

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ROBEN ROGES DA SILVA MARTINS

**ATIVIDADES DE ANAMORFOSE: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA**

Porto Alegre

2016

ROBEN ROGES DA SILVA MARTINS

**ATIVIDADES DE ANAMORFOSE: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como pré-requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Leandra Anversa Fioreze

Porto Alegre

2016

ROBEN ROGES DA SILVA MARTINS

**ATIVIDADES DE ANAMORFOSE: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como pré-requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Leandra Anversa Fioreze

Aprovado em .....

Banca Examinadora:

.....  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Leandra Anversa Fioreze  
FACED - UFRGS

.....  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Andreia Dalcin  
FACED - UFRGS

.....  
Prof. Dr. Mauricio Rosa  
FACED - UFRGS

Porto Alegre  
2016

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, pelo apoio em todos os momentos, à minha namorada pelos auxílios prestados, aos amigos que me apoiaram e, principalmente, a minha orientadora que com sua sabedoria tornou possível transpor os obstáculos.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo, através da conexão entre matemática e arte, verificar as possibilidades e quais conhecimentos matemáticos podem emergir através de construções anamórficas. Lastreado por conceitos do design instrucional, buscamos realizar a abordagem de conceitos matemáticos envolvendo a visualização e a representação gráfica, através da técnica artística conhecida como anamorfose. Para tanto, leituras e pesquisas, principalmente na rede digital foram necessárias, uma vez que não foi encontrado literatura específica, e os trabalhos lidos não descreviam literalmente os passos necessários para a construção. Atividades foram realizadas em sala de aula com alunos do curso pré-vestibular popular Dandara. Inicialmente foram projetados vídeos e imagens para a observação como motivação para a discussão sobre a técnica e, então, procedeu-se a construção de desenhos anamórficos, buscando desenvolver a habilidade de relacionar o objeto observado com o representado. Conclui-se que a conexão entre matemática e arte realizada pelo tema anamorfose contribui para uma abordagem diferenciada na exploração e ensino/aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos inter-relacionados.

**Palavras Chaves:** Anamorfose, Representação Gráfica, Geometria, Design Instrucional.

## **ABSTRACT**

This work aims, through the connection between mathematics and art, exploring the possibilities and what mathematical knowledge can emerge through anamorphics constructions. Backed by concepts of instructional design, we seek to realize the approach of mathematical concepts involving visualization and graphical representation, through artistic technique known as anamorphosis. Therefore, reading and research, especially in the web were necessary, since it was not found specific literature, and papers read not literally describe the steps needed to build. Students of popular pre-university Dandara carried out activities in the classroom. Initially were displayed videos and images as motivation for the discussion of the technical and then proceeded to the construction of anamorphic drawings, trying to develop the ability to relate the observed object with the represented. We conclude that the connection between mathematics and art performed by the anamorphic theme contributes to a differentiated approach in exploring and teaching / learning of several interrelated mathematical content.

Key Words: Anamorphosis, Graphic Representation, Geometry, Instructional Design.

**"A função da forma, é a beleza".**

**Oscar Niemayer**

## Lista de Figuras

Figura 1 - Ângulos Internos.....	19
Figura 2 - Esquema perspectivo da anunciação.....	21
Figura 3 - Cone visual.....	22
Figura 4 - Piso sem perspectiva.....	23
Figura 5 - Piso em perspectiva.....	23
Figura 6 - Perspectiva forçada.....	25
Figura 7 - Palco do programa Altas Horas.....	26
Figura 8 - Anamorfose Julian Beever.....	27
Figura 9 - Vista oblíqua de Os Embaixadores.....	28
Figura 10 - Vista frontal de Os Embaixadores.....	29
Figura 11 - Base da anamorfose oblíqua.....	30
Figura 12 - Anamorfose cônica.....	31
Figura 13 - Anamorfose em planos diversos.....	31
Figura 14 - Imagem quadriculada.....	39
Figura 15 - Cordas.....	40
Figura 16 - Grade deformada.....	41
Figura 17 - Urso com deformação.....	42
Figura 18 - Arte Estação República.....	45
Figura 19 - Anamorfose catóptica.....	45
Figura 20 - PVC diferentes diâmetros e altura.....	47
Figura 21 - Cálculo da área lateral.....	48
Figura 22 - Procurando o diâmetro.....	49
Figura 23 - Alunos recortando insulfilm.....	50
Figura 24 - Desenho original.....	53
Figura 25 - Anamorfose das alunas M e G.....	54
Figura 26 - Anamorfose do aluno E.....	54
Figura 27 - Projeção oblíqua.....	56
Figura 28 - Anamorfose oblíqua.....	56
Figura 29 - Anamorfose alunos.....	57



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA: A IMPORTÂNCIA DESTE CONHECIMENTO.....</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>A TÉCNICA DA REPRESENTAÇÃO .....</b>	<b>17</b>
3.1	O itinerário: em busca do entendimento das representações .....	17
3.2	A ambientação: detalhes de um conhecimento.....	18
3.3	A experimentação: da experimentação ao rigor das regras .....	20
3.4	A perspectiva forçada .....	24
3.5	A anamorfose.....	25
<b>4</b>	<b>O DESIGN INSTRUCIONAL.....</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA E DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA .....</b>	<b>35</b>
<b>5.1</b>	<b>Estudando anamorfose.....</b>	<b>36</b>
5.2	Descrição de uma experiência de sala de aula: Implementação .....	44
5.2.1	Primeiro encontro .....	45
5.2.2	Segundo encontro .....	50
5.2.3	Terceiro encontro.....	53
5.2.4	Quarto encontro .....	56
<b>6</b>	<b>AVALIAÇÃO DO PROCESSO .....</b>	<b>60</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>63</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Durante as oficinas de Laboratório II, do curso de Matemática da UFRGS, realizada com uma turma formada por alunos dos 5º e 6º anos, percebemos que os alunos com frequência procuravam iniciar diálogo, entre eles, possivelmente para chamar a atenção, sempre através da seguinte fala “odeio matemática”, com tom brincalhão e, sem dúvida, como provocação, pois por vezes seus olhares estavam dirigidos ao professor. Pudemos verificar que muitos alunos desta turma não demonstravam curiosidade pelas questões matemáticas.

Quando eu e meus colegas, um grupo de quatro licenciandos, planejávamos aulas que procuravam sair do método expositivo, a quantidade de alunos que se envolviam na resolução das atividades propostas, aumentava. Mesmo assim, observamos que nas aulas da disciplina escolar ou componente curricular de Arte, tínhamos um público maior, apaixonado pelas atividades desenvolvidas, inclusive, por aqueles que apresentavam facilidade com os conteúdos que trabalhávamos, ou seja, independente do aluno achar fácil ou difícil matemática, a preferência dos alunos era por Arte.

Sempre que solicitado, não faltava voluntário para ir para a oficina de arte, causando inclusive certa confusão no momento da disputa para a escolha de quem iria. Confesso que me questioneei qual o motivo de tal oficina despertar tanto interesse. Não seria por que esta era encarada como uma brincadeira, enquanto que na oficina de matemática se vestia uma máscara séria no desenvolvimento das atividades? Ou então, que a oficina de arte lhes proporcionava liberdade, sem certo ou errado, enquanto a matemática parece já estar tudo pronto, com regras rígidas e problemas com soluções já conhecidas pelos professores? Como se fosse um caminho já percorrido pelos professores, que agora convidam seus alunos a explorarem o já explorado, pois alguém já definiu o que é certo, motivos que me levaram a pensar sobre matemática e arte.

Como uma aventura virtual, comecei a pesquisar imagens na internet, pois me lembrei de um e-mail que havia recebido, com belas e curiosas imagens, que somente agora descobri pertencerem a dois grupos, algumas produzidas através da

técnica chamada de perspectiva forçada e outras denominadas anamorfose<sup>1</sup>, técnica que será explicada em um capítulo posterior.

As imagens fazem parte do nosso dia a dia, somos constantemente alvejados por elas, seja pela televisão, pelo cinema, cartazes, artes plásticas, fotografia. Prendem-nos pela beleza, curiosidade ou simplesmente, porque estão expostas de forma a ocupar um espaço em nosso campo de visão. Basta lembrarmos do ditado, "uma imagem contém mais de mil palavras", autoria de Confúcio, para termos uma ideia de quanta informação se passa diante de nossos olhos diariamente, através de imagens.

Além disso, a conexão da matemática com outras áreas do conhecimento é indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL 1998, p. 40):

Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

É do professor a tarefa de apresentar cenários, circunstâncias e conhecimentos de outras áreas que de alguma forma estejam envoltas por conceitos matemáticos, auxiliando na busca de significado e reforçando a possibilidade de estudar temas conexos.

Somos seres que percebem o mundo em três dimensões. Segundo Barco (1992), para Euclides, esses atributos – comprimento, largura e altura – correspondiam ao que chamamos matematicamente de dimensão.

Não é difícil darmos exemplos de objetos tridimensionais, nem tão pouco imaginar, pois o mundo que percebemos é um conjunto não vazio destes objetos com comprimento, largura e altura. Para compreendê-lo, organizá-lo e solucionarmos determinados problemas lançamos mão da geometria, que em grande parte, para ser estudada requer o uso de desenhos. Flores (2007, p.18) cita que:

---

<sup>1</sup> Em geometria, anamorfose é a correspondência obtida projetando-se, a partir de um ponto fixo (centro de projeção), os pontos de uma figura pertencente a um dado plano, sobre uma superfície plana ou curva. Sobre esta obtém-se uma figura correspondente ponto a ponto àquela projetada, porém deformada. Correspondências desse gênero se estabelecem, por exemplo, nos fenômenos de reflexão e refração. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/>>. Acesso em 14 de julho de 2016.

Em recente pesquisa, Muriel Lefebvre (2001), interessada em saber como as imagens gráficas participam das atividades realizadas por matemáticos, constatou que elas são tomadas, por eles, às vezes como fonte secundária, e, em outras, como essenciais para a produção e a difusão dos conhecimentos matemáticos.

Enquanto professores, usamos as representações destes atributos através de desenhos feitos no quadro. Também, encontramos em livros de matemática do ensino fundamental e médio situações, que a nosso ver, possuem mais comumente foco nas fórmulas, servindo apenas como apoio para o estudo do cálculo de perímetro, de área e de volume, das mais diversas figuras geométricas. Porém, a questão fica em torno do quanto estes desenhos realmente auxiliam para o aprendizado, pois “[...] querer se fazer entender utilizando representações gráficas exige, obviamente, por parte daquele que pretende entender, a atividade de visualização” (FLORES, 2007, p.19).

Machado na apresentação do livro de Cavalca (1998, p.10) aponta:

Este livro alerta todos os professores de matemática em relação ao fato de que a capacidade de "ver" um objeto geométrico espacial representado no plano não é inata e pode ser desenvolvida. O autor enfrenta a idéia corrente de que alguns alunos simplesmente não têm capacidade de visão espacial e demonstra que é possível desenvolver tal capacidade mesmo em alunos adultos.

Indicando-nos que "ver", vai além do conhecer através do sentido da visão e, que tal habilidade pode ser adquirida a qualquer tempo, subsidiando nossa ideia de realização do trabalho no ensino médio ou até mesmo com turmas do primeiro semestre do ensino superior, pois em seu livro, Cavalca (1998, p. 13), refere-se aos alunos ingressantes do ensino superior, como podemos perceber quando escreve:

Esse problema com o grafismo, em geral, foi confirmado por vários dos nossos colegas que entrevistamos. Eis algumas das afirmações dos professores de Geometria Plana e Espacial, Cálculo Diferencial e Integral e Física:

Os alunos se saem melhor naqueles exercícios em que não é cobrada a representação gráfica.

Os alunos têm muita dificuldade para fazer gráficos...Tenho certeza de que isso é falha do segundo grau.

Quando estamos trabalhando com vetores, há uma dificuldade enorme, porque os alunos não estão acostumados a fazer a interpretação gráfica da direção e do sentido.

A carência de tais capacidades pode influenciar na compreensão de determinados conhecimentos, principalmente aqueles que se apresentam através da

linguagem visual. A importância de abordarmos o referido tema encontra reforço nos registros de Flores (2007, p.17):

Isto porque há o reconhecimento da importância de se compreender a percepção das informações visuais, tanto para a formação matemática do educando quanto para sua educação de maneira geral, num mundo cada vez mais semiotizado. A ligação entre a aprendizagem da geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca de variados procedimentos que possam ser colocados em prática na sala de aula, a fim de se aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens no ensino de geometria.

De posse destas informações ficamos convencidos do belo par que matemática e arte poderão fazer, unidas pelo tema anamorfose. Mas, na certeza de que, somente colocando as atividades em prática poderemos analisar os efeitos reais no que tange a aprendizagem da visualização espacial.

Não há dúvida sobre a importância da matemática nas atividades do dia a dia do ser humano, inferência que realizamos baseado na afirmação de Batista (2013, p.1) "o mundo em que vivemos hoje, embora na maioria das vezes não percebamos, depende fundamentalmente da matemática", seja quando lida com dinheiro, quando calcula tempo de deslocamento ou até mesmo quando lida com percentual. No entanto, já ouvi algumas vezes, de alunos que tive em aulas particulares, dizerem entender e saber aplicar determinada fórmula, e que somente lhes faltava saber quando.

Acreditamos que parte deste problema seja proveniente da forma de abordagem normalmente realizada no ensino dos conteúdos de matemática, sem conexão com suas aplicações, e com resoluções de repetidos exercícios, previamente selecionados pelo professor, ou listados em um capítulo do livro didático. Opinião que formei por meio das observações realizadas nas cadeiras de estágio e também apontado como "[...] uma prática pedagógica fundamentada na repetição e na reprodução. Os resultados dessa prática são inexpressivos [...]" (PAIS, 2002, p.35).

Movido pelo desejo de desenvolver um trabalho de forma que "desperte no aluno o hábito de fazer uso de seu raciocínio" (PAIS, 2002, p.35), misturar arte às aulas de matemática, como destacado anteriormente, pode ser um bom começo. Mas, como fugir do método, professor "ensina" fazendo e alunos "aprendem" repetindo? Tendo em vista esses dois aspectos (arte e matemática; metodologia

alternativa), resolvemos desenvolver este trabalho com base em certas etapas do design instrucional, conforme será tratado em capítulo posterior.

Assim, lançamo-nos em busca de respostas ao seguinte questionamento: **A partir de construções de anamorfose, como fazer emergir conceitos matemáticos, em particular, conceitos geométricos envolvendo a visualização e a representação?**

O trabalho de conclusão foi organizado da seguinte forma: primeiramente a presente introdução em que narramos uma vivência e apresentamos elos que supomos serem próprios para a ligação entre os objetivos que almejamos e o êxito da prática.

No quarto capítulo tratamos do design instrucional, metodologia usada como bússola orientadora de nossa proposta.

No capítulo três buscamos apresentar a importância do estudo da geometria.

No quarto capítulo descrevemos sinteticamente alguns fatos da história da geometria, pois acreditamos serem necessários para a abordagem da técnica utilizada pelos artistas na construção das representações anamórficas, e tratamos dos conceitos da perspectiva forçada e da própria anamorfose.

No quinto capítulo descrevemos a metodologia e baseado nos passos do design instrucional, parte da trajetória realizada no processo envolvendo como construir as representações anamórficas, base para o desenvolvimento deste trabalho, e relatamos uma atividade desenvolvida com pré-vestibulandos durante quatro encontros.

No sexto capítulo realizamos uma análise da experiência. Finalizamos nosso trabalho com nossas conclusões e considerações.

## 2 GEOMETRIA: A IMPORTÂNCIA DESTE CONHECIMENTO

São variadas as situações em que se faz necessário o conhecimento matemático, sabendo que a geometria é parte da matemática e que tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento das:

[...] habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1998, p.44)

Estudar geometria é acessar o mundo das formas, é aprender a interagir com traços, pontos, posições e contornos e perceber as relações entre o plano e o espaço, é ingressar no mundo ideal para entender o real, generalizar situações e abstrair regularidades. “Os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências” (BRASIL, 2000, p. 20).

Distintas são as profissões que utilizam a geometria e habilidades gráficas como ferramentas no seu fazer, entre elas figuram a arquitetura, as engenharias e o design. Além disso, se faz presente no cotidiano de todo cidadão, sendo parte importante da matemática, que juntamente com outros conhecimentos são:

[...] formas indispensáveis de entender e significar o mundo de modo organizado e racional, e também, de participar do encantamento que os mistérios da natureza exercem sobre o espírito que aprende a ser curioso, a indagar e descobrir (BRASIL, 2000, P. 93).

Entre as habilidades e competências almejadas no PCNEM (2000, p. 95) está: “identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade;” indicando a geometria como um dos conhecimentos importantes a serem desenvolvidos como habilidades formadoras de um pensamento estruturado.

Também encontramos no PCN, indicações de abordagens, quando cita que:

Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato,

ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Elencando as representações gráficas, sua interpretação e compreensão como habilidades importantes, os PCNEM afirmam: “A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta.” (BRASIL, 2002, 117), reafirmando a importância de aprender a linguagem matemática, neste caso se referindo à geometria.

No PCN, encontramos entre os temas estruturadores: “2. Geometria e medidas”, descrito como o tema que “[...] trata das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto” (BRASIL, 2002, p. 125), especificado como: “Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos” (BRASIL, 2002, p. 125), habilidades a serem desenvolvidas na unidade temática geometria espacial.

São muitas as formas desenvolvidas para a representação bidimensional dos objetos contidos no universo tridimensional, como exemplos temos as projeções cônicas, as cilíndricas e as isométricas, todas definidas segundo conceitos matemáticos que podem ou devem ser trabalhadas. Produzir e interpretar algumas representações poderá oportunizar o desenvolvimento do raciocínio espacial, favorecer a contextualização de alguns conceitos matemáticos, transformações geométricas e, assim, desenvolver habilidades requeridas nos PCN, bem como o conhecimento da existência de outras geometrias além da amplamente conhecida, geometria euclidiana.



### 3 A TÉCNICA DA REPRESENTAÇÃO

#### 3.1 O itinerário: em busca do entendimento das representações

O desenho, talvez seja uma das formas mais antigas de comunicação e registro utilizado pelo homem. Na natureza encontramos as mais diversas formas, que captamos através de nosso sistema perceptivo: as árvores, uma pedra, um ser vivo, são elementos percebidos naturalmente, que possuem forma, cor, refletem luz e produzem sombra.

Em termos de registros, os mais antigos de que temos conhecimento, foram as pinturas rupestres, provavelmente, as primeiras representações gráficas, do mundo percebido pelo homem. Estas representações preservam "registros de suas caçadas em pinturas murais elegantes e detalhadas" (EVES, 2004, p. 22).

Os historiadores costumam caracterizar o início da história da civilização pela agricultura e a descoberta da escrita, diferenciando assim, o início deste período entre os povos. Tais tecnologias começaram a ser utilizadas por povos distintos em momentos diferentes, fato que contribui para a dificuldade de narrar de forma linear o desenvolvimento de certos conhecimentos.

Conforme foram ocorrendo mudanças, no modo de vida e de organização, surgem novas necessidades, então, os registros e os conhecimentos tomam formas mais complexas. Com a agricultura o homem começa a medir e estabelecer relações, nasce um ramo da matemática: a geometria. "A geometria, em particular, segundo Heródoto, Diódoro, Diógenes, Laércio, Jamblico, e outros escritores antigos, originou-se no Egito" (CAJORI, 2007, p.33).

Mas foi com os gregos que esta ciência, palavra oriunda do grego, cujo significado tem origem em *geo*- "terra", *-metria* "medida", teve destaque, pois estruturaram e aperfeiçoaram os conhecimentos trazidos do Egito, afirmação que realizamos com base em Cajori (2007, p.43) "a partir do momento em que os filósofos helênicos predispuseram-se ao estudo da geometria egípcia, esta ciência adquiriu radicalmente um aspecto diferente", realizando feitos como: "Plutarco diz que Tales logo superou seus mestres e agradou o rei Amasis por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides com a ajuda de suas sombras." (CAJORI, 2007, p.44). Um registro sobre este feito é de que Tales teria medido a sombra da pirâmide

no momento em que a sombra projetada por uma vara atingiu o mesmo comprimento da vara.

O espírito curioso dos gregos elevou o estudo da geometria ao nível da abstração. O sistema axiomático de Euclides, que conceitua ponto e reta, contribuiu para o avanço e sua sistematização. Foi ele o autor de “Elementos” obra cujo conhecimento é a base de conteúdos desenvolvidos em nossas escolas. Segundo Eves (2004, p. 167) “Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico”.

Pela geometria Euclidiana temos a definição de ponto como objeto que não possui dimensão, ou seja, não tem largura, altura nem profundidade, no entanto mais tarde, em geometria projetiva, o ponto é a representação do infinito.

Pintores, movido pelo desejo de representar os objetos tridimensionais no espaço bidimensional conforme o percebemos, dão início, de modo intuitivo, a uma nova geometria, assunto que de certa forma já havia observações realizadas pelos gregos, conforme Cavalca (1998, p. 14):

As bases para o tratamento dessa problemática apareceram na Antiguidade grega, sob a forma de ótica geométrica (Euclides, +- 300 a. C.). Nesse início de racionalização da visão ficaram estabelecidas várias coisas, tais como: um objeto é visto a partir de um feixe cônico de raios visuais retilíneos (pirâmide visual), cujo ponto de convergência é o olho humano; a aparência de um segmento retilíneo AB é um segmento retilíneo A'B' situado no plano definido pelo ponto de vista e pelo seguimento AB; a aparência de uma superfície plana é uma superfície de mesma natureza.

sendo que a sistematização da geometria projetiva teve início somente em meados do século XV.

### **3.2 A ambientação: detalhes de um conhecimento**

Podemos dizer, de forma muito superficial, que o mundo tridimensional que percebemos através da visão é o resultado de um processo realizado por nosso cérebro a partir de duas imagens bidimensionais. Ribas (2006, p.79) define:

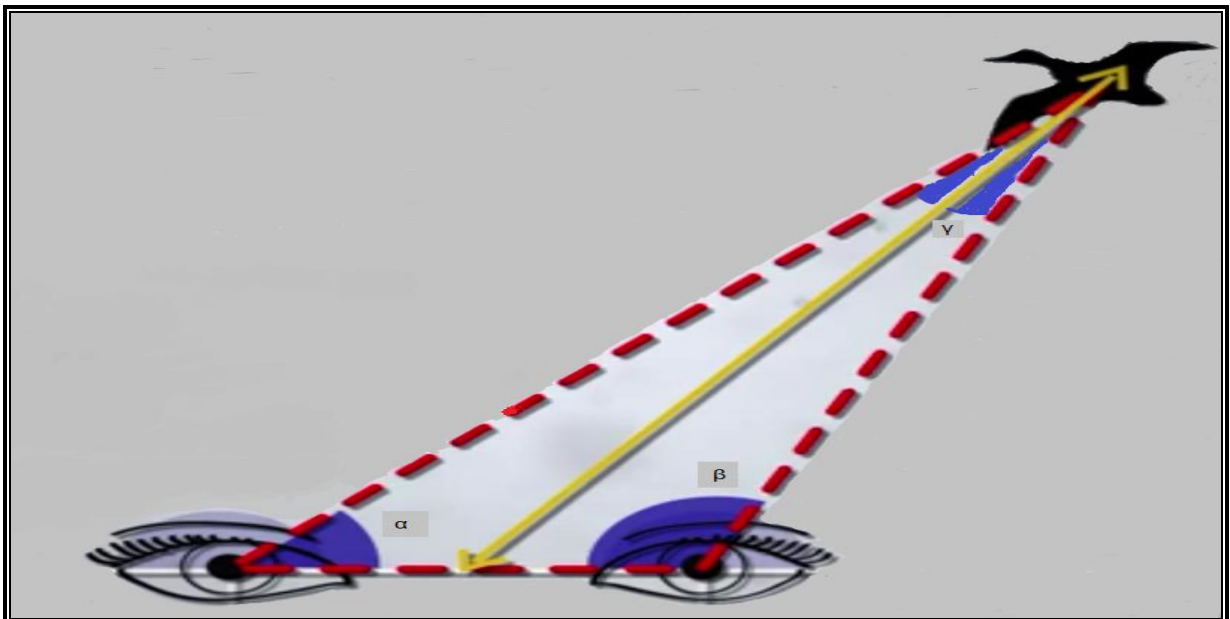
A visão binocular resultante desta posição alinhada dos olhos permite-nos observar um mesmo objeto a partir de dois pontos de vista ligeiramente diferentes [...], e o processamento destas informações visuais pelo sistema nervoso central é que nos propicia a percepção de profundidade.

Outras informações, como contorno, luz e sombra, são de grande importância para que nosso cérebro calcule distâncias e profundidade, mas são algumas propriedades trigonométricas as suas grandes aliadas para que consiga completar tal tarefa.

Em um primeiro momento pode não parecer que isto faça muito sentido, por isso, vamos abrir um parêntese. A trigonometria, do grego, trigono = triângulo e métron = medida, tem como objetivo principal o estudo das relações entre os elementos do triângulo, são eles, três lados e três ângulos. Uma de suas propriedades é de que dado qualquer triângulo, no plano, a soma de seus ângulos internos é igual a dois ângulos retos, este fato, nos permite descobrir a medida de um dos ângulos, dado que os outros dois sejam conhecidos, para isto, basta subtrairmos de 180 a soma dos dois ângulos conhecidos.

Nosso cérebro, conhecedor da distância entre nossos olhos, detém a informação do comprimento de um dos lados do triângulo que tem como vértices o objeto visto e nossos olhos. O ângulo formado pelas linhas imaginárias que ligam cada olho ao objeto e olho a olho, também é conhecido, daí como mencionado anteriormente, fica fácil determinar o terceiro ângulo deste triângulo. Na figura 1, há a ilustração.

Figura 1 - Ângulos internos



Fonte: Isto é Matemática<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=MCTg5SsQwVg>> Acesso em 16 de maio de

Conforme Ribas (2006, p.79):

Por outro lado, a utilização de um só olho também já nos fornece uma razoável noção de profundidade através da aplicação automática de conhecimentos e experiências prévias. Essas dicas ou efeitos denominados de monoculares são nos dadas principalmente pelos tamanhos relativos dos elementos observados pelas suas distâncias, e pelas suas condições de iluminação e sombras. Apesar de serem muito efetivos para atividades cotidianas, os efeitos monoculares são nitidamente limitados para a execução de tarefas mais complexas, como por exemplo, passar uma linha através do anel de uma agulha com a utilização de apenas um olho.

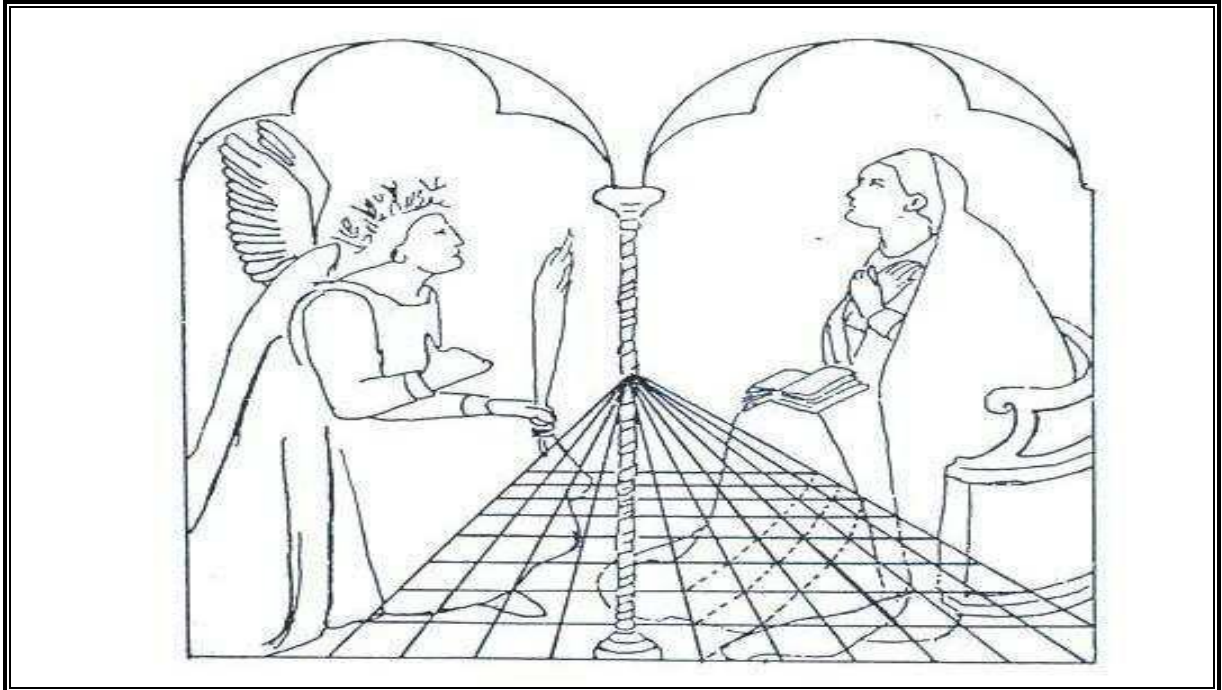
É possível perceber quão complexo é nosso sistema de visão, e que representar os objetos e formas percebidas do mundo tridimensional, com tamanha fidelidade que possa induzir nosso cérebro a confundir objeto real e representado, se fez necessário o desenvolvimento de uma técnica que pudesse recriar a posição relativa entre os objetos e profundidade.

Este conhecimento foi desenvolvido a muitas mãos, não temos aqui a pretensão de detalhar esta história, mas entendemos que alguns pontos dela devam ser escritos, com o intuito de verificarmos que elementos poderão ser utilizados como balizadores, como guias, e assim, facilitar o entendimento da construção da técnica, cujo nome dado é anamorfose.

### **3.3 A experimentação: da experimentação ao rigor das regras**

No desejo de produzir nas telas representações do mundo real, conforme o percebemos, alguns pintores, intuitivamente, conduzem os primeiros passos da perspectiva. Segundo Cavalca (1998, p.16), encontramos vestígios da tentativa de pintores em reproduzir imagens tridimensionais no plano já há muito tempo. Uma destas é conhecida como regra do  $2/3$ , em que as linhas horizontais ao plano do quadro eram construídas a distâncias cada vez menores; conforme representavam planos mais distantes, eram desenhadas à  $2/3$  da distância entre as duas anteriores. Esta forma de representar não atendia aos princípios da ótica, em que a projeção de uma reta será uma reta, tal falha pode ser observada no piso da figura 2, em que as diagonais das representações dos quadrados, deveriam pertencer a uma reta.

Figura 2 - Esquema perspectivo da Anunciação



Fonte: DIONÍSIO (2003)

Foi Filippo Brunelleschi quem conseguiu empregar em suas obras uma forma mais racionalizada, reproduzindo uma ilusão da realidade "[...] iniciando efetivamente a geometrização da perspectiva" (CAVALCA, 1998, p. 16). É atribuído a Brunelleschi o mérito de ter introduzido a noção de “olho do observador” e “plano do quadro”.

Perspectiva segundo Michaelis, dicionário de português online, significa:

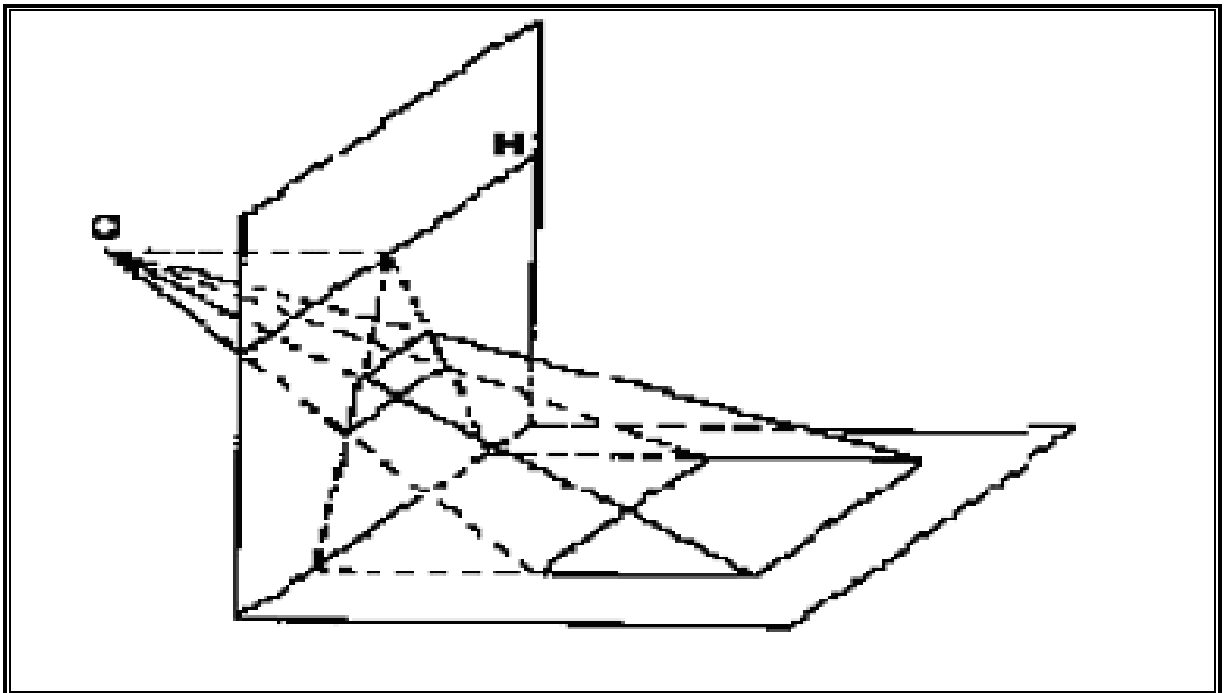
**1** Arte de figurar, no desenho ou pintura, as diversas distâncias e proporção que têm entre si os objetos vistos a distância. **2 Fís** Parte da óptica que ensina a representar sobre um plano os objetos com todas as modificações aparentes, ou com os diversos aspectos que a sua posição determina com relação à figura e à luz. **3** Pintura que representa jardins ou edificações em distância. **4** Desenho ou pintura que representa os objetos tais como se apresentam à nossa vista. **5** Panorama. **6** Aparência, miragem. **7** Esperança ou receio de uma coisa provável, mas ainda afastada. **8** Modo de ver baseado em dados conhecidos. **Var: perspectiva. P. aérea:** a) a que o pintor consegue graduando as cores; b) aspecto de uma paisagem, como se apresenta vista do avião. **P. axométrica:** projeção ortogonal de um objeto sobre um plano oblíquo às três direções e desigualmente inclinado sobre elas. **P. cavalheira:** a que tem por fim dar uma representação nítida dos objetos. **P. cônica: V perspectiva linear. P. especulativa:** a que se destina a representar certos objetos, segundo as diversas posições do respectivo observador. **P. isométrica:** projeção ortogonal de um objeto sobre um plano igualmente inclinado sobre as três direções. **P. linear:** a que dita regras

para a direção e dimensão das linhas. **P. prática:** a que ensina a representar os objetos com a forma que apresentam à nossa vista. **P. sentimental:** a que se pratica mais de ideia do que segundo regras fixas. **Em perspectiva:** esperado, no futuro.

Porém, nosso interesse tem foco no que poderíamos resumir como a técnica de representar o espaço tridimensional no plano. Nesta direção, a formulação teórica, teve seus primeiros passos conduzidos pelo italiano Leone Battista Alberti, (HEFEZ, 1985, p. 36):

A proposta de Alberti foi a de pintar o que um só olho vê, recuperando na tela a sensação de profundidade com um jogo de luz e sombra e com a diminuição da intensidade da cor em função da distância. O modelo matemático é simples. Entre o olho e o objeto a ser pintado, forma-se um cone de raios luminosos, chamado de Cone de Imagem ou de Projeção.

Figura 3 - Cone visual



Fonte: Hefez (1985)

Alberti descreve a teoria dessa construção em seu manual "Della pictura", "[...] no qual ele chama de "príncipe dos raios" (CAVALCA, 1998, p. 17), um dos elementos em sua teoria é o ponto de fuga central, determinado pela intersecção entre a linha projetada perpendicularmente ao quadro, pelo olho do observador, e o quadro, como podemos ver na figura 3.

No manual "Della pictura", também registrou a técnica para representar um piso (YOKOYAMA, 2005), conforme as figuras 4 e 5:

Figura 4 - Piso sem perspectiva

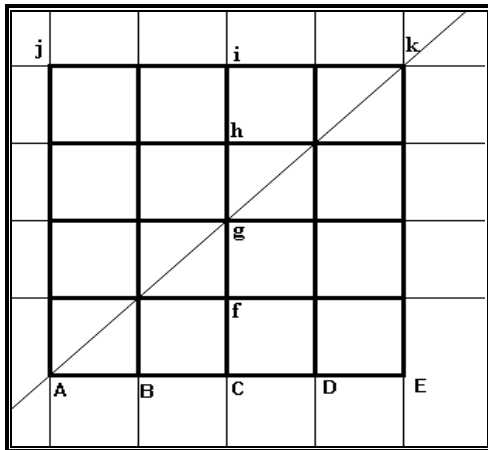
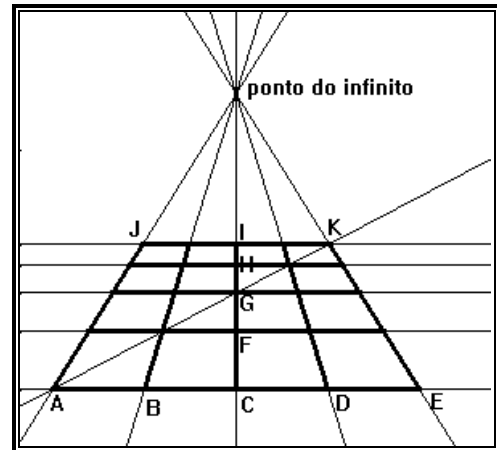


Figura 5 - Piso em perspectiva



Fonte: YOKOYAMA (2005, p. 3)

Percebe-se que Alberti já tinha conhecimento de que retas paralelas, quando representadas, podem ser vistas como retas concorrentes que se cruzam na linha do horizonte.

Colaborando para o desenvolvimento deste conhecimento figura também o pintor e geômetra Piero Della Francesca. Segundo Yokoyama (2005, p. 4), ele “foi o primeiro a tentar aplicar de maneira sistemática a perspectiva geométrica na pintura.” Outra contribuição dada pelo pintor Piero Della Francesca, segundo Cavalca (1998, p. 21), é que ele:

Também foi o primeiro a apresentar uma regra para a determinação geométrica e numérica da diminuição das linhas de mesmo tamanho, paralelas à linha de terra, equidistantes e situadas no plano geométrico. Leonardo da Vinci, pouco depois, estabeleceu uma regra do mesmo tipo, considerando a distância entre uma linha e outra igual à distância do olho ao quadro. O resultado foi a sequência harmônica ou de inversos de inteiros positivos.

Leonardo da Vinci expressava forte relação entre matemática e arte em suas obras, e também escreveu sobre perspectiva, mas sua obra foi perdida (YOKOYAMA, 2005). Seu contemporâneo Albrecht Durer foi o difusor dos métodos italianos na Alemanha, sua contribuição foi a construção da tela, que hoje leva seu nome, com ela “[..] conseguia fazer dificilmente o que agora a fotografia faz

instantaneamente” (AMODEO,1939, apud CAVALCA, 1998, p. 22).

### 3.4 A perspectiva forçada

A perspectiva forçada ou também conhecida como falsa perspectiva, é a técnica utilizada para alterar o tamanho das formas percebidas omitindo-se referências, de modo que se tenha a impressão errada do tamanho real dos objetos, pois quanto maior a distância entre o objeto e o observador, menor lhe parece, e quanto mais próxima maior lhe parece. Colocando-se um objeto pequeno em um plano mais próximo do observador lhe dará a impressão de muito maior quando visto através de uma câmera um objeto grande que estava em um plano mais distante, pois a câmera os coloca em um mesmo plano. Isto pode ser visto na figura 6:

Figura 6 - Perspectiva forçada



Fonte: Portal de notícia<sup>3</sup>

Esta técnica é muito utilizada em filmes para criar personagens ou

---

<sup>3</sup>Disponível em: <<http://portaldenoticia.com/perspectiva-forcada/>> Acesso em 20 de junho de 2016.



paisagens muito menores ou muito maiores em relação à realidade.

### **3.5 A anamorfose**

A anamorfose, uma técnica de representação, do latim *anamòrphosis* que significa reiteração da forma, é uma representação distorcida ou deformada que pode ser percebida de forma regular, através de determinado ângulo ou posição do observador, ou através de um espelho.

Em outras palavras, Trindade dá a seguinte definição (2013, p. 29):

As anamorfozes são imagens que se apresentam distorcidas ou mesmo dilatadas ao olhar de um observador, mas que são passíveis de se restituírem através de um ponto de vista rigidamente determinado, como que “imagens destruídas” que se restabelecem consoante a mobilização do espectador, fruidor, para um lugar privilegiado de observação. São, portanto, imagens evasivas que implicam um retorno.

O efeito causado nas imagens, quando aplicado tal técnica, é no mínimo muito interessante, alterando o desenho convencional, ou maneira mais comum de representação. Possibilita ao expectador uma interação que vai da observação dos contornos à experiência de ver a mesma imagem de duas formas, a que realmente é e a que se percebe ao observá-la de um ponto específico ou através de um espelho.

Atualmente sua utilização alcança setores fora do mundo artístico, que para melhor eficiência em seus objetivos pretendem causar um efeito perceptivo, de tal forma que o observador posicionado em determinado ângulo, perceba sua reconstituição com efeito tridimensional ou com as formas regulares. Temos como exemplos, as sinalizações de trânsito, localizadas no chão, e mais favorecidas pela técnica, as mídias produzidas por câmeras, isto porque a anamorfose é baseada nas regras da perspectiva.

A anamorfose é um fenômeno monocular, pois a estrutura de sua construção é realizada sob retas que convergem para um único ponto, o ponto de observação, inverso à perspectiva que possui sua construção convergindo para o ponto de fuga, que representa uma distância infinita, ao observador.

Um dos exemplos de imagem anamórfica apresentada na mídia é a do cenário do programa Altas Horas:

Figura 7 – Palco Altas Horas



Fonte: Globo<sup>4</sup>

Este cenário quando filmado de um ângulo propício cria uma ilusão de tridimensionalidade no logo posto no chão do palco.

Também utilizada por artistas como o brasileiro Eduardo Kobra e Julian Beever que pintam fachadas e calçadas produzindo obras como a figura 8:

---

<sup>4</sup> Disponível em: <http://gshow.globo.com/programas/altas-horas/>

Figura 8 - Anamorfose Julian Beever



Fonte: weirdoptics<sup>5</sup>

Fazendo grande sucesso com públicos do mundo inteiro, pois se vistas de um determinado ponto, tem-se uma ilusão de tridimensionalidade, parecendo real. Na figura 8, a moça parece muito menor do que é realmente, e a letra "w" desenhada no chão, que parece estar na mão do artista encontra uma mistura de anamorfose e perspectiva forçada.

Suas bases estão alicerçadas em regras da física e da matemática, Trindade afirma que a anamorfose "[...] surge com muita frequência nos diversos tratados de perspectiva linear e de óptica dos séculos XVII e XVIII" (2013, p. 29).

A construção de uma anamorfose obedece a duas ideias importantes, uma de que a luz viaja em linha reta, e a segunda, é que percebemos os objetos por eles refletirem os raios de luzes, que vão em direção aos nossos olhos, dando origem a "pirâmide visual" representada na Figura 3. Juntamente com outros conceitos de geometria projetiva, foi utilizada para a construção das primeiras anamorfoses, a

---

<sup>5</sup> Disponível em: <http://www.weirdoptics.com/julian-beever-world-3d-painting-visual-illusion/>

distorção do quadrado em trapézio, como diz Trindade (2013, p. 30):

Tais métodos permitem, por exemplo, a transformação homológica do quadrado em trapézio e vice versa. Mais tarde, surgem outros dispositivos ou mecanismos geradores de outras anamorfozes, como a utilização abusiva de superfícies especulares, de forma e curvatura variada, como os espelhos planos, poliédricos, cilíndricos, cônicos e esféricos, côncavos e convexos, que se começam a utilizar abusivamente a partir de 1615 e que dão origem às anamorfozes poliédricas, cilíndricas, cônicas e esféricas, onde as imagens se restituem através de espelhos cujas superfícies modeladoras terão de apresentar exactamente a mesma curvatura ou a mesma geometria que originou a deformação ou a distorção das respectivas imagens.

Como podemos perceber as técnicas para a reprodução de uma anamorfose, são diversas.

Segundo Figueiredo e Santos (2009, p. 53) "o trabalho mais antigo que se destaca como exemplo foi a pintura de Leonardo da Vinci, Leonardo's Eye (1485) [...]" e o trabalho mais famoso em que é aplicado a técnica da anamorfose, também citado por Figueiredo e Santos (2009, p. 53) seria " Os Embaixadores":

Já no ano de 1533 foi pintado o quadro mais famoso que aplica a Anamorfose, *Os Embaixadores* de Hans Holbein, que foi posicionado no topo de uma escada de um castelo, somente enquanto subia-se a escada tinha-se a visão de um crânio, assim que se chegava ao topo, enxergava-se a figura de duas pessoas bem vestidas e a caveira não era vista.

Na sequência as figuras 9 e 10 do quadro "Os Embaixadores" com vistas oblíqua e frontal:

Figura 9 - Vista oblíqua de Os Embaixadores



Fonte: pinturaquefala<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Disponível em: [www.pinturaquefala.blogspot.com](http://www.pinturaquefala.blogspot.com)



Figura 10 - Vista frontal de Os Embaixadores



Fonte: pinturaquefala<sup>5</sup>

Ambas as obras citadas acima, teve como técnica aplicada o que denominam de anamorfose oblíqua, que são as deformações criadas em imagens reproduzidas em superfícies planas, oblíquas à pirâmide visual. Suas regras possuem afinidades com as regras de perspectiva albertiana, conforme Trindade (2013, p. 31):

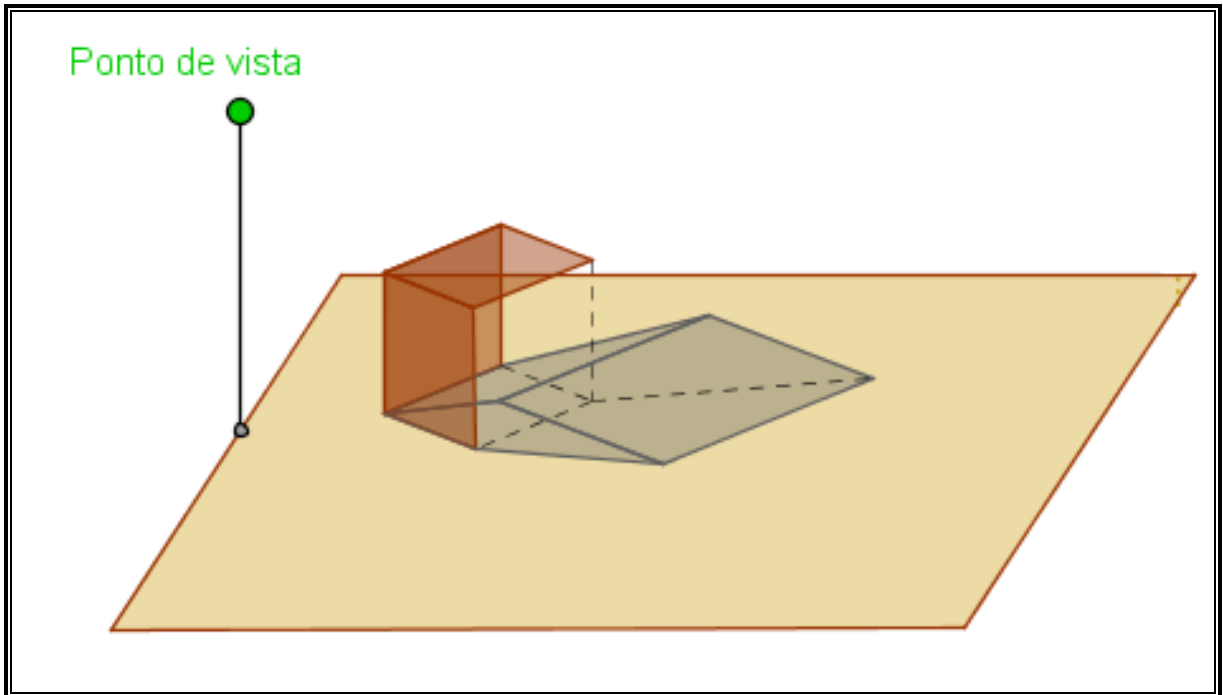
Os instrumentos perspécticos, como os criados por Albrecht Durer e Jacob Kaiser, podem assim funcionar em sentido inverso, ou seja, projectando imagens anamórficas, bastando para tal inclinar o quadro, evitando neste caso que exista algum raio visual perpendicular àquele. Nesta posição, com o quadro oblíquo, os objectos parecerão direitos e se endireitarmos o quadro, considerando agora o raio visual principal perpendicular àquele, a imagem vista frontalmente parece distorcida.

A imagem a seguir objetiva contribuir para a compreensão da anamorfose oblíqua. O ponto de vista é o olho de um observador e a sombra do cubo (imagem em cinza) a projeção do cubo no plano oblíquo ao observador, o chão; ficando então visíveis as deformações necessárias para uma representação anamórfica a partir

---

deste ponto de vista. Para perceber a imagem projetada, sem a deformação, o observador deverá estar a uma altura e distância que possibilite vê-la sob o mesmo ângulo de sua criação.

Figura 11 - Base da anamorfose oblíqua



Fonte: Geogebra<sup>7</sup>

Outra técnica de anamorfose é a chamada catóptrica: em física é a parte da ótica que trata sobre a reflexão dos raios luminosos; na arte, é a deformação realizada em uma imagem, que depois de refletida em um espelho ocorre sua reconstituição, sendo a superfície refletora podendo ser cilíndrica, cônica ou piramidal, entre outras.

Na figura 12, segue um exemplo de anamorfose cônica:

---

<sup>7</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/b/82030#material/81705>(modificada pelo autor)

Figura 12 - Anamorfose cônica

Fonte: Pinterest<sup>8</sup>

Mais recentemente, alguns artistas têm utilizado planos distintos para a produção deste efeito, como na figura 13, que são três pontos de vistas diferentes de uma mesma construção:

---

<sup>8</sup> Disponível em: <https://br.pinterest.com/pin/491596115547723478/>

Figura 13 - Anamorfose em planos diversos



Fonte: Archivenue<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup> Disponível em: <http://www.archivenue.com/amazing-illusionary-perspective-paintings-by-felice-varini/dix-sept-cercles-oranges-excentriques-2/>



## 4 O DESIGN INSTRUCIONAL

Segundo Filatro (2008, p.7) "[...] costuma-se situar as origens do design instrucional à época da Segunda Guerra Mundial, que representou um enorme desafio instrucional", para um grupo de psicólogos e educadores que foram incumbidos da tarefa de formatar uma maneira de instruir rapidamente os soldados norte americanos para o uso de sofisticadas armas.

A evolução do Design Instrucional, na atualidade, modernizado e reestruturado "se dedica a produzir conhecimento sobre os princípios e os métodos de instrução mais adequados a diferentes tipos de aprendizagem" (FILATRO, 2008, p.4), e fundamenta-se nos campos das ciências humanas, da informação e da administração.

Filatro define Design Instrucional como:

[...] a ação intencional e sistemática de ensino que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas específicas, a fim de promover, a partir dos princípios de aprendizagem e instrução conhecidos, a aprendizagem humana (FILATRO, 2008, p.3).

Para tanto, assim como em outros métodos pedagógicos há fases importantes a serem observadas. Por Nunes (2011, p. 28, apud CAMPOS, CAMPOS, 1997):

- A fase da **Análise**, que envolve a identificação de necessidades de aprendizagem, a definição de objetivos instrucionais e o levantamento das restrições envolvidas;
- A fase do **Design e desenvolvimento**, que ocorre o planejamento da instrução e a elaboração dos materiais e produtos instrucionais;
- A fase da **Implementação**, quando ocorre a aplicação da proposta de Design Instrucional e a realização do evento ou a situação de ensino aprendizagem propriamente ditos;
- E a última fase, a **Avaliação**, que envolve o acompanhamento, a revisão e a manutenção do sistema proposto.

Fases que entendemos que no processo de Design Instrucional pode haver uma readequação ou um replanejamento, ou seja, podemos ir e voltar em cada fase, de acordo com as necessidades levantadas. Esta análise do processo foi necessária no desenvolvimento das atividades de construções de desenhos utilizando a técnica de anamorfose, como será colocado posteriormente.

Identificamos como análise, a busca de compreensão do conceito e das técnicas de construção da anamorfose, bem como a definição de suas possíveis articulações com o ensino de matemática; o design e o desenvolvimento, a busca por um novo meio de realizar a abordagem de conceitos matemáticos coadunado com a ideia de usarmos a conexão com a arte, e os passos previstos para o desenvolvimento da oficina; a implementação como a aplicação dessa proposta e a avaliação ao final deste processo.

Compactuando com Nunes (2011, p.21), "acredito que, para o professor desempenhar o que seria uma boa metodologia, não basta ele dominar os conteúdos, mas sim, saber mediar esse conteúdo na prática em sala de aula [...]", para isso, acreditamos que a pesquisa e a busca contínua se faz necessária.

Nesta mesma direção Filatro indica que o design instrucional, "[...] se dedica a produzir conhecimento sobre os princípios e os métodos de instrução mais adequados a diferentes tipos de aprendizagem" (2008, p.6), que aqui, vemos como a possibilidade de explorarmos, através da produção de deformações, os conceitos matemáticos.

## 5 METODOLOGIA E DESCRIÇÃO DA EXPERIÊNCIA

A proposta que construímos está alicerçada na junção de matemática e a arte. Utilizando conceitos de geometria euclidiana, geometria projetiva e perspectiva em algumas representações pictóricas, pretendemos, através do estudo da técnica de construções anamórficas, propor estratégias de ensino.

Para orquestrar o desenvolvimento da prática nos guiaremos através de alguns conceitos utilizados em design instrucional, que entendemos possibilitar a condução do aluno por meio de um caminho construído (FILANTRO, 2008, p.5) ao realizar o elo entre estas duas disciplinas. As construções propostas vão além da simetria, reflexão ou outra transformação geométrica. As distorções anamórficas exigem um padrão que, quando utilizado conceitos matemáticos, garante a reconstrução das distorções realizadas, possibilitando assim, que através da investigação e da observação haja traduções para a linguagem matemática.

Em termos práticos, optamos por desenvolver uma proposta de ensino com alunos pré-vestibulandos, durante quatro encontros, que totalizaram oito períodos de 45 minutos. Tal escolha ocorre como forma de discutir e analisar a proposta, caracterizada pela exploração de relações entre arte e matemática. Sendo mais preciso, nesta fase procuramos trazer novos elementos para abordar a questão norteadora deste trabalho: A partir de construções de anamorfose, como fazer emergir conceitos matemáticos, em particular, conceitos geométricos envolvendo a visualização e a representação?

As atividades foram planejadas de modo a provocar interações entre alunos, a desenvolver capacidade de observação e estratégias de representação, e a possibilitar exploração de conceitos matemáticos. Os alunos foram informados dos objetivos do trabalho e da intenção do pesquisador e realizaram, em grupos, tarefas práticas de construções de anamorfoses, orientados sistematicamente. Considerando o método pedagógico escolhido, buscamos criar um cenário para investigação “[...] um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação” (SKOVSMOSE, 2000, p.3).

Devido a natureza das atividades e do encaminhamento feito, entendemos que os dados coletados durante esta experiência de ensino não tenham mensuração quantitativa, mas sim qualitativa, que segundo Borba (2004, p.2) :

O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida.

Em conformidade com nossa questão de pesquisa que a priori não admite dados quantitativos, mas sim descritivos.

Nas seções que seguem, destacamos a trajetória de investigação teórica do autor deste trabalho, na busca de compreender as possibilidades de articulação entre matemática e arte, através do campo aberto pelas construções anamórficas e do nível de expectativa dos alunos em geral. Também são apresentados os detalhes da experiência prática realizada, com as devidas descrições dos resultados alcançados.

Em capítulo posterior nos detemos na avaliação dos resultados. A análise desta experiência, já podemos adiantar, abre mais campos de pesquisa do que propriamente certezas e afirmações.

## **5.1 Estudando anamorfose**

Início esta seção com uma pequena lembrança, de uma conversa que tive com um professor de educação física, quando este me disse, que a energia gasta por uma pessoa mais fraca ao levantar determinado peso é muito maior do que a energia gasta por uma pessoa mais forte ao levantar o mesmo peso.

A lembrança do parágrafo anterior é uma comparação um tanto esdrúxula, mas acredito possuir similaridade ao trabalho realizado na busca de informações. Iniciei minhas pesquisas de posse de apenas algumas imagens, que inicialmente acreditei pertencerem ao que conhecemos como ilusão de ótica. Após a leitura de alguns artigos, que não trago aos registros, pois já não os possuo mais, percebi que outra direção deveria ser tomada.

Iniciei uma pesquisa de trabalhos que tratavam do tema envolvendo matemática e arte. Li alguns trabalhos, mas até então a abordagem era direcionada a determinadas obras ou artistas, ou então voltadas ao trabalho com mosaico, sem nenhuma relação com as imagens que haviam despertado meu interesse.

Entre as disciplinas do currículo da licenciatura em matemática que cursei, estão geometria I, geometria II e geometria analítica, mas por mais que me esforçasse, não conseguia relacionar nenhum conteúdo estudado, com as imagens que me despertaram o interesse. As transformações geométricas estudadas, nem figuraram em minhas tentativas iniciais.

Não recordo como ocorreu, mas me deparei com o livro de Cavalca (1998): “Espaço e Representação Gráfica”, nele o autor trata sobre a questão do desenvolvimento da capacidade de “ver”. Perdi o foco, e a pesquisa agora já era a questão do “ver”, do “visualizar”.

Continuei passando os olhos por alguns artigos, ora lia sobre matemática e arte, ora buscava sobre a “visualização”; nestas idas e vindas, acabei por tropeçar no livro de Flores (2007): “Olhar, saber, representar”. Obviamente que até chegar aqui, algum tempo já havia transcorrido.

Na explanação sobre a técnica da perspectiva, encontrei os seguintes dizeres, “neste caso, a técnica da perspectiva central funciona como o aparato técnico, permitindo a reprodução fiel do real a tal ponto que se possa confundir imagem real com a imagem representada (FLORES, 2007, p.34).

Por mais explícito que agora possa parecer, não havia percebido a relação que havia com as imagens recebidas por e-mail, fato que trago na introdução. Pois, até este momento, não havia relacionado perspectiva com as imagens que causam uma ilusão de tridimensionalidade. Talvez tenha me faltado um momento de reflexão, mas sinto que se tivesse cursado uma cadeira de geometria projetiva, o consumo de energia seria menor em minhas buscas.

Novamente outra fuga, pois me surgiu a ideia de realizar uma abordagem mais filosófico sobre as imagens, possivelmente, influenciado pela leitura de Flores (2007). Então li o livro de Foucault “Isto Não É um cachimbo” (tradução de Jorge Coli, 1988), mas abandonei a idéia, pois a prática da construção e a matemática envolvida ainda era o que mais me atraía.

Retomo a leitura do livro de Flores, acompanhando suas reflexões enquanto

descreve a trajetória da construção da representação da profundidade em superfícies planas, quando me deparo com o seguinte parágrafo:

O que se faz, na verdade, é submeter a perspectiva central a determinadas modificações, seja diminuindo ou aumentando a distância, ou o ângulo de visão, seja não privilegiando o plano perpendicular ao eixo do cone visual para a projeção. Este procedimento produz o que se chama de anamorfose (FLORES, 2007, p.133).

Por não ter conseguido visualizar a descrição encontrada, procurei o significado de anamorfose no dicionário, e logo após, iniciei a busca na internet. Os primeiros resultados encontrados se referiam à anamorfose geográfica.

Não me detive ao estudo de anamorfose geográfica, mas trago aqui uma das definições encontradas, a do Blog do colégio Cenecista Dr. José Ferreira, de autoria de Junior:

As anamorfoses tem como característica o mapeamento da superfície de um determinado espaço geográfico, tornando a forma proporcional a uma determinada variável estatística. Este método de representação deriva principalmente dos mapas clássicos no sentido de que a transformação só pode ser processada em uma geometria já determinada. (JUNIOR, 2014, s/p)

Comecei a combinar a palavra anamorfose e outras, como “anamorfose na arte”, quando me deparei com um artigo de Figueiredo e Santos (2009), “Oficina de Anamorfose: Uma nova forma de aprendizagem”. Imaginei que havia encontrado um manual de como realizar as construções anamórficas.

Não encontrei o passo a passo, mas a contribuição foi de grande valia, primeiro pelas imagens, que acabaram me inspirando para a construção de uma atividade que será tratada posteriormente. E, mais importante para minhas pesquisas foi a informação de que “a técnica de representar através da anamorfose não é fácil, demanda conhecimentos especializados em perspectiva, desenho, geometria descritiva e projetiva [...] (FIGUEREDO; SANTOS, 2009, p.52).

Geometria projetiva e perspectiva agora também seriam alvos da pesquisa, e entre os materiais encontrados estava uma apostila do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, da disciplina de Geometria Projetiva e Desenho (s/autor, s/a). Percebi que este era um conteúdo que demandaria tempo para estudar, sua compreensão não me parecia tarefa fácil.

Percebi que estava no caminho, quando li que “[...] a geometria dos objetos reais é a geometria euclidiana; a geometria projetiva estende esta geometria e passa a estudar também a forma de como estes objetos são vistos” (IME-USP, p.10, s/a).

Outro conteúdo encontrado foi o vídeo de propaganda da Honda, que citarei com mais detalhes posteriormente, os efeitos encontrado neste vídeo me chamou a atenção e então percebi que já tinha material suficiente e grande necessidade de orientação.

Minha escolha se deu, por diversos motivos, mas uma foto realizada utilizando perspectiva forçada, publicada pela minha Orientadora, teve grande contribuição para o convite. Levei o vídeo, apresentei-o e discorri sobre minhas intenções. Hoje percebo que naquele momento as coisas não estavam definidas, com ideias lineares como o relato que trago.

Ouvir minhas ideias e definirmos juntos a direção a ser tomada, foi importante neste processo, e assim percebi que a pesquisa começou a tomar forma. As leituras continuavam, neste momento com alguma produção sendo realizada.

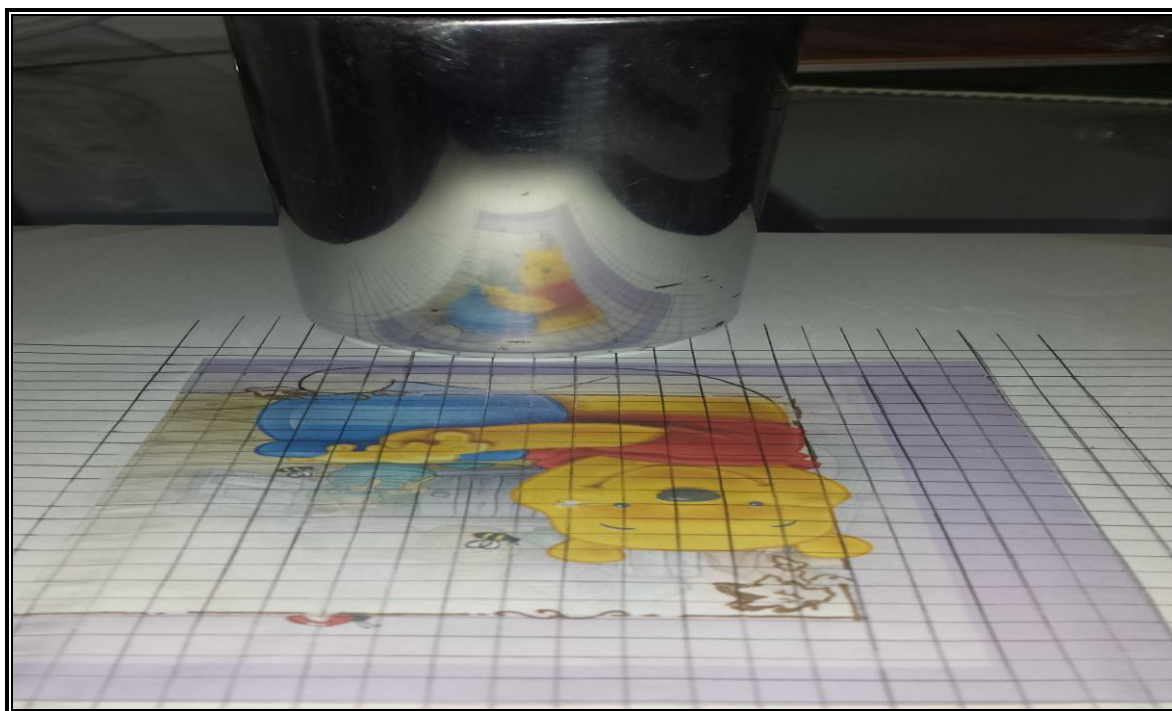
A primeira tarefa foi a construção de uma anamorfose catóptrica, realizei algumas pesquisas em sites, mas em nenhum foi encontrado o cálculo ou instruções de como realizar esta construção. Encontrei inclusive a sugestão de realizar a deformação através de um programa chamado Anamorph Me<sup>10</sup>. Assim, realizei a deformação através da observação e de meus conhecimentos de geometria.

Para conseguir o espelho cilíndrico, lavei uma lata de energético com Bombril e obtive um espelho razoável. Selecionei uma figura e de posse de régua e compasso construí uma grade quadriculada, como ilustro na figura 14:

---

<sup>10</sup> Fonte: <http://www.anamorphosis.com/software.html>

Figura 14 - Imagem quadriculada



Fonte: Arquivo pessoal

Para continuação da construção, convençionei que a figura estaria localizada no primeiro quadrante do plano cartesiano e numerei as linhas e colunas, criando assim referência para cada quadrado da malha.

Percebi que este espaço do plano cartesiano em que posicionei minha figura deveria ser deformado, de maneira que se transformasse em um arco de coroa circular. Dei início à construção de um plano polar, levando em conta a medida da circunferência da base do meu espelho cilíndrico.

Depois de ter desenhado a base do espelho cilíndrico em uma folha de papel em branco, procedeu-se ao traçado do plano polar. A projeção do centro da circunferência da base do espelho cilíndrico é o pólo deste plano. Para isto usei a propriedade das cordas, baseado nas seguintes definições e passos:

Definição 1: Corda é o segmento que une dois pontos distintos de uma circunferência;

Definição 2: Mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos A e B distintos.

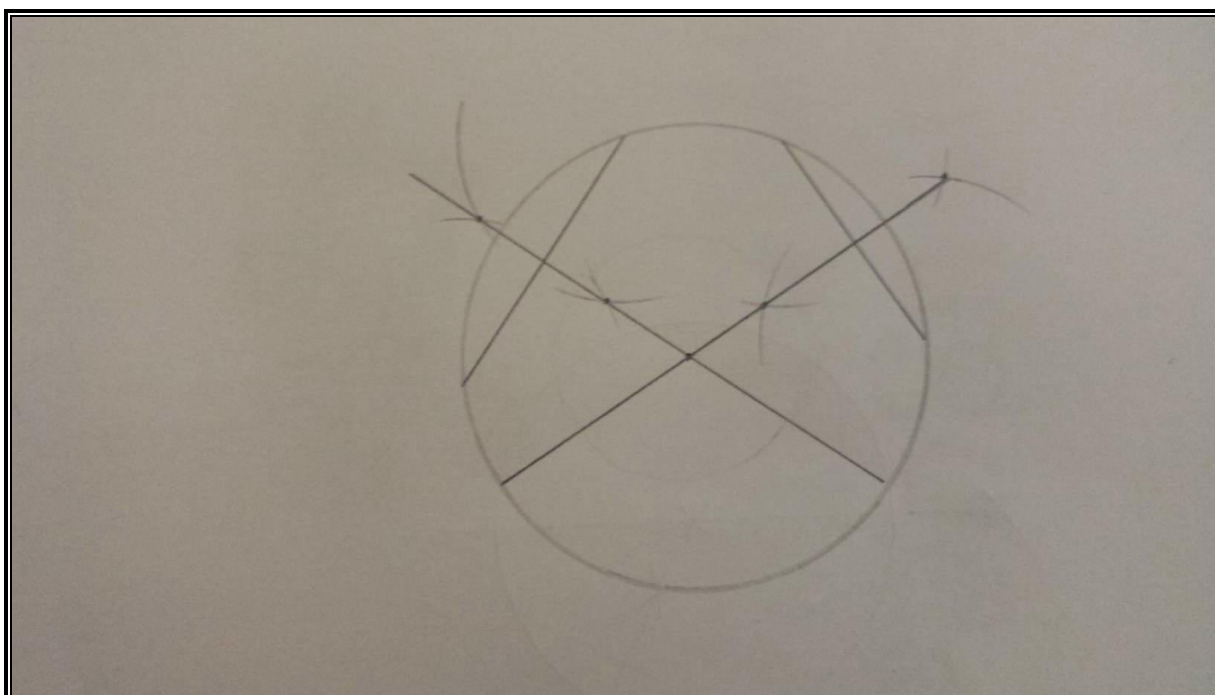


Definição 3: Toda mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência à qual ela pertence.

Com um compasso aberto, de maneira que sua abertura seja maior que a metade do comprimento da corda, traça-se uma circunferência com centro em uma das extremidades desta corda, logo após, traça-se outra circunferência com mesmo raio, centrado na outra extremidade da corda.

Construindo uma segunda corda na circunferência que procuramos o centro e repetindo-se os procedimentos, teremos duas mediatrizes de cordas distintas de uma mesma circunferência. Por definição, ambas passam pelo centro da circunferência, logo o ponto de intersecção será o centro da circunferência. Exemplifica-se este processo na figura 15:

Figura 15 - Cordas



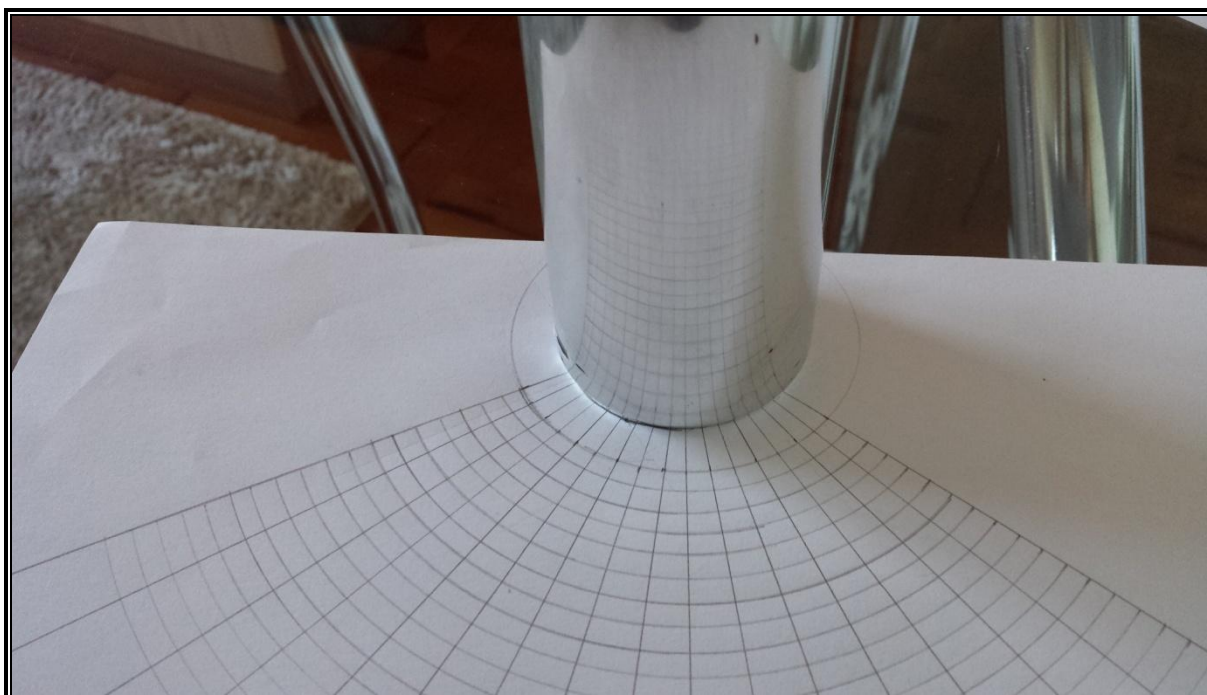
Fonte: Arquivo pessoal

Para a construção da malha quadriculada, realizada sobre o desenho original, defini meio centímetro como espaçamento entre as linhas e colunas. Encontrado o centro da circunferência, por opção, decidi trabalhar com um raio de um centímetro maior do que o raio que compreende a circunferência da base do espelho cilindro, para a construção do setor de coroa, medidas maiores poderiam ser escolhidas, o que causaria maior distorção ao desenho original.

Para a construção da malha distorcida, através do raio escolhido foi calculado o arco de comprimento igual à base da figura, dividido em arcos menores com comprimento igual a meio centímetro.

De posse da medida angular, tive que realizar novo cálculo, pois o raio do transferidor era um pouco maior, entrou a proporcionalidade. Produzindo a malha apresentada na figura 16.

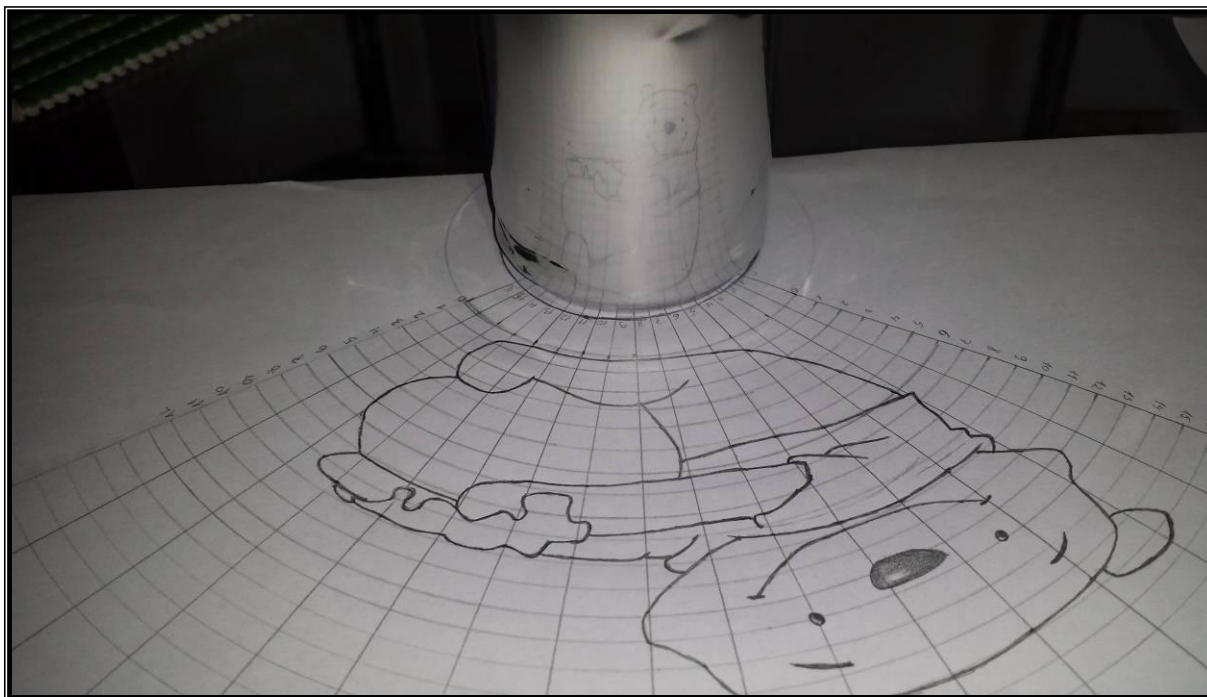
Figura 16 - Grade deformada



Fonte: Arquivo Pessoal

Para completar a deformação da imagem, foi necessário realizar a transferência da figura que se encontra sob a malha quadriculada para o setor do plano polar. Este trabalho simples, acaba por trazer certo desconforto, pois linhas em que na malha quadriculada são curvas, quando transferidas para o setor de coroa do plano polar, sofrem uma deformação de modo que as transformam quase em linhas retas. Em nossa figura o exemplo mais acentuado desta deformação foi a boca. A deformação completa trago na figura 17.

Figura 17 - Urso com a deformação



Fonte: Arquivo Pessoal

Para entender outros tipos de anamorfose, diversas fontes foram consultadas, pois em Flores (2007) havia apenas a deformação de uma grade quadriculada em uma alongada, que pode ser utilizada na distorção de imagens. Minha intenção neste momento estava em verificar de que maneira realizar a representação de objetos tridimensionais, no plano que possibilitasse uma ilusão de tridimensionalidade.

Após algumas leituras e buscas pela técnica, encontrei no artigo de Vasconcelos et al. (2010):

Parte-se da consideração de que os fundamentos da anamorfose são os mesmos da representação de sombras: representação da projeção de um objeto sob o ponto de vista de um observador. Sendo que para o caso de representação de sombras o observador é caracterizado como a própria luz.

Estas explicações foram importantes para o entendimento de como realizar a deformação de um objeto. Ainda, havia a descrição de uma atividade que foi sugestiva para meu planejamento, sem a explicação de como fazer. Optei por dar

ênfase na construção utilizando a semelhança de triângulos, pois este conteúdo é bastante enfatizado no ensino fundamental e médio, tendo outros conceitos amparados neste, como a Trigonometria. Porém, não se pode descartar a possibilidade de outras abordagens, como por exemplo, envolvendo as transformações geométricas.

Percebi que este tema permite uma abordagem que abrange vários conhecimentos, e que em minhas leituras, identifiquei raras pesquisas que enfatizam conteúdos matemáticos, principalmente, no que diz respeito a uma experiência em sala de aula, o que permite a que mais pessoas possam contribuir, além de mim, na continuação deste estudo posteriormente.

## **5.2 Descrição de uma experiência de sala de aula: Implementação**

A atividade foi desenvolvida com alunos do curso pré-vestibular Dandara, que funciona atualmente no prédio do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, localizado no centro de Porto Alegre. O Dandara é um curso popular, ou seja, voltado a atender pessoas menos favorecidas, em sua maioria com o ensino médio completo, e que desejam prestar exame vestibular e ou Exame Nacional do Ensino Médio, com o intuito de dar continuidade a seus estudos.

Segundo os coordenadores, há aproximadamente trinta alunos matriculados no curso Dandara. Porém em nossos encontros nunca compareceram mais que dezoito alunos.

Todos os alunos presentes no dia em que fomos apresentar a proposta foram convidados para participarem das atividades, porém foi considerado como material de análise para a pesquisa somente as produções realizadas pelos participantes que devolveram o termo de consentimento assinado (apêndice A).

As atividades foram todas desenvolvidas na sala onde normalmente ocorrem as aulas, que além das classes e cadeiras, possui um projetor, uma unidade central de processamento de dados, ou CPU e quadro negro.

Transcrevemos alguns diálogos, dificuldades, desafios e surpresas vivenciadas. Para assegurarmos o sigilo das informações coletadas durante este trabalho, identificamos os alunos envolvidos no projeto atribuindo uma letra escolhida aleatoriamente.

### 5.2.1 Primeiro encontro

No primeiro encontro, ocorrido no dia 30 de maio de 2016, foi realizada uma apresentação pessoal, para os dezoito alunos presentes, pois eu não era conhecido pela turma. Discorri sobre o trabalho, auxiliado por uma apresentação realizada em um programa chamado “prezi”.

Após a apresentação, questionei quem, entre os alunos, estava disposto a participar da pesquisa, fiquei um pouco decepcionado quando apenas cinco alunos levantaram a mão, se voluntariando.

Distribui os termos aos que se prontificaram a participar da pesquisa e esclareci que todos que quisessem participar das atividades estavam convidados, mesmo não participando da pesquisa.

Primeiramente, questionei se entre eles alguém conhecia ou já havia ouvido falar sobre anamorfose. Como a resposta unânime foi a de desconhecimento, fiz uma breve explanação e iniciei a projeção do vídeo “Stunning Anamorphic Artworks That Can Only Be Seen With A Mirror Cylinder”, encontrado no youtube. Após, projetei as figuras 18 e19, apresentadas na sequência:



Figura 18 - Arte estação República

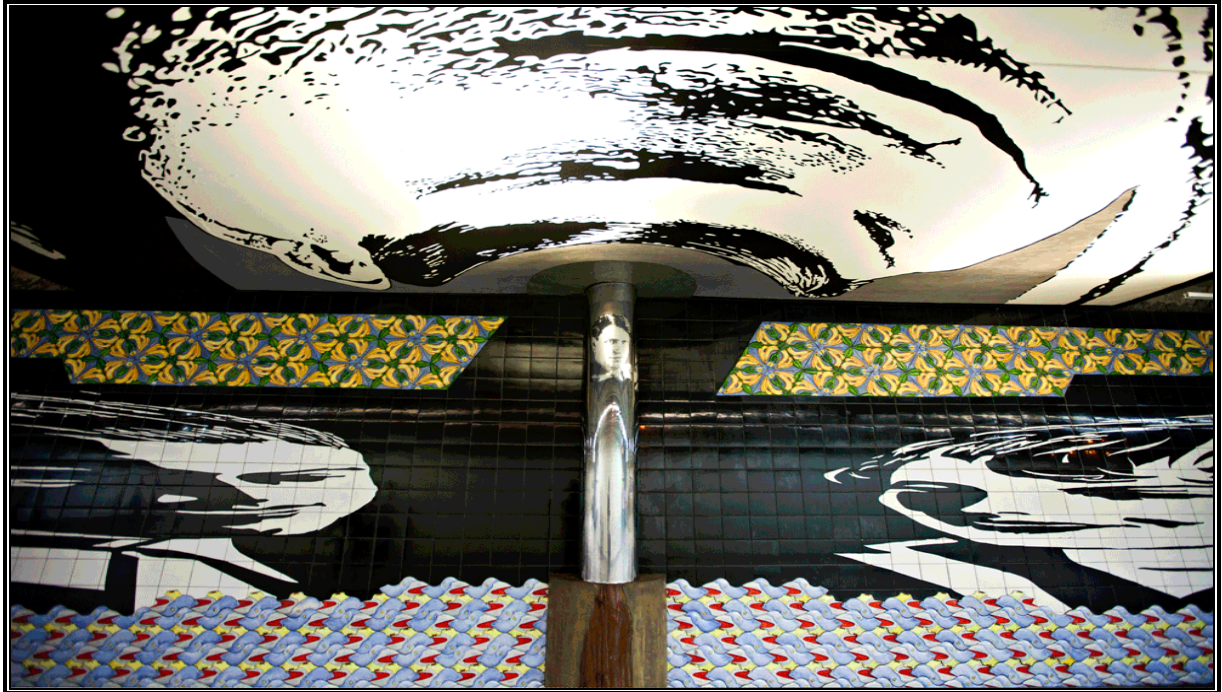
Fonte: monumentos<sup>11</sup>

Figura 19 - Anamorfose catóptrica



---

<sup>11</sup>Fonte: [HTTP://WWW.monumentos.art.br/monumento/momento\\_antropofagico\\_com\\_oswald\\_de\\_andrade](http://www.monumentos.art.br/monumento/momento_antropofagico_com_oswald_de_andrade)

Fonte: im-possible<sup>12</sup>

A primeira imagem (figura 18) representa uma obra de arte denominada "Momento antropofágico com Oswald de Andrade" (1990) de Antonio Peticov, que encontra-se na estação República do Metrô em São Paulo (FIORAVANTE, 2012). A figura 19 representa obras de Kelly M. Houle, encontradas na Internet.

Observei que após a apresentação inicial os alunos estavam entusiasmados com o que viram, que pode ser exemplificado no pronunciamento de dois ou três alunos:

- Que show!

Entendo ser este, a motivação, um fator essencial de facilitação da aprendizagem.

Após a observação pelos alunos dos padrões contidos nas obras apresentadas, foi proposta a produção de suas próprias obras, com o intuito de que ao final, realizem as distorções propostas pela técnica da anamorfose.

Ao iniciar a distribuição do material, questionei quem iria participar das atividades. Para minha surpresa, todos os presentes disseram que iriam fazer as atividades, e novos alunos se prontificaram a participar da pesquisa, contabilizando dez alunos que entregaram o termo de consentimento.

Foi sugerido que se organizassem em grupos, e que não ficassem em número maior do que cinco alunos, por entender que grupos pequenos trabalham mais focados na proposta.

Concordamos que esta dinâmica, de trabalhar em grupo, favorece o desenvolvimento "à competência de interpretar e agir numa situação social" (SKOVSMOSE, 2000), mesmo assim, não contrariei a escolha realizada por dois alunos que optaram por trabalhar sozinhos.

A primeira transformação anamórfica apresentada no vídeo e nas duas imagens (figura 18 e 19) é denominada catóptrica, e pode ser realizada através da conversão de uma grade "cartesiana" em uma grade polar. A deformação sofrida pela imagem construída na grade cartesiana ao ser transportada para a polar pode ser recuperada através do reflexo em uma superfície cilíndrica.

---

<sup>12</sup> Fonte: <http://im-possible.info/english/art/misc/anamorphic/kelly-oule.html>

A primeira atividade foi a construção de um espelho cilíndrico, para isso, havia levado insulfilm e vários pedaços de cano, de quatro diâmetros diferentes, exemplificado na figura 20:

Figura 20 - PVC de diferentes diâmetros



Fonte: - Arquivo próprio

Foi sugerido que todos os integrantes de cada grupo pegassem um cano, mas alguns optaram por não pegar e ficar apenas auxiliando no trabalho junto ao colega.

O primeiro problema proposto se deu pela necessidade de calcular a superfície lateral do cano para a construção do espelho cilíndrico, já que o insulfilm não pode ser amassado, teríamos de medir o tamanho necessário, e recortá-lo, antes de envolvê-lo no PVC.

Alguns mediram rapidamente a altura e fizeram a anotação, e logo após ficaram olhando para o cano, acreditamos que avaliando como calcular a circunferência. Inferimos que foi um momento que favoreceu o engajamento do aluno em uma ação e reflexão (SKOVSMOSE, 2000).

Figura 21 - Cálculo da área lateral





Um dos grupos tentava lembrar da fórmula para calcular a medida do comprimento da circunferência, gerando o diálogo abaixo:

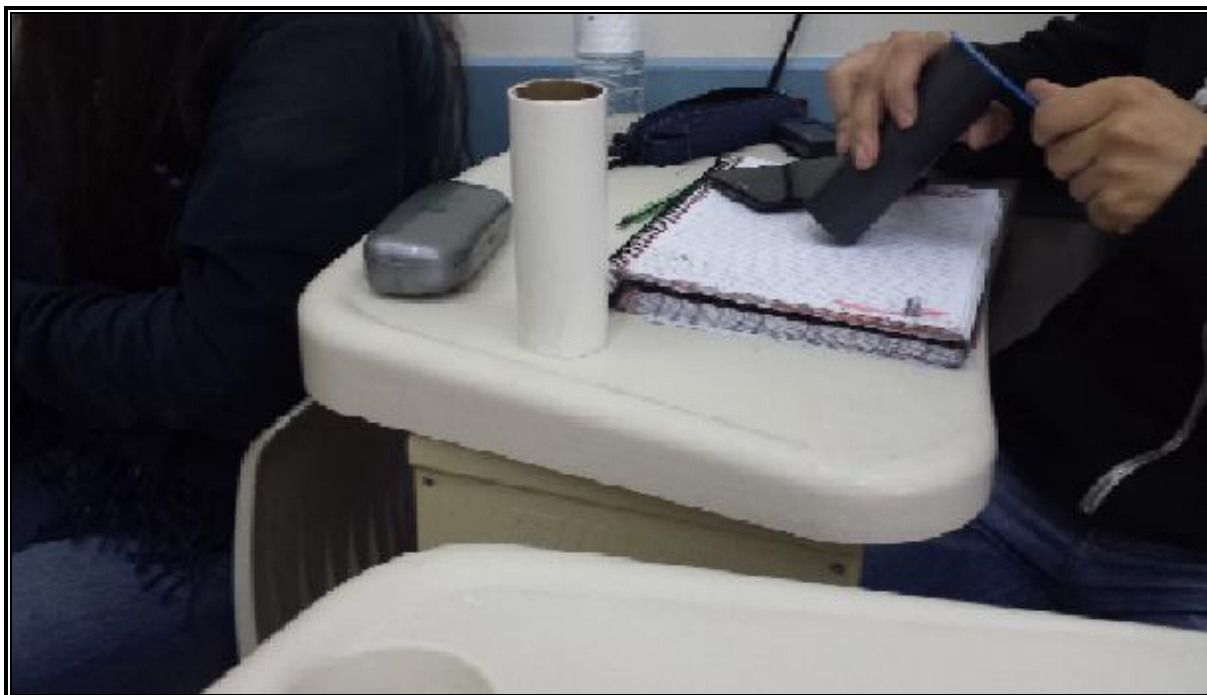
Aluna J: - Acho que a fórmula para calcular a circunferência é dois PI vezes r dividido por quatro.

Aluno E: - Dividido por quatro?

Então os membros deste grupo se olharam e eu continuei caminhando entre os grupos, com o intuito de que se sentissem mais a vontade para continuarem a discussão, através da troca de ideias.

Houve a tentativa de medir o diâmetro diretamente com a régua, como podemos ver no registro fotográfico representado na figura 22:

Figura 22 - Procurando o diâmetro



Fonte: Arquivo próprio

A tarefa de medir a superfície lateral do cilindro foi muito participativa, pois era perceptível que todos os alunos presentes procuravam uma maneira de medir o comprimento da circunferência do cilindro que haviam escolhido.

Nesta etapa, a busca por informações e conceitos matemáticos contribuiu para o desenvolvimento da reflexão, pois as soluções encontradas deveriam dar conta de resolver o problema de cobrir a superfície lateral do cilindro.

Nenhum aluno havia se lembrado da fórmula. A aluna M resolveu arrancar uma folha de papel do caderno e enrolar no cilindro de forma que cobrisse toda a lateral, recortando com a tesoura o que estava sobrando.

A utilização de tal artifício pode ser interpretado como a planificação do cilindro, demonstrando o envolvimento com conhecimento geométrico de forma empírica.

Infelizmente não foi possível construir o espelho cilíndrico, pois a professora do outro período estava na porta, percebi que dez minutos além do nosso horário já haviam se passado.

### 5.2.2 Segundo encontro

Para a realização do segundo encontro, alguns ruídos entre o pesquisador e

a coordenação do curso ocorreram. Inicialmente o segundo encontro deveria ser realizado em um sábado, data em que normalmente há oficinas e palestras, porém não haviam avisado a turma em tempo, então no final da tarde de sexta feira o encontro foi cancelado. A realização deste registro se deu por acreditarmos que ocorrências desta natureza de alguma forma influenciam no comportamento dos alunos em relação ao curso e até mesmo na oficina que propomos. O desencontro de informações pode comprometer o desenvolvimento das tarefas, considerando que devido à falta da correta divulgação, alguns alunos interessados em participar poderiam ficar de fora.

No segundo encontro, ocorrido no dia 02 de junho de 2016, compareceram 17 alunos, entre eles dois que não estavam presentes no primeiro encontro, convidados para continuarmos as tarefas. Apenas dois dos alunos presentes se mantiveram pouco envolvidos, o restante da turma logo se levantou e deu início aos trabalhos, como ilustra a figura 23:

Figura 23 - Alunos recortando insulfilm



Fonte: Arquivo próprio

Enquanto circulava entre os alunos percebi que o aluno L possuía anotações das fórmulas do volume do cilindro, da circunferência e o desenho de um retângulo com a fórmula da área na folha de papel quadriculado, demonstrando que a

atividade foi desenvolvida não só durante o horário da aula.

Um dos grupos mesmo sabendo que alguns dos colegas estavam utilizando folhas do caderno para enrolar o cano e calcular a quantidade de insulfilm que necessitaria para cobrir o cilindro, continuavam discutindo sobre o cálculo através de fórmula.

Segue o registro de uma parte do diálogo:

Aluno E: - Tá. Já sabemos qual é o diâmetro, mas quem lembra como calcular agora?

Aluna M: - Eles disseram que é  $2\pi r$ .

Aluno E: - E...?

Como ficaram em silêncio, resolvi intervir.

Pesquisador: - Qual a relação entre o raio e o diâmetro?

Aluno E: - Diâmetro é o dobro do raio.

Pesquisador: - Então o que precisamos para calcular o comprimento da circunferência?

Aluno E: - Basta dividir o diâmetro por dois, e teremos o raio.

Deixei que realizassem seus cálculos e pouco depois retornei e questionei:

Pesquisador: - Podemos trocar  $2\pi r$ , por diâmetro vezes  $\pi$ ?

O aluno E deu um sorriso, mas foi fazer os cálculos no celular.

Aluno E: - O resultado é o mesmo. Claro!

Antes do final deste encontro, todos os grupos haviam colado o insulfilm em pelo menos um dos canos que possuíam, mas apenas um dos grupos havia realizado o cálculo da superfície lateral do cilindro.

Com o auxílio de um barbante e uma régua flexível, desenhei uma circunferência e um arco de mesmo comprimento do raio, explicando que quando temos um arco de mesmo comprimento do raio da circunferência que o contém, dizemos que este mede 1 radiano.

Expliquei que se dividíssemos o comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu raio teríamos um valor aproximado de 6,28. Logo temos o diâmetro da circunferência, que representaremos pela letra  $C$ , igual a  $r \cdot 6,28$ . Como 6,28 é igual a  $2 \times 3,14$ , temos  $C = r \times 2 \times 3,14$ . Se considerarmos 3,14 como um valor aproximado de  $\pi$ , temos a fórmula:  $C = 2\pi r$ .

Foi distribuída uma folha quadriculada a cada aluno presente, e solicitado

que realizassem um desenho, de criação livre, mas que não ultrapasse uma área de 10 x 10 unidades, evitando assim desenhos muito grandes e demorados.

Alguns mais adiantados, como a aluna M, já estavam observando o reflexo, das linhas quadriculadas e seu desenho, no espelho cilíndrico.

Como referencial, da mesma forma que fiz quando estava pesquisando, convencionei que a linha limítrofe do desenho, localizada na parte inferior seria nosso eixo x e a linha perpendicular a esta e localizada à esquerda do desenho seria nosso eixo y, lembrando o plano cartesiano.

Dialogando com os alunos, concluímos que as linhas paralelas ao eixo x do desenho teriam de ser distorcidas de forma que ficassem arqueadas, enquanto que as linhas paralelas ao eixo y permaneceriam retas, porém perpendiculares entre si. Neste diálogo, percebi a necessidade de revisar posições relativas entre retas.

Observando que o encontro já estava findando, expliquei que teríamos de desenhar um arco de mesmo comprimento da base dos desenhos feitos por eles, baseado em um raio que seria um pouco maior do que o raio do cilindro que construíram o espelho.

Realizei uma explicação de como encontrar o centro da circunferência através das cordas, exemplificado na figura 15.

Devido ao pouco tempo que nos sobraria, iniciei um diálogo com toda a turma, com a intenção de que construíssem a grade polar em casa. Desenhei no quadro uma circunferência e fiz um esboço de um plano polar, explicando que teriam de calcular o comprimento do arco conforme seus desenhos, pois percebi que nem todos haviam produzido dentro do limite sugerido.

### **5.2.3 Terceiro encontro**

No terceiro encontro compareceram apenas quatro alunos, inicialmente, começamos a conversar, fizeram-me algumas perguntas sobre como era o vestibular da UFRGS e me contaram suas pretensões. Imaginei que outros alunos pudessem chegar, mas como já haviam se passado alguns minutos e ninguém mais havia chegado, iniciamos os trabalhos.

Questionei-me se não havia realizado uma interpretação errônea em relação ao primeiro e segundo encontro, e se a atividade proposta estava apropriada para aquele público. Mas, posteriormente, descobri que na aula de matemática da



semana anterior, apenas dois alunos haviam comparecido.

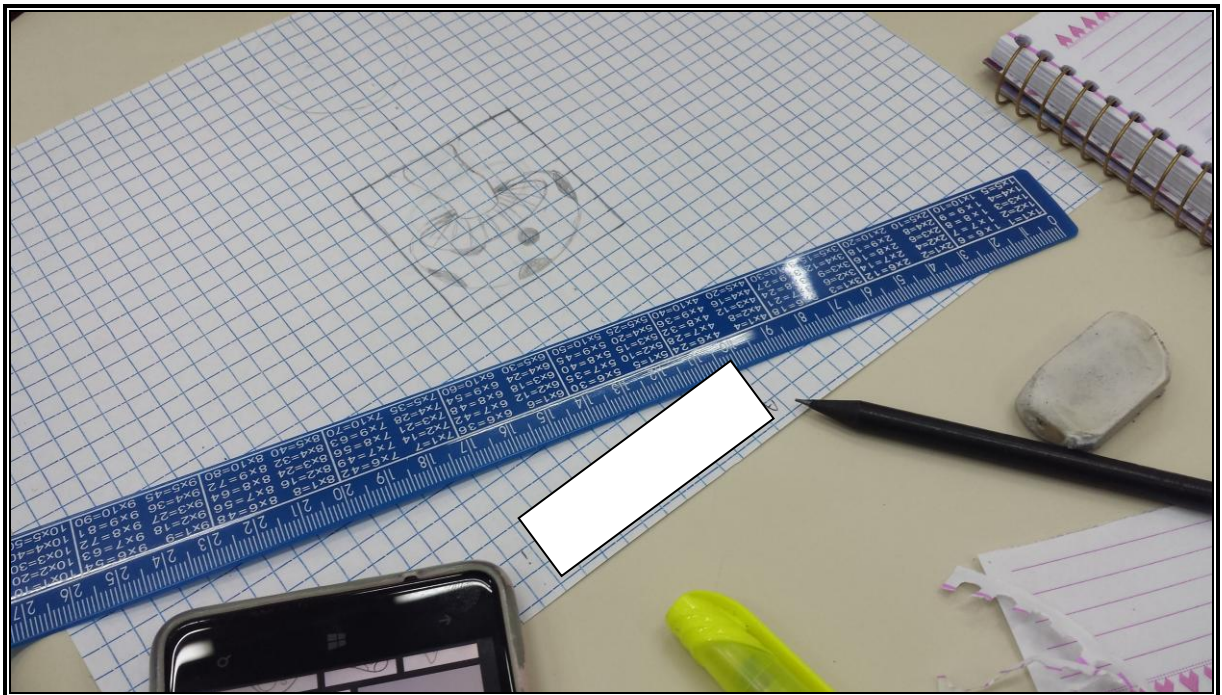
Convidei os presentes para darmos continuidade às tarefas. Como forma de ganharmos tempo, levei algumas folhas com círculos concêntricos construídos no software Geogebra, conforme o raio de cada exemplar de pvc utilizado e espaçados de acordo com a distância entre as linhas, utilizada nas folhas quadriculadas. Pois assim, teriam que apenas construir os arcos correspondentes à base de seus desenhos.

Para a continuação desta atividade, distribuí transferidor e compasso e auxiliei no cálculo do ângulo correspondente ao comprimento do arco.

Quase no final da aula um quinto aluno chegou, dizendo-me que depois de muita pesquisa havia conseguido realizar parte da tarefa, uniu-se aos presentes e juntos conseguiram concluir a anamorfose.

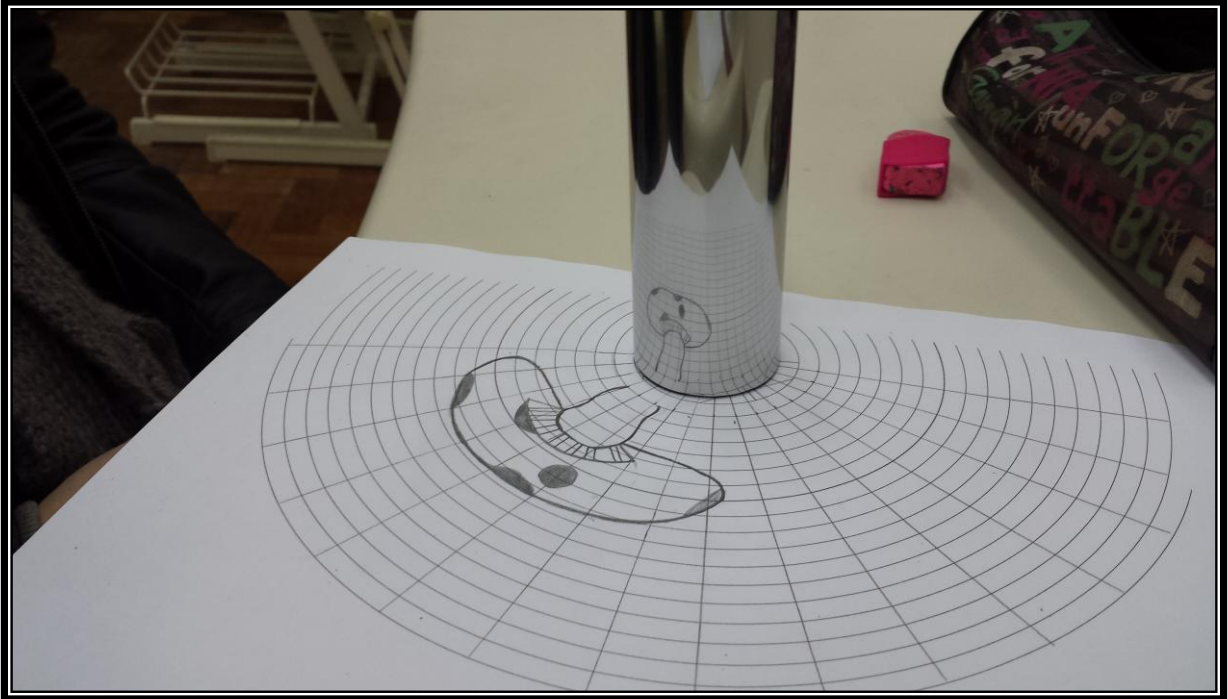
Na figura 24 temos a imagem original e na figura 25 a anamorfose realizada pelas alunas M e G.

Figura 24 - Desenho original



Fonte: Arquivo próprio

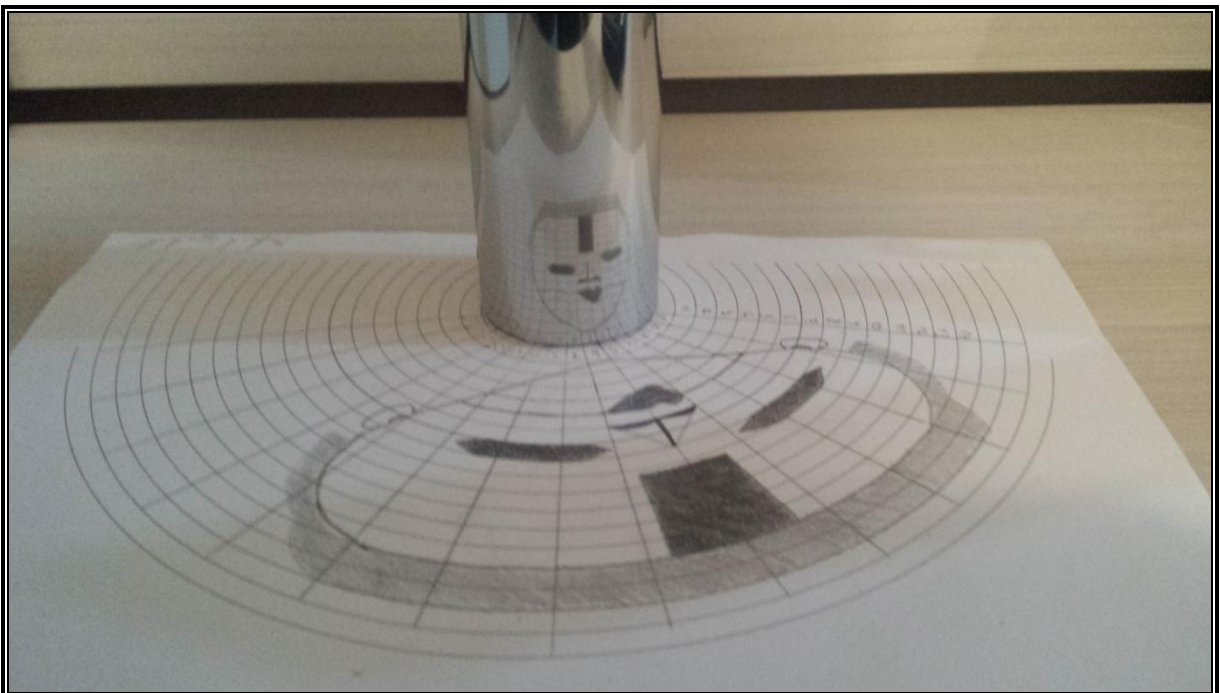
Figura 25 - Anamorfose das alunas M e G



Fonte: Arquivo próprio

Na figura 26 temos a anamorfose produzida pelo aluno E.

Figura 26 - Anamorfose do aluno E



Fonte: Arquivo próprio

O outro grupo presente desistiu de realizar o trabalho, creio que o motivo se deu pela dificuldade com os cálculos do arco.

#### **5.2.4 Quarto encontro**

O quarto encontro ocorreu no décimo dia de junho de 2016, contando com a presença de doze alunos, e entre eles três que ainda não haviam participado de nenhum dia da oficina. Para este encontro a proposta foi à construção de uma anamorfose oblíqua.

Iniciamos mostrando um vídeo sobre a propaganda da Honda encontrada no youtube sob o nome de “Carro, Honda, Ilusão de ótica, propaganda show !!”. Neste vídeo encontramos várias anamorfoses.

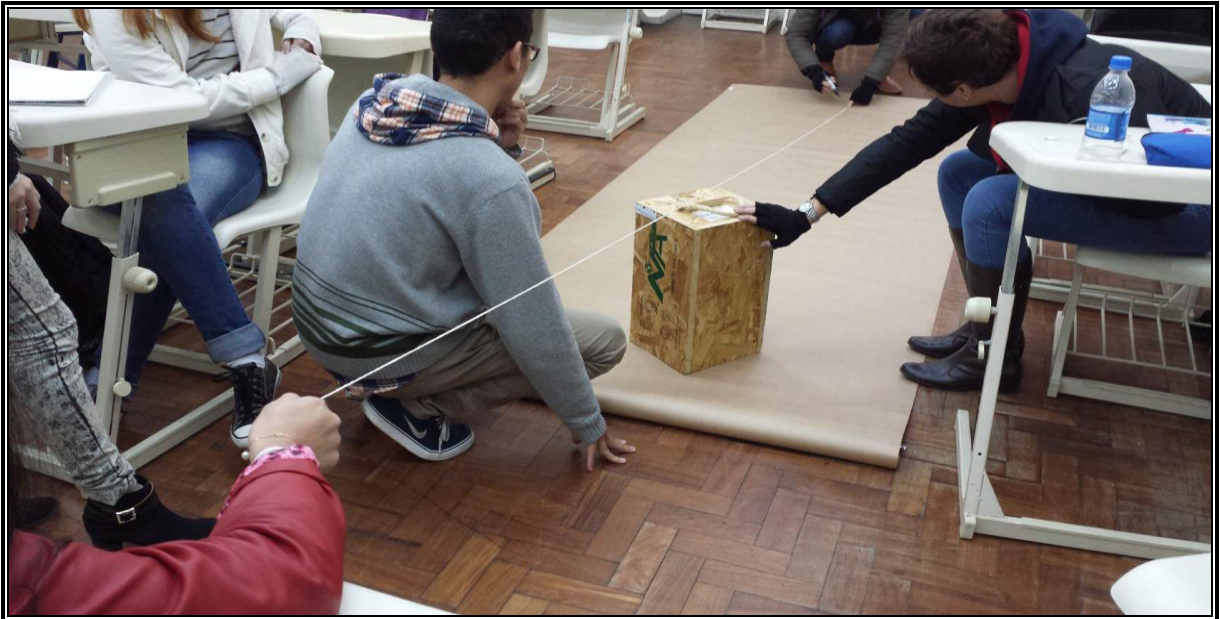
Após assistirmos o vídeo, falei para um dos alunos para que ele tentasse passar a ponta de um barbante por dentro de um orifício do chaveiro que eu possuía, com os braços esticados e com um dos olhos fechados. Outros alunos quiseram tentar, e todos riram da dificuldade encontrada na realização de uma tarefa aparentemente simples.

Realizei então uma breve explicação sobre o cone visual, que consiste na ideia de uma figura em que o olho do observador é o vértice, e os raios que o ligam ao objeto observado a geratriz, e convidei-os a construirmos a anamorfose de uma caixa de madeira. Observei que nem todos os alunos se demonstraram dispostos a realizar a construção.

Com o auxílio de um barbante, a turma deu início à construção, conforme registrado em fotos (figuras 27 e 28).



Figura 27 - Projeção oblíqua



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 28 - Anamorfose oblíqua



Fonte: Arquivo pessoal

Apesar da demora que terminou por prejudicar o desenvolvimento de outras tarefas, a interação entre eles foi válida, pois conforme detectavam os erros, partiam

em busca da solução.

O primeiro rascunho não deu certo, pois a aluna G, responsável pelo ponto de vista, na tentativa de encostar o barbante nos vértices, realizava movimentos, alterando o ponto de vista, erro detectado pelos próprios alunos, que se entenderam quando o aluno E disse:

- Professor, o que estamos fazendo é a sombra da caixa, não é?

Pesquisador: - Sim.

Aluno E: - Então, tu tens que ficar parada. [comentário dirigido à aluna G]

Sabendo-se que em algumas áreas do conhecimento o cálculo da sombra de objetos é conteúdo de estudo, identificamos aqui uma situação problema para justificar procedimentos matemáticos.

Enquanto trabalhavam, interagi com eles, de forma que aos poucos fossem trocando os nomes dos termos utilizados na construção geométrica, como ponta e lado por vértices e arestas. O resultado da construção pode ser visto na figura 29.

Figura 29 - Anamorfose alunos



Fonte: Arquivo próprio

Percebemos que além da organização do tempo, “os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade” (BARBOSA, 2001, p.5).

Queríamos dar continuidade às atividades abordando questões como transformações geométricas e semelhança de triângulos. Um problema que possibilitaria diferentes respostas seria o de calcular o comprimento da projeção, com dados variados, como a altura do aluno a uma distância fixa da caixa e, após outras distâncias, proporcionando uma variedade de soluções.

Porém, nos sentimos gratificados pelo êxito alcançado no quesito envolvimento dos alunos, principalmente nas atividades práticas de construção, como na busca pelas soluções dos problemas propostos.

## 6 AVALIAÇÃO DO PROCESSO

Neste capítulo apresentamos a análise acerca das observações e registros realizados durante o processo de desenvolvimento desta pesquisa, baseada nas etapas do Design Instrucional.

A primeira fase do Design Instrucional, “consiste basicamente em entender o problema educacional e projetar uma solução aproximada” (FILATRO, 2008, p.28). Na introdução deste trabalho, apresentamos nossas expectativas, pois havíamos observado nas aulas de Laboratório II desenvolvidas em uma turma de alunos de uma escola um maior interesse dos alunos pelas aulas de arte. Também enfatizamos a necessidade de se desenvolver a habilidade de “visualização e representação geométrica”, o que nos levou a optar por uma pesquisa envolvendo matemática e arte, para a conexão entre estas duas áreas do conhecimento, e abordagem de conceitos almejados, escolhemos o tema anamorfose.

Conduzidos a responder a seguinte questão: **A partir de construções de anamorfose, como fazer emergir conceitos matemáticos, em particular, conceitos geométricos envolvendo a visualização e a representação?** desenvolvemos as próximas etapas do Design Instrucional.

A pesquisa sobre a origem e a teoria envolvida nas construções anamórficas foi necessária para a compreensão do processo, porém, para a segunda fase do método, “[...] o planejamento e o design da situação didática propriamente dita, com mapeamento e sequenciamento dos conteúdos a serem trabalhados, a definição das estratégias e atividades de aprendizagem para alcançar os objetivos traçados[...]” (FILATRO, 2008, p.28), um longo estudo sobre quais conceitos matemáticos estavam envolvidos foi imprescindível, pois não encontramos dados de como realizar as construções de forma explícita.

Construções anamórficas, como estudo anterior ao desenvolvimento das atividades, foram importantes para desenharmos as atividades e então partimos para o desenvolvimento, definido por Filatro como: “[...] a produção e a adaptação de recursos e materiais didáticos[...]” (2008, p.30), que em nosso caso foi a escolha de quais tipos de anamorfose e como se daria a construção, fundamentais para contruir a oficina.

A implementação, penúltima fase do Design Instrucional, momento em que

ocorre a aplicação da proposta, fase em que “[...] os alunos realizam as atividades propostas, interagindo com conteúdos, ferramentas, educadores e outros alunos [...]” (FILATRO, 2008, p.31), se deu através da construção das anamorfozes captrópicas e oblíquas, por meio de uma oficina realizada em quatro encontros, em que as atividades possuíram etapas bem definidas.

A avaliação, última fase do Design Instrucional, em que “nela, avalia-se tanto a solução educacional quanto os resultados de aprendizagem dos alunos [...]” (FILATRO, 2008, p.31), trazemos através do entendimento de que o tema proposto, anamorfose, desperta a curiosidade dos alunos por ser um tema desconhecido, e possibilita a participação ativa dos educandos nas atividades, e proporciona um cenário para investigação.

Segundo Skovsmose (2000) “um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações”, o que foi possibilitado pelas buscas necessárias a cada etapa proposta nas atividades, que também permitiu ao educando “mover-se da referência à matemática pura para a referência à vida real [...]” (SKOVSMOSE, 2000), possibilitando caminhos diferentes para solução de problemas propostos através das atividades propostas.

Esta atividade demandou muito tempo para a construção, não havendo espaço para tratar de forma explícita e sistematizada, os conceitos matemáticos abordados, como transformação geométrica e semelhança de triângulos, ambos os conteúdos com grande possibilidade de serem explorados, por meio do tema abordado.

Constatamos que a frequência dos alunos, nas aulas oferecidas no curso não possuía assiduidade constante, comprometendo qualquer avaliação que por ventura quiséssemos fazer em relação à presença nos encontros realizados para o desenvolvimento da oficina. Vale trazer a lembrança de que em um dos encontros contamos com apenas cinco participantes.

Realizada a atividade prática com os alunos passamos à análise das produções e dinâmicas afloradas sob o olhar da questão norteadora que desenhamos para o desenvolvimento da aplicação.

Entre os questionamentos que nos fizemos, figura a possibilidade de despertar o envolvimento dos alunos nas atividades, já que em observações anteriores havíamos constatado que a oficina de arte possuía grande atração por

parte dos alunos. Com base em nossas observações e alguns registros, percebi que as atividades práticas proporcionaram o envolvimento dos educandos, abarcando a maior parte dos presentes na maioria dos encontros realizados.

Através destes apontamentos verificamos que a oficina oportunizou aos alunos a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos como, cálculo do comprimento da circunferência, arco, radianos e transformações geométricas. Também, oportunizou aos alunos perceberem que a matemática está presente nas mais diversas áreas do conhecimento, como na publicidade, na arte, etc.

## 7 CONCLUSÃO

Através das experiências que vivenciei nas cadeiras de estágios e laboratórios, pude perceber que a disciplina de matemática não está entre as preferidas pelos estudantes, por vezes, nem mesmo por aqueles que demonstram facilidade com a mesma. Ao mesmo tempo, observei nestas experiências que os alunos da turma de idade mais tenra, possuíam preferência pela disciplina de arte.

O questionamento sobre a preferência pela disciplina de arte me surgiu, mas não foi incluído entre as buscas propostas neste trabalho. Apenas tomamos como verdade e nos lançamos na busca de verificar se a conexão entre as duas disciplinas seria possível e favorável ao desenvolvimento de uma prática que possibilitasse a abordagem de conceitos matemáticos.

Optamos por lastrear a proposta organizando as atividades, orientado por alguns conceitos do design instrucional, pois identificamos neste método pedagógico, passos e objetivos similares ao que almejávamos alcançar em nossa pesquisa.

Uma breve pesquisa sobre o desenvolvimento de alguns conceitos e teorias nos possibilitou perceber que a aplicação de técnicas utilizadas em obras artísticas, inicialmente intuídas e experimentadas, teve contribuições de diversos personagens. A história nos mostra que para obter níveis satisfatórios de alcançarem seus objetivos através de padrões elaborados por estes personagens, fez-se necessário utilizar raciocínios e conceitos matemáticos.

Com o desenvolvimento das técnicas de representação dos objetos tridimensionais em espaços bidimensionais, e o surgimento de novas tecnologias como espelhos e lentes, outras técnicas surgiram, como a perspectiva forçada e a anamorfose oblíqua, amplamente utilizadas em propagandas e filmes. Foram as curiosas imagens produzidas por meio desta técnica que nos levou a acreditar ser um tema interessante para o elo entre a matemática e arte.

Declinamos pelo tema anamorfose, que além de proporcionar transformações geométricas diferentes das normalmente abordadas, como as isometrias e semelhanças, não trabalhadas, oferece a possibilidade de se abordar outros conceitos matemáticos, e também por pertencerem à realidade dos alunos, uma vez que podem ser encontradas nos mais diversos jogos eletrônicos, filmes e

propagandas.

Para alinhamento e foco deste trabalho nos propusemos a buscar respostas para a seguinte questão: **A partir de construções de anamorfose, como fazer emergir conceitos matemáticos, em particular, conceitos geométricos envolvendo a visualização e a representação?**

Pela análise da oficina desenvolvida foi facilmente percebido que a adesão total da turma nas atividades ocorreu de forma natural em dois encontros, já nos outros dois não tivemos o mesmo êxito, principalmente, quando a etapa da atividade se apresentava com certa dificuldade ou trabalhosa.

Alguns conteúdos matemáticos como posições relativas entre retas, radiano, arcos e semelhança de triângulos foram trabalhados, porém devido ao pouco espaço de tempo conseguido para desenvolver as atividades, alguns destes conteúdos acabaram por não ganharem merecido destaque, como exemplo semelhança de triângulos.

A conexão entre matemática e o tema anamorfose possui um grande potencial para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. A manipulação dos materiais para a construção das anamorfozes e a dinâmica participação dos alunos nas construções sugeridas demonstrou ser plausível a junção entre matemática e arte, possibilitando a formação de um ambiente para a investigação.

O convite à participação das atividades oferecida por tais abordagens foi aceito pela maioria dos alunos, favorecendo o trabalho de abordagem de conceitos matemáticos, que acreditamos possuir grandes significados, uma vez que os alunos se envolveram no processo de exploração. A satisfação dos alunos com o resultado, alcançada em suas construções, certamente trouxe outro significado às aulas de matemática.

Finalizamos com a consideração de que é possível a conexão entre a arte e a matemática, especificamente, nas construções anamórficas, possuindo grande potencial de se realizar uma abordagem diferenciada na exploração e ensino/aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos.



## REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. *Anais...* Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BARCO, Luiz. **A quarta dimensão que ninguém enxerga**. Super interessante, julho de 1992, edição 58. <super.abril.com.br/ciencia/a-quarta-dimensao-que-ninguem-enxerga> visitado em 30 de agosto de 2015.

BECHARA, Evanildo. **Dicionário da língua portuguesa**. 1.ed. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**, Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**, Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN +: Ensino Médio – orientações educacionais complementares ao Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2006. v. 2.

BATISTA, Cacique. **Professor aborda a importância da matemática para a atualidade**. UFPE, 2013. Disponível em: <[https://www.ufpe.br/agencia/index.php?option=com\\_content&view=article&id=47228:professor-da-ufpe-aborda-importancia-da-matematica-para-a-atualidade&catid=905&Itemid=72](https://www.ufpe.br/agencia/index.php?option=com_content&view=article&id=47228:professor-da-ufpe-aborda-importancia-da-matematica-para-a-atualidade&catid=905&Itemid=72)> Acessado em: 08 de julho de 2016.

CAVALCA, Antonio de Pádua Vilela. **Espaço e Representação Gráfica: Visualização e interpretação**. São Paulo: EDUC, 1998.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

DIONÍSIO, Ana Filipo Lourenço. **A Matemática no primeiro livro do Della Pittura**. Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução: DOMINGUES, Hygino H. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FIGUEIREDO, Cintia D. Correia; SANTOS, Claudemilson; **Oficina de Anamorfose: Uma nova forma de aprendizagem**. Ominia Humanas v.2, n.2, 2009.

FILATRO, A. **Design instrucional na prática**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

FIORAVANTE, Everaldo; **As artes do Metrô República**. Arte na linha, 2012. Disponível em: <<https://artenalinha.wordpress.com/2012/07/24/as-artes-do-metro-republica/>> Acesso em 25 de abril de 2016.

FLORES, Claudia. **Olhar, Saber, Representar: sobre a representação em perspectiva**. São Paulo: Musa, 2007.

FOUCAULT, Michel. **“Isto não é um cachimbo”**; Tradução: COLI, Jorge. Digitalização: 2004. Disponível em: <[https://docs.google.com/file/d/0B76fSg4EW\\_8GMzNDAyNjMtNDI2Ny00MjNILTk3YjYtM2VjOTU2YTA4ZTZQ2/edit?pref=2&pli=1](https://docs.google.com/file/d/0B76fSg4EW_8GMzNDAyNjMtNDI2Ny00MjNILTk3YjYtM2VjOTU2YTA4ZTZQ2/edit?pref=2&pli=1)> Acesso em: 17 de junho de 2016.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. (Org). **Métodos de pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>> Acesso em: 09 de julho de 2016.

JUNIOR, Manoel Pio Alves. **Anamorfozes no World Mapper**. Blog Colégio Cenesista Dr. José Ferreira. 2014. Disponível em: <<http://www.joseferreira.com.br/blogs/geografia/cartografia-digital/anamorfozes-no-world-mapper/>> Acessado em 06 de julho de 2016.

HEFEZ, Abramo. **Introdução a história da geometria projetiva**. Notas de uma palestra proferida na reunião regional da S.B.M.. Vitória, E.S., 1985. Disponível em: <[http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n03/n03\\_Artigo03.pdf](http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n03/n03_Artigo03.pdf)> Acesso em 07 de março de 2016.

MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>>. Acesso em: 10 abr. 2016

NUNES, Joel de Almeida. **Design instrucional na educação matemática: Trajetória de um professor de matemática que elabora atividades sobre funções trigonométricas com a calculadora HP50G**”. Dissertação de pós

graduação. Universidade Luterana do Brasil. 2011

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática; uma análise da influência francesa**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

RIBAS, Guilherme Carvalho, RIBAS, Eduardo Carvalho, RODRIGUES JR., Aldo Junqueira. **"O cérebro, a visão tridimensional, e as técnicas de obtenção de imagens estereoscópicas"**; Rev Med (São Paulo). 2006 jul.-set.;85(3):78-90. Disponível em <<http://www.revistas.usp.br/revistadc/article/viewFile/59218/62233>> Acesso em 14/09/2015.

SILVA, Domiciano Correa Marques Da. **"Ilusão de Óptica"**; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://www.brasilecola.com/fisica/ilusao-optica.htm>>. Acesso em 06 de novembro de 2015.

SKOVSMOSE, O. **"Cenários de investigação"**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), n. 14, p. 66-91, 2000.

TRINDADE, Antonio de Oriol. **"A concepção de uma anamorfose, do séc. XVI ao séc. XX: Requisitos, técnicas e uma demonstração prática"**; Faculdade de Belas Artes, Lisboa, FBAUL, 2013. Disponível em <[http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/20264/2/ULFBA\\_As%20Idades%20do%20Desenho\\_AntonioTrindade.pdf](http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/20264/2/ULFBA_As%20Idades%20do%20Desenho_AntonioTrindade.pdf)> Acesso em 16 de abril de 2016.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA. **"Notas da disciplina: Geometria projetiva e desenho"**. USP-IME, s/a. 71p. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~rui/form3.pdf>> Acesso em 16 de abril de 2016.

VASCONSELOS, Tássia Borges; et al. **"Representação de sombras e aplicações de anamorfose"**. XIX CIC, XII ENPOS e II Mostra Científica. UFPEL, 2010. Disponível em: <<http://repositorio.ufpel.edu.br/bitstream/123456789/669/3/Representa%C3%A7%C3%A3o%20de%20sombras%20e%20aplica%C3%A7%C3%B5es%20de%20anamorfose.pdf>> Acesso em 12 de abril de 2016 .

YAVORSKI, Claudio. **"Anamorfose: Uma arte no ensino de matemática e sua aplicação em atividades interdisciplinares"** Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, PR, 2014.

YOKOYAMA, Leo Akio. **"Matemática e Arte: Um passeio histórico, artístico e teórico através da Geometria Dinâmica"**. Adaptado da Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2005.

APÊNDICE A - AUTORIZAÇÕES  
TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu \_\_\_\_\_, RG: \_\_\_\_\_, responsável pelo(a) aluno(a): \_\_\_\_\_, da turma: \_\_\_\_\_, declaro por meio deste termo, que concordei com que o(a) participe da pesquisa intitulada **A Dimensão do Olhar: Geometria e percepções** desenvolvida pelo pesquisador Roben Roges da Silva Martins. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Leandra Anversa Fioreze, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário.

Tenho ciência de que a participação do(a) não envolve nenhum incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que em linhas gerais, são:

- Favorecer a autonomia intelectual dos alunos, solidificando e aprofundando os conteúdos já adquiridos.
- Desenvolver conceitos matemáticos como representação geométrica e visualização.
- Estimular o interesse dos alunos pelos conteúdos de matemática através do estudo de técnicas aplicadas na arte.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) se fará por meio de questionários escritos e trabalhos realizados na sala de aula, bem como na participação em aula, em que ele(a) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceitos atribuídos às atividades desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc., sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega deste documento por mim assinado.

Fui ainda informado(a) de que o(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Assinatura do Responsável: \_\_\_\_\_

Assinatura do pesquisador: \_\_\_\_\_