

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Método Analítico de Solução das Equações
da Cinética na Formulação S_N de Transporte
de Nêutrons em Geometria Unidimensional e
Multigrupo de Energia**

por

Fernanda Krüger Tomaszewski

Tese para obtenção do Título de
Doutora em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto
Orientadora

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros
Co-Orientador

Porto Alegre, 13 de abril de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tomaschewski, Fernanda Krüger

Método Analítico de Solução das Equações da Cinética na Formulação S_N de Transporte de Nêutrons em Geometria Unidimensional e Multigrupo de Energia / Fernanda Krüger Tomaschewski.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2016.

72 p.: il.

Tese(doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2016.

Orientadora: Segatto, Cynthia Feijó; Co-Orientador: Barros, Ricardo Carvalho de

Tese: Matemática Aplicada
Equações S_N , multigrupo, multiregião, Cinética

**Método Analítico de Solução das Equações
da Cinética na Formulação S_N de
Transporte de Nêutrons em Geometria
Unidimensional e Multigrupo de Energia**

por

Fernanda Krüger Tomaschewski

Linha de Pesquisa: Fenômenos de Transporte

Orientadora: Profa. Dra. Cynthia Feijó Segatto

Co-Orientador: Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros

Banca examinadora:

Prof. Dr. Roberto David Martinez Garcia
Instituto de Estudos Avançados/IEAv

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann
PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Fabio Souto de Azevedo
PPGMap/UFRGS

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS PARA O TRANSPORTE DE NÊUTRONS	6
2.1 A Equação de Boltzmann para Nêutrons	6
2.1.1 O Modelo Multigrupo de Energia	9
2.1.2 Métodos de Ordenadas Discretas (S_N)	10
2.2 Cálculos de Criticalidade	11
2.3 Cinética de Reatores Nucleares	15
2.3.1 Reatividade	20
3 EQUAÇÕES S_N MULTIGRUPO ESTACIONÁRIAS COM FONTE DE FISSÃO	22
3.1 O Método LTS_N	22
3.2 Método da Potência	26
3.2.1 Normalização da Autofunção Dominante	28
4 EQUAÇÕES S_N DE CINÉTICA MULTIGRUPO DE ENERGIA 30	
4.1 Método da Decomposição	30
4.2 Método $TLTS_N$	34
4.2.1 Solução da equação da concentração de precursores de nêutrons atrasados	37

5	RESULTADOS NUMÉRICOS	39
5.1	Problema modelo multigrupo de energia com $G = 4$ em domínio homogêneo	39
5.2	Problema modelo multigrupo de energia com $G = 2$ em domínio heterogêneo	53
6	CONCLUSÕES	66
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

Lista de Figuras

Figura 2.1	Esquema dos grupos de energia.	9
Figura 3.1	A placa em multicamadas.	23
Figura 5.1	Fonte de nêutrons estacionária para o grupos de energia 1 do problema-modelo 1	40
Figura 5.2	Fonte de nêutrons estacionária para o grupo de energia 2 do problema-modelo 1	41
Figura 5.3	Fluxo escalar grupo 1 do problema-modelo 1	45
Figura 5.4	Fluxo escalar grupo 1 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$.	46
Figura 5.5	Fluxo escalar grupo 2 do problema-modelo 1	47
Figura 5.6	Fluxo escalar grupo 2 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$.	48
Figura 5.7	Fluxo escalar grupo 3 do problema-modelo 1	49
Figura 5.8	Fluxo escalar grupo 3 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$.	50
Figura 5.9	Fluxo escalar grupo 4 do problema-modelo 1	51
Figura 5.10	Fluxo escalar grupo 4 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$.	52
Figura 5.11	A placa de multicamadas para o problema-modelo 2.	54
Figura 5.12	Fonte estacionária de nêutrons para o grupo de energia 1 do problema-modelo 2	58
Figura 5.13	Fluxo escalar do grupo 1 para o problema-modelo 2	61
Figura 5.14	Fluxo escalar do grupo 1 para o problema-modelo 2 com $250 \leq x \leq 350$	62
Figura 5.15	Fluxo escalar do grupo 2 para o problema-modelo 2	63
Figura 5.16	Fluxo escalar do grupo 2 para o problema-modelo 2 com $365 \leq x \leq 375$	64

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Constantes referentes ao Urânio-235	17
Tabela 5.1	Parâmetros neutrônicos do problema-modelo 1 - (cm^{-1})	40
Tabela 5.2	Resultados numéricos para o fluxo escalar do grupo 1 e grupo 2 do problema-modelo 1	42
Tabela 5.3	Resultados numéricos para o fluxo escalar do grupo 3 e grupo 4 do problema-modelo 1	43
Tabela 5.4	Estabilização do sistema subcrítico	44
Tabela 5.5	Parâmetros neutrônicos do problema-modelo 2 - (cm^{-1}).	54
Tabela 5.6	Resultados numéricos para o fluxo escalar do problema-modelo 2 em $t = 0$ s.	55
Tabela 5.7	Resultados numéricos para k_{eff}	56
Tabela 5.8	Resultados numéricos para o fluxo escalar para o grupo de energia 1 do problema-modelo 2 com $t \geq 0$	59
Tabela 5.9	Resultados numéricos para o fluxo escalar para o grupo de energia 2 do problema-modelo 2 com $t \geq 0$	60

RESUMO

Neste trabalho, mostramos uma representação analítica para a solução das equações de cinética de transporte de nêutrons, na formulação de ordenadas discretas (S_N), em geometria unidimensional cartesiana e multigrupo de energia, considerando um determinado número de grupos de precursores de nêutrons atrasados. Para este fim, inicialmente expandimos o fluxo de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada de funções, e substituímos essas expansões nas equações S_N de cinética, obtendo um conjunto de sistemas recursivos, constituído de equações diferenciais lineares de primeira ordem matricial. Além disso, a primeira equação do sistema recursivo possui apenas a fonte externa, e satisfaz as condições iniciais. Por outro lado, as equações restantes satisfazem a condição inicial nula e os termos de correções são considerados como termos fontes compostos das soluções determinadas nas etapas de recursão anteriores. Nessa tese, aplicamos esse método recursivo na resolução de problemas multigrupos de energia em regiões homogêneas e heterogêneas. Experimentos numéricos são apresentados para problemas modelos a fim de ilustrar a precisão e eficiência do método.

ABSTRACT

Presented in this thesis is an analytical representation for the solution of slab-geometry neutron kinetics equations for energy multigroup discrete ordinates (S_N) transport formulation with a prescribed number of delayed neutron precursors. Initially the neutron angular flux and the concentration of delayed neutron precursors are expanded in a truncated series of functions, and substituting these expansion representations into the S_N kinetics equations, a set of recursive systems of first-order ordinary differential equations results. Furthermore, the first recursive equation of the system has an external source and is the only one which satisfies the initial conditions. The remaining equations of the recursive systems satisfy initial condition equal to zero and the corrections terms are considered as compound sources terms of the previous steps recursion solutions. We apply this methodology to solve problems considering energy multigroup in homogeneous and heterogeneous regions. Numerical results to model problems will be given to illustrate the accuracy and efficiency of the offered technique.

1 INTRODUÇÃO

Os reatores do tipo ADS (“Accelerator-Driven Systems”) são projetos de um novo tipo de reator de potência integrante da geração *IV* (Gen *IV*), conforme classificação do Departamento de Energia dos Estados Unidos da América (DOE). Todos os reatores nucleares em operação na atualidade, são reatores críticos, o que significa que o número de nêutrons produzidos por fissão é exatamente equilibrado pelo número perdido por fugas e absorção por vários materiais no reator. Esse equilíbrio é responsável pela manutenção da potência de um reator a qualquer nível para o qual tenha sido projetado. Reatores subcríticos produzem menos nêutrons por fissão do que os que são perdidos tanto pela absorção, quanto pela fuga, e requerem um fornecimento externo de nêutrons para gerar uma potência constante. Estes nêutrons podem ser gerados por espalação causada pela colisão de prótons altamente energéticos, oriundos do acelerador, com os núcleos atômicos de elementos pesados presentes no núcleo do reator.

Esses reatores foram concebidos pelo físico laureado com o prêmio Nobel em 1984, Carlo Rubbia [1] e sua equipe do CERN, entre outros, para geração de energia, mas chamou a atenção do mundo para um papel igualmente importante, a queima de resíduos nucleares. Os reatores nucleares geram rejeitos radioativos que mantêm a sua radiotoxicidade por milhões de anos e a eliminação de tais resíduos têm sido uma grande fonte de preocupação pública. Esse novo tipo de reator foi projetado para transmutar com segurança os rejeitos radioativos em elementos estáveis, ou naqueles cuja vida média é relativamente curta, enquanto produz energia.

A maioria dos estudos em teoria de reatores nucleares trata a cinética de transporte de nêutrons como um processo difusivo [2], porém esse tipo de tratamento tem validade limitada, por exemplo próximo a fronteiras e em meios altamente absorvedores. O modelo aproximado mais simples para as equações de

cinética é o da cinética pontual, no qual o fluxo de nêutrons é considerado como o produto de uma função espacial (modo fundamental) independente do tempo e uma amplitude dependente dele [3]. Por assumir uma distribuição espacial fixa, a solução se restringe a reatores muito pequenos nos quais a distribuição espacial não fica sensível a mudanças locais nas propriedades do reator, e quando essas mudanças são fundamentais, o modelo se torna inadequado para vários tipos de situações. Os experimentos feitos por Yasinsky e Henry [4] demonstraram a inadequabilidade das equações da cinética pontual e a necessidade de modelos mais sofisticados, o que despertou o interesse para a questão dos problemas de cinética espacial. Desde então, foram feitas muitas análises comparativas entre a cinética pontual e a espacial, proporcionando uma maior compreensão da aplicabilidade de cada modelo.

Com o passar dos anos foi desenvolvida uma vasta pesquisa em métodos para a obtenção de uma solução numérica para as equações de cinética espacial. Destacamos, dentre esses métodos, o método quase-estático [5] [6], no qual é considerado uma densidade de nêutrons como um produto de uma função amplitude-dependente do tempo, usando escalas curtas de tempo - e uma função forma - dependente de todas as variáveis, inclusive do tempo, com escalas longas. Há também os métodos modais [7] [8] e nodais [9], os quais tratam da parte espacial separadamente, das equações de cinética, o primeiro tratando a parte temporal por amplitudes modais (método modal), e o segundo trabalhando com constantes de acoplamento nodais (método nodal). Podemos encontrar em Kaplan et. al. [10] uma revisão de métodos numéricos e analíticos e em Sutton e Aviles [11] encontramos uma revisão sobre métodos utilizados para cálculos em cinética espacial.

A fim de desenvolver métodos que possam prever o comportamento da população de nêutrons no núcleo de um reator nuclear com suficientes precisão e confiabilidade, soluções analíticas são necessárias. A motivação do desenvolvimento de métodos analíticos para resolver as equações da cinética não é apenas o desafio de desenvolver um método para resolver um conjunto de equações diferenciais aco-

pladas, mas também uma necessidade real para prever o desempenho e avaliar a segurança de reatores nucleares de potência tanto estes atualmente em funcionamento quanto aqueles que estão sendo projetados para o futuro. Em nossas pesquisas não encontramos, na literatura, trabalhos sobre soluções analíticas para as equações de cinética de transporte. Entretanto, sobre soluções analíticas utilizando um processo de difusão, destacamos que Petersen et al. [12] resolveram a equação de cinética pontual e espacial de difusão de nêutrons pelas técnicas da GITT e da decomposição. Em outro trabalho, Ceolin [13] resolve a equação de cinética de difusão com modelo multigrupo de energia e meio heterogêneo utilizando a série de Taylor.

Dentro desse contexto, neste trabalho damos o primeiro passo para a construção de representações analíticas da solução das equações de transporte de cinética que possam ser aplicados em um reator ADS. Aqui desenvolvemos uma metodologia para estabilização de sistemas subcríticos com fontes externas estacionárias. Desta forma, um objetivo deste trabalho é a obtenção das condições iniciais necessárias nos problemas de cinética. Então, resolvemos um modelo simplificado unidimensional de transporte estacionário de nêutrons multi-região, considerando o modelo multigrupo de energia, na formulação de ordenadas discretas (S_N). Os métodos utilizados para resolver este problema são o método iterativo da potência [14] acoplado ao método LTS_N [15, 16, 17] para as equações S_N unidimensionais. O qual consiste na aplicação da transformada de Laplace no conjunto de equações S_N , resultando em um sistema de equações dependente do parâmetro complexo “s”. Este sistema algébrico é, então, resolvido para o fluxo transformado e a transformada inversa é feita de forma analítica, obtendo assim uma expressão para o fluxo angular de partículas.

Para resolver as equações S_N de cinética multigrupo de energia unidimensional com I grupos de precursores de nêutrons atrasados, aplicamos o método da decomposição. A ideia básica compreende as seguintes etapas: expandir o fluxo de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em séries trunca-

das, substituir estas expansões nas equações S_N de cinética e construir um conjunto de sistemas recursivos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A primeira equação do sistema recursivo possui apenas fonte externa e satisfaz as condições iniciais do problema. Por outro lado, as equações resultantes satisfazem a condição inicial nula e o termo fonte é escrito em termos da solução das equações do passo anterior do sistema recursivo. Em cada etapa do sistema recursivo as equações S_N de cinética, foram resolvidas utilizando o método TLTS_N [18, 19]. A ideia principal desta metodologia consiste na aplicação da transformada de Laplace na variável tempo, resolvendo, na sequência, a equação resultante pelo método LTS_N. Finalmente, determinamos a solução procurada para o fluxo angular usando o teorema de inversão da transformada de Laplace. Por este procedimento a solução é escrita em termos de uma integral de linha na variável tempo, a qual aqui é avaliada pelo algoritmo de Gaver-Stehfest [20, 21, 22].

A solução obtida, através do problema de autovalor, fornece a informação para o perfil do fluxo crítico. É possível inserir uma perturbação no sistema que o coloque em estado subcrítico (reatividade negativa) ou supercrítico (reatividade positiva) [23]. No caso de maior interesse qual seja, o estado subcrítico, determinamos nesta tese o perfil do fluxo escalar subcrítico. Portanto, a fonte estacionária de nêutrons multigrupo de energia que estabilizará o sistema subcrítico no perfil do fluxo crítico será dada pelo produto do fluxo escalar crítico pela seção de choque macroscópica de fissão complementar. A seção de choque macroscópica de fissão complementar é definida nesta tese como a diferença entre a seção de choque macroscópica de fissão da zona material pertinente dividida pelo fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) e a seção de choque macroscópica de fissão da zona material pertinente após inserir a perturbação. Enfatizamos neste ponto que esta fonte fixa, conforme determinada, é única. Qualquer outro perfil de fonte fixa maior ou menor que o perfil determinado estabilizará o sistema subcrítico numa distribuição de nêutrons maior ou menor que o perfil crítico.

Neste ponto, é apresentada uma sinopse do conteúdo desta tese. No próximo capítulo, são apresentados os modelos físico-matemáticos que serviram de base para nosso estudo. No terceiro capítulo, descreve-se a metodologia utilizada para a solução das equações S_N multigrupo estacionárias com fonte de fissão em domínio heterogêneo. No quarto capítulo, é mostrada a solução das equações S_N de cinética multigrupo para I grupos de precursores de nêutrons atrasados acompanhada de todo o recurso matemático utilizado para a sua obtenção. No quinto capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos e suas análises. Por fim, no quinto capítulo, encontram-se as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

2 MODELOS FÍSICO-MATEMÁTICOS PARA O TRANSPORTE DE NÊUTRONS

Nesta seção, apresentamos a equação de transporte de nêutrons, descrevemos o método multigrupo para discretização da variável energética e ainda a formulação de ordenadas discretas (S_N) para discretização da variável angular. Concluimos o capítulo apresentando as equações S_N de cinética na formulação multigrupo de energia.

2.1 A Equação de Boltzmann para Nêutrons

A equação de transporte de nêutrons representa o balanço entre produção e perda de nêutrons em um elemento do espaço de fase $(d\vec{r}, dE, d\hat{\Omega}, dt)$, sendo \vec{r} o vetor posição, E a variável energia, $\hat{\Omega}$ o vetor unitário que indica a direção do movimento do nêutron e t a variável tempo. A equação de transporte de nêutrons em termos do fluxo angular ψ [2] é descrita por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) + \sigma_t(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t) \\ &= \int_0^\infty \int_{4\pi} \sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \chi(E) \int_0^\infty \int_{4\pi} \nu(E') \sigma_f(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}' dE' + S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde a integral em E' é definida para qualquer energia cinética possível dos nêutrons e a integral em $\hat{\Omega}'$ está definida em todas as direções de movimento. Na equação (2.1) os termos à esquerda da igualdade representam respectivamente o termo de taxa de variação no tempo do fluxo angular de nêutrons, o termo de migração de

nêutrons no domínio e o termo de colisão dos nêutrons, que migram com energia E na direção $\hat{\Omega}$, com os núcleos dos átomos constituintes do meio material que resulte em mudança do movimento para qualquer direção $\hat{\Omega}' \neq \hat{\Omega}$, com energia $E' \neq E$ ou que resulte em absorção. A primeira parcela do termo à direita da equação (2.1) contabiliza a produção de nêutrons na posição \vec{r} que passam a migrar com energia E e direção $\hat{\Omega}$, após as colisões dos mesmos, que migravam com energia E' qualquer e direção $\hat{\Omega}'$ qualquer, com os núcleos dos átomos constituintes do meio material, a segunda e a terceira parcelas representam respectivamente as fontes por fissão e externa. Portanto, o lado esquerdo da equação (2.1) contabiliza as remoções de partículas. Enquanto que o lado direito da equação (2.1) contabiliza os mecanismos de produção de nêutrons.

Na equação (2.1) usamos as seguintes definições

$\hat{\Omega} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ é o versor do vetor velocidade que indica a direção de movimento dos nêutrons;

$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ é o fluxo angular de nêutrons que migram com energia E , na direção $\hat{\Omega}$, na posição \vec{r} e no instante t ;

$\sigma_t(\vec{r}, E)$ é a seção de choque macroscópica total definida como a probabilidade, por unidade de distância percorrida, de interação entre nêutrons que migram com energia E , na posição \vec{r} e os núcleos dos átomos constituintes do meio;

$\sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E)$ é a seção de choque macroscópica diferencial de espalhamento de nêutrons que migram na direção $\hat{\Omega}'$, com energia E' , na posição \vec{r} e passam a migrar na direção $\hat{\Omega}$ e com energia E após a colisão com os núcleos dos átomos constituintes do meio;

$\sigma_f(\vec{r}, E')$ é a seção de choque macroscópica de fissão dos núcleos-alvos induzida por nêutrons que migram com energia E' e na posição \vec{r} , pois a fissão é considerada um evento isotrópico;

$\nu(E')$ representa o número médio de nêutrons emergentes da fissão causada por um nêutron com energia E' ;

$\chi(E)$ é o espectro de nêutrons que aparecem com energia E provenientes de fissões induzidas por nêutrons com energia E' , i.e., número médio de nêutrons de fissão emitidos com energia entre E e $E + dE$ por fissão causada por nêutron;

$S(\vec{r}, \hat{\Omega}, E, t)$ é uma fonte externa conhecida.

Neste ponto observamos que o fluxo escalar espectral de nêutrons é definido como a integral do fluxo angular de nêutrons em todas as direções $\hat{\Omega}$, isto é

$$\phi(\vec{r}, E', t) = \int_{4\pi} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}', E', t) d\hat{\Omega}'. \quad (2.2)$$

Nesta tese, consideramos apenas modelos com espalhamento isotrópico. Ou seja, consideramos que os nêutrons incidentes em qualquer direção $\hat{\Omega}'$ emergirão das colisões com os núcleos-alvos com igual probabilidade para todas as direções $\hat{\Omega}$. Portanto,

$$\sigma_s(\vec{r}, \hat{\Omega}' \rightarrow \hat{\Omega}, E' \rightarrow E) = \frac{1}{4\pi} \sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E). \quad (2.3)$$

Dando continuidade à descrição da modelagem matemática do fenômeno de transporte de nêutrons, quando consideramos problemas de multigrupo de energia, em geometria unidimensional cartesiana, com simetria azimutal, espalhamento isotrópico e dependente do tempo, a equação (2.1) é reescrita como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, \mu, E, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu, E, t) + \sigma_t(x, E) \psi(x, E, \mu, t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_s(x, E' \rightarrow E) \psi(x, \mu', E', t) d\mu' dE' \\ &+ \frac{1}{2} \chi(E) \int_0^\infty \int_{-1}^1 \nu(E') \sigma_f(x, E') \psi(x, \mu', E', t) d\mu' dE' + S(x, \mu, E, t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.1.1 O Modelo Multigrupo de Energia

Neste modelo discretizamos a variável energética E do nêutron em intervalos ou grupos contíguos, isto é, nós dividimos o domínio energético em G grupos de energia, como está representado na figura (2.1).

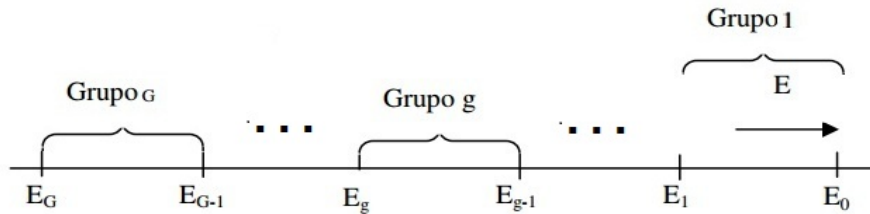


Figura 2.1: Esquema dos grupos de energia.

Como indicado na figura 2.1, os grupos de energia são ordenados de forma crescente para energia cinética decrescente dos nêutrons. Portanto, o grupo 1 de energia corresponde a uma faixa de energia mais alta do que o grupo 2 de energia, e assim sucessivamente.

Definimos os fluxos discretizados como as integrais de $\psi(x, \mu, E, t)$ no interior de cada grupo de energia, de tal forma que $\psi_g(x, \mu, t)$ represente o fluxo angular de todos os nêutrons com energia E no grupo $E_g < E < E_{g-1}$. As equações para $\psi_g(x, \mu, t)$ com $g = 1 : G$ terão a forma de um sistema de equações de transporte que irão descrever os nêutrons em cada grupo de energia. Essas equações serão acopladas, já que os nêutrons podem sofrer variações energéticas e passar de um grupo para outro. Como exemplo, os nêutrons de fissão nascem nos grupos de alta energia e vão passando para grupos de energias menores à medida que eles vão sofrendo colisões com núcleos leves. Para eliminar a variável energia, a equação (2.4), é integrada no g -ésimo grupo de energia que é definido pelo segmento $E_g < E < E_{g-1}$, com $g = 1 : G$.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \frac{1}{v(E)} \psi(x, \mu, E, t) dE + \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \psi(x, \mu, E, t) dE \\
& + \int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma_t(x, E) \psi(x, E, \mu, t) dE \\
& = \frac{1}{2} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{-1}^1 \int_0^\infty \sigma_s(x, E' \rightarrow E) \psi(x, \mu', E', t) dE' d\mu' \\
& + \frac{1}{2} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \chi(E) dE \int_{-1}^1 \int_0^\infty \nu(E') \sigma_f(x, E') \psi(x, \mu', E', t) dE' d\mu' \\
& + \int_{E_g}^{E_{g-1}} S(x, \mu, E, t) dE.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Assumindo que $\psi(x, \mu, E, t) = \tilde{\phi}(E) \tilde{\psi}(x, \mu, t)$, ou seja, assumindo a separabilidade energética no g-ésimo grupo de energia, resolvendo as integrais e utilizando algumas definições apresentadas em detalhes em “Nuclear Reactor Analysis” [2], obtém-se que o fluxo angular de nêutrons em cada grupo de energia é descrito por

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_g(x, \mu, t) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_g(x, \mu, t) + \sigma_{tg}(x) \psi_g(x, \mu, t) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu', t) d\mu' + \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}(x) \int_{-1}^1 \psi_{g'}(x, \mu', t) d\mu' + S_g(x, \mu, t),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

para $g = 1 : G$.

2.1.2 Métodos de Ordenadas Discretas (S_N)

A ideia básica do método de ordenadas discretas S_N é a discretização das variáveis angulares μ em N direções. Um passo importante é utilizar um conjunto de

quadraturas angulares para a aproximação dos termos integrais de fonte. Portanto, para obtermos a aproximação S_N para a equação (2.6), aproximamos seu termo integral pela quadratura de Gauss-Legendre de ordem N . Desta forma, escrevemos a aproximação S_N como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, t) + \sigma_{tg} \psi_{m,g}(x, t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n + \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n + S_{m,g}(x, t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde consideramos a definição $\psi_g(x, \mu_m, t) = \psi_{m,g}(x, t)$, os μ_m , com $m = 1 : N$, representam as raízes dos polinômios de Legendre de grau N , que consideramos ordenadas de forma decrescente, isto é,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \mu_{\frac{N}{2}} < \dots < \mu_1 < 1,$$

sendo N um número par e os ω_n são os pesos da quadratura Gaussiana, respectivos a cada raiz μ_n . Os pesos da quadratura de Gauss-Legendre [24] podem ser calculados através de

$$\omega_n = \int_{-1}^1 L_n(\mu) d\mu, \quad (2.8)$$

em que $L_n(\mu)$ é o polinômio de Lagrange definido por

$$L_n(\mu) = \prod_{k=0, k \neq n}^N \frac{(\mu - \mu_k)}{(\mu_n - \mu_k)}, \quad (2.9)$$

ou através da seguinte fórmula

$$\omega_n = \frac{2(1 - \mu_n^2)}{N^2 (P_{N-1}(\mu_n))^2}. \quad (2.10)$$

2.2 Cálculos de Criticalidade

Meios multiplicativos são meios materiais onde reações entre nêutrons e núcleos-alvo podem gerar mais nêutrons, como por exemplo, através da fissão

nuclear, e assim, estabelecer uma reação em cadeia. A seguir analisamos como ocorrem os eventos envolvendo uma reação em cadeia em um reator nuclear do tipo térmico. Os nêutrons gerados por fissão nascem com uma energia alta na escala MeV e são chamados de nêutrons rápidos. É possível que esses nêutrons causem fissões em isótopos físséis, como U^{235} ou Pu^{239} , ou fissionáveis, como U^{238} . Mas, o mais provável é que os nêutrons rápidos sejam moderados para energias mais baixas através de espalhamentos elásticos em colisões com um material moderador composto por um núcleo leve, como H^1 ou C^{12} . Ao serem moderados, os nêutrons oriundos da fissão passam por energias comparáveis com a energia de ressonância por absorção em núcleos pesados e têm uma probabilidade de serem absorvidos. Durante o processo de moderação, eles podem também eventualmente escapar do núcleo do reator. Contudo, em um reator térmico, cerca de 85 – 90% dos nêutrons estão sendo moderados para energias na escala térmica. Esses nêutrons térmicos, então, migram no meio até escaparem ou serem absorvidos. Se eles forem absorvidos no combustível, poderão induzir uma nova fissão, repetindo assim todo o ciclo.

Em física de reatores existe um parâmetro que é extremamente importante e fundamental na modelagem matemática dos fenômenos físicos que ocorrem na operação de um reator nuclear. Este parâmetro recebe o nome de *fator de multiplicação efetivo* e é definido como,

$$k_{eff} = \frac{\text{número de nêutrons em uma geração}}{\text{número de nêutrons na geração anterior}}.$$

Se $k_{eff} = 1$, dizemos que o reator nuclear está no estado *crítico*, pois o número de nêutrons é sempre o mesmo com o passar das gerações. Se $k_{eff} < 1$, dizemos que o reator está *subcrítico*, pois o número de nêutrons decresce de geração para geração. Se $k_{eff} > 1$, dizemos que o reator está *supercrítico*, já que o número de nêutrons cresce em cada geração e a reação em cadeia vai multiplicando nêutrons sem limite. Alternativamente, o fator de multiplicação efetivo também pode ser definido como

$$k_{eff} = \frac{\text{taxa de produção de nêutrons no reator}}{\text{taxa de perda de nêutrons no reator}}.$$

Claramente o estado de criticalidade de um sistema é atingido quando um fluxo de nêutrons independente do tempo pode ser estabelecido na ausência de outras fontes senão a fissão; ou seja, a taxa de produção de nêutrons é igual à da perda, sendo assim $k_{eff} = 1$.

Considerando cálculos formais, o fator de multiplicação efetivo pode ser definido também em termos mais importantes dos processos físicos dos nêutrons que ocorrem no reator nuclear. Desta forma, seja N_1 o número de nêutrons em uma geração e N_2 o número de nêutrons na próxima geração. Portanto,

$$N_2 = \nu P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} P_F N_1 + P_{NFR} (1 - P) \xi N_1, \quad (2.11)$$

onde a probabilidade de que um nêutron rápido não saia do núcleo é chamada probabilidade de não-fuga rápido P_{NFR} , probabilidade de que um nêutron não seja capturado na ressonância do U^{238} é chamada de probabilidade de escape da ressonância P , a probabilidade de que um nêutron térmico não saia do núcleo é denominada de probabilidade de não fuga térmica P_{NFT} , P_{AC} é a probabilidade de que um nêutron térmico seja absorvido pelo combustível, P_F é a probabilidade do nêutrons de induzir fissão. Logo,

$$k_{eff} = \frac{N_2}{N_1} = \nu P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} P_F + P_{NFR} (1 - P) \xi. \quad (2.12)$$

Entretanto,

$$P_F = \frac{\sigma_f^c}{\sigma_a^c} \Rightarrow \nu P_F = \frac{\nu \sigma_f^c}{\sigma_a^c} = \eta. \quad (2.13)$$

Portanto,

$$k_{eff} = P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta + P_{NFR} (1 - P) \xi. \quad (2.14)$$

Vamos agora definir a quantidade por meio do seguinte cálculo,

$$\varepsilon = \frac{\text{número provável de nêutrons rápidos provenientes de fissão rápida e térmica}}{\text{número provável de nêutrons rápidos provenientes de fissão térmica}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} k_{eff} &= P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta \left[1 + \frac{P_{NFR}(1-P)\xi}{P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta} \right] \\ k_{eff} &= P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta \left[\frac{P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta + P_{NFR}(1-P)\xi}{P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta} \right] \\ k_{eff} &= P_{NFR} P P_{NFT} P_{AC} \eta \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde a equação (2.15) é conhecida como a *fórmula dos seis fatores* [2].

Para fins de cálculo de criticalidade, consideremos as equações S_N multigrupo estacionárias com fonte de fissão

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_{m,g}(x) + \sigma_{tg} \psi_{m,g}(x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x) \omega_n + \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x) \omega_n. \tag{2.16}$$

Esta equação não tem solução de relevância física para os casos gerais realísticos, a não ser que se consiga a combinação material com a geometria do reator para que o mesmo esteja crítico. Portanto, o que se faz é introduzir um parâmetro k_{eff} na equação (2.16) de tal forma que

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_{m,g}(x) + \sigma_{tg} \psi_{m,g}(x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x) \omega_n + \frac{\chi_g}{2k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x) \omega_n. \tag{2.17}$$

Logo, para algum valor de k_{eff} , podemos garantir que as equações S_N multigrupo de energia terão uma solução de relevância física e a sua solução será discutida no próximo capítulo. Se $k_{eff} = 1$, a equação (2.17) se reduz à equação (2.16) e, portanto, temos um sistema crítico. Se $k_{eff} \neq 1$, entretanto, precisamos

escolher uma nova combinação entre geometria, dimensão e composição para atingirmos a criticalidade. Há, em geral, um conjunto de autovalores k_n para equação (2.17), contudo, apenas o maior dos autovalores, qual seja, o autovalor dominante corresponderá a uma autofunção que é não-negativa em todos os pontos do sistema, portanto fisicamente relevante. Definimos esse autovalor dominante como o fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) que indicará se o sistema está em estado subcrítico, crítico ou supercrítico.

2.3 Cinética de Reatores Nucleares

A fissão nuclear dá origem a subprodutos que são elementos com menor número de massa que o núcleo original. Alguns desses subprodutos são instáveis e, nos processos de decaimento, emitem nêutrons. Os quais são emitidos após o processo da fissão e chamados de nêutrons atrasados e os núcleos que os emitem são ditos precursores de nêutrons atrasados. Estes não têm as mesmas propriedades que os nêutrons prontos, aqueles produzidos diretamente da fissão. A energia média dos nêutrons prontos é muito maior do que a energia média dos nêutrons atrasados ($E \approx 2,0 MeV$ para os nêutrons prontos e $E \approx 0,5 MeV$ para nêutrons atrasados)[7]. Os nêutrons atrasados têm probabilidade menor de causar fissões rápidas, em relação aos nêutrons prontos, porque sua energia média está abaixo do requerido para a ocorrência da fissão rápida. E ainda, os nêutrons atrasados têm probabilidade menor de fuga do núcleo, porque são produzidos com energias mais baixas e, por isso, seu livre caminho médio é mais curto que dos nêutrons rápidos.

Mais de 99% dos nêutrons liberados nas reações de fissão são produzidos instantaneamente no momento da fissão. A fração β restante resulta do decaimento por emissão de nêutrons de alguns filhos dos produtos de fissão, gerados por decaimento β^- . Esses precursores de nêutrons são separados em I grupos de acordo com suas meias-vidas. Observamos neste ponto que a fração β é a soma das frações β_i

de nêutrons atrasados para cada grupo; isto é

$$\beta = \sum_{i=1}^I \beta_i,$$

onde cada β_i e, evidentemente, β dependem do tipo de isótopo fissil que será usado: U^{233} , U^{235} ou Pu^{239} .

Se definimos a meia-vida do i -ésimo grupo de precursores por $t_{i,1/2}$, então a meia-vida média dos nêutrons atrasados será

$$t_{1/2} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^I \beta_i t_{i,1/2}.$$

Entretanto, como as meias-vidas e as constantes de decaimento radioativo estão relacionados por $t_{i,1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_i}$, a constante média de decaimento pode ser definida como

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^I \beta_i \frac{1}{\lambda_i}.$$

É convencional nos modelos matemáticos de cinética de reatores nucleares considerar $I = 6$, ou seja, agrupar os precursores em seis classes caracterizadas pelas meias-vidas. A tabela 2.1 ilustra as frações de nêutrons atrasados β_i e as meias-vidas $t_{i,1/2}$ de cada um dos 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados para o U^{235} .

Grupos	$t_{1/2}(s)$	Fração β_i	$\lambda_i(s^{-1})$
1	55,72	0,000215	0,0124
2	22,72	0,001424	0,0305
3	6,22	0,001274	0,111
4	2,30	0,002568	0,301
5	0,61	0,000748	1,14
6	0,23	0,000273	3,01

Fonte: adaptada de Lamarsh, 1966.

Tabela 2.1: Constantes referentes ao Urânio-235

Apesar de os nêutrons atrasados constituírem uma pequena fração do total, eles dominam o tempo médio de vida. Portanto, os nêutrons atrasados aumentam substancialmente a constante de tempo de um reator nuclear de tal forma que o controle seja possível.

Para derivarmos uma equação de balanço na qual os efeitos dos nêutrons atrasados estão incluídos, dividimos o termo de fissão na equação (2.7) em contribuições dos nêutrons prontos e dos nêutrons atrasados. Se β é a fração do total de nêutrons de fissão que são atrasados, a taxa de produção dos nêutrons prontos é

$$(1 - \beta) \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n.$$

Por outro lado, os nêutrons atrasados são produzidos pelo decaimento dos produtos de fissão. Se definimos $C_i(x, t)$ como o número de precursores radioativos que emitem nêutrons com meia-vida $t_{i,1/2}$, então a taxa de produção de nêutrons atrasados é $\lambda_i C_i(x, t)$. Com o termo de fissão dividido em contribuições com nêutrons prontos e com nêutrons atrasados, a equação (2.7) aparece como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, t) + \sigma_{tg} \psi_{m,g}(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n \\
+(1 - \beta) \frac{\chi_g^p}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n + \chi_g^d \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(x, t) + S_{m,g}(x, t). &
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Completamos esta equação com I equações adicionais para determinarmos a concentração de precursores para cada grupo. Cada qual assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \left(\begin{array}{c} \text{Número de precursores} \\ \text{do grupo } i \\ \text{produzidos por segundo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de precursores} \\ \text{do grupo } i \\ \text{que decaem por segundo} \end{array} \right)$$

Entretanto, o número de precursores do tipo i gerado por segundo é

$$\frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n,$$

enquanto que a taxa de decaimento é $\lambda_i C_i(x, t)$. Portanto, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) = \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n - \lambda_i C_i(x, t) \tag{2.19}$$

Logo, as equações S_N de cinética multigrupo de energia são

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}(x, t) + \sigma_{tg} \psi_{m,g}(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n \\
+ (1 - \beta) \frac{\chi_g^p}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n + \chi_g^d \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i(x, t) + S_{m,g}(x, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} C_i(x, t) &= \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}(x, t) \omega_n - \lambda_i C_i(x, t),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

para $g = 1 : G$, $m = 1 : N$ e $i = 1 : I$ e definimos

- x é a variável espacial que pertence a $[0, x_R]$;
- $\mu = \cos \theta$ onde θ é o ângulo polar, portanto $\mu \in [-1, 1]$;
- t é a variável temporal que pertence a $[0, \infty)$;
- v_g é a velocidade dos nêutrons do grupo g ;
- σ_{tg} é a seção de choque macroscópica total no grupo g ;
- $\sigma_{sg'g}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico diferencial de energia do grupo g' para o grupo g ;
- σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g ;
- χ^p é o espectro de fissão para os nêutrons prontos;
- χ^d é o espectro de fissão para os nêutrons atrasados;
- ν_g é o número médio de nêutrons emitidos na fissão que ocorre no grupo g ;
- ψ é o fluxo angular;
- S é uma fonte externa;
- C_i é a concentração dos precursores de nêutrons atrasados do grupo i ;
- λ_i é a constante de decaimento dos precursores de nêutrons atrasados do grupo i ;
- β é a fração dos nêutrons de fissão que são atrasados;
- β_i é a fração dos precursores de nêutrons atrasados do grupo i .

O sistema formado pelas equações (2.20) descreve o fluxo angular de nêutrons em um reator nuclear incluindo os nêutrons atrasados e a sua solução será discutida no capítulo 4.

2.3.1 Reatividade

O comportamento transitório de um reator nuclear é bastante sensível a desvios, ainda que reduzidos, do fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) em torno da unidade. Podemos definir reatividade como sendo a variação fracional da população de nêutrons entre duas gerações consecutivas. Supondo que exista uma população de N_0 nêutrons em uma dada geração, na geração seguinte teremos uma população de $N_0 \times k_{eff}$ nêutrons. Sendo $(N_0 \times k_{eff}) - N_0$ a variação numérica sofrida pela população de nêutrons entre as duas gerações consecutivas, a variação fracional será dada por

$$\frac{N_0 \times k_{eff} - N_0}{N_0 \times k_{eff}} = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}.$$

Definimos reatividade como

$$\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \quad \text{ou} \quad k_{eff} = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (2.21)$$

Assim, concluímos que a reatividade em um reator subcrítico é sempre negativa; será positiva quando o reator estiver supercrítico e será igual a zero quando o reator estiver crítico. Em outras palavras temos

$$\begin{aligned} \rho = 0 & \quad \text{Reator crítico } k_{eff} = 1; \\ \rho < 0 & \quad \text{Reator subcrítico } k_{eff} < 1; \\ \rho > 0 & \quad \text{Reator supercrítico } k_{eff} > 1. \end{aligned}$$

A condição $\rho = \beta$ define a pronta criticalidade pois nesta condição, a reação de fissão em cadeia é auto-sustentada sem que seja necessária a participação dos nêutrons atrasados. Quando a pronta criticalidade é excedida, o tempo de vida médio dos nêutrons prontos, e não as meias-vidas dos precursores de nêutrons

atrasados, fortemente determina a taxa de crescimento exponencial. Na verdade, à medida que a pronta criticalidade é aproximada, o período do reator torna-se tão curto que controlá-lo por meios mecânicos, como o movimento de barras de controle, torna-se muito difícil, se não impossível. É tão importante evitar a proximidade à pronta criticalidade que a reatividade é conveniente de medir a criticalidade em fração de β ($\frac{\rho}{\beta} = 1\$$). Por exemplo, um reator nuclear cujo combustível é o U^{235} ficará no estado superpronto crítico, quando a reatividade ultrapassar um dólar (1\$), isto é, $\rho/0,0065 = 1\$$; portanto $\rho = 0,0065$, conforme a equação (2.21) [25].

3 EQUAÇÕES S_N MULTIGRUPO ESTACIONÁRIAS COM FONTE DE FISSÃO

Fisicamente, a condição inicial para o problema S_N de cinética multigrupo de energia é dado através do problema S_N multigrupo estacionário com fonte de fissão. Assim, neste capítulo, descrevemos o método LTS_N , aplicado na solução de problemas S_N de autovalor, na formulação multigrupo em uma placa para os cálculos de criticalidade de sistemas com reação de fissão. Este método é aplicado, para resolver um problema de “fonte fixa” em cada estimativa da fonte de fissão no método iterativo de potência, tradicionalmente usado para a convergência do autovalor dominante que é definido como o fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) e da autofunção correspondente que é definida como o fluxo de partículas que migram no interior das placas, nas N direções angulares distintas, depois de ter sido normalizada pela potência total gerada pelo sistema.

3.1 O Método LTS_N

Consideramos as equações unidimensionais S_N com simetria azimutal, espalhamento isotrópico, na formulação multigrupo com G grupos de energia e válidas em uma placa heterogênea de R regiões, conforme ilustrada na figura 3.1,

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_{m,g}^r(x) + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^r(x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r(x) \omega_n + \frac{\chi_g}{2k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r(x) \omega_n, \quad (3.1)$$

sujeitas às condições de contorno

$$\begin{aligned} \psi_{n,g}^1(x_0) &= \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^1(x_0), \\ \psi_{n+\frac{N}{2},g}^R(x_R) &= \alpha_L \psi_{n,g}^R(x_R), \end{aligned} \quad n = 1 : \frac{N}{2}. \quad (3.2)$$

e condições de continuidade

$$\psi_{m,g}^r(x_r) = \psi_{m,g}^{r+1}(x_r), \quad r = 1 : R - 1. \quad (3.3)$$

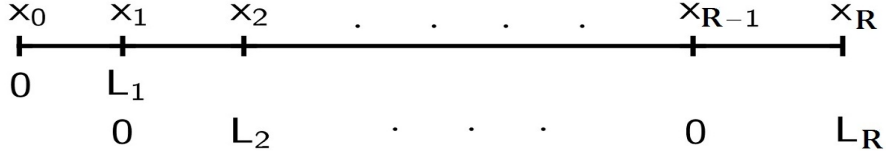


Figura 3.1: A placa em multicamadas.

Por simplicidade de aplicação do método LTS_N realizamos uma mudança na variável espacial x , da seguinte forma: $x = x - x_{r-1}$ na região r , para $r = 1 : R$. As espessuras de cada placa são dadas por $L_r = x_r - x_{r-1}$. Desta forma, as condições de contorno e de continuidade nas interfaces são dadas respectivamente por

$$\psi_{n,g}^1(0) = \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^1(0),$$

$$\psi_{n+\frac{N}{2},g}^R(L_R) = \alpha_L \psi_{n,g}^R(L_R), \quad n = 1 : \frac{N}{2}, \quad (3.4)$$

$$\psi_{m,g}^r(L_r) = \psi_{m,g}^{r+1}(0), \quad r = 1 : R - 1. \quad (3.5)$$

Aqui $g = 1 : G$, onde G é o número de grupos de energia, $r = 1 : R$, onde R é o número de regiões e $m = 1 : N$, onde N é um número inteiro par que representa a ordem da quadratura de Gauss-Legendre [24]. No caso de $\alpha_0 = 0$ ou $\alpha_L = 0$, denominamos condição de contorno tipo vácuo, e para $\alpha_0 = 1$ ou $\alpha_L = 1$ denominamos condição de contorno reflexiva. Além disso, $\psi_{m,g}^r(x)$ é o fluxo angular de nêutrons para o grupo g de energia na região r na posição x migrando na direção discreta μ_m . As seções de choque macroscópicas, para cada região, são constantes, ou seja, σ_{tg}^r é a seção de choque total no grupo g da região r ; $\sigma_{sg'g}^r$ é a seção de choque de espalhamento isotrópico diferencial de energia do grupo g' para o grupo g na região r ; σ_{fg}^r é a seção de choque de fissão do grupo g na região r , χ_g é o espectro de fissão no grupo g , ν_g é o número médio de nêutrons prontos emitidos por fissão

no grupo g e k_{eff} é o autovalor dominante, definido como o fator de multiplicação efetivo em cálculos globais de reatores nucleares. Escrevendo a equação (3.1) na forma matricial, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\Psi^r(x) - \mathbf{A}\Psi^r(x) = \mathbf{Q}^r(x), \quad (3.6)$$

onde \mathbf{A} é a matriz quadrada de ordem NG cujas entradas são

$$a(i + N(g - 1), j + N(g' - 1)) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sg'g}^r w_j}{2\mu_i} - \frac{\sigma_{tg}^r}{\mu_i}, & \text{se } i = j \text{ e } g = g' \\ \text{ou} \\ \frac{\sigma_{sg'g}^r w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i \neq j \text{ ou } g \neq g' \end{cases},$$

para $i = 1 : N$ e $j = 1 : N$ e para g e g' variando de 1 até G . Além disso, os vetores NG -dimensionais $\Psi^r(x)$ e $\mathbf{Q}^r(x)$ são definidos como

$$\Psi^r(x) = \begin{bmatrix} \Psi_{+,g}^r(x) \\ \Psi_{-,g}^r(x) \end{bmatrix} = (\Psi_{+,1}^r, \Psi_{-,1}^r, \Psi_{+,2}^r, \Psi_{-,2}^r, \dots, \Psi_{+,G}^r, \Psi_{-,G}^r)^T$$

com $\Psi_{+,g}^r(x)$ e $\Psi_{-,g}^r(x)$ sendo dois sub-vetores, do vetor fluxo angular $\Psi^r(x)$, de ordem $N/2$. O primeiro desses contendo somente os fluxos nas direções positivas, e o segundo, os fluxos nas direções negativas de μ . Ademais definimos

$$\mathbf{Q}^r(x) = \left(\frac{Q_1^r}{\mu_1}, \frac{Q_1^r}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_1^r}{\mu_N}, \frac{Q_2^r}{\mu_1}, \frac{Q_2^r}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_2^r}{\mu_N}, \dots, \frac{Q_G^r}{\mu_1}, \frac{Q_G^r}{\mu_2}, \dots, \frac{Q_G^r}{\mu_N} \right)^T.$$

Aplicando o método LTS_N [15, 16, 17] na equação (3.6), encontramos as seguintes soluções

$$\boldsymbol{\Psi}^r(x) = \mathbf{X}[\mathbf{E}^{r+}(x - L_r) + \mathbf{E}^{r-}(x)]\boldsymbol{\zeta}^r + \mathbf{H}^r(x), \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{E}^{r+}(x)$ e $\mathbf{E}^{r-}(x)$ denotam matrizes diagonais de funções definidas como

$$\mathbf{E}^{r+}(x) = \begin{cases} e^{d_n x} & \text{se } d_n > 0 \\ 0 & \text{se } d_n < 0 \end{cases}, \quad \mathbf{E}^{r-}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_n > 0 \\ e^{d_n x} & \text{se } d_n < 0 \end{cases},$$

e d_n , $n = 1 : N$, são os autovalores da matriz $\text{LTS}_N \mathbf{A}$ ordenados de forma decrescente e \mathbf{X} é a matriz dos respectivos autovetores da matriz \mathbf{A} . Além disso, a solução particular $\mathbf{H}^r(x)$ tem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^r(x) &= \mathbf{H}^{r+}(x) + \mathbf{H}^{r-}(x) \\ &= - \int_x^{L_r} \mathbf{B}^{r+}(x - \xi) \mathbf{Q}(\xi) d\xi + \int_0^x \mathbf{B}^{r-}(x - \xi) \mathbf{Q}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde os vetores $\mathbf{B}^{r+}(x)$ e $\mathbf{B}^{r-}(x)$ são definidos como

$$\mathbf{B}^{r+}(x) = \mathbf{X} \mathbf{E}^{r+}(x) \mathbf{X}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{r-}(x) = \mathbf{X} \mathbf{E}^{r-}(x) \mathbf{X}^{-1}. \quad (3.9)$$

onde \mathbf{X}^{-1} é matriz inversa da matriz \mathbf{X} . Note-se que não conhecemos o vetor $\boldsymbol{\zeta}$ dado na solução da equação (3.7). A fim de encontrarmos o valor de $\boldsymbol{\zeta}$, aplicamos as condições de contorno (3.4) e as condições de continuidade (3.5), e resolvemos o sistema resultante de equações lineares.

3.2 Método da Potência

O problema da determinação do autovalor dominante é relevante em física de reatores, pois permite estabelecer um projeto de funcionamento do reator em regime crítico estacionário onde a produção de nêutrons se iguala à remoção de nêutrons. Para simplificar a notação, primeiro reescrevemos o problema de autovalor (3.1) na forma matricial

$$\mathbf{M}\Psi = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\Psi, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de transporte de nêutrons pelo modelo de multigrupo e \mathbf{F} é a matriz de fissão do modelo de transporte multigrupo de nêutrons. Em outras palavras,

$$\mathbf{M}\Psi \equiv \mu_m \frac{d}{dx} \psi_{m,g}^r + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^r - \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r \omega_n \quad (3.11)$$

$$\mathbf{F}\Psi \equiv \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r \omega_n, \quad (3.12)$$

com condições de contorno dadas em (3.4), com $\alpha_0 = 0$ ou $\alpha_L = 0$.

A solução dominante de tais problemas de autovalor pode ser gerada pela utilização de uma técnica clássica da análise numérica conhecida como o *método da potência* [14]. Agora, descrevemos este método iterativo usando argumentos físicos. Assumindo que o termo de fonte de fissão é dado por $\mathbf{S} \equiv \mathbf{F}\Psi$, damos início ao esquema iterativo escolhendo uma estimativa inicial para o fluxo escalar e para o fator de multiplicação efetivo

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{F}\Psi \cong \mathbf{S}^{(0)}, \quad k \cong k^{(0)}. \quad (3.13)$$

Resolvemos o sistema

$$\mathbf{M}\Psi^{(1)} = \frac{1}{k^{(0)}}\mathbf{S}^{(0)} \quad (3.14)$$

analiticamente pelo método LTS_N . Com esta solução, podemos calcular explicitamente a fonte de fissão resultante desse fluxo $\Psi^{(1)}$ como

$$\mathbf{S}^{(1)} = \mathbf{F}\Psi^{(1)}, \quad (3.15)$$

e calcular $k^{(1)}$ por

$$k^{(1)} = k^{(0)} \frac{\langle \mathbf{F}\Psi^{(0)}, \mathbf{F}\Psi^{(1)} \rangle}{\langle \mathbf{F}\Psi^{(0)}, \mathbf{F}\Psi^{(0)} \rangle}. \quad (3.16)$$

onde $\langle ., . \rangle$ é definido como o produto interno de dois vetores. Este valor de $k^{(1)}$ pode então ser utilizado para estimar a fonte de fissão, que por sua vez, irá gerar um novo fluxo, $\Psi^{(2)}$, e assim por diante. Podemos generalizar o cálculo do fluxo, uma vez que as estimativas $\mathbf{S}^{(n)}$ e $k^{(n)}$ são conhecidas, como

$$\mathbf{M}\Psi^{(n+1)} = \frac{1}{k^{(n)}}\mathbf{S}^{(n)} \quad (3.17)$$

e, com isto, calculamos a nova fonte como

$$\mathbf{S}^{(n+1)} = \mathbf{F}\Psi^{(n+1)}. \quad (3.18)$$

Em seguida, estimamos $k^{(n+1)}$, avaliando

$$k^{(n+1)} = k^{(n)} \frac{\langle \mathbf{F}\Psi^{(n)}, \mathbf{F}\Psi^{(n+1)} \rangle}{\langle \mathbf{F}\Psi^{(n)}, \mathbf{F}\Psi^{(n)} \rangle}. \quad (3.19)$$

Portanto, são consideradas as equações (3.17), (3.18) e (3.19) como básicas para o método iterativo de potência, para a convergência do k_{eff} e do Ψ . À medida que o número de iterações aumenta, esperamos a convergência de Ψ para a autofunção fundamental da equação (3.11), que corresponde ao autovalor dominante

k_{eff} . Na prática, estas iterações continuam até que um critério de parada prescrito para o fator de multiplicação efetivo (k_{eff})

$$\left| \frac{k^{(n)} - k^{(n-1)}}{k^{(n)}} \right| \leq \epsilon_k \quad (3.20)$$

e para a função multigrupo

$$\max_{1 \leq g \leq G} \left| \frac{\Psi_g^{(n)}(x) - \Psi_g^{(n-1)}(x)}{\Psi_g^{(n)}(x)} \right| \leq \epsilon_\Psi \quad (3.21)$$

são satisfeitos, onde ϵ_k e ϵ_Ψ são pequenos números positivos prescritos. Na equação (3.20), $k^{(n)}$ é definido como a n -ésima estimativa do autovalor dominante k_{eff} na iteração. Na equação (3.21), $\Psi_g^{(n)}$ é definido como a estimativa n -ésima do fluxo escalar do grupo.

3.2.1 Normalização da Autofunção Dominante

A magnitude do fluxo escalar $\sum_{n=1}^N \psi_{n,g}(x)\omega_n$ em um reator nuclear é determinada pela potência na qual o sistema é operado. Para encontrar a intensidade de $\sum_{n=1}^N \psi_{n,g}(x)\omega_n$, é necessário fazer um cálculo separado da potência do reator. Em particular, é esperado que haja $\sigma_{fg} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g}(x)\omega_n$ fissões por cm^3 por segundo no ponto x . Sendo a energia liberada E de aproximadamente 200 MeV por fissão, ou seja, $E = 3,2 \times 10^{-11}$ joules, então a potência total por unidade de área de seção transversal, em $watts/cm^2$, é

$$P = 3,2 \times 10^{-11} \int_V \sum_{g=1}^G \sigma_{fg} \sum_{n=1}^N \psi_{c,n,g}(x)\omega_n dx, \quad (3.22)$$

ou equivalentemente em $Mwatts/cm^2$

$$P = 3,2 \times 10^{-17} \int_V \sum_{g=1}^G \sigma_{fg} \sum_{n=1}^N \psi_{c,n,g}(x)\omega_n dx. \quad (3.23)$$

Assim, podemos normalizar o fluxo escalar convergido da seguinte forma

$$\sum_{n=1}^N \psi_{n,g}(x)\omega_n = \frac{\sum_{n=1}^N \psi_{c,n,g}(x)\omega_n}{P} P_{nominal}. \quad (3.24)$$

Aqui, $\sum_{n=1}^N \psi_{c,n,g}(x)\omega_n$ é o fluxo convergido pelo método da potência, P é dado pela equação (3.23) e $P_{nominal}$ é a potência que o núcleo do reator irá gerar.

4 EQUAÇÕES S_N DE CINÉTICA MULTIGRUPO DE ENERGIA

Neste capítulo apresentamos as equações S_N de cinética considerando multigrupo de energia e meio heterogêneo. Na seção 4.1, mostramos a solução das equações S_N de cinética utilizando o método da decomposição e na seção 4.2, apresentamos a solução das equações S_N de transporte dependentes do tempo utilizando o método TLTS $_N$.

4.1 Método da Decomposição

Consideramos as equações S_N multigrupo de cinética com I grupos de precursores de nêutrons atrasados em meio heterogêneo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}^r(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}^r(x, t) + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^r(x, t) &= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r(x, t) \omega_n \\
+(1 - \beta) \frac{\chi_g^p}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r(x, t) \omega_n + \chi_g^d \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^r(x, t) + S_{m,g}^r(x) \\
\frac{\partial}{\partial t} C_i^r(x, t) &= -\lambda_i C_i^r(x, t) + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^r(x, t) \omega_n,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

sujeita às condições iniciais

$$\begin{aligned}
\psi_{m,g}^r(x, 0) &= \hat{\psi}_{m,g}^r(x), \\
C_i^r(x, 0) &= \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \hat{\psi}_{n,g'}^r(x) \omega_n
\end{aligned} \tag{4.2}$$

às condições de contorno

$$\begin{aligned}\psi_{n,g}^1(0, t) &= \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^1(0, t), \\ \psi_{n+\frac{N}{2},g}^R(L_R, t) &= \alpha_L \psi_{n,g}^R(L_R, t), \quad n = 1 : \frac{N}{2}\end{aligned}\quad (4.3)$$

e às condições de continuidade

$$\psi_{m,g}^r(L_r, t) = \psi_{m,g}^{r+1}(0, t), \quad r = 1 : R - 1, \quad (4.4)$$

onde $\psi_{m,g}^r(x, t)$ é o fluxo angular na posição x da região r , na direção discreta μ_m , do grupo de energia g e no instante de tempo t , $\hat{\psi}_{m,g}^r(x)$ é o fluxo angular em $t = 0$; $C_i^r(x, t)$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados.

Por meio do método da decomposição, expandimos tanto o fluxo angular de nêutrons quanto a concentração de precursores de nêutrons atrasados em séries, da forma

$$\begin{aligned}\psi_{m,g}^r(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x, t) \\ C_i^r(x, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} C_i^{r,(j)}(x, t).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.1), temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) + \sigma_{tg}^r \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j)}(x,t) \omega_n + (1-\beta) \frac{\chi_g^p}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j)}(x,t) \omega_n \\
&+ \chi_g^d \sum_{i=1}^I \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} C_i^{r,(j)}(x,t) + S_{m,g}^r(x) \\
& \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=0}^{\infty} C_i^{r,(j)}(x,t) = -\lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} C_i^{r,(j)}(x,t) + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j)}(x,t) \omega_n.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Há mais de uma maneira de resolver o sistema de equações (4.6). Op-tamos por gerar um sistema recursivo onde o primeiro sistema de equações tem como termo fonte apenas a fonte externa de nêutrons com o conjunto completo de condições iniciais e condições de contorno. Os outros sistemas têm como resultado o termo de fonte do sistema anterior, isto é

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}^{r,(0)}(x,t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}^{r,(0)}(x,t) + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^{r,(0)}(x,t) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(0)}(x,t) \omega_n + S_{m,g}^r(x)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i^{r,(0)}(x,t) = -\lambda_i C_i^{r,(0)}(x,t) + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(0)}(x,t) \omega_n,$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}
\psi_{m,g}^{r,(0)}(x,0) &= \hat{\psi}_{m,g}^r(x), \\
C_i^{r,(0)}(x,0) &= \frac{\beta_i}{2\lambda_i} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \hat{\psi}_{n,g'}^r(x) \omega_n
\end{aligned} \tag{4.8}$$

condições de contorno

$$\begin{aligned}\psi_{n,g}^{r,(0)}(0,t) &= \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^{r,(0)}(0,t), \\ \psi_{n+\frac{N}{2},g}^{r,(0)}(L_R,t) &= \alpha_L \psi_{n,g}^{r,(0)}(L_R,t), \quad n = 1 : \frac{N}{2}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

e às condições de continuidade

$$\psi_{m,g}^{r,(0)}(L_r,t) = \psi_{m,g}^{r+1,(0)}(0,t), \quad r = 1 : R-1, \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^{r,(j)}(x,t) &= \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j)}(x,t) \omega_n \\ &+ (1-\beta) \frac{\chi_g^p}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j-1)}(x,t) \omega_n + \chi_g^d \sum_{i=1}^I \lambda_i C_i^{r,(j-1)}(x,t), \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i^{r,(j)}(x,t) &= -\lambda_i C_i^{r,(j)}(x,t) + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'}^r \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{r,(j)}(x,t) \omega_n, \quad j > 0.\end{aligned}\quad (4.11)$$

com condições iniciais

$$\begin{aligned}\psi_{m,g}^{r,(j)}(x,0) &= 0, \\ C_i^{r,(j)}(x,0) &= 0\end{aligned}\quad (4.12)$$

condições de contorno

$$\begin{aligned}\psi_{n,g}^{r,(j)}(0,t) &= \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^{r,(j)}(0,t), \\ \psi_{n+\frac{N}{2},g}^{r,(j)}(L_R,t) &= \alpha_L \psi_{n,g}^{r,(j)}(L_R,t), \quad n = 1 : \frac{N}{2}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

e às condições de continuidade

$$\psi_{m,g}^{r,(j)}(L_r,t) = \psi_{m,g}^{r+1,(j)}(0,t), \quad r = 1 : R-1, \quad (4.14)$$

A solução de cada sistema recursivo tem de satisfazer as equações (4.6). Além disso, de acordo com as equações (4.7) e (4.11), a solução para $j = 0$ é necessária e suficiente para satisfazer as condições iniciais para o problema S_N de cinética. Portanto, as funções $\psi_{m,g}^{r,(j)}$, e $C_i^{r,(j)}$, $j > 0$, satisfazem as condições iniciais iguais a zero. Escolhemos este procedimento, conforme descrito nesta seção, uma vez que é conveniente para a aplicação do método TLTS_N[18, 19], que é descrito na próxima seção.

Com o objetivo posterior de desenvolver aplicações numéricas para a solução obtida truncamos as séries em uma determinada parcela de ordem J , definida pelos critérios de parada utilizados nas simulações numéricas. Desta forma, os critérios de parada exigem que a norma máxima do desvio relativo entre duas estimativas consecutivas do fluxo escalar e das concentrações dos precursores não excedam números positivos prescritos.

4.2 Método TLTS_N

Nesta seção apresentamos o método TLTS_N para resolver os sistemas recursivos das equações diferenciais parciais, como descrito na seção anterior. Portanto, vamos considerar as equações multigrupo S_N , dependentes do tempo, unidimensionais em uma placa heterogênea

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{m,g}^r(x, t) + \mu_m \frac{\partial}{\partial x} \psi_{m,g}^r(x, t) + \sigma_{tg}^r \psi_{m,g}^r(x, t) \\ = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \psi_{m,g'}^r(x, t) \omega_n + s_{m,g}^r(x, t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde definimos $s_{m,g}^r(x, t)$ como o termo fonte. Consideremos a condição inicial

$$\psi_{m,g}^r(x, 0) = \hat{\psi}_{m,g}^r(x), \quad (4.16)$$

as condições de contorno

$$\begin{aligned}\psi_{n,g}^1(0,t) &= \alpha_0 \psi_{n+\frac{N}{2},g}^1(0,t), \\ \psi_{n+\frac{N}{2},g}^R(L_R,t) &= \alpha_L \psi_{n,g}^R(L_R,t), \quad n = 1 : \frac{N}{2}\end{aligned}\quad (4.17)$$

e as condições de continuidade

$$\psi_{m,g}^r(L_r,t) = \psi_{m,g}^{r+1}(0,t), \quad r = 1 : R-1. \quad (4.18)$$

Agora vamos aplicar a transformada de Laplace em (4.15) na variável temporal. O resultado é

$$\mu_m \frac{d}{dx} \bar{\psi}_{m,g}^r(x,p) + \sigma_{tg}^{pr} \bar{\psi}_{m,g}^r(x,p) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^G \sigma_{sg'g}^r \sum_{n=1}^N \bar{\psi}_{n,g'}^r(x,p) \omega_n + \bar{R}_{m,g}^r(x,p), \quad (4.19)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{n,g}^1(0,t) &= \alpha_0 \bar{\psi}_{n+\frac{N}{2},g}^1(0,t), \\ \bar{\psi}_{n+\frac{N}{2},g}^R(L_R,t) &= \alpha_L \bar{\psi}_{n,g}^R(L_R,t), \quad m = 1 : \frac{N}{2},\end{aligned}\quad (4.20)$$

na qual $\bar{\psi}_{m,g}^r(x,p)$ denota o fluxo angular transformado no tempo. Além disso, definimos

$$\sigma_{tg}^{pr} = \sigma_{tg}^r + \frac{p}{v_g} \quad \text{e} \quad \bar{R}_{m,g}^r(x,p) = \frac{1}{v_g} \hat{\psi}_{m,g}^r(x) + \bar{s}_{m,g}^r(x,p).$$

Em seguida, para cada região r , podemos escrever a equação (4.19) na forma matricial

$$\frac{d}{dx} \bar{\Psi}(x,p) - \mathbf{A}(p) \bar{\Psi}(x,p) = \bar{\mathbf{R}}(x,p), \quad (4.21)$$

onde a matriz $\mathbf{A}(p)$ é uma matriz quadrada de ordem NG definida por

$$a(i + N(g-1), j + N(g'-1)) = \begin{cases} \frac{\sigma_{sg'g} w_j}{2\mu_i} - \frac{\sigma_{tg}^p}{\mu_i}, & \text{se } i = j \text{ e } g = g' \\ & \text{ou} \\ \frac{\sigma_{sg'g} w_j}{2\mu_i}, & \text{se } i \neq j \text{ ou } g \neq g' \end{cases},$$

para $i = 1 : N$ e $j = 1 : N$ e para g e g' variando de 1 a G . Além disso, $\bar{\Psi}(x, p)$ e $\bar{\mathbf{R}}(x, p)$ são vetores de ordem NG definidos como

$$\bar{\Psi}(x, p) = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{+,g}(x, p) \\ \bar{\Psi}_{-,g}(x, p) \end{bmatrix} = (\bar{\Psi}_{+,1}, \bar{\Psi}_{-,1}, \bar{\Psi}_{+,2}, \bar{\Psi}_{-,2}, \dots, \bar{\Psi}_{+,G}, \bar{\Psi}_{-,G})^T$$

e

$$\bar{\mathbf{R}}(x, p) = \left(\frac{\bar{R}_1}{\mu_1}, \dots, \frac{\bar{R}_1}{\mu_N}, \dots, \frac{\bar{R}_G}{\mu_1}, \dots, \frac{\bar{R}_G}{\mu_N} \right)^T,$$

com condições de contorno

$$\bar{\Psi}_{+,g}(0, p) = \alpha_0 \bar{\Psi}_{-,g}(0, p) \quad \text{and} \quad \bar{\Psi}_{-,g}(L_R, p) = \alpha_L \bar{\Psi}_{+,g}(L_R, p), \quad (4.22)$$

onde $\bar{\Psi}_{+,g}(x, p)$ e $\bar{\Psi}_{-,g}(x, p)$ são sub-vetores de ordem $NG/2$ do vetor do fluxo angular transformado $\bar{\Psi}(x, p)$. As $NG/2$ entradas de $\bar{\Psi}_{+,g}(0, p)$ são os fluxos angulares transformados nas direções $\mu_m > 0$ na fronteira esquerda da região r e as $NG/2$ entradas do $\bar{\Psi}_{-,g}(L_R, p)$ são os fluxos angulares transformados nas direções $\mu_m < 0$ na fronteira direita da região r .

A fim de resolvermos a equação matricial, aplicamos o método LTS_N na equação (4.21); desta forma obtemos

$$\bar{\Psi}(x, p) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(x, p) \\ \bar{\Psi}_2(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}(p) & \mathbf{X}_{12}(p) \\ \mathbf{X}_{21}(p) & \mathbf{X}_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\mathbf{D}^+(x-L_r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{\mathbf{D}^-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1(p) \\ \zeta_2(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1(x, p) \\ \bar{\mathbf{H}}_2(x, p) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

onde \mathbf{D}^+ e \mathbf{D}^- são matrizes diagonais de ordem $NG/2$ cujos elementos são respectivamente os autovalores positivos e negativos, e $\mathbf{X}(p)$ é a matriz cujas colunas são NG autovetores linearmente independentes de $\mathbf{A}(p)$. Além disso, escrevemos a

solução particular $\bar{\mathbf{H}}(x, p)$ como

$$\bar{\mathbf{H}}(x, p) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1(x, p) \\ \bar{\mathbf{H}}_2(x, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{11}(p) & \mathbf{X}_{12}(p) \\ \mathbf{X}_{21}(p) & \mathbf{X}_{22}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{L_r}^x e^{\mathbf{D}^+(x-\xi)} \sum_{j=1}^2 \mathbf{Z}_{1j}(p) \mathbf{R}_j(\xi) d\xi \\ \int_0^x e^{\mathbf{D}^-(x-\xi)} \sum_{j=1}^2 \mathbf{Z}_{1j}(p) \mathbf{R}_j(\xi) d\xi \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{Z}(p) = \mathbf{X}^{-1}(p)$. Neste ponto, aplicamos as condições de contorno (4.17) e condições de continuidade (4.18), e determinamos os sub-vetores desconhecidos ζ_1 e ζ_2 resolvendo o sistema resultante de equações lineares. Agora, somos capazes de determinar o perfil do fluxo angular aplicando a transformada inversa de Laplace para o fluxo angular transformado (4.23)

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{\Psi}(x, p) e^{pt} dp. \quad (4.25)$$

Devido às dificuldades operacionais para resolver analiticamente a integral dada na equação (4.25), nós optamos pelo uso do algoritmo Gaver-Stehfest [20, 21, 22], que produz uma solução aproximada, utilizando a seguinte expressão:

$$f(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i \bar{f}\left(\frac{\ln 2}{t} i\right),$$

onde N é um inteiro par e V_i é definido como

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\lceil \frac{i+1}{2} \rceil}^{\text{Min}(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2 - k)! (k)! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!}.$$

4.2.1 Solução da equação da concentração de precursores de nêutrons atrasados

Para cada solução do sistema recursivo, resolvemos a equação da concentração de precursores de nêutrons atrasados analiticamente para $j \geq 0$. Desta forma, para $j = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i^{(0)}(x, t) = -\lambda_i C_i^{(0)}(x, t) + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \psi_{n,g'}^{(0)}(x, t) \omega_n, \quad i = 1 : I. \quad (4.26)$$

Aplicando a transformada de Laplace na variável tempo, obtemos

$$\bar{C}_i^{(0)}(x, p) = \frac{\left[\frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \bar{\psi}_{n,g'}^{(0)}(x, t) \omega_n + C_i^{(0)}(x, 0) \right]}{p + \lambda_i}. \quad (4.27)$$

Em seguida, aplicando a transformada inversa de Laplace em (4.27), obtemos a concentração de precursores de nêutrons atrasados para $j = 0$, primeiro termo da expansão,

$$C_i^{(0)}(x, t) = C_i^{(0)}(x, 0) e^{-\lambda_i t} + \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\hat{t})} \psi_{n,g'}^{(0)}(x, \hat{t}) d\hat{t} \omega_n. \quad (4.28)$$

Analogamente para $j > 0$, temos

$$C_i^{(j)}(x, t) = \frac{\beta_i}{2} \sum_{g'=1}^G \nu_{g'} \sigma_{fg'} \sum_{n=1}^N \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\hat{t})} \psi_{n,g'}^{(j)}(x, \hat{t}) d\hat{t} \omega_n. \quad (4.29)$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, as metodologias propostas no trabalho e descritas nos capítulos 3 e 4 são aplicadas em dois problemas modelos. Apresentamos resultados e comparações com a literatura que indicam a viabilidade dos métodos.

5.1 Problema modelo multigrupo de energia com $G = 4$ em domínio homogêneo

Nesta seção, mostramos resultados numéricos para um problema-modelo de cinética com quatro grupos de energia em uma placa homogênea de espessura $L = 50$ cm, as velocidades dos nêutrons de cada grupo são $v_1 = 1,0 \times 10^7$ cm/s, $v_2 = 1,5 \times 10^6$ cm/s, $v_3 = 1,0 \times 10^6$ cm/s e $v_4 = 2,2 \times 10^5$ cm/s. Os espectros de fissão são $\chi_1^p = \chi_1^d = 0,8$, $\chi_2^p = \chi_2^d = 0,2$, $\chi_3^p = \chi_3^d = 0,0$ e $\chi_4^p = \chi_4^d = 0,0$ e para modelarmos este problema utilizamos condições de contorno tipo vácuo em $x = 0$ e $x = 50$ e a quadratura angular S_4 de Gauss-Legendre. A Tabela 5.1 (a seguir) exhibe as seções de choque macroscópicas. No experimento numérico consideramos o combustível U^{235} o qual, produz potência $P = 10$ Mv. Neste caso, são considerados 6 grupos de nêutrons atrasados, mas vale destacar que o método não impõe limitação quanto a esse número. Mantemos o sistema crítico dividindo as seções de choque de fissão de cada grupo de energia por $k_{eff} = 1,021498$ gerado pela metodologia apresentada no capítulo 3. Então, adicionamos uma reatividade negativa ($\rho = -0,1\%$) no sistema crítico e obtemos $k_{eff} = 0,99935$, que caracteriza um sistema na condição subcrítica e por fim introduzimos uma fonte de nêutrons estacionária de nêutrons em cada região r em $t_0 = 0,4$ s, a qual estabiliza o sistema no perfil crítico, uma vez que a fonte é dada por

$$S_g(x) = \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \left(\frac{\nu_{g'} \sigma_{fg'}}{k_{eff}} - \frac{\nu_{g'} \sigma_{fg'}}{k_{eff}} k \right) \hat{\phi}_{g'}(x), \quad (5.1)$$

onde $k = \frac{1}{1-\rho}$, $\hat{\phi}_{g'}(x)$ é fluxo escalar gerado pela metodologia apresentada no capítulo 3 e cujos perfis encontram-se representados nos gráficos das Figuras (5.1, 5.2).

Tabela 5.1: Parâmetros neutrônicos do problema-modelo 1 - (cm^{-1})

	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
σ_{tg}	2,37640E-1	5,46200E-1	9,16560E-1	1,18980E-1
$\nu_g \sigma_{fg}$	8,24160E-3	7,24000E-4	9,68370E-3	9,91360E-2
$\sigma_{sg'g}$				
	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
$g' = 1$	1,66870E-1	6,67810E-2	2,95390E-4	9,80000E-8
$g' = 2$	0,00000E+00	4,84360E-1	5,92300E-2	1,93200E-5
$g' = 3$	0,00000E+00	0,00000E+00	8,36010E-1	6,06480E-2
$g' = 4$	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	1,11550E+00

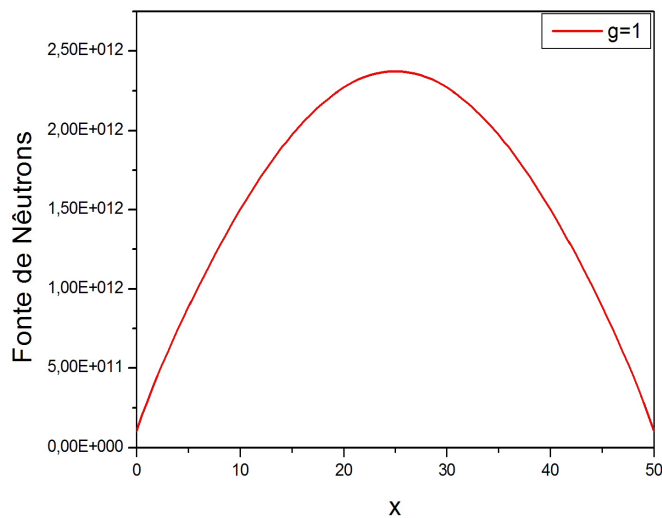


Figura 5.1: Fonte de nêutrons estacionária para o grupos de energia 1 do problema-modelo 1

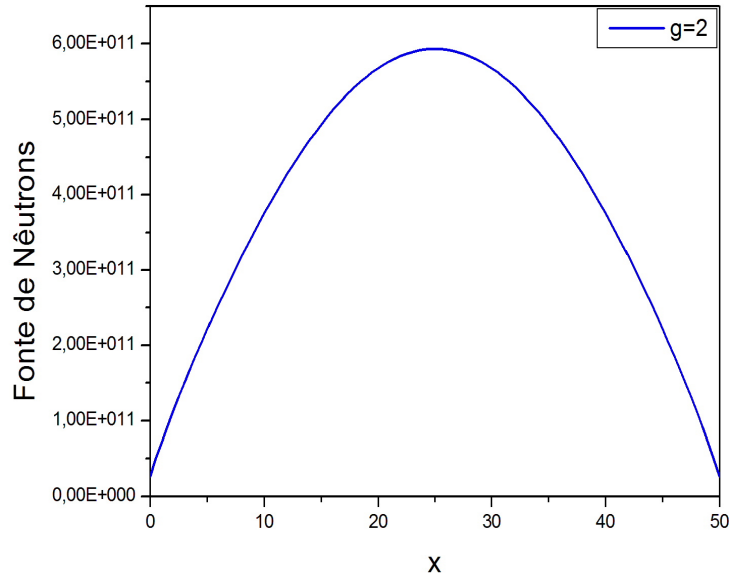


Figura 5.2: Fonte de nêutrons estacionária para o grupo de energia 2 do problema-modelo 1

Nas Tabelas 5.2 e 5.3 (a seguir) apresentamos resultados numéricos para este primeiro problema modelo com quatro grupos energia, para os perfis dos fluxos críticos ($t = 0$ s, quadrados pretos nas Figuras (5.3–5.10)), sendo que as fontes prescritas dos dois grupos são dadas pela equação 5.3. Como podemos ver nas Figuras (5.3–5.10), os resultados indicam o comportamento físico esperado para este experimento numérico, pois os perfis dos fluxos escalares dos quatro grupos de energia diminui para $0 < t \leq 0,4$ s e aumenta para $t > 0,4$ s tendendo para os perfis críticos (quadrados pretos). Para ilustrar esse fato, observamos que na Tabela 5.4 (a seguir) os desvios relativos dos máximos dos fluxos nos quatro grupos de energia em $x = 25$ cm em relação ao valor crítico em $t = 0$ s diminuem, com o decorrer do tempo, após as fontes serem ligadas.

Tabela 5.2: Resultados numéricos para o fluxo escalar do grupo 1 e grupo 2 do problema-modelo 1

	Grupo 1		Grupo 2	
	x=10cm	x=25cm	x=10cm	x=25cm
t=0,0E+00	6,15547E+16	9,66978E+16	8,22622E+16	1,29546E+17
t=8,70E-2	5,60942E+16	8,81199E+16	7,49649E+16	1,18054E+17
t=1,05E-1	5,60435E+16	8,80403E+16	7,48972E+16	1,17948E+17
t=4,00E-1	5,54888E+16	8,71689E+16	7,41558E+16	1,16780E+17
t=4,30E-1	5,90218E+16	9,27190E+16	7,88770E+16	1,24215E+17
t=4,50E-1	5,94641E+16	9,34138E+16	7,94681E+16	1,25146E+17
t=5,01E-1	6,03239E+16	9,47644E+16	8,06172E+16	1,26955E+17
t=1,0E+00	6,12459E+16	9,62129E+16	8,18496E+16	1,28896E+17
t=2,0E+00	6,12704E+16	9,62513E+16	8,18823E+16	1,28948E+17

Tabela 5.3: Resultados numéricos para o fluxo escalar do grupo 3 e grupo 4 do problema-modelo 1

	Grupo 3		Grupo 4	
	x=10cm	x=25cm	x=10cm	x=25cm
t=0,0E+00	5,97053eE+16	9,41447E+16	4,80481E+16	7,58909E+16
t=8,70E-2	5,44090E+16	8,57933E+16	4,37860E+16	6,91590E+16
t=1,05E-1	5,43599E+16	8,57159E+16	4,37465E+16	6,90966E+16
t=4,00E-1	5,38218E+16	8,48674E+16	4,33134E+16	6,84126E+16
t=4,30E-1	5,72481E+16	9,02700E+16	4,60695E+16	7,27657E+16
t=4,50E-1	5,76771E+16	9,09466E+16	4,64148E+16	7,33112E+16
t=5,01E-1	5,85112E+16	9,22618E+16	4,70863E+16	7,43719E+16
t=1,0E+00	5,94059E+16	9,36726E+16	4,78072E+16	7,55104E+16
t=2,0E+00	5,94296E+16	9,37099E+16	4,78262E+16	7,55405E+16

Tabela 5.4: Estabilização do sistema subcrítico

Tempo(s)	Fluxo Escalar x=25 cm g=1	Fluxo Escalar x=25 cm g=2	Fluxo Escalar x=25 cm g=3	Fluxo Escalar x=25 cm g=4	Máximo do Desvio Relativo (%)
0,45	9,34138E+16 (9,66978E+16) ^a	1,25146E+17 (1,29546E+17)	9,09466E+16 (9,41447E+16)	7,33112E+16 (7,58909E+16)	3,39922
0,501	9,47644E+16 (9,66978E+16)	1,26955E+17 (1,29546E+17)	9,22618E+16 (9,41447E+16)	7,43719E+16 (7,58909E+16)	2,00156
1,0	9,62129E+16 (9,66978E+16)	1,28896E+17 (1,29546E+17)	9,36726E+16 (9,41447E+16)	7,55104E+16 (7,58909E+16)	0,501752
2,0	9,62513E+16 (9,66978E+16)	1,28948E+17 (1,29546E+17)	9,37099E+16 (9,41447E+16)	7,55405E+16 (7,58909E+16)	0,461842

^a valor critico

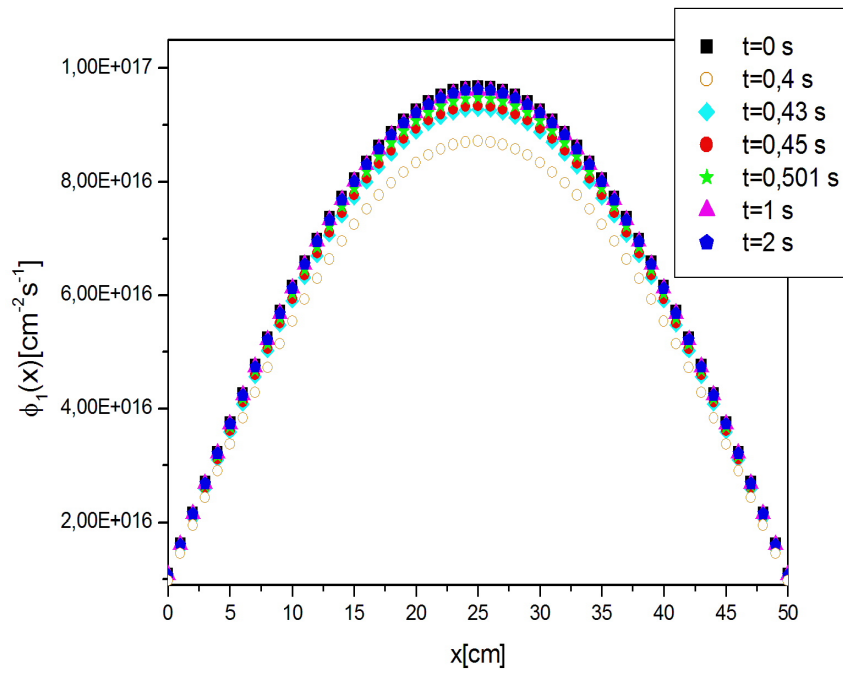
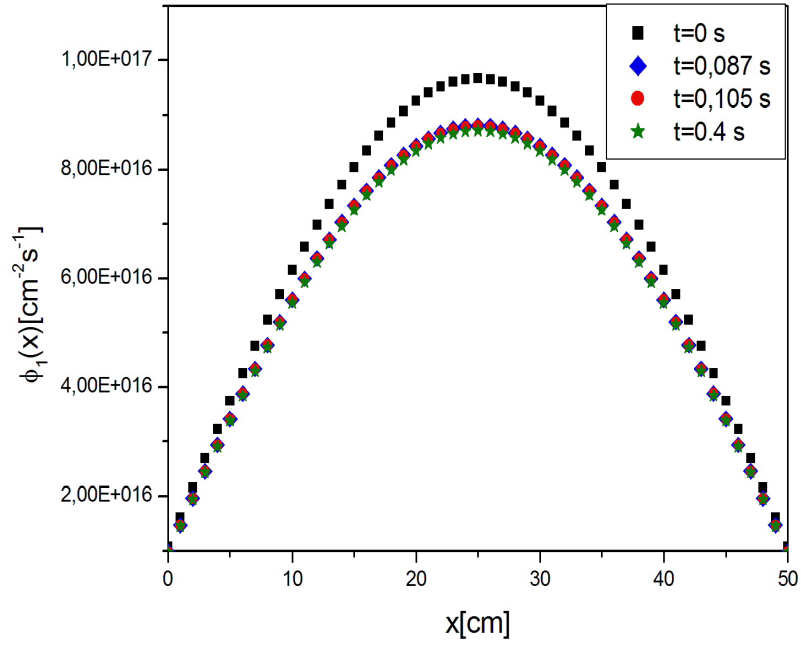


Figura 5.3: Fluxo escalar grupo 1 do problema-modelo 1

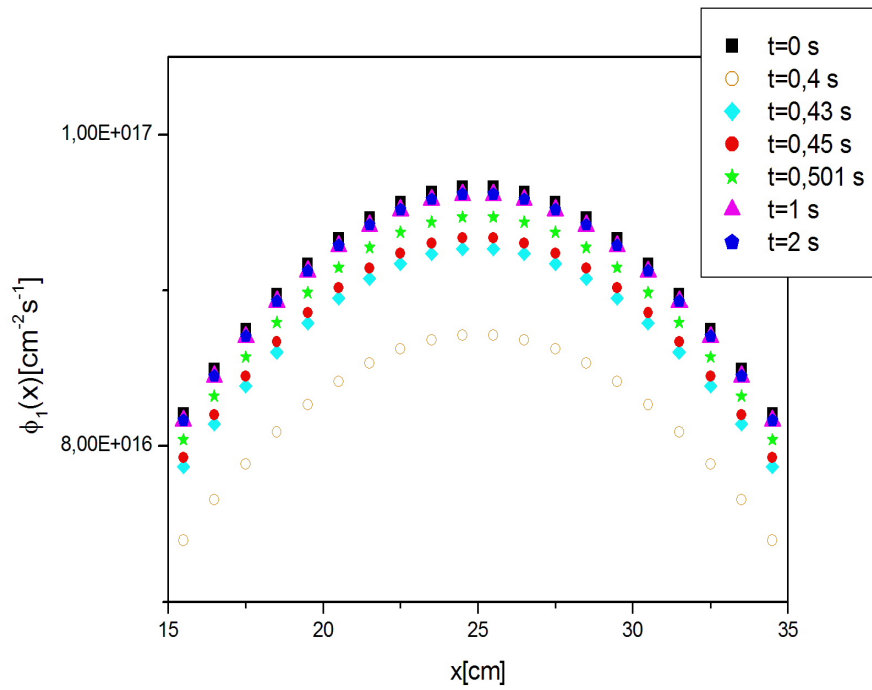
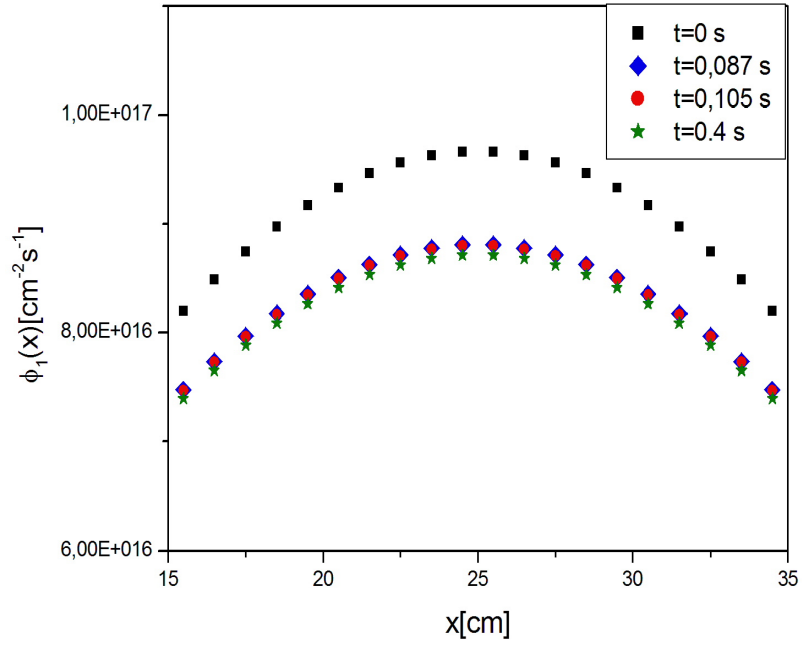


Figura 5.4: Fluxo escalar grupo 1 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$

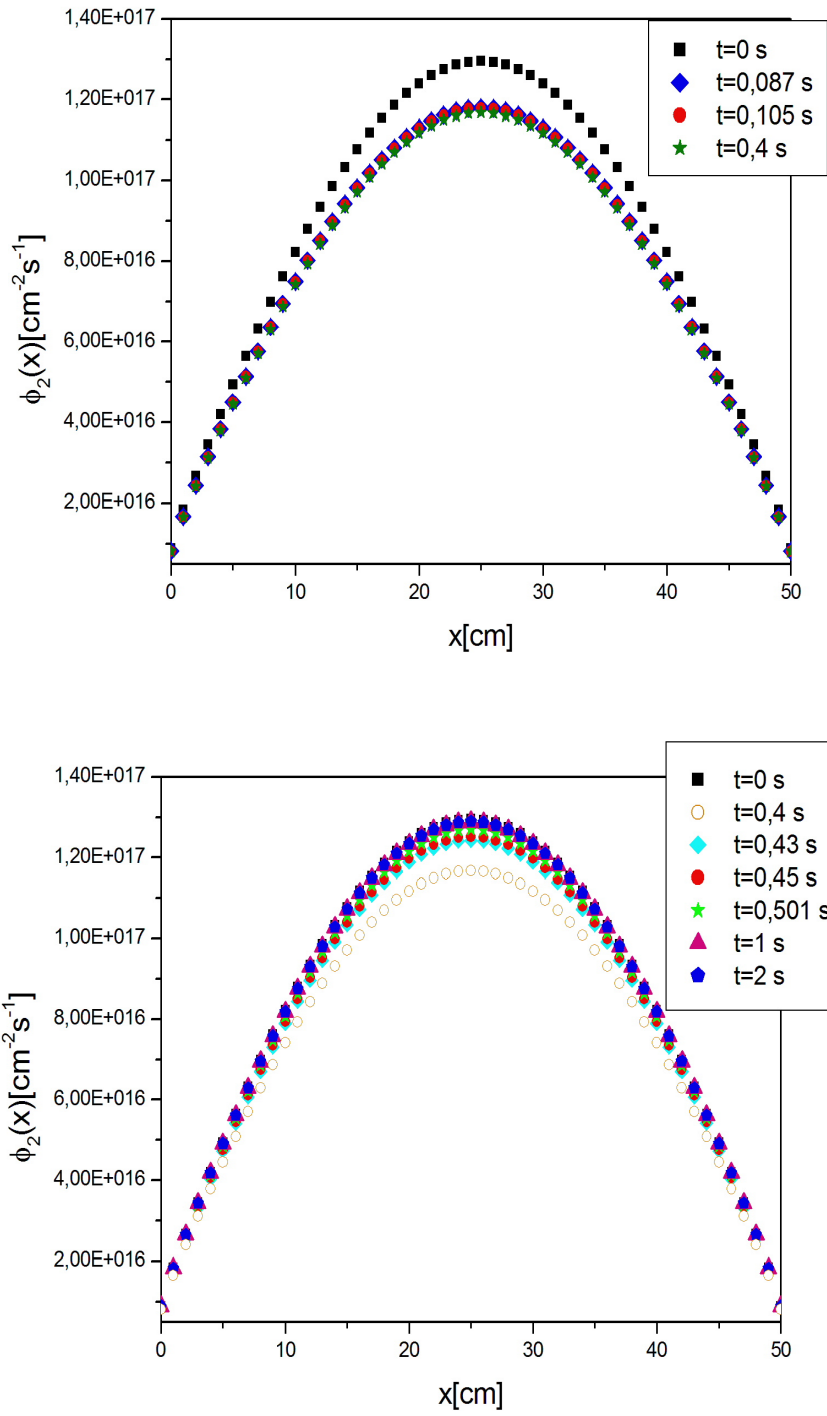


Figura 5.5: Fluxo escalar grupo 2 do problema-modelo 1

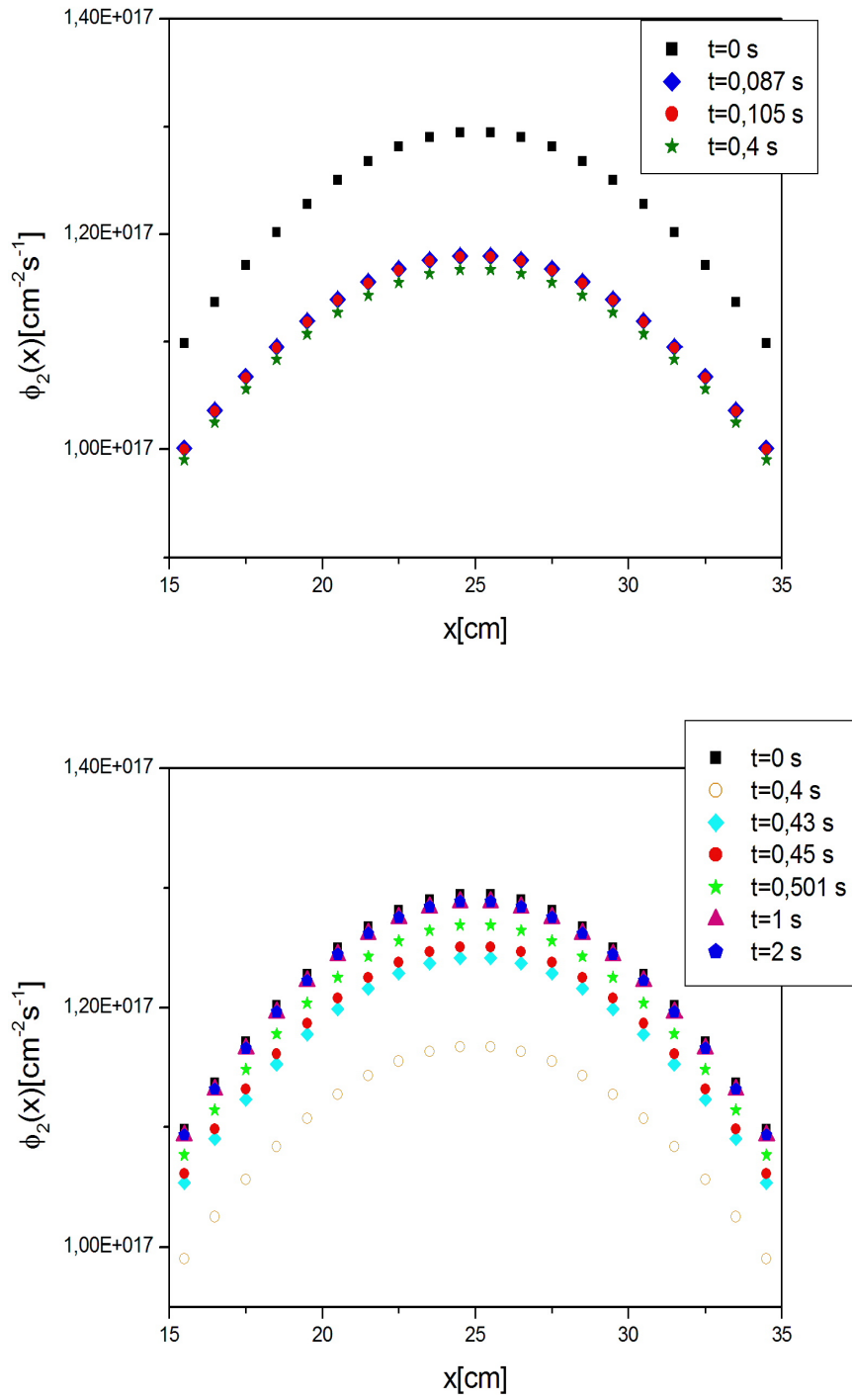


Figura 5.6: Fluxo escalar grupo 2 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$

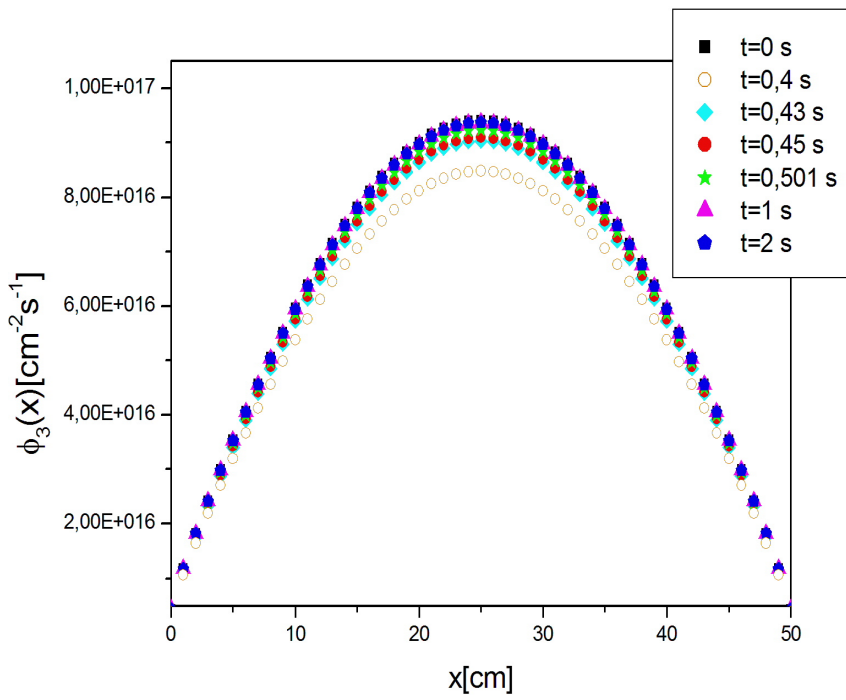
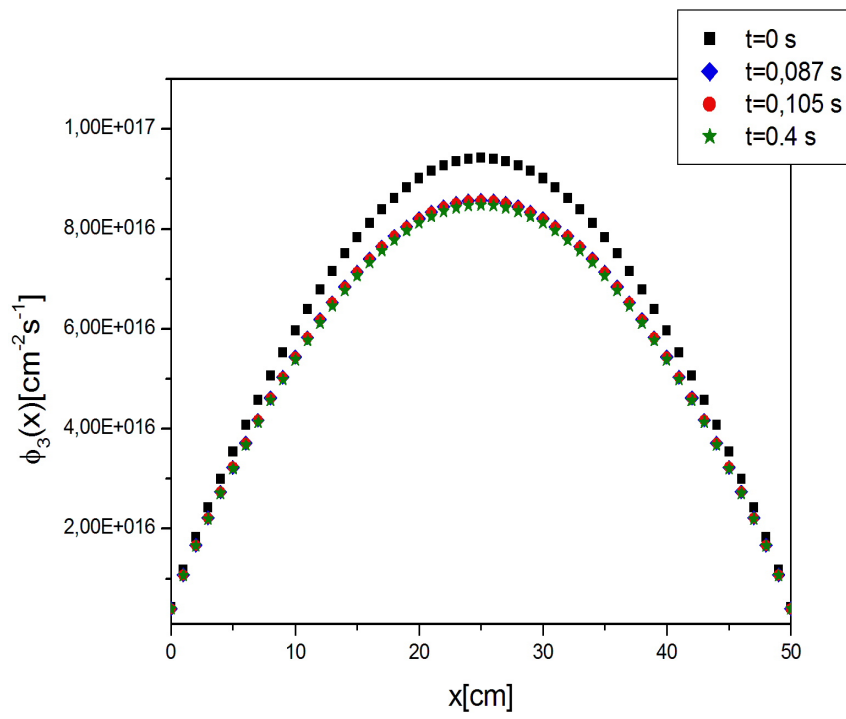


Figura 5.7: Fluxo escalar grupo 3 do problema-modelo 1

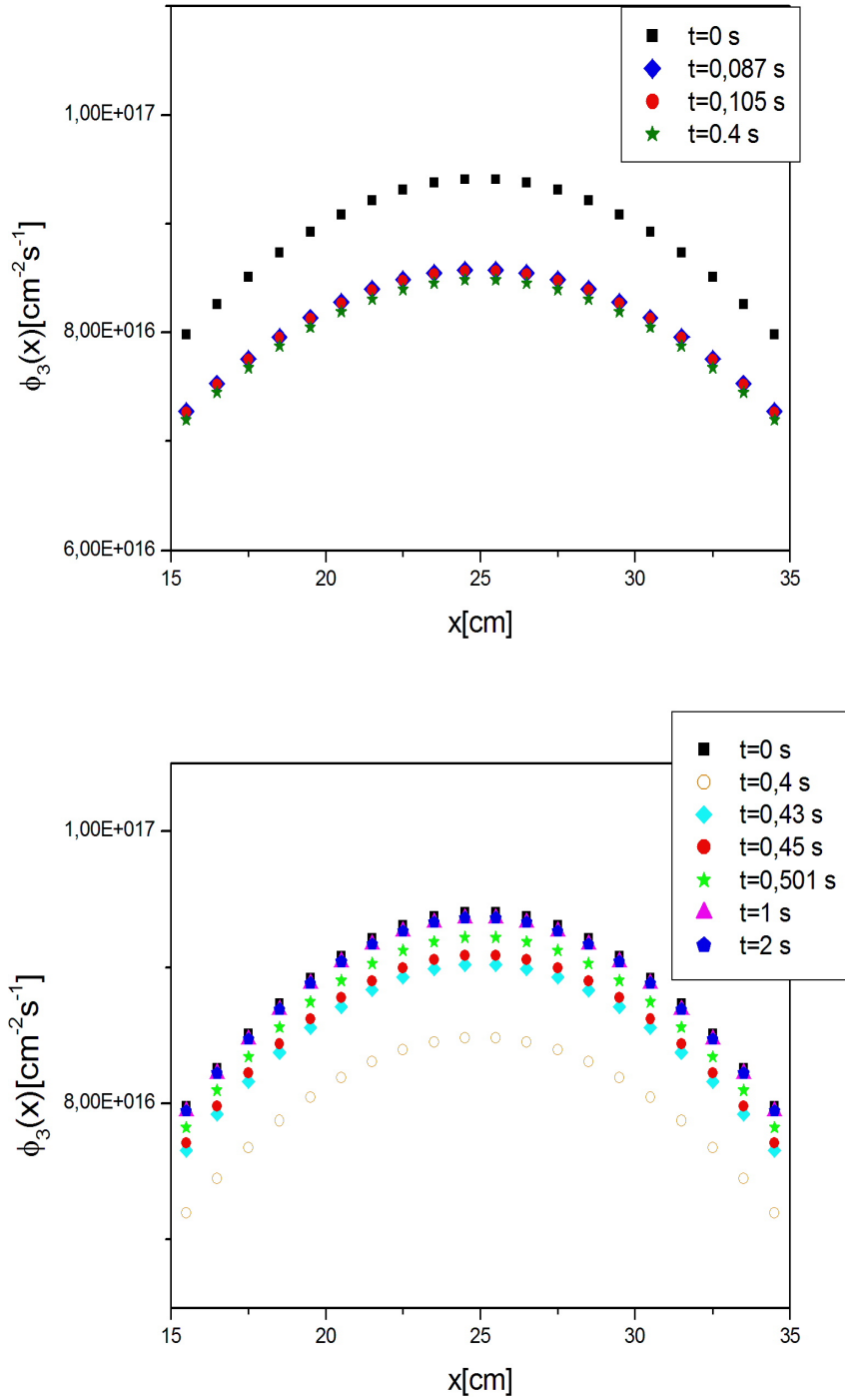


Figura 5.8: Fluxo escalar grupo 3 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$

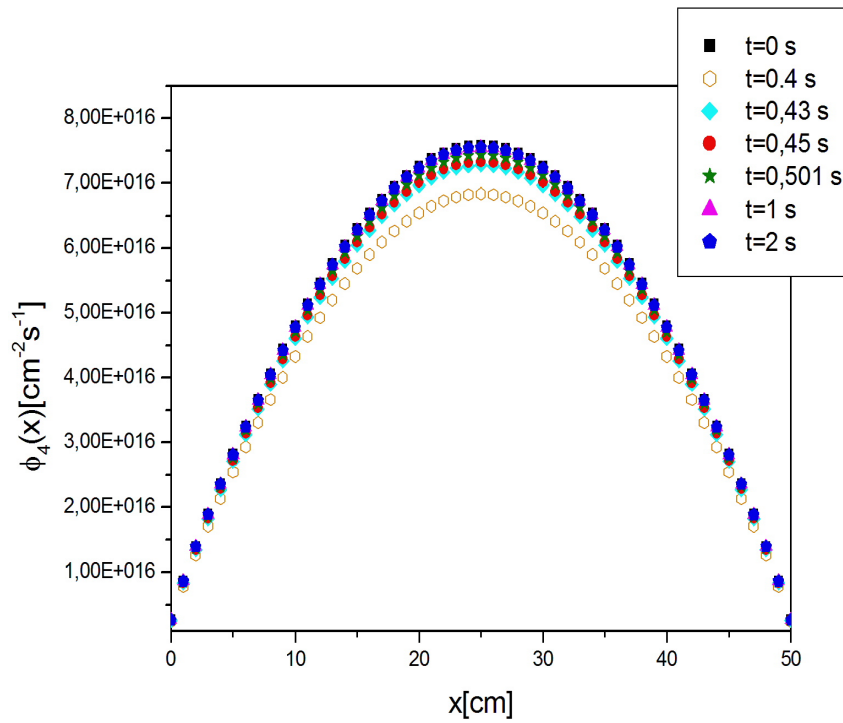
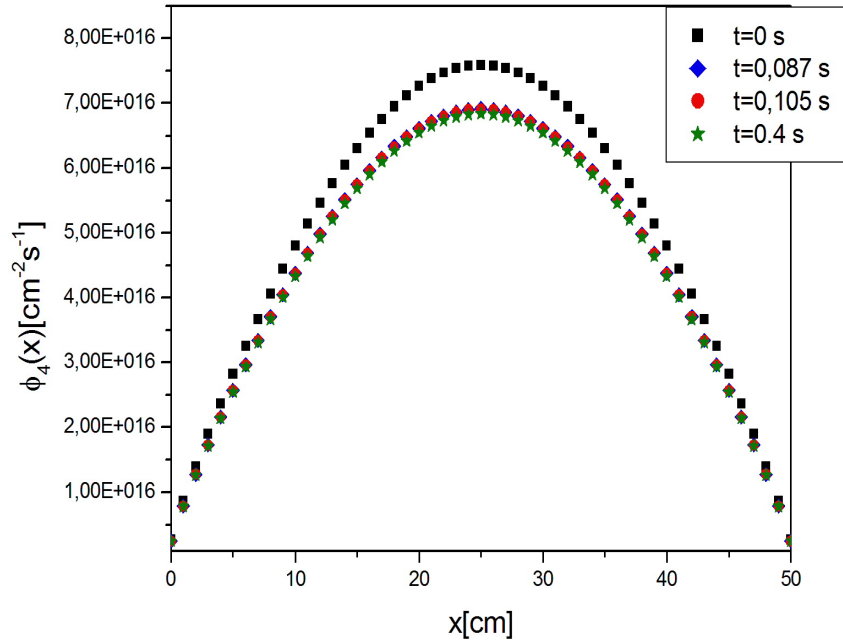


Figura 5.9: Fluxo escalar grupo 4 do problema-modelo 1

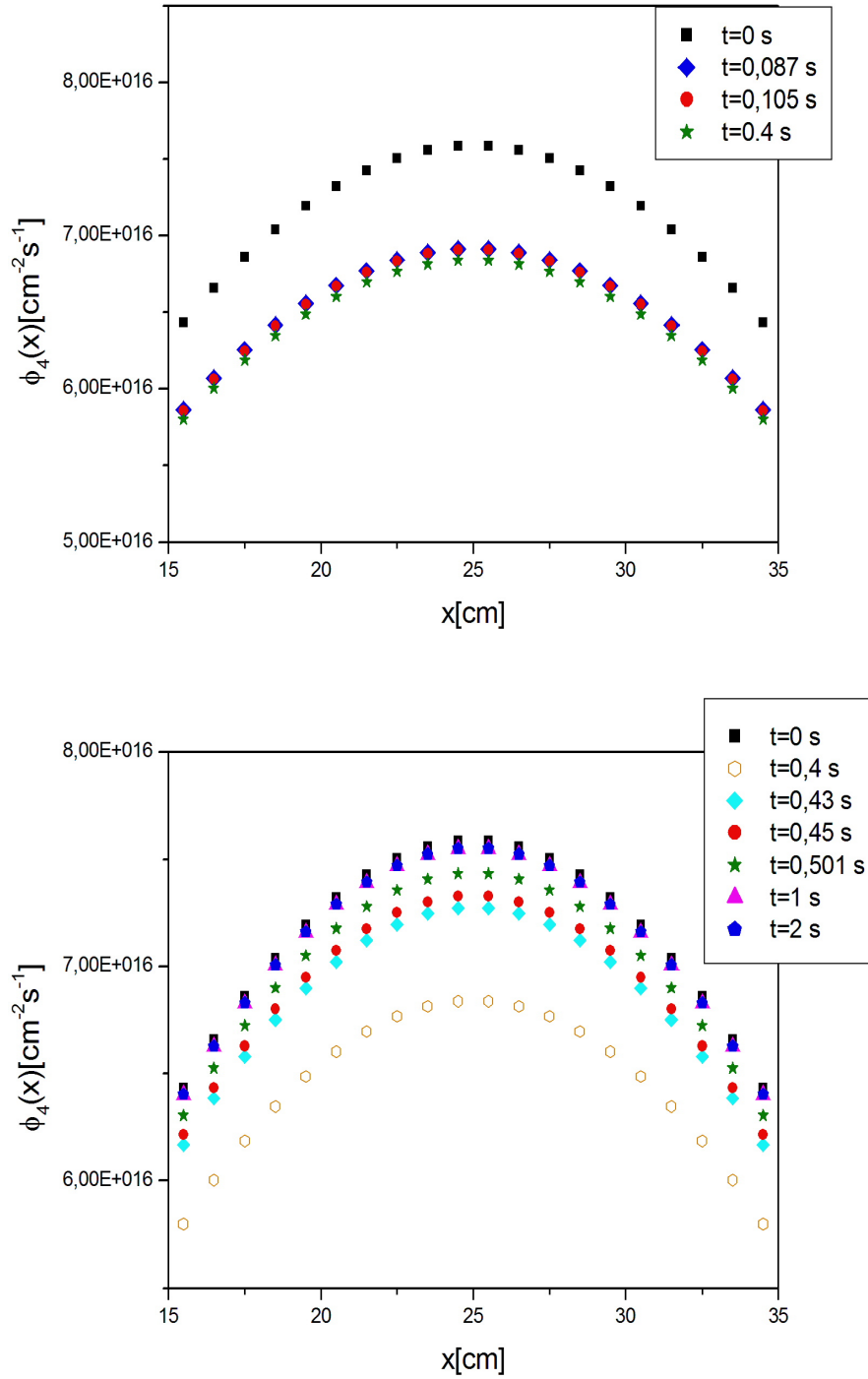


Figura 5.10: Fluxo escalar grupo 4 do problema-modelo 1 para $15 \leq x \leq 35$

5.2 Problema modelo multigrupo de energia com $G = 2$ em domínio heterogêneo

Nesta seção, primeiramente avaliamos o Método LTS_N junto com o Método da Potência e obtemos as condições iniciais para o problema de cinética. Depois, aplicamos a metodologia descrita no capítulo 4 para resolver o problema de cinética.

Consideramos um problema modelo, com dois grupos de energia, que consiste de uma placa heterogênea de tamanho $H = 384,758$ cm, como ilustra a figura 5.11. Este problema modelo é apresentado em [26, 27], onde as constantes do grupo são dadas pela teoria da difusão com dois grupos de energia. Para obtermos as seções de choque utilizadas nas equações S_N de dois grupos para as dez regiões da placa, definimos

$$\sigma_{tg} = \frac{1}{3D_g} \quad \text{e} \quad \sigma_{sg'g} = \sigma_{tg'} - (\sigma_{ag'} + \sigma_{sg'g'} + D_{g'}B^2), \quad g' \neq g. \quad (5.2)$$

Aqui $D_{g'}$ é o coeficiente de difusão do grupo, $\sigma_{ag'}$ é a seção de choque de absorção do grupo e B^2 é o buckling geométrico. As seções de choque para essas regiões são apresentadas na Tabela 5.5 (a seguir), e os espectros de fissão para os 2 grupos de energia são: $\chi_1^p = \chi_1^d = 1$ e $\chi_2^p = \chi_2^d = 0$. A velocidade dos nêutrons para o grupo rápido é $v_1 = 1,0 \times 10^6$ cm/s e para o grupo térmico é $v_2 = 2,2 \times 10^5$ cm/s, para todas as regiões. Nos experimentos numéricos assumimos que a placa produz potência de 10 megawatts e a liberação de energia é igual a 200Mev para cada reação de fissão. Condições de contorno tipo vácuo são aplicadas nos contornos exteriores das duas regiões refletoras. Para solucionar este problema, usamos o conjunto de quadratura angular S_N de Gauss-Legendre com várias ordens dadas por N . Definimos $\epsilon_k = 10^{-7}$ na equação (3.20) e $\epsilon_\phi = 10^{-5}$ na equação (3.21).

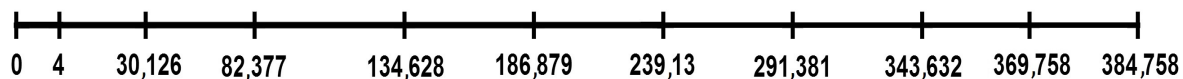


Figura 5.11: A placa de multicamadas para o problema-modelo 2.

Tabela 5.5: Parâmetros neutrônicos do problema-modelo 2 - (cm^{-1}).

Parâmetros cm^{-1}	σ_{t1}	σ_{t2}	σ_{s11}	σ_{s12}	σ_{s21}	σ_{s22}	σ_{f1}	σ_{f2}
Região 1	0,21395	1,39353	0,16520	0,04797	0,0	1,38308	0,0	0,0
Região 2	0,17675	0,64041	0,16029	0,00891	0,0	0,58159	0,00450	0,08888
Região 3	0,17770	0,65967	0,16081	0,00898	0,0	0,59720	0,00437	0,09153
Região 4	0,18169	0,68615	0,16394	0,00968	0,0	0,62319	0,00431	0,09091
Região 5	0,18776	0,72291	0,16879	0,01077	0,0	0,66025	0,00428	0,08935
Região 6	0,19759	0,78339	0,17668	0,01256	0,0	0,72135	0,00423	0,08685
Região 7	0,21366	0,88441	0,18966	0,01549	0,0	0,82323	0,00418	0,08338
Região 8	0,22949	0,98590	0,20248	0,01841	0,0	0,92512	0,00418	0,08128
Região 9	0,23554	1,01937	0,20758	0,01959	0,0	0,95762	0,00447	0,08582
Região 10	0,27277	2,05002	0,22088	0,05061	0,0	2,01449	0,0	0,0

Tabela 5.6: Resultados numéricos para o fluxo escalar do problema-modelo 2 em $t = 0$ s.

Método numérico	Grupo de energia	Fluxo escalar		
		x=4,0cm	x=186,879cm	x=369,758cm
DD, S_4 , 128 células por região	1	0,71098E+15	0,28703E+17	0,17349E+17
	2	0,32711E+15	0,53773E+16	0,10756E+17
SD-SGF, S_4 , sem discretização espacial	1	0,71098E+15	0,28703E+17	0,17349E+17
	2	0,32711E+15	0,53773E+16	0,10756E+17
LTS_4 , sem discretização espacial	1	0,71099E+15	0,28704E+17	0,17348E+17
	2	0,32715E+15	0,53773E+16	0,10755E+17
LTS_{10} , sem discretização espacial	1	0,71337E+15	0,28667E+17	0,17375E+17
	2	0,32700E+15	0,53701E+16	0,10741E+17
LTS_{20} , sem discretização espacial	1	0,71365E+15	0,28667E+17	0,17377E+17
	2	0,32689E+15	0,53701E+16	0,10737E+17
LTS_{40} , sem discretização espacial	1	0,71377E+15	0,28667E+17	0,17377E+17
	2	0,32687E+15	0,53701E+16	0,10737E+17
LTS_{50} , sem discretização espacial	1	0,71379E+15	0,28667E+17	0,17377E+17
	2	0,32687E+15	0,53701E+16	0,10737E+17
LTS_{100} , sem discretização espacial	1	0,71379E+15	0,28667E+17	0,17377E+17
	2	0,32687E+15	0,53701E+16	0,10737E+17

Tabela 5.7: Resultados numéricos para k_{eff} .

Método numérico	k_{eff}
DD, S_4 , 128 células por região	1,049697
SD-SGF, S_4 , sem discretização espacial	1,049697
LTS $_4$, sem discretização espacial	1,049694
LTS $_{10}$, sem discretização espacial	1,049688
LTS $_{20}$, sem discretização espacial	1,049688
LTS $_{40}$, sem discretização espacial	1,049688
LTS $_{50}$, sem discretização espacial	1,049688
LTS $_{100}$, sem discretização espacial	1,049688

A Tabela 5.6 (acima) exhibe os resultados numéricos para o fluxo escalar em cada grupo em três posições distintas $x = 4$ cm, $x = 186,879$ cm e $x = 369,758$ cm na placa, quando gerados pelo método DD de malha fina [28] em uma grade espacial composta por 128 células por região, usando o modelo S_4 de Gauss-Legendre. Na terceira e quarta linhas da Tabela 5.6 vemos os valores numéricos para estas quantidades quando geradas pelo método nodal SD-SGF malha grossa [27], e pelo presente método LTS $_4$ ambos sem discretização espacial. Como podemos ver, os fluxos escalares gerados pelo método LTS $_4$ são muito precisos em comparação aos resultados gerados pelo método DD malha fina e aos resultados gerados pelo método SD-SGF de malha grossa. Além disso, apresentamos na Tabela 5.6 os valores numéricos gerados para o fluxo escalar através do método LTS $_N$ usando os modelos S_{10} ,

S_{20} , S_{40} , S_{50} e S_{100} de Gauss-Legendre. De acordo com estes resultados numéricos, podemos concluir que, à medida que aumentamos a ordem N , os valores numéricos mudam cada vez menos, o que indica que convergem para a solução de transporte, conseguindo 5 casas decimais de precisão.

A Tabela 5.7 (acima) lista nas segunda, terceira e quarta linhas os valores do fator de multiplicação efetivo (k_{eff}), gerados pelos métodos DD, o SD-SGF e o LTS_4 , respectivamente, para o problema teste usando o modelo S_4 . Nota-se que o LTS_4 gera resultados para k_{eff} muito precisos, pois o mesmo desvia dos resultados gerados pelos métodos DD e SD-SGF menos que 1 pcm (partes por cem mil). Também mostramos os resultados numéricos gerados pelo método LTS_N com $N = 10, 20, 40, 50, 100$ e vemos que eles são os mesmos com seis casas decimais.

No problema de cinética incluindo os nêutrons atrasados, são considerados 6 grupos de nêutrons atrasados e o combustível U^{235} . Os parâmetros nucleares e a geometria do problema são os mesmos do caso estacionário, com quadratura angular S_4 de Gauss-Legendre. A condição inicial utilizada é a solução do problema estacionário de transporte. Mantemos o sistema crítico dividindo as seções de choque de fissão de cada grupo de energia por $k_{eff} = 1,049694$. Então, adicionamos uma reatividade negativa ($\rho = -0,1\%$) no sistema crítico e obtemos $k_{eff} = 0,99935$, que caracteriza um sistema na condição subcrítica e por fim introduzimos uma fonte de nêutrons estacionária de nêutrons em cada região r em $t_0 = 0,5$ s, que estabiliza o sistema no perfil crítico, uma vez que a fonte é dada por

$$S_g(x) = \frac{\chi_g}{2} \sum_{g'=1}^G \left(\frac{\nu_{g'} \sigma_{fg'}}{k_{eff}} - \frac{\nu_{g'} \sigma_{fg'}}{k_{eff}} k \right) \hat{\phi}_{g'}(x), \quad (5.3)$$

onde $k = \frac{1}{1-\rho}$, $\hat{\phi}_{g'}(x)$ é fluxo escalar gerado pela metodologia apresentada no capítulo 3 e cujo perfil encontram-se representado no gráfico da Figura 5.12:

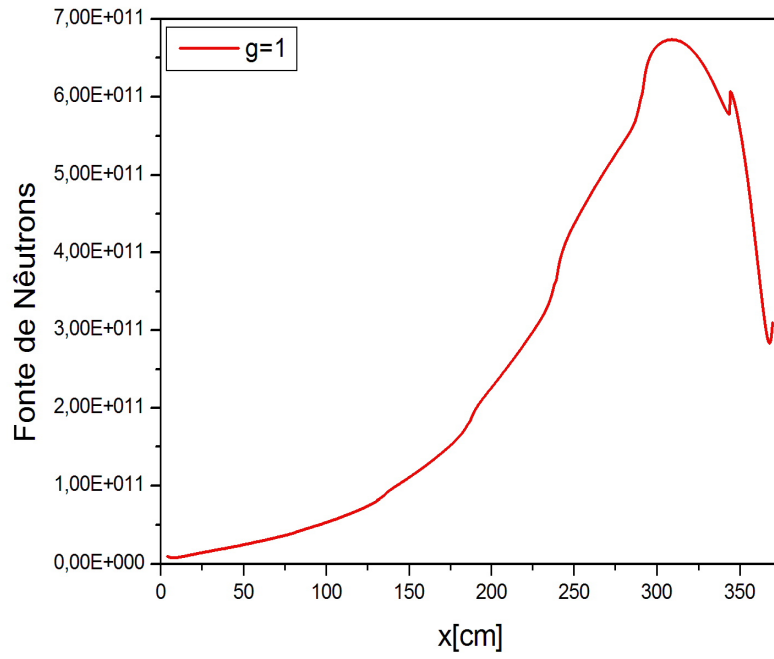


Figura 5.12: Fonte estacionária de nêutrons para o grupo de energia 1 do problema-modelo 2

Tabela 5.8: Resultados numéricos para o fluxo escalar para o grupo de energia 1 do problema-modelo 2 com $t \geq 0$

	Grupo 1		
	x=4,0cm	x=186,879cm	x=369,758cm
t=0,0E+0	0,71099E+15	0,28704E+17	0,17348E+17
t=5,0E-2	0,67501E+15	0,27263E+17	0,16487E+17
t=8,0E-2	0,65201E+15	0,26364E+17	0,15958E+17
t=1,0E-1	0,64903E+15	0,26247E+17	0,15888E+17
t=5,0E-1	0,64007E+15	0,25885E+17	0,15670E+17
t=5,1E-1	0,67104E+15	0,27143E+17	0,16434E+17
t=5,5E-1	0,68015E+15	0,27511E+17	0,16656E+17
t=6,0E-1	0,68917E+15	0,27875E+17	0,16877E+17
t=8,0E-1	0,70461E+15	0,28498E+17	0,17252E+17
t=1,0E+0	0,70596E+15	0,28552E+17	0,17284E+17
t=2,0E+0	0,70601E+15	0,28557E+17	0,17289E+17

Tabela 5.9: Resultados numéricos para o fluxo escalar para o grupo de energia 2 do problema-modelo 2 com $t \geq 0$

	Grupo 2		
	x=4,0cm	x=186,879cm	x=369,758cm
t=0,0E+0	0,32715E+15	0,53773E+16	0,10755E+17
t=5,0E-2	0,31065E+15	0,51081E+16	0,10223E+17
t=8,0E-2	0,30000E+15	0,49389E+16	0,98931E+16
t=1,0E-1	0,29862E+15	0,49168E+16	0,98496E+16
t=5,0E-1	0,29450E+15	0,48491E+16	0,97143E+16
t=5,1E-1	0,30874E+15	0,50846E+16	0,10187E+17
t=5,5E-1	0,31293E+15	0,51535E+16	0,10325E+17
t=6,0E-1	0,31708E+15	0,52218E+16	0,10462E+17
t=8,0E-1	0,32419E+15	0,53384E+16	0,10695E+17
t=1,0E+0	0,32481E+15	0,53485E+16	0,10715E+17
t=2,0E+0	0,32490E+15	0,53494E+16	0,10724E+17

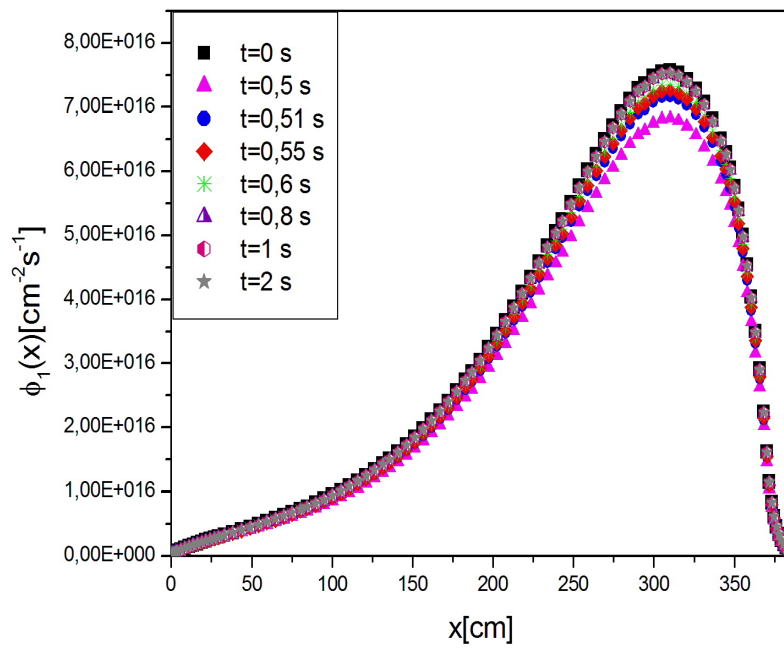
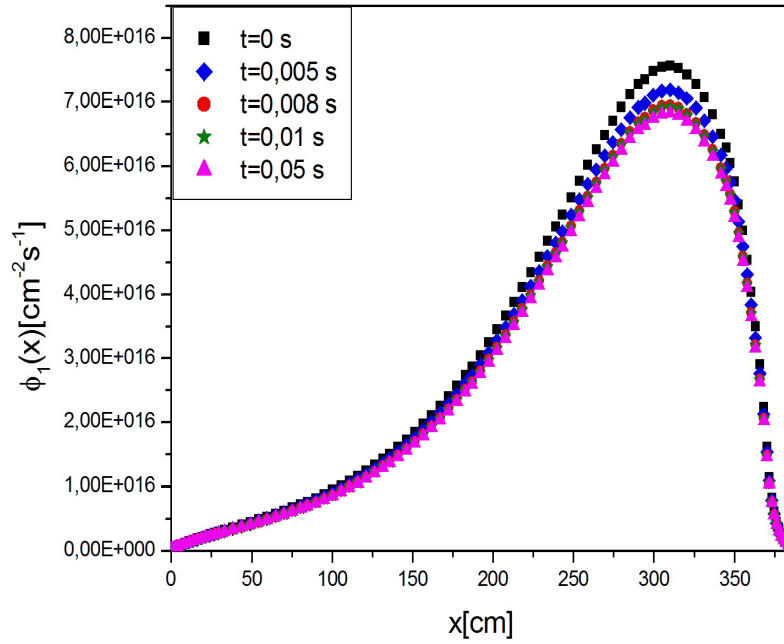


Figura 5.13: Fluxo escalar do grupo 1 para o problema-modelo 2

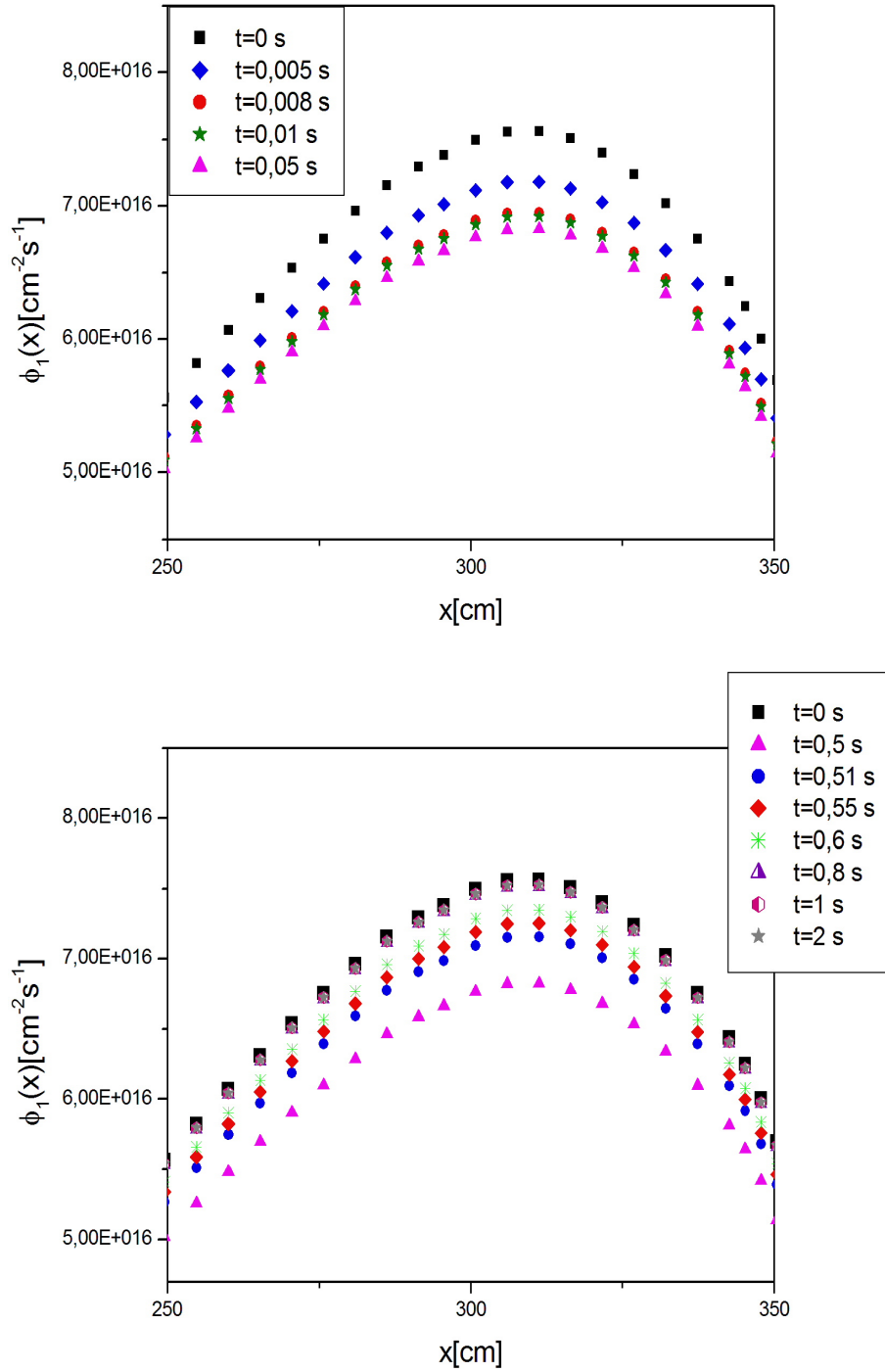


Figura 5.14: Fluxo escalar do grupo 1 para o problema-modelo 2 com $250 \leq x \leq 350$

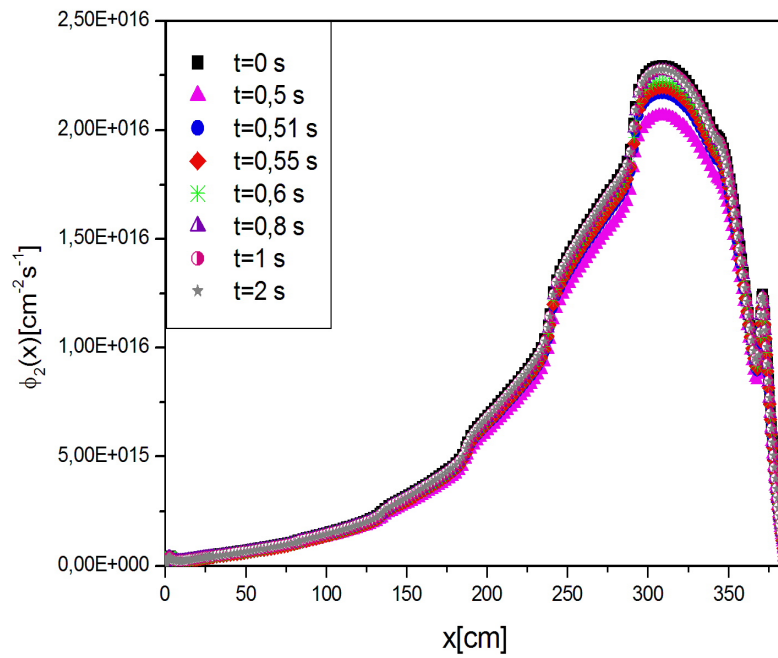
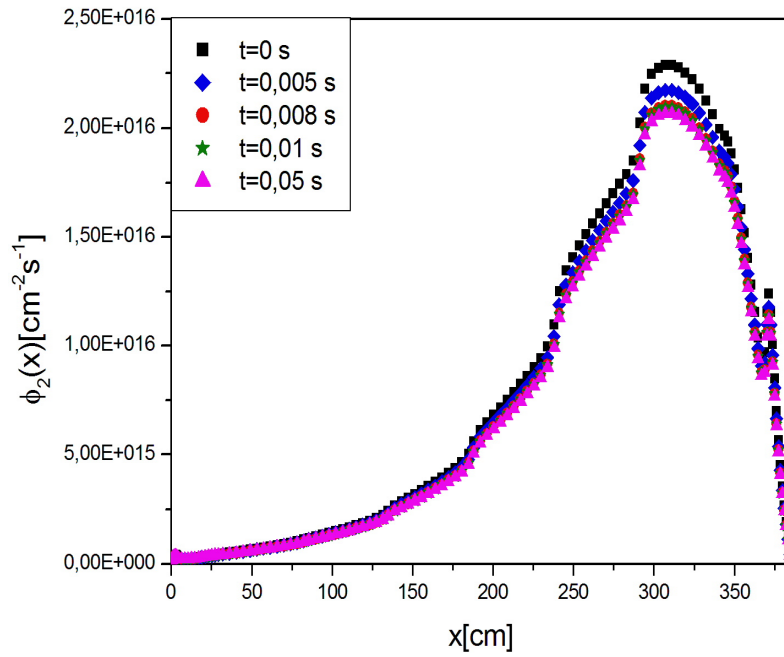


Figura 5.15: Fluxo escalar do grupo 2 para o problema-modelo 2

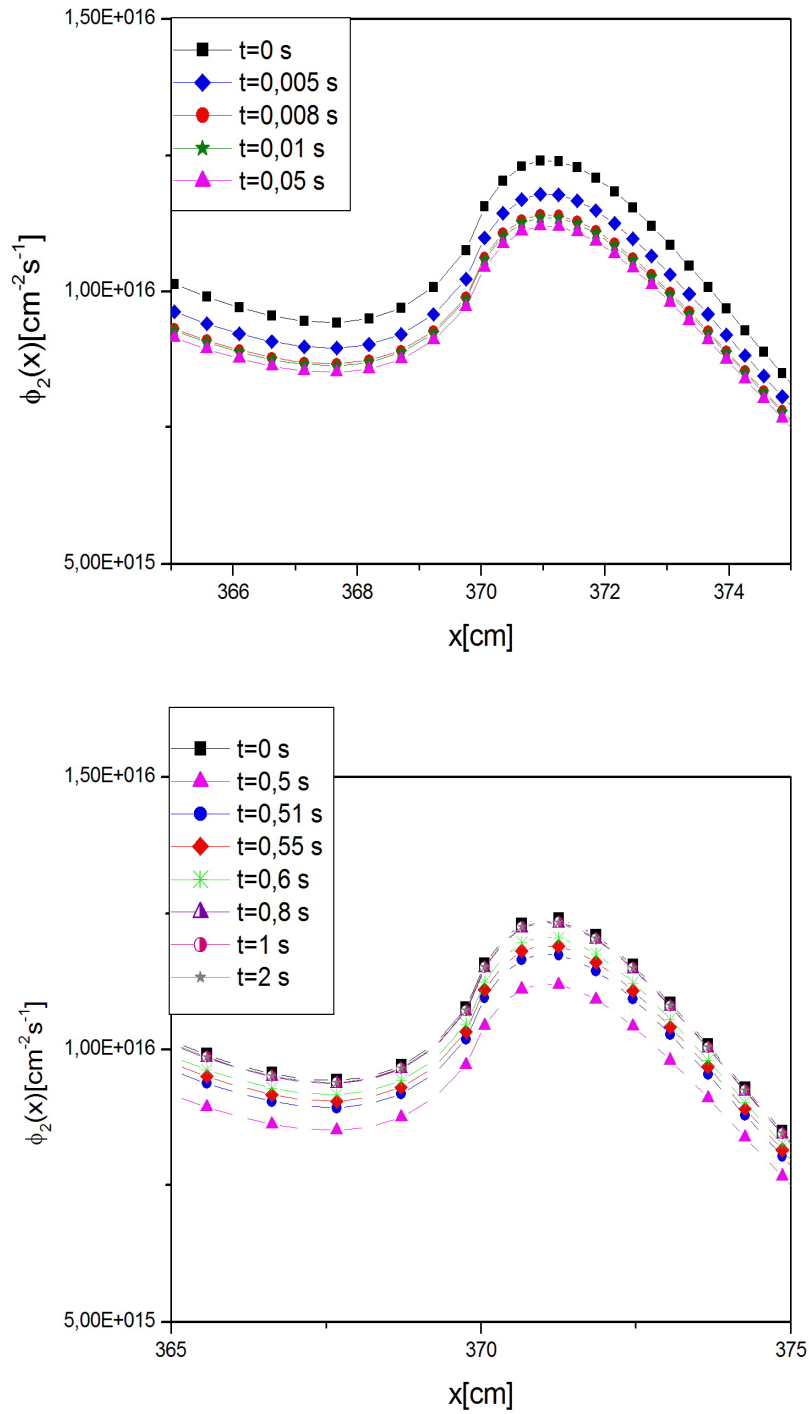


Figura 5.16: Fluxo escalar do grupo 2 para o problema-modelo 2 com $365 \leq x \leq 375$

Na Tabela 5.8 (acima) mostramos resultados numéricos para o problema modelo com dois grupos energia e dez regiões, que consiste de um sistema subcrítico que é estabilizado por uma fonte prescrita independente do tempo, representada na Figura 5.12, para os perfis dos fluxos críticos ($t = 0$ s, quadrados pretos nas Figuras 5.13–5.16). Desta forma, observando as Figuras (5.13–5.16), podemos ver que os perfis dos fluxos escalares dos dois grupos de energia diminui para $0 < t \leq 0,5$ s e aumenta para $t > 0,5$ s, tendendo para os perfis críticos (quadrados pretos).

6 CONCLUSÕES

Nesta tese, desenvolvemos métodos que fornecem uma representação analítica para a solução de problemas neutrônicos estacionários e de cinética. Os resultados obtidos - reforçados pela análise da convergência do método LTS_N que já foi mostrada usando a teoria forte dos C_0 semigrupos [29], o que garante que para $N \rightarrow \infty$, a solução LTS_N aproxima a solução exata de Case [30]-, mostram a solidez e a precisão dessas metodologias.

Da teoria de transporte sabemos que a multiplicidade total de um evento é dado por

$$c = \frac{\sigma_{es} + \sigma_{is} + \nu\sigma_f + x\sigma_{xn} + \dots}{\sigma_t}, \quad (6.1)$$

se $c < 1$, a matriz LTS_N apresenta autovalores reais simétricos, se $c > 1$, a matriz LTS_N apresenta um par de autovalores imaginários puros e conjugados. Portanto, cumpre observar que por esta metodologia proposta o problema de transporte com $c > 1$ é resolvido com autovalores reais, pois o termo de fonte de fissão é inserido recursivamente como fonte, resultando em um problema com $c < 1$. Desta forma, a solução desenvolvida é válida para resolução de problemas com $c \geq 1$ e também para o caso de $c < 1$. Observamos que quando consideramos $c < 1$, o termo de fonte que corrige a fissão de forma recursiva é zero.

Com relação ao problema estacionário S_N multigrupo com fonte de fissão em um meio heterogêneo, obtivemos sucesso na questão da busca de uma representação analítica da solução. A solução proposta é bastante geral, pois é válida para qualquer número arbitrário de grupos de energia e qualquer número arbitrário de regiões. A metodologia descrita é aplicada para um modelo de dois grupos de energia e dez regiões e as simulações numéricas comparadas com resultados da literatura, observamos uma boa concordância dos resultados obtidos para o k_{eff} e o fluxo escalar.

Neste trabalho, damos o primeiro passo para a construção de representações analíticas da solução da equação S_N de cinética multigrupo de energia considerando I grupos de precursores de nêutrons atrasados e meio heterogêneo que possam ser aplicadas em um reator ADS, uma vez que a solução apresentada é construída considerando uma fonte de fissão de nêutrons ao invés de uma fonte pulsada. A solução proposta nesta tese, é imposta mediante uma expansão do fluxo angular de nêutrons e da concentração de precursores de nêutrons atrasados, em séries de funções, obtendo a correção da fonte de forma recursiva conseguimos expressar analiticamente a solução do problema S_N de cinética, sendo bastante geral. Logo podemos adaptar a qualquer tipo de fonte integrável, inclusive à fonte pulsada como requer o reator ADS. Cabe observar que a solução é uma representação analítica, no sentido de que a única aproximação numérica realizada ao longo da solução é a inversão numérica da transformada de Laplace na variável temporal.

Os experimentos numéricos apresentados no capítulo anterior ilustram a evolução temporal de um sistema subcrítico estabilizado com uma fonte estacionária. Relatando um comportamento físico esperado para o fluxo escalar de nêutrons quando alteramos a seção de choque de fissão, no caso de interesse nesta tese quando diminuimos ($\rho < 0$), ou seja, ao inserirmos uma reatividade negativa no sistema, os resultados obtidos são fluxos escalares menores que os do sistema crítico. É importante observar neste ponto que apesar de incluirmos reatividades negativas nos problemas-modelos, a metodologia é análoga para inserções de reatividades positivas, para mais detalhes ver [31]. E, no instante de tempo $t = t_0$ a fonte estacionária de nêutrons é adicionada ao sistema, fazendo com que o mesmo estabilize no perfil crítico. Ressaltamos por oportuno que a fonte estacionária que introduzimos no sistema fora do estado crítico não precisa ser necessariamente a fonte dada pela equação (5.3)(que pode ser negativa se o sistema estiver supercrítico). Pode ocorrer que desejamos inserir uma porcentagem do perfil da fonte estacionária de nêutrons (para mais ou para menos) e, neste caso, o perfil do fluxo escalar será estabilizado acima ou abaixo do perfil crítico.

Em cálculos mais realísticos, devemos incluir geometrias multidimensionais no modelo matemático. Portanto, como trabalhos futuros, propomos a extensão da metodologia descrita nesta tese para modelos S_N de cinética para geometrias retangulares. E a implementação de um acelerador de convergência na recursão utilizada para a solução do problema.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Rubbia, Report, CERN/AT/95-44 (ET), 1995.
- [2] J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton. Nuclear Reactor Analysis. *John Wiley and Sons*, Ann Harbor, Michigan, USA, 1 edition, 1976.
- [3] G. R. Keepin. *Physics of nuclear kinetics*. Addison-Wesley series in nuclear science and engineering. Addison-Wesley Publishing Company, 1965.
- [4] J. B. Yasinsky and A. F. Henry. Some numerical experiments concerning space-time reactor kinetics behavior. *Nuclear Science Engineering*, 22:171-181, 1965.
- [5] K.O. Ott and J.T. Madell. Quasistatic treatment of spatial phenomenos in reactor dynamics. *Nuclear Science and Engineering*, 26, 1966.
- [6] S. Dulla, E.H. Mund and P. Ravetto. *The quasi-static method revisited*. *Progress in Nuclear Energy*, 50(8):908-920, 2008.
- [7] W. Stacey. Modal approximations: Theory and an application to reactor physics, The MIT Press, Cambridge, Massachussts, USA, 1 edition, 1967.
- [8] Z.R. Lima, F.C. Silva, A.C.M. Alvim: *A Modal Multidimensional Kinetics Method Using Pseudo-Harminics*, *Annals of Nuclear Energy*, vol. 36 pp. 752-759, 2009.
- [9] L.M. Grossman, J.P. Hennart: *Nodal Diffusion Method for Space-Time Neutron Kinetics*, *Progress in Nuclear Energy*, vol. 49, pp. 181-216, 2007.
- [10] S. Kaplan, A.F. Henry, S.G. Margolis, J.J. Taylor: *Space-Time Reactor Dynamics*, *Proceedings of the Geneva Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, vol. 4, pp. 41-50, 1964a.

- [11] T.M. Sutton, B.N. Aviles: *Diffusion Theory Method for Spatial Kinetics Calculations*, Progress in Nuclear Energy, vol. 30, pp. 119-182, 1996.
- [12] C.Z. Petersen, Solução Analítica das Equações da Cinética Pontual e Espacial da Teoria de Difusão de Nêutrons pela Técnicas da GITT e Decomposição. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.
- [13] C. Ceolin, A Equação Unidimensional de Difusão de Nêutrons com Modelo Multigrupo de Energia e meio Heterogêneo: Avaliação do Fluxo para Problemas Estacionários e de Cinética. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.
- [14] R.L. Burden and D.J. Faires. Numerical Analysis. PWS-KENT Publishing Company, Boston, 2008.
- [15] L. B. Barichello. Formulação Analítica para Solução do Problema de Ordenada Discreta Unidimensional. Tese de Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- [16] C. Batistela, M. Vilhena. Cálculo de Criticalidade pelo Método LTS_N . In XI ENFIR-*Encontro Nacional de Física de Reatores e Termo-hidráulica*. Poços de Caldas, M. G., Brasil. volume 1, pp. 226-231, 1997a.
- [17] G. Orenge, M. Vilhena, G. C. O., G. Caldeira, G. G. A.. Recent Advances in the LTS_N Method for Criticality Calculations in a Slab Geommetry. *Annals of Nuclear Energy*. vol. 31, pp. 2195-2202, 2004.
- [18] F.K. Tomaschewski, C.F. Segatto, M.T. Vilhena. *Integral Methods in Science and Engineering: Progress in Numerical and Analytic Techniques*,

- chapter A Genuine Analytical Solution for the S_N Multi-Group Neutron Equation in Planar Geometry, pages 329-339. Springer New York, 2013.
- [19] F.K.Tomaschewski. Solução da Equação S_N Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo. Dissertação de Mestrado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- [20] D.P. Gaver Jr, Observing Stochastic Processes and Approximate Transform Inversion. *Operations Research*, vol. 14, pp 444-459, 1966.
- [21] H. Stehfest, “Numerical Inversion of Laplace Transforms Algorithm 368”, *Communications of the ACM*, vol. 13(1), pp.47-49, 1970.
- [22] H. Stehfest, “Numerical Inversion of Laplace Transforms Remark on Algorithm 368”, *Communications of the ACM*, vol. 13(10), pp.624, 1970.
- [23] J.R. Lamarsh. Introduction to Nuclear Theory. *Addison-Wesley Publishing Company*, 1966.
- [24] A. H. Stroud, Don Secrest, Gaussian Quadrature Formulas. IX + 369 S. London, 1966.
- [25] E.E. Lewis. Fundamentals of Nuclear Reactor Physics. Academic Press, 2008.
- [26] G.E. Fladmark. IAEA Numerical Reactor Calculations, IAEA-SM-154/20, Vienna, Jan. 17-21, pp. 497-507, 1972.
- [27] M.P. de Abreu, H.A. Filho and R.C. de Barros, A Numerical, Method for Multigroup Slab-Geometry Eigenvalue Problems in Transport Theory With no Spatial Truncation Error, *Transport Theory and Statical Phisics*, pp. 61-83, 1996.

- [28] E.E. Lewis and W.F. Miller, Jr., Computational Method of Neutron Transport, *John Wiley and Sons*, New York, 1984.
- [29] M.T. Vilhena, R.P. Pazos, Convergence of the LTS_N method: approach of C_0 semigroups, *Progress in Nuclear Energy*, vol. 34, pp.77-86, 1999.
- [30] K. M. Case. Elementary Solution of Transport Equation and their Applications. *Annals of Physics*, vol. 9, pp. 1-23, 1960.
- [31] F.K. Tomaschewski, C.F. Segatto, R.C. Barros, M.T. Vilhena. *Integral Methods in Science and Engineering: Theoretical and Computational Advances*, chapter An Analytical Representation for the Solution of Neutron Kinetic Transport Equation in Slab-Geometry Discrete Ordinates Formulation, pages 617-627. Springer New York, 2015.