltado, mais de uma vez, que a quantidade de bolas de gude em um pote poderia ser diferente da

quantidade do outro pote. Ainda que cerca de dezoito dos vinte e nove alunos não aparentaram ter compreendido totalmente a atividade, apenas quatro não a realizaram ou não a compreenderam. Na turma, apenas cinco conseguiram apresentar uma justificativa considerada satisfatória. Consideramos satisfatórios os argumentos que não utilizaram exemplos, mas sim propriedades e definições dos números pares, evidenciando alguma abstração. Alguns alunos definiram corretamente números pares como “números que terminam em 0, 2, 4, 6 e 8”. Um dos alunos que apresentou esta definição, ao justificar a soma de números pares, não seguiu o raciocínio, mas apresentou uma justificativa consistente: “Cada saco tem duas bolas logo os dois potes vão ter número par de bolas” (Figura 4).

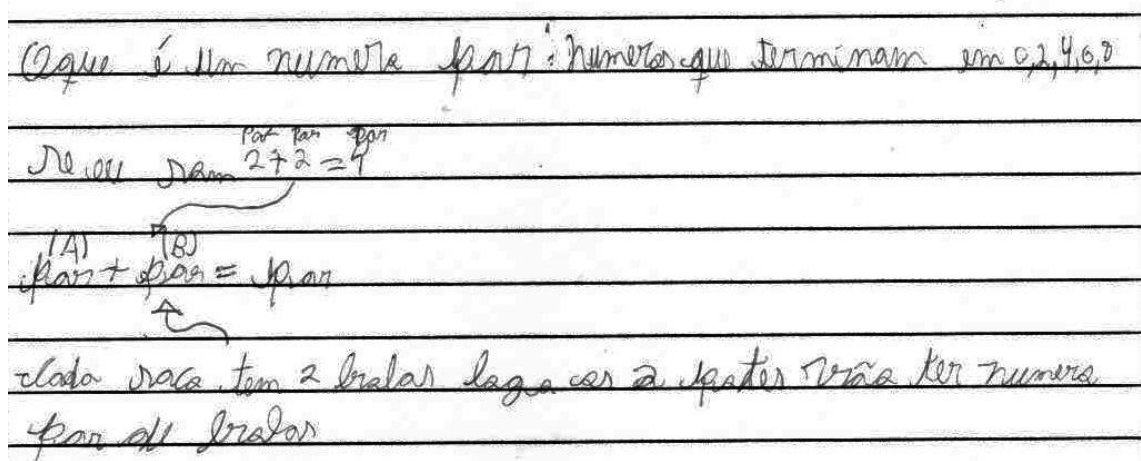


Figura 4 – Aluno justificando o conteúdo dos potes

Ainda que não condizente com o relatório, conversando com este aluno, pude perceber que ele havia compreendido e sabia explicar seu raciocínio, mas teve dificuldade em se expressar. Ele quis dizer que não era possível o resultado da adição ser diferente de um número par, pois se extraíssemos e juntássemos as quantidades de dentro dos potes, veríamos que todos os sacos eram de conteúdo par, portanto, teríamos certa quantidade de sacos vezes seu conteúdo, isto é, $2n$, com $n \in \mathbb{N}$. Como outros alunos solicitavam minha ajuda, atrapalhei-me e esqueci de convidar o aluno a escrever essa explicação em seu relatório, fato que percebemos posteriormente analisando as observações da aula. Vi que vários alunos não conseguiram se expressar da mesma forma como faziam oralmente, pois, durante a explicação, muitos deram boas sugestões e contribuíram para o prosseguimento da atividade. Confirmou-se aqui a frase de Goldenberg (2004) mencionada no capítulo anterior: “as pessoas têm maior paciência e motivação para falar do que para escrever”. Decidi que, para a retomada na aula seguinte, mudaria um pouco a abordagem, ajudando os alunos ao criar uma

definição para números pares e números ímpares, uma que os ajudasse a criar melhores justificativas para a afirmação “a soma de quaisquer dois números pares é um número par”.

3.2.2. A SEGUNDA AULA

Inicialmente, o plano que tínhamos elaborado seria aplicado em quatro períodos com a turma. Seguindo o planejado, teríamos de continuar a atividade introduzindo a adição de quaisquer dois números ímpares e mostrar que seu resultado era sempre par. Continuaríamos usando os potes de sorvete, representando os números ímpares conforme sugestão dos alunos, que acreditamos, seriam capazes de representá-los. A atividade, tentando provar as outras duas conjecturas (itens *ii* e *iii*), p. 21), seguiria por processos análogos à anterior. Ou seja, os alunos observariam alguns exemplos de adição entre dois números ímpares e exemplos da adição de um número par e um número ímpar, em que poderiam observar as relações das somas para então serem apresentados ao exemplo final generalizador. Sem contar, colocaríamos certa quantidade em cada um dos potes, sendo para a segunda conjectura duas quantidades ímpares e para a terceira conjectura uma quantidade par e uma quantidade ímpar, tampando os potes em seguida. Então, os alunos seriam desafiados a criar justificativas que mostrassem que a conjectura era verdadeira. Para fixação dos conceitos, aplicaríamos um exercício em que os alunos teriam de encontrar a paridade das seguintes expressões e treinariam mais um pouco o pensamento genérico:

Sabendo que p representa um número par qualquer e i representa um número ímpar qualquer, descubra a paridade do resultado das seguintes operações:

- a) $p + p + p + i = ?$
- b) $p + p + p + p + p + i + i + i + i = ?$
- c) $i + i + i + p + p = ?$

Acreditávamos que o uso das letras (na verdade variáveis), devido à semelhança com as palavras “par” e “ímpar”, não causaria maiores problemas em termos de maturidade para trabalhar com o pensamento algébrico e seriam encaradas mais como uma forma resumida e confortável de referir-se a tais números, o que se provou verdadeiro durante a aplicação da atividade.

Planejávamos também, nestes quatro períodos, revisar e demonstrar com os alunos as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação. Para motivar a definição das propriedades comutativa e associativa da adição, seguiríamos o exemplo de Carvalho (2013), com pequenas alterações baseadas nos resultados obtidos pelo autor. Usando os potes de sorvete e as bolas de gude, mostraríamos aos alunos alguns exemplos de adições,

colocando certa quantidade de bolas em um pote e outra quantidade no outro pote. Trocando os potes de lugar entre si, mostraríamos a comutatividade da adição: na adição de dois números quaisquer, a ordem das parcelas não altera o resultado (chamado soma). Os alunos seriam apresentados aos exemplos generalizadores – colocando quantidades desconhecidas por eles em cada um dos potes e tampando-os em seguida – e desafiados a criarem um enunciado e uma demonstração para a propriedade comutativa da adição.

Para a associatividade usaríamos um terceiro pote. Começaríamos por exemplos que os alunos pudessem visualizar, passando para o exemplo generalizador. A propriedade seria explicitada colocando os três potes em disposição sobre a mesa, em uma linha reta imaginária e equidistantes entre si. Colocaríamos quantidades aleatórias de bolas de gude em cada um dos potes e perguntaríamos se o resultado da adição final seria diferente ao mudar-se a ordem de início do cálculo: se começando a somar os potes da esquerda e do meio e somando este resultado ao pote da direita ou se começando a somar os potes da direita e do meio e somando este resultado ao pote da esquerda. Ilustraríamos essa situação aproximando o pote do centro aos potes da esquerda e direita, respectivamente. Os alunos, após o exemplo generalizador, seriam desafiados a criar, também para a associatividade da adição, um enunciado e uma demonstração com suas palavras. O objetivo desta atividade era o de conscientizar os alunos sobre propriedades que os mesmos usam no cotidiano, sem perceber, como, por exemplo, nos algoritmos das operações elementares e no cálculo mental. Como comentamos anteriormente, alguns alunos utilizaram-se da propriedade distributiva da multiplicação relativa à adição intuitivamente, percebendo que o resultado da multiplicação de 3×24 é o mesmo que de $3 \times (20 + 4) = (3 \times 20) + (3 \times 4)$, por exemplo.

Para a propriedade comutativa da multiplicação, tive a ideia de fazer uma tabela com linhas e colunas e pedir aos alunos que descobrissem o número de células contando de perspectivas diferentes. Inicialmente, com tabelas menores, os alunos poderiam contar as células, uma a uma, mas à medida que aumentássemos as tabelas, os alunos seriam tentados a usar a multiplicação. Pediria aos alunos que, então, fizessem o mesmo cálculo, porém, desta vez, mudando a tabela de posição, de modo que linhas se tornassem colunas e colunas se tornassem linhas. Ao sistematizar no quadro, a turma poderia perceber que, também para a multiplicação, a ordem dos fatores não altera o produto.

Para a associatividade da multiplicação, pensei inicialmente em usar os sacos com as bolas de gude das atividades anteriores, podendo representar o cálculo $(2 \times 3) \times 2$ como dois sacos com três bolas vezes dois, ou seja, fazendo já uso da propriedade comutativa, e reconhecendo que $(2 \times 3) \times 2 = 2 \times (2 \times 3)$, o resultado do produto seria dois sacos, cada

um comportando dois sacos com três bolas cada. Para representar o posicionamento dos parênteses em outro lugar, pegaríamos três sacos com duas bolas de gude cada, duas vezes, ou seja, teríamos dois sacos, cada um com três sacos de duas bolas de gude cada, representando o cálculo $2 \times (3 \times 2)$, mostrando um único exemplo da associatividade da multiplicação, ilustrado pela Figura 5:

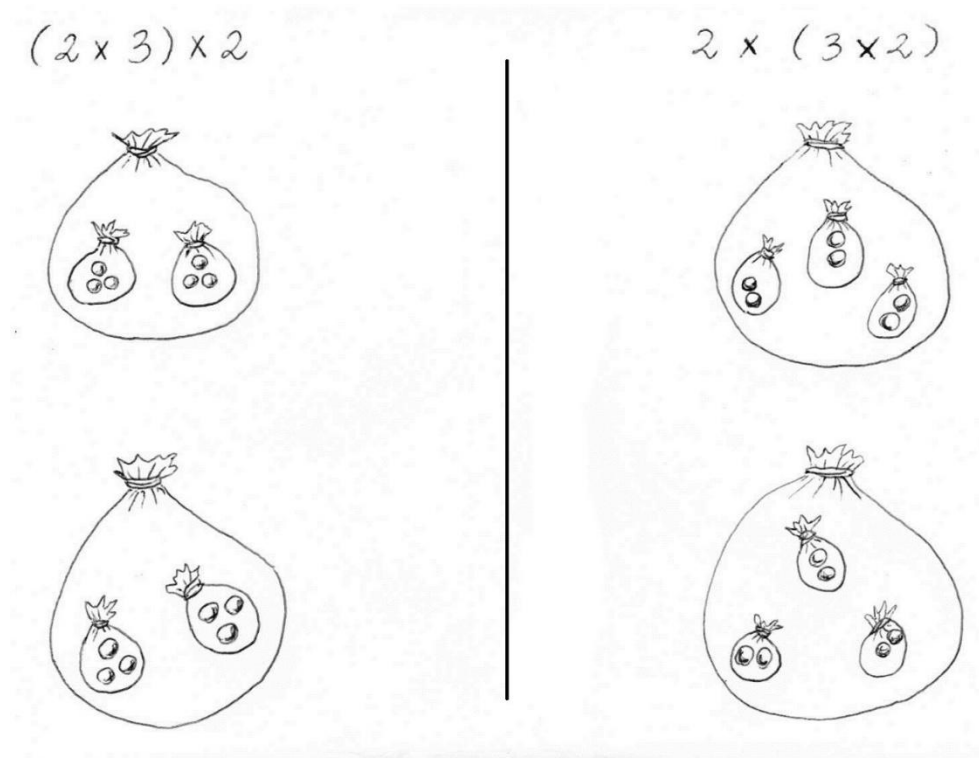


Figura 5 – Exemplo da associatividade para a multiplicação

Analisando o plano de aula, concordamos que nessa atividade para a associatividade faltou trazer um exemplo generalizador. A solução (fazendo uso de material concreto) veio durante a prática, por isso será comentada adiante.

Durante a implementação da proposta, ficou claro para mim que as aulas não conseguiriam seguir exatamente o cronograma planejado, porém, priorizei o entendimento dos alunos e tivemos de, em alguns momentos, mudar certas abordagens para que ajudássemos os alunos a terem uma melhor compreensão. A segunda aula (dia 7 de abril) não foi exceção.

Em um momento anterior ao início da aula, conferi e avaliei os relatórios da turma. Percebi, durante a conferência, algumas incoerências na definição de números pares e ímpares nos relatórios, onde muitos alunos usaram a expressão *divisão exata*, provavelmente causado por um descuido meu ao usar (inconscientemente) estas palavras, referindo-se a uma divisão por dois com resto zero, desconsiderando 1,5 como a divisão exata por dois do número 3, por

exemplo. Este tipo de resposta deveria ter sido previsto, pois sabíamos que os alunos já trabalhavam com divisão não euclidiana desde o sexto ano. Decidi, então, começar a aula reconstruindo com eles estas definições, usando palavras parecidas com as dos alunos, e corrigindo o uso inadequado da expressão *divisão exata*. Para que me compreendessem melhor, usei como exemplo dividir exatamente ao meio uma bola de gude. Se fizéssemos isso, o que antes era uma bola, uma esfera, tornar-se-iam duas meias esferas, sendo impossível jogarmos com estas partes. Convenci-os de que não nos seria interessante dividir exatamente as bolas de gude, mas poderíamos fazer uma divisão justa se sobrasse uma unidade. Para dividir justamente e “maximamente” sete bolas de gude para dois jogadores, bastava entregar três bolas para cada um e deixar uma de lado. Assim, escrevi no quadro uma definição para número par e outra definição para número ímpar, explicando que tal conceito só faz sentido para números naturais, e que, neste caso, estamos interessados apenas na divisão inteira. Assim, todos concordaram que “a divisão euclidiana de números pares por dois tem resto zero” e “a divisão euclidiana de números ímpares por dois tem resto um”, valendo também a recíproca, se um número dividido por dois tem resto zero, então este número é par e se um número dividido por dois tem resto um, então este número é ímpar. Refletindo posteriormente sobre estas afirmações como sugerindo definições para número par e ímpar, respectivamente, percebi, após a aplicação das mesmas, que seria mais interessante definir número par e número ímpar pela possibilidade e impossibilidade de formar-se duplas, respectivamente, pois assim os alunos provavelmente resgatariam a forma como tais conceitos foram introduzidos nos anos iniciais, facilitando seu aprendizado. Atento às distrações da turma e esperando que todos terminassem de copiar, dei seguimento à aula. Diferentemente da atividade da aula anterior, solicitei, nesta, que todos os alunos ficassem em seus lugares, enquanto eu lhes devolvia o relatório.

Mantendo as definições no quadro, retomei a atividade da aula anterior, começando por explorar com os alunos como seria a adição de dois números ímpares, usando o mesmo método da aula anterior. A diferença agora estava na representação do número. Na aula anterior, os alunos sugeriram representar um número ímpar como tantos sacos de duas bolas de gude quanto necessário mais uma bola de gude avulsa. Dessa forma, seríamos capazes de representar o número 9 com quatro saquinhos de duplas mais uma bola de gude avulsa. Comecei, então, para mostrar que a soma de quaisquer dois números ímpares teria resultado par, a colocar uma bola em cada pote e perguntando o resultado da adição do conteúdo dos potes, a qual os alunos prontamente responderam, seria par, argumentando que se contássemos o conteúdo dos potes teríamos um número par de bolas. Passando a exemplos

com números maiores, aos poucos os alunos percebiam que a bola de gude que *restava* em cada um dos potes poderia formar uma dupla com a bola avulsa do outro pote. Quando parti para o exemplo generalizador, colocando quantidades ímpares em cada pote sem contá-las, os alunos entenderam prontamente que a soma do conteúdo dos potes seria par, argumentando que, com exceção das bolas avulsas de cada pote, a quantidade que tínhamos nos dois potes era par e então, formando uma dupla com as bolas avulsas, teríamos uma quantidade par.

Com as definições ainda no quadro que falavam em divisão com resto, percebi uma melhora na argumentação e no raciocínio, que fluiu com maior facilidade. Por exemplo, após mostrar o exemplo generalizador, lembro que um aluno disse-me o seguinte, depois de eu ter perguntado como poderíamos afirmar que para quaisquer dois números ímpares o resultado da adição é par, não necessariamente com estas palavras: “Vai ser par porque, se a divisão por dois de um número par tem resto zero e quando somamos dois ímpares a gente pega o avulso de cada e forma um par, a divisão por dois desse resultado vai dar resto zero também”. Atento às reações da turma, vi que alguns alunos concordaram com a cabeça, enquanto os que também se ofereceram para responder a pergunta baixaram as mãos, dizendo, quando perguntei, que a resposta que dariam era a mesma ou parecida. Após a aula, conferindo o relatório deste mesmo aluno, pode-se perceber uma tradução parcial desta explicação, pois o aluno, diferente de quando explicou oralmente, não se baseou na divisão com resto, como se vê na Figura 6:

ímpar + ímpar = par? por quê?
 por que um número ímpar é um
 número par + 1 e somando 1 + 1 = 2 número
 par e somando isso ao os outros
 vai dar par. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 56 + 1 = 57 \\ + 57 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$7 + 7 = 14$$

Figura 6 – Justificativa de um aluno para a soma de dois números ímpares quaisquer

“Ímpar + ímpar = par? Por quê? Por que um número ímpar é um número par + 1, e somando $1 + 1 = 2$ número par e somando isso aos outros vai dar par”. Considero esta justificativa satisfatória, pois além de perceber como pode ser representado um número ímpar, este aluno entendeu os conceitos trabalhados na aula anterior. Alguns alunos não escreveram em seus relatórios um parecer sobre a questão da soma de ímpares, provavelmente pelo não entendimento da questão que levou à desistência ou pela falta de atenção/interesse com a

atividade. Os que escreveram alguma coisa, utilizaram-se de argumentos parecidos com os do colega, mesmo que com dificuldades para expressar o que haviam concluído, como ilustra a Figura 7:

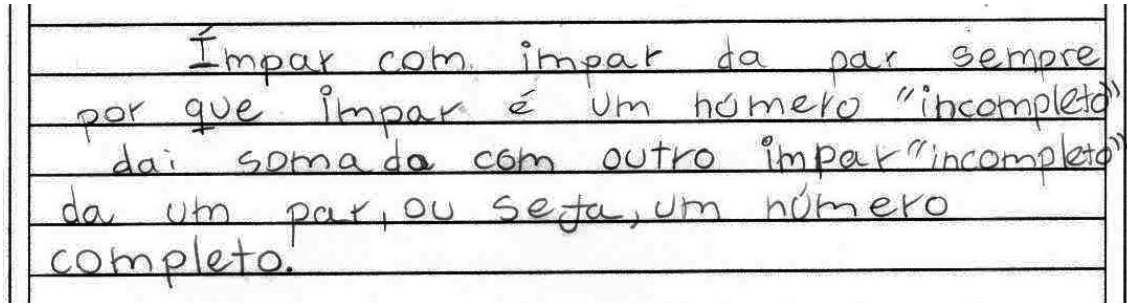


Figura 7 – Aluno que não conseguiu expressar-se utilizando os conceitos vistos em aula

“Ímpar com ímpar da par sempre por que ímpar é um número ‘incompleto’, dai somado com outro ímpar ‘incompleto’ da um par, ou seja, um número completo”. Continuando a atividade, fiz os últimos exemplos para dar condições aos alunos de decidirem sobre a veracidade ou a falsidade da terceira conjectura, que versa sobre a soma de um número par com um número ímpar. Esta atividade fluiu com maior rapidez, pois os alunos já haviam entendido os fundamentos das atividades anteriores, bem como a forma adequada de se expressar, de modo que pude rapidamente passar ao exemplo generalizador, para o qual os alunos não se demoraram muito para escrever a justificativa/demonstração, como na Figura 8:

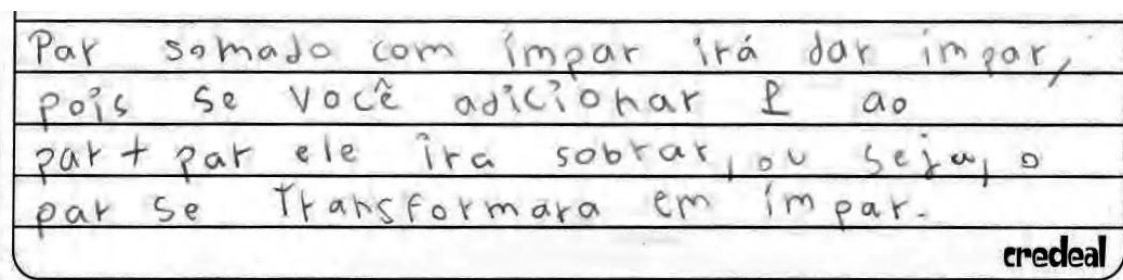


Figura 8 – Exemplo de justificativa para a soma de um número par qualquer com um número ímpar qualquer

“Par somado com ímpar irá dar ímpar, pois se você adicionar 1 ao par + par ele irá sobrar, ou seja, o par se transformara em ímpar”, onde o 1 estaria representando o objeto avulso da quantidade ímpar. Terminada a atividade, recolhi os relatórios e preparei-me para abordar a associatividade e a comutatividade da adição. Como estávamos próximos do fim da aula e percebendo que os alunos estavam acompanhando bem a atividade, resolvi ser um pouco mais dinâmico na atividade. Comecei colocando em cada um dos potes uma quantidade pequena de bolas de gude, quatro e três unidades, e perguntei aos alunos qual seria o resultado da adição do conteúdo dos potes. Assim que grande parte da turma respondeu “sete” mudei a

posição dos potes, trocando-os de lugar um pelo outro. Perguntei: “E agora? O resultado continua o mesmo?” e, um pouco perplexos, os alunos responderam que sim. Fiz mais um exemplo, desta vez com números maiores, mas a resposta continuou a mesma. No exemplo generalizador, os alunos, antes mesmo de eu trocar os potes de lugar, disseram: “vai dar o mesmo resultado”. Assim que me certifiquei de que todos os alunos confirmaram de alguma forma terem visto que, na adição de naturais, a ordem das parcelas não altera o resultado da adição, expliquei que àquela propriedade dá-se o nome de comutatividade da adição. Decidi não escrever no quadro naquele momento a propriedade, deixando para a próxima aula, de forma que eu ainda pudesse abordar com os alunos a propriedade associativa da adição. Pegando um terceiro pote, dispus os três sobre a mesa, alinhados e igualmente espaçados. Colocando quantidades de bolas diversas nos potes e permitindo que os alunos contassem, perguntei inicialmente o resultado da adição dos conteúdos, para depois perguntar, enquanto aproximava o pote do centro ao pote da esquerda ou da direita, se o resultado da adição mudava se eu começasse o cálculo pelas parcelas da direita ou pelas da esquerda. Imediatamente os alunos concordaram que seria o mesmo resultado, pois eu não havia alterado nenhuma quantidade, apenas suas posições, e somar significa apenas *juntar*.

Passando ao exemplo generalizador, os alunos também concordaram, apresentando a mesma justificativa, o que me convenceu de que eles tinham realmente entendido e demonstrado, com as suas palavras, a propriedade, que nomeei associatividade da adição, mas que também não foi registrada no quadro por ser o fim da aula. Concluí a aula atribuindo dois temas de casa, um deles, não previsto no plano de aula, mas que considerei oportuno, dado o nível de entendimento apresentado pelos alunos. Pedi para que me trouxessem para a aula seguinte exemplos de números negativos que apareciam no seu cotidiano, pois teríamos de seguir o plano de ensino da disciplina e apresentar a eles os números inteiros. Lancei também a pergunta: “A comutatividade vale também para a subtração de números naturais?”. Tínhamos planejado alguns exercícios para fixação das propriedades associativa e comutativa da adição, mas como teríamos de trabalhar com este conteúdo ainda na próxima aula, decidi que apenas iria lembrá-los das propriedades na aula seguinte para, então, trabalharmos com outros exercícios. Durante uma reunião com a professora regente da turma, discutindo sobre a próxima aula, para a qual eu planejara abordar as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, já que não se teve tempo para a implementação da atividade nessa aula, ela sugeriu que, para tal, eu usasse o material dourado para mostrar a comutatividade, pois uma das peças era comprida, parecida com uma torre com dez cubinhos. Aceitando usar o material, percebi que poderíamos também utilizá-lo para a associatividade da multiplicação, formando

um paralelepípedo de dimensões diversas e perguntando aos alunos como poderíamos descobrir a quantidade de cubinhos que o objeto possuía.

3.3.COMUTATIVIDADE E ASSOCIATIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO E A PROBLEMÁTICA COM OS NÚMEROS INTEIROS

Iniciei a terceira aula com a turma relembrando as atividades realizadas na aula anterior, e pedindo aos alunos que me ajudassem a registrar no quadro as propriedades comutativa e associativa da adição de naturais com as palavras deles, de modo que tal registro ficasse mais próxima da realidade dos alunos. Com apenas dois alunos dando sugestões, tive certa dificuldade para escrevê-las no quadro, mas aos poucos consegui incentivá-los a darem mais ideias. Definimos: “Comutatividade da adição: Para a adição com números naturais, a ordem das parcelas não altera o resultado da soma” e “Associatividade da adição: Para a adição de números naturais com três ou mais parcelas, não importa por quais duas parcelas começaremos a somar, o resultado final será o mesmo independente da ordem em que realizamos as adições”.

Passei então ao próximo tópico da aula. Pegando uma peça do material dourado com dez cubinhos, perguntei aos alunos quantos cubos haviam ali. Os alunos que estavam mais próximos de mim contaram e responderam que haviam dez dos pequenos cubos. Unindo mais quatro peças, formei um paralelepípedo de lados $5 \times 10 \times 1$ e perguntei aos alunos: “E agora, quantos cubinhos eu tenho?”. Rapidamente os alunos responderam, “50”. Perguntei-lhes como eles haviam chegado àquele resultado. Ao responderem que multiplicaram, perguntei como fizeram o cálculo. A maioria dos alunos respondeu que fizeram 10×5 , o número de cubinhos de uma “torre” vezes a quantidade de torres que formavam a figura. Alguns alunos responderam que somaram $10 + 10 + 10 + 10 + 10$ e três alunos disseram terem feito 5×10 . Perguntei se, de todas as respostas, alguma possuía resultado diferente e todos concordaram que o resultado seria o mesmo. Ressaltei que, assim como para a adição, a multiplicação também possuía a propriedade comutativa. Como estávamos atrasados com o planejamento, decidi não fazer um exemplo generalizador com os alunos, apenas mencioná-lo, pedindo aos alunos que contribuíssem com sugestões. Pedi a eles que tentassem visualizar com números diferentes de linhas e colunas, pedindo exemplos diversos até que os alunos se convencessem de que a propriedade valia para todos os naturais. Uma forma de dar o exemplo generalizador seria desenhando uma tabela de lados desconhecidos, como abaixo (Figura 9), que sugere que, independentemente do número de linhas e de colunas, o argumento é o mesmo:

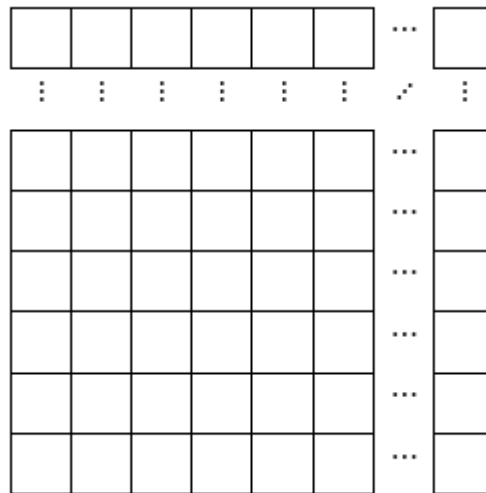


Figura 9 – Tabela para exemplo generalizador da comutatividade da multiplicação

Os alunos poderiam escolher quantidades quaisquer para o número de linhas e o número de colunas e perceber que, em uma tabela $m \times n$, a quantidade de células poderia ser contada multiplicando o número de linhas pelo número de colunas ou multiplicando o número de colunas pelo número de linhas. Apesar de não termos usado o exemplo, os alunos aparentaram compreender bem o conceito, então apenas escrevi a propriedade no quadro: “Comutatividade da multiplicação: Para a multiplicação com números naturais, a ordem dos fatores não altera o produto”, e passei para a atividade seguinte.

Para a associatividade da multiplicação, peguei mais dez peças do material dourado, das mesmas que usei na atividade anterior, formando um paralelepípedo $3 \times 5 \times 10$. Perguntei aos alunos então, quantos cubinhos teríamos nesta nova figura. Apesar de não terem trabalhado com volume de figuras, depois de pouco tempo alguns alunos disseram, “Vai ter cento e cinquenta cubinhos”. Perguntei como um destes alunos tinha chegado ao resultado e ele explicou que somara $50 + 50 + 50$. Após uma pequena intervenção minha perguntando sobre como representávamos inicialmente o cálculo da multiplicação de 3×2 , por exemplo, no caso $2 + 2 + 2$, ele convenceu-se que aquilo era o mesmo que 3×2 . Os demais alunos concordaram e continuei o raciocínio, perguntando ao mesmo aluno se podíamos fazer a conta de outra forma, enquanto eu girava a figura de modo que ficasse visível para a turma, mas principalmente ao aluno que sugerira o cálculo, os lados 3 e 5. Após alguns momentos de dúvida, o aluno entendeu minha pergunta e respondeu que poderíamos primeiro fazer três vezes cinco, resultando em quinze, para depois fazer quinze vezes dez, que resultaria nos mesmos cento e cinquenta cubinhos. A turma então convenceu-se que não importava por onde começávamos o cálculo, desde que fizéssemos corretamente três vezes cinco vezes dez. Novamente, não apliquei o exemplo generalizador pelo atraso do plano e por considerar que

os alunos tinham compreendido a propriedade, apenas escrevi-a no quadro, “Associatividade da multiplicação: Para a multiplicação de números naturais com três ou mais fatores, não importa qual multiplicação realizamos em primeiro lugar, o resultado final será o mesmo independente da ordem em que realizamos as multiplicações”, solicitando que os alunos a copiassem no caderno.

Prossigui a aula tratando dos temas de casa que haviam sido solicitados para essa aula, a saber, descobrir se a comutatividade é válida para a subtração de números naturais e relatar números negativos de seu cotidiano. Sobre a comutatividade da subtração, todos os dezoito alunos que realizaram a atividade perceberam que tal propriedade não é válida, dando um contraexemplo para justificarem suas respostas. Sobre os números inteiros, os alunos trouxeram exemplos bem variados, incluindo saldo de gols, temperatura, saldo bancário, e altitude em relação ao nível do mar. Este tema objetivava dar suporte à introdução dos números inteiros.

Percebendo que teria dificuldades em conceitua-los, decidi não trabalhar com demonstrações no conjunto dos números inteiros, inicialmente, por não me sentir seguro e tornar possível a exposição da turma à prováveis erros. Decidi trabalhar com calma os números inteiros, para que os alunos não fossem prejudicados caso eu tentasse abordagens diferentes da ministrada pela professora regente. Dito isso, não relatarei aqui o período de ensino dos números inteiros, ainda que tenhamos feito o possível para que os alunos exercitassem o pensamento genérico, propondo atividades que incentivavam o aluno a fazer abstrações e perguntar-se como tais conceitos, como o de número simétrico, valor absoluto e ordem dos números inteiros, por exemplo, se relacionavam com os demais.

3.4. AVALIANDO A TURMA

Nas últimas semanas de aula, propusemos uma avaliação em forma de teste, com o objetivo de reconhecer quais conceitos os alunos haviam compreendido com maior eficiência. O teste (apêndice B), aplicado no dia dezenove de maio, contou com questões de todos os conteúdos trabalhados por mim até aquele momento: números pares e números ímpares, simétrico, valor absoluto, adição e subtração com números inteiros, comutatividade e associatividade das operações e ordenamento dos números inteiros. Das sete questões propostas, incluindo uma questão bônus, duas cobravam dos alunos pensamento genérico e pensamento generalizador, assim como justificativas. Percebi, durante a aplicação dos testes, que muitos dos alunos não haviam revisado o conteúdo antes da prova, pois constantemente perguntavam sobre conceitos simples que havíamos trabalhado nas primeiras aulas, como o

simétrico e o valor absoluto de um número. Mas, ainda assim, a falta de estudo não impediu a maioria dos alunos de pensarem genericamente, pois vários deles conseguiram criar justificativas coerentes com o que havíamos feito em sala de aula. Avaliei o aprendizado de cada aluno individualmente, atribuindo notas para cada um dos conceitos trabalhados em aula. Considerei, para esta avaliação, todo o desenvolvimento do aluno durante as aulas, não apenas o que foi apresentado pelo resultado do teste. As notas representavam o quanto o aluno aparentava ter assimilado.

Considerando as notas individuais de cada aluno, fez-se uma média e constatou-se que os conceitos mais bem assimilados pelos alunos foram o conceito de ordenação dos números inteiros e o conceito de número par e ímpar, sendo que 75% e 68% dos alunos aparentaram compreender totalmente esses conceitos, respectivamente. Os conceitos menos assimilados pelos alunos foram os de simétrico e de valor absoluto, sendo que 21% dos alunos não assimilaram/assimilaram parcialmente o conceito e 42% dos alunos assimilaram o conceito aplicando corretamente em alguns casos.

Em meu último dia de aula com os alunos, apliquei um questionário com as seguintes perguntas:

- 1) Como você descreveria as aulas do professor Matheus?
- 2) Como você descreveria Matheus como professor?
- 3) Como foi seu entendimento durante as aulas do professor Matheus? Conseguia acompanhar bem o andamento das aulas? Se não, a que você atribui esse fato?
- 4) Como você avalia o seu comprometimento e desempenho durante as aulas do professor Matheus? Quais aspectos você acha que deve melhorar com relação ao aprendizado de Matemática?
- 5) Quais aspectos você acha que o professor Matheus deve melhorar com relação ao ensino de matemática?

O objetivo era propor aos alunos que avaliassem meu desempenho como professor e o desempenho deles mesmos, apontando as possíveis causas de um mau desempenho, se fosse esse o caso. Acredito que os alunos tenham sido sinceros e o resultado da avaliação foi gratificante, pois pude perceber que certas situações que eu considerara inadequadas, os alunos avaliaram como proveitosas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos, neste trabalho, uma problemática sobre a inclusão de demonstração na escola básica com o objetivo maior de incentivar o pensamento genérico e a argumentação matemática. Com uma revisão das definições de número par e de número ímpar, propusemos aos alunos de uma turma de sétimo ano do Colégio de Aplicação da UFRGS, que elaborassem conjecturas envolvendo a adição de números naturais e a paridade do resultado, visando perceber se os alunos possuíam as condições necessárias para usar pensamento generalizador e pensamento genérico, assim como construir uma argumentação matemática.

Ainda que durante o período de estágio não fomos capazes de trazer o pensamento genérico em todos os conteúdos trabalhados, percebemos um amadurecimento da turma comparando o início das atividades com as últimas semanas de atuação. Percebemos argumentos melhores, justificativas usando definições estabelecidas anteriormente e uma maior participação da turma ao longo do desenvolvimento das atividades.

Não apenas a turma, mas também este trabalho passou por um período de amadurecimento. Inicialmente, minha proposta era a de ensinar demonstrações aos alunos, mas percebi que a importância e o deslumbramento não estavam na demonstração em si, mas sim no processo de explorar, constatar e argumentar com maior precisão (matemática). Essa proposta então evoluiu para o incentivo à utilização do pensamento genérico objetivando a argumentação matemática, e culminando na apresentação de demonstrações *que explicam*, além de provar o pretendido. Para nós evidenciou-se que alunos do sétimo ano possuem as condições necessárias para compreender algumas demonstrações. Além disso, ao evitar-se a argumentação com linguagem simbólica, ficou claro, na nossa opinião, que existem demonstrações que oportunizam maior entendimento do conteúdo a nível de escola básica, assim como a possibilidade de evitar demonstrações carregadas de simbologia matemática.

Acreditamos que esses resultados seriam melhores se esse tipo de prática fosse contínua e durante toda a Escola Básica. Os alunos claramente não estavam preparados para usar argumentação matemática da maneira como algumas vezes cobramos nesta experiência, mas, assim que percebemos isso, tentamos adequar as propostas anteriormente planejadas para suprir as necessidades da turma. Com isso, avaliamos que a resposta foi positiva, conforme relatado no parágrafo anterior.

Propomos que se estudem métodos para o ensino de demonstração em sala de aula, iniciando o pensamento genérico o mais cedo possível com o estudante e que se faça um acompanhamento contínuo para avaliar, com maior precisão, o impacto (que acreditamos,

baseados em nossos resultados, ser positivo) do incentivo ao pensamento generalizador, ao pensamento genérico, à compreensão de uma argumentação matemática (demonstração) e à construção de uma demonstração matemática. Por exemplo, defendo que o aluno deduza suas próprias fórmulas, no lugar de ser apresentado a elas e ser requisitada apenas a memorização da mesma.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILAR JUNIOR, Carlos Augusto; NASSER, Lilian. Estudo sobre a visão do professor em relação à argumentação e prova matemática na escola. *Bolema*, Rio Claro, v.28, n.50, p. 1012-1031, dez. 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2014000301012&script=sci_arttext>. Acesso em: 19 jun 2015.

AGUILAR JUNIOR, Carlos Augusto; NASSER, Lilian. Argumentação e prova de professores dos níveis fundamental e médio de matemática. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7. 2013, Montevideo. *Anais...* Montevideo, Uruguay. 2013. Disponível em: <<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/334.pdf>>. Acesso em 12 jun 2016

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais*: pesquisa qualitativa e quantitativa. São Paulo: Thomson, 1999. p. 129-146.

ARAÚJO, Jussara de Loiola; BORBA, Marcelo de Carvalho. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*, 2004. p.27-47.

BALACHEFF, Nicolas. Processus de Preuve et Situations de Validation. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, v. 18, n. 2, p. 147-176, maio 1987.

CARVALHO, Sandro Azevedo. *Pensamento genérico e expressões algébricas no ensino fundamental*. 2010. 256 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29352/000776369.pdf?sequence=1>>. Acesso em 19 jun 2015.

CARVALHO, Sandro Azevedo; RIPOLL, Cydara Cavedon. O pensamento matemático na escola básica. *Zetetiké*, Campinas, v. 21, n. 40, p. 149-161, jul/dez 2013. Disponível em: <<https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/4351/5243>>. Acesso em 19 jun 2015.

D'AMORE, Bruno. Intuição e demonstração. In: _____. *Elementos de didática da matemática*. 1ª Ed. [tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. p. 329-364.

DEVLIN, Keith. *O gene da matemática*: o talento para lidar com números e a evolução do pensamento matemático. 4ª ed. [Tradução de Sergio Moraes Rego] Rio de Janeiro: Editora Record LTDA, 2008. 349 p.

DOS REIS, Leonardo Rodrigues. *Rejeição à matemática*: causas e formas de intervenção. 2005. 12 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005. Disponível em: <<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/LeonardoRodriguesdosReis.pdf>>. Acesso em: 19 jun 2015.

FISCHBEIN, Efraim. Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, FLM Publishing association, Montreal, v. 3, n. 02, p. 9-18, nov 1982. Disponível em: <<http://flm-journal.org/Articles/3C2FDF14268CD1E813E785AD584E4.pdf>>. Acesso em 12 jun 2016.

GOLDENBERG, Mirian. *A arte de pesquisar*: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro, Editora Record, 2004. 8ª ed. p.68-101.

HANNA, Gila. Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, Liberal Studies Center, Clarkson University, v. 21, n. 01, p. 6-13, fev 1990. Disponível em:

<https://www.researchgate.net/profile/Gila_Hanna/publication/226635673_Some_pedagogical_aspects_of_proof/links/549c38710cf2d6581ab4826b.pdf>. Acesso em 06 mar 2016

HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: na overview. *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, v. 44, issue 01, p. 5-23, dec 2000.

Disponível em: <http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/Documentos_2008/Hanna-2000.pdf>. Acesso em 06 mar 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de (Ed.). *Projeto Araribá: matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

MALAGUTTI et al., 2012, Malagutti, Pedro L. & Baldin, Yuriko Y. *Os Números Inteiros no Ensino Fundamental*. V Bienal da SBM, 2010. Disponível em:

<<http://www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf>>. Acesso em 13 abr 2016.

PIAGET, Jean. Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Fondation Piaget*. 1970. Disponível em:

<http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/VE/JP70_Evolut_Intellect_Adoles_Adulte.pdf>. Acesso em 12 jun 2016

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. *Números racionais, reais e complexos*. 2ª ed. rev. e ampl. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

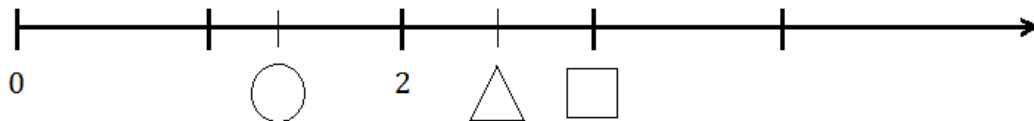
RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. *Livro do professor de matemática na educação básica volume I: números naturais*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1; 210 p.

APÊNDICES

APÊNDICE A

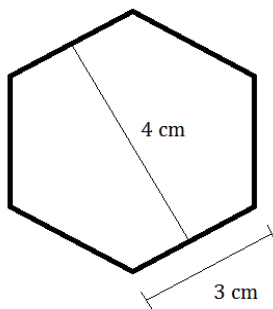
QUESTIONÁRIO SONDAAGEM

- 1) Calcule:
- a) $36 + 49$ b) $46 - 39$ c) 36×12 d) $384 \div 12$
- 2) Quais são os primeiros dez múltiplos do número 6?
- 3) Calcule
- a) 2^3 b) $3^2 \times 3^4$ c) $4^2 \times 2^2$
- 4) Um vendedor que trabalha em uma empresa de materiais descartáveis consegue vender, em média, por mês, R\$ 1200. Sabendo que ele ganha $\frac{1}{5}$ do que vende, quanto ele ganha, em média, por mês? Este valor corresponde a que porcentagem do total de vendas?
- 5) Quem é maior?
- a) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{4}$ c) 1,34 ou 1,034
- 6) Na seguinte reta, descubra o número que cada figura representa, dentre as três possibilidades: $\frac{4}{3}$; 2,5; 3.

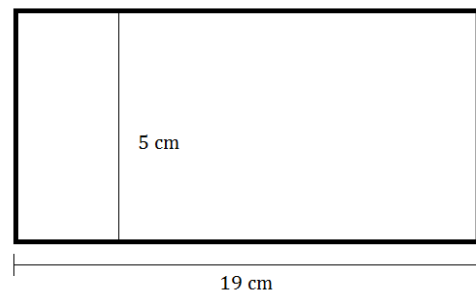


- 7) Calcule a área e o perímetro das seguintes figuras:

a)



b)



- 8) Explique, com palavras, como você realiza as seguintes operações:

e) $23 + 34$

f) $18 + 65$

g) 3×24

h) 12×96

APÊNDICE B

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – COLÉGIO DE APLICAÇÃO

TURMA AMORA IIA – PROFESSOR MATHEUS FRONZA RIGO

TESTE

1) Determine o simétrico e o valor absoluto, nesta ordem, dos seguintes números:

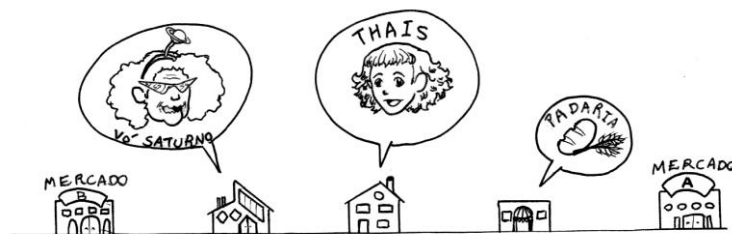
- | | | |
|--------|-------|--------|
| a) -12 | d) -7 | g) 2 |
| b) 6 | e) -9 | h) -5 |
| c) 13 | f) 3 | i) -10 |

j) Agora, ordene em ordem crescente os números dos itens (a) a (i) bem como seus simétricos.

2) Usando os sinais $<$ (menor que) e $>$ (maior que), preencha corretamente os espaços:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $0 \underline{\quad} -1$ | e) $-2 \underline{\quad} 5$ |
| b) $-2 \underline{\quad} -4$ | f) $6 \underline{\quad} 0$ |
| c) $3 \underline{\quad} 8$ | g) $0 \underline{\quad} -6$ |
| d) $-3 \underline{\quad} -8$ | h) $-10 \underline{\quad} -26$ |

3) Thais tem de correr contra o tempo para conseguir preparar uma festa surpresa para o filho. Para a festa, ela havia encomendado um bolo de uma padaria que fica a cerca de 12 min de sua casa, trajeto que ela faz de bicicleta. Thais, além do bolo, precisa pegar balões e refrigerantes em um mercado. Ela tem duas opções: O mercado A, que fica a 5 min (de bicicleta) da padaria, na mesma rua e mesmo sentido, ou o mercado B, que fica a 10 min de sua casa (indo de bicicleta), no sentido oposto ao mercado A e à padaria. Sabendo que a festa será na casa da mãe de Thais, situada a cerca de 3 min (de bicicleta) no sentido oposto ao mercado B e sabendo que todos os locais por onde Thais devem passar estão situados na mesma rua, determine o trajeto que demande menos tempo de Thais.



4) Em um campeonato de Quadribol, quatro equipes competiam pela taça. As equipes Grifinória, Sonserina, Corvinal e Lufa-lufa jogaram três partidas entre si e o resultado destas se encontra na tabela abaixo:

| | Grifinória | Sonserina | Corvinal | Lufa-lufa |
|-----------|------------|-----------|----------|-----------|
| Partida 1 | -30 | 30 | -100 | 250 |
| Partida 2 | 150 | 30 | -30 | 100 |
| Partida 3 | 150 | 100 | 200 | -55 |

Saldo de pontos por partida

Sabendo que o time vencedor será o que tiver a maior pontuação, determine a classificação de cada uma das quatro equipes de Quadribol.

- 5) Complete os espaços com V (verdadeiro) ou F (falso) e justifique sua resposta:
- Todo número negativo possui valor absoluto menor do que o valor absoluto de qualquer número positivo.
 - O valor absoluto de -15 é diferente do valor absoluto de 15 .
 - Se somarmos os 10 primeiros números naturais $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 , o resultado será um número ímpar.
 - Se somarmos os 100 primeiros múltiplos de 2 , o resultado será um número par.
 - A comutatividade é válida para a subtração com números inteiros.
- 6) Calcule as seguintes expressões numéricas
- $12 + 32$
 - $-6 + 17$
 - $-11 + (-3)$
 - $27 - (-18)$
 - $-15 - (-26)$
 - $-380 + 317$

QUESTÃO BÔNUS

(Banco de Questões OBMEP, 2016, adaptada) Considere a seguinte sequência de figuras, em que a figura de número 1 é um quadradinho.

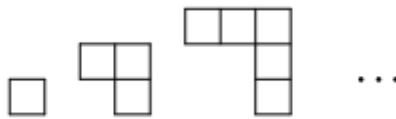


Figura 1 Figura 2 Figura 3

- Você consegue encontrar um padrão para a formação das figuras? Explique-o.
- Quantos quadrinhos formam a figura de número 50?
- Quantos quadrinhos existem na união das figuras de número 1 a 50?
- Observando o resultado do item b, calcule

$$2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100$$

- Calcule

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

APÊNDICE C

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Este documento tem como objetivo solicitar autorização do responsável legal pelo(a) jovem _____ para que o(a) mesmo(a) possa participar do estudo *Demonstrar e argumentar no ensino fundamental*, que está sendo desenvolvido pelo professor e estudante de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Matheus Fronza Rigo. Este estudo fará parte do trabalho de conclusão de curso, requisito para a obtenção do título de licenciatura em matemática.

O estudo busca entender se alunos do sexto ano do ensino fundamental tem condições e maturidade suficiente para utilizar argumentação matemática e pensamento genérico, através de práticas didáticas que incentivam o aluno a justificar propriedades matemáticas. Os dados da pesquisa serão coletados pelo pesquisador em forma de testes e relatórios produzidos pelos alunos. Ambos, relatórios e testes, serão devolvidos aos alunos. Será realizada uma entrevista com alguns dos alunos participantes, visando um melhor entendimento de estratégias utilizadas pelos alunos e proporcionando espaço para avaliação do pesquisador pelos participantes. A participação neste estudo não gerará nenhum gasto para a família do(a) participante, nem para ele(a) próprio(a). As informações obtidas serão analisadas e utilizadas apenas para este estudo. Os nomes verdadeiros dos participantes não serão mencionados em nenhuma apresentação oral, nem em trabalhos escritos referentes às investigações que venham a ser publicadas. O professor e licenciando Matheus está sendo supervisionado pela professora Marlusa Benedetti, professora do Colégio de Aplicação da UFRGS (tel: _____, e-mail: _____).

Eu, _____, pelo presente termo de consentimento livre e esclarecido, declaro que conheço os objetivos e finalidades da pesquisa, bem como os procedimentos a que meu(minha) filho(a) será submetido e autorizo a sua participação.

Qualquer informação sobre o trabalho realizado pode ser obtida em contato com o professor Matheus pelo telefone (51) 9785-1414 ou pelo e-mail matheus.rigo.mr@gmail.com.

Assinatura do Responsável: _____

Assinatura do(a) Participante: _____

Assinatura do Professor Pesquisador: _____

Assinatura da Professora Supervisora: _____