UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

JANETE JACINTA CARRER SOPPELSA

DIVISÃO EUCLIDIANA: UM OLHAR PARA O RESTO

Porto Alegre
2016

JANETE JACINTA CARRER SOPPELSA

DIVISÃO EUCLIDIANA: UM OLHAR PARA O RESTO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering

Porto Alegre
2016

JANETE JACINTA CARRER SOPPELSA

DIVISÃO EUCLIDIANA: UM OLHAR PARA O RESTO

Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática apresentada à Banca Examinadora para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Luisa Rodriguez Doering

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Carmen Mathias (UFSM)

Profª. Drª. Cydara Cavedon Ripoll (UFRGS)

Profª. Drª. Elisabete Zardo Búrigo (UFRGS)

Porto Alegre, 12 de maio de 2016.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, que acompanharam minha caminhada durante esse período, por me ajudarem a crescer como docente, pelo incentivo constante, por estarem sempre ao meu lado e com os quais pude aprofundar meus conhecimentos matemáticos.

À minha orientadora, professora Dra. Luisa Rodriguez Doering, pela orientação, paciência, incentivo, amizade, competência e extrema dedicação durante todos os nossos encontros. Agradeço pelas ideias, sugestões e pelo olhar cuidadoso durante a minha caminhada, principalmente durante o período da dissertação.

Aos colegas da turma do mestrado, pelo convívio, companheirismo e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação.

A minha colega e amiga Caroline, pelas inúmeras horas de estudo em grupo, pela companhia durante as idas e vindas à Porto Alegre, pelo apoio e parceria durante a realização do mestrado.

Às amigas Roselice, Tânia e Jaqueline, pelas ideias, sugestões e pelo apoio e ajuda constantes.

Á Secretária Municipal de Educação de Garibaldi e toda a sua equipe, pelo apoio e incentivo durante o período do mestrado.

À equipe diretiva da Escola Municipal de Ensino Fundamental Attílio Tosin, por abraçar a ideia da pesquisa, permitindo que eu realizasse a aplicação da sequência didática e aos alunos da turma do 7º ano B, pela aceitação do desafio, pelo empenho e dedicação com que desempenharam as tarefas solicitadas.

Ao meu marido, Cláudio, e aos meus filhos Vanessa e Edegar, pelo apoio constante e por compreender as minhas ausências em função da necessidade de dedicação aos estudos durante os últimos anos e por acreditarem em mim e por me fazer perceber que esta conquista seria possível.

A Deus, por proporcionar-me saúde, força e perseverança para que mais um de meus projetos se realizasse. Sei que essa conquista não seria possível sem a fé que tenho Nele.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra, diretamente ou indiretamente, contribuíram para que este estudo se realizasse.

A persistência é o caminho do êxito.
Charles Chaplin

Resumo

Este trabalho estuda a possibilidade de se aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a evidenciar a relevância e o significado para o resto. Oferece algumas considerações sobre a divisão, além de uma análise de vários livros didáticos, dissertações de mestrado e tese de doutorado sobre o tema. Apresenta uma proposta didática baseada nos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval e nos Cenários para Investigação, de Ole Skovsmose. Essa proposta foi implementada e validada em uma turma do 7º Ano de uma escola municipal de Garibaldi, RS. A análise dos registros coletados e dos diálogos estabelecidos mostra que a sequência didática foi bem sucedida tanto nos avanços logrados pelos alunos na compreensão dos conteúdos, quanto no engajamento com a proposta, levantamento de hipóteses, elaboração de conclusões e justificativas.

Palavras-chave: Divisão Euclidiana, resto, Registros de Representação Semiótica, Cenários para Investigação.

Abstract

In this work we study the possibility of enhancing the Euclidian division concept in high school level in order to evidence the relevance and meaning to the remainder. We offer some considerations about the division, beyond of an analysis of various text books, Masters degree dissertations and Ph.D theses related to this subject. We present a didactic proposal based on Raymond Duval's Registers of Semiotic Representation and Ole Skovsmose's Investigation Scenarios. This proposal was implemented and validated with a 7th year class of a municipal school in Garibaldi, RS. The analysis of the collected data and actual dialogs show that the didactic sequence was successful regarding the contents comprehension advancement obtained by the students as well as the participation with the proposal, the confection of hypotheses and the elaboration of conclusions and justifications.

Keywords: Euclidean division, remainder, Register of Semiotic Representation, Investigation Scenarios

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Sou professora da rede pública municipal desde o ano de 2010 e em meu trabalho constato que muitos alunos têm dificuldades para compreender vários conceitos matemáticos. Eles aprendem a realizar as operações matemáticas, mas fazem esse procedimento de forma mecânica, isto é, aprendem o algoritmo, mas não compreendem os conceitos envolvidos e consequentemente não conseguem estabelecer uma relação entre os conteúdos matemáticos e o mundo real. Percebo ainda que a revisão dos conteúdos básicos, no início de cada ano, não traz nenhum resultado adicional e torna-se repetitiva para o aluno.

Assim, gostaria de estudar maneiras alternativas de construir os conteúdos da matemática do Ensino Fundamental, pois não se pode reduzir a matemática apenas a fórmulas para resolver problemas, ela está muito além desse conjunto de técnicas e regras que levam a um resultado. Ela deve ser algo que leve o aluno não só a buscar respostas, mas também a criar métodos e desenvolver suas habilidades como um agente ativo no processo de construção de sua aprendizagem.

Quando abordamos os números naturais, sabemos que o emprego de um algoritmo é uma estratégia para chegar à solução de alguns problemas, mas o que observamos é que não há uma compreensão dos alunos acerca dos conceitos envolvidos; o que também é destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante no currículo do ensino fundamental, constata-se, com frequência, que muitos alunos chegam ao final dessa fase de formação, com um conhecimento insuficiente sobre como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. (BRASIL, 1998, p. 95)

Em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental o significado do resto de uma divisão Euclidiana tem sido apenas o de sobra sem ser dada uma importância maior ou haver uma exploração mais detalhada de seu uso. Além disso, a maioria dos exercícios propostos são apenas de cálculos ou abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente de uma divisão.

Por outro lado, é muito comum encontrar questões nas provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que envolvem situações cíclicas, isto é, situações que, a partir de um dado momento, voltam a se repetir. A solução para essas questões, em geral, pode ser encontrada através do resto da divisão Euclidiana de um número que caracteriza a situação cíclica analisada. Situações assim encaradas são de fácil entendimento e pensamos que se tornam uma boa situação-problema para mostrar a importância do resto da divisão no ensino básico. Assim, explorando mais o significado do resto de uma divisão Euclidiana, podemos, por exemplo, dado um evento cíclico, prever o que acontecerá em um determinado momento futuro.

Seria natural então nos perguntarmos:

É possível aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a enfatizar-se também o resto, percebendo-o como solução de alguns eventos cíclicos?

Para isto, propomos, na revisão de divisão com resto dos números naturais, uma abordagem mais abrangente com relação à forma apresentada em alguns livros didáticos, objetivando compreender melhor o significado dessa operação, principalmente no que diz respeito ao quociente e ao resto, observando a viabilidade de aprofundar o significado da divisão e sua interligação natural com alguns problemas cíclicos.

Apesar de não encontrarmos esse tipo de problema no material didático usual, acreditamos que esse estudo pode possibilitar a exploração do algoritmo da divisão dentro de uma proposta diferenciada em que os alunos possam efetivamente associar o resto da divisão a situações do seu cotidiano.

Apoiados em Duval (2003), pretendemos aplicar uma sequência didática que possibilite que os alunos avancem um pouco mais na compreensão e na representação do resto de uma divisão não exata de dois números naturais. Para que a apreensão dos objetos matemáticos seja significativa, Duval (2003) propõe a mobilização de, ao menos, dois Registros de Representação de um mesmo objeto matemático por parte do educando e, considerando a divisão não exata de números naturais, o que era considerado apenas uma “sobra” pode ser tratado conferindo-se mais significado à operação de divisão, além do que, o conteúdo de uma representação depende mais do seu registro do que do objeto representado, pois passar de um registro para o outro não é somente mudar o modo de tratamento, é entender os diferentes aspectos de um mesmo objeto.

O que se espera é que o aluno, ao ler determinada situação-problema, vislumbre que é o resto da divisão o resultado procurado. Em outras palavras, que aquele resultado tenha significado para ele e não seja apenas um mero número que é a sobra do resultado de uma divisão.

O trabalho está organizado em oito capítulos, sendo que no segundo faremos algumas considerações sobre a divisão Euclidiana e as principais dificuldades percebidas nos alunos dos anos finais do ensino fundamental.

No terceiro capítulo faremos algumas considerações sobre alguns livros didáticos que são utilizados pelos professores nas escolas públicas e que fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), seguido de uma breve consulta bibliográfica sobre congruências e divisão Euclidiana buscando nos repositórios de trabalhos dos programas de mestrado e doutorado o que foi pesquisado sobre o assunto.

No quarto capítulo, apresentamos os referenciais teóricos que balizam a elaboração e análise da sequência didática. Buscamos, nos cenários para investigação de Ole Skovsmose, suporte para desenvolver a pesquisa dentro de um ambiente de investigação, e procuramos na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval a teoria para embasar e fundamentar o trabalho, uma vez que acreditamos que os alunos efetivamente compreendem o conteúdo quando conseguem modificar os registros em que os mesmos se apresentam. De acordo com Duval (2003, p. 21) “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. ” Isso nos faz acreditar que a compreensão e o aprofundamento do conceito de divisão Euclidiana passam necessariamente pela articulação de seus registros de representação.

No quinto capítulo, apresentamos a metodologia utilizada para a implementação da pesquisa.

No sexto capítulo apresentamos a sequência didática detalhada com os objetivos de cada atividade. Para representar o objeto matemático discutido nesse trabalho, usamos situações-problema, buscando relacionar as conversões entre essas formas de registro, no sentido de que,

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir a possibilidade de passar de um registro a outro. (DUVAL, 2003, p. 14-15)

No sétimo capítulo, trataremos da análise dos dados colhidos durante o trabalho em sala de aula com o relato de cada aula intercalado com as análises das produções dos alunos e a descrição da aplicação de cada atividade seguida de análise da escrita e dos comentários dos alunos.

Deixamos para o oitavo capítulo as considerações finais, em que sistematizamos os resultados dessa pesquisa e apontamos algumas contribuições para o ensino e revisão da divisão Euclidiana no Ensino Fundamental.

Esperamos que este trabalho contribua para que outros professores também repensem sua prática e sirva de incentivo para outras pesquisas na área.

2. SOBRE A DIVISÃO

Nesse capítulo apresentamos algumas considerações sobre a divisão e sobre as dificuldades que estão relacionadas a essa operação, além de alguns esclarecimentos sobre termos adotados durante o trabalho.

2.1 O QUE É A CHAMADA DIVISÃO EUCLIDIANA?

Mesmo quando um número natural a não é múltiplo de um número natural $b \neq 0$, Euclides, no seus *Elementos*, utiliza, sem enunciar explicitamente, o fato que é sempre possível efetuar a divisão de a por b, com resto. Esse resultado, que pode ser demonstrado por indução[1], ou, equivalentemente, pelo Princípio da Boa Ordenação[2], não só é um importante instrumento na obra de Euclides, como também é um resultado central em Aritmética e no Ensino Básico. Enunciamos, sem demonstrar, e comentamos alguns aspectos desse teorema.

Teorema da Divisão Euclidiana: Sejam a e b números naturais com $b \neq 0$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $a = b \cdot q + r$, onde $0 \leq r < b$.

Esse resultado garante que mesmo quando a não é múltiplo de b, podemos encontrar o múltiplo de b que fica "mais perto" de a.

Note que a restrição para o resto ($0 \leq r < b$) garante o "maior" quociente possível: se $0 \leq r < b$, somando $b \cdot q$ nessa desigualdade obtemos $b \cdot q \leq b \cdot q + r < b \cdot q + b$. Substituindo $a = b \cdot q + r$ e $b \cdot q + b = b \cdot (q + 1)$ a desigualdade anterior se torna $b \cdot q \leq a < b \cdot (q + 1)$, o que indica que se $0 \leq r < b$, então o quociente q é o maior possível, pois multiplicando $q + 1$ por b já ultrapassa a. Também vale a recíproca, ou seja, se q é o maior quociente possível, ou seja , se $b \cdot (q + 1)$ ultrapassa a, teremos a restrição do resto: se $b \cdot q \leq a < b \cdot (q + 1)$, substituindo o valor de a, dado por $a = b \cdot q + r$ na desigualdade dada teremos, $b \cdot q \leq b \cdot q + r < b \cdot (q + 1)$ e subtraindo $b \cdot q$ obtemos $0 \leq r < b$ como queríamos. Assim, na Divisão Euclidiana "maior quociente" e "menor resto" se equivalem.

Também é importante salientar que é essa restrição para o resto (ou equivalentemente o maior quociente) que garante a unicidade para o quociente e o resto. Se tomarmos $a = 15$ e $b = 4$ e não exigirmos $0 \leq r < 4$ teremos várias formas corretas de escrever $a = b \cdot q + r$.

$15 = 0 \cdot 4 + 15$

[1] O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de proposições referentes aos números naturais.

[2] Princípio da Boa Ordenação diz que todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento.

$15 = 1 \cdot 4 + 11$

$15 = 2 \cdot 4 + 7$

$15 = 3.4 + 3$

As observações precedentes mostram o papel fundamental da restrição sobre resto para a unicidade do quociente e do próprio resto, bem como a ligação entre os mesmos.

2.2 A DIVISÃO NA SALA DE AULA

Os alunos, com frequência, apresentam dificuldades com relação à compreensão dos conceitos que envolvem as quatro operações. Isso acontece, em parte, pela ênfase dada aos processos mecânicos para resolver as situações apresentadas. Segundo os PCN (1998), o ensino deve se concentrar na compreensão do significado e nas relações existentes entre eles. Além disso, o documento cita a importância das situações-problema na compreensão dos conceitos dos números e das suas operações.

Com relação às quatro operações básicas, o cálculo da divisão, por meio do algoritmo, tem sido considerado, por professores e alunos, como o mais difícil de ser assimilado, fato que gera preocupações e a necessidade de busca por estratégias e metodologias de ensino que possam proporcionar uma melhor aprendizagem desse conteúdo.

A noção do conceito de divisão precisa estar clara para o aluno, para que ele possa dar significado ao cálculo que ele vai executar. Um ponto que podemos destacar é o fato de a divisão estar ligada a duas ideias diferentes: repartir em partes iguais (modelo partitivo) e a de verificar quantas vezes uma quantidade cabe na outra, trazendo a ideia de medida (modelo quotativo).

Exemplificamos esses modelos nas seguintes situações:

Partitivo: Se tenho 30 figurinhas para dividir entre meus três filhos, quantas figurinhas caberá a cada um deles?

Quotativo: Tenho 45 figurinhas e quero fazer pacotes com 5 figurinhas cada um. Quantos pacotes poderei fazer?

Sabemos que ambas as situações serão resolvidas pela operação de divisão, mas elas compreendem ações cognitivas diferentes. Na primeira situação, as figurinhas que foram divididas entre os filhos, resulta em um total de 10 figurinhas para cada filho, ou seja, iremos descobrir quantos elementos há em cada grupo formado. Na segunda situação, as figurinhas divididas em grupos de 5 resulta em um total de 9 pacotes, ou seja, considerando o exemplo dado, quantos grupos de 5 figurinhas “cabem” ou “estão contidos” em 45 figurinhas.

Esses modelos devem ser bem entendidos e é importante que sejam trabalhados em sala de aula, pois refletem na compreensão do algoritmo tradicional da divisão. Embora o modelo partitivo seja mais natural para o aluno, uma vez que se utiliza com grande frequência desse modelo em suas ações práticas de divisão, o algoritmo se estrutura segundo o modelo quotativo. Por exemplo, quando fazemos a seguinte operação $45 \div 9$, procuramos identificar quantas vezes o 9 "cabe" no 45, o que pode representar mais uma dificuldade para o aluno que não tem muita agilidade mental ou destreza com a tabuada e seu processo inverso.

Essa operação pode ser efetuada com a realização de subtrações sucessivas. Assim teremos que $45 \div 9 = 5$ significa quantas vezes o 9 cabe no 45, retirando o número 9 sucessivamente do 45, faremos $45 - 9 = 36$; $36 - 9 = 27$; $27 - 9 = 18$; $18 - 9 = 9$ e $9 - 9 = 0$. Portanto, o número 9 cabe 5 vezes em 45, procedimento este que os alunos, muitas vezes, desconhecem formalmente, pois o que costumeiramente é trabalhado em sala de aula é o ensino da divisão com base na tabuada.

Outra percepção é que,

> A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem. Comparada às demais operações elementares, a divisão com números naturais é diferente no seguinte sentido. Enquanto na adição, na subtração e na multiplicação temos dois valores de entrada e obtemos apenas um terceiro valor de saída, que é o resultado da operação, **a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto**. O fato de obtermos duas informações como resultado de uma divisão com naturais faz com que problemas que envolvam esta operação possam ter respostas diversificadas, apesar de um mesmo contexto. (RIPOLL et al, 2015, p. 104, grifo do autor)

Um exemplo que podemos observar é o utilizado por Barroso (2010), ilustrado na Figura 1.

Figura 1- Exemplo de situação problema onde o resultado não é nem o quociente e nem o resto

André precisa transportar 115 estudantes até um museu. Em cada viagem, ele pode levar, no máximo, 8 pessoas. Qual é o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?

Fonte: Barroso (2010, p. 60)

Podemos observar que o problema anterior fica resolvido com a operação de divisão, no entanto a resposta não é nem o quociente e nem o resto. Problemas dessa natureza são importantes para o aluno perceber a relação intrínseca entre os termos da operação de divisão.

Quando o todo não é múltiplo do divisor, caracteriza-se pela existência de um resto que vem acrescer o grau de dificuldade ao estudo da divisão. Neste caso, os alunos precisam interpretar não só o quociente, mas também o resto, para poderem dar uma resposta ao problema apresentado.

Na abordagem do resto na divisão deve-se enfatizar, desde o início, a relação entre o resto e o divisor, ou seja, o resto de uma divisão deve ser sempre menor que o divisor. Deve ficar claro que se o resto é zero, a divisão é exata e quando o resto é maior que zero, a divisão não é exata. Esclarecemos que o termo “não-exata” utilizado neste texto refere-se ao caso do resto diferente de zero no desenvolvimento do algoritmo da divisão de números naturais e não para referir-se a divisão nos números racionais, pois, sabemos que nesse conjunto o resultado da divisão, por exemplo, de 5 por 2 é o número racional exato $\frac{5}{2}$. Dessa forma, e depois de observar tudo que foi mencionado anteriormente, para verificar se uma divisão está correta, é válida a relação: quociente x divisor + resto = dividendo.

Sobre a divisão, Ripoll (2015), salienta que

> Entretanto, no caso da divisão euclidiana, a questão torna-se mais delicada, pois considerá-la como inversa da multiplicação nos naturais ou nos inteiros não é apenas um problema de falta de formalismo matemático. Como a divisão devolve dois valores, mesmo sua interpretação informal como processo inverso da multiplicação não é imediata. No processo inverso, para resgatar um dos valores (dividendo ou divisor), precisamos de três informações – quociente, resto e dividendo (ou divisor). Nos naturais (assim como nos inteiros), a divisão só pode ser considerada diretamente como processo inverso da multiplicação se o resto for igual a zero. (RIPOLL et al, 2015, p. 106)

Porém, podemos observar que, se a apresentação da divisão for feita aos alunos através do uso de contextos que envolvam os diferentes sentidos da operação, estabelecendo o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo, podemos considerar a utilização da relação $a = b.q + r$ para verificar se “ a conta está certa” o que é denotado no ensino fundamental por “prova real”.

Nossa percepção é que a aprendizagem escolar da multiplicação e divisão está muito mais centrada sobre o ensino de algoritmos do que sobre o desenvolvimento conceitual. Ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre diferentes aspectos das situações que envolvem a divisão.

Percebemos que as maiores dificuldades com relação à divisão são envolvem o domínio da tabuada e a montagem do algoritmo da divisão.

Outros obstáculos que também podem ser responsáveis pela dificuldade que os alunos encontram no domínio do algoritmo da divisão dizem respeito à direção em que o cálculo é realizado, pois na divisão este é efetuado em direção contrária à da adição, subtração e multiplicação; todas essas operações são efetuadas da direita para a esquerda e a divisão é da esquerda para a direita.

O professor deve procurar explorar as diferentes ações de cada uma das quatro operações, procurando propor situações-problema que possam levar o aluno a pensar matematicamente, identificando qual operação ele deverá utilizar para realizar um determinado cálculo.

Podemos destacar também que não é dado o tratamento adequado ao resto de uma divisão diante de determinada situação-problema, pois os alunos não conseguem estabelecer as relações possíveis entre o dividendo, divisor, quociente e resto, sendo esse o foco da nossa pesquisa.

É de fundamental importância que as atividades trabalhadas durante a abordagem e o ensino do conteúdo de divisão estimulem no aluno a sua curiosidade, o seu espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade de resolver diversas situações-problema, fazendo com que a aprendizagem seja apoiada na ação, na descoberta, na reflexão e na comunicação.

3. CONSULTA BIBLIOGRÁFICA

Inicialmente, apresentamos um estudo com alguns comentários sobre alguns livros didáticos onde observaremos como o processo de divisão é apresentado no 6º ano do Ensino Fundamental e como é tratado o resto de uma divisão Euclidiana, bem como o tipo de atividades que são propostas, especialmente as que enfatizam a busca pelo resto de uma divisão.

Na sequência, apresentaremos uma consulta bibliográfica de algumas publicações que abordam divisão e congruências analisando alguns trabalhos escritos como resultado final dos cursos de programas de mestrado e doutorado. Realizamos uma busca por teses e dissertações sobre o assunto em bibliotecas digitais das universidades em que existem programas de pós-graduação na área de Educação Matemática e afins.

3.1 COMENTÁRIOS SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS

O PNLD oferece um relevante recurso didático no trabalho pedagógico do professor, tem um grande impacto na qualidade de ensino da escola pública e pretende ajudar os alunos no avanço dos seus estudos. Fizemos uma análise de alguns livros didáticos que são utilizados nas escolas públicas, visto que o livro didático deveria ser preciso e bem organizado tanto para o professor quanto para o aluno.

Nossa motivação para esta análise deriva de alguns fatores importantes. Um deles é o papel que os livros indicados pelo PNLD exercem sobre os educadores e alunos das escolas públicas, servindo muitas vezes como única fonte de referência para o professor, como citam os PCN:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas de sala de aula, os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (BRASIL, 1998, p. 21-22)

O objetivo desta seção é analisar como o processo de divisão é introduzido no 6º ano do Ensino Fundamental e como é tratado o resto de uma divisão Euclidiana, bem como o tipo de atividades que são propostas.

A divisão de números naturais é assunto indicado no currículo do 6º ano do ensino fundamental, embora a ideia de repartir já venha sendo sistematizada nos anos anteriores.

Os livros didáticos estudados foram escolhidos na biblioteca da escola em que a pesquisadora era professora, dentre as coleções enviadas pelo PNLD.

Analisamos os livros didáticos discriminados no Quadro 1:

Quadro 1 - Livros didáticos analisados

Livro Didático			
Autor	**Nome**	**Editora**	**Ano**
Juliane Matsubara Barroso – obra coletiva	Projeto Araribá: matemática: ensino fundamental: 6º ano	Moderna	2010
José Ruy Giovanni Junior, Benedicto Castrucci	A Conquista da Matemática, 6º ano	FTD	2009
Álvaro Andrini, Maria J. Vasconcellos	Praticando Matemática, 6º ano	Editora do Brasil	2012
Álvaro Andrini	Praticando Matemática, 5ª serie	Editora do Brasil	1989
Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado	Matemática e realidade: 6º ano.	Atual	2009
Luiz Roberto Dante	Projeto Teláris: Matemática	Ática	2012
Alceu dos S. Mazziero, Paulo A. Fonseca Machado	Descobrindo e aplicando a matemática; 6º ano.	Dimensão	2012
Edwaldo Bianchini	Matemática Bianchini	Moderna	2011

Fonte: Elaborado pela autora

3.1.1 Projeto Araribá: Matemática - Ensino Fundamental

Analisamos o volume destinado especificamente ao 6º ano, da coleção publicada pela Editora Moderna em 2010, chamado Projeto Araribá: Matemática - Ensino Fundamental. A coleção é uma obra coletiva dos autores Juliane Matsubara Barroso, Fabio Martins de Leonardo, Maria Cecília da Silva Veridiano, Aline dos Reis Matheus, Cíntia Alessandra Valle Burkert Machado, Luciana Graziela de Godoi, Ana Paula Souza Nani, José Joelson Pimentel de Almeida e Luciana de Oliveira Gerzischkowitz Moura.

Os autores introduzem a divisão de números naturais com duas situações distintas: a primeira apresenta a ideia de repartir uma quantidade em partes iguais trazendo uma abordagem inicial de um problema contextualizado onde a divisão é exata. São especificados os termos da divisão que aparece escrita de duas formas diferentes: com o desenvolvimento do algoritmo e em forma de expressão numérica, conforme podemos acompanhar na Figura 2.

Figura 2 - Divisão empregada com a ideia de repartir em partes iguais

2. Divisão com números naturais

Conforme a situação, a divisão pode ser empregada com a ideia de **repartir em partes iguais** uma quantidade ou com a ideia de calcular **quantas vezes cabe** uma quantidade em outra, também conhecida como ideia de **medida**.

Observe as situações seguintes:

Situação 1

De acordo com as regras oficiais de basquete adotadas no Brasil, o jogo tem duração total de 40 minutos, com 4 tempos de mesma duração. Qual é a duração de cada um dos 4 tempos num jogo de basquete?

Para encontrar o resultado, podemos fazer $40 \div 4$.

dividendo: 40; divisor: 4; resto: 0; quociente: 10

$40 \div 4 = 10$ e resto 0 (10: quociente; 4: divisor; 40: dividendo)

No basquete, cada tempo tem 10 minutos de duração.

Aqui, a divisão foi realizada com a ideia de **repartição em partes iguais**.

Fonte: Barroso *et al* (2010, p. 55)

A Figura 3 apresenta a segunda situação na qual os autores calculam quantas vezes uma quantidade cabe em outra, trazendo a ideia de medida. A escrita da divisão também aparece de duas formas, como no exemplo anterior. Cada elemento da operação é muito bem apresentado com *layout* favorecendo a visualização dos elementos da operação. A divisão apresentada nesse exemplo não é exata e o resto é considerado uma sobra.

Figura 3 - Situação envolvendo a ideia de medida

Situação 2

Na aula de Educação Física, o professor Carlos pretende formar equipes de basquete entre os alunos. Sabendo que as equipes de basquete são compostas de 5 jogadores, quantas equipes será possível formar com 42 alunos? Sobrarão alunos? Quantos?

Para encontrar as respostas, podemos fazer $42 \div 5$.

dividendo: 42; divisor: 5; resto: 2; quociente: 8

$42 \div 5 = 8$ e resto 2 (8: quociente; 5: divisor; 42: dividendo)

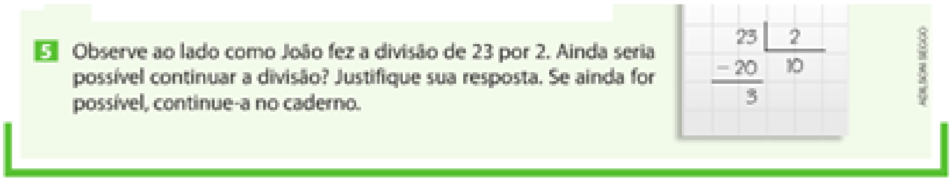
Logo, com 42 alunos será possível formar 8 equipes e sobrarão 2 alunos. Nesse caso, a divisão foi empregada com a ideia de **medida**.

Fonte: Barroso *et al* (2010, p. 56)

As atividades sugeridas são variadas e exploram a divisão sob diversas formas, além de apresentarem problemas relacionados ao cotidiano com imagens coloridas e atrativas. Apenas as atividades que contemplam a divisão Euclidiana limitam-se a identificar o quociente e o resto não explorando o significado e a relação entre os termos no contexto do problema.

O exercício da Figura 4 nos chamou a atenção, pois para resolvê-lo, o aluno deve perceber que o resto é maior que o divisor. Esse exercício vem antes da apresentação da relação fundamental da divisão, que diz que o dividendo é igual à soma do resto com o produto do divisor pelo quociente.

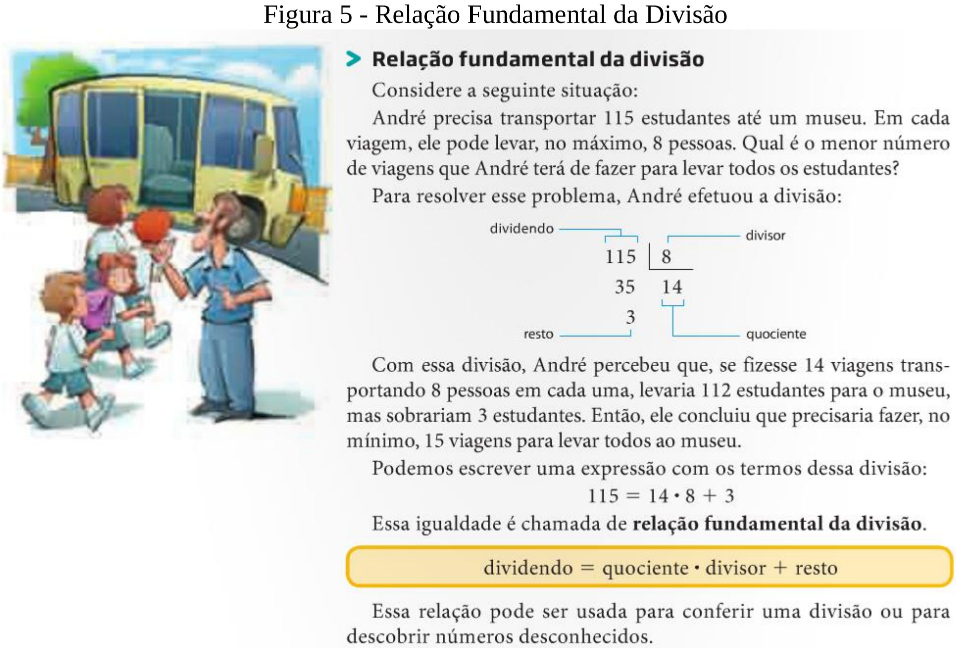
Figura 4 - Exercício apresentando o resto maior do que o divisor


5 Observe ao lado como João fez a divisão de 23 por 2. Ainda seria possível continuar a divisão? Justifique sua resposta. Se ainda for possível, continue-a no caderno.

Fonte: Barroso *et al* (2010, p. 59)

Na sequência, e por meio de um problema contextualizado, conforme podemos ver na Figura 5, os autores apresentam, com riqueza de detalhes, a relação fundamental da divisão. Após resolverem o algoritmo caracterizado pelo problema, chamam a atenção que a representação daquela situação pode ser feita por meio de uma expressão e nomeiam todos os termos apresentando a relação fundamental da divisão e a sua finalidade, como descobrir termos desconhecidos ou conferir o resultado da divisão (prova real).

Figura 5 - Relação Fundamental da Divisão


> Relação fundamental da divisão

Considere a seguinte situação:

André precisa transportar 115 estudantes até um museu. Em cada viagem, ele pode levar, no máximo, 8 pessoas. Qual é o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?

Para resolver esse problema, André efetuou a divisão:

Com essa divisão, André percebeu que, se fizesse 14 viagens transportando 8 pessoas em cada uma, levaria 112 estudantes para o museu, mas sobrariam 3 estudantes. Então, ele concluiu que precisaria fazer, no mínimo, 15 viagens para levar todos ao museu.

Podemos escrever uma expressão com os termos dessa divisão:

$$115 = 14 \cdot 8 + 3$$

Essa igualdade é chamada de **relação fundamental da divisão**.

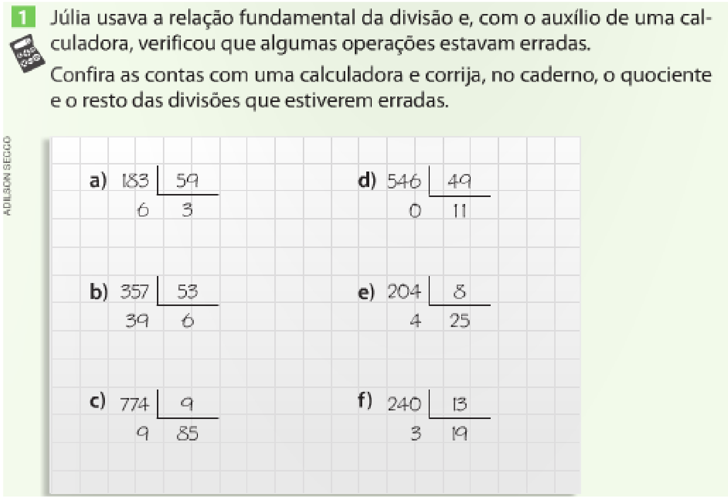
$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}}$$

Essa relação pode ser usada para conferir uma divisão ou para descobrir números desconhecidos.

Fonte: Barroso *et al* (2010, p. 60)

Finalizando a seção, o livro traz a informação de que o resto da divisão tem que ser menor que o divisor e apresenta um exercício em que essa ideia é abordada e no qual o aluno deve observar, ao desenvolver o algoritmo, o resto da divisão, além de verificar se a relação fundamental dessa operação se confirma. Na Figura 6 temos a ilustração do exercício.

Figura 6 - Exercício proposto aos alunos


1 Júlia usava a relação fundamental da divisão e, com o auxílio de uma calculadora, verificou que algumas operações estavam erradas.
Confira as contas com uma calculadora e corrija, no caderno, o quociente e o resto das divisões que estiverem erradas.

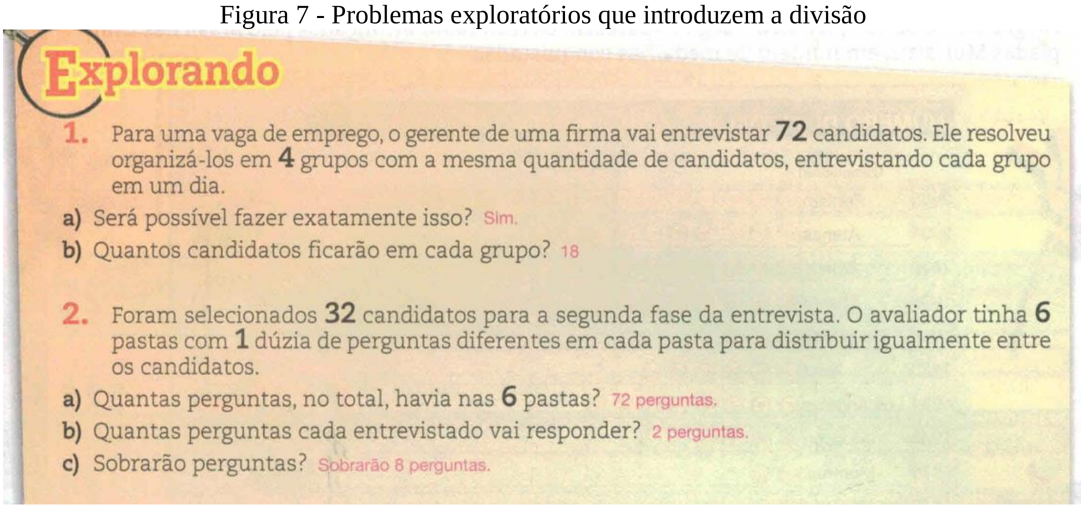
Fonte: Barroso *et al* (2010, p. 61)

O livro apresenta figuras bem coloridas e os contextos das situações-problema são temas que fazem parte da realidade dos alunos. Também apresenta uma boa quantidade de exercícios com situações-problema que contextualizam o assunto abordado.

3.1.2 A Conquista da Matemática

No livro publicado pela editora FTD S.A em 2009, A Conquista da Matemática, dos autores Benedicto Castrucci e José Ruy Giovanni Jr, a divisão é introduzida apresentando dois problemas exploratórios (Figura 7), cuja resolução, segundo entendemos, fica a cargo do aluno e sistematização a cargo do professor.

Figura 7 - Problemas exploratórios que introduzem a divisão


Explorando

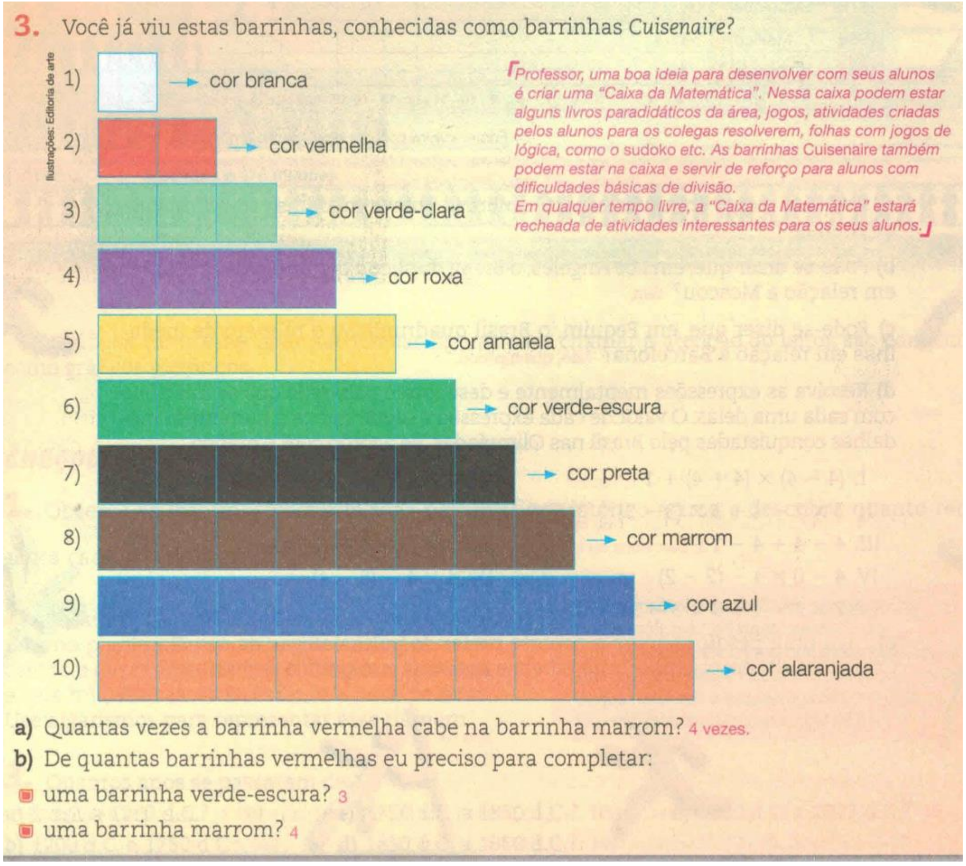
1. Para uma vaga de emprego, o gerente de uma firma vai entrevistar 72 candidatos. Ele resolveu organizá-los em 4 grupos com a mesma quantidade de candidatos, entrevistando cada grupo em um dia.
a) Será possível fazer exatamente isso? Sim.
b) Quantos candidatos ficarão em cada grupo? 18

2. Foram selecionados 32 candidatos para a segunda fase da entrevista. O avaliador tinha 6 pastas com 1 dúzia de perguntas diferentes em cada pasta para distribuir igualmente entre os candidatos.
a) Quantas perguntas, no total, havia nas 6 pastas? 72 perguntas.
b) Quantas perguntas cada entrevistado vai responder? 2 perguntas.
c) Sobrarão perguntas? Sobrarão 8 perguntas.

Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 66)

Depois desses problemas, na Figura 8, vemos que os autores sugerem o uso de um material lúdico chamado de “Barras de Cuisenaire[3]” para continuar o estudo da divisão de números naturais.

Figura 8 - Sugestão de uso de Barras de Cuisenaire como material concreto



Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 66)

Somente depois dessa introdução é que os autores apresentam três situações-problema nos quais a divisão é empregada para formar grupos e para dividir uma quantidade em partes iguais. Nesses exemplos, resolvidos através do algoritmo, os autores mostram a divisão exata e não exata, nomeando cada termo da divisão e apresentando cada elemento dessa operação com muita clareza e detalhes na resolução. Na divisão não exata o resto é tratado como sobra e não é feita nenhuma referência quanto à sua utilização na resolução de problemas.

Os autores não mencionam que o resto da divisão deve ser menor que o divisor. Podemos observar nas Figuras 9 e 10 que, durante o desenvolvimento do algoritmo da divisão, o autor utiliza as ordens do sistema de numeração durante a operação de divisão, além de indicar o resto em uma divisão exata.

---

[3] As Barras de Cuisenaire são barrinhas coloridas, que foram confeccionadas e criadas pelo professor belga Emile-Georges Cuisenaire (1891 – 1980). O material tem como objetivo ajudar a criança a construir conceitos básicos de matemática.

Figura 9 - Situações onde a divisão é empregada para dividir uma quantidade em partes iguais

A divisão é empregada quando precisamos...

... dividir uma quantidade em partes iguais.

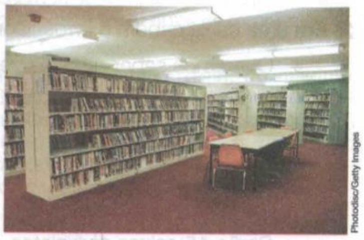
Usamos essa ideia da divisão quando queremos saber quantos elementos ficarão em cada grupo.

Veja as situações seguintes:

1 Uma editora vendeu 72 livros de literatura pelo programa de governo. Esses livros serão entregues para as bibliotecas de 4 colégios. Se as 4 bibliotecas receberem o mesmo número de livros, quantos livros caberão a cada uma?

Para resolver esse problema, devemos fazer **72 : 4**.

```
               D U
dividendo  →   7 2 | 4     → divisor
               3 2 | 1 8   → quociente
                 0 | D U
                 ↓
               resto
```



Como o resto da divisão é igual a 0, dizemos que a divisão é exata.
Então, cada biblioteca deverá receber 18 livros.

2 Para atender a uma escola de outra cidade, essa editora precisa enviar 183 livros. Eles deverão ser colocados em 12 caixas, de modo que todas as caixas tenham o mesmo número de livros. Quantos livros serão colocados em cada caixa?

Para resolver esse problema, devemos fazer **183 : 12**.

```
               C D U
dividendo  →   1 8 3 | 1 2   → divisor
                 6 3 | 1 5   → quociente
                   3 | D U
                   ↓
                 resto
```

Como o resto é igual a 3, a divisão não é exata.
Portanto, em cada caixa serão colocados 15 livros e sobrarão 3, que, provavelmente, serão encaminhados em um pacote à parte.

Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 67)

Figura 10 - Situação onde a divisão traz a ideia de medida

A divisão também é empregada quando precisamos...

... saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra quantidade.

Usamos essa outra ideia da divisão quando queremos saber quantos grupos serão formados.

Consideremos as seguintes situações:

1 Uma equipe de voleibol é composta por 12 jogadores, sendo 6 titulares e 6 reservas. O professor de Educação Física de um colégio dispõe de 192 alunos para organizar um torneio de voleibol. Quantas equipes, com titulares e reservas, ele vai conseguir formar?

Queremos saber quantos grupos de 12 cabem em 192, ou seja, devemos fazer **192 : 12**.

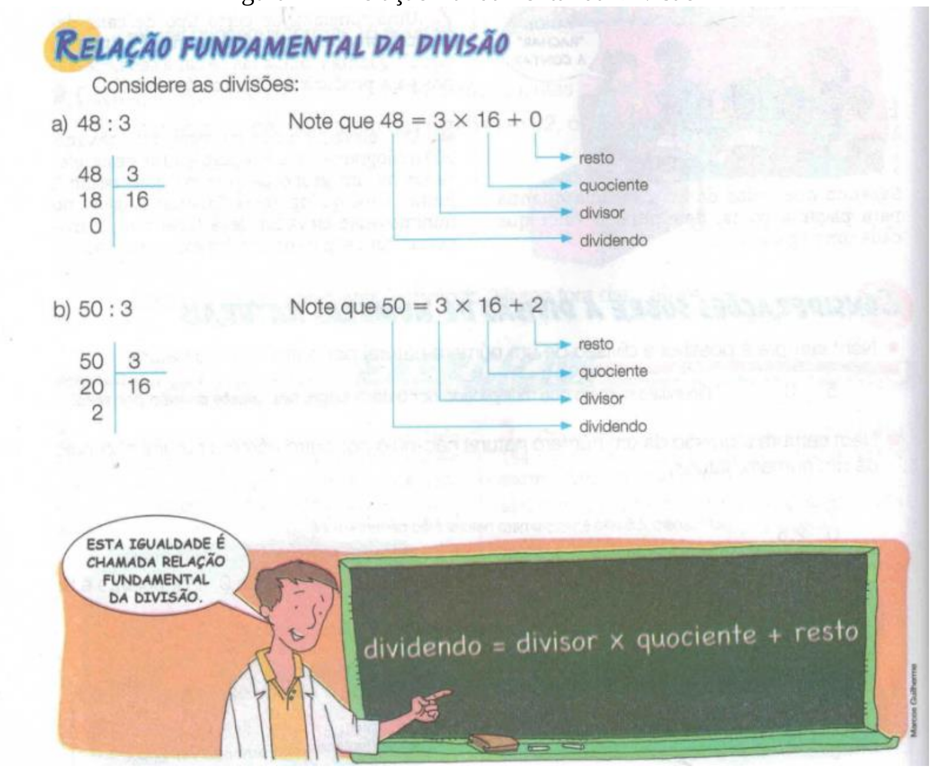
```
C D U
1 9 2 | 1 2
  7 2 | 1 6
    0 | D U
```

Ele vai conseguir formar 16 equipes.

Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 68)

A relação fundamental da divisão é apresentada sem nenhuma contextualização, apenas apresentando o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. Na Figura 11, podemos observar que os autores mostram a divisão representada através do algoritmo e em forma de expressão.

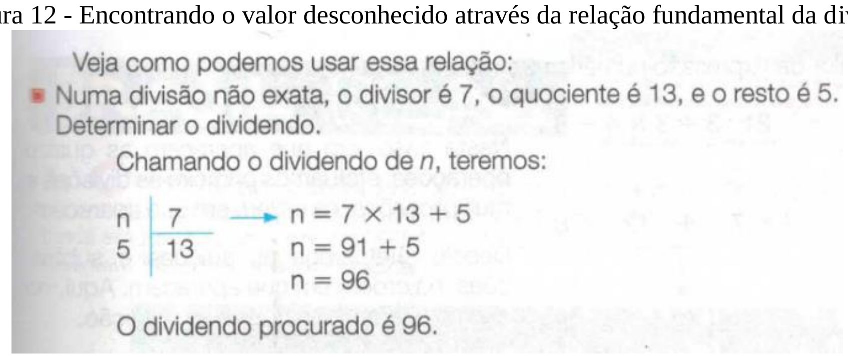
Figura 11 - Relação Fundamental da Divisão



Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 70)

Logo depois de apresentar a relação fundamental da divisão os autores trazem o comentário ilustrado na Figura 12, onde retomam a escrita da divisão na forma de dividendo igual a soma do resto com o produto do divisor pelo quociente, com o objetivo de encontrar um valor desconhecido, só que aparece descontextualizado e sem maiores explicações ou comentários posteriores.

Figura 12 - Encontrando o valor desconhecido através da relação fundamental da divisão



Veja como podemos usar essa relação:

- Numa divisão não exata, o divisor é 7, o quociente é 13, e o resto é 5. Determinar o dividendo.

Chamando o dividendo de *n*, teremos:

n | 7
5 | 13

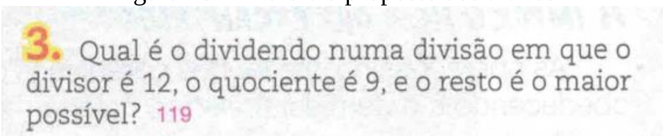
n = 7 × 13 + 5
n = 91 + 5
n = 96

O dividendo procurado é 96.

Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 70)

Os exercícios apresentam algumas situações cotidianas, que não exigem muito raciocínio do aluno. O grande objetivo é explorar quantas vezes uma quantidade cabe na outra ou repartir uma quantidade em partes iguais. Percebemos que um exercício segue o padrão do que é apresentado na Figura 13, outro retoma a relação fundamental da divisão e apenas um problema de contexto bem simples encerram a seção. Embora o livro não tenha mencionado que o resto da divisão deve ser menor que o divisor, ele apresenta um exercício que dá a oportunidade para o aluno pensar sobre o assunto. Não seguem maiores discussões acerca desse problema, ele apenas aparece na lista de exercícios proposta aos alunos como apresentamos na Figura 13.

Figura 13 - Exercício proposto aos alunos


3. Qual é o dividendo numa divisão em que o divisor é 12, o quociente é 9, e o resto é o maior possível? 119

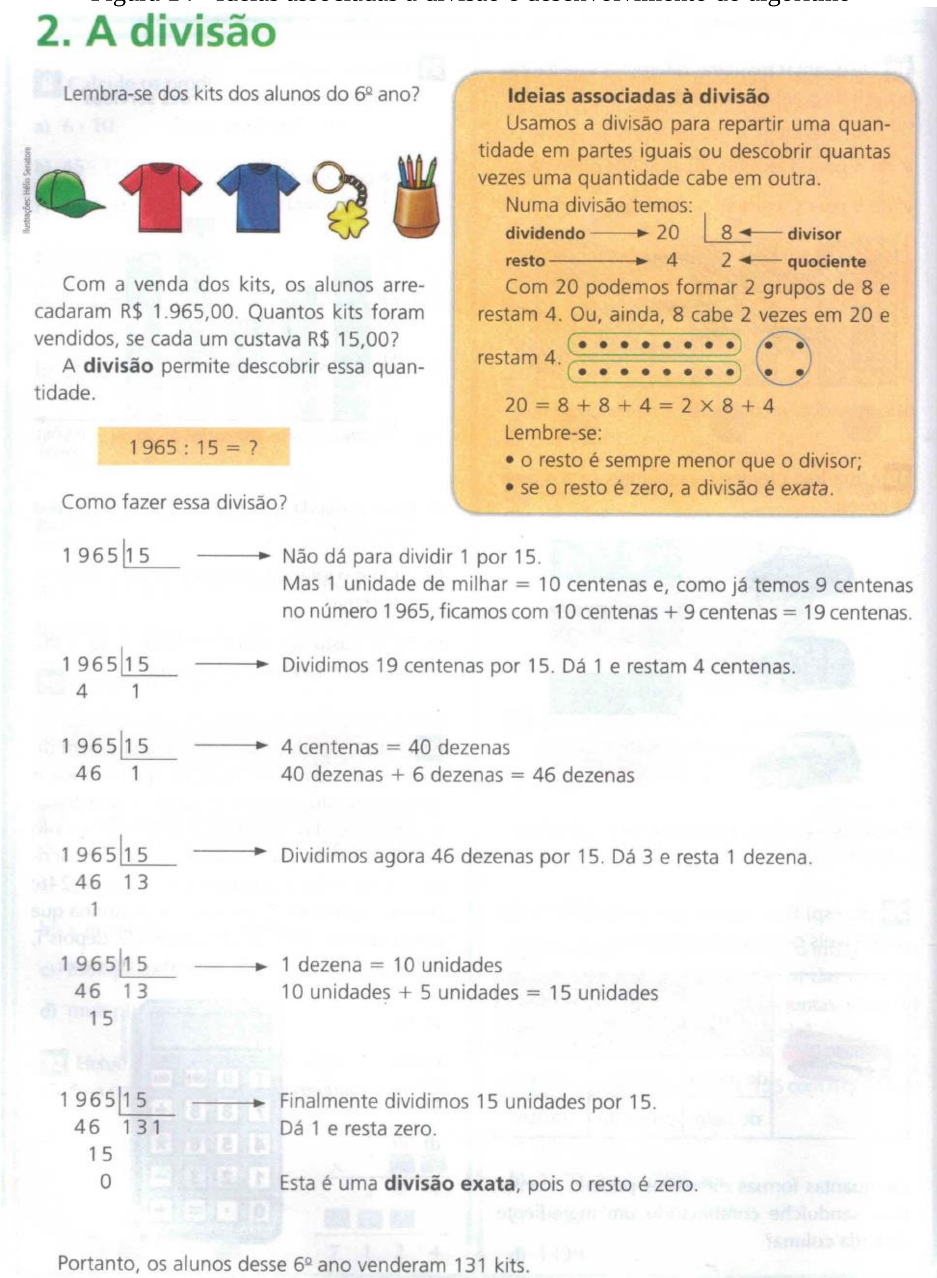
Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2009, p. 71)

Neste livro a divisão é tratada de maneira clara e as ilustrações contribuem para o processo de interpretação dos enunciados dos problemas. A quantidade de exercícios não é excessiva, permitindo que o professor trabalhe bem o conteúdo apresentado. Contudo, a relação entre os elementos da operação de divisão e a interpretação do significado do resto não são abordados.

3.1.3 Praticando Matemática – Edição Renovada

O livro da Editora do Brasil, Praticando Matemática – Edição Renovada, publicado em 2012, dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos traz (Figura 14) um problema resolvido passo a passo. Analisando o desenvolvimento do algoritmo entendemos que ele pode confundir o aluno, pois quando os autores especificam que “dividimos 19 centenas por 15”, eles não deixam claro se a divisão é por 15 centenas ou por 15 partes. Essa informação é relevante para o aluno poder atribuir significado aos termos da divisão. Num canto dessa mesma página os autores destacam que as ideias associadas à divisão são de repartir uma quantidade em partes iguais ou descobrir quantas vezes uma quantidade cabe em outra e, com uma divisão simples, nomeiam os termos da operação dizendo ainda que o resto é sempre menor que o divisor. Percebemos que são vários conceitos e informações para o aluno dar conta em uma única página.

Figura 14 - Ideias associadas à divisão e desenvolvimento do algoritmo



2. A divisão

Lembra-se dos kits dos alunos do 6º ano?

Com a venda dos kits, os alunos arrecadaram R$ 1.965,00. Quantos kits foram vendidos, se cada um custava R$ 15,00?

A **divisão** permite descobrir essa quantidade.

1 965 : 15 = ?

Como fazer essa divisão?

Ideias associadas à divisão

Usamos a divisão para repartir uma quantidade em partes iguais ou descobrir quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Numa divisão temos:

dividendo → 20 | 8 ← **divisor**

resto → 4 | 2 ← **quociente**

Com 20 podemos formar 2 grupos de 8 e restam 4. Ou, ainda, 8 cabe 2 vezes em 20 e restam 4.

$20 = 8 + 8 + 4 = 2 \times 8 + 4$

Lembre-se:

- o resto é sempre menor que o divisor;
- se o resto é zero, a divisão é *exata*.

1 965 | 15 → Não dá para dividir 1 por 15. Mas 1 unidade de milhar = 10 centenas e, como já temos 9 centenas no número 1 965, ficamos com 10 centenas + 9 centenas = 19 centenas.

1 965 | 15; 4, 1 → Dividimos 19 centenas por 15. Dá 1 e restam 4 centenas.

1 965 | 15; 46, 1 → 4 centenas = 40 dezenas; 40 dezenas + 6 dezenas = 46 dezenas

1 965 | 15; 46, 13; 1 → Dividimos agora 46 dezenas por 15. Dá 3 e resta 1 dezena.

1 965 | 15; 46, 13; 15 → 1 dezena = 10 unidades; 10 unidades + 5 unidades = 15 unidades

1 965 | 15; 46, 131; 15; 0 → Finalmente dividimos 15 unidades por 15. Dá 1 e resta zero.

Esta é uma **divisão exata**, pois o resto é zero.

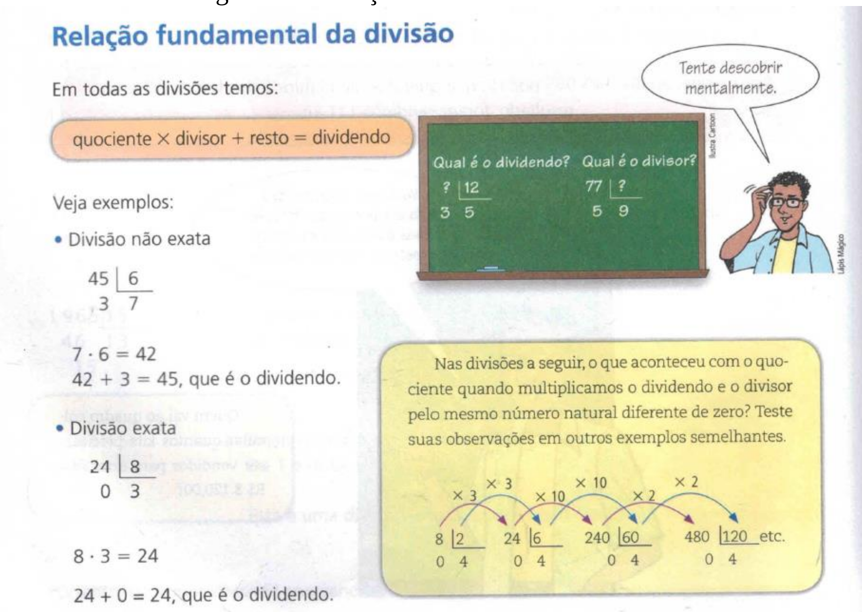
Portanto, os alunos desse 6º ano venderam 131 kits.

Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 54)

Os autores não apresentam a relação fundamental da divisão dentro de uma situação contextualizada, como ilustra a Figura 15, e sugerem que o aluno tente descobrir mentalmente o valor do dividendo e do divisor, porém não explicam sobre a expressão ou o processo inverso que o aluno deve fazer.

Nesta página do livro, no canto inferior direito, o autor traz um assunto instigante, quando escreve: “Nas divisões a seguir, o que aconteceu com o quociente quando multiplicamos o dividendo e o divisor pelo mesmo número natural diferente de zero? Teste suas observações em outros exemplos semelhantes”. É um exemplo muito interessante e no qual o autor poderia ter questionado o que acontece com o resto utilizando exemplos de divisão não exata.

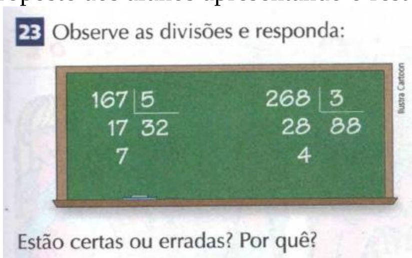
Figura 15 - Relação Fundamental da Divisão



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 56)

Na lista de exercícios aparece uma atividade, ilustrada na Figura 16, na qual os alunos devem observar que, apresentado o desenvolvimento do algoritmo, o valor do resto é maior que o divisor.

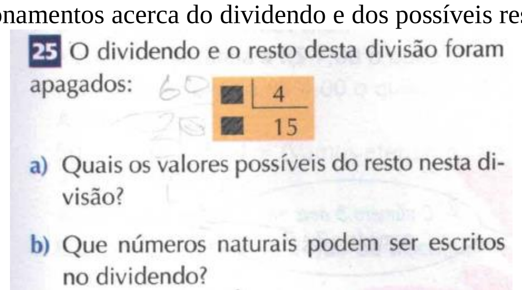
Figura 16 - Exercício proposto aos alunos apresentando o resto maior do que o divisor



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 57)

O exercício ilustrado na Figura 17 retoma o assunto, questionando os possíveis valores para o resto de uma divisão e para o dividendo.

Figura 17 - Questionamentos acerca do dividendo e dos possíveis restos de uma divisão

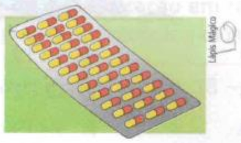


Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 57)

Para encerrar a seção, os autores apresentam outra lista de exercícios com algumas situações-problema. Um deles nos chamou a atenção e está reproduzido na Figura 18 e pensamos que a partir dele poderia se aprofundar a ideia de utilização do resto da divisão numa situação cotidiana.

Figura 18 - Situação-problema proposta aos alunos

44 Um paciente deve tomar uma cápsula de 8 em 8 horas. A caixa de remédio receitada contém 36 cápsulas. Quantos dias demorará o tratamento?



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 64)

Em relação ao livro, podemos dizer que ele tem uma linguagem clara e uma apresentação colorida e atraente para os alunos, adequando-se à faixa etária atendida. Quanto ao resto da divisão de dois números naturais, não encontramos situações onde o aluno deveria ter um olhar cuidadoso para esse termo da operação.

3.1.4 Praticando Matemática: 5ª série

Analisamos uma versão antiga de um livro cujo autor também é Álvaro Andrini, da edição de 1989, impresso pela mesma editora e com o título Praticando Matemática: 5ª série. A Figura 19 ilustra a parte inicial do capítulo no qual podemos perceber que, ao contrário dos demais livros, ele não traz uma situação contextualizada para motivar a introdução da divisão, mas um desenvolvimento em que é explorada a ideia inversa da multiplicação.

Figura 19 - Introdução da divisão

DIVISÃO EXATA

Consideremos dois números naturais, dados numa certa ordem.

Por exemplo:

10 é o primeiro deles e 2 é o segundo.

Por meio deles determina-se um terceiro número natural que, multiplicado pelo segundo, dá como resultado o primeiro. Essa operação chama-se **divisão** e é indicada pelo sinal :

Assim:

$10 : 2 = \boxed{5}$ porque $\boxed{5} \times 2 = 10$

Na divisão: $\boxed{10 : 2 = 5}$

dizemos que:
- 10 é o **dividendo,**
- 2 é o **divisor,**
- 5 é o **quociente.**

Fonte: Andrini (1989, p. 66)

Podemos perceber que a introdução da operação de divisão foi feita enfatizando apenas o aspecto procedimental da resolução. Não encontramos nessa edição a divisão associada a ideia de repartir ou de medir.

Na sequência o livro traz uma lista de exercícios, e percebemos que um deles exige, para sua resolução, que o aluno aplique o que apareceu na introdução do capítulo, ou seja, que o aluno faça o processo inverso da operação de divisão exata para obter o resultado (Figura 20).

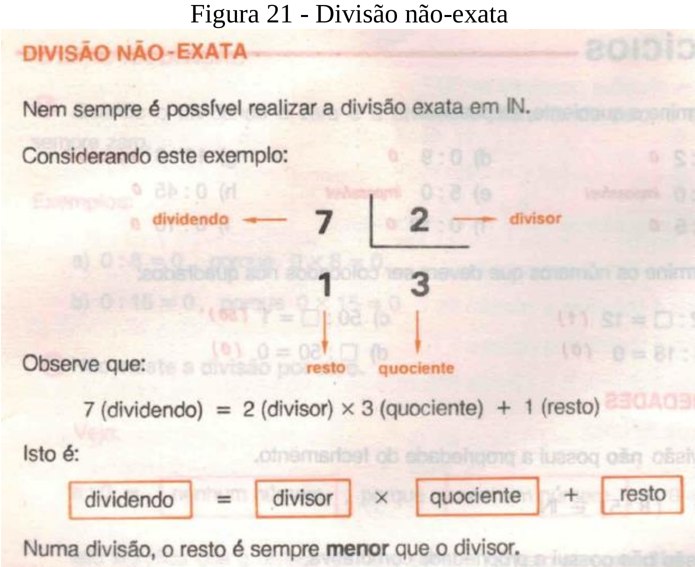
Figura 20 - Exercício proposto aos alunos

5) Qual o número que dividido por 17 dá resultado 25 ? *425*

Fonte: Andrini (1989, p. 67)

O autor reservou uma parte do capítulo para tratar da divisão não-exata onde aproveitou o exemplo numérico para apresentar a relação fundamental da divisão e, além de desenvolver o algoritmo, escreveu a relação em forma de expressão numérica, nomeando claramente todos os termos. O autor finaliza mencionando que, em uma divisão, o resto é sempre menor que o divisor (Figura 21).

Figura 21 - Divisão não-exata


DIVISÃO NÃO-EXATA

Nem sempre é possível realizar a divisão exata em IN.

Considerando este exemplo:

Observe que:

7 (dividendo) = 2 (divisor) × 3 (quociente) + 1 (resto)

Isto é:

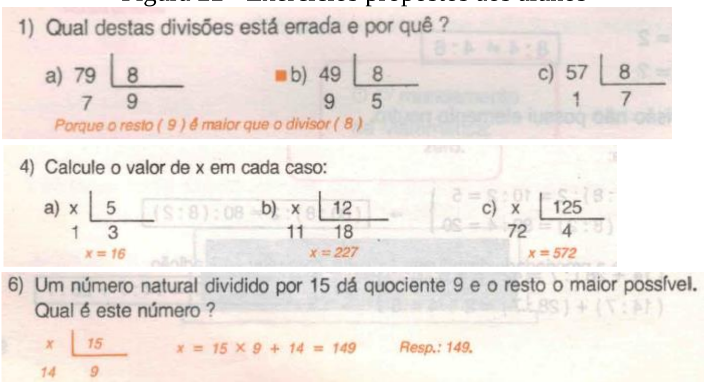
$\boxed{\text{dividendo}} = \boxed{\text{divisor}} \times \boxed{\text{quociente}} + \boxed{\text{resto}}$

Numa divisão, o resto é sempre **menor** que o divisor.

Fonte: Andrini (1989, p. 70)

Destacamos alguns exercícios desta parte. O primeiro exercício da Figura 22 ilustra uma situação em que o aluno deve observar o resto da divisão, no desenvolvimento do algoritmo, para elaborar a resposta e nos exercícios seguintes o aluno tem que buscar, na relação fundamental da divisão, subsídios para a resolução. Questões desse tipo apareceram diversas vezes durante o capítulo que trata da divisão.

Figura 22 - Exercícios propostos aos alunos


1) Qual destas divisões está errada e por quê ?

a) 79 | 8 — 7 | 9 ■ b) 49 | 8 — 9 | 5 c) 57 | 8 — 1 | 7

Porque o resto (9) é maior que o divisor (8)

4) Calcule o valor de x em cada caso:

a) x | 5 — 1 | 3 — x = 16 b) x | 12 — 11 | 18 — x = 227 c) x | 125 — 72 | 4 — x = 572

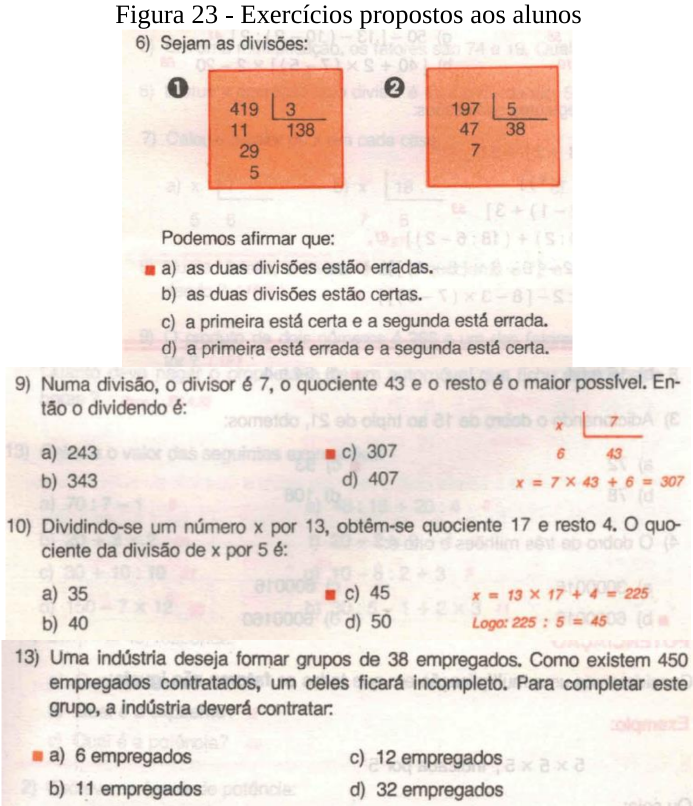
6) Um número natural dividido por 15 dá quociente 9 e o resto o maior possível. Qual é este número ?

x | 15 — 14 | 9 x = 15 × 9 + 14 = 149 Resp.: 149.

Fonte: Andrini (1989, p. 70)

Para encerrar o capítulo, o autor traz uma seção nomeada Testes, na qual propõe exercícios diversificados que convidam o aluno a pensar no conceito de divisão e em todos os elementos da relação fundamental da divisão. Alguns desses exercícios estão ilustrados na Figura 23.

Figura 23 - Exercícios propostos aos alunos


6) Sejam as divisões:

❶ 419 | 3 — 11 | 138 — 29 — 5 ❷ 197 | 5 — 47 | 38 — 7

Podemos afirmar que:

■ a) as duas divisões estão erradas.
b) as duas divisões estão certas.
c) a primeira está certa e a segunda está errada.
d) a primeira está errada e a segunda está certa.

9) Numa divisão, o divisor é 7, o quociente 43 e o resto é o maior possível. Então o dividendo é:

a) 243 ■ c) 307
b) 343 d) 407

x | 7 — 6 | 43 x = 7 × 43 + 6 = 307

10) Dividindo-se um número x por 13, obtêm-se quociente 17 e resto 4. O quociente da divisão de x por 5 é:

a) 35 ■ c) 45
b) 40 d) 50

x = 13 × 17 + 4 = 225 Logo: 225 : 5 = 45

13) Uma indústria deseja formar grupos de 38 empregados. Como existem 450 empregados contratados, um deles ficará incompleto. Para completar este grupo, a indústria deverá contratar:

■ a) 6 empregados c) 12 empregados
b) 11 empregados d) 32 empregados

Fonte: Andrini (1989, p. 76 - 77)

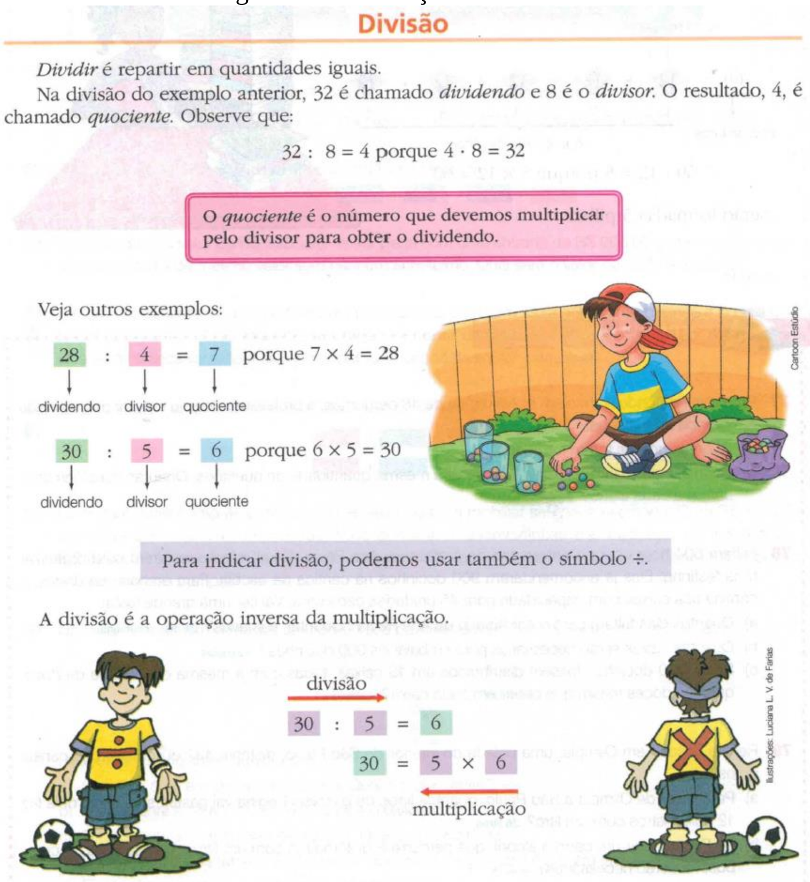
Podemos perceber que o autor buscou verificar, em vários exercícios, a relação fundamental da divisão e a necessidade do resto ser menor que o divisor, além de que ele pensou em diferentes situações para obter o mesmo tipo de resposta em vários exercícios, tratando a divisão e seus termos de diversas formas, articulando os diferentes significados de um mesmo conceito.

Este não é um livro com ilustrações ou exemplos lúdicos. Ele trata dos conceitos matemáticos de forma direta com uma grande quantidade de exercícios que se apresentam em vários graus de dificuldade.

3.1.5 Matemática e Realidade

No livro Matemática e Realidade, publicado pela editora Saraiva em 2009, escrito por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, os autores apresentam a divisão exata e não exata em seções diferentes e iniciam mostrando a divisão exata, conforme Figura 24. Eles afirmam que dividir é repartir em partes iguais e partem de um problema resolvido, sem desenvolver o algoritmo da divisão, mostram a prova real dessa operação e nomeiam todos os termos.

Figura 24 - Introdução da divisão



Divisão

Dividir é repartir em quantidades iguais.

Na divisão do exemplo anterior, 32 é chamado *dividendo* e 8 é o *divisor*. O resultado, 4, é chamado *quociente*. Observe que:

32 : 8 = 4 porque 4 · 8 = 32

O *quociente* é o número que devemos multiplicar pelo divisor para obter o dividendo.

Veja outros exemplos:

28 : 4 = 7 porque 7 × 4 = 28
dividendo divisor quociente

30 : 5 = 6 porque 6 × 5 = 30
dividendo divisor quociente

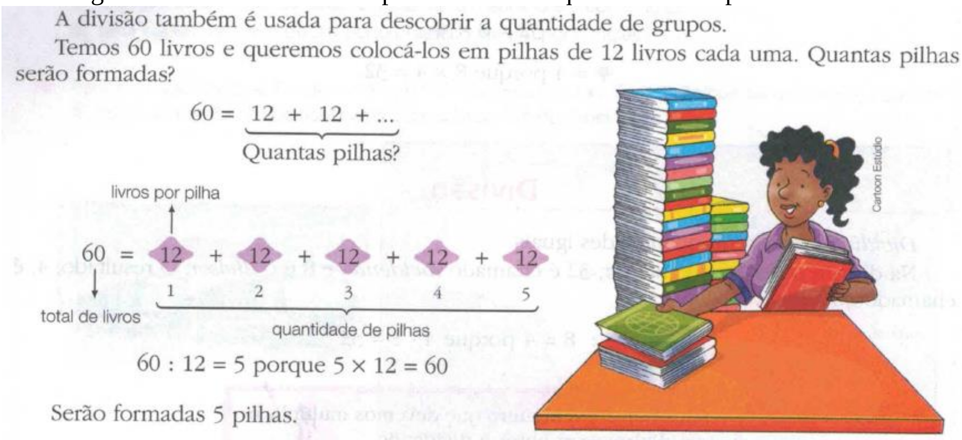
Para indicar divisão, podemos usar também o símbolo ÷.

A divisão é a operação inversa da multiplicação.

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 39)

Antes dos exercícios dessa seção, os autores apresentam uma situação em que a divisão é usada para descobrir a quantidade de grupos (pilhas) e trazem a resolução dessa operação usando a soma de parcelas iguais e a representação em forma de expressão apresentando o quociente de uma forma diferente do que analisamos nos outros livros (Figura 25).

Figura 25 - Divisão utilizada para descobrir a quantidade de "pilhas" de livros


A divisão também é usada para descobrir a quantidade de grupos.

Temos 60 livros e queremos colocá-los em pilhas de 12 livros cada uma. Quantas pilhas serão formadas?

$$60 = \underbrace{12 + 12 + \ldots}_{\text{Quantas pilhas?}}$$

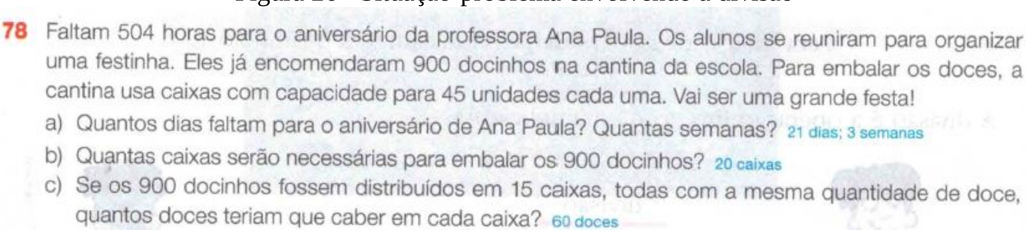
$60 : 12 = 5$ porque $5 \times 12 = 60$

Serão formadas 5 pilhas.

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 39)

A lista de exercícios exige os conhecimentos mostrados nas duas situações que introduziram a divisão. Chamou a atenção o fato de que neste livro aparecem exercícios envolvendo unidades de medida de tempo, porém todos os exercícios envolvendo tempo são resolvidos através de divisões exatas. Em nenhum deles o aluno deve utilizar o resto para chegar à solução, como apresenta a Figura 26. Pensamos que esta seria uma situação interessante para explorar a aplicação do resto da divisão de dois números naturais com o objetivo de levar os alunos a compreender os significados da operação realizada e explorar as relações existentes entre os termos.

Figura 26 - Situação-problema envolvendo a divisão


78 Faltam 504 horas para o aniversário da professora Ana Paula. Os alunos se reuniram para organizar uma festinha. Eles já encomendaram 900 docinhos na cantina da escola. Para embalar os doces, a cantina usa caixas com capacidade para 45 unidades cada uma. Vai ser uma grande festa!

a) Quantos dias faltam para o aniversário de Ana Paula? Quantas semanas? 21 dias; 3 semanas

b) Quantas caixas serão necessárias para embalar os 900 docinhos? 20 caixas

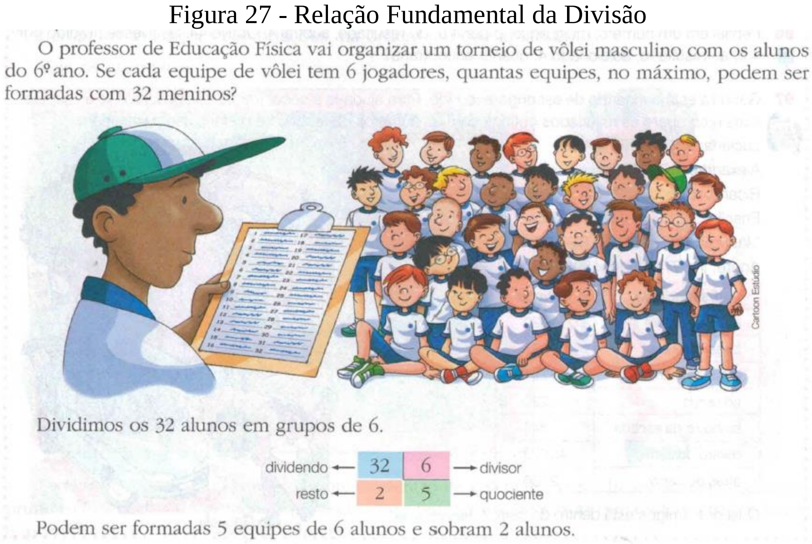
c) Se os 900 docinhos fossem distribuídos em 15 caixas, todas com a mesma quantidade de doce, quantos doces teriam que caber em cada caixa? 60 doces

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 40)

A Figura 27, ilustra a relação fundamental da divisão, explorada através de uma situação problema. Os termos são nomeados de forma correta, mas os autores não trazem a escrita em forma de expressão.

Numa nova seção (Figura 28), os autores trabalham a divisão não exata, partindo do problema que introduziu a relação fundamental da divisão. No final, chamam a atenção para o fato do resto ter que ser menor que o divisor. Nesse momento foi retomada a nomenclatura dos termos e a situação foi escrita em forma de expressão.

Figura 27 - Relação Fundamental da Divisão



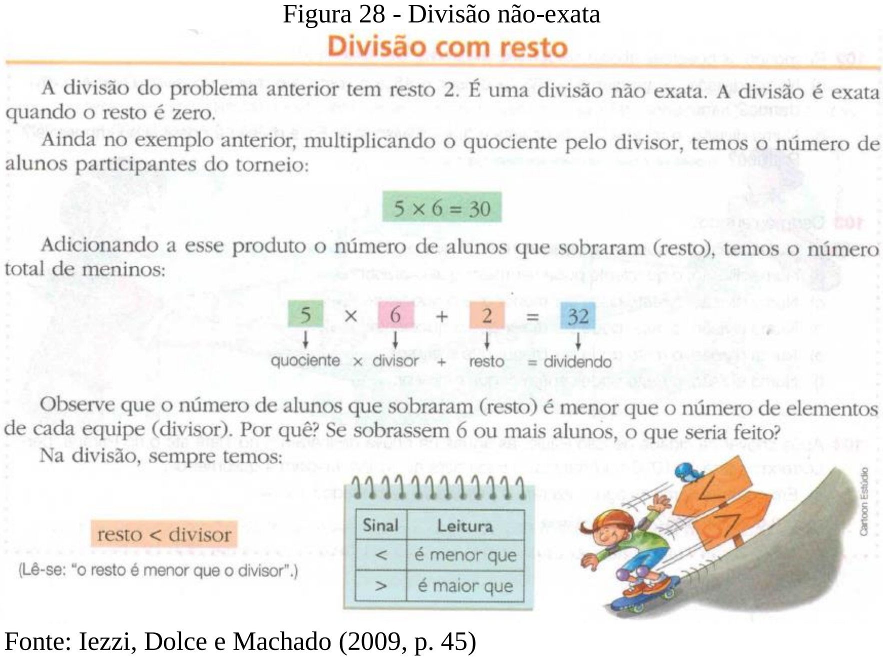
O professor de Educação Física vai organizar um torneio de vôlei masculino com os alunos do 6º ano. Se cada equipe de vôlei tem 6 jogadores, quantas equipes, no máximo, podem ser formadas com 32 meninos?

Dividimos os 32 alunos em grupos de 6.

Podem ser formadas 5 equipes de 6 alunos e sobram 2 alunos.

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 44)

Figura 28 - Divisão não-exata



Divisão com resto

A divisão do problema anterior tem resto 2. É uma divisão não exata. A divisão é exata quando o resto é zero.

Ainda no exemplo anterior, multiplicando o quociente pelo divisor, temos o número de alunos participantes do torneio:

$$5 \times 6 = 30$$

Adicionando a esse produto o número de alunos que sobraram (resto), temos o número total de meninos:

$$\underbrace{5}_{\text{quociente}} \times \underbrace{6}_{\text{divisor}} + \underbrace{2}_{\text{resto}} = \underbrace{32}_{\text{dividendo}}$$

Observe que o número de alunos que sobraram (resto) é menor que o número de elementos de cada equipe (divisor). Por quê? Se sobrassem 6 ou mais alunos, o que seria feito?

Na divisão, sempre temos:

resto < divisor

(Lê-se: "o resto é menor que o divisor".)

Sinal	Leitura
<	é menor que
>	é maior que

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 45)

Na sequência seguem mais exercícios contextualizados, sendo que dois deles nos chamaram a atenção, pois exploram o resto da divisão de uma forma que não foi trabalhada durante o capítulo, incentivando a reflexão e a ação do aluno na sua resolução.

Os exercícios da Figura 29 podem ser trabalhados de modo a privilegiar o tratamento do resto da divisão sob um novo olhar, e não apenas como uma sobra, observando, inclusive, a utilização do resto da divisão. No primeiro exercício, os alunos devem utilizar o resto da divisão para chegar ao resultado e, no segundo, percebemos que os autores exploram, ora a utilização do quociente, ora a utilização do resto, na resolução do problema.

Figura 29 - Situações-problema que contemplam a utilização do resto da divisão

100 Contando a partir de um domingo, em que dia da semana cai o milésimo dia? sexta-feira

R

101 Uma indústria de fósforos produz caixas com 40 palitos. Se a produção diária é de 64 267 palitos, responda:

a) Essa produção dá para preencher quantas caixas? 1 606 caixas

b) Quantos palitos sobram? 27 palitos

c) Em três dias, quantas caixas são preenchidas? Quantos palitos sobram? 4 820 caixas; 1 palito

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 45)

Outro exercício que estimula a exploração e a observação das relações entre os termos da divisão está ilustrado na Figura 30, onde o aluno deve verificar que é necessário o uso da relação fundamental para sua solução. Outros exercícios semelhantes a esse aparecem no final da unidade, na seção “Teste seu Conhecimento”.

Figura 30 - Situações-problema propostos aos alunos

102 Responda às questões abaixo:

a) Numa divisão, o quociente é 103, o divisor é 45 e o resto é o maior possível. Qual é o dividendo? 4679

b) Numa divisão, o resto é 7, o quociente é 3, e o divisor é 5. Essa divisão é possível ou impossível? Por quê? Impossível; o resto não pode ser maior que o divisor.

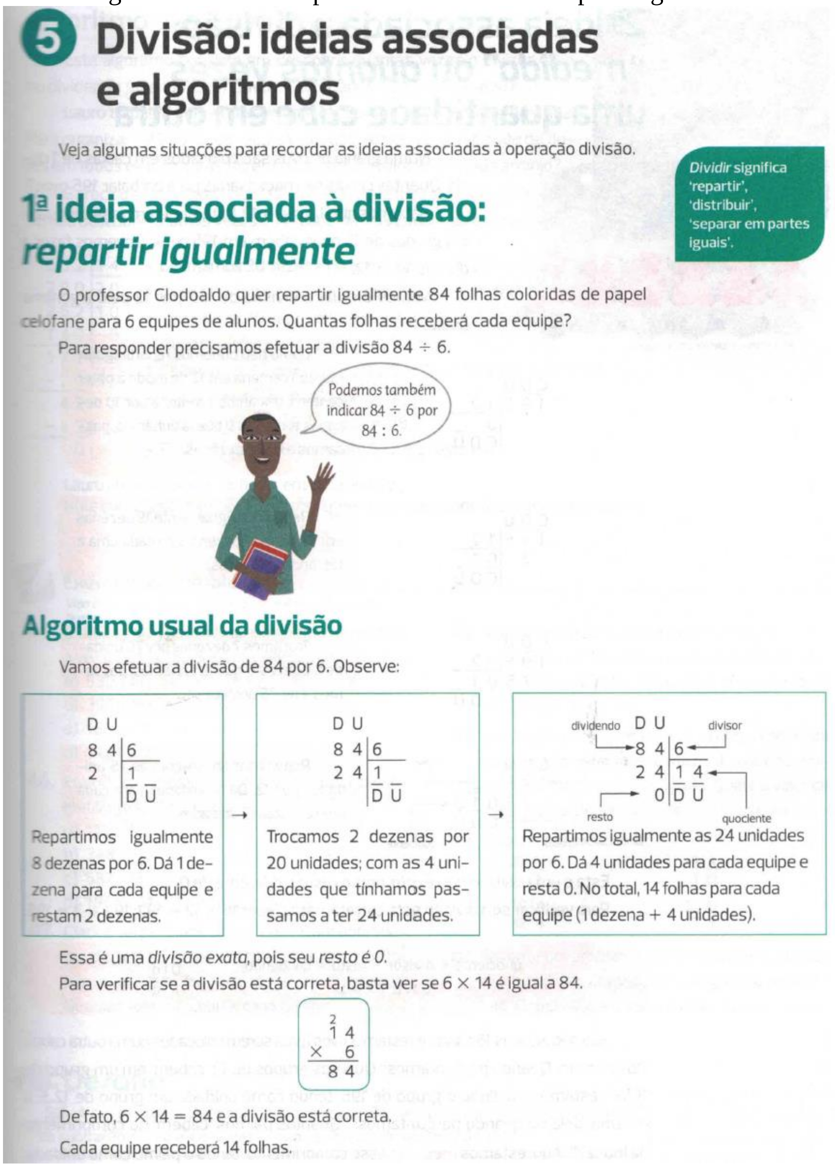
Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 46)

O livro é bem ilustrado e de linguagem simples e clara, sua leitura é agradável e os exercícios estão distribuídos em vários níveis de dificuldade. Podemos perceber que alguns exercícios contemplavam o resto da divisão em sua resolução, porém apareceram apenas na lista de exercícios dos alunos, sem haver uma explicação ou comentário sobre o assunto.

3.1.6 Projeto Teláris: Matemática

No livro publicado pela Editora Ática em 2012, denominado Projeto Teláris: Matemática para o 6º ano, do autor Luiz Roberto Dante, a divisão é introduzida através de duas situações problema. A primeira ideia está associada a repartir em partes iguais e está ilustrada na Figura 31. Nela o autor efetua a divisão, passo a passo, nomeia cada termo, realiza a “prova real” e escreve o resultado em forma de expressão, incentivando a prova real, de forma clara e objetiva. O autor utilizou as classes do sistema de numeração durante o desenvolvimento do algoritmo da divisão e indicou o resto em uma divisão exata. Analisando a forma de desenvolvimento do algoritmo percebemos que o autor não deixa claro se está repartindo 8 dezenas por 6 dezenas ou por 6 partes e acreditamos que essa informação é relevante para o aluno poder atribuir significado aos termos da divisão.

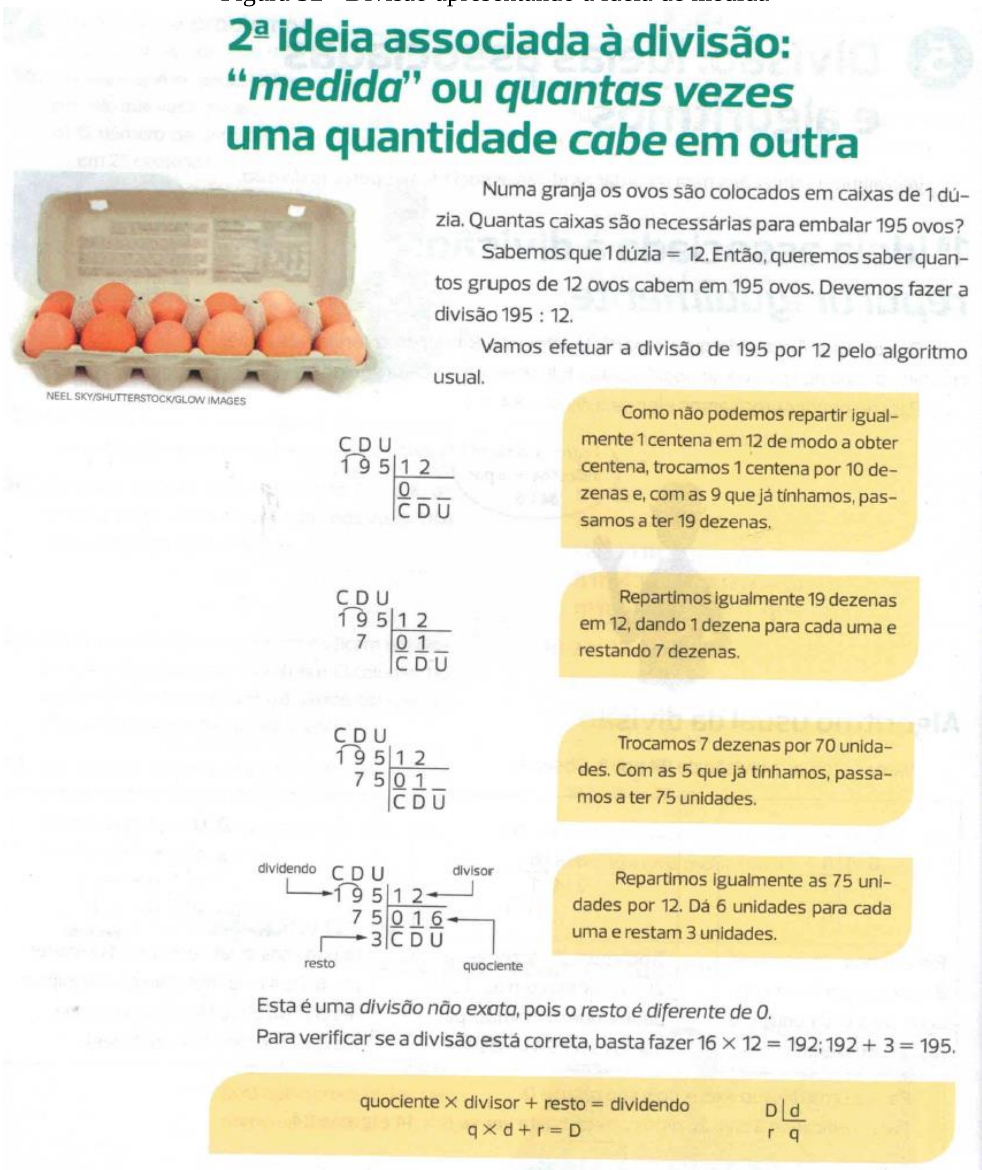
Figura 31 - Divisão apresentando a ideia de repartir igualmente



Fonte: Dante (2012, p. 51)

Na Figura 32 o autor apresenta a divisão associada à ideia de medida. Novamente o autor realiza o cálculo passo a passo e detalha um pouco mais, nomeando os elementos da expressão na forma $D = d \times q + r$, de modo que temos: dividendo igual à soma do resto com o produto do divisor pelo quociente, apresentando assim, a relação fundamental da divisão no contexto do exercício. Observamos que a escrita na forma $D = d \times q + r$ não é muito explorada no decorrer da unidade. Novamente percebemos o uso das ordens do sistema de numeração durante o desenvolvimento do algoritmo e acreditamos que essa utilização pode confundir o aluno.

Figura 32 - Divisão apresentando a ideia de medida



2ª ideia associada à divisão: "*medida*" ou *quantas vezes* uma quantidade *cabe* em outra

NEEL SKY/SHUTTERSTOCK/GLOW IMAGES

Numa granja os ovos são colocados em caixas de 1 dúzia. Quantas caixas são necessárias para embalar 195 ovos?

Sabemos que 1 dúzia = 12. Então, queremos saber quantos grupos de 12 ovos cabem em 195 ovos. Devemos fazer a divisão 195 : 12.

Vamos efetuar a divisão de 195 por 12 pelo algoritmo usual.

Como não podemos repartir igualmente 1 centena em 12 de modo a obter centena, trocamos 1 centena por 10 dezenas e, com as 9 que já tínhamos, passamos a ter 19 dezenas.

Repartimos igualmente 19 dezenas em 12, dando 1 dezena para cada uma e restando 7 dezenas.

Trocamos 7 dezenas por 70 unidades. Com as 5 que já tínhamos, passamos a ter 75 unidades.

Repartimos igualmente as 75 unidades por 12. Dá 6 unidades para cada uma e restam 3 unidades.

dividendo, divisor, resto, quociente

Esta é uma *divisão não exata*, pois o *resto é diferente de 0*.

Para verificar se a divisão está correta, basta fazer 16 × 12 = 192; 192 + 3 = 195.

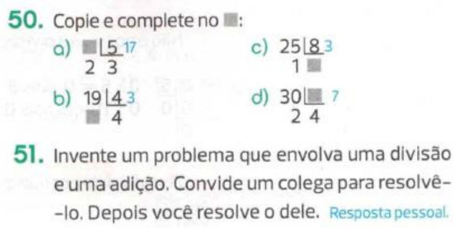
quociente × divisor + resto = dividendo

q × d + r = D

Fonte: Dante (2012, p. 52)

Os exercícios e problemas que o autor sugere neste momento inicial do capítulo são simples e podem ser facilmente resolvidos pelos alunos. Apenas dois deles nos chamaram a atenção, conforme ilustrado na Figura 33. O aluno deve buscar subsídios na relação fundamental da divisão para resolvê-los.

Figura 33 - Exercícios propostos para os alunos



50. Copie e complete no ■:

a) ■ ⌊5 17; 2 3

b) 19 ⌊4 3; ■ 4

c) 25 ⌊8 3; 1 ■

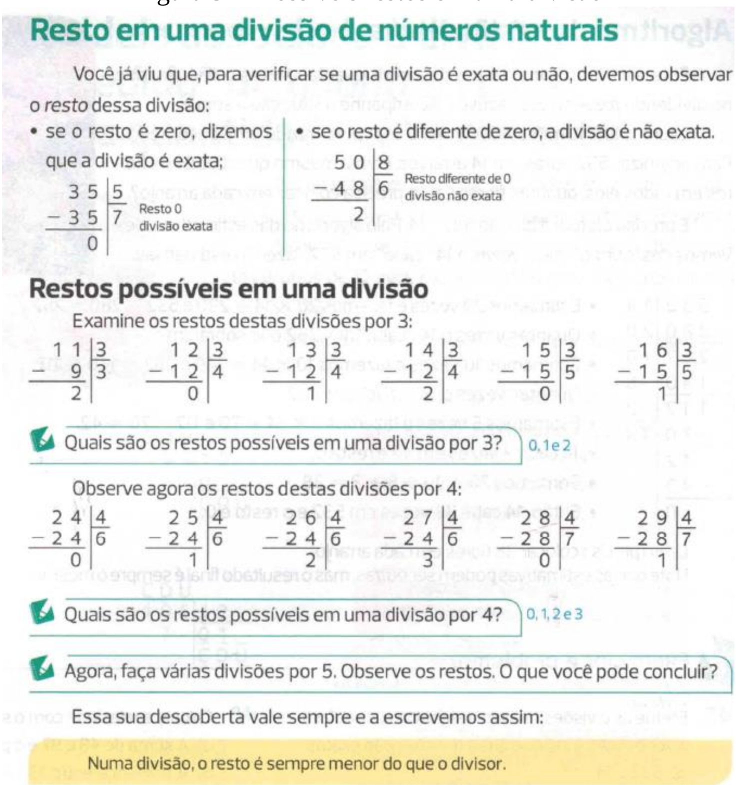
d) 30 ⌊■ 7; 2 4

51. Invente um problema que envolva uma divisão e uma adição. Convide um colega para resolvê-lo. Depois você resolve o dele. Resposta pessoal.

Fonte: Dante (2012, p. 53)

Na sequência, o autor sugere uma discussão muito interessante sobre os possíveis restos em uma divisão com questionamentos aos alunos, com o objetivo de estabelecer relações e incentivar descobertas e generalizações (Figura 34).

Figura 34 - Possíveis restos em uma divisão



Resto em uma divisão de números naturais

Você já viu que, para verificar se uma divisão é exata ou não, devemos observar o *resto* dessa divisão:

- se o resto é zero, dizemos que a divisão é exata;

35 | 5
−35 | 7
0

Resto 0
divisão exata

- se o resto é diferente de zero, a divisão é não exata.

50 | 8
−48 | 6
2

Resto diferente de 0
divisão não exata

Restos possíveis em uma divisão

Examine os restos destas divisões por 3:

11 | 3; −9 | 3; 2
12 | 3; −12 | 4; 0
13 | 3; −12 | 4; 1
14 | 3; −12 | 4; 2
15 | 3; −15 | 5; 0
16 | 3; −15 | 5; 1

Quais são os restos possíveis em uma divisão por 3? 0, 1 e 2

Observe agora os restos destas divisões por 4:

24 | 4; −24 | 6; 0
25 | 4; −24 | 6; 1
26 | 4; −24 | 6; 2
27 | 4; −24 | 6; 3
28 | 4; −28 | 7; 0
29 | 4; −28 | 7; 1

Quais são os restos possíveis em uma divisão por 4? 0, 1, 2 e 3

Agora, faça várias divisões por 5. Observe os restos. O que você pode concluir?

Essa sua descoberta vale sempre e a escrevemos assim:

Numa divisão, o resto é sempre menor do que o divisor.

Fonte: Dante (2012, p. 54)

Na seção seguinte o autor trata do cálculo mental, sugerindo estratégias de raciocínio e, depois, uma sequência de exercícios.

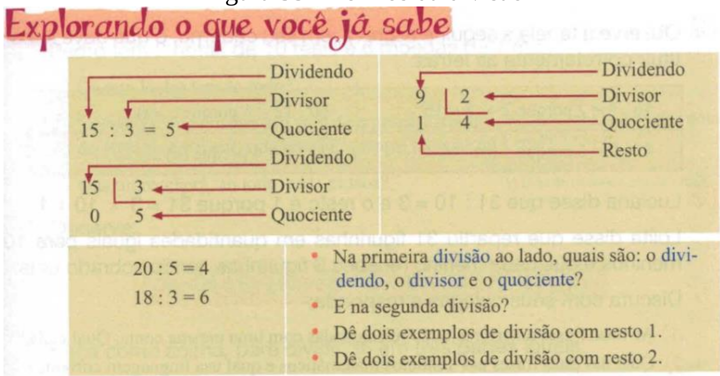
O livro distribui e relaciona muito bem os conteúdos, apresenta uma linguagem clara e direta e tem uma boa quantidade de ilustrações que aparecem na seção que trata da divisão. Os exercícios apresentam vários graus de dificuldade, mas não percebemos nenhuma referência ao tratamento do resto da divisão na resolução de problemas.

3.1.7 Descobrindo e Aplicando a Matemática

O livro da Editora Dimensão, Descobrindo e Aplicando a Matemática, de Alceu dos Santos Mazziero, publicado em 2012, aborda a divisão de uma forma um pouco diferenciada dos demais livros didáticos analisados até o momento.

Partindo de um exemplo numérico, o autor inicia o capítulo relembrando os termos da divisão, desenvolvendo o algoritmo de uma divisão exata e de uma divisão com resto, conforme Figura 35.

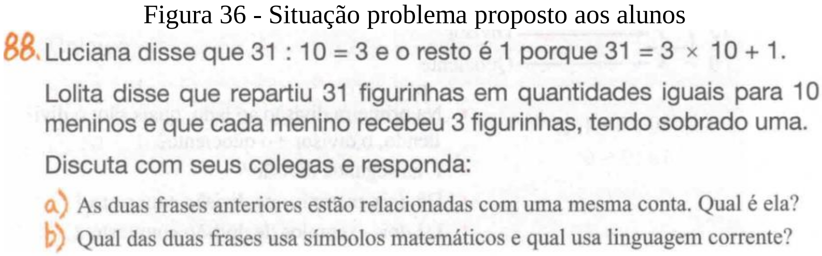
Figura 35 - Termos da divisão



Fonte: Mazziero (2012, p. 111)

Na sequência os autores sugerem situações-problema até o final do capítulo. Ao todo são 32 problemas que abordam a divisão nas mais variadas formas. Os autores solicitam com frequência resoluções dissertativas dos problemas apresentados, diferentemente dos demais livros analisados. Alguns desses problemas nos chamaram a atenção, como o problema ilustrado na Figura 36, que traz a escrita da representação de uma divisão de duas formas diferentes, além da linguagem corrente, favorecendo a visualização de um mesmo problema de duas formas.

Figura 36 - Situação problema proposto aos alunos


88. Luciana disse que 31 : 10 = 3 e o resto é 1 porque 31 = 3 × 10 + 1.

Lolita disse que repartiu 31 figurinhas em quantidades iguais para 10 meninos e que cada menino recebeu 3 figurinhas, tendo sobrado uma.

Discuta com seus colegas e responda:

a) As duas frases anteriores estão relacionadas com uma mesma conta. Qual é ela?

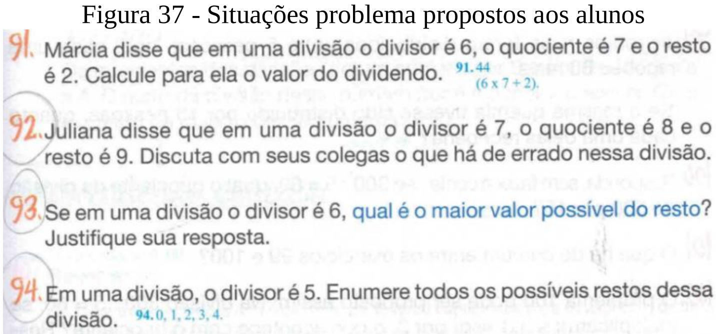
b) Qual das duas frases usa símbolos matemáticos e qual usa linguagem corrente?

Fonte: Mazziero (2012, p. 112)

Uma observação em relação ao problema da Figura 36 é o fato de que está implícita a ideia de que o quociente de uma divisão deve ser o maior possível e o resto deve ser o menor possível, pois, caso contrário, poderíamos dizer, por exemplo, que $31 \div 10 = 2$ e resta 11 porque $31 = 2 \times 10 + 11$.

Ainda sobre esses problemas, percebemos que tanto no problema da Figura 36 como nos problemas da Figura 37, embora não esteja explícito que o resto deve ser menor que o divisor, o aluno deve observar esse fato para concluir a resolução, pois deve usar a relação fundamental da divisão e observar como se comporta o resto em relação ao divisor. Um exemplo disso são os problemas ilustrados na Figura 37, embora não haja uma discussão sobre o raciocínio lógico envolvido na relação fundamental da divisão.

Figura 37 - Situações problema propostos aos alunos



91. Márcia disse que em uma divisão o divisor é 6, o quociente é 7 e o resto é 2. Calcule para ela o valor do dividendo. 91. 44 (6 x 7 + 2).

92. Juliana disse que em uma divisão o divisor é 7, o quociente é 8 e o resto é 9. Discuta com seus colegas o que há de errado nessa divisão.

93. Se em uma divisão o divisor é 6, qual é o maior valor possível do resto? Justifique sua resposta.

94. Em uma divisão, o divisor é 5. Enumere todos os possíveis restos dessa divisão. 94. 0, 1, 2, 3, 4.

Fonte: Mazziero (2012, p. 113)

O exercício apresentado abaixo desafia o aluno a encontrar o resto em uma divisão utilizando o maior resto possível de outra divisão, desafiando o aluno a pensar nesse termo da divisão. O autor propõe: “Os quocientes das divisões de um número por 9 e por 8 são iguais a 4. O resto da divisão desse número por 8 é o maior possível. Qual é o resto da divisão desse número por 9?” Mazziero (2012, p. 115).

Em nenhum momento o resto aparece vinculado a alguma situação-problema do cotidiano ou um evento de natureza cíclica ou periódica. O livro tem uma linguagem clara e não apresenta nenhuma ilustração que auxilie na compreensão e solução dos problemas propostos.

3.1.8 Matemática Bianchini

O livro da Editora Moderna, Matemática Bianchini, publicado em 2011, do autor Edwaldo Bianchini, introduz a divisão (Figura 38) com a ideia de repartir em partes iguais através de uma situação problema. O autor não desenvolve o algoritmo da divisão e usa o resultado para realizar a “prova real” e conferir o resultado obtido. Utiliza a mesma estratégia para apresentar outra ideia associada à divisão que é a ideia de medida, porém sem calcular a “prova real”.

Depois de alguns exercícios contextualizados o autor apresenta a propriedade fundamental da divisão de maneira clara e objetiva, através de uma situação-problema, desenvolvendo o algoritmo da divisão, nomeando corretamente todos os termos e escrevendo a situação em forma de expressão, como ilustra a Figura 39. O autor observa que uma divisão exata entre dois números naturais tem resto igual a zero e uma divisão não exata tem resto diferente de zero, além de que o resto de uma divisão entre dois números naturais sempre é menor que o divisor.

Figura 38 - Ideias associadas à divisão

A divisão é uma operação que pode envolver a ideia de **distribuição equitativa** (repartição em partes iguais) ou de **medida** (quantas vezes uma quantidade cabe em outra). Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Em uma gincana promovida pelo Colégio Nóbrega, os alunos arrecadaram 840 latas de leite em pó, que foram doadas a instituições assistenciais. Para a doação, as latas de leite foram embaladas em caixas contendo 30 latas cada uma.

Para saber quantas caixas foram necessárias para embalar todas as latas, devemos procurar o número que, multiplicado por 30, resulte em 840.

Ao fazer isso, estamos realizando uma operação chamada **divisão**.

O número procurado é 28, pois $28 \times 30 = 840$.

Vamos montar a divisão que fornece esse resultado:

$$840 : 30 = 28$$

Logo, foram necessárias 28 caixas.

Em uma calculadora, fazemos essa divisão da seguinte maneira:

8 4 0 ÷ 3 0 = 28

NELSON MATSUDA

Note que, ao dividir o total de latas de leite pela quantidade que cabe em cada caixa, estamos fazendo uma repartição em partes iguais, uma **distribuição equitativa** do total de latas de leite.

Fonte: Bianchini (2011, p. 59)

Figura 39 - Propriedade fundamental da divisão

Propriedade fundamental da divisão

Uma secretaria de esportes tinha 225 bolas de vôlei para distribuir igualmente entre as 27 escolas municipais. Feita a distribuição, perceberam que foram dadas 8 bolas a cada escola e ainda sobraram 9 bolas:

$$\begin{array}{r|l} 225 & 27 \\ \hline 9 & 8 \end{array}$$

Assim como as demais operações, os termos da divisão também recebem nomes especiais:

- 225 é o dividendo;
- 8 é o quociente;
- 27 é o divisor;
- 9 é o resto.

Repare que:

$$\underbrace{225}_{\text{dividendo}} = \underbrace{8}_{\text{quociente}} \times \underbrace{27}_{\text{divisor}} + \underbrace{9}_{\text{resto}}$$

Veja outras divisões e as igualdades que podemos escrever com seus termos:

$$\begin{array}{r|l} 457 & 12 \\ \hline 97 & 38 \\ 1 & \end{array} \qquad 457 = 38 \times 12 + 1 \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 3 \\ \hline 06 & 42 \\ 0 & \end{array} \qquad 126 = 42 \times 3 + 0$$

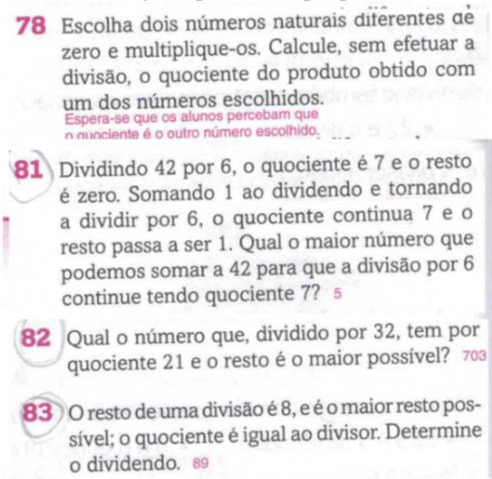
Chamamos de **propriedade fundamental da divisão** a igualdade:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$$

Fonte: Bianchini (2011, p. 61)

A proposta de exercícios desta seção do livro é pequena, embora apresente situações-problema que envolvem situações cotidianas. Os exercícios ilustrados na Figura 40 nos chamaram a atenção pois exigem do aluno uma atenção especial para a sua resolução.

Figura 40 - Situações-problema propostos aos alunos



78 Escolha dois números naturais diferentes de zero e multiplique-os. Calcule, sem efetuar a divisão, o quociente do produto obtido com um dos números escolhidos.
Espera-se que os alunos percebam que o quociente é o outro número escolhido.

81 Dividindo 42 por 6, o quociente é 7 e o resto é zero. Somando 1 ao dividendo e tornando a dividir por 6, o quociente continua 7 e o resto passa a ser 1. Qual o maior número que podemos somar a 42 para que a divisão por 6 continue tendo quociente 7? 5

82 Qual o número que, dividido por 32, tem por quociente 21 e o resto é o maior possível? 703

83 O resto de uma divisão é 8, e é o maior resto possível; o quociente é igual ao divisor. Determine o dividendo. 89

Fonte: Bianchini (2011, p. 62)

A linguagem do livro é clara e as ilustrações são bem coloridas, porém, como os demais, não contempla a utilização do resto da divisão na resolução dos problemas.

3.1.9 Considerações gerais sobre os livros didáticos

Basicamente os livros analisados introduzem a divisão de números naturais com duas situações distintas. Uma que traz a ideia de repartir em partes iguais uma quantidade e outra com a ideia de calcular quantas vezes uma quantidade cabe em outra, contendo a ideia de medida. A relação fundamental da divisão, que apresenta o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, é apresentada em todos os livros analisados. Os autores caracterizam a divisão exata como aquela em que o resto é zero e a divisão não-exata como aquela em que há uma "sobra" na operação de divisão.

A metodologia utilizada na grande maioria dos livros didáticos caracterizou-se, predominantemente, por introduzir o conteúdo apresentado com exemplos do cotidiano ou exemplos lúdicos, seguidos de alguma sistematização e atividades de aplicação.

Nos livros analisados os exercícios são variados e um fato marcante dessa análise é que as questões abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente de uma divisão e o significado do resto tem sido apenas o de sobra sem ser dada uma importância maior mostrando, por exemplo, o resto como solução de um problema. Os poucos problemas que contemplaram o assunto estavam na lista de exercícios para os alunos sem nenhum comentário complementar.

A relação fundamental da divisão é tratada em todos os livros analisados e aparece em todas as listas de exercícios, uns em maior e outros em menor quantidade, o mesmo acontecendo com a ideia dos possíveis restos que uma divisão não exata pode deixar. Na maioria dos livros analisados encontramos exercícios que podiam ser resolvidos utilizando apenas os procedimentos de cálculo e também situações-problema que envolviam situações cotidianas.

De uma maneira geral o conteúdo foi apresentado com o fornecimento das informações básicas corretas, embora em alguns livros não tenha sido enfatizada a restrição sobre o resto nem a condição do quociente ser o maior possível.

Consideramos que o posicionamento que o professor assume diante da bibliografia sugerida pela escola é decisivo na qualidade da aprendizagem dos alunos e, embora o livro seja um importante elemento no processo de ensino e aprendizagem, ele deve assumir a função de texto de referência tanto para o aluno, quanto para o professor, não sendo a única fonte de pesquisa.

3.2 ANÁLISE DE DISSERTAÇÕES

Realizamos a análise de sete dissertações de mestrado e uma tese de doutorado. A busca por esses trabalhos foi feita com pesquisas no Banco de Teses da Capes, no banco de dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat e nos repositórios digitais de algumas universidades do país. Os trabalhos analisados

No Quadro 2 segue uma relação dos trabalhos analisados.

Quadro 2 - Relação de trabalhos analisados

(continua)

Pesquisador	**Título**	**Instituição**	**Ano**
Maria Carolina Cascino da Cunha	As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries	PUC – SP - Pontifícia Universidade Católica	1997
Cristiane Attili Castela	Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série	PUC- SP - Pontifícia Universidade Católica	2005
Síntria Labres Lautert	As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção	UFPE - Universidade Federal de Pernambuco	2005
Luciana Cardoso Benvenutti	A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª série	UNIVALI - Universidade do Vale do Itajaí	2008

(conclusão)

Michele dos Santos Ferreira	Marcas da Divisão – Um estudo de caso sobre a aprendizagem da operação de divisão no 4º ano do Ensino Fundamental	UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul	2012
Leticia Vasconcellos de Souza	Congruência Modular nas séries finais do Ensino Fundamental	UFJF - Universidade Federal de Juiz de Fora	2015
Cleilton Bezerra de Melo	A Matemática dos restos e o Calendário Gregoriano	UFC – Universidade Federal do Ceará	2014
Iury Kersnowsky de Sant'Anna	A Matemática Modular como ferramenta para as séries finais do Ensino Fundamental	IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada	2013

Fonte: Elaborado pela autora

Cunha (1997), em sua dissertação de mestrado em Ensino de Matemática, investigou as concepções de alunos de 5º e 7º séries de que "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui". A autora desenvolveu sua pesquisa baseada nas Teorias dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e na Construção do Conhecimento de Jean Piaget.

Cunha (1997) analisou em seu trabalho, a dissertação de mestrado de Nehring (1996), na qual já aparecia a preocupação com uma matemática que chegava aos alunos pronta e distante da realidade, considerando que uma das origens dessa compreensão poderia ser o livro didático tido como única fonte de pesquisa de muitos professores.

Em sua análise aos livros didáticos Cunha (1997) identificou que a divisão é explorada através da ideia de repartição quotativa, não permitindo ao aluno fazer conexões entre o algoritmo e o conceito.

Por meio de um teste diagnóstico, a autora obteve resultados que indicaram que os alunos têm a compreensão de que a "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui". Baseada nos resultados, construiu uma sequência de atividades, buscando uma mudança de concepções relativa às operações de multiplicação e divisão de números naturais.

Os resultados apontaram, dentre outros aspectos, que a compreensão de que "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui" estava muito interiorizada pelos alunos que participaram da pesquisa e que provavelmente uma mudança de concepção só ocorreria se, desde o início da vida escolar dos alunos, a multiplicação e a divisão fossem introduzidas e trabalhadas por meio de diversas abordagens, não somente como adições repetidas e como subtrações sucessivas. A pesquisadora concluiu que a sequência de atividades não possibilitou que os alunos mudassem suas concepções sobre multiplicação e divisão e que isso não foi possível, devido ao modo como esse saber vinha sendo abordado durante toda a vida escolar dos alunos.

A pesquisadora concluiu ainda, que o ensino da técnica não era conduzido de modo que os alunos pudessem fazer conexões entre os conceitos e os processos. Para verificar se os alunos estabeleciam relações entre dividendo, divisor, quociente e resto, Cunha (1997) realizou um teste diagnóstico e uma das questões era: "Resolva as questões propostas abaixo: (a) $414 \div [\ ] = 23$ e (b) $[\ ] \div 59 = 27$. Como você poderia me convencer de que sua resposta para as questões acima apresentadas é a correta? " As resoluções apresentadas levaram-na a observar que a maior dificuldade dos alunos foi descobrir o valor desconhecido, pois era necessário efetuar a operação inversa àquela explicitada.

Castela (2005) realizou um trabalho com 28 alunos, com idades entre 11 e 13 anos, de 6ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública de São Paulo e teve como objetivo diagnosticar as concepções desses alunos sobre a divisão de Números Naturais. A pesquisadora procurava responder três questões: a) se os alunos conheciam a técnica da divisão; b) se eles sabiam utilizar a divisão como ferramenta para a resolução de problemas e c) quais as relações que eles faziam entre dividendo, divisor, quociente e resto. Para isso foram aplicadas 12 questões que ela dividiu em formais (oito) e contextualizadas (quatro). Os resultados da pesquisa foram analisados sob a luz da Teoria APOS, desenvolvida por Ed Dubinsky com base na Teoria de Abstração Reflexiva introduzida por Piaget.

A pesquisadora concluiu que, embora todos os alunos tenham utilizado a operação de divisão para resolver pelo menos um dos problemas, menos da metade demonstrou conhecer a técnica de divisão, segundo os critérios por ela adotados, e apenas os que conheciam a técnica estabeleceram alguma relação entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto. Durante o período da pesquisa, nenhum aluno relacionou o resto com os demais termos quando era pedido que ele encontrasse o divisor. Em sua pesquisa, Castela (2005) levava o aluno a refletir sobre as relações entre os valores encontrados e em muitos casos o erro de cálculo se dava pelo fato de o aluno não registrar o zero no quociente quando necessário, ou quando o aluno não identificava que a solução do problema estava em realizar a operação inversa do que estava apresentado no enunciado, além de que muitos alunos que resolveram corretamente a questão contextualizada, não solucionaram da mesma forma a questão formal. Castela (2005) concluiu, que o resto é o termo que os alunos têm maior dificuldade de relacionar com os demais.

Lautert (2005) investigou o efeito de uma intervenção específica sobre o conceito de divisão, relações inversas e resto. Inicialmente foram observadas 206 crianças da cidade de

Recife, no estado de Pernambuco, com idades entre 8 e 15 anos. As crianças foram submetidas a um pré-teste que consistia na resolução de doze problemas de divisão e 100 crianças que apresentaram dificuldades nesse teste foram incluídas no estudo e divididas em dois grupos: um grupo de controle e um grupo experimental. Para ambos os grupos foi aplicado um pré-teste específico que envolvia três tarefas. As crianças do grupo experimental vivenciaram, individualmente, uma intervenção específica de um examinador em problemas de divisão que envolviam: a) compreender as relações inversas entre o número de partes e o tamanho das partes quando o dividendo é mantido constante; b) compreender o efeito do aumento do valor do resto sobre os demais termos; c) analisar procedimentos de resolução corretos e incorretos. Nessa intervenção o examinador fornecia um *feedback* e explicações durante o processo de resolução adotado pela criança.

No final dois pós-testes (um geral e outro específico) foram aplicados aos dois grupos. Esses testes foram analisados em função do desempenho e das justificativas oferecidas pelos alunos em relação à resolução que adotavam.

No pré-teste (geral e específico), os resultados apontaram o mesmo nível de dificuldade para os dois grupos. Ao contrário das crianças do grupo de controle, as crianças do grupo experimental apresentaram um resultado mais favorável no pós-teste do que no pré-teste (geral e específico), tanto no desempenho como eram capazes de apresentar justificativas mais elaboradas para as questões.

Lautert (2005) concluiu que a intervenção auxiliou as crianças a superar as dificuldades com a divisão, sendo capazes de identificar e analisar conceitos necessários para a compreensão da operação de divisão, bem como a desenvolver importantes habilidades para a aprendizagem de conteúdos específicos de matemática.

Em relação ao resto da divisão, a pesquisadora, por meio de sua investigação, percebeu que uma das principais dificuldades reside em a criança compreender que o resto nunca pode ser maior nem igual ao número de partes, pois do contrário, a quantidade remanescente terá que ser redistribuída e um novo resto será produzido.

Apontou, ainda, que vários estudos têm mostrado as dificuldades que as crianças e adolescentes apresentam ao lidar com problemas e operações de divisão e que é necessário realizar estudos que identifiquem as dificuldades apresentadas e tragam formas de intervenção para superar tais dificuldades; entretanto constatou que existem poucos estudos de intervenção voltados para esse tema.

Num diálogo entre e psicologia e a educação matemática a pesquisadora utilizou diversos referenciais teóricos, entre eles citamos a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, diretamente ligado a questões matemáticas num diálogo com a psicologia.

Em seu trabalho, para a obtenção do título de Mestre em Educação, Benvenutti (2008) propõe-se a caracterizar as estratégias de resolução escritas, produzidas por 41 alunos de uma escola pública estadual de Camboriú, no estado de Santa Catarina, com idades entre 10 a 13 anos, que cursam a 5ª série para a solução de problemas de divisão, envolvendo partição e quotição. A autora se apoia na teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud para fundamentar sua pesquisa e buscou a resposta para a seguinte questão: Que estratégias de resolução escritas crianças e adolescentes que cursam a 5ª série apresentam para a solução de problemas de divisão, envolvendo partição e quotição?

Benvenutti (2008) utilizou como instrumento de coleta de dados uma folha com quatro problemas de divisão exata e não exata, sendo dois de partição e dois de quotição, onde os alunos registravam por escrito as estratégias de resolução de cada problema.

Na análise dos dados, a pesquisadora verificou as estratégias de resolução e os erros cometidos e percebeu que a estratégia mais utilizada foi o algoritmo da divisão e que os erros mais frequentes tinham relação com erros de tabuada e de execução do algoritmo. Concluiu que é fundamental que o professor, ao ensinar os algoritmos, explique os seus significados e as relações implícitas entre os termos, além de apresentar uma grande diversidade de situações para promover a construção conceitual, no sentido de que se dê aos alunos a oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que, embora mobilizem a mesma operação, tenham uma estrutura diferente e envolvam novos sentidos para os números.

Ferreira (2012) realizou um estudo de caso, com uma turma do 4º ano, de uma escola municipal da cidade de Gravataí, no estado do Rio Grande do Sul, e pesquisou sobre como ocorre a aprendizagem da operação de divisão, com o objetivo de verificar se, por meio de uma proposta de ensino, onde os alunos puderam vivenciar a operação de divisão em variados contextos e situações, seria possível favorecer a (re)construção de seus esquemas e provocar sua aprendizagem.

A elaboração da sequência didática, composta por dez atividades e a análise dos registros dos alunos apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Verganud. O objetivo dessa pesquisa era entender como as crianças da turma compreendiam a operação de divisão, quais as estratégias que elas utilizavam diante de uma situação onde era necessário dividir e, a partir daí, verificar se a vivência de variados contextos contribuiria para sua aprendizagem, com relação à essa operação.

A pesquisadora concluiu que foi possível provocar a construção dos conceitos envolvidos com a operação de divisão, através da criação de ambientes de trabalho e da variação dos contextos em que a operação era apresentada e que foi possível verificar que houve avanços na aprendizagem dessa operação.

A Biblioteca Digital do Profmat possui em seu acervo algumas dissertações que abordam o tema Congruência e trazem algumas sugestões de atividades para aplicação na educação básica. Na sequência apresentamos a análise de algumas dessas dissertações, defendidas em diferentes instituições do país.

Souza (2015) apresentou uma série de demonstrações e exercícios resolvidos sobre Congruência Modular. A pesquisadora entende que é possível introduzir o estudo de Congruência Modular nas séries finais do Ensino Fundamental. Segundo a autora, a motivação para escolha desse tema é a hipótese de que há a possibilidade de tornar mais simples a resolução de muitos exercícios trabalhados nessa etapa do ensino básico e que são, inclusive, cobrados em provas de admissão às escolas militares e em olimpíadas de matemática para esse nível de escolaridade. Apresenta alguns exemplos de situações-problema e exercícios resolvidos envolvendo o resto de uma divisão para então, em seguida, ser dada a definição de congruência modular. Concluindo, são apresentadas sugestões de exercícios resolvidos para serem trabalhados em sala de aula.

Melo (2014), em sua dissertação, mostrou como funciona o calendário, suas propriedades, curiosidades e toda a matemática envolvida. Baseado na dificuldade dos estudantes em compreender e resolver problemas que envolvem datas, buscou na matemática dos restos uma aplicação para a solução de problemas desse tipo. Explorou a história dos calendários, apresentou uma série de exercícios resolvidos sobre datas e finalizou o trabalho propondo como trabalhar com um software sobre calendário perpétuo, criado utilizando a linguagem de programação Object Pascal.

Sant'Anna (2013) apresentou em sua dissertação o embasamento matemático para introduzir a Teoria das Congruências e mostrou aplicações dessa teoria no cotidiano, como os sistemas de identificação em que se utiliza a congruência para encontrar os dígitos verificadores do CPF, os códigos de barra e o ISBN dos livros, além das mensagens criptografadas.

Sant'Anna (2013) apresentou também uma aplicação que classificou como de caráter motivador para os alunos. Tal aplicação consiste em, dada uma data, propor descobrir em que dia da semana a mesma caiu. Encerrou com algumas questões de concursos de acesso ao nível médio das Escolas Militares sugerindo que a resolução seja feita utilizando congruência. Ele classificou as atividades sugeridas como sendo uma oportunidade de mostrar a relevância da Teoria das Congruências nas séries finais do ensino fundamental.

Os trabalhos pesquisados mostram a relevância do tema, suas dificuldades e sugestões de questões. Ou seja, que os alunos têm dificuldades com a divisão Euclidiana e que é importante realizar trabalhos que desenvolvam propostas para lidar com esse tema de maneira mais aprofundada.

No nosso trabalho levamos em conta esses direcionamentos e nos inspiramos em algumas sugestões de questões para elaborar a nossa sequência didática, onde propomos a retomada e o aprofundamento da divisão Euclidiana através de uma abordagem mais abrangente do que aquela tradicionalmente apresentada nos livros didáticos para o ensino fundamental, apontando situações do dia a dia nas quais o resto da divisão é o componente relevante.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Os PCN apontam a importância que a matemática deve possuir para os alunos. A proposta do documento é apresentar aos professores quais são as competências e habilidades que os alunos devem desenvolver. As atividades realizadas em sala de aula devem ter a preocupação com o caráter investigativo, capaz de proporcionar aos alunos a aprendizagem qualitativa e com isso evitar a memorização de métodos e algoritmos.

Nosso referencial teórico aponta na mesma direção e nesta seção apresentamos este embasamento com um estudo sobre os cenários de investigação de Ole Skovsmose e sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval que são a base teórica da nossa pesquisa.

4.1 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

Notamos que as aulas de matemática, em geral, caracterizam-se pelo momento em que o professor apresenta o conteúdo e pelo momento em que os alunos resolvem exercícios. Segundo Skovsmose (2008), as práticas em sala de aula estão entre dois paradigmas: o paradigma do exercício e o paradigma dos cenários para investigação.

A premissa central do paradigma do exercício é a de que existe uma, e somente uma resposta certa, pois, geralmente, são exercícios de livros didáticos, que são elaborados por um profissional que está fora da sala de aula, logo, são respondidos pelo aluno sem muitos questionamentos. Contrapondo-se ao paradigma do exercício temos os cenários para investigação, que são momentos construídos na sala de aula para dar suporte a um trabalho investigativo e, no qual, os estudantes são convidados a formular questões, buscar explicações para elas e refletir sobre os resultados obtidos.

Segundo o autor:

> Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado por seus “Sim o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto?” do professor representa um desafio, e os “Sim, por que isto...” dos alunos indica que eles estão encarando o desafio e que estão em busca de explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. (SKOVSMOSE, 2008, p. 21).

Skovsmose (2008), ao propor cenários para investigação nas aulas de matemática, o faz com a intenção de se contrapor a situações de aprendizagem em que o professor é o centro das atenções, buscando um ambiente que oferece recursos para fazer investigações.

O autor apresenta uma matriz com seis diferentes ambientes de aprendizagem combinando três tipos de referências e a distinção entre os dois paradigmas de práticas em sala de aula.

Quadro 3 - Ambientes de Aprendizagem segundo Skovsmose

		Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura		(1)	(2)
Referências à semi-realidade		(3)	(4)
Referências à realidade		(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2008, p. 23)

Segundo a matriz apresentada, o professor, ao considerar os cenários para investigação como estratégia pedagógica, o faz a partir de três referências, segundo as quais o trabalho investigativo em sala de aula pode ser conduzido. A distinção entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação está no modo como a aula será conduzida e em como os alunos vão responder ao convite do professor.

A primeira referência caracteriza-se pela preocupação com a matemática pura e resume-se a processos puramente mecânicos nos quais o estudante se limita a reproduzir o que já foi mostrado a ele. O objetivo das questões no cenário (1) é chegar à resposta matematicamente correta. Este tipo de exercício só permite ao aluno uma melhor memorização do processo. Uma lista desses exercícios, buscam que o aluno “decore” as etapas da resolução. O aluno assimila as regras e técnicas, porém são exercícios limitados, que não propõem qualquer tipo de questionamento sobre o porquê de tais regras, e seus respectivos significados. No cenário (2) altera a estratégia de resolução, entrando em um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, ou seja, o aluno é convidado pelo professor a formular questões e a procurar justificativas imaginando possíveis mudanças no exercício e suas consequências, o aluno passa a entender melhor o porquê de tais definições.

A segunda referência, caracterizada pela semi-realidade, identifica-se com situações de aprendizagem relacionadas com ambientes contextualizados, mas de forma artificial. Uma apresentação destes exercícios são os que simulam uma situação real, pois ao pretender desvincular-se do exercício propriamente dito, busca-se problematizar situações. Entretanto o que se percebe é que estes exercícios foram previamente elaborados pelo autor de um livro ou muitas vezes, pelo próprio professor. Segundo Skovsmose (2008, p. 24) “há uma referência: a semi-realidade imaginada pelo autor do problema”, constituindo o ambiente tipo (3).

O autor diz ainda que:

> Resolver exercícios com referência a uma semi-realidade é uma competência muito complexa e baseada num contrato bem especificado entre professor e alunos. Alguns dos princípios desse acordo são os seguintes: a semi-realidade é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é importante para a resolução do exercício; mais informações são totalmente irrelevantes; o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo. (SKOVSMOSE 2008, p. 24 - 25)

Fica claro que no ambiente tipo (3) somente as quantidades mensuradas são relevantes e que ao iniciar o exercício já partimos do pressuposto de que há somente uma resposta correta. Ao trabalharmos com a semi-realidade, é interessante perceber que tais situações apresentam características diferentes de situações que utilizam como referência a realidade.

Para Skovsmose (2008, p. 31), “uma boa parte da educação matemática está alternando os ambientes (1) e (3)”, porém a necessidade de um tipo de abordagem com referência à realidade se fundamenta nas palavras de Skovsmose (2008, p. 38) “Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode operar em nossa sociedade. ”

Quando o ambiente de aprendizagem constitui um cenário para investigação e a abordagem for relacionada à semi-realidade se estabelece na referência tipo (4), ou seja, essa referência faz um convite para que os alunos explorem e sugiram explicações. Segundo Skovsmose (2008, p. 26), “como o ambiente (3), o ambiente (4) também (...) é um convite para que os alunos façam explorações e explicações”.

Cabe lembrar que “o cenário somente se torna um cenário para investigação se os alunos aceitarem o convite” (SKOVSMOSE, 2008, p. 21). Portanto, a atividade é apenas um convite e quem definirá em qual paradigma estará, exercício ou cenário para investigação, serão os alunos e a professora. Os alunos, devido ao fato de poderem aceitar ou não o convite, e a professora pode oferecer ou não recursos para a investigação, dependendo do encaminhamento dado durante a realização da atividade.

Na terceira referência, alunos e professor investigam situações do mundo real, podendo interagir com outras áreas do conhecimento. Utilizando como referência a realidade estaremos em contato com exercícios ou situações familiares, ou seja, algo que o aluno verá imediatamente como utilizar em sua vida, algo cujo resultado é a resposta de uma situação real. Ainda que constituindo o paradigma do exercício, a referência tipo (5), pode levar o aluno a perceber a matemática como parte da sua realidade.

Segundo essa abordagem, os dados utilizados vêm da vida real, oferecendo uma condição diferente para a comunicação entre professor e alunos, oportunizando a aprendizagem com mais clareza das definições e conceitos matemáticos. Quanto mais fiel for a referência à realidade, constitui o tipo (6), observando-se a maneira como a matemática opera nestas situações, instituindo-se um convite para que os alunos façam explorações e explicações.

As práticas em sala de aula baseadas em exercícios se contrapõem às atividades investigativas. Entendemos por atividades investigativas o processo no qual o aluno é despertado a questionamentos do tipo: *"o que acontece se...?"*, convidando-o a descobrir, formular questões e procurar respostas. Através destes questionamentos a sala de aula de matemática transforma-se em um ambiente de aprendizagem em que o aluno é levado a um processo de exploração e explicação (SKOVSMOSE, 2008).

Este tipo de ambiente de aprendizagem prevê o estudo através de questionamentos. O professor estará o tempo todo indagando seus alunos. Percebe-se que logo os próprios alunos começam a se questionar sobre o assunto estudado, instituindo a partir de então um novo ambiente de aprendizagem, agora com uma certa reflexão sobre o que está sendo apresentado.

Segundo Skovsmose (2008, p. 21),

> Chamo de cenário para investigação um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação. (...) Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. (...) Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem.

Quando se propõe uma prática baseada em cenários para investigação, deseja-se que os alunos deem significado para o que estão aprendendo. Essas referências constituem diferentes ambientes de aprendizagem, e a busca de um caminho entre esses diferentes ambientes pode proporcionar novos recursos para que os alunos procedam e reflitam de forma crítica, ao mesmo tempo em que têm contato com os principais conceitos matemáticos.

O autor coloca, também, que os paradigmas do exercício e dos cenários para investigação simbolizam um terreno imenso de possibilidades e não sugere que um ambiente de aprendizagem particular represente ser o melhor para a educação matemática. Ele sustenta que a educação deve mover-se entre os diferentes ambientes tal como apresentado na matriz e que essa movimentação pode ajudar a atribuir novos significados para as atividades desenvolvidas. Este trabalho não tem como objetivo valorizar um único ambiente. Segundo Skovsmose (2008), a aprendizagem dos alunos se dá a partir do movimento entre os diferentes ambientes de aprendizagem e,

> Nunca ousaria afirmar que o abandono do paradigma do exercício com o objetivo de explorar cenários para investigação forneceria uma resposta para essas questões. Nem afirmaria que é suficiente construir uma educação matemática baseada somente em referências à vida real. Minha expectativa é de que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa proporcionar novos recursos para levar os alunos a agir e a refletir.” (SKOVSMOSE, 2008, p. 39)

Ressalta ainda, a importância de alunos e professores, juntos, encontrarem o melhor caminho entre os ambientes de aprendizagem.

Para Skovsmose (2000), a resolução de exercícios também é importante para a aprendizagem de Matemática, porém ela não deve ser limitada à reprodução de algoritmos e aplicação de fórmulas e sim proporcionar desafios aos estudantes. Segundo o autor, “alguns exercícios podem provocar atividades genuínas de investigações matemáticas. Propor problemas significa um passo adiante em direção aos cenários para investigação. ” (Skovsmose, 2000, p. 81)

4.2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A divisão Euclidiana admite diferentes formas de aplicação nas mais diversas situações e isso nos motivou a utilizar também, como referencial teórico, a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, que afirma que os alunos efetivamente compreendem um conteúdo quando conseguem modificar os registros em que os mesmos se apresentam. Segundo Duval (2003), não se pode adquirir conhecimento matemático sem que se faça uso de uma representação e não se pode ter compreensão se não distinguimos um objeto de sua representação.

A Teoria de Raymond Duval trata do desenvolvimento do funcionamento do pensamento, segundo o qual, um aluno para aprender um conceito precisa fazer a distinção entre o objeto e a sua representação. É através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano. Dessa forma temos que

> A teoria dos registros de representação de Raymond Duval tem-se mostrado importante instrumento de pesquisa, no estudo da complexidade da aprendizagem matemática. Na perspectiva de Duval, uma análise do conhecimento matemático é, essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações semióticas referentes a esse conhecimento. (MACHADO, 2003, p. 8)

A afirmação acima indica que o estudo da semiótica é relevante quando queremos compreender os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de determinado conteúdo. Para Duval (2011), o processo de aprendizagem na disciplina de Matemática não pode ser considerado pelo professor como o mesmo disponível em outras disciplinas. A Matemática é uma ciência que pressupõe como pré-requisito uma atividade cognitiva diferente de outras áreas do conhecimento.

A ideia de representação é uma das noções centrais ao se estudar os fenômenos relativos à aquisição do conhecimento pelos alunos. A forma como um aluno aprende está intimamente ligada às formas de representação que ele faz sobre determinado conteúdo.

Segundo Duval (2011), ao fazer uma análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas representações fundamentais do raciocínio, há três fatos que estão interligados: o primeiro é que há uma diversidade nos registros de representação semiótica; o segundo é que existe uma diferenciação entre a forma e o conteúdo de uma representação semiótica e o terceiro é que deve existir uma coordenação entre os diferentes registros nas representações semióticas. Esses três fatos fazem parte do estudo relativo à semiósis.

De acordo com Duval (2003), a compreensão do educando de uma determinada situação-problema ou um determinado conhecimento requer dois momentos: Semiósis e noésis, não existindo noésis sem semiósis. Ele chama semiósis a apresentação ou a produção de uma representação semiótica por meio de signos e noésis a apreensão conceitual de um objeto. Assim, a semiósis é imprescindível para a noésis. A aprendizagem matemática ocorre à medida que os registros de representação são coordenados.

O autor ainda reforça que não devemos confundir um objeto e sua representação, uma vez que realizando trabalhos em mais de um sistema de representação, é implícito o entendimento de que nenhuma das representações consideradas é propriamente o objeto matemático, mas apenas estamos diante de um representante, um ente que está "no lugar dele" com a finalidade de permitir acesso aos objetos matemáticos. Conforme Duval,

> A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque *não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.* Ora, na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente. (DUVAL, 2003, p. 21, grifo do autor)

Duval (2011) enfatiza a possibilidade de trânsito entre diferentes tipos de registros, pois para o autor

> O que importa primeiro nas representações semióticas é a potencialidade intrínseca de serem facilmente transformadas em outras representações semióticas. [...] A questão da necessidade de representações semióticas no conhecimento matemático abrange dois problemas muito diferentes segundo o aspecto que consideramos, seja aquele de "referência a um objeto", seja o de "transformação em outras representações semióticas".(DUVAL, 2011, p. 40)

Para Duval (2003), a aprendizagem da matemática constitui um campo de estudo privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais, como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de enunciados e recorre à utilização de vários sistemas de representação.

Segundo o autor não há conhecimento matemático que possa ser adquirido sem o auxílio de uma representação. Não se pode ter compreensão em matemática se nós não distinguimos um objeto de sua representação, visto que um mesmo objeto matemático pode ser representado através de diferentes representações. O autor afirma que "O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas" Duval (2003, p. 21).

A matemática, para Duval (2003) é uma área do conhecimento que possui como característica a diversidade de registros e, frequentemente, o seu ensino não leva em conta essa diversidade, provocando dificuldades de mobilização entre as diferentes representações de um objeto matemático e, consequentemente, uma menor apreensão do mesmo, o que pode reduzir sua aprendizagem a um processo mecânico. Segundo o autor,

> Numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. (...) A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. (DUVAL, 2003, p. 21)

Isso nos faz acreditar que a compreensão e o aprofundamento do conceito de divisão Euclidiana passam necessariamente pela articulação de seus registros de representação. Para representar o objeto matemático discutido nesse trabalho, usamos situações-problema, buscando relacionar as conversões entre essas formas de registro. Ainda segundo o autor,

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro. (DUVAL, 2003, p. 14-15)

Dessa forma, nas atividades cognitivas envolvidas no ensino e na aprendizagem de matemática, cada um dos registros desenvolvidos pode passar para outra representação como ferramenta para a compreensão do conceito matemático.

A mobilização de registros envolve dois tipos diferentes de transformação dos mesmos: os tratamentos, que são operações internas a um mesmo tipo de registro e estão diretamente relacionadas à forma e não ao conteúdo do objeto matemático em estudo e as conversões, que são a passagem de um tipo de registro a outro, a mudança da forma pela qual determinado registro é representado, é a modificação de uma representação para outra, em um outro registro, porém conservando o mesmo objeto matemático. Dessa forma,

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; (...) as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica em uma equação à sua representação gráfica. Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registo no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. (...) Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2003, p. 16)

Para analisar as dificuldades de aprendizagem de matemática, Duval (2009) acredita ser prioritário o estudo da conversão de representações e não os tratamentos, visto que se faz necessário que o estudante saiba transitar entre os diversos tipos de registros. Segundo o autor, quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto.

Nesse contexto, entende-se que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática está atrelado à capacidade de o sujeito utilizar os diversos registros de representação semiótica sobre um determinado objeto matemático, cujo papel do professor é ser um mediador.

Dessa forma, as representações semióticas são plenamente aplicáveis e auxiliam o professor na didática da matemática, pois fundamentam o processo de ensino e aprendizagem. O que se espera é que o aluno, ao ler determinada situação-problema, vislumbre o resto da operação de divisão como o resultado procurado. Em outras palavras, que aquele resultado tenha significado para ele e que não seja apenas um número que é a sobra do resultado de uma operação de divisão.

Nossa experiência docente tem apontado que a passagem de um registro de representação a outro, em algumas situações, ocupa um papel de fragilidade perante o aluno, na mobilização de conteúdos matemáticos e também no reconhecimento do objeto matemático que está sendo trabalhado.

A teoria de Duval (2003) possibilita ao professor investigar o funcionamento das dificuldades apresentadas pelos alunos e saber em que problemas esbarram quando não conseguem resolver determinadas tarefas. Muitas vezes os alunos conseguem trabalhar com facilidade na resolução de problemas que vão da língua natural para o registro numérico, porém, revelam dificuldades em solucionar problemas que solicitam o caminho inverso.

Com base nessas condições, é possível considerar que a aprendizagem está associada ao fato de o aluno reconhecer o mesmo objeto matemático em diferentes representações, e que esse reconhecimento é responsável pelo sucesso dos alunos nas mobilizações de conteúdos matemáticos em diferentes situações.

5. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos a metodologia que adotamos para a elaboração deste trabalho, acompanhada dos procedimentos utilizados durante a realização da pesquisa. Inicialmente será apresentado o campo da pesquisa para situar o leitor, além do modo como as aulas foram conduzidas e a elaboração da sequência didática seguida de uma explicação mais detalhada de cada uma das respectivas atividades e seus objetivos.

Considerando o tema que pretendemos investigar e quanto aos objetivos a que se propõe esta pesquisa, optamos por uma abordagem do tipo qualitativa/exploratória e, quanto aos procedimentos técnicos, fizemos uso do estudo de caso. Os dados reunidos tiveram caráter descritivo, sendo coletados diretamente no contexto da sala de aula através do contato direto da pesquisadora com os alunos.

5.1 CAMPO DE PESQUISA E INSTRUMENTOS UTILIZADOS

A implementação das atividades aconteceu na turma do 7º Ano B da Escola Municipal de Ensino Fundamental Attílio Tosin, localizada em Garibaldi, na serra gaúcha. A turma era composta por 17 alunos com idades entre 12 e 14 anos. Todo o trabalho foi conduzido pela mestranda que, além de ser a pesquisadora, também era a professora titular de matemática dessa turma. Ao todo foram 8 encontros que aconteceram entre os dias 24/09/2015 e 02/10/2015, totalizando 14 aulas de 50 minutos cada aula. A pesquisa foi realizada durante os períodos normais de aula, possibilitando a participação de toda a turma. Para a análise da produção dos alunos, os mesmos foram identificados aleatoriamente por um número entre 1 e 24.

As atividades foram desenvolvidas pelos alunos em pequenos grupos, como forma de promover a interação entre a turma, favorecendo o desenvolvimento oral e escrito das argumentações, explorando as habilidades de elaboração de hipóteses, descrição, observação e questionamento. Além disso, o que um aluno percebe de uma determinada maneira pode ser percebido por outro de forma diferente, permitindo a interação e a troca de ideias, favorecendo a exploração e a argumentação, além da socialização de procedimentos encontrados para solucionar uma questão e a troca de informações. Embora o trabalho tenha acontecido em pequenos grupos, cada aluno preencheu individualmente sua folha de atividades, já que muitas respostas deveriam ser dissertativas e tinham o objetivo de levar o aluno a expressar, na linguagem escrita, os procedimentos encontrados para solucionar a questão. A formação dos grupos não seguiu nenhum critério dado pela professora, os alunos se agruparam por afinidade segundo suas escolhas. A professora teve o cuidado constante de observar o envolvimento e a participação de todos os grupos.

Em todos os encontros, as atividades foram entregues uma de cada vez. Os alunos discutiam as possibilidades e estratégias, anotavam suas conclusões na folha impressa e entregavam-na para a professora.

Depois da resolução em pequenos grupos de cada folha de atividades, era realizada a conclusão da tarefa no quadro com a participação oral de todos ou socialização oral entre toda a turma. Os alunos eram convidados a explicar para a turma como resolveram cada questão e a professora conduziu os momentos de discussão coletiva de forma a sistematizar o conhecimento produzido.

Como instrumento de coleta de dados foi utilizada as produções dos alunos nas atividades propostas, os registros da professora e a gravação das aulas, já que todas as aulas foram gravadas para a análise *a posteriori*. Na primeira apresentamos as dinâmicas da pesquisa.

As colaborações e intervenções feitas pela professora ocorreram durante as aulas e sempre que solicitada pelos alunos, buscando ter o cuidado de não apresentar a resposta esperada, mas de provocar os alunos através de questionamentos para que chegassem às próprias conclusões. A professora sempre procurou encaminhar a atividade por meio de perguntas que ajudassem o aluno a perceber caminhos que o levassem a entender a situação daquele problema.

5.2 ELABORAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A pesquisa foi composta por atividades cujo foco é a investigação matemática, nas quais os alunos foram convidados a resolver as atividades propostas. As investigações levaram os alunos a criar, testar e justificar suas resoluções.

Após o estudo e análise do que já havia sido escrito sobre o assunto em outras dissertações, tese e análise dos livros didáticos, passamos para o planejamento da sequência didática, desde a escolha da abordagem didática até a elaboração das atividades.

Segundo Skovsmose (2000), a prática de exercícios também é importante para a aprendizagem de Matemática, porém ela não deve ser limitada à reprodução de algoritmos e aplicação de fórmulas e sim proporcionar desafios aos estudantes, por isso, quanto à abordagem didática, optou-se por propor situações-problema. Sabemos que um dos objetivos no ensino de matemática é resolver problemas. Isso pode ser alcançado por meio do desenvolvimento, na escola, de atividades matemáticas significativas, que impliquem na construção de estratégias e procedimentos de resolução.

Pensamos em propor situações-problema com o objetivo de analisar como o aluno utiliza o resto da divisão de dois números naturais na resolução dos problemas propostos.

Consideramos que atividades que envolvem situações-problema, além de estimular o raciocínio matemático e de instigar as diferentes possiblidades de resolução, incentivam o aluno quanto aos desafios e persistência diante das dificuldades. Segundo Skovsmose (2008), referindo-se a uma observação de sala de aula, pretendemos criar um ambiente que se contrapõe às aulas de matemática tradicionais que variam entre:

> a aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposições até aquela em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios(...) Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. (SKOVSMOSE, 2008, p. 15)

Na maioria das atividades propostas os alunos devem realizar a conversão dos problemas escritos em língua natural para a linguagem matemática para depois realizar o tratamento da operação. De acordo com Duval (2003, p. 22),

> [...] a compreensão matemática está ligada ao fato de se dispor de ao menos dois registros de representação diferentes. Essa a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. [Além do que, a conversão entre tais registros é fundamental porque] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento [em um mesmo registro, porém], é também explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto [...Porque] duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm, de forma alguma, o mesmo conteúdo”

A maioria das atividades foi criada especialmente para a pesquisa e outras adaptadas de questões da OBMEP e inspiradas em atividades encontradas nas dissertações de mestrado que foram analisadas. Buscou-se utilizar, nas atividades propostas, uma linguagem que se aproximasse, ao máximo possível, da linguagem verbal usada pelos alunos. Além disso, as situações-problema foram pensadas de modo que fossem familiares ao cotidiano do aluno.

Considerando a importância dada às conversões dos registros de representação de um objeto matemático e com base na análise de livros didáticos é que elaboramos essa sequência didática e, a partir da análise desses resultados, buscaremos responder à questão norteadora dessa pesquisa.

Um dos objetivos das atividades desenvolvidas foi estimular os alunos para que percebessem que a divisão Euclidiana pode ser uma estratégia para a resolução de problemas práticos.

6. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nesta seção exibimos a sequência de atividades comentada e a descrição dos objetivos propostos em cada uma. Queremos salientar que antes mesmo de iniciar a aplicação da nossa proposta didática tínhamos todos os encontros previamente organizados. Depois de cada aula, analisamos as resoluções das atividades e as falas e escritas dos alunos, identificando detalhes de maneira a reformular os próximos encontros. Concordamos com Skovsmose (2008, p. 37) quando afirma que “qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente”

As atividades foram criadas com o objetivo de proporcionar uma experiência diferente aos alunos, na qual eles pudessem perceber que o resto de uma divisão Euclidiana pode ser usado na resolução de alguns problemas.

Segundo Skovsmose (2008), a semi-realidade é utilizada quando apresentamos situações fictícias, com dados criados pelo professor sendo que, e a sequência didática que apresentamos, aborda, na maioria das situações-problema propostos, ambientes de semi-realidade.

Era esperado que os alunos desenvolvessem estratégias para a resolução dos problemas propostos e trabalhassem em cooperação com seus colegas, utilizando-se da criatividade, elaboração, comparação e validação de hipóteses com a finalidade de solucionar as atividades, além de evidenciar os procedimentos utilizados na solução dos exercícios propostos utilizando a linguagem matemática.

Durante a implementação da sequência didática percebemos que algumas atividades propostas aos alunos poderiam ser revisadas e ou ampliadas de modo que a sequência revisada das atividades propostas encontra-se no Apêndice desse trabalho.

Atividades da Folha 1

O objetivo dessa primeira atividade foi disparar uma discussão/reflexão sobre o conceito de divisão por meio de uma desestabilização gerada por um problema prático, apresentando três soluções distintas. No item a) convidamos o aluno a refletir sobre as soluções fornecidas; no item b) solicitamos uma análise das soluções; no item c) solicitamos uma solução própria para o problema e no item d) a análise e a comparação de sua proposta com as fornecidas.

Quadro 4 - Atividades da Folha 1

Folha 1

A professora Queridinha tem duas turmas na EMEF Attílio Tosin.

Na turma A, ela levou 225 balas para serem divididas igualmente entre os 8 alunos dessa turma.

Logo os alunos se mobilizaram para ajudar a fazer a divisão e surgiram várias propostas diferentes:

- Joãozinho propôs que cada aluno recebesse 27 balas;
- Cláudia sugeriu que cada aluno recebesse 26 balas;
- Fernanda propôs que cada aluno recebesse 25 balas.

Responda:

a) As propostas acima dividem as balas em partes iguais entre os 8 alunos da turma A?

____

____

b) Quantas balas sobrarão na divisão feita por:

Joãozinho: Sobrarão____ balas.	Cláudia: Sobrarão____ balas.	Fernanda: Sobrarão____ balas.

c) Qual a sua proposta de divisão das 225 balas entre os 8 alunos dessa turma?

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

Fonte: Elaborado pela autora

Sabemos que não é usual aparecerem três soluções diferentes em um exercício e isso poderia causar estranheza nos alunos, pois provavelmente não foi um problema semelhante a algum já resolvido. Apostamos que confrontar um conceito já apropriado pelos alunos com várias alternativas de resposta poderia levá-los questionar o que aprenderam, no sentido de (re)avaliar esse conceito e argumentar sobre suas respostas.

Atividades da Folha 2

A segunda folha de atividades foi proposta no intuito de verificar o que os alunos fizeram anteriormente. O fato de se tratar de um problema semelhante ao anterior teve como objetivo fazer com que os alunos pudessem observar melhor os resultados obtidos e atentar para detalhes que possam não ter sido identificados na primeira atividade, já que agora não estariam mais sob o impacto da novidade. Também tínhamos como objetivo que os alunos aprimorassem o processo da escrita da justificativa das respostas utilizando a linguagem matemática.

Quadro 5 - Atividades da Folha 2

Folha 2

Na turma B a professora Queridinha levou 307 chocolates para serem divididos igualmente entre os 12 alunos dessa turma.

Como na outra classe, também surgiram várias propostas para a divisão:

- Miguel sugeriu que cada aluno recebesse 24 chocolates;
- Paulo propôs que cada aluno recebesse 22 chocolates;
- Ana sugeriu que cada aluno recebesse 23 chocolates.

a) As propostas acima dividem os chocolates em partes iguais entre os 12 alunos da turma B?

____

____

b) Quantos chocolates sobrarão na divisão feita por:

Miguel:	Paulo:	Ana:
Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.

c) Qual a sua proposta para a divisão dos 307 chocolates entre os 12 alunos dessa turma?

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

Atividades da Folha 3

O objetivo desta folha de atividades foi iniciar o processo de retomada da escrita: dividendo igual à soma do resto com o produto do divisor pelo quociente, por meio da escrita das diferentes propostas de divisão das balas e dos chocolates que foram trabalhadas nas duas primeiras atividades. Esperávamos que os alunos respondessem às questões propostas evidenciando a escrita da expressão numérica em cada caso e percebessem que essa escrita representa uma situação que está redigida em linguagem matemática.

Quadro 6 - Atividades da Folha 3

Folha 3

Podemos escrever a proposta de Miguel como uma expressão numérica. Veja que havia 307 chocolates para serem divididos entre os 12 alunos da turma e ele sugeriu que cada um deveria ganhar 24 chocolates e ainda sobrariam 19 chocolates.

Teremos então a expressão: $307 = 12 \times 24 + 19$

Agora escreva as demais sugestões em forma de expressão numérica:

Propostas da turma A:

Joãozinho:____

Cláudia:____

Fernanda:____

Sua proposta:____

Propostas da turma B:

Miguel:____

Paulo:____

Ana :____

Sua proposta: ____

Em quais propostas temos o maior número de balas ou chocolates por aluno? O que acontece com as respectivas sobras?

____

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

Esta atividade é importante por trabalhar diretamente com a expressão $a = b \, . q + r$, onde *(a)* é o dividendo, *(b)* é o divisor, *(q)* é o quociente e *(r)* é o resto

Propusemos essa sequência de atividades baseados nos conceitos de Duval:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro. Essa mudança de registro facilita a aquisição de um conceito. Ao lidar com

> as várias representações de um mesmo objeto matemático, o aluno passa a ter mais segurança na compreensão e na resolução de problemas. (DUVAL, 2003, p. 14)

Duval (2009) relaciona a utilização das representações semióticas com as atividades cognitivas na matemática. Segundo ele, não se pode ter compreensão em matemática se não distinguimos um objeto de sua representação, visto que um mesmo objeto pode ser representado de diversas formas. Além disso, ele afirma que a única possibilidade de evitar que isso ocorra é de dispor de, ao menos, dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto.

O fato de confundir o objeto e sua representação poderá trazer a seguinte consequência:

> Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem. (DUVAL, 2009, p. 14)

No caso das expressões numéricas, um exemplo onde pode ocorrer confusão entre representação e objeto é quando o aluno, mesmo sabendo realizar as operações aritméticas que solucionam um problema, não consegue traduzir essa situação-problema para uma expressão numérica. Nesse caso poderá haver a possibilidade de o aluno compreender as expressões somente na sua representação numérica e não como uma aplicação a situações-problema.

Atividades da Folha 4

Como pudemos perceber nos comentários sobre os livros didáticos, depois de ingressar nos anos finais do ensino fundamental, dificilmente o aluno faz operações nas quais é pedido o resto da divisão de dois números naturais, por isso a próxima atividade sugerida objetivou retomar as relações entre dividendo, divisor, quociente e resto de uma divisão.

A primeira parte da Folha 4 resume o conceito de divisão entre dois números naturais, trabalhada nas atividades anteriores, como aquela em que temos o maior quociente e o menor resto possível, além de apresentar formalmente a escrita na forma $a = b.q + r$, identificando os termos: *a* (dividendo), *b* (divisor), *q* (quociente) e *r* (resto), com $r < b$, além de relembrar o que os alunos conhecem como a "prova real" da operação de divisão de dois números naturais.

Na sequência os alunos devem calcular uma divisão e expressá-la na forma solicitada. Finalizando, pede-se que, observando o que eles sugeriram nas Folhas 1 e 2, escrevam as propostas de divisão na forma $a = b \,.\, q + r$, identificando o dividendo, o divisor, o quociente e o resto em cada caso.

Quadro 7 - Atividades da Folha 4

Folha 4

A "melhor" divisão nos garantiu o ***maior número*** de balas ou chocolates por aluno e ***gerou a menor sobra possível***. Essa é a divisão utilizada nos números naturais onde o ***resto deve ser o menor possível.***

Assim, quando dividimos o número natural *a* (dividendo), por um número *b* (divisor) não nulo, obtemos um quociente (*q*) e um resto (*r*) que é sempre menor que o divisor (*b*) ou é zero, ou seja, $a=b.q+r$ e $r = 0$ ou $r < b$.
Então, no exemplo $225 = 8 \times 28 + 1$, temos que a = 225, b = 8, q = 28 e r = 1 < 8
Utilizando o algoritmo conhecido:

$$\begin{array}{rr|l} \text{Dividendo} \Leftarrow & 225 & 8 \Rightarrow \text{Divisor} \\ & -16 & 28 \Rightarrow \text{Quociente} \\ & -65 & \\ & 64 & \\ & 01 \Rightarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Observe que também podemos verificar se a divisão está correta, basta ver se
$8 \times 28 + 1 = 225$:

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \\ +1 \\ \hline 225 \end{array}$$

1) Faça a divisão de 377 por 3 e escreva-o na forma a = b.q + r, sendo a = 377 e b = 3:

2) Na sua proposta de divisão das balas e dos chocolates indique o dividendo, o divisor, o quociente e o resto e escreva na forma $a = b.q + r$:

Fonte: Elaborado pela autora

Atividades da Folha 5

Quadro 8 - Atividades da Folha 5

Folha 5

1) Faça os cálculos abaixo e nomeie-os conforme os termos da divisão:

a) $29 \div 3 =$

b) $108 \div 4 =$

c) $580 \div 14 =$

d) $341 \div 13 =$

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo dessa folha de atividades era que os alunos utilizassem o algoritmo da divisão para calcular as divisões solicitadas e escrevessem o resultado identificando cada termo da divisão.

Atividades da Folha 6

Quadro 9 - Atividades da Folha 6

Folha 6

Veja que se quiséssemos dividir 84 canetas igualmente entre 6 pessoas, de modo que cada pessoa recebesse o maior número de canetas possível, teríamos:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 14 \\ \cline{1-1} 24 & \\ -24 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 84 : 6 = 14$$

Dessa forma cada pessoa receberá 14 canetas.

Esta é uma divisão em que o resto é zero o que garante que 84 é um múltiplo de 6.

Para verificar se a divisão está correta, multiplicamos 6 por 14 e obtemos 84 o que seria o mesmo que contar o total de canetas após recolher as 14 canetas de cada uma das 6 pessoas.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\, 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

Responda:

1) Por que 14 é o maior número de canetas possível?

____

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

A atividade da Folha 6 apresentou uma situação de divisão exata e tinha como objetivo levar o aluno a perceber que se o quociente for um valor menor do que o explicitado, poderemos ter um resto igual ou maior que o divisor, contrariando o Teorema da Divisão Euclidiana. Esperou-se também que o aluno observasse o algoritmo dado não como uma ação mecânica, mas observando e atribuindo significado a cada elemento dessa operação tendo que justificar a resposta.

Atividades da Folha 7

Quadro 10 - Atividades da Folha 7

Folha 7

1) Considere o número dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$.

Determine o quociente e o resto, de $5 \times 7 \times 3 + 4$, na divisão por:

a) 5

Quociente:____

Resto:____

____

b) 7

Quociente:____

Resto:____

____

c) 3

Quociente:____

Resto:____

____

d) Que número é dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$?

____

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo dos dois primeiros itens dessa folha de atividades foi fazer com que o aluno percebesse que não era necessário resolver a expressão numérica para chegar ao resultado, ele poderia observar o que cada elemento dessa expressão representa para tirar as suas próprias conclusões.

No terceiro item esperávamos que o aluno percebesse que era necessário atentar para o valor que é somado na expressão, pois ele representa o resto da operação de divisão e, nesse caso, é maior que o divisor, sendo necessário, portanto, aumentar o quociente e verificar o valor do novo resto. Por fim, que o aluno escrevesse que número natural era apresentado pela expressão dada.

Atividades da Folha 8

Quadro 11 - Atividades da Folha 8

Folha 8

Observe as operações abaixo e identifique quais estão corretas e quais não estão corretas.

a) $327 = 4 \times 80 + 7$

$$\begin{array}{r|l} 327 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 80 \\ \cline{1-1} 007 & \end{array}$$

b) $959 = 9 \ \times 106 + 05$

$$\begin{array}{r|l} 959 & 9 \\ \cline{2-2} -9 & 106 \\ \cline{1-1} 059 & \\ -54 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

c) $428 = 6 \ \times 71 + 02$

$$\begin{array}{r|l} 428 & 6 \\ \cline{2-2} -42 & 71 \\ \cline{1-1} 08 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

d) $125 = 2 \times 61 + 3$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 61 \\ \cline{1-1} 05 & \\ -2 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Responda:

e) O que você precisou para “consertar” o cálculo das divisões que não estavam corretas?

Fonte: Elaborado pela autora

Nas atividades dessa folha foi dado a escrita de um número em forma de expressão numérica e também foi feito o desenvolvimento do algoritmo da divisão. Com a atividade do Quadro 11 esperávamos que os alunos percebessem que uma expressão numérica da forma $a = b.q + r$ não necessariamente representa a escrita do resultado da operação de divisão de a por b. Esperávamos que eles observassem que, no desenvolvimento do algoritmo da divisão, o valor do quociente não estava correto, pois todos os restos eram maiores que o divisor e que seria necessário corrigir o quociente da operação.

Concordamos com Duval quando afirma que:

> Os tipos de conexões operacionais que nós esperamos que sejam feitas na aprendizagem não é entre matemática dedutiva e empírica, provas e construções, nem

> entre estruturas matemáticas e estruturas simbólicas, mas entre os diferentes registros de representações semióticas. Essas conexões entre registros compõem a arquitetura cognitiva pela qual os estudantes podem reconhecer o mesmo objeto por meio de diferentes representações. (DUVAL,1999, p. 6)

Salienta-se e entende-se que é muito importante para o aprendizado dos alunos que um mesmo objeto possa ser tratado de diferentes pontos de vista. Para Duval (2003), os objetos matemáticos precisam de diferentes representações para ficarem acessíveis, pois eles, em geral, não são diretamente perceptíveis ou observáveis. Concordamos que os objetos matemáticos somente são acessíveis por meio de sua representação.

Atividades da Folha 9

Quadro 12 - Atividade da Folha 9

Folha 9

1) Para a próxima aula pesquise na internet ou em livros o significado das siglas AM/PM que aparecem nos relógios digitais. Qual a origem dessas siglas e para que elas são utilizadas.

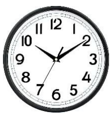
____

Fonte: Elaborado pela autora

A atividade da Folha 9 foi planejada com o objetivo de os alunos pesquisarem o significado das siglas AM/PM que aparecem nos relógios digitais, já que utilizaríamos atividades que envolveriam relógio na sequência.

Atividades da Folha 10

Quadro 13 - Atividades da Folha 10



Folha 10

1) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 15 horas? ___________

2) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 17 horas? ___________

3) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 22 horas?____________

4) Imagine que você tem que explicar para seu irmão mais novo como funciona essa conversão. Como você faria isso?

Fonte: Elaborado pela autora

Nas atividades da Folha 10, o nosso objetivo foi que os alunos percebessem que a cada

12 horas, os números marcados pelos ponteiros do relógio se repetiam. Os alunos deveriam realizar a conversão de algumas horas e explicar como fariam essa conversão.

Atividade da Folha 11

Na Folha 11 continuamos explorando situações que envolvem relógio, porém, diferente das atividades da Folha 10, onde os alunos podiam ter utilizado a subtração para chegar ao resultado, agora deveriam utilizar o resto da divisão Euclidiana para resolver os problemas sugeridos.

Quadro 14 - Atividades da Folha 11

Folha 11

1) Agora responda:

a) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 10 horas, que horas serão? ____________________________

b) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 89 horas que horas serão? ____________________________

2) Responda:

a) Agora são 10 horas da manhã; um filme que quero muito assistir vai passar daqui a 72 horas. Que horas começará o filme? ____
____

b) Agora são 10 horas da manhã e o meu time irá jogar daqui a 24 horas? Que horas será o jogo?______________
____

c) Agora são 10 horas da manhã e estamos saindo para um passeio com a escola e só voltaremos daqui a 48 horas. A que horas do dia estaremos de volta?____
____

d) Acordei às 10 horas da manhã e fui passar uns dias na casa da minha avó. Quando voltei calculei o tempo que fiquei fora de casa e totalizaram-se 60 horas. A que horas cheguei da casa da minha avó? _______________
____

d) A empresa JOGOSMIX lançará 3 novos jogos, às 10 horas da manhã, do dia 3 de outubro de 2015. Você deseja baixar os 3 jogos o mais rápido possível, porém a empresa não disponibiliza downloads simultâneos; cada jogo poderá ser baixado com um intervalo de 30 horas depois de iniciado o download. Faça um planejamento para obter os 3 jogos relacionando dia e hora prevista para os downloads.

____
____

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo das atividades dessa folha era que o aluno percebesse que é possível utilizar o resto da divisão por 12 para resolver alguns problemas e que, em outros, é necessário antes utilizar a divisão por 24, visto que um dia está dividido em dois períodos iguais de 12 horas e que, a cada 24 horas estaremos em outro dia.

A última questão dessa folha foi uma aplicação simples de utilização do resto que teve como objetivo levar o aluno a perceber que bastaria utilizar o resto da divisão por 24.

Na sequência revisada reformulamos o item d) desta atividade, especificando com mais clareza quando poderia ser iniciado o primeiro download.

Atividades da Folha 12

As atividades dessa folha tinham como objetivo levar o aluno a perceber que é possível resolver problemas do cotidiano utilizando a divisão de dois números naturais, além de observar a conveniência da escolha de divisores de 24 na prescrição dos intervalos para tomar um medicamento.

Quadro 15 - Atividades da Folha 12

Folha 12

a) O Dr. Melhorelogo receitou um xarope para a Dona Tosse Louca que deveria ser tomado de 8 em 8 horas durante 7 dias. Às 15horas ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

1º dia			
2º dia			
3º dia			
4º dia			
5º dia			
6º dia			
7º dia			

b) Mesmo seguindo o cronograma à risca, Dona Tosse Louca piorou um pouco e o Dr. Melhorelogo pediu para que ela tomasse o xarope de 7 em 7 horas durante uma semana. Às 6 horas da manhã ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

1º dia				
2º dia				
3º dia				
4º dia				
5º dia				
6º dia				
7º dia				

c) Qual a diferença deste cronograma para o anterior?____

____

d) É mais prático tomar um remédio a cada 8 horas ou a cada 7 horas? Por quê?_______________________

____

e) Dona Tosse Louca não conseguiu seguir o segundo cronograma e tomar o xarope nas horas indicadas pois os horários variavam todos os dias e o Doutor Melhorelogo precisou aumentar o número de doses do xarope. Indique as opções que o Dr. Melhorelogo tem para prescrever o remédio de modo que a Dona Tosse Louca tome as doses sempre no mesmo horário.

Fonte: Elaborado pela autora

Nos dois primeiros itens o objetivo era que os alunos preenchessem a tabela com os horários solicitados para os sete dias de uma semana. No item c) esperou-se que os alunos percebessem que, na primeira tabela, os horários se repetiam todos os dias, o que não aconteceu na segunda tabela.

O objetivo do item d) era que os alunos observassem a praticidade de tomar um remédio sempre nos mesmos horários todos os dias, o que acontece apenas com horários que deixam zero quando dividem as 24 horas do dia.

Por fim, esperou-se que eles percebessem a necessidade do uso dos divisores de 24 menores que 8 para responder à questão.

Atividades da Folha 13

Quadro 16 - Atividades da Folha 13

Folha 13

Outra aplicação muito interessante da divisão está nos problemas relacionados com os calendários. Vamos considerar, por exemplo, o calendário do mês de setembro do ano de 2015:

D	*S*	*T*	*Q*	*Q*	*S*	*S*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
27	*28*	*29*	*30*			

1) Sabendo que 01/09/2015 foi uma terça-feira, determine:

a) Em que dia da semana cairá o dia 12 de outubro de 2015, Dia da Criança?

b) Em que dia da semana cairá o dia 09/11/2015, dia do início da Feira do Livro de Garibaldi?

c) Em que dia da semana cairá o dia 31/12/2015, último dia deste ano?

d) Qual é o dia do seu aniversário? Quantos dias faltam para essa data? E em que dia da semana cairá?

Fonte: Elaborado pela autora

As atividades dessa folha tiveram o objetivo de aplicar as propriedades dos restos a problemas relacionados com calendário e iniciou apresentando o calendário do mês de setembro de 2015, observando que o primeiro dia desse mês caiu em uma terça-feira.

Esperávamos que os alunos atentassem para o fato de que os meses têm 30 ou 31 dias, exceto o mês de fevereiro que pode ter 28 ou 29 dias se for ano bissexto. Os dias do mês são agrupados em intervalos de 7 dias, que chamamos de semanas. Se quisermos saber quantos grupos de 7 dias têm um determinado período de tempo basta dividir por 7 e observar que o valor do quociente dessa divisão será o número de semanas completas e o resto dessa divisão indicará o número de dias que devo avançar iniciando no dia que tomamos como início da observação. Se o resto da divisão for zero, significa que paramos novamente no dia da semana da qual partimos, se o resto for 1, significa que paramos um dia depois e assim por diante.

Dessa forma, os alunos deveriam, em cada item, e tomando como base o dia primeiro de setembro, identificar o número total de dias que faltam para chegar a cada data solicitada, efetuar a divisão por 7 e tomar o resto dessa divisão para situar em que dia da semana determinado dia cai. Para tanto deveriam observar que há uma regularidade entre os restos da divisão e cada dia da semana.

Quadro 17 - Atividades da Folha 13/2

Folha 13/2

a) Nosso último encontro será dia 02/10/2015, sexta-feira e retomaremos nossas aulas depois de 33 dias afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês e o dia da semana do nosso próximo encontro.

b) Nosso último encontro será dia 02/10/2015 às 10h da manhã e retomaremos nossas aulas depois de 790 horas afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês, o dia da semana e o horário do nosso próximo encontro.

Fonte: Elaborado pela autora

Com o objetivo de levar os alunos a refletir um pouco mais sobre problemas envolvendo horas e calendários, elaboramos a atividade da Folha 13/2 para ser resolvida depois de terminada a atividade anterior. Segundo Skovsmose (2008), um ambiente faz referência à realidade quando se utiliza de situações cotidianas, apresentando os dados na forma original, de modo que as informações dessas situações-problema pertenceram a uma situação real, pois depois do último encontro, que estava programado para ser dia 02/10/2015, os alunos contariam com a presença de um estagiário que continuaria as atividades curriculares com a turma. Nessa atividade os alunos deviam descobrir o que foi proposto utilizando a divisão de dois números naturais e tomando o resto, buscando formas de representar cada uma das situações utilizando a linguagem matemática.

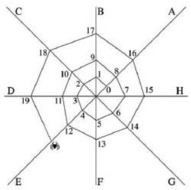
Atividades da Folha 14

A atividade dessa folha foi adaptada de um problema que integra o Banco de Questões da OBMEP e onde o aluno deveria utilizar o resto da divisão para obter o resultado.

Quadro 18 - Atividades da Folha 14

Folha 14

1) Uma aranha usa os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G e H para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho nesse ritmo e seguindo sempre a mesma ordem.



a) Sobre qual fio de apoio estará o número 25?

b) Sobre qual fio de apoio estará o número 40?

c) Sobre qual fio de apoio estará o número 55?

d) Sobre qual fio de apoio estará o número 82?

e) Podemos dizer que o número 100 está sobre o fio de apoio E? Por quê?

f) É correto afirmar que o número 240 está sobre o fio de apoio H? Por quê?

g) Onde a aranha deveria começar sua teia para que o número 240 estivesse sobre o fio de apoio H?

Fonte: Elaborado pela autora

Nos itens a) a d) o objetivo foi que o aluno percebesse, que apesar de poder continuar construindo a teia para responder esses itens, que essa alternativa não seria uma solução muito prática. Esperávamos que eles levassem em conta que os fios se repetem a cada oito números e que essa periodicidade é constante. Para chegar aos resultados, o aluno deveria efetuar a divisão por oito e analisar o resto deixado por essa divisão em cada caso.

Nos itens e) e f), além de repetir o processo dos itens anteriores, os alunos deveriam argumentar sobre suas soluções.

No item g) a ideia foi explorar o processo inverso e a capacidade de argumentação.

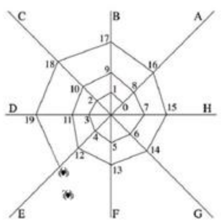
Essa atividade foi proposta com o objetivo de verificarmos as estratégias de resolução que os alunos utilizariam e observar se algum deles lançaria mão da divisão e observaria o resto dessa divisão durante o processo de resolução, além de estimular o processo inverso e a capacidade de argumentação da resposta.

Atividades da Folha 15

Quadro 19 - Atividades da Folha 15

Folha 15

1) Duas aranhas se revezam na construção de sua teia (uma continua o trabalho de onde a outra parou) usando os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G, e H, conforme mostra a figura.



a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira aranha teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada?

b) Imagine agora que a primeira aranha teceu 300 voltas completas e mais 4 fios e a segunda aranha teceu 200 voltas completas e mais 2 fios. Diga em que fio a teia foi terminada.

Fonte: Elaborado pela autora

Inspirados na atividade anterior sugerimos a introdução de outra aranha para ajudar a tecer a teia. O objetivo foi que o aluno observasse e percebesse que não é necessário usar as voltas inteiras e sim utilizar os fios a mais que cada aranha percorre durante a construção da teia. Dessa forma esperávamos que os alunos identificassem essa particularidade do problema e utilizassem os “restos” e a soma deles para resolver a questão.

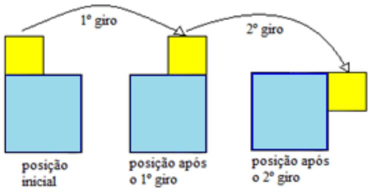
Atividades da Folha 16

As atividades dessa folha foram adaptadas de um problema retirado do Banco de Questões da OBMEP.

Quadro 20 - Atividade da Folha 16

Folha 16

1) Um quadrado de lado 1cm roda em torno de um quadrado de lado 2cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.



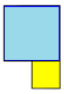
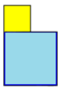
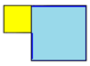
a) Qual a posição dos dois quadrados após o 5º giro?

b) Qual a posição dos dois quadrados após o 8º giro?

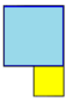
c) Qual a posição dos dois quadrados após o 16º giro?

d) Qual a posição dos dois quadrados após o 20º giro?

e) Quantos giros o quadrado menor deve dar sobre o quadrado maior para obtermos as figuras abaixo?

I)  II)  III)  IV) 

f) Partindo da posição inicial dada, é possível obter a configuração dos quadrados dada abaixo com 3 giros?



g) Qual deveria ser a posição inicial dos dois quadrados para que pudéssemos obter a configuração abaixo com 7 giros?

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo das atividades dessa folha foi de o aluno perceber que, para dar uma volta completa em torno do quadrado maior, o quadrado menor tem que dar oito giros, isto é, após oito giros sucessivos o quadrado menor retorna à sua posição inicial, então ele deveria considerar o resto da divisão por oito para indicar a resposta solicitada em cada item.

Esperávamos que os alunos identificassem as regularidades numéricas que apareceriam em cada giro do quadrado menor e identificassem que essa relação está vinculada ao resto da divisão em cada item.

Os dois últimos itens dessa atividade encaminham o aluno para pensar no processo inverso da questão, ou seja, levam o aluno a pensar qual deve ser a posição inicial dos dois quadrados para obter a configuração solicitada. Segundo Duval (2003), os alunos conseguem trabalhar com certa facilidade na resolução de problemas que vão da língua natural para o registro numérico, porém, revelam dificuldades em solucionar problemas que solicitam de alguma forma o caminho inverso. O autor conclui que a aprendizagem está associada ao fato de reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações e que, quanto mais rápido for esse reconhecimento, mais o aluno estará mobilizando conceitos matemáticos em diferentes situações.

Atividades da Folha 17

Quadro 21 - Atividades da Folha 17

Folha 17

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas.

Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	X	2	X	X
X	3	X	X	4	X	X
X	5	X	X	6	X	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 45 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 60 e a área 100?

b) Você mora na área 14 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Baseado no cronograma dado isso é possível? Por quê?

c) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. É possível a área 19 estar nesse cronograma de coleta? Por quê?

d) Meu amigo mora na área número 24 e lá o recolhimento do lixo acontece na quinta-feira. Minha prima está se mudando para a área número 62 e também gostaria que o caminhão recolhesse o lixo nesse dia. Baseado no cronograma de coleta dado, isso é possível?

e) Como você acha que o cronograma para a coleta de lixo foi construído?

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo dessa atividade foi que os alunos observassem que poderiam solucionar cada item sem construir toda a tabela. Esperávamos que eles percebessem que a cidade foi dividida em áreas pares e ímpares e que isso facilita a resolução do problema.

Atividades da Folha 18

Quadro 22 - Atividades da Folha 18

Folha 18

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas. Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	2	X	3	X
X	4	X	5	X	6	X
X	7	X	8	X	9	X
X	10	X	11	X	12	X
X	13	X	14	X	15	X
X	16	X	17	X	18	X
X	19	X	20	X	21	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 30 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 45 e a área 60? O que essas áreas têm em comum?

b) Em que dia da semana a área 40 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 55 e a área 70? O que essas áreas têm em comum?

c) Em que dia da semana a área 35 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 50 e a área 65? O que essas áreas têm em comum?

d) Você mora na área 20 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Isso é possível? Por quê?

e) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. Baseado no cronograma de coleta, a área 35 pode estar nesse roteiro? Por quê?

f) Eu resido na área número 44 e o recolhimento do lixo acontece na quarta-feira. Minha amiga irá morar na área 62 e gostaria que o caminhão recolhesse o lixo na sexta-feira. Dentro do cronograma de coleta dado, isso é possível?

g) É possível estabelecer uma relação entre a distribuição das áreas e cada dia da semana em que ocorre o recolhimento? Qual?

Fonte: Elaborado pela autora

Nesta atividade inserimos mais um dia de recolhimento de lixo nas áreas da cidade com o objetivo de o aluno perceber que a operação de divisão deve ser utilizada na resolução dessa questão e que cada dia de recolhimento está relacionado a um resto na divisão por três. Diferente da atividade anterior, na qual os alunos poderiam apenas ter observado as áreas pares e ímpares, nessa atividade esperávamos que eles percebessem que, como temos três dias diferentes para o recolhimento do lixo, o resto da divisão por três forneceria as informações necessárias para a resolução da atividade.

No item d) fizemos uma pergunta pouco usual, que se refere a uma resposta ser possível ou não. Sabemos que nem sempre esse tipo de pergunta aparece durante o trabalho em sala de aula e esperávamos que trouxesse desacomodação e inquietação por parte dos alunos, além de que, nos itens e) e f) estimulamos o processo inverso.

Atividade da Folha 19

Quadro 23 - Atividade da Folha 19

Folha 19
1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.
____
____
____

Fonte: Elaborado pela autora

Baseados nas experiências obtidas na resolução das atividades anteriores, solicitamos para os alunos elaborarem questões que utilizem o resto da divisão na sua resolução. Um dos objetivos dessa atividade foi fazer o processo inverso, onde o aluno deveria mobilizar os conhecimentos que possuía acerca da divisão Euclidiana para representar uma situação através de um problema que, posteriormente, seria solucionado por um colega.

Sabemos que elaborar um problema não é uma tarefa fácil e que talvez não seria perfeitamente resolvida, mas um dos objetivos dessa atividade era que o aluno, ao elaborar e escrever seu próprio problema, organizasse tudo que aprendeu, deixando de ser um resolvedor de problemas para ser um propositor, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias que queria expor. É também uma forma de levá-lo a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de um determinado problema, a relação que deve haver entre os dados fornecidos, além de ter que pensar nele como um todo não se detendo apenas aos números.

Consideramos o aluno como protagonista da construção do problema e o papel do professor é de organizador e facilitador do processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, as quais o aluno não consegue obter sozinho.

7. RELATOS DOS ENCONTROS E ANÁLISE DA PRODUÇÃO DOS ALUNOS

Esta seção consiste no relato de cada aula permeado com as análises das produções dos alunos. Apresentaremos a descrição da aplicação de cada atividade, na ordem em que foram aplicadas, seguida de análise da escrita e dos comentários dos alunos com exemplos registrados durante a prática pedagógica. Apresentaremos novamente as folhas das atividades afim de facilitar a compreensão do leitor, quanto ao que está sendo solicitado em cada uma das questões.

A análise das respostas obtidas a partir da produção dos alunos foi realizada sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, pois esta possibilita interpretar os registros utilizados pelos alunos na solução das questões. Também nos apoiamos nas ideias de Skovsmose sobre cenários para investigação como uma opção metodológica para o ensino de Matemática.

Abaixo segue um resumo dos encontros com a duração de cada um e as atividades que foram desenvolvidas em cada momento.

Quadro 24 - Resumo dos Encontros

Encontro	Duração	Atividades
1º encontro: 17/09/2015	1h40min	Atividades Folhas 1, 2 e 3
2º encontro: 18/12/2015	1h40min	Atividades Folhas 4, 5, 6, 7 ,8 e 9
3º encontro: 23/09/2105	50min	Atividades Folhas 9, 10 e 11
4º encontro: 24/09/2015	1h40min	Atividades Folhas 12
5º encontro: 25/09/2015	1h40min	Atividades Folhas 13 e 13/2
6º encontro: 30/09/2015	50min	Atividades Folhas 13/2 e 14
7º encontro: 01/10/2105	1h40min	Atividades Folhas 15, 16 e 17
8º encontro: 02/10/2015	1h40min	Atividades Folhas 18 e 19

Fonte: Elaborado pela autora

Primeira Aula: 17/09/2015 – participaram 17 alunos

Iniciamos apresentando a proposta didática, sua importância e as expectativas em relação ao trabalho. Informamos que estávamos trazendo uma proposta de atividades para os próximos encontros, que as aulas seriam gravadas e que deveriam agir normalmente. Para nossa surpresa, a presença da câmera foi mais perturbadora para a professora pesquisadora do que para os alunos e foi com muito entusiasmo que iniciamos a aula. No primeiro encontro houve dois períodos de 50 minutos para desenvolver as atividades propostas.

O objetivo da primeira folha de atividades era disparar uma reflexão sobre a divisão Euclidiana, enfatizando o resto da divisão, onde o aluno deveria analisar as propostas para decidir se, nas soluções dadas, a divisão era em partes iguais além de elaborar uma sugestão de divisão e responder que diferença existe entre essa proposta e as demais.

Quadro 25 - Atividades da Folha 1

Folha 1

A professora Queridinha tem duas turmas na EMEF Attílio Tosin.

Na turma A, ela levou 225 balas para serem divididas igualmente entre os 8 alunos dessa turma.

Logo os alunos se mobilizaram para ajudar a fazer a divisão e surgiram várias propostas diferentes:

- Joãozinho propôs que cada aluno recebesse 27 balas;
- Cláudia sugeriu que cada aluno recebesse 26 balas;
- Fernanda propôs que cada aluno recebesse 25 balas.

Responda:

a) As propostas acima dividem as balas em partes iguais entre os 8 alunos da turma A?

____

____

b) Quantas balas sobrarão na divisão feita por:

Joãozinho:	Cláudia:	Fernanda:
Sobrarão____ balas.	Sobrarão____ balas.	Sobrarão____ balas.

c) Qual a sua proposta de divisão das 225 balas entre os 8 alunos dessa turma?

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

Entregamos a Folha 1 (Quadro 25) aos alunos, que já haviam escolhido seus grupos, e lemos o enunciado para a turma. No primeiro momento os alunos não entenderam o que fora solicitado e a professora sugeriu a releitura individual e a discussão em grupo, onde começaram a surgir as opiniões entre os alunos iniciando dentro do grupo e se espalhando por toda a sala. A professora coordenou e conduziu a discussão. Abaixo segue a transcrição da fala de alguns alunos referente à resposta do item a).

- " Não é igual", disse o aluno 06.

- " Se Joãozinho dá 27 balas para cada um é uma quantidade igual, mas vai sobrar." disse o aluno 12

Mas o aluno 14 falou: "Eles dão quantidades diferentes, então como pode ser igual?"

- "Não é igual, porque Joãozinho dá 27 balas para cada aluno, Cláudia dá 26 e Fernanda dá 25. Tá na cara que é diferente. " Insistiu o aluno 06.

Observamos que os alunos misturaram a ideia de propostas iguais com partes iguais. A professora interveio e sugeriu que fosse feita nova leitura e interpretação do enunciado e depois questionou: "O que cada proposta tem que ter para dividir em partes iguais? O que significa dividir em partes iguais? "

O aluno 09 então disse: " Dividir em partes iguais é dar um mesmo tanto para cada um."

Outros alunos também contribuíram com suas falas:

- " Então eles dão a mesma quantidade, mas vai sobrar. E daí? " Disse o aluno 04.

- "Eles dão a mesma quantidade, só que de jeitos diferentes. " Completou o aluno 24.

O aluno 12 então disse: " Então tá, cada um pensou de um jeito diferente, mas todos dão quantidades iguais. Cada um da sua maneira"

Depois de uma releitura e discussão em grupos, os alunos responderam à primeira folha de atividades. Analisando seus comentários e escrita obtivemos as conclusões abaixo:

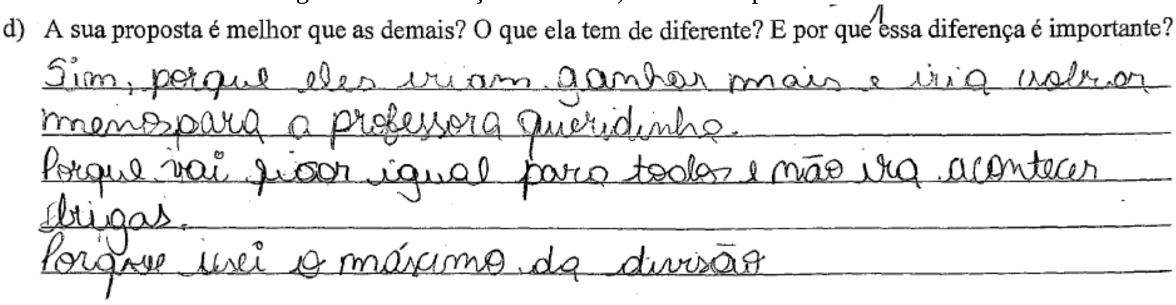
No item a), todos os alunos concordaram que as propostas dividem as balas em partes iguais.

No item b) os alunos apresentaram duas maneiras de resolver o problema. A maioria dos alunos efetuou a operação de multiplicação e depois subtraiu o resultado do total de balas, alguns alunos desenvolveram o algoritmo da divisão fazendo constar no quociente os resultados propostos por Joãozinho, Cláudia e Fernanda (chamaremos esse processo de "divisão forçada"). Apenas dois alunos misturaram as duas descrições acima, obtendo um resultado incorreto.

Na proposta de divisão, solicitada no item c), os alunos "armaram" e efetuaram corretamente a operação do algoritmo da divisão justificando que cada criança ganharia 28 balas e ainda sobraria uma.

No item d) todos os alunos defenderam a sua proposta argumentando que ganhariam mais balas e o resto seria o menor possível, como ilustram as Figuras 41 e 42 abaixo.

Figura 41 - Resolução do item d) da Folha 1 pelo aluno 09

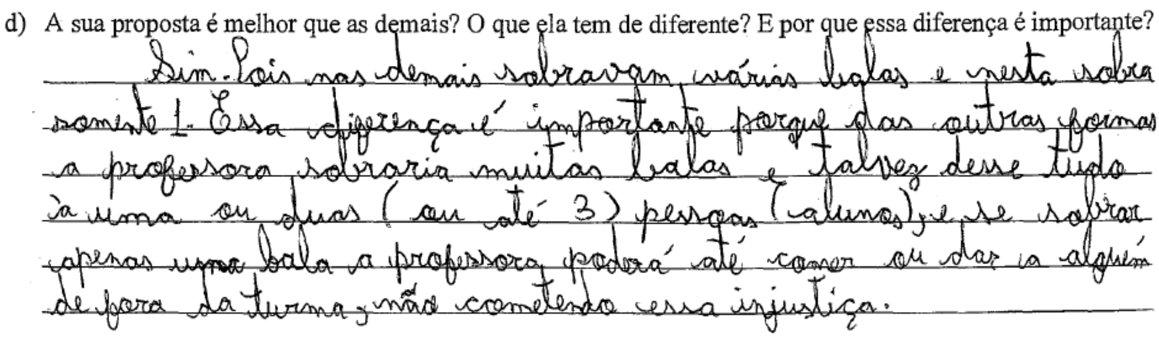


d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

Sim, porque eles iriam ganhar mais e iria sobrar menos para a professora queridinha.
Porque vai ficar igual para todos e não irá acontecer brigas.
Porque usei o máximo da divisão

Fonte: Produção dos alunos

Figura 42 - Resolução do item d) da Folha 1 pelo aluno 24



d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

Sim. Pois nas demais sobravam várias balas e nesta sobra somente 1. Essa diferença é importante porque das outras formas a professora sobraria muitas balas e talvez desse tudo à uma ou duas (ou até 3) pessoas (alunos), e se sobrar apenas uma bala a professora poderá até comer ou dar a alguém de fora da turma, não cometendo essa injustiça.

Fonte: Produção dos alunos

Os alunos estranharam o tipo de problema proposto e o tipo de resposta esperada já que não estavam habituados a resolver atividades com essas características, assim tiveram que sair de sua zona de conforto, onde as aulas eram previsíveis e eles se sentiam seguros, o que instigou discussões, pois sair da zona de conforto implica ter que lidar com o imprevisível e a incerteza gera dúvida e ansiedade.

Por outro lado, percebemos um interesse muito grande dos alunos em realizar as atividades, embora, num primeiro momento, queriam que a professora verificasse se o que eles estavam fazendo e escrevendo estava correto. Os alunos não estavam acostumados a justificar nas aulas de matemática e inicialmente estranharam a solicitação desse tipo de trabalho. A professora sempre reforçou que era muito importante que eles descrevessem e relacionassem as ideias e as etapas do raciocínio em cada momento. Por várias vezes tivemos que reforçar que o nosso interesse com os problemas propostos era perceber como eles pensavam a respeito da resolução de cada questão e não o resultado em si, ou seja, o certo ou o errado da resposta.

Também observamos que alguns alunos buscavam o imediatismo de uma solução que não dependesse de uma construção ou que exigisse um raciocínio mais elaborado. O aluno 06 comentou: “prefiro resolver uma lista de operações ou de expressões numéricas, pois não precisa pensar muito, é só calcular para resolver e pronto”.

Encerrada a discussão da primeira atividade entregamos a próxima e os alunos logo perceberam que era o mesmo tipo de problema da atividade anterior e usaram a mesma estratégia de resolução e argumentação já utilizados o que fez com que essa atividade fosse resolvida com rapidez e sem maiores discussões. A discussão inicial, que aconteceu quando apresentamos a primeira folha, não ocorreu agora, demonstrando que houve superação do desconhecido, avanço e compreensão em relação à interpretação dos enunciados e fluidez e sistematização das respostas desta folha, que passaram a ser mais curtas e objetivas. O aluno 06, que comentou não querer "pensar muito" para resolver os problemas agora estava totalmente envolvido com as resoluções.

Quadro 26 - Atividades da Folha 2

Folha 2

Na turma B a professora Queridinha levou 307 chocolates para serem divididos igualmente entre os 12 alunos dessa turma.

Como na outra classe, também surgiram várias propostas para a divisão:

- Miguel sugeriu que cada aluno recebesse 24 chocolates;
- Paulo propôs que cada aluno recebesse 22 chocolates;
- Ana sugeriu que cada aluno recebesse 23 chocolates.

b) As propostas acima dividem os chocolates em partes iguais entre os 12 alunos da turma B?

____

____

b) Quantos chocolates sobrarão na divisão feita por:

Miguel:	Paulo:	Ana:
Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.

c) Qual a sua proposta para a divisão dos 307 chocolates entre os 12 alunos dessa turma?

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

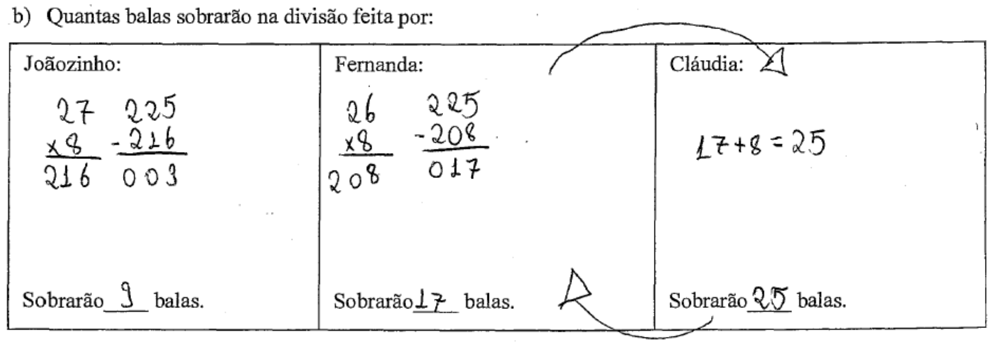
____

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos responderam corretamente as questões, sendo que apenas dois alunos apresentaram divergência de cálculo no item b), um deles operou 307 – 264 = 42 e o outro calculou 4 x 12 = 58. Como no exercício anterior, apresentaram as mesmas formas de resolução, usando a multiplicação e a subtração e a “divisão forçada”.

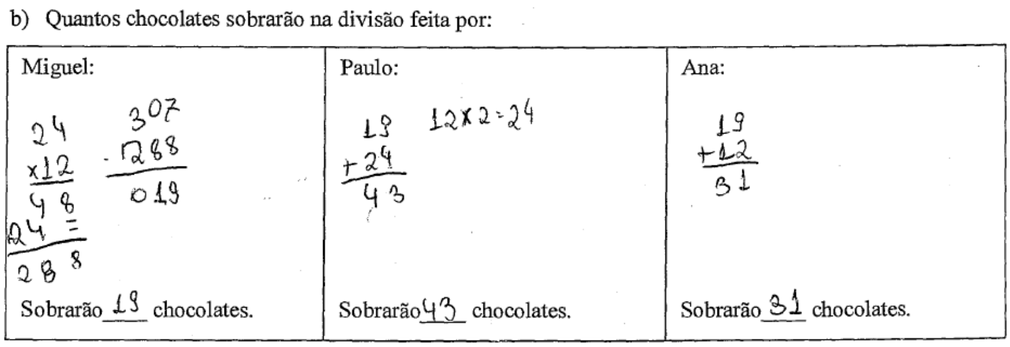
Como podemos observar nas Figuras 43 e 44, um aluno percebeu que a diferença entre os quocientes era um e que era possível usar o resto anterior e somar o divisor uma ou duas vezes para obter o resultado, ou seja, ele percebeu que era possível realizar apenas o primeiro cálculo, pois cada vez que uma proposta diminuía o número de chocolates em uma unidade, o total da sobra aumentaria em 12 unidades, demonstrando, dessa forma uma compreensão mais avançada dos conceitos envolvidos. Isso nos mostra que o aluno domina a técnica de divisão e compreende a volta pela escrita na forma a = b. q + r , além de utilizar esses conhecimentos como ferramenta para resolver problemas.

Figura 43 - Resposta do item b) da Folha 1 pelo aluno 24



Fonte: Produção dos alunos

Figura 44 - Resposta do item b) da Folha 2 pelo aluno 24



Fonte: Produção dos alunos

As soluções das Figuras 43 e 44 mostram que o aluno evoluiu muito da primeira para a segunda atividade e que, apesar do problema ser de repetição, e talvez por isso, os alunos conseguiram evoluir conseguindo perceber detalhes que não tinham visto antes e provavelmente não teriam a oportunidade de fazer esse tipo de raciocínio. Segundo Duval

(2003), esse aluno reconheceu o mesmo objeto matemático por meio de diferentes representações e

> Esse reconhecimento é a condição fundamental para que um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema. Essa condição supõe que ele não identifica mais os objetos matemáticos com os conteúdos de certas representações. (DUVAL, 2003, p. 23)

Quando entregamos a atividade da Folha 3 os alunos demonstraram dificuldade em iniciar os trabalhos. Lemos o problema com toda a turma e depois sugerimos uma leitura individual e posterior discussão em grupo. Foi depois dessa discussão que os alunos começaram a resolver as questões que são apresentadas no Quadro 27.

Quadro 27 - Atividades da Folha 3

Folha 3

Podemos escrever a proposta de Miguel como uma expressão numérica. Veja que havia 307 chocolates para serem divididos entre os 12 alunos da turma e ele sugeriu que cada um deveria ganhar 24 chocolates e ainda sobrariam 19 chocolates.

Teremos então a expressão: $307 = 12 \times 24 + 19$

Agora escreva as demais sugestões em forma de expressão numérica:

Propostas da turma A:

Joãozinho:____

Cláudia:____

Fernanda:____

Sua proposta:____

Propostas da turma B:

Miguel:____

Paulo:____

Ana :____

Sua proposta: ____

Em quais propostas temos o maior número de balas ou chocolates por aluno? O que acontece com as respectivas sobras?

____

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

Percebemos que os alunos estranharam a atividade já que estavam acostumados a resolver expressões numéricas e neste caso deveriam apenas montá-las.

Por ser uma atividade diferente do que eles costumeiramente realizam em sala de aula e por ter a preocupação em escrever corretamente, a presença da professora foi muito solicitada inicialmente, no sentido de verificar se o que eles estavam fazendo e escrevendo estava correto. A professora sugeriu que fosse feita nova leitura e interpretação da atividade. Disse que para resolver um problema de matemática é preciso estar muito atento e que a leitura é uma etapa fundamental nesse processo.

Um grupo observou que eles deveriam seguir o enunciado da atividade e seu comentário chamou a atenção dos demais.

- "Acho que dá para fazer como foi feito no enunciado", disse o aluno 24.

- "Como assim?" perguntou o aluno 12.

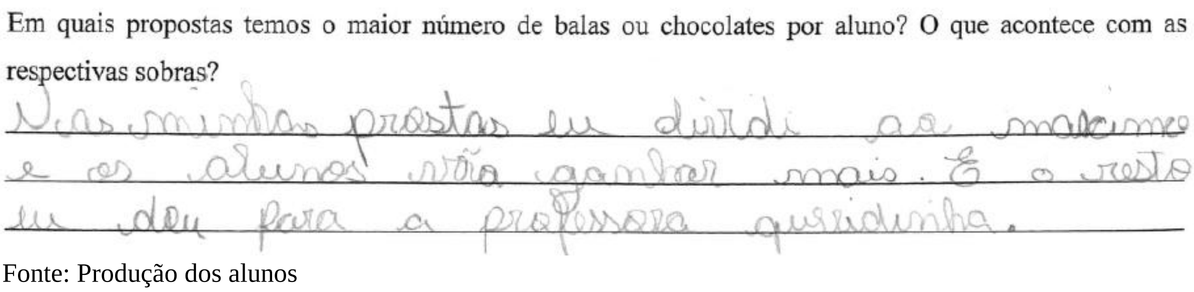
- "Olha, é simples é só observar que o total de chocolates vem antes da igualdade, o total de alunos e quanto cada um vai ganhar se multiplica e no fim basta somar a sobra. Depois é só trocar o chocolate pelas balas" concluiu ele.

- "Ah, assim é simples mesmo" comentou o aluno 09.

Por fim, os alunos leram e discutiram a atividade dentro dos seus grupos e todos a desenvolveram com êxito, escrevendo e respondendo de forma correta. Os objetivos dessa atividade foram atingidos, pois todos os alunos escreveram corretamente os resultados solicitados nas duas primeiras atividades.

Nas respostas ao último item da folha, verificamos que os alunos demonstraram a preocupação em dividir ao máximo, ou seja, nos alunos poderem receber a maior quantidade possível, deixando o menor resto (Figuras 45 e 46).

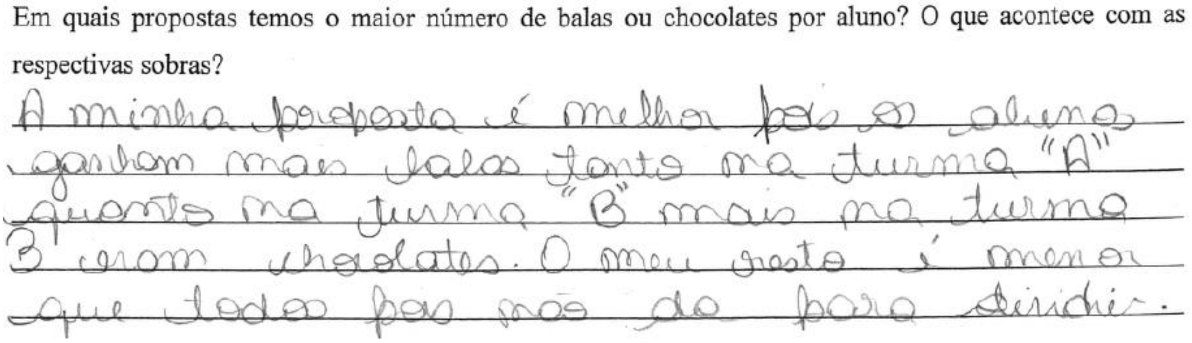
Figura 45 - Resposta do aluno nº 04 para a última questão da Folha 3


Em quais propostas temos o maior número de balas ou chocolates por aluno? O que acontece com as respectivas sobras?

Nas minhas prostas eu dividi ao maximo e os alunos vão ganhar mais. E o resto eu deu para a professora queridinha.

Fonte: Produção dos alunos

Figura 46 - Resposta do aluno nº 15 para a última questão da Folha 3


Em quais propostas temos o maior número de balas ou chocolates por aluno? O que acontece com as respectivas sobras?

A minha proposta é melhor pois os alunos
ganham mais balas tanto na turma "A"
quanto na turma "B" mais na turma
B eram chocolates. O meu resto é menor
que todos pois nós do para dividir.

Fonte: Produção dos alunos

Acreditamos que, depois de superada a ansiedade inicial, os objetivos propostos para esta aula foram atingidos na medida em que a escrita das propostas apareceu em forma de expressão numérica de forma clara e precisa.

Quanto à exploração dessa atividade, ela utilizava o trabalho realizado nas folhas anteriores onde os registros apareciam em língua natural e os alunos, ao realizar os cálculos, escreveram os dados em forma de registro numérico, sendo que, para responder esta atividade eles deveriam escrever os resultados utilizando expressões numéricas que são uma outra forma de representação de um mesmo objeto matemático.

Nesse processo, os alunos poderiam se confundir ou não saber o que fazer e abandonar a atividade, pois segundo Duval (2003, p.21),

> [...]numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida.

mas percebemos que, os alunos conseguiram transitar dentro desses registros sem muita dificuldade e que, sem perceber, estavam utilizando outra forma de representação, diferente do que foi proposto no problema da primeira e da segunda atividades.

Segunda Aula: 18/09/2015 – participaram 17 alunos

No segundo encontro, composto por dois períodos de 50 minutos, foram trabalhadas atividades das Folhas 4 a 9.

O objetivo das atividades da Folha 4, reproduzida no Quadro 28, era resumir as atividades anteriores que constroem o conceito de divisão de dois números naturais como aquele em que temos o maior quociente e o menor resto possível, além de apresentar formalmente a escrita da expressão numérica que representa a divisão de a por b, ou seja, $a =$

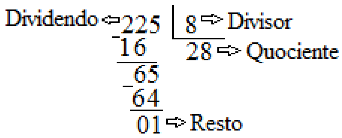
$b \times q + r$ com todos os termos identificados em: a (dividendo), b (divisor), q (quociente) e r (resto), com $r < b$, relembrando a "prova real" da divisão de dois números naturais.

Quadro 28 - Atividades da Folha 4

Folha 4

A "melhor" divisão nos garantiu o ***maior número*** de balas ou chocolates por aluno e ***gerou a menor sobra possível***. Essa é a divisão utilizada nos números naturais onde o ***resto deve ser o menor possível.***

Assim, quando dividimos o número natural a (dividendo), por um número b (divisor) não nulo, obtemos um quociente (q) e um resto (r) que é sempre menor que o divisor (b) ou é zero, ou seja, $a=b.q+r$ e $r = 0$ ou $r < b$.
Então, no exemplo $225 = 8 \times 28 + 1$, temos que a = 225, b = 8, q = 28 e r = 1 < 8
Utilizando o algoritmo conhecido:



Observe que também podemos verificar se a divisão está correta, basta ver se
$8 \times 28 + 1 = 225$:

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\, 8 \\ \hline 224 \\ +\, 1 \\ \hline 225 \end{array}$$

1) Faça a divisão de 377 por 3 e escreva-o na forma a = b.q + r, sendo a = 377 e b = 3:

2) Na sua proposta de divisão das balas e dos chocolates indique o dividendo, o divisor, o quociente e o resto e escreva na forma $a = b.q + r$:

Fonte: Elaborado pela autora

As atividades foram desenvolvidas com êxito, alguns alunos apresentaram mais detalhes que outros, mas todos resolveram de forma correta. Todos os alunos desenvolveram o item número 1) da forma esperada, apenas um aluno desenvolveu o algoritmo da divisão no rascunho e escreveu apenas o resultado na forma $a = b \times q + r$ de forma correta e outro desenvolveu corretamente o algoritmo da divisão, mas não expressou o resultado na forma solicitada. No item 2) a maioria dos alunos escreveu corretamente o que era solicitado. Dois alunos escreveram novamente o resultado da questão número 1) e três alunos escreveram de forma incompleta o que era proposto.

Concluímos que essa atividade mostrou a importância de desenvolver trabalhos em que seja necessário fazer reflexões e expressar as informações também de forma escrita e não apenas através de resultados numéricos.

Na versão revisada das atividades pedimos para o aluno responder como ele “confere” se a operação está correta ou como ele realiza a “prova real” da operação de divisão, pois entendemos que essa informação pode mostrar um pouco de como o aluno compreende a operação de divisão, facilitando o entendimento desse processo e permitindo ao professor intervir de maneira precisa e objetiva.

As operações da Folha 5 tinham como objetivo utilizar o algoritmo da divisão para calcular as divisões solicitadas e escrever os termos que aparecem na operação, conforme Quadro 29.

Quadro 29 - Atividades da Folha 5

Folha 5

1) Faça os cálculos abaixo e nomeie-os conforme os termos da divisão:

a) $29 \div 3 =$

b) $108 \div 4 =$

c) $580 \div 14 =$

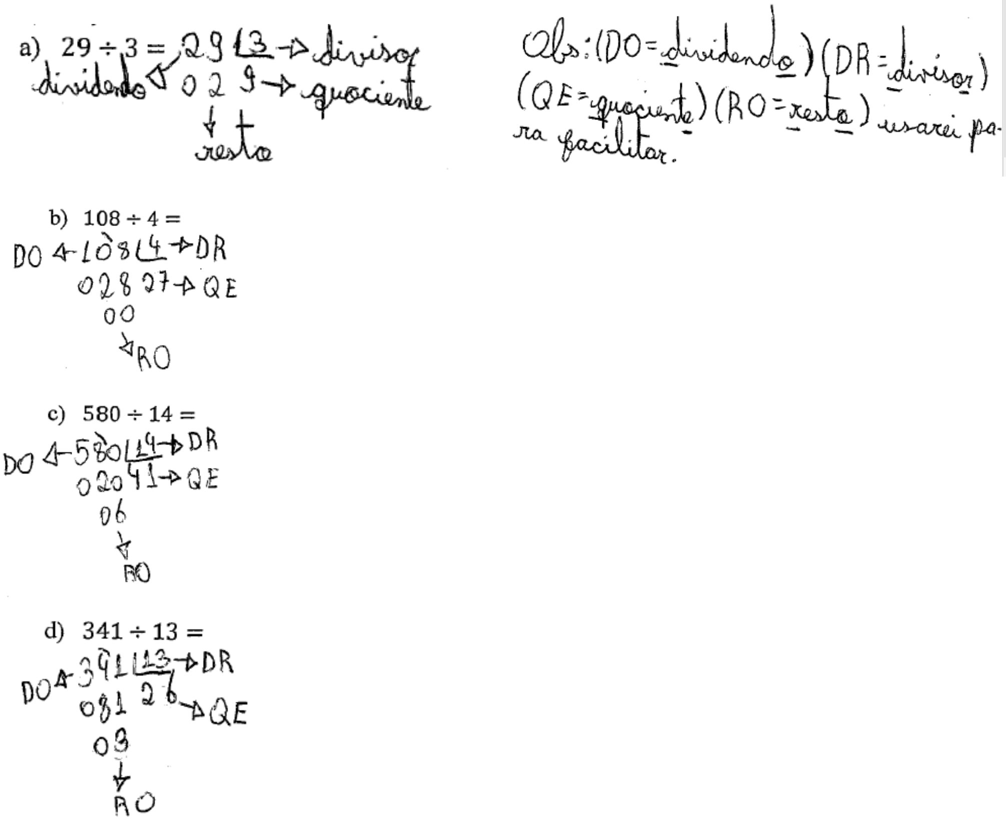
d) $341 \div 13 =$

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos desenvolveram essa atividade com êxito, mas alguns alunos se enganaram nos cálculos, dois deles se equivocaram nos cálculos de subtração e dois nos cálculos de multiplicação e os demais realizaram a tarefa de modo satisfatório. Esta atividade confirma o que Benvenutti (2008) concluiu em sua análise de dados, onde percebeu que os erros mais frequentes dos alunos têm relação com erros de tabuada e de execução do algoritmo. Nenhum aluno teve a preocupação em efetuar a “prova real” para confirmar o resultado encontrado.

Um aluno montou uma legenda para simplificar o trabalho de escrever os termos da divisão e atribuiu siglas para os termos utilizando uma estratégia esperta e inteligente de agilizar o processo de resolução do exercício, como podemos ver na Figura 47.

Figura 47 - Resolução das atividades da Folha 5 pelo aluno 24



Fonte: Produção dos alunos

Quadro 30 - Atividade da Folha 6

Folha 6

Veja que se quiséssemos dividir 84 canetas igualmente entre 6 pessoas, de modo que cada pessoa recebesse o maior número de canetas possível, teríamos:

$$\begin{array}{rl} 84 & \underline{|6\quad} \\ -\underline{6} & 14 \\ 24 & \\ -\underline{24} & \\ 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 84 : 6 = 14$$

Dessa forma cada pessoa receberá 14 canetas.

Esta é uma divisão em que o resto é zero o que garante que 84 é um múltiplo de 6.

Para verificar se a divisão está correta, multiplicamos 6 por 14 e obtemos 84 o que seria o mesmo que contar o total de canetas após recolher as 14 canetas de cada uma das 6 pessoas.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{\times 6} \\ 84 \end{array}$$

Responda:

1) Por que 14 é o maior número de canetas possível?

____

Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo da Folha 6 era de o aluno perceber que o resto é zero e que se o quociente for um valor menor do que o explicitado, poderemos ter um resto igual ou maior que o divisor, contrariando o conceito de divisão.

Todos os alunos responderam essa atividade e abaixo transcrevemos algumas respostas para a questão solicitada:

- "não dá mais para dividir" disse o aluno 15;
- "é o maior número que podemos ter quando dividimos 84 por 6" sugeriu o aluno 24.
- "o resto é zero" completou o aluno 04.

A atividade atingiu os objetivos esperados, pois percebemos que os alunos deixaram claro, com as respostas dessa atividade, que o valor do quociente deve ser o maior possível.

Quadro 31 - Atividades da Folha 7

Folha 7

1) Considere o número dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$.
Determine o quociente e o resto, de $5 \times 7 \times 3 + 4$, na divisão por:

a) 5
Quociente:____________________
Resto:____________________

b) 7
Quociente:____________________
Resto:____________________

c) 3
Quociente:____________________
Resto:____________________

d) Que número é dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$?

Fonte: Elaborado pela autora

Embora o objetivo das atividades da Folha 7 fosse que os alunos percebessem que o divisor, o quociente e o resto já estavam prontos e que não era necessário calcular $5 \times 7 \times 3 + 4$ e depois realizar as divisões, imaginamos que, num primeiro momento, eles iriam calcular o valor da expressão dada para depois efetuar as devidas divisões. Porém, eles identificaram diretamente na expressão numérica, o termo que seria o resto e o divisor, o que indica uma compreensão do significado da divisão Euclidiana já que os alunos transitaram dentro desse registro e operaram com os elementos da expressão $5 \times 7 \times 3 + 4$ que até então, significava apenas uma expressão numérica e agora pode ser visto como a representação de uma divisão. Apenas um aluno efetuou o cálculo da expressão e realizou cada uma das divisões separadamente. Ele chegou ao resultado de forma correta, apenas teve mais trabalho. Entre todos os alunos, dois se equivocaram no cálculo da tabuada e não acertaram o item b), um aluno, embora tenham calculado corretamente o item c), não se deu conta de que o resto era maior que o divisor e que aumentaria o quociente em uma unidade e um aluno escreveu as respostas dos itens c) e d) de forma incorreta. Um aluno não se comprometeu com esta atividade e conversou durante todo o processo e na hora de entregar escreveu qualquer coisa, não acertando nenhum item.

Observando as respostas incorretas dos alunos, confirmamos novamente os resultados de Benvenutti (2008) quanto aos erros com a tabuada no desenvolvimento do algoritmo, e concordamos com Lautert (2005) quando concluiu que uma das dificuldades está em o aluno compreender que o resto nunca pode ser maior nem igual ao divisor.

Ao contrário do resultado da pesquisa de Castela (2005), descrita na consulta bibliográfica, os alunos não efetuaram a operação apresentando como resultado um número decimal. Atribuímos esse tipo de solução ao fato de que durante as outras atividades os alunos já vinham sendo questionados a respeito dos termos da divisão e, em momento algum, obtivemos como resposta um número decimal, até porque nosso objetivo é analisar o resto da divisão.

A maioria dos alunos resolveu corretamente esse exercício, o que confirma o fato de que o professor deve atentar para a elaboração de atividades que observem a aplicação dos conceitos e que ofereçam uma outra representação do objeto estudado.

Para Duval (2003), só é possível conhecer, compreender e aprender matemática pela utilização das representações semióticas do objeto. E vai mais além, o sujeito precisa mobilizar tais representações para verdadeiramente conhecer, ou seja, operar com elas, "converter" instantaneamente uma representação do objeto matemático dado num sistema semiótico, em outra representação de um outro sistema semiótico, que for mais econômico cognitivamente, na resolução de um dado problema.

Vale ressaltar, então, que para Duval, é no trânsito entre esses diversos registros de representação que se encontra a chave para a aprendizagem em matemática. Ainda, escolher o registro mais apropriado para aplicar os tratamentos implica numa desenvoltura do raciocínio e, consequentemente, leva a resolução dos problemas matemáticos, e por fim, à aprendizagem.

Nas atividades da Folha 8 foi fornecida a escrita $a = b.q + r$ e também foi feito o desenvolvimento do algoritmo da divisão. Com essas atividades pretendíamos verificar se os alunos perceberiam que as operações não estavam resolvidas de forma correta e como eles “corrigiriam” as operações dadas. Esperávamos que eles observassem que o valor do quociente não estava correto, pois todos os restos eram maiores que o divisor e que se fazia necessário corrigir o quociente da operação.

Quadro 32 - Atividades da Folha 8

Folha 8

Observe as operações abaixo e identifique quais estão corretas e quais não estão corretas.

a) $327 = 4 \times 80 + 7$

$$\begin{array}{r|l} 327 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 80 \\ \hline 007 & \end{array}$$

b) $959 = 9 \times 106 + 05$

$$\begin{array}{r|l} 959 & 9 \\ \cline{2-2} -9 & 106 \\ \hline 059 & \\ -54 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

c) $428 = 6 \times 71 + 02$

$$\begin{array}{r|l} 428 & 6 \\ \cline{2-2} -42 & 71 \\ \hline 08 & \\ -6 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

d) $125 = 2 \times 61 + 3$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 61 \\ \hline 05 & \\ -2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Responda:

f) O que você precisou para “consertar” o cálculo das divisões que não estavam corretas?

Fonte: Elaborado pela autora

A grande maioria dos alunos justificou que o resto era maior que o divisor e que foi necessário mudar o valor do quociente e realizaram o algoritmo de forma correta com exceção de quatro alunos. Desses, dois se enganaram no item b) esquecendo de considerar o zero no quociente durante a divisão. Concordamos com Lautert (2005), descrita na consulta bibliográfica, quando afirma que existe uma dificuldade dos alunos em compreender que o resto nunca deve ser maior nem igual ao divisor, pois, nesse caso, o valor do quociente deve ser alterado. Dois alunos prosseguiram a divisão com o quociente que existia sem redistribuir o valor no quociente e produzir um novo resto.

Observamos que o trânsito dos alunos pelas diferentes formas de tratamento de um objeto matemático foi bem-sucedido e acreditamos que o objetivo da atividade foi atingido, pois todos concluíram o exercício com empenho e dedicação.

Para a versão revisada fizemos a modificação desse exercício. Colocamos alguns cálculos corretos e outros que devem ser corrigidos e é solicitado para os alunos verificarem quais estão corretos e quais não estão corretos, devendo corrigir os que não estão desenvolvidos de forma correta.

Neste dia os alunos levaram como atividade de casa a Folha 9 para pesquisar o significado das siglas AM/PM que aparecem nos relógios digitais, bem como qual a origem dessas siglas e para que elas são utilizadas. A discussão sobre o assunto aconteceria no dia seguinte no início da próxima aula.

Quadro 33 - Atividade da Folha 9

Folha 9

1) Para a próxima aula pesquise na internet ou em livros o significado das siglas AM/PM que aparecem nos relógios digitais. Qual a origem dessas siglas e para que elas são utilizadas.

____

____

Fonte: Elaborado pela autora

Terceira Aula: 23/09/2015 – participaram 15 alunos

No terceiro encontro tivemos apenas um período de 50 minutos e foi discutida a atividade de casa do dia anterior e depois foram trabalhados os problemas das Folhas 10 e 11.

Para nossa surpresa pouco mais de metade dos alunos completou o que foi solicitado na Folha 9. Os alunos que responderam, basicamente, disseram que AM e PM são siglas que vem do latim (*Ante Meridiem* e *Post Meridiem)* e significam respectivamente antes do meio dia e depois do meio dia e são utilizadas para identificarmos em que período do dia estamos. O objetivo dessa atividade era trazer algumas curiosidades acerca do registro das horas no relógio para motivar a próxima atividade.

As atividades da Folha 10 tinham como objetivo familiarizar o aluno com os ponteiros do relógio identificando as horas que são AM e as horas que são PM.

A figura do relógio analógico na folha de atividades já simbolizava que trabalharíamos com esse tipo de representação, onde o fato do dia ser dividido em dois períodos de 12 horas cada nos permite explorar uma aplicação do resto.

Quadro 34 - Atividades da Folha 10

Folha 10

1) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 15 horas? ___________

2) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 17 horas? ___________

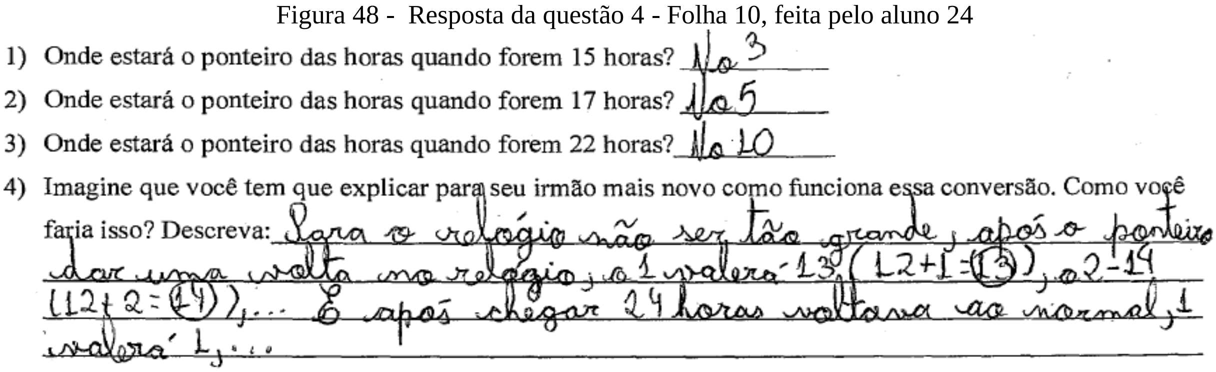
3) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 22 horas?____________

4) Imagine que você tem que explicar para seu irmão mais novo como funciona essa conversão. Como você faria isso? Descreva:____

Fonte: Elaborado pela autora

Todos os alunos identificaram corretamente onde estaria o ponteiro do relógio nas três situações solicitadas. Vemos na Figura 48 que o aluno esclareceu de forma correta o funcionamento das horas do relógio quando realizou a descrição da conversão das horas.

Figura 48 - Resposta da questão 4 - Folha 10, feita pelo aluno 24



1) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 15 horas? No 3

2) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 17 horas? No 5

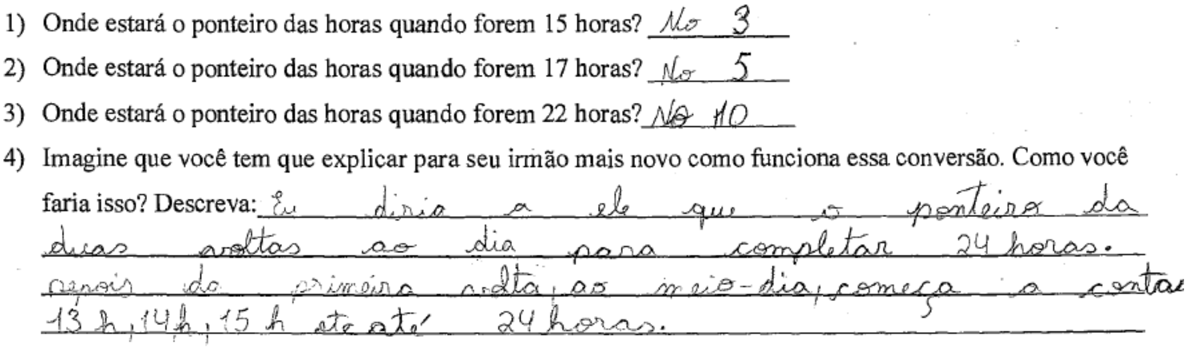
3) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 22 horas? No 10

4) Imagine que você tem que explicar para seu irmão mais novo como funciona essa conversão. Como você faria isso? Descreva: Para o relógio não ser tão grande, após o ponteiro dar uma volta no relógio, o 1 valerá 13 (12+1=13), o 2 14 (12+2=14),... E após chegar 24 horas voltava ao normal, 1 valerá 1,...

Fonte: Produção dos alunos

Na Figura 49 podemos perceber que o aluno entende que o dia é dividido em dois períodos de 12 horas e que o ponteiro que indica as horas deve dar duas voltas no relógio. Ele não justificou explicitamente que 13h corresponde à 1h da tarde e assim por diante, mas indicou esse fato afirmando que começa a contar 13h, 14h,..., até o 24.

Figura 49 - Resposta da questão 4 - Folha 10, feita pelo aluno 12



1) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 15 horas? No 3
2) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 17 horas? No 5
3) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 22 horas? No 10
4) Imagine que você tem que explicar para seu irmão mais novo como funciona essa conversão. Como você faria isso? Descreva: Eu diria a ele que o ponteiro da duas voltas ao dia para completar 24 horas. depois da primeira volta, ao meio-dia, começa a contar 13 h, 14h, 15 h ate até 24 horas.

Fonte: Produção dos alunos

Assim que os alunos terminaram de responder a Folha 10 a professora entregou a Atividade 11 e observou que seguiriam mais situações-problema envolvendo tempo.

A Folha 11 apresenta problemas nos quais deve-se observar não apenas os períodos de 12 horas em que o relógio divide o dia, mas também os dias que se passam para poder identificar corretamente a hora procurada.

Quadro 35 - Atividades da Folha 11

Folha 11

1) Agora responda:

a) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 10 horas, que horas serão? ______________________

b) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 89 horas que horas serão? ______________________

2) Responda:

a) Agora são 10 horas da manhã; um filme que quero muito assistir vai passar daqui a 72 horas. Que horas começará o filme? ____

b) Agora são 10 horas da manhã e o meu time irá jogar daqui a 24 horas? Que horas será o jogo?__________

c) Agora são 10 horas da manhã e estamos saindo para um passeio com a escola e só voltaremos daqui a 48 horas. A que horas do dia estaremos de volta?______________________________

d) Acordei às 10 horas da manhã e fui passar uns dias na casa da minha avó. Quando voltei calculei o tempo que fiquei fora de casa e totalizaram-se 60 horas. A que horas cheguei da casa da minha avó? _______

e) A empresa JOGOSMIX lançará 3 novos jogos, às 10 horas da manhã, do dia 3 de outubro de 2015. Você deseja baixar os 3 jogos o mais rápido possível, porém a empresa não disponibiliza downloads simultâneos; cada jogo poderá ser baixado com um intervalo de 30 horas depois de iniciado o download. Faça um planejamento para obter os 3 jogos relacionando dia e hora prevista para os downloads.

____

Fonte: Elaborado pela autora

Todos os alunos responderam a primeira questão de forma correta expressando os resultados com números de 1 a 12 dizendo se era manhã ou tarde, apenas um aluno somou as horas deixando apenas apontados os resultados 7 + 10 = 17 e 7 + 89 = 96.

A segunda questão foi respondida pelos alunos de modo que o resultado foi expresso da mesma forma que na questão anterior, apenas um aluno não respondeu ao item e). Dois alunos responderam esse item de forma interessante, pois somaram o total de horas necessárias para completar os três downloads, um deles escreveu que passariam 3 dias e 18 horas e que isso aconteceria no dia 6 de outubro e o outro se confundiu um pouco, concluindo que se passariam 3 dias e 6 horas e que também seria dia 6 de outubro. Outro aluno também interpretou o problema de uma maneira diferente dos demais, ele pensou que o primeiro download iniciaria no momento do lançamento do jogo e fez todos os cálculos considerando isso. Todos os demais pensaram em iniciar o primeiro download 30 horas depois do lançamento do jogo.

Quarta Aula: 24/09/2015 – participaram 16 alunos

No quarto encontro houve dois períodos de 50 minutos e foram trabalhados os itens da Folha 12. Com essa atividade esperávamos que os alunos percebessem a conveniência da escolha de divisores de 24 na prescrição dos intervalos para tomar um medicamento.

A professora iniciou a aula entregando e lendo os exercícios da folha de atividades com os alunos. Percebemos que a presença da tabela impressa na folha de atividades fez com que surgissem muitas dúvidas quanto ao seu preenchimento, os alunos acharam que todas as células da tabela deveriam ser preenchidas o que causou muita confusão nos grupos. Tomando como exemplo o item a), o primeiro horário do segundo dia acabaria sendo preenchido na linha do primeiro dia e assim por diante. No item b) os horários dos dias ficariam misturados, por exemplo, um horário do segundo dia estaria na linha do primeiro, três horários do quarto dia estariam na linha do terceiro dia e a linha do sétimo dia registraria horários do oitavo dia. A professora interveio dizendo que nem todas as células precisariam ser preenchidas e que deveriam observar os horários para mudar de linha ao preencher a tabela. Assim todos retomaram a atividade do início.

Depois da discussão inicial as tabelas dos itens a) e b) foram preenchidas da forma esperada por quase todos os alunos. Apenas três deles preencheram parcialmente os cronogramas e um não preencheu de forma correta nenhum dos dois cronogramas pois se atrapalhou com os horários.

Quadro 36 - Atividades da Folha 12

Folha 12

a) O Dr. Melhorelogo receitou um xarope para a Dona Tosse Louca que deveria ser tomado de 8 em 8 horas durante 7 dias. Às 15horas ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

1º dia			
2º dia			
3º dia			
4º dia			
5º dia			
6º dia			
7º dia			

b) Mesmo seguindo o cronograma à risca, Dona Tosse Louca piorou um pouco e o Dr. Melhorelogo pediu para que ela tomasse o xarope de 7 em 7 horas durante uma semana. Às 6 horas da manhã ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

1º dia				
2º dia				
3º dia				
4º dia				
5º dia				
6º dia				
7º dia				

c) Qual a diferença deste cronograma para o anterior?____
____

d) É mais prático tomar um remédio a cada 8 horas ou a cada 7 horas? Por quê?_________________________
____

e) Dona Tosse Louca não conseguiu seguir o segundo cronograma e tomar o xarope nas horas indicadas pois os horários variavam todos os dias e o Doutor Melhorelogo precisou aumentar o número de doses do xarope. Indique as opções que o Dr. Melhorelogo tem para prescrever o remédio de modo que a Dona Tosse Louca tome as doses sempre no mesmo horário.

Fonte: Elaborado pela autora

Todos responderam ao item c) e o que nos chamou a atenção é que grande parte dos alunos atentou para o fato de os dois cronogramas apresentarem horários diferentes e a quantidade de vezes que o medicamento teria que ser tomado se observássemos o segundo cronograma. Alguns alunos observaram que a diferença entre um cronograma e outro é de uma hora e que no segundo cronograma teriam mais doses a serem ministradas como podemos confirmar na transcrição das respostas de alguns alunos abaixo:

- “ um tem uma hora a menos que o outro e no segundo cronograma tem que tomar mais vezes o remédio” disse o aluno 15;

- “um é de 8 em 8 horas e o outro é de 7 em 7 horas” disse o aluno 09;

Alguns alunos observaram a regularidade nos horários do primeiro cronograma:

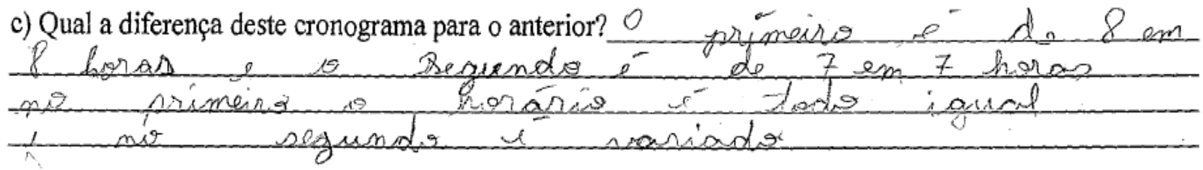
- “no anterior o remédio deveria ser tomado sempre na mesma hora e este era sempre em horários diferentes” falou o aluno 24;

- “no primeiro o horário é todo igual e no segundo é variado” comentou o aluno 06.

O aluno 04 observou os horários e escreveu: “ um é de 7x7 e o outro de 8x8 e um tem mais que o outro”, não mencionando a regularidade dos horários do primeiro cronograma se comparado com o segundo.

Abaixo, na Figura 50, podemos perceber que o aluno, além de observar diferença dos dois horários, estava atento para o fato de o primeiro cronograma manter uma certa regularidade em relação ao segundo.

Figura 50 - Resposta do aluno 06 para o item c) da Folha 12


c) Qual a diferença deste cronograma para o anterior? O primeiro é do 8 em 8 horas e o Segundo é de 7 em 7 horas no primeiro o horário é todo igual e no segundo é variado

Fonte: Produção dos alunos

No item d), todos os alunos responderam que é mais prático tomar um remédio a cada 8 horas do que a cada 7 horas, sendo que a maioria justificou que é por causa dos horários que se repetem, porém, cinco alunos justificaram ser mais prático tomar um remédio a cada 8 horas por ter menos doses a serem tomadas, observando a quantidade de doses e não a praticidade dos horários.

No item e) todos os alunos responderam corretamente à questão. Apenas um aluno não interpretou corretamente a questão e relacionou alguns horários que não foram pedidos (8h/8h, 12h/12h, 24h/24h) e um aluno deixou a questão em branco.

A resposta do aluno 24 (Figura 51), representa a resposta dos alunos que complementaram a justificativa do item e) dizendo que aqueles números escolhidos eram divisores de 24.

Figura 51 - Resposta do aluno 24 para o item e) da Folha 12

e) Dona Tosse Louca não conseguiu seguir o segundo cronograma e tomar o xarope nas horas indicadas pois os horários variavam todos os dias e o Doutor Melhorelogo precisa aumentar o número de doses do xarope. Indique as opções que o Dr. Melhorelogo tem para prescrever o remédio de modo que a Dona Tosse Louca tome as doses sempre no mesmo horário.

A cada 6 horas, pois 24 (dia inteiro) é divisível por 6 (ou a cada 4, 3, 2 ou 1 hora(s))

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 52 vislumbra que, a exemplo do que estava na folha de atividades, o aluno preencheu uma tabela para uma semana com a sugestão de prescrição de horário de 3 em 3 horas, porém percebeu que isso não era necessário e depois relacionou os outros divisores de 24, menores que 8.

Figura 52 - Resposta do aluno 12 para o item e) da Folha 12

e) Dona Tosse Louca não conseguiu seguir o segundo cronograma e tomar o xarope nas horas indicadas pois os horários variavam todos os dias e o Doutor Melhorelogo precisa aumentar o número de doses do xarope. Indique as opções que o Dr. Melhorelogo tem para prescrever o remédio de modo que a Dona Tosse Louca tome as doses sempre no mesmo horário.

1º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	1º Dia				
2º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	2º Dia				
3º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	3º Dia				
4º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	4º Dia				
5º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	5º Dia				
6º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	6º Dia				
7º Dia	3	6	9	12	15	18	21	24	7º Dia				

*3 em 3 horas
*1 em 1 hora
*2 em 2 horas
*6 em 6 horas
*4 em 4 horas

Eles se encaixam porque são divisores de 24.

Fonte: Produção dos alunos

No item e) alguns alunos avançaram um pouco mais, relacionando alguns intervalos que não seriam convenientes para serem utilizados na prescrição de um medicamento, como podemos ver na Figura 53.

Figura 53 - Resposta complementar do aluno 09 para o item e) da Folha 12

5/5 horas não dá
7/7 horas não dá
9/9 horas não dá
10/10 horas não dá
11/11 horas não dá

Fonte: Produção dos alunos

Inicialmente surgiram muitas dúvidas em relação ao preenchimento das tabelas. A presença da professora era muito solicitada nos grupos para verificar se o que eles estavam fazendo estava correto. Foi necessário reler o problema várias vezes com toda a turma para que a atividade fosse entendida. Embora o ato de tomar alguma medicação seja um assunto comum em muitas famílias, essa atividade causou uma certa estranheza para os alunos, pois percebemos que não é um assunto da responsabilidade de pessoas dessa faixa etária.

Mesmo assim, entendemos que os alunos responderam satisfatoriamente todos os itens da atividade de forma organizada e que os objetivos foram alcançados. Conforme apontado nos PCN, a Matemática é uma disciplina com bastante vitalidade e que se relaciona intimamente com a realidade. Seus conceitos e resultados podem ser obtidos através de exemplos práticos da vida.

Na sequência revisada não colocamos a tabela e solicitamos para os alunos esboçarem o cronograma livre, de seu jeito e conforme a sua interpretação do problema.

Quinta Aula: 25/09/2015 – participaram 17 alunos

Nas atividades da Folha 13 os alunos trabalharam com problemas relacionados com calendário com o objetivo de aplicar as propriedades dos restos para a resolução das questões. Esperávamos que os alunos utilizassem o resto da divisão por 7 para responder às perguntas.

O quinto encontro teve dois períodos de 50 minutos e a professora encontrou dificuldade para iniciar o trabalho, pois os alunos não estavam conseguindo resolver as questões sem contar os dias no calendário. A professora começou a fazer alguns questionamentos acerca do calendário e os alunos observaram que todas as semanas têm 7 dias, mas questionaram que um mês de 30 ou 31 dias não pode ser diluído em intervalos completos de 7 dias, pois sobrariam dias. Houve discussão envolvendo toda a turma acerca desse assunto e foi só quando uma aluna observou que isso não tinha importância, pois se o mês terminasse em um determinado dia da semana o outro mês começaria no dia seguinte e bastaria atentar para esse detalhe para observar as semanas que eles começaram a perceber que poderiam resolver essa atividade sem a presença física de um calendário.

Pensamos que essa atividade não iria apresentar dificuldades e que seria resolvida com mais rapidez e facilidade pelos grupos. Outra dificuldade encontrada pelos alunos foi em relação aos meses com 30 e com 31 dias. Eles não sabiam identificar corretamente a quantidade de dias de um determinado mês sem a presença de um calendário. Eles tinham clareza de que o mês de fevereiro tinha 29 ou 28 dias se fosse bissexto ou não. A professora decidiu compartilhar com eles um método prático que ela havia aprendido há muito tempo. Pediu para que fechassem uma de suas mãos em punho e notassem que tinham 4 ossos lá. Cada um representava um mês de 31 dias, enquanto o espaço entre eles representaria um mês de 30 dias (ou 28 ou 29, se tratando de Fevereiro). Contaram o primeiro ossinho como janeiro, o espaço entre os dois primeiros ossos era fevereiro, o segundo osso representava março e assim sucessivamente, até julho, daí voltaram ao primeiro ossinho que seria agosto. Continuaram assim até dezembro. Os alunos acharam muito interessante e desenvolveram todas as atividades envolvendo calendário usando esse método.

Quadro 37 - Atividades da Folha 13

Folha 13

Outra aplicação muito interessante da divisão está nos problemas relacionados com os calendários. Vamos considerar, por exemplo, o calendário do mês de setembro do ano de 2015:

D	*S*	*T*	*Q*	*Q*	*S*	*S*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
27	*28*	*29*	*30*			

1) Sabendo que 01/09/2015 foi uma terça-feira, determine:

a) Em que dia da semana cairá o dia 12 de outubro de 2015, Dia da Criança?

b) Em que dia da semana cairá o dia 09/11/2015, dia do início da Feira do Livro de Garibaldi?

c) Em que dia da semana cairá o dia 31/12/2015, último dia deste ano?

d) Qual é o dia do seu aniversário? Quantos dias faltam para essa data? E em que dia da semana cairá?

Fonte: Elaborado pela autora

Queríamos que os alunos reconhecessem que os padrões e as regularidades dessa atividade estavam relacionados com a repetição por 7. As questões procuraram observar essa importante propriedade relacionada aos calendários.

Para atingirmos os objetivos propostos nessa atividade foi necessário fazer um exemplo com os alunos. Depois de sugerir nova leitura, interpretação e debate em grupo da atividade, a professora decidiu olhar no calendário que estava colado na contracapa do seu caderno e localizou o dia 1º de junho de 2015. Com base nesse dia encontrou com os alunos o dia da semana do início do recesso escolar de inverno, que aconteceu no dia 27 de julho de 2015.

A professora escreveu no quadro uma tabela com as duas primeiras semanas de junho, conforme tabela abaixo:

Quadro 38 – Primeiras semanas do mês de junho de 2015

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14						

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos colaboravam e observavam atentos e a professora fez vários questionamentos, como:

- "Qual é a característica dos dias que caem no domingo?"

- "E os dias que caem na segunda, como são?"

Ao serem indagados, os alunos demonstraram, oralmente, um entendimento das características desses dias. O aluno 06 observou que os dias que caiam no domingo seriam "os números da tabuada do 7" e os demais colegas concordaram complementando que os dias que cairiam na segunda não seriam os múltiplos de 7, mas seriam os múltiplos de 7+1.

A professora seguiu com os questionamentos:

- "Então se eu tenho certa quantidade de dias e essa quantidade é um número divisível por 7, sempre vai cair num domingo? "

- "E se no resultado da divisão der resto um, em que dia da semana vai cair? "

O aluno 24 levantou a mão e respondeu:

- "Bom, se quando eu dividir por 7 der resto zero, parece que vai cair sempre no domingo, e se der resto um tem que avançar um dia, então vai cair na segunda, é claro. "

A professora seguiu com o raciocínio do exemplo que tinha decidido resolver com eles:

- "Então para saber em que dia da semana caiu o dia 27/07/2015 o que precisamos fazer?"

Houve um silêncio na sala e a professora repetiu a pergunta, então o aluno 15 respondeu:

- "Acho que temos que saber quantos dias faltam para chegar esse dia"

- "E como fazemos isso? " Perguntou a professora.

- "Somando os dias de junho e mais 27 dias de julho" disse o aluno 19.

- "Então vamos lá! " Desafiou a professora.

Logo a turma colaborou e, oralmente, disseram que faltariam 57 dias.

- "Quem gostaria de resolver no quadro? " Pediu a professora.

Logo uma aluna levantou e se prontificou a resolver a operação chegando ao resultado, concluindo então que o dia 27 de julho seria uma segunda-feira.

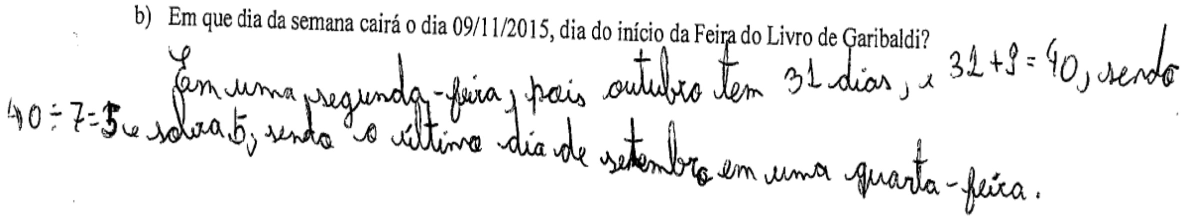
Esse momento em que os alunos puderam expressar sua opinião, intermediados pela professora, foi importante, pois segundo os PCN podemos observar " a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções." (BRASIL, 1998, p. 15)

Depois dessa discussão os alunos seguiram com a resolução dos itens da atividade em seus grupos.

No item a) a maioria dos alunos somou os dias do mês de setembro com os doze dias de outubro (30 + 12 = 42) e depois dividiu por 7 obtendo resto zero e concluindo que o Dia da Criança seria numa segunda-feira. Apenas um aluno tomou como base o dia 30 de setembro observando apenas os doze dias do mês de outubro (12 = 1 semana mais 5 dias) para responder, ele concluiu que, como dia 30 de setembro é numa quarta-feira, então somando cinco dias a partir de quarta, o Dia da Criança cairia numa segunda-feira.

No item b) a maioria dos alunos somou 30 dias de setembro, mais 31 dias de outubro com mais 9 dias de novembro (30 + 31 + 9 = 70) e dividiu o total por 7, encontrando resto zero e concluindo que seria numa segunda-feira. Um aluno efetuou os cálculos de forma correta e usou o valor do quociente para situar o dia da semana, ou seja, o quociente era igual a 10 e o dia 10 de setembro foi na quinta-feira, então essa foi a resposta desse aluno. Dois alunos realizaram a operação de divisão de forma não correta chegando a respostas equivocadas. Na Figura 54 podemos perceber que um aluno iniciou os cálculos somando 31 dias de outubro mais 9 de novembro (31 + 9 = 40) e dividiu o resultado por 7 (40 = 7.5 + 5), tomando como base o último dia de setembro para situar o resto, concluiu que o dia procurado seria numa segunda-feira.

Figura 54 - Resposta do aluno 24 para o item b) da Folha 13


b) Em que dia da semana cairá o dia 09/11/2015, dia do início da Feira do Livro de Garibaldi?

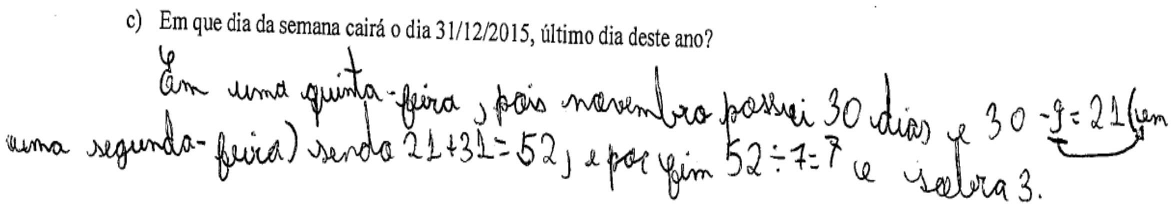
Em uma segunda-feira, pois outubro tem 31 dias, e 31+9=40, sendo 40÷7=5 e sobra 5, sendo o último dia de setembro em uma quarta-feira.

Fonte: Produção dos alunos

No item c) a maioria dos alunos somou 30 dias de setembro, 31 dias de outubro, 30 de novembro e 31 dias de dezembro (30 + 31 + 30 + 31 = 122) e dividiu o resultado por 7, obtendo resto 3 ($122 = 7 \times 17 + 3$) concluindo que cairia numa quinta-feira. Apenas um aluno não chegou à resposta correta pois efetuou a divisão de maneira equivocada ($122 = 7 \times 16$) e concluiu que cairia numa segunda-feira.

A Figura 55 ilustra uma resolução que se diferenciou das demais. O aluno usou o resultado da questão anterior e seguiu o raciocínio correto concluindo a questão com êxito, demonstrando maturidade e segurança no conhecimento dos conceitos envolvidos. Segundo Duval (2003) a conceitualização acontece quando o aluno mobiliza os registros de representação semiótica do objeto matemático.

Figura 55 - Resposta do aluno 24 para o item c) da Folha 13


c) Em que dia da semana cairá o dia 31/12/2015, último dia deste ano?

Em uma quinta-feira, pois novembro possui 30 dias e 30-9=21 (em uma segunda-feira) sendo 21+31=52, e por fim 52÷7=7 e sobra 3.

Fonte: Produção dos alunos

Para a resolução do item d) houve muita empolgação, pois, os alunos queriam compartilhar o dia do seu aniversário. A atividade foi desenvolvida com êxito pela maioria dos alunos. Apenas um aluno efetuou os cálculos de forma incorreta e dois alunos não concluíram a atividade. Alguns alunos foram além do esperado e quiseram calcular o dia da semana do aniversário de outros colegas e da professora e fizeram todo o levantamento com os cálculos atrás da folha de atividades. Vários alunos sabiam o dia da semana do seu aniversário, mas queriam confirmar através da resolução da atividade e conforme iam comprovando percebia-se a vontade que eles tinham de compartilhar com os colegas e fazer o cálculo de outra data.

Consideramos que os objetivos propostos para essa atividade foram alcançados, uma vez que, superadas as dificuldades do início da aula, os alunos apresentaram poucos erros na resolução das questões e muita empolgação em descobrir em que dia da semana caía determinado dia.

Com essas atividades pudemos perceber que revisar a matemática por meio de problemas contextualizados ou da realidade é uma abordagem consistente e que desperta a atenção, o interesse e a curiosidade dos alunos. Os PCN definem que "um problema matemático é uma situação que demanda realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la." (BRASIL, 1998, p. 44)

Nesse dia solicitamos uma atividade individual extraclasse, o objetivo dessa atividade era retomar as questões calendário e horas como forma de verificar se esse tipo de problema seria resolvido individualmente. Propusemos questões que associavam duas técnicas de resolução, uma onde deveriam observar diretamente a quantidade de dias e a outra onde essa quantidade deveria ser observada através da conversão das horas.

Quadro 39 - Atividades da Folha 13/2

Folha 13/2

a) Nosso último encontro será dia 02/10/2015, sexta-feira e retomaremos nossas aulas depois de 33 dias afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês e o dia da semana do nosso próximo encontro.

b) Nosso último encontro será dia 02/10/2015 às 10h da manhã e retomaremos nossas aulas depois de 790 horas afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês, o dia da semana e o horário do nosso próximo encontro.

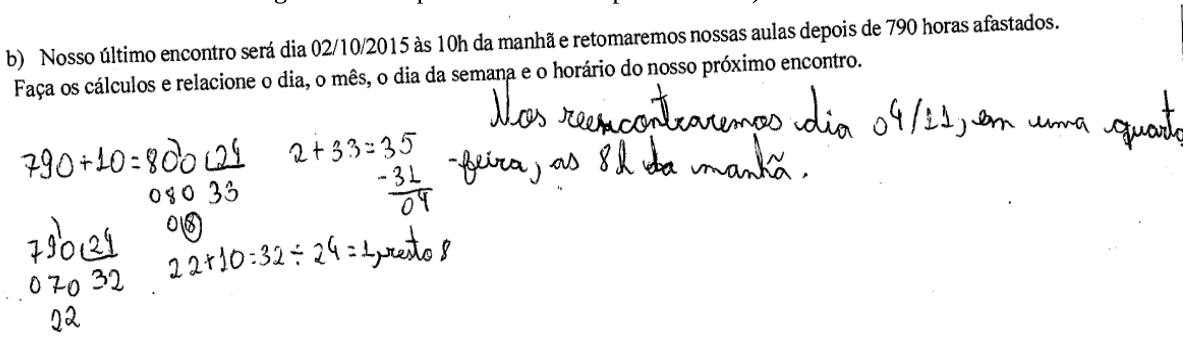
Fonte: Elaborado pela autora

No item a) a maioria dos alunos realizou a divisão ($33 = 7 \times 4 + 5$) e usou o resto concluindo que, como 02/10/2015 era numa sexta-feira, então nosso próximo encontro seria numa quarta-feira, dia 04/11. Apenas dois alunos justificaram que seria esse dia porque olharam num calendário e um aluno efetuou os cálculos de forma correta, mas equivocou-se na conclusão de que dia 04/11/2015 seria numa terça-feira.

No item b) a maioria dos alunos dividiu o número 790 por 24 ($790 = 24 \times 32 + 22$) e somou o resultado com 10 (22 + 10 = 32). Eles perceberam que 32 ainda poderia ser dividido por 24, deixando resto 8, então concluíram que o próximo encontro seria dia 04/11, às 8h da manhã, numa quarta-feira.

Na Figura 56, percebemos que o aluno demonstrou muita agilidade no raciocínio realizando essa tarefa de duas maneiras: primeiro somou o 10 com o total de horas antes de efetuar a divisão tendo menos trabalho com os cálculos e depois dividiu 790 por 24, somou 10 ao resto, dividiu novamente por 24 confirmando o mesmo resultado anterior. Podemos perceber, no desenvolvimento da resposta desse aluno, que ele tem bastante desenvoltura com os cálculos e que transita dentro dos registros semióticos sem dificuldades.

Figura 56 - Resposta do aluno 24 para o item b) da Folha 13/2



b) Nosso último encontro será dia 02/10/2015 às 10h da manhã e retomaremos nossas aulas depois de 790 horas afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês, o dia da semana e o horário do nosso próximo encontro.

Nos reencontraremos dia 04/11, em uma quarta-feira, as 8h da manhã.

790+10=800 | 24
080 33
08

2+33=35
-31
04

790 | 24
070 32
22

22+10=32÷24=1, resto 8

Fonte: Produção dos alunos

Embora os alunos, geralmente, apresentem dificuldades na resolução de problemas, acreditamos que resolver problemas relaciona-se a uma série de competências matemáticas que serão desenvolvidas não antes, mas durante o processo de construção da solução. São as situações que dão sentido aos conceitos. Um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações, os conhecimentos dos alunos são moldados pelas situações que encontram e, progressivamente, dominam.

Sexta Aula: 30/09/2015 – participaram 17 alunos

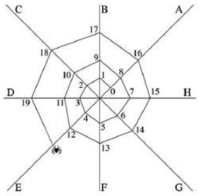
O sexto encontro foi composto por um período de 50 minutos. Nesse dia foram trabalhados os itens da Atividade 14 que exploram um fenômeno com características cíclicas e para encontrar a solução esperávamos que os alunos utilizassem o resto da divisão por oito.

A professora iniciou a aula entregando e lendo a folha de atividades com os alunos. Inicialmente, nem todos perceberam que poderiam utilizar o resto da divisão nesta atividade e alguns foram contando os fios.

Quadro 40 - Atividades da Folha 14

Folha 14

1) Uma aranha usa os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G e H para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho nesse ritmo e seguindo sempre a mesma ordem.



a) Sobre qual fio de apoio estará o número 25?

b) Sobre qual fio de apoio estará o número 40?

c) Sobre qual fio de apoio estará o número 55?

d) Sobre qual fio de apoio estará o número 82?

e) Podemos dizer que o número 100 está sobre o fio de apoio E? Por quê?

f) É correto afirmar que o número 240 está sobre o fio de apoio H? Por quê?

g) Onde a aranha deveria começar sua teia para que o número 240 estivesse sobre o fio de apoio H?

Fonte: Elaborado pela autora

Todos os alunos responderam corretamente o item a) desta questão, porém apareceram três tipos de justificativas diferentes: três alunos simplesmente responderam que a aranha estaria sobre o fio B; oito alunos justificaram que foram contando os fios, e seis alunos perceberam que poderiam usar o resto da divisão.

No item b) sete alunos fizeram a divisão e tomaram o resto, chegando ao resultado de forma correta, três apenas responderam que estaria no fio A e sete alunos contaram os fios, sendo que um desses se enganou no resultado dizendo que estaria sobre o fio G.

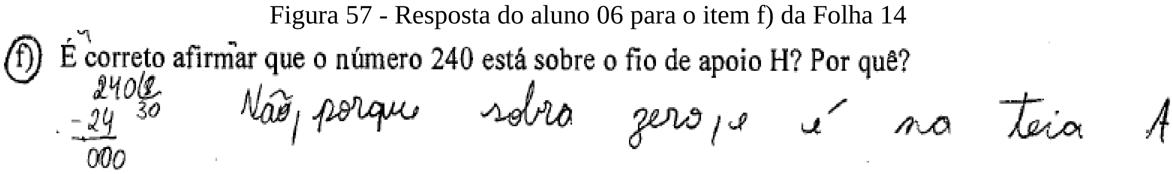
Nos itens c,d) três alunos apenas responderam em que fio estaria, seis alunos justificaram que contaram os fios, sendo que um desses se equivocou na contagem e oito alunos justificaram ter feito a divisão e ter utilizado o resto, chegando ao resultado esperado.

No item e) a maioria dos alunos fez a divisão e justificou que o número 100 estaria sim sobre o fio E. Apenas quatro alunos insistiram em contar os fios. Desses, dois não acertaram em que fio estaria o número 100.

No item f) todos os alunos justificaram que o resto da divisão é zero e, por isso, não estaria sobre o fio H e sim sobre o fio A com exceção de dois alunos que insistiram em contar os fios e que chegaram à mesma conclusão.

Na Figura 57 percebemos que o aluno 06 realizou a divisão 240 : 8 e obteve resto zero e concluiu que os números que deixam esse resto estariam sobre a teia A. O mesmo procedimento foi adotado pela maioria dos alunos.

Figura 57 - Resposta do aluno 06 para o item f) da Folha 14


f) É correto afirmar que o número 240 está sobre o fio de apoio H? Por quê?

240 | 8
-24 30
000

Não, porque sobra zero, e é na teia A

Fonte: Produção dos alunos

No item g) todos os alunos justificaram que a aranha deveria começar no fio H porque o 240 é divisível por 8 e todos os múltiplos de 8 estariam sobre o mesmo fio, com exceção de dois alunos que alegaram ter contado os fios e justificado que deveria começar na letra A.

Revendo a proposta para essa aula e analisando os resultados obtidos e as justificativas dos alunos, percebemos que embora muitos alunos não tenham percebido que poderiam utilizar a divisão por 8 desde o início, gradativamente foram tendo essa percepção e concluímos ter atingido nosso objetivo. Percebemos que os alunos usaram registros numéricos e em língua natural para justificar a solução dos problemas. Concordamos com Duval (2003), quando afirma que:

> Para fazer essa conversão, isto é, para selecionar os dados pertinentes dos problemas e para os organizar de forma a obter a operação (...) a ser efetuada, é preciso dispor,

> implícita ou explicitamente, de uma representação. Essa representação deve, ao mesmo tempo, permitir extrair os dados pertinentes e fornecer uma apreensão global da situação descrita, de tal forma que a conversão do texto (enunciado) no tratamento (...) venha a ser feita naturalmente. (DUVAL, 2003, p. 36)

Sétima Aula: 01/10/2015 – participaram 16 alunos

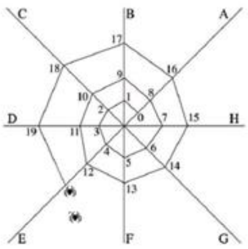
O sétimo encontro teve dois períodos de 50 minutos. Nesse dia foram trabalhadas as atividades das Folhas 15, 16 e 17.

Baseado na ideia da atividade da folha anterior, inserimos mais uma aranha no contexto do problema da Folha 15 mantendo a característica cíclica da situação e reforçando a possibilidade de soma de restos. Nesse caso, basta observar que não é necessário usar as voltas inteiras e sim os fios a mais que cada aranha percorre durante a construção da teia.

Quadro 41 - Atividades da Folha 15

Folha 15

1) Duas aranhas se revezam na construção de sua teia (uma continua o trabalho de onde a outra parou) usando os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G, e H, conforme mostra a figura.



a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira aranha teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada?

b) Imagine agora que a primeira aranha teceu 300 voltas completas e mais 4 fios e a segunda aranha teceu 200 voltas completas e mais 2 fios. Diga em que fio a teia foi terminada.

Fonte: Elaborado pela autora

Essa atividade nos surpreendeu positivamente, pois, muitos alunos perceberam que a cada volta completa a aranha retornava para o ponto de partida, então bastava observar onde ela ia parar contando os fios a mais que ela percorria demonstrando uma compreensão de eventos cíclicos.

Percebemos que os alunos começaram a demonstrar menos insegurança em resolver as questões propostas embora a presença da professora ainda fosse bastante solicitada.

No item a) todos os alunos concluíram que a teia terminaria no fio A com exceção de um aluno que concluiu que as aranhas terminariam a teia no fio G justificando que ele teria contado as voltas e os fios.

A Figura 58 ilustra a resolução do aluno 24 que calculou o total de fios que as aranhas teriam tecido e depois efetuou a divisão por 8, chegando ao resultado correto. Esse aluno demonstrou clareza na percepção de que a divisão por 8 era necessária para a resolução desse problema, mas não se deu conta de que as voltas inteiras poderiam ser dispensadas do cálculo.

Figura 58 - Resposta do aluno 24 para o item a) da Folha 15

a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada?

No fio A.

8·2=16+4=20
8·5=40+2=42
20·3=60+84=144 | 8
42·2=84
064 18
00

Fonte: Produção dos alunos

Podemos observar, nas Figuras 59 e 60, que os alunos 09 e 06, respectivamente, perceberam claramente que poderiam desconsiderar as voltas inteiras observando apenas os fios a mais que cada aranha avançava cada vez que tecia a teia, mostrando mais uma vez que os alunos não tiveram dificuldade em utilizar a “soma dos restos” para resolver a questão.

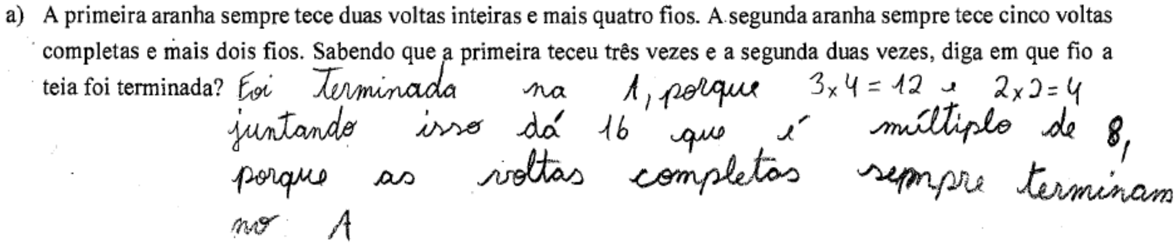
Figura 59 - Resposta do aluno 09 para o item a) da Folha 15

a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada?

Somei 3x4=12 e 2x2=4, então fiz 12+4=16 que múltiplo 8 e nessa consequência caiu na teia A

Fonte: Produção dos alunos

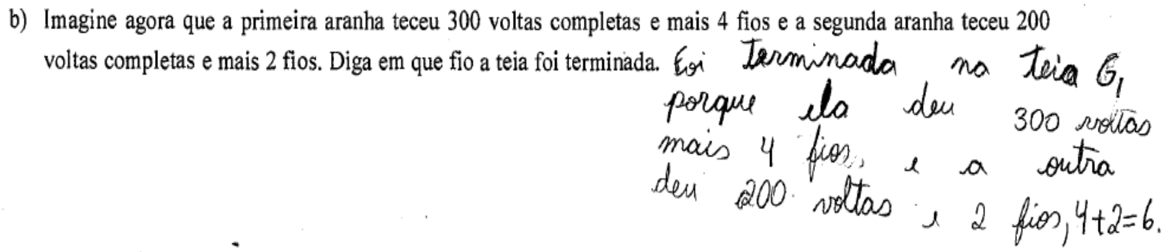
Figura 60 - Resposta do aluno 06 para o item a) da Folha 15


a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada? Foi Terminada na 1, porque 3x4 = 12 e 2x2 = 4 juntando isso dá 16 que é múltiplo de 8, porque as voltas completas sempre terminam no A

Fonte: Produção dos alunos

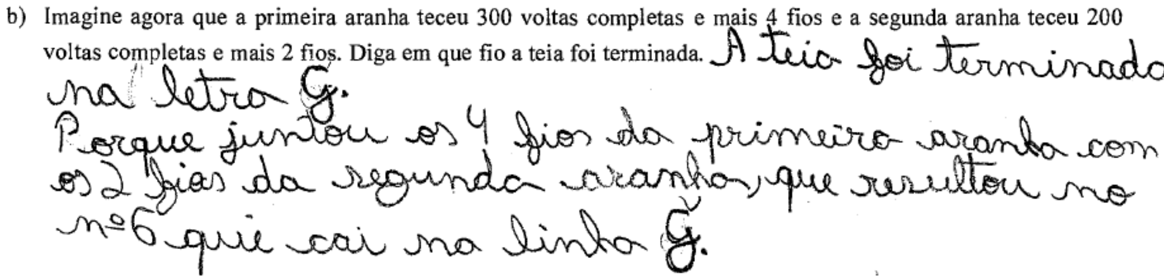
No item b) todos os alunos concluíram que as aranhas terminariam a teia no fio G. Analisando as respostas apresentadas nas Figuras 61 e 62, percebemos que os alunos 06 e 07, respectivamente, consideraram apenas os fios a mais, não considerando as voltas inteiras que as aranhas teciam, aplicando novamente a soma de restos.

Figura 61 - Resposta do aluno 06 para o item b) da Folha 15


b) Imagine agora que a primeira aranha teceu 300 voltas completas e mais 4 fios e a segunda aranha teceu 200 voltas completas e mais 2 fios. Diga em que fio a teia foi terminada. Foi Terminada na teia G, porque ela deu 300 voltas mais 4 fios, e a outra deu 200 voltas e 2 fios, 4+2=6.

Fonte: Produção dos alunos

Figura 62 - Resposta do aluno 07 para o item b) da Folha 15


b) Imagine agora que a primeira aranha teceu 300 voltas completas e mais 4 fios e a segunda aranha teceu 200 voltas completas e mais 2 fios. Diga em que fio a teia foi terminada. A teia foi terminada na letra G.
Porque juntou os 4 fios da primeira aranha com os 2 fios da segunda aranha, que resultou no nº6 que cai na linha G.

Fonte: Produção dos alunos

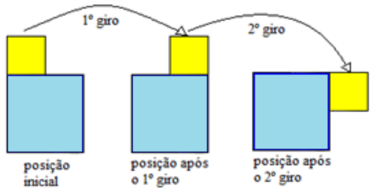
Observamos que os alunos resolveram esse item utilizando as somas dos fios a mais que cada aranha percorria. Percebemos que esse assunto se mostrou de fácil entendimento pois envolveu apenas operações fundamentais, por isso acreditamos que a prática de resolver exercícios utilizando esse conceito, estimula o raciocínio do aluno levando-o a buscar formas mais simples de resolver problemas. Também percebemos a desenvoltura dos alunos com a escrita, pois eles escreveram mais e de forma espontânea durante essa atividade.

O objetivo das atividades da Folha 16 era que os alunos percebessem que é outra aplicação do resultado do resto da divisão e que é a configuração de outro evento cíclico cujo resultado do problema pode ser obtido apenas utilizando o resto da divisão por 8.

Quadro 42 - Atividades da Folha 16

Folha 16

1) Um quadrado de lado 1cm roda em torno de um quadrado de lado 2cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.



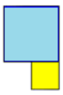
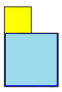
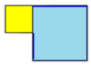
a) Qual a posição dos dois quadrados após o 5º giro?

b) Qual a posição dos dois quadrados após o 8º giro?

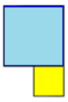
c) Qual a posição dos dois quadrados após o 16º giro?

d) Qual a posição dos dois quadrados após o 20º giro?

e) Quantos giros o quadrado menor deve dar sobre o quadrado maior para obtermos as figuras abaixo?

I)  II)  III)  IV) 

f) Partindo da posição inicial dada, é possível obter a configuração dos quadrados dada abaixo com 3 giros?



g) Qual deveria ser a posição inicial dos dois quadrados para que pudéssemos obter a configuração abaixo com 7 giros?

Fonte: Elaborado pela autora

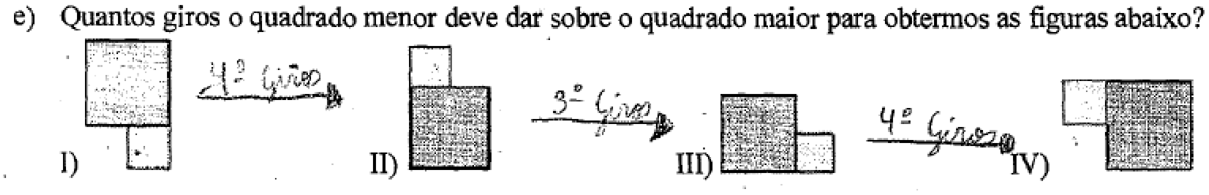
Em resposta aos itens a, b, c, d) todos os alunos desenharam os quadrados como resposta e concluíram as atividades com êxito. Estamos de acordo com Duval (2003) que nos adverte que:

> a possibilidade, na Matemática, de usar vários tipos de registros – gráficos, algébricos, geométricos e outros – interfere de modo decisivo no aprendizado. A qualquer momento pode ser exigida uma troca de registro, ou a mobilização simultânea de pelo menos dois tipos de registros (DUVAL, 2003, p. 14)

No item e) todos os alunos responderam de forma correta, apenas um aluno respondeu de forma equivocada o item II) dizendo que o quadrado menor deveria dar 3 giros sobre o quadrado maior para obter a configuração dada e no item IV) disse que o quadrado menor deveria dar 8 giros sobre o quadrado maior para obter aquela configuração.

Na Figura 63 podemos ver que o aluno 06 interpretou a questão de uma forma bem interessante. Ele partiu da primeira figura e, a partir dela, contou quantos giros seriam necessários para obter as outras configurações.

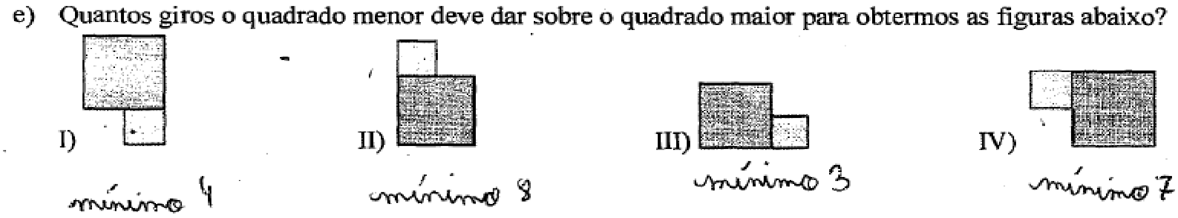
Figura 63 - Resposta do aluno 06 para o item e) da Folha 16



Fonte: Produção dos alunos

Na justificativa ilustrada na Figura 64, percebemos que o aluno 24 tem clara a ideia de que a configuração dos quadrados pode ser de diferentes números de giros. Quando ele escreve que obtém certa configuração com, no "mínimo" tantos giros, nos dá a entender que ele percebeu que está diante de um evento cíclico e com características periódicas e que, portanto, se repete a cada certo número de vezes.

Figura 64 - Resposta do aluno 24 para o item e) da Folha 16



Fonte: Produção dos alunos

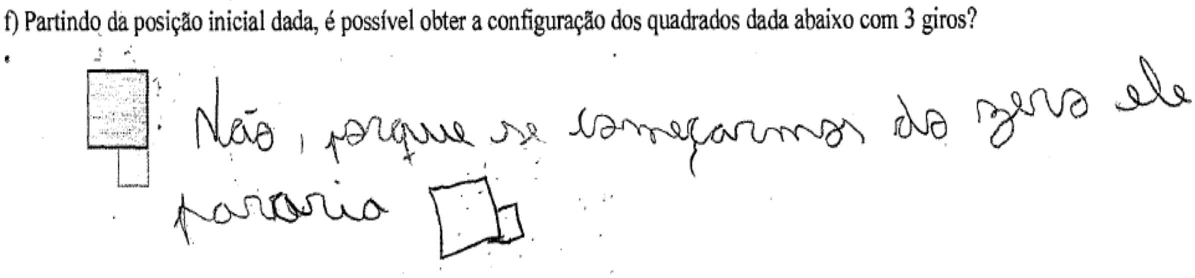
Os demais alunos registraram apenas a quantidade de giros necessária para obter as configurações solicitadas na primeira volta, não fazendo nenhuma menção ao número mínimo de voltas.

Percebeu-se que os alunos usaram as informações fornecidas pelo problema, interpretando o registro dos desenhos e expressando-se de forma a evidenciar sua compreensão sobre o conhecimento abordado. Duval (2004) considera que as conversões permitem a visualização de diversos tipos de representação e auxiliam na compreensão de um mesmo objeto matemático, o que pode ser percebido nesse caso.

No item f) todos os alunos concordam que não era possível obter a configuração dada com 3 giros. Alguns alunos sugeriram uma posição inicial onde o quadrado menor deveria girar no sentido anti-horário para atingir o objetivo com a quantidade de giros sugerida. Cinco alunos responderam que para chegar na posição solicitada seriam necessários 4 giros.

Dois alunos desenharam onde o quadrado pararia com 3 giros considerando a posição inicial como posição zero, conforme o exemplo apresentado na Figura 65.

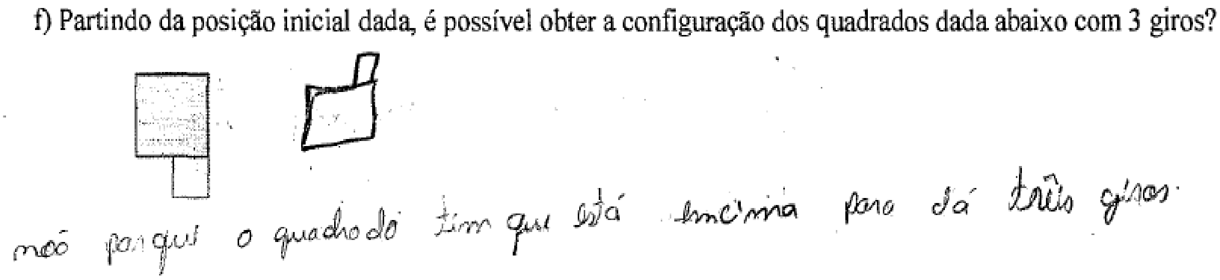
Figura 65 - Resposta do aluno 07 para o item f) da Folha 16



Fonte: Produção dos alunos

A Figura 66 ilustra um exemplo da resposta dada por cinco alunos, mostrando qual deveria ser a posição inicial dos quadrados para obter a configuração que o exercício solicitava.

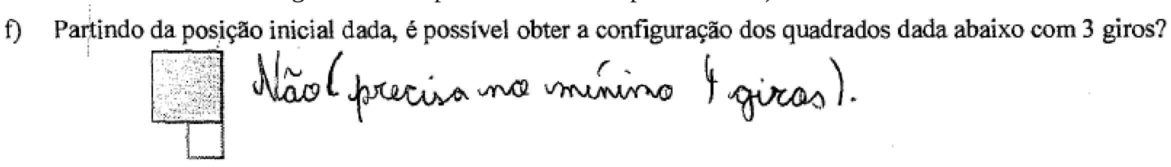
Figura 66 - Resposta do aluno 01 para o item f) da Folha 16



Fonte: Produção dos alunos

A exemplo da resposta dada no item e), o aluno 24 justificou que a quantidade “mínima” de giros para obter tal configuração seria de 4, sugerindo ter um bom conhecimento sobre eventos de natureza cíclica ilustra a Figura 67.

Figura 67 - Resposta do aluno 24 para o item f) da Folha 16



f) Partindo da posição inicial dada, é possível obter a configuração dos quadrados dada abaixo com 3 giros?

Não (precisa no mínimo 4 giros).

Fonte: Produção dos alunos

No item g) todos os alunos indicaram, através de um desenho, como deveria ser a posição inicial para obter a configuração dada com 7 giros. Apenas um aluno desenhou a configuração inicial de modo a obter a posição dos quadrados com 6 giros, equivocando-se no resultado.

As atividades dessa folha não apresentavam números para que os alunos pudessem realizar cálculos numéricos, mas eles representaram graficamente tudo o que foi solicitado, indicando que é possível propor problemas aos alunos e levá-los a buscar estratégias de resolução sem a necessidade de longos cálculos.

Nas atividades da Folha 17 queríamos que os alunos percebessem que poderiam encontrar os resultados solicitados sem construir a tabela, apenas observando a característica par ou ímpar das áreas.

Quadro 43 - Atividades da Folha 17

Folha 17

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas. Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	X	2	X	X
X	3	X	X	4	X	X
X	5	X	X	6	X	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 45 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 60 e a área 100?

b) Você mora na área 14 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Baseado no cronograma dado isso é possível? Por quê?

c) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. É possível a área 19 estar nesse cronograma de coleta? Por quê?

d) Meu amigo mora na área número 24 e lá o recolhimento do lixo acontece na quinta-feira. Minha prima está se mudando para a área número 62 e também gostaria que o caminhão recolhesse o lixo nesse dia. Baseado no cronograma de coleta dado, isso é possível?

e) Como você acha que o cronograma para a coleta de lixo foi construído?

Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos poderiam ter continuado com a construção da tabela para responder aos itens dessa atividade, porém esperávamos que eles percebessem que é mais prático utilizar o resto da divisão.

Quando os alunos receberam a folha de atividades logo perceberam que todas as áreas ímpares teriam a coleta realizada na segunda-feira e todas as áreas pares teriam a coleta realizada na quinta-feira. Dessa forma, todos os alunos responderam corretamente aos itens a) e b) e sem realizar os cálculos.

Da mesma forma todos acertaram o item c) justificando que era possível a área 19 estar no cronograma da segunda-feira pois era uma área ímpar e os recolhimentos dessas áreas acontecem nesse dia.

Todos os alunos acertaram o item d) justificando que era possível a área 62 estar no cronograma porque na quinta-feira acontece o recolhimento das áreas pares.

No item e) os alunos justificaram que as áreas pares têm o recolhimento na quinta-feira e as áreas ímpares na segunda-feira.

O desenvolvimento dessa atividade foi rápido e os alunos não demonstraram nenhuma dificuldade em resolver as questões. Acreditamos que o fato de ter áreas pares e ímpares facilitou o processo de visualização da resposta.

Oitava Aula: 02/10/2015 – participaram 17 alunos

O oitavo encontro teve dois períodos de 50 minutos e foi o último momento de atividades com essa turma. Nesse dia foram trabalhadas as Atividades 18 e 19.

Semelhante aos exercícios da folha anterior, o objetivo das questões dessa folha era continuar explorando um evento com características cíclicas, onde bastaria tomar o resto da divisão de dois números naturais para responder as atividades.

Quando entregamos a Folha 18, a maioria dos alunos percebeu que a cidade estava dividida em três áreas e que os dias tinham relação com os restos da divisão por três e os alunos que não haviam identificado inicialmente, entenderam os comentários dos colegas. Todos responderam corretamente ao item a) justificando que cairia numa sexta-feira pois todas as áreas mencionadas eram múltiplos de três.

Quadro 44 - Atividades da Folha 18

Folha 18

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas. Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	2	X	3	X
X	4	X	5	X	6	X
X	7	X	8	X	9	X
X	10	X	11	X	12	X
X	13	X	14	X	15	X
X	16	X	17	X	18	X
X	19	X	20	X	21	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 30 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 45 e a área 60? O que essas áreas têm em comum?

b) Em que dia da semana a área 40 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 55 e a área 70? O que essas áreas têm em comum?

c) Em que dia da semana a área 35 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 50 e a área 65? O que essas áreas têm em comum?

d) Você mora na área 20 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Isso é possível? Por quê?

e) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. Baseado no cronograma de coleta, a área 35 pode estar nesse roteiro? Por quê?

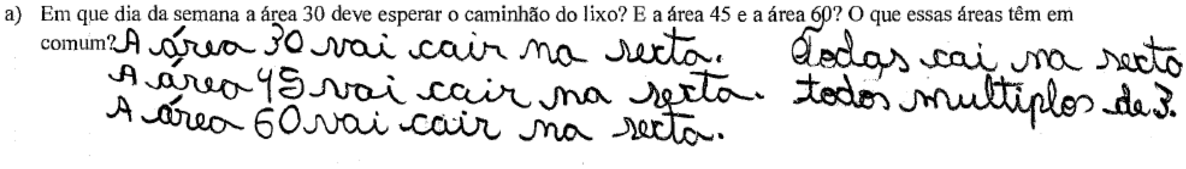
f) Eu resido na área número 44 e o recolhimento do lixo acontece na quarta-feira. Minha amiga irá morar na área 62 e gostaria que o caminhão recolhesse o lixo na sexta-feira. Dentro do cronograma de coleta dado, isso é possível?

g) É possível estabelecer uma relação entre a distribuição das áreas e cada dia da semana em que ocorre o recolhimento? Qual?

Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 68 apresenta a resposta do aluno 07, que justificou que cada número é múltiplo de três, demonstrando que ele percebeu, observando a tabela fornecida, que na sexta-feira estão todas as áreas com essa característica.

Figura 68 - Resposta do aluno 07 para o item a) da Folha 18

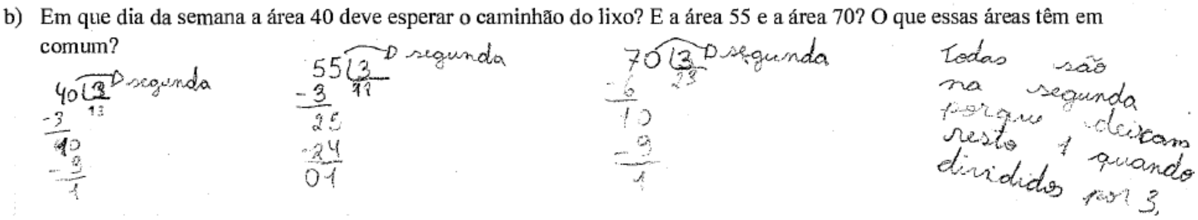


a) Em que dia da semana a área 30 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 45 e a área 60? O que essas áreas têm em comum? A área 30 vai cair na sexta. A área 45 vai cair na sexta. A área 60 vai cair na sexta. Todas cai na sexta todos multiplos de 3.

Fonte: Produção dos alunos

Nos itens b) e c) todos os alunos efetuaram a divisão por 3, encontrando, no item b), resto 1, concluindo que o dia correto seria segunda-feira, e no item c) resto 2, concluindo que o dia correto seria quarta-feira, como apresentam as Figuras 69 e 70.

Figura 69 - Resposta do aluno 06 para o item b) da Folha 18

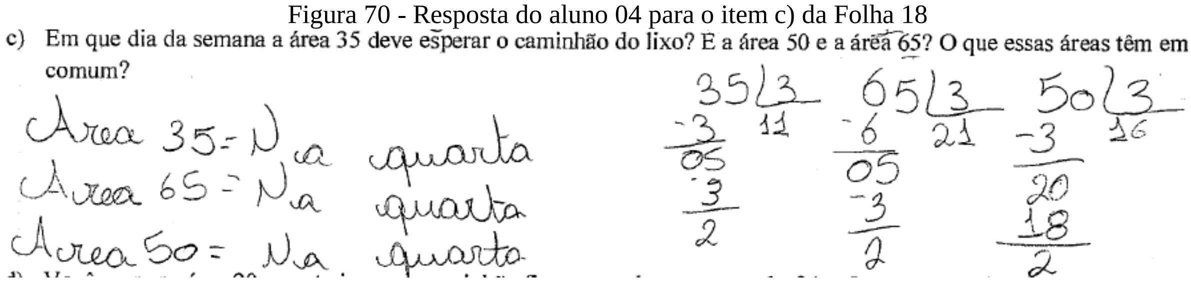

b) Em que dia da semana a área 40 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 55 e a área 70? O que essas áreas têm em comum?

40 ⌊3 → segunda
55 ⌊3 → segunda
70 ⌊3 → segunda

Todos são na segunda porque deixam resto 1 quando divididos por 3.

Fonte: Produção dos alunos

Figura 70 - Resposta do aluno 04 para o item c) da Folha 18

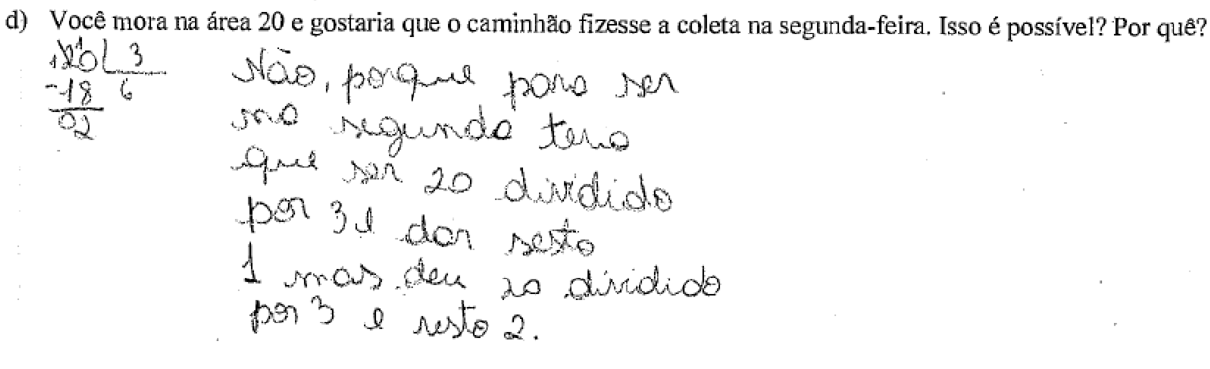

c) Em que dia da semana a área 35 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 50 e a área 65? O que essas áreas têm em comum?

Área 35 = Na quarta
Área 65 = Na quarta
Área 50 = Na quarta

Fonte: Produção dos alunos

Para responder o item d) os alunos poderiam ter verificado na tabela que estava impressa na folha de atividades, mas eles justificaram a resposta usando o resto da divisão por 3, como por exemplo o aluno 14, conforme ilustra a Figura 71.

Figura 71 - Resposta do aluno 14 para o item d) da Folha 18


d) Você mora na área 20 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Isso é possível? Por quê?

Não, porque para ser na segunda teria que ser 20 dividido por 3 e dar resto 1 mas deu 20 dividido por 3 e resto 2.

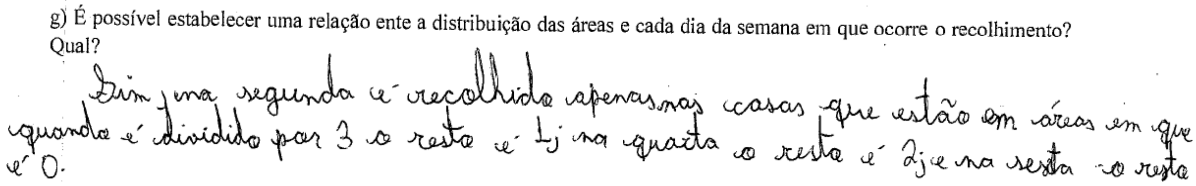
Fonte: Produção dos alunos

No item e) os alunos justificaram que não seria possível, pois ao dividirmos 35 por 3 temos resto 2, então o recolhimento aconteceria na quarta-feira e não na segunda-feira.

No item f) todos os alunos responderam que o recolhimento da área 62 seria na quarta-feira pois quando dividida por 3 deixa resto 2, sendo impossível o recolhimento acontecer na sexta-feira. Duas alunas justificaram que para ser na sexta-feira tem que ser um número divisor de três confundindo os conceitos de múltiplo e divisor.

A Figura 72 apresenta a resposta do aluno 24 para o item g) que justificou sua resposta usando os restos da divisão por 3. Todos os demais alunos usaram o mesmo argumento para esse item.

Figura 72 - Resposta do aluno 24 para o item g) da Folha 18


g) É possível estabelecer uma relação ente a distribuição das áreas e cada dia da semana em que ocorre o recolhimento? Qual?

Sim, na segunda é recolhido apenas nas casas que estão em áreas em que quando é dividido por 3 o resto é 1; na quarta o resto é 2; e na sexta o resto é 0.

Fonte: Produção dos alunos

Esperávamos que os alunos percebessem que nessa atividade os restos na divisão por três é que definiriam o dia da semana para o recolhimento, mas não imaginamos que seria tão imediato. Quando os alunos receberam a folha de atividades já se ouviam comentários do tipo: “agora é por três”, demonstrando que eles aceitaram e se envolveram com a proposta da pesquisa e avançaram na compreensão dos conceitos envolvidos. Concordamos com Duval (2003) quando diz que o reconhecimento das representações deve ser rápido para que o aluno atinja a compreensão do objeto matemático sempre com mais clareza

> Ainda que a atividade de pesquisa e a de resolução de problemas sejam importantes tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve por isso subestimar um outro tipo de atividade fundamental: o reconhecimento, isto é, a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais. A característica desse tipo de atividade é que ele deve ser rápido para ser eficaz ou útil. O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. (DUVAL, 2003, p. 23)

Com o objetivo de atentar para o processo inverso, onde o aluno deva mobilizar os conhecimentos que possui acerca da divisão Euclidiana para representar uma situação por meio de um problema é que pensamos no aluno como protagonista dos exercícios e pedimos para eles elaborarem questões que se utilizem do resto da divisão na sua resolução. Outro objetivo dessa atividade era levar o aluno a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de um determinado problema, a relação que deve haver entre os dados fornecidos, além de ter que pensar nele como um todo não se detendo apenas aos números.

Quadro 45 – Atividades da Folha 19

1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.
____
____

Fonte: Elaborado pela autora

A proposta inicial era de os alunos elaborarem problemas para depois haver um rodízio dos problemas elaborados, para outros alunos resolverem e escreverem comentários sobre a formulação do problema do colega e a possível dificuldade ou facilidade para resolvê-los. Infelizmente não tivemos tempo suficiente para desenvolver toda a atividade de modo que a professora sugeriu que eles trabalhassem em duplas para a elaboração e resolução do problema. Como estavam em 17 alunos um grupo ficou com três integrantes.

Inicialmente eles ficaram pensativos e sem saber o que escrever. Surgiam muitas ideias oralmente, mas eles tinham dificuldades em expressá-las no papel. A professora solicitou que eles registrassem o que estavam pensando da maneira como entendiam, mesmo que não tivesse a escrita matemática adequada. Ressaltando a importância de escreverem suas ideias argumentou que é mais fácil reescrever o que já está no papel do que elaborar um problema perfeito na primeira tentativa.

Observemos na Figura 73 que a questão elaborada pelos alunos se constitui num problema cuja resolução utiliza a divisão com resto. Os alunos elaboraram um problema e o resolveram, demonstrando clareza e organização na escrita. Na resolução do problema proposto, os alunos concluíram que o 100º jogo seria numa terça-feira, porém com os jogos iniciando na segunda isso não seria possível, já que o jogo de número 100 seria numa segunda-feira. Eles deveriam ter especificado o dia do mês e da semana em que os jogos iniciaram, pois, esse dado é importante para que outro aluno pudesse resolvê-lo.

Figura 73 - Questão elaborada pelos alunos 18 e 21

1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

Eu jogo futebol 3 vezes por semana, desde 1/12/15 (primeiro dezembro) desse ano. Quando será meu 100 jogo. Sabendo que jogo na segunda, terça e quarta.

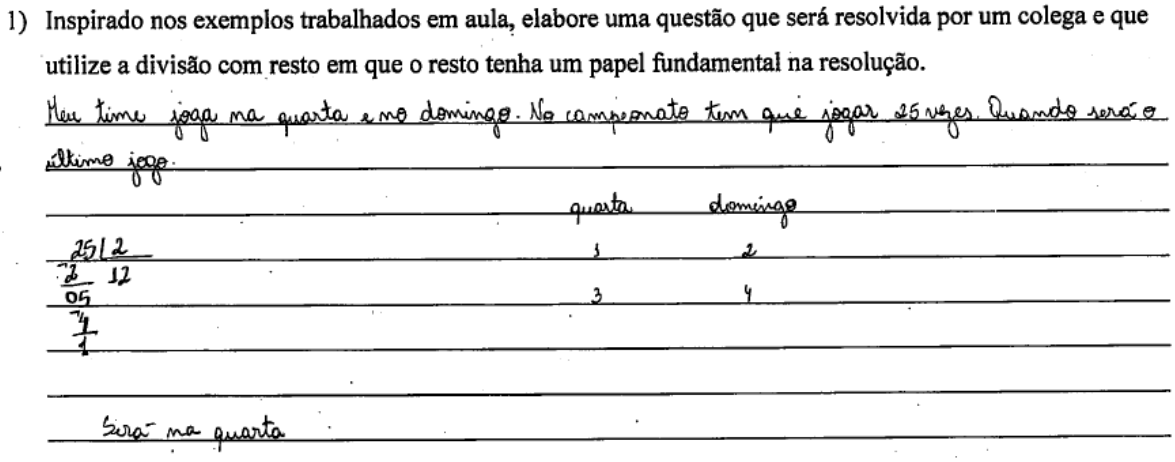
100 | 3
-9   33
10
-9
1

terça-feira

Fonte: Produção dos alunos

O exemplo apresentado na Figura 74, observa-se que o enunciado elaborado não permite que o problema seja resolvido, pois não especifica quando aconteceu o primeiro jogo. Na resolução os alunos registraram que o primeiro jogo teria acontecido na quarta, mas essa informação deve estar presente no enunciado. Acertando esse detalhe, percebemos que os alunos tiveram clareza na escrita e demonstraram ter assimilado o que trabalhamos nos últimos encontros.

Figura 74 - Questão elaborada pelos alunos 04 e 19



1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

Meu time joga na quarta e no domingo. No campeonato tem que jogar 25 vezes. Quando será o último jogo.

quarta domingo
1 2
3 4

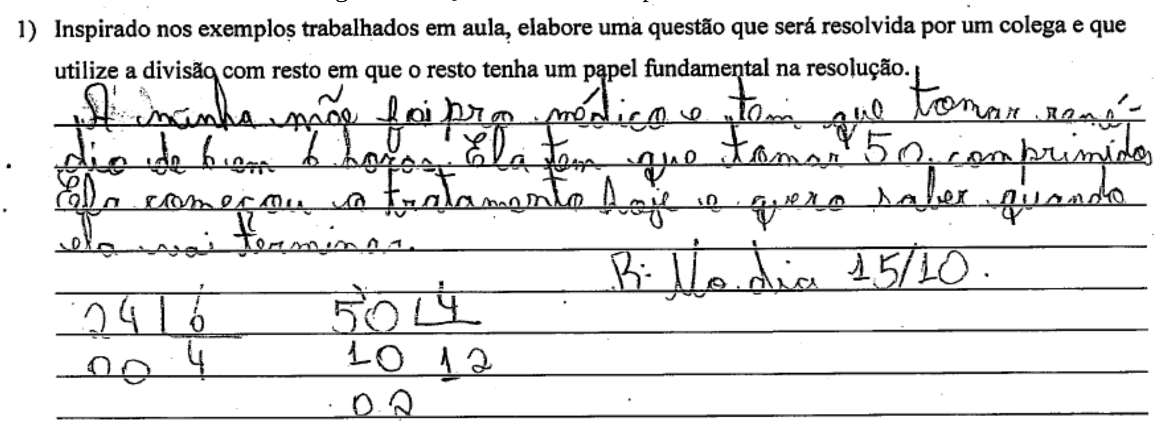
25 | 2
-2 12
05
-4
1

Será na quarta

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 75 apresenta um exemplo onde percebe-se que a pergunta está clara e o problema está elaborado corretamente com quase todas as informações necessárias para sua resolução. Os alunos apenas não deixaram claro o dia e a hora que iniciou o tratamento e essa informação é essencial para quem vai resolver a questão.

Figura 75 - Questão elaborada pelos alunos 05 e 06



1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

A minha mãe foi pro médico e tem que tomar remédio de 6 em 6 horas. Ela tem que tomar 50 comprimidos. Ela começou o tratamento hoje e quero saber quando ela vai terminar.

R: No dia 15/10.

24 | 6
00 4

50 | 4
10 12
02

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 76 mostra um problema elaborado com todos os dados necessários para uma boa compreensão e resolução. Ele está escrito de forma coerente e o resto da divisão, nesse caso, responde imediatamente a questão. Não há a necessidade de explorar o resto para chegar ao resultado. Os alunos poderiam reescrevê-lo de outra forma, trazendo mais informações ou desafios para quem vai resolvê-lo.

Figura 76 - Questão elaborada pelos alunos 12 e 24

1) **Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.**

Em uma floresta haviam 987 árvores e 4 lenhadores que derrubaram a maior parte delas. Sendo que cada lenhador derrubou a mesma quantidade e a maior quantidade possível, quantas árvores sobraram na floresta?

987 | 4
18   246
027
03

R: 3 árvores.

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 77 apresenta o problema desenvolvido pelos alunos 01, 08 e 15, onde percebe-se que eles entenderam a proposta e escreveram o que foi solicitado, demonstrando maturidade na escrita e na organização das ideias, apresentando todos os dados necessários de forma coerente e clara. Eles apenas deveriam ter especificado em que dia da semana começariam a ler o livro e poderiam ter avançado um pouco mais, utilizando o valor do quociente da divisão, perguntando quantas semanas levaria para completar a leitura.

Figura 77 - Questão elaborada pelos alunos 01, 08 e 15

1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

Gosto de ler e retirei um livro que tem 500 páginas. Todos os dias eu leio 20 páginas em que dia da semana vou terminar

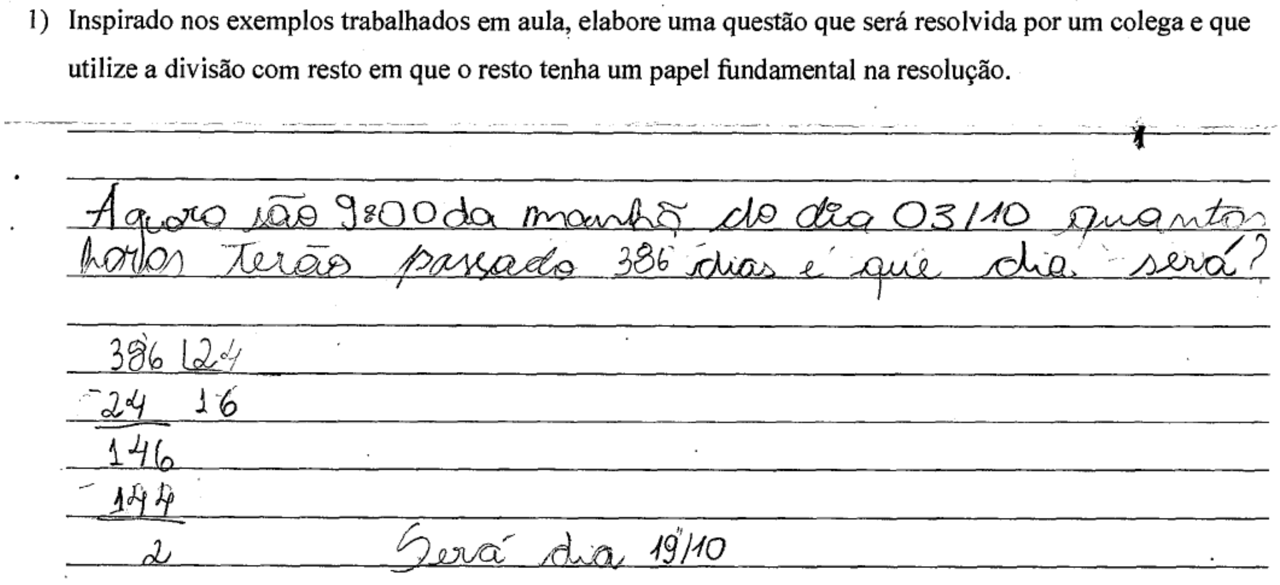
500 | 20   25 | 7
-40   25   -21   3
100   4
-100
0

Na quarta.

Fonte: Produção dos alunos

Na Figura 78 vemos que os alunos demonstraram saber que precisavam relacionar a divisão com resto, mas não conseguiram finalizar o problema de forma adequada, confundindo a pergunta, de modo que não é possível resolvê-lo da maneira como se apresenta.

Figura 78 - Questão elaborada pelos alunos 07 e 09


1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

Agora são 9:00 da manhã do dia 03/10 quantas horas terão passado 386 dias e que dia será?

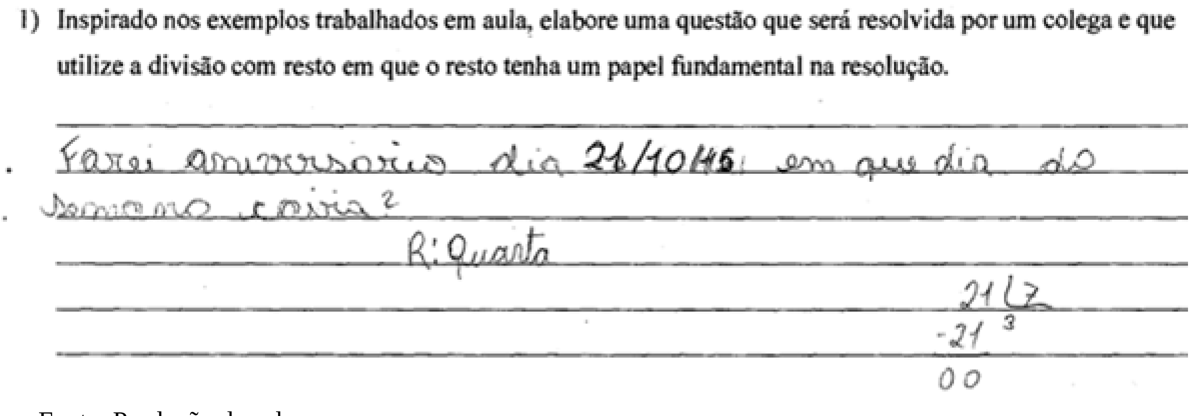
386 |24
-24 16
146
-144
2

Será dia 19/10

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 79 apresenta o problema elaborado pelos alunos 02 e 11, onde vemos que os mesmos perceberam que era uma questão que deveria envolver divisão com resto, entretanto não conseguiram expressar a ideia e as características do problema, de modo que, para a compreensão do cálculo envolvido ou da lógica do problema, os alunos deveriam ter especificado com mais clareza as informações necessárias.

Figura 79 - Questão elaborada pelos alunos 02 e 11


1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.

Farei aniversario dia 21/10/16 em que dia da semana cairia?

R: Quarta

21 |7
-21 3
00

Fonte: Produção dos alunos

A Figura 80 apresenta um exemplo onde verifica-se que os alunos 14 e 20 resolveram transcrever parte de um problema que havíamos trabalhado com eles durante as aulas.

Figura 80 - Questão elaborada pelos alunos 14 e 20

1) **Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore uma questão que será resolvida por um colega e que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução.**

Nosso ultimo encontro será dia 02/10/15, sexta feira e retornaremos nossas aulas depois de 33 dias. Faça os calculos e coloque o dia.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 7 \\ -28 & 4 \\ 05 & \end{array}$$

No dia 4/11

Fonte: Produção dos alunos

Essa atividade demonstrou a dificuldade em que nos deparamos quando queremos transmitir uma ideia, pois o que é obvio para quem escreve não o é necessariamente para quem lê e a clareza das ideias matemáticas contidas num problema é fundamental para poder interpretá-lo e respondê-lo corretamente. Nas questões formuladas pelos alunos, podemos perceber que os dados que foram omitidos, e que seriam importantes para uma terceira pessoa resolver a questão, foram informações que pensamos ser implícitas e óbvias para os alunos que formularam as questões.

A atividade atingiu seu objetivo, pois, assim como nas sugestões dos alunos, podemos observar que em nosso cotidiano existem inúmeras situações onde se faz presente a noção de somar restos, que são problemas, em geral, envolvendo situações periódicas que utilizam o resto da divisão, tornando-se questões de fácil resolução.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho estuda a possibilidade de se aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a evidenciar mais relevância e significado para o resto.

Confirmou-se nossa crença de que o uso tradicional dos problemas, reduzidos à aplicação e sistematização dos conhecimentos, pode contribuir para o desinteresse do aluno, impedindo o seu pleno desenvolvimento. O treino excessivo de definições e técnicas torna-se uma atividade rotineira e mecânica, em que se valoriza apenas o produto final. A desconsideração das etapas de exploração e comunicação das ideias lógico-matemáticas impede a necessária construção dos conceitos. Desta forma, "o saber matemático não se apresenta ao aluno como um sistema de conceitos, que lhe permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato, incompreensível" (BRASIL, 1998, p. 30)

Por meio da análise dos livros didáticos constatamos que no ensino tradicional, a operação de divisão está focada no procedimento de cálculo associado a um grupo de problemas que, supõe-se, serão suficientes para o entendimento do significado do conceito. O modo de utilização do algoritmo mostra uma relação superficial com o conceito estudado, pois saber operar com o algoritmo da divisão não significa que o aluno compreenda cada termo dessa operação.

Entendemos que nas séries finais do ensino fundamental, a revisão da divisão Euclidiana poderia ser desenvolvida priorizando os significados dessa operação, já que o algoritmo da divisão é um instrumento poderoso para resolver problemas e que pode dar significado para cada termo dessa operação dentro de seu contexto.

Nossa proposta foi elaborada a fim de nos dar suporte para respondermos à questão norteadora desta pesquisa: **É possível aprofundar o conceito de divisão Euclidiana, no Ensino Fundamental, de modo a enfatizar-se também o resto, percebendo-o como solução de alguns eventos cíclicos?** e acreditamos que os resultados de nossa proposta de atividades foram satisfatórios.

Através desta questão, procuramos maneiras de mostrar que isso é possível por meio de um trabalho que oportunizasse a revisão da divisão Euclidiana, conectando assuntos da realidade do aluno.

Acompanhando a evolução dos alunos durante a aplicação da sequência didática avaliamos que a metodologia adotada contribuiu para comprovar que existe outra maneira de trabalhar a divisão no ensino fundamental de modo que seja dirigido um olhar especial para o resto da divisão não exata além do de "sobra" e que durante a revisão algorítmica da divisão

Euclidiana é possível recordar conceitualmente esse tema, de modo a tornar o assunto mais significativo para o aluno.

Durante a execução das primeiras atividades da sequência didática percebemos que os alunos tiveram algumas dificuldades para escrever as justificativas das respostas e solicitavam a presença da professora com muita frequência, o que demonstrou interesse e preocupação em resolver as atividades da melhor forma possível. Durante as aulas notamos que os alunos desenvolveram a autonomia quando procuraram discutir as respostas com os colegas sem a presença da professora.

Essa autonomia foi favorecida pela maneira como conduzimos as aulas, pois conduzimos toda a sequência didática de modo que os alunos tivessem a oportunidade de obter resultados a partir das atividades realizadas. Procuramos não impor definições ou propriedades, mas trabalhamos de modo que os alunos ficassem convencidos dos fatos para avançar nas suas conclusões, sempre procurando desenvolver um cenário para investigação.

Dessa forma pensamos que resolver situações-problema foi uma escolha acertada, pois permitiu aos alunos colocarem-se diante de questionamentos e pensar por si próprios, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso de regras e algoritmos padronizados.

No transcorrer das atividades percebemos uma crescente familiaridade dos alunos com a operação de divisão e com a utilização do resto como uma ferramenta para a resolução de problemas cíclicos.

A sequência de atividades possibilitou que os alunos transitassem entre diversos tipos de representações semióticas, o que para Duval (2003) sinaliza o entendimento dos conceitos envolvidos. Os alunos transitaram entre registros de descrição verbal, expressões e operações numéricas e registro geométrico, dando mais significado ao resto da divisão Euclidiana.

Percebemos, de forma positiva, a desacomodação dos alunos frente a atividades e perguntas pouco usuais em situações problema, onde deveriam justificar/argumentar a resposta, ou representar o processo inverso, ou a soma de restos. Consideramos as situações-problema oferecidas desafiantes e bastante próximas da realidade da turma de modo que os alunos atribuíram significado ao que estavam desenvolvendo.

Nossa experiência com essa sequência didática foi positiva pois, por meio das análises das atividades, pudemos perceber que eles compreenderam que podem utilizar o resto de uma divisão Euclidiana e até somar restos, para resolver problemas. Por essa atividade ter sido bem-sucedida, esperamos que outros professores possam aproveitá-la e utilizá-la em suas práticas docentes.

Sabemos da importância do livro didático, pois ele acaba determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino. Seria importante termos livros texto embasados em teorias educacionais atuais e não somente em definições/resultados/exemplos/exercícios e que levem em conta o processo de aprendizagem dos alunos. O livro didático deveria conter informações e conceitos ilustrados de várias formas, que segundo Duval (2003), são indispensáveis à aprendizagem e ao desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Acreditamos que as ideias de Skovsmose (2008) podem ser um ponto de partida nessa direção, já que os cenários de investigação oportunizam vários enfoques para a resolução de um mesmo problema e estimulam o pensamento crítico, imprescindível no desenvolvimento cognitivo do aluno.

Propomos uma abordagem mais abrangente do ensino da divisão do que as propostas tradicionalmente apresentadas nos livros didáticos do ensino fundamental e esperamos que este trabalho possa contribuir para a relevância da reflexão contínua sobre o fazer docente, o material utilizado e a abordagem dos diversos conteúdos matemáticos nas séries finais do ensino fundamental. Portanto, podemos dizer que nossa experiência complementa o estudo da divisão na educação básica.

Ressaltamos a importância deste trabalho para o crescimento profissional e matemático da mestranda que, além de se aprofundar no assunto estudado, pôde se aproximar dos trabalhos de Skovsmose e Duval, o que certamente oportunizou um ganho enorme, não só na elaboração desta sequência didática, mas em suas aulas, no dia-a-dia.

Destacamos também a motivação e o envolvimento da turma, pois sua participação ativa provocou a desacomodação da postura tradicionalmente apresentada por eles, uma vez que estavam acostumados a ser receptores de conteúdos e atividades e, durante a aplicação da sequência didática, passaram a assumir a responsabilidade de construtores do próprio conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática: 5ª serie.** São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

ANDRINI, Álvaro. VASCONCELOS, Maria J. **Praticando Matemática: 6º ano.** 3ª ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARROSO, Juliane M. *et al*. **Projeto Araribá, 6º ano – Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BENVENUTTI, Luciana Cardoso. **A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª serie.** Dissertação de Mestrado. Itajaí - SC, 2008, Universidade do Vale do Itajaí. Disponível em: < http://siaibib01.univali.br/pdf/Luciana%20Cardoso%20Benvenutti.pdf > Acesso em: 12 de mar. 2015.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática 6º ano.** 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011. Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nº 9.394, de 20/12/1996**. Disponível em: < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 21de abr. 2015.

________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

________. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira** – INEP. Prova Brasil – Matemática 5º ano do ensino fundamental. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/exemplos-de-questoes2> Acesso em: 10 de jun. 2015.

CASTELA, Cristiane Attili. **Divisão de Números Naturais: Concepções de alunos de 6ª serie.** Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2005, Pontifícia Universidade Católica. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/processaPesquisa.php?PHPSESSID=30864c549999092b43418fc7215e54e0&listaDetalhes%5B%5D=3487&processar=Processar> Acesso em: 06 de fev. 2015.

CUNHA, Maria Carolina Cascino da. **As operações de multiplicação e divisão junto aos alunos de 5ª e 7ª series.** Dissertação de Mestrado. São Paulo, 1997, Pontifícia Universidade Católica. Disponível em: < http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Cunha.pdf> Acesso em: 10 de fev. 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática:** 6º ano. 1.ed. São Paulo: Ática, 2012. (Projeto Teláris: Matemática) Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. p.11-33. In MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_________. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_________. **Ver e ensinar matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

_________. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, n.7, p.266-297. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-322.2012v7n2p266/23465> Acesso em: 25 mar. 2015.

FERREIRA, Michele dos Santos. **Marcas da divisão – um estudo de caso sobre a aprendizagem da operação de divisão no 4º ano do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre, 2012, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: < http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/61915>. Acesso em: 25 mar. 2015.

GIOVANI JÚNIOR, José Ruy. CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática, 6º ano.** Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009. (Coleção A Conquista da Matemática).

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. Machado, Antonio. **Matemática e Realidade: 6º ano**. 6.ed. São Paulo: Atual, 2009.

LAUTERT, Síntria Labres. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.** Tese de Doutorado. Recife, 2005, Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em:< http://repositorio.ufpe.br/bitstream/handle/123456789/8334/arquivo8899_1.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 03 de mar. 2015.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

MAZZIERO, A. S.; MACHADO, P. A. F. **Descobrindo e aplicando a matemática; 6º ano.**. Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MELLO, Cleiton Bezerra de. **A matemática dos restos e o calendário gregoriano.** Dissertação de Mestrado. Juazeiro do Norte, 2014, Universidade Federal do Ceará. Disponível em: < http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8989/1/2014_dis_cbmelo.pdf>. Acesso em: 12 de jan. 2015.

OBMEP. **Provas e Soluções**. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 10 jan 2015.

RIPOLL, Cydara *et al.* **Livro do Professor de Matemática: números naturais.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SANT'ANNA, Iury Kersnowsky. **A aritmética modular como ferramenta para as series finais do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, 2013. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2013/iury_kersnowsky.pdf> Acesso em: 09 de jan. 2015.

SOUZA, Letícia Vasconcellos de. **Congruência modular nas series finais do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. Juiz de Fora, 2015. Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?&pag=10>. Acesso em: 27 de jan. 2015.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, nº 14, p. 66 – 91, 2000.

____________. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Tradução Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas, SP: Papirus, 2008.

APÊNDICE

SEQUÊNCIA REVISADA DE ATIVIDADES

Neste apêndice apresentamos, como produto da dissertação, uma sequência didática revisada para que o leitor possa utilizar em sala de aula.

Para a elaboração desta sequência revisada, partimos das atividades aplicadas em sala de aula durante o período da pesquisa e construímos este apêndice com as atividades reformuladas e renumeradas, pois, partindo do que foi feito em sala de aula, do que foi observado durante a análise do material produzido pelos alunos e das anotações da professora, procuramos melhorar e complementar a proposta para a utilização em sala de aula.

A maioria das atividades foi criada especialmente para a pesquisa e outras adaptadas de questões da OBMEP e inspiradas em atividades encontradas nas dissertações de mestrado que foram analisadas. Buscou-se utilizar, nas atividades propostas, uma linguagem que se aproximasse, ao máximo possível, da linguagem verbal usada pelos alunos. Além disso, as situações-problema foram pensadas de modo que fossem familiares ao cotidiano do aluno.

Depois da aplicação da sequência didática percebemos que poderíamos ter abordado situações-problema onde, além do aluno efetuar a operação de divisão, ele deveria observar que a resposta não seria nem o quociente e nem o resto, de modo que nessa sequência didática revisada, estamos incluindo uma atividade adicional (Atividade 19) daquelas trabalhadas com os alunos durante o período da pesquisa.

ATIVIDADE 1

Atividade 1

A professora Queridinha tem duas turmas na EMEF Attílio Tosin.

Na turma A, ela levou 225 balas para serem divididas igualmente entre os 8 alunos dessa turma.

Logo os alunos se mobilizaram para ajudar a fazer a divisão e surgiram várias propostas diferentes:

- Joãozinho propôs que cada aluno recebesse 27 balas;
- Cláudia sugeriu que cada aluno recebesse 26 balas;
- Fernanda propôs que cada aluno recebesse 25 balas.

Responda:

a) As propostas acima dividem as balas em partes iguais entre os 8 alunos da turma A?

____

____

____

b) Quantas balas sobrarão na divisão feita por:

Joãozinho: Sobrarão____ balas.	Cláudia: Sobrarão____ balas.	Fernanda: Sobrarão____ balas.

c) Qual a sua proposta de divisão das 225 balas entre os 8 alunos dessa turma?

____

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

____

____

ATIVIDADE 2

Atividade 2

Na turma B a professora Queridinha levou 307 chocolates para serem divididos igualmente entre os 12 alunos dessa turma.

Como na outra classe, também surgiram várias propostas para a divisão:

- Miguel sugeriu que cada aluno recebesse 24 chocolates;
- Paulo propôs que cada aluno recebesse 22 chocolates;
- Ana sugeriu que cada aluno recebesse 23 chocolates.

a) As propostas acima dividem os chocolates em partes iguais entre os 12 alunos da turma B?

____

____

____

b) Quantos chocolates sobrarão na divisão feita por:

Miguel:	Paulo:	Ana:
Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.	Sobrarão____ chocolates.

c) Qual a sua proposta para a divisão dos 307 chocolates entre os 12 alunos dessa turma?

____

____

____

d) A sua proposta é melhor que as demais? O que ela tem de diferente? E por que essa diferença é importante?

____

____

____

ATIVIDADE 3

Atividade 3

Podemos escrever a proposta de Miguel como uma expressão numérica. Veja que havia 307 chocolates para serem divididos entre os 12 alunos da turma e ele sugeriu que cada um deveria ganhar 24 chocolates e ainda sobrariam 19 chocolates.

Teremos então a expressão: $307 = 12 \times 24 + 19$

Agora escreva as demais sugestões em forma de expressão numérica:

Propostas da turma A:

Joãozinho:____

Cláudia:____

Fernanda:____

Sua proposta:____

Propostas da turma B:

Miguel:____

Paulo:____

Ana :____

Sua proposta: ____

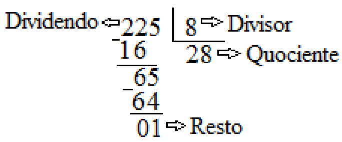
Em quais propostas temos o maior número de balas ou chocolates por aluno? O que acontece com as respectivas sobras?

ATIVIDADE 4

Atividade 4

A “melhor” divisão nos garantiu o ***maior número*** de balas ou chocolates por aluno e ***gerou a menor sobra possível***. Essa é a divisão utilizada nos números naturais onde o ***resto deve ser o menor possível.***

Assim, quando dividimos o número natural *a* (dividendo), por um número *b* (divisor) não nulo, obtemos um quociente (*q*) e um resto (*r*) que é sempre menor que o divisor (*b*) ou é zero, ou seja, $a=b.q+r$ e $r = 0$ ou $r < b$.
Então, no exemplo $225 = 8 \times 28 + 1$, temos que a = 225, b = 8, q = 28 e r = 1 < 8
Utilizando o algoritmo conhecido:



1) A divisão acima está correta? Como você acha que podemos “conferir” esse resultado?

2) Faça a divisão de 377 por 3 e escreva-o na forma a = b.q + r, sendo a = 377 e b = 3:

3) Na sua proposta de divisão das balas e dos chocolates indique o dividendo, o divisor, o quociente e o resto e escreva na forma $a = b.q + r$:

ATIVIDADE 5

Atividade 5

1) Faça os cálculos abaixo e nomeie-os conforme os termos da divisão:

a) $29 \div 3 =$

b) $108 \div 4 =$

c) $580 \div 14 =$

d) $341 \div 13 =$

ATIVIDADE 6

Atividade 6

Veja que se quiséssemos dividir 84 canetas igualmente entre 6 pessoas, de modo que cada pessoa recebesse o maior número de canetas possível, teríamos:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 14 \\ \hline 24 & \\ -24 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 84 : 6 = 14$$

Dessa forma cada pessoa receberá 14 canetas.

Esta é uma divisão em que o resto é zero o que garante que 84 é um múltiplo de 6.

Para verificar se a divisão está correta, multiplicamos 6 por 14 e obtemos 84 o que seria o mesmo que contar o total de canetas após recolher as 14 canetas de cada uma das 6 pessoas.

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\, 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

Responda:

1) Por que 14 é o maior número de canetas possível?

____

____

____

____

____

____

ATIVIDADE 7

Atividade 7

1) Considere o número dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$.

Determine o quociente e o resto, de $5 \times 7 \times 3 + 4$, na divisão por:

a) 5

Quociente:____

Resto:____

b) 7

Quociente:____

Resto:____

c) 3

Quociente:____

Resto:____

d) Que número é dado pela expressão: $5 \times 7 \times 3 + 4$?

ATIVIDADE 8

Atividade 8

Observe as operações abaixo e identifique quais estão corretas e quais não estão corretas.

a) $327 = 4 \times 80 + 7$

$$\begin{array}{r|l} 327 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 80 \\ \hline 007 & \end{array}$$

b) $959 = 9 \times 106 + 05$

$$\begin{array}{r|l} 959 & 9 \\ \cline{2-2} -9 & 106 \\ \hline 059 & \\ -54 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

c) $428 = 6 \times 71 + 02$

$$\begin{array}{r|l} 428 & 6 \\ \cline{2-2} -42 & 71 \\ \hline 08 & \\ -6 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

d) $125 = 2 \times 61 + 3$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 2 \\ \cline{2-2} -12 & 61 \\ \hline 05 & \\ -2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Responda:

g) O que você precisou para “consertar” o cálculo das divisões que não estavam corretas?

ATIVIDADE 9

Atividade 9

1) Para a próxima aula pesquise na internet ou em livros o significado das siglas AM/PM que aparecem nos relógios digitais. Qual a origem dessas siglas e para que elas são utilizadas.
____
____
____
____
____
____
____

ATIVIDADE 10

Atividade 10

1) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 15 horas? ___________

2) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 17 horas? ___________

3) Onde estará o ponteiro das horas quando forem 22 horas?____________

4) Imagine que você tem que explicar para seu irmão mais novo como funciona essa conversão.

Como você faria isso? Descreva:____
____
____
____
____
____

ATIVIDADE 11

Atividade 11

1) Agora responda:

a) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 10 horas, que horas serão? ___________________________

b) Se forem 7:00 horas da manhã e se passarem 89 horas que horas serão? ___________________________

2) Responda:

a) Agora são 10 horas da manhã; um filme que quero muito assistir vai passar daqui a 72 horas. Que horas começará o filme? ____

____

b) Agora são 10 horas da manhã e o meu time irá jogar daqui a 24 horas? Que horas será o jogo?_______________

____

c) Agora são 10 horas da manhã e estamos saindo para um passeio com a escola e só voltaremos daqui a 48 horas. A que horas do dia estaremos de volta?____

____

d) Acordei às 10 horas da manhã e fui passar uns dias na casa da minha avó. Quando voltei calculei o tempo que fiquei fora de casa e totalizaram-se 60 horas. A que horas cheguei da casa da minha avó? _______________________

____

e) A empresa JOGOSMIX lançará 3 novos jogos, às 10 horas da manhã, do dia 3 de outubro de 2015, para download imediato. Você deseja baixar os 3 jogos o mais rápido possível, porém a empresa não disponibiliza downloads simultâneos; cada jogo poderá ser baixado com um intervalo de 30 horas depois de iniciado o download. Faça um planejamento para obter os 3 jogos relacionando dia e hora prevista para os downloads.

____

____

____

____

____

____

____

ATIVIDADE 12

Atividade 12

a) O Dr. Melhorelogo receitou um xarope para a Dona Tosse Louca que deveria ser tomado de 8 em 8 horas durante 7 dias. Às 15horas ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

b) Mesmo seguindo o cronograma à risca, Dona Tosse Louca piorou um pouco e o Dr. Melhorelogo pediu para que ela tomasse o xarope de 7 em 7 horas durante uma semana. Às 6 horas da manhã ela tomou a primeira dose. Faça um cronograma de todos os horários em que terá de tomar o xarope.

c) Qual a diferença deste cronograma para o anterior?____

____

____

d) É mais prático tomar um remédio a cada 8 horas ou a cada 7 horas? Por quê?______________________________

____

____

____

e) Dona Tosse Louca não conseguiu seguir o segundo cronograma e tomar o xarope nas horas indicadas pois os horários variavam todos os dias e o Doutor Melhorelogo precisa aumentar o número de doses do xarope. Indique as opções que o Dr. Melhorelogo tem para prescrever o remédio de modo que a Dona Tosse Louca tome as doses sempre no mesmo horário.

____

____

____

____

ATIVIDADE 13

Atividade 13

Outra aplicação muito interessante da divisão está nos problemas relacionados com os calendários.

Vamos considerar, por exemplo, o calendário do mês de setembro do ano de 2015:

D	*S*	*T*	*Q*	*Q*	*S*	*S*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
27	*28*	*29*	*30*			

1) Sabendo que 01/09/2015 foi uma terça-feira, determine:

a) Em que dia da semana cairá o dia 12 de outubro de 2015, Dia da Criança?

b) Em que dia da semana cairá o dia 09/11/2015, dia do início da Feira do Livro de Garibaldi?

c) Em que dia da semana cairá o dia 31/12/2015, último dia deste ano?

d) Qual é o dia do seu aniversário? Quantos dias faltam para essa data? E em que dia da semana cairá?

Atividade 13/2

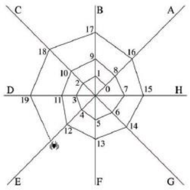
a) Nosso último encontro será dia 02/10/2015, sexta-feira e retomaremos nossas aulas depois de 33 dias afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês e o dia da semana do nosso próximo encontro.

b) Nosso último encontro será dia 02/10/2015 às 10h da manhã e retomaremos nossas aulas depois de 790 horas afastados. Faça os cálculos e relacione o dia, o mês, o dia da semana e o horário do nosso próximo encontro.

ATIVIDADE 14

Atividade 14

1) Uma aranha usa os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G e H para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho nesse ritmo e seguindo sempre a mesma ordem.



a) Sobre qual fio de apoio estará o número 25?

b) Sobre qual fio de apoio estará o número 40?

c) Sobre qual fio de apoio estará o número 55?

d) Sobre qual fio de apoio estará o número 82?

e) Podemos dizer que o número 100 está sobre o fio de apoio E? Por quê?

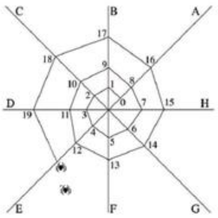
f) É correto afirmar que o número 240 está sobre o fio de apoio H? Por quê?

g) Onde a aranha deveria começar sua teia para que o número 240 estivesse sobre o fio de apoio H?

ATIVIDADE 15

Atividade 15

1) Duas aranhas se revezam na construção de sua teia (uma continua o trabalho de onde a outra parou) usando os fios de apoio A, B, C, D, E, F, G, e H, conforme mostra a figura.



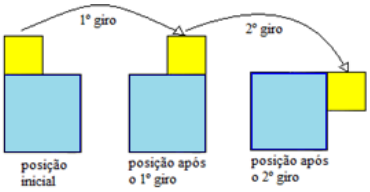
a) A primeira aranha sempre tece duas voltas inteiras e mais quatro fios. A segunda aranha sempre tece cinco voltas completas e mais dois fios. Sabendo que a primeira aranha teceu três vezes e a segunda duas vezes, diga em que fio a teia foi terminada?

b) Imagine agora que a primeira aranha teceu 300 voltas completas e mais 4 fios e a segunda aranha teceu 200 voltas completas e mais 2 fios. Diga em que fio a teia foi terminada.

ATIVIDADE 16

Atividade 16

1) Um quadrado de lado 1cm roda em torno de um quadrado de lado 2cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior. Considere a posição inicial do quadrado menor como sendo a posição zero.



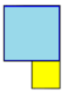
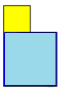
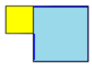
a) Qual a posição dos dois quadrados após o 5º giro?

b) Qual a posição dos dois quadrados após o 8º giro?

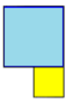
c) Qual a posição dos dois quadrados após o 16º giro?

d) Qual a posição dos dois quadrados após o 20º giro?

e) Quantos giros o quadrado menor deve dar sobre o quadrado maior para obtermos as figuras abaixo?

I) 
II) 
III) 
IV) 

f) Partindo da posição inicial dada, é possível obter a configuração dos quadrados dada abaixo com 3 giros?



g) Qual deveria ser a posição inicial dos dois quadrados para que pudéssemos obter a configuração abaixo com 7 giros?

ATIVIDADE 17

Atividade 17

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas. Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	X	2	X	X
X	3	X	X	4	X	X
X	5	X	X	6	X	X
X	7	X	X	8	X	X
X	9	X	X	10	X	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 45 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 60 e a área 100?

b) Você mora na área 14 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Baseado no cronograma dado isso é possível? Por quê?

c) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. É possível a área 19 estar nesse cronograma de coleta? Por quê?

d) Meu amigo mora na área número 24 e o recolhimento do lixo acontece na quinta-feira. Minha prima está se mudando para a área número 62 e também gostaria que o caminhão recolhesse o lixo nesse dia. Baseado no cronograma de coleta dado, isso é possível?

e) Como você acha que o cronograma para a coleta de lixo foi construído?

ATIVIDADE 18

Atividade 18

1) Uma empresa de coleta de lixo dividiu a cidade em 150 áreas para realizar a coleta de lixo nas casas. Abaixo segue um cronograma para a coleta:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	X	2	X	3	X
X	4	X	5	X	6	X
X	7	X	8	X	9	X
X	10	X	11	X	12	X
X	13	X	14	X	15	X
X	16	X	17	X	18	X
X	19	X	20	X	21	X

Pergunta-se:

a) Em que dia da semana a área 30 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 45 e a área 60? O que essas áreas têm em comum?

b) Em que dia da semana a área 40 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 55 e a área 70? O que essas áreas têm em comum?

c) Em que dia da semana a área 35 deve esperar o caminhão do lixo? E a área 50 e a área 65? O que essas áreas têm em comum?

d) Você mora na área 20 e gostaria que o caminhão fizesse a coleta na segunda-feira. Isso é possível? Por quê?

e) O caminhão faz o recolhimento do lixo em algumas áreas sempre na segunda-feira. Baseado no cronograma de coleta, a área 35 pode estar nesse roteiro? Por quê?

f) Eu resido na área número 44 e o recolhimento do lixo acontece na quarta-feira. Minha amiga irá morar na área 62 e gostaria que o caminhão recolhesse o lixo na sexta-feira. Dentro do cronograma de coleta dado, isso é possível?

g) É possível estabelecer uma relação ente a distribuição das áreas e cada dia da semana em que ocorre o recolhimento? Qual?

ATIVIDADE 19

Atividade 19

1) Uma empresa de ônibus tem veículos com capacidade para 53 passageiros. Nossa Escola fará um passeio no Dia das Crianças, com 4 professores acompanhando os alunos.
   a) Quantos ônibus dessa empresa, no mínimo, será preciso alugar se 155 alunos confirmarem presença?
   b) Quantos ônibus dessa empresa, no mínimo, será preciso alugar se 120 alunos confirmarem presença?
   c) Sabendo que a Escola possui 170 alunos e que, com a quantidade de alunos que confirmaram presença, os 3 ônibus alugados dessa empresa foram lotados, quantos alunos não confirmaram presença?

ATIVIDADE 20

Atividade 20

1) Inspirado nos exemplos trabalhados em aula, elabore e resolva um problema que utilize a divisão com resto em que o resto tenha um papel fundamental na resolução. Atente para que seu problema apresente todos os dados necessários, pois será resolvido por um colega.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____