

Filipe Gabriel Dahmer da Rosa

**Combinação de  
Previsão de Matrizes de Covariância Avaliada  
na Aplicação em Gestão de Portfólios**

Porto Alegre, RS, Brasil

Agosto, 2016

Filipe Gabriel Dahmer da Rosa

**Combinação de  
Previsão de Matrizes de Covariância Avaliada na  
Aplicação em Gestão de Portfólios**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Escola de Administração

Programa de Pós-Graduação em Administração

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Porto Alegre, RS, Brasil

Agosto, 2016

### CIP - Catalogação na Publicação

Rosa, Filipe Gabriel  
Combinação de Previsão de Matrizes de Covariância  
Avaliada na Aplicação em Gestão de Portfólios / Filipe  
Gabriel Rosa. -- 2016.  
60 f.

Orientador: João Frois Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa  
de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS,  
2016.

1. Portfólios. 2. Covariância. 3. Combinação de  
Previsões. I. Caldeira, João Frois, orient. II.  
Título.

Filipe Gabriel Dahmer da Rosa

**Combinação de  
Previsão de Matrizes de Covariância Avaliada na  
Aplicação em Gestão de Portfólios**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Escola de Administração da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de mestre em administração com ênfase em finanças.

Trabalho aprovado. Porto Alegre, RS, Brasil, 19 de Agosto de 2016:

---

**Prof. Dr. João Frois Caldeira**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Tiago Pascoal Filomena**  
Convidado 1

---

**Prof. Dr. Guilherme Valle Moura**  
Convidado 2

---

**Prof. Dr. Hudson da Silva Torrent**  
Convidado 3

Porto Alegre, RS, Brasil  
Agosto, 2016

*Este trabalho é dedicado a todos pais que  
sacrificam-se para dar a melhor educação aos seus filhos, em especial, ao meu pai.*

# Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados aos amigos de longa data Henrique Kike Saavedra, Diego Filho Senger, à minha família Michelle Rosa e Rebeca Rosa, incansáveis motivadoras. Aos meus colegas de finanças Mariana Rita Davi, Danilo Assa Navarro, Henrique Primeiro Ramos, Daniel Esquerda Vancin e Leonardo Solícito Santana.

Agradecimentos especiais são direcionados ao CNPQ<sup>1</sup> pelo financiamento.

---

<sup>1</sup> <<http://www.cnpq.br/>>

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia, Romanos 12, 2)*

# Resumo

A combinação de previsões de volatilidade já foi extensamente estudada para o caso univariado, tendo como conclusão de que os modelos combinados tendem a performar melhor que os modelos individuais. Esse trabalho tem enfoque no caso multivariado, pouco explorado na literatura, investigando a combinação de previsões da matriz de covariância dos retornos de ativos financeiros. Foi utilizada uma abordagem econômica, com base na seleção de portfólios, na determinação dos pesos na combinação de previsões de volatilidade multivariada, em detrimento das tradicionais abordagens estatísticas. O método utilizado é diferenciado por visar sua aplicação final: a seleção de portfólios. A aplicação empírica é feita com dados do mercado de ações brasileiro, com uma amostra total de 1236 observações compreendidas entre 2009 e 2014. Os resultados encontrados mostram que os modelos combinados levam a resultados econômicos superiores em termos de retorno ajustado ao risco. Ao considerar-se o investidor que objetiva o portfólio de mínima variância, os resultados também apontam a superioridade dos modelos combinados.

**Palavras-chave:** previsão. combinação. covariância. portfólio

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>12</b>
<b>2.1</b>	<b>Combinação de Previsões da Volatilidade Multivariada</b>	<b>13</b>
2.1.1	Combinação de Amendola e Storti	14
2.1.2	Combinação de Caldeira et. al.	18
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO EMPÍRICA</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Metodologia</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelos candidatos à combinação</b>	<b>23</b>
3.2.1	Modelo DCC	23
3.2.2	Modelo RM	24
3.2.3	Modelo SVECH	24
3.2.4	Modelo ADCC	25
3.2.5	Modelo OGARCH	25
<b>3.3</b>	<b>Regra de Combinação</b>	<b>26</b>
<b>3.4</b>	<b>Método de avaliação dos modelos</b>	<b>26</b>
<b>3.5</b>	<b>Análise dos Resultados</b>	<b>27</b>
3.5.1	Efeito dos custos de transação	31
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>34</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>36</b>

# 1 Introdução

Desde Markowitz (1952), a volatilidade tem sido um importante objeto de estudo na teoria financeira, principalmente na análise de risco e gestão de portfólios. Entretanto, um fator de elevada relevância tem sido por muito tempo desconsiderado na maioria dos estudos: a tomada de decisão do praticante de mercado. Enfatizando a importância desse estudo, na pesquisa de Amenc et al. (2012) com 139 gestores de diferentes fundos de investimentos, os quais possuíam mais de U\$12 trilhões em custódia, constatou-se que a grande maioria utilizava a previsão de volatilidade e correlação na determinação dos portfólios.

O modelo de Engle (1982) formalizou a característica heterocedástica observada nas séries financeiras, no qual a variância dos ativos depende de seus retornos passados. Bollerslev (1986) generalizou o modelo de Engle, incluindo a própria variância defasada, e, a partir de então, inúmeros outros modelos foram derivados, os chamados modelos da família GARCH. O vasto leque de opções de modelos leva os gestores, investidores, praticantes de mercado em geral, a tomarem uma decisão discricionária quanto ao modelo a ser utilizado para prever a volatilidade. Bauwens, Laurent e Rombouts (2006), e Silvennoinen e Teräsvirta (2009) desenvolvem extensas pesquisas sobre diferentes especificações dos modelos GARCH, capturando os fatos estilizados dos dados financeiros. Entretanto, nenhum modelo pode ser apontado como o modelo ideal. Tendo em vista a complexidade dos mercados de ações, a qual faz necessário o uso de toda informação disponível, é muito provável que um único modelo não seja suficiente para satisfazer essa necessidade. Conforme Hendry e Clements (2004), os modelos individuais captam diferentes informações, sendo a combinação de diferentes modelos uma alternativa para absorver o máximo de informação possível. Clemen (1989) afirma que independente do modo como a combinação de previsão é obtida, seu resultado traz um aumento na precisão sobre as previsões individuais. Considerando então os benefícios da combinação de modelos, outro questionamento emerge: como definir os pesos de cada modelo candidato nessa combinação.

No artigo seminal de Bates e Granger (1969) a diversificação de portfólio é colocada como uma das motivações mais evidentes para a combinação de previsões. Stock e Watson (2004) realizaram inúmeros testes com dados econômicos e financeiros utilizando modelos de previsão linear e não-linear. Os resultados encontrados apontam no mesmo sentido de Clemen (1989): A combinação de previsões supera em acurácia os modelos de previsão individuais. Em Marcellino (2004) testes semelhantes são realizados com dados macroeconômicos europeus, e as conclusões são de que as combinações são especialmente boa para dados de produção industrial, desemprego e inflação.

Figlewski e Urich (1983), Diebold e Pauly (1987), entre outros, argumentam que os modelos de previsão individuais são afetados de maneiras diferentes por quebras estruturais. Alguns modelos podem se adaptar às quebras estruturais rapidamente, enquanto outros têm seus parâmetros ajustados depois de um longo período. Logo, enquanto a janela de dados desde a quebra estrutural for pequena, os modelos com rápida adaptação tendem a performar melhor. Considerando que é muito difícil para o praticante de mercado identificar uma quebra estrutural em tempo real, a combinação de modelos de previsão com diferentes velocidade de adaptação tende a performar melhor que os modelos individuais, principalmente em períodos de elevada instabilidade.

Um trabalho importante sobre combinação de previsões de volatilidade multivariada é o de Amendola e Storti (2015). Na abordagem proposta pelos autores, os pesos da combinação são estimados através da minimização de uma função de perda estatística, sendo, pois então, um procedimento que demanda a utilização de uma proxy para a matriz de covariância não observável. Recentemente, a proxy mais utilizada na literatura tem sido a matriz de covariância realizada, a qual requer a utilização de dados em alta frequência, disponíveis com maior facilidade apenas em alguns dos mercados mais desenvolvidos. No mercado brasileiro, esses dados ainda são encontrados com dificuldade devido a algumas restrições da BMF&Bovespa. Cabe ressaltar que Patton (2011) alerta quanto à utilização de uma proxy imperfeita, a qual pode distorcer os resultados, classificando as previsões de maneira incorreta.

Afinal, o desempenho econômico obtido por um praticante de mercado é superior quando utilizada uma combinação de previsões da matriz de covariância? Ou é possível definir um modelo como o melhor, e sua utilização exclusiva entrega os melhores resultados? Essa dissertação tem como objetivo avaliar se a combinação de previsões para a matriz de covariância condicional, quando utilizada uma abordagem econômica na determinação dos pesos de cada modelo, resulta em portfólios com melhores resultados em termos de retorno ajustado ao risco para o caso do mercado de ações brasileiro. Os resultados também serão avaliados tendo em vista o investidor que visa ao portfólio de menor risco.

Para alcançar este objetivo será utilizada a técnica desenvolvida por Caldeira et al. (2015), a qual inovou na literatura por utilizar-se de critérios econômicos na determinação dos pesos dos modelos individuais para a previsão de volatilidade condicional multivariada. Outro ponto importante do método desenvolvido por Caldeira et al. (2015) é que ele dispensa a utilização de dados de alta frequência visto que não é necessário construir uma proxy para a matriz de covariância, evitando também os erros de sua utilização apontados por Patton (2011).

Sendo assim, no propósito de atingir o objetivo geral estabelecido, foram traçados alguns objetivos específicos:

- a) Identificar os modelos para a previsão da matriz de covariância condicional que

serão candidatos à combinação;

- b) Apresentar o método a ser utilizado na determinação dos pesos de cada modelo na matriz de covariância combinada, o qual fundamenta-se no problema econômico do praticante de mercado;
- c) Combinar as previsões e apresentar o portfólio resultante de sua aplicação segundo os dois problemas econômicos mais tradicionais: Média-Variância e Mínima-Variância.
- d) Avaliar os resultados encontrados na aplicação empírica com dados da bolsa brasileira.

O estudo desenvolvido na presente dissertação relaciona-se com os trabalhos recentes de Amendola e Storti (2015) e Caldeira et al. (2015) no estudo da combinação de previsão de volatilidade multivariada. O diferencial em relação ao trabalho de Caldeira et al. (2015) está na aplicação de sua abordagem econômica para dados da bolsa brasileira.

## 2 Revisão de Literatura

Este capítulo discorrerá uma breve revisão de literatura sobre combinação de previsões. Inicialmente, serão recordados os primeiros trabalhos sobre combinação de previsão e, posteriormente, a literatura para o caso de previsão de volatilidade multivariada, enfoque desta dissertação.

O início dos estudos sobre a combinação de previsão remete a Bates e Granger (1969). Nesse trabalho seminal, concluiu-se que a combinação de duas previsões, utilizando os erros passados como determinantes do peso de cada previsão, resulta em modelo com menor erro quadrático médio (MSE) que ambos modelos individuais. Segundo os autores, a diversificação de portfólio é colocada como uma das motivações evidentes para a combinação de previsões. A partir desses resultados inúmeros outros estudos foram feitos e, em sua grande maioria, firmando os benefícios da utilização dos modelos combinados. Contudo, pode-se ressaltar que, na abordagem sugerida pelos autores, é imposta uma restrição convexa nos pesos das combinações, a qual pode ser prejudicial e muito restritiva quando um dos previsores envolvidos na combinação é viesado. Granger e Ramanathan (1984) mostram que previsões viesadas, ainda assim, podem ser combinadas resultando numa previsão com erro médio igual a zero quando utilizada uma combinação não-convexa.

Um fator que recorrentemente preocupa o pesquisador é a ocorrência de uma quebra estrutural. Diebold e Pauly (1987) elaboraram um estudo no qual concluiu-se que os erros de previsão, quando verificada uma quebra estrutural, podem ser consideravelmente diminuídos com a utilização de uma combinação de previsões. Alguns modelos podem se adaptar às quebras estruturais rapidamente, enquanto outros podem ter seus parâmetros ajustados depois de um longo período de erros computados. Logo, enquanto a janela de dados desde a quebra estrutural for pequena, os modelos com rápida adaptação tendem a performar melhor. Nos períodos de maior estabilidade, os modelos que se adaptam a mudanças nos parâmetros de forma mais lenta pode performar melhor. Porém, uma quebra estrutural não é facilmente observável em tempo real pelo praticante de mercado e os resultados de testes fora da amostra indicam a superioridade dos modelos combinados.

Clemen (1989) em sua revisão sobre toda literatura disponível à época sobre o tema da combinação de previsões, afirma que os resultados são unânimes: a combinação de múltiplas previsões leva a um modelo combinado com superior acurácia preditiva. O autor ainda afirma que a simples média das previsões já pode resultar em ganhos significativos em performance. Em Makridakis e Hibon (2000) é promovida uma competição envolvendo a previsão de mais de 3000 séries temporais e as conclusões encontradas são semelhantes: a acurácia das combinações de vários métodos supera em performance os individuais. A

mesma conclusão foi encontrada por Stock e Watson (2004), no qual foram realizados inúmeros testes com dados econômicos e financeiros utilizando modelos de previsão linear e não-linear. Ainda em Marcellino (2004) testes semelhantes são realizados com dados europeus, e as conclusões são as mesmas.

Engle e Colacito (2006) testam diferentes modelos de correlação dinâmica na alocação de portfólios com a menor variância possível dado um nível de retorno esperado requerido. Seus resultados demonstram que a variância de um portfólio é minimizada quando a melhor previsão – em termos estatísticos - é utilizada, para qualquer um dos vetores de retornos esperados testados. Sendo assim, pode-se afirmar que nos casos em que o problema do tomador de decisão é o de portfólio de mínima variância, as abordagens estatísticas e econômicas convergem em interesse. Os mesmos resultados foram encontrados posteriormente por Patton e Sheppard (2009), os quais também avaliam e comparam diferentes previsões para as volatilidades condicionais uni e multivariadas.

Aiolfi e Timmermann (2006) propõe um esquema de pesos que varia inversamente ao rank dos modelos candidatos. Cada modelo recebe um rank, sendo 1 o rank do melhor modelo, 2 o do segundo melhor modelo e assim por diante. Entretanto, o rank dos modelos pode não estar bem especificado dependendo da proxy utilizada. Patton (2011) mostra que o uso de uma proxy imperfeita para a volatilidade pode distorcer a avaliação dos modelos candidatos.

Utilizando uma extensa base de dados, de 1947 a 2005, e 15 variáveis, Rapach, Strauss e Zhou (2010) concluem que os métodos de combinação de previsões dominam previsões singulares fora da amostra, bem como resulta em menor volatilidade da previsão.

Um dos primeiros trabalhos sobre combinação de previsão de volatilidade com dados da bolsa de valores brasileira foi o de Cavaleri e Ribeiro (2011), no qual ratificou-se o entendimento de que a combinação de diferentes modelos de previsão de volatilidade performa melhor que os modelos individuais em termos estatístico. No caso em questão, o critério utilizado na determinação do melhor modelo foi segundo as estatísticas de MSE e MAPE. Entretanto, os autores estudam a combinação de previsão de volatilidade univariada, utilizando apenas o índice Bovespa. As técnicas de combinação escolhidas foram a técnica de combinação por média aritmética, a técnica de combinação de pesos fixos - proposta por Granger e Ramanathan (1984) -, e a técnica de combinação com pesos móveis de Terui e Dijk (2002).

## 2.1 Combinação de Previsões da Volatilidade Multivariada

Como visto na seção anterior, a literatura sobre combinação de previsões univariadas é vasta. Em contrapartida, a literatura sobre a combinação de previsões de volatilidade multivariada ainda é restrita. Dois trabalhos destacam-se e serão aqui explanados. O

primeiro de Amendola e Storti (2015), o qual utiliza uma abordagem estatística na determinação dos pesos da combinação. E, por conseguinte, o de Caldeira et al. (2015) que contribui na literatura desenvolvendo um método de determinação dos pesos a partir de uma abordagem econômica. Será essa a abordagem utilizada na aplicação empírica da presente dissertação.

### 2.1.1 Combinação de Amendola e Storti

Em Amendola e Storti (2015) são utilizadas duas regras de combinação, uma que deriva de uma função linear, outra que deriva de uma função não-linear, que por sua vez é baseada em uma combinação linear de uma fatoração de Cholesky das previsões da matriz de covariância dos modelos candidatos.

Quanto aos procedimentos de estimação dos parâmetros da combinação, foram divididos duas principais classes: Minimização direta de medidas *goodness-of-fit* e a minimização de uma função de perda. Nota-se que para implementação de tal abordagem é necessária uma proxy para a matriz de covariância.

Quanto às regras de combinação, assume-se que o processo gerador de dados é

$$r_t = S_t z_t, \quad t = 1, \dots, T$$

no qual  $z_t \stackrel{iid}{\sim} (0, I_k)$ , e  $S_t$  é qualquer matriz positiva semidefinida (*p.d*) de ordem  $(k \times k)$  tal que  $S_t S_t' = \tilde{H}_t = \text{var}(r_t | \mathcal{I}_{t-1})$ ,  $\tilde{H}_t = C(H_{1,t}, \dots, H_{n,t}; w)$  sendo  $H_{j,t}$  também uma matriz *p.d*  $(k \times k)$  representando a previsão da matriz de covariância de  $r_t$ , condicionada a  $\mathcal{I}_{t-1}$  do modelo candidato  $j$ . A função de combinação  $C(\cdot)$  pode ser linear ou não-linear (raiz quadrada).  $w$  é o vetor dos parâmetros da combinação. Os autores destacam que apesar de normalmente os pesos de cada modelo candidato depender dos elementos de  $w$ , não necessariamente coincide com o valor dos parâmetros. Diferentes funções de combinação  $C(\cdot)$  poderiam ser usadas além das que serão desenvolvidas nesse trabalho, pois ainda não há na literatura uma função ótima para a seleção dos modelos.

Podemos definir a função de combinação linear dos modelos como:

$$\tilde{H}_t = w_1 H_{1,t} + \dots + w_n H_{n,t}, \quad w_j \geq 0$$

na qual  $w$  coincide com o vetor de pesos da combinação. O pressuposto de pesos não-negativos para os modelos candidatos garante que a matriz  $\tilde{H}_t$  seja positiva semidefinida. O contraponto dessa restrição é que ela implica na proporcionalidade direta entre a previsão de volatilidade combinada de um ativo  $i$  e a volatilidade prevista em cada um dos modelos candidatos

$$\tilde{H}_{t,(ii)} = w_1 H_{1,t,(ii)} + \dots + w_n H_{n,t,(ii)}$$

ocorrendo o mesmo com a covariância condicionada. Com o intuito de remover o viés da previsão de um candidato, opta-se por não impor a usual restrição  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ , a qual garantiria que  $\tilde{H}_t$  fosse definida como uma combinação convexa dos modelos candidatos.

Tendo em vista que a restrição de positividade de  $w$  na função de combinação linear é muito restritiva, pode-se optar pela utilização de uma função de combinação de raízes quadradas. Essa função tem em sua base uma combinação linear de fatorações de Cholesky das previsões para a matriz de covariância condicional de cada modelo candidato ( $S_{j,t}$ )

$$\tilde{S}_t = w_1 S_{1,t} + \dots + w_n S_{n,t}.$$

Como evidenciado na equação acima, essa regra de combinação não é performada diretamente sobre  $H_{j,t}$ , mas sobre  $S_{j,t}$ , na qual  $\tilde{H}_t = \tilde{S}_t \tilde{S}_t'$  e  $H_{j,t} = S_{j,t} S_{j,t}'$ .

Definida a regra de combinação, segue-se para a etapa de estimação dos parâmetros. Os autores trabalham com duas classes de procedimentos de estimação do vetor de parâmetros  $w$  do qual dependem as funções de combinação anteriormente descritas. A primeira é a minimização *goodness-of-fit*. Utilizando-se de uma função que mede a acurácia preditiva baseada na comparação com uma proxy da matrix de covariância condicionada (neste estudo o estimador da covariância realizada) podemos minimizá-la com relação a  $w_j$ . Portanto, o vetor estimado  $w$  será o resultado da seguinte otimização:

$$\hat{w} = \arg \min_w \sum_{t=1}^T L(\Sigma_t, H_{1,t}, \dots, H_{n,t}; w)$$

onde  $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n)'$  e  $\Sigma_t$  é uma matriz de covariância realizada simétrica positiva definida de dimensão  $k$  no período  $t$ :

$$\Sigma_t = \sum_{i=1}^{n\Delta} r_t^i (r_t^i)^{\prime}$$

no qual  $n\Delta$  é o número de intervalos igualmente espaçados multiplicado pelo tamanho de cada intervalo. As funções de perda que podem ser utilizadas na comparação com a matriz de volatilidade realizada são inúmeras na literatura econométrica e de finanças. A seguir são apresentadas as funções utilizadas por Amendola e Storti.

*Euclidean distance*

$$L_E = \text{vech}(\Sigma_t - H_t)' \text{vech}(\Sigma_t - H_t)$$

*Frobenius distance*

$$L_F = \text{Tr}[(\Sigma_t - H_t)'(\Sigma_t - H_t)]$$

*r-power norm*

$$L_{PN}(p, r) = \left[ \left( \sum_{1 \leq h, j \leq k} |\Sigma_{t,(hj)} - H_{t,(hj)}|^p \right)^{1/p} \right]^r$$

*Eigenvalue loss function*

$$L_{SP} = \lambda_{max}[(\Sigma_t - H_t)^2]$$

*Assymmetric loss function*

$$L_B = \frac{1}{b(b-1)} Tr(\Sigma_t^b - H_t^b) - \frac{1}{b(b-1)} Tr(H_t^{b-1}(\Sigma_t - H_t))$$

A disponibilidade de inúmeras funções de perda tem seu revés. Hansen e Lunde (2006a) afirmam que a escolha da função de perda a ser utilizada é ponto crítico para evitar resultados distorcidos. Detalhes sobre as condições ao uso consistente de algumas das funções de perda podem ser conferidas em seu trabalho. Patton (2011) compara diferentes previsões de volatilidade na presença de proxies imperfeitas. Como esperado, o autor ressalta a importância da escolha correta da proxy utilizada, sob pena de obter-se resultados indesejados. Para uma análise detalhada sobre as funções de perda e suas condições de aplicabilidade, os artigos de Laurent, Rombouts e Violante (2012), Laurent, Rombouts e Violante (2013) são de grande valia.

A segunda classe de estimadores é baseada na minimização de uma função de perda, a qual não é diretamente relacionada a medidas de acurácia preditiva, contudo a critérios estatísticos que visam explorar as propriedades ótimas teóricas nos erros de previsão. Esses estimadores destacam-se por sua aplicabilidade em problemas de elevada dimensão, tendo como ponto comum o fato de não requererem o prévio conhecimento da distribuição condicional dos retornos. A seguir serão explicados os estimadores *composite quasi maximum likelihood* (CQML) e o baseado no *composite generalized method of moments* (CGMM).

Um dos problemas de se usar o estimador padrão QMLE é a necessidade de se inverter a matriz de covariância, mesmo com o desenvolvimento de novas tecnologias que aperfeiçoaram os métodos computacionais, mesmo com o avanço da literatura sobre a inversão de matrizes de covariância, a ver o trabalho de Stevens (1998), a inversão continua sendo um problema computacional. O diferencial do estimador CQML está justamente no fato de não ser necessária a inversão da matriz de covariância. A função objetiva CL é obtida pela soma das funções *quasi-likelihood* calculadas para qualquer valor subsistema bivariado distinto possível. O primeiro trabalho sobre o estimador CQML, com aplicabilidade em finanças, foi de Engle, Shephard e Sheppard (2008). A partir dessa abordagem podemos definir que a estimação dos pesos dos modelos na combinação, dado pelo vetor  $w$  é a solução do seguinte problema:

$$\hat{w} = \arg \max_w \sum_{i \neq j} l(r^{(ij)} | w, I^N)$$

onde  $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_n)'$ ,  $r_t^{(ij)} = (r_{i,t}, r_{j,t})'$  e

$$l(r^{(ij)} | w, I_T) = -0.5 \sum_{t=1}^T \left[ \log \left( \left| \tilde{H}_t^{(i,j)} \right| \right) + \sum_{t=1}^T r_t^{(ij)} \tilde{H}_t^{(i,j)} \left( r_t^{(ij)} \right)'\right]$$

é a bivariada quasi log-likelihood para a dupla de ativos  $(i, j)$  computadas sobre o período de previsão com

$$\tilde{H}_t^{(i,j)} = w_1 H_{1,t}^{(ij)}, \dots, w_n H_{n,t}^{(ij)}, \quad w_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

sendo o preditor combinado bivariado associado.

A ideia de decomposição de um modelo de elevada dimensão em diversos outros de menor dimensão pode ser estendida para o GMM. Para um problema bivariado simples, os parâmetros de combinação podem ser estimados pela minimização de uma função de perda GMM impondo as restrições apropriadas nos momentos dos resíduos, dado por  $z_t = H_t^{-1/2} r_t$ , no qual  $H_t^{-1/2}$  pode ser obtido por meio de uma fatoração de Cholesky de  $H_t$ . Amendola e Storti (2009) mostram que a transição para problemas de maior dimensão implica em um rápido aumento no número de momentos condicionais que devem ser considerados, tornando a solução do problema impraticável. Para evitar esse problema de dimensão, os autores propõem uma extensão do modelo de estimação que é computacionalmente mais eficiente. O vetor pesos é, então, o resultado da seguinte otimização:

$$\hat{w} = \arg \min_w \sum_{i \neq j} m(r^{(ij)}; w)' \left( \Omega_T^{(ij)} \right)^{-1} m(r^{(ij)}; w)$$

onde  $m(r^{(ij)}; w) = 1/T \sum_{t=1}^T \mu \left( r_t^{(ij)}; w \right)$  sendo  $\mu \left( r_t^{(ij)}; w \right)$  vetor de dimensão  $(p \times 1)$ . A matriz  $\Omega_T^{(ij)}$  é um estimador consistente, positivo definido, de

$$\Omega^{(ij)} = \lim_{T \rightarrow \infty} TE \left( m \left( r^{(ij)}; w^* \right) m \left( r^{(ij)}; w^* \right)'\right)$$

sendo  $w^*$  a solução das condições de momento i.e.  $E(m(r^{(ij)}; w^*)) = 0$ .

Para comparar a acurácia preditiva de diferentes modelos de previsão de volatilidade, Amendola e Storti (2015) utiliza o método proposto por Diebold e Mariano (1995). Estatisticamente, testa-se a igualdade da acurácia preditiva par a par (*pairwise*). A hipótese nula de tal teste é a da igualdade de acurácia entre os modelos. Notoriamente, dado o elevado número de modelos de previsão de volatilidade hoje existentes, uma desvantagem desse teste está justamente no fato de que ele é executado restritamente par a par.

Segundo Patton e Sheppard (2007), a avaliação da previsão de volatilidade pode se dar de duas formas: direta ou indireta. A avaliação da previsão que se utiliza dos modelos estatísticos tradicionais como medida de precisão é a função de perda direta. Considerando o fato de que a volatilidade real não é observada, utiliza-se de um proxy, que

por muitas vezes é dotada de ruídos que dificultam, ou até mesmo impedem, a classificação dos melhores modelos de previsão. Hansen e Lunde (2006b) mostram que o ruído da proxy da volatilidade induz a inconsistências entre o estimado e o real observado, podendo levar praticantes de mercado, como por exemplo gestores de risco, a decisões financeiramente equivocadas. Estudos de Laurent, Rombouts e Violante (2013) também comprovam esses efeitos indesejados da proxy. A medida indireta de avaliar a performance de um modelo de previsão de volatilidade, através da aplicabilidade das previsões na gestão de um portfólio, se torna mais confiável e útil. Tendo em vista que é justamente este o principal motivo do pesquisador prever uma matriz de volatilidade – sua aplicação prática – nada mais coerente que avaliarmos o modelo de previsão de acordo com seu desempenho na decisão de alocação de um portfólio. Um dos primeiros trabalhos a utilizar métodos indiretos de avaliação de modelos de previsão da volatilidade foi Fleming, Kirby e Ostdiek (2001), no qual é aplicada uma função quadrática de utilidade que valora uma previsão em relação a outra, ressaltando o valor econômico da previsão de volatilidade.

### 2.1.2 Combinação de Caldeira et. al.

No trabalho desenvolvido pelos autores é proposta uma nova abordagem para combinar previsões de volatilidade multivariada. O fator diferencial desse método é que os pesos de cada modelo na combinação incorporam uma decisão econômica. A utilização de uma abordagem econômica, conforme demonstrado em aplicação empírica, possui algumas vantagens importantes. Uma delas, já comentada no decorrer desta dissertação, é que ela dispensa a utilização de uma proxy para a matriz de covariância, a qual é não-observável. Por sua vez, o método também não irá precisar de dados de alta frequência como em Amendola e Storti (2015). Outro aspecto relevante desse modelo é que ele é baseado num problema de seleção de portfólio com elevado interesse entre acadêmicos e praticantes do mercado. Tais problemas de otimização econômica possuem soluções fechadas, resultando ao pesquisador um custo computacional menor quando comparado a modelos de combinação que dependem de uma otimização numérica das funções de perda estatística para determinar os pesos da combinação. Ainda pode-se ressaltar que o método é consistente com o fato de que a matriz de covariância dos ativos não é um fim por si só, porém, ela é em última análise aplicada em problemas econômicos.

Considerando a existência de  $M$  modelos candidatos, o estimador da covariância condicional combinado,  $H_t^{Comb}$ , é dado por

$$H_t^{Comb} = \lambda_{1,t}H_t^1 + \dots + \lambda_{M,t}H_t^M, \quad (2.1)$$

no qual  $H_t^m$  é a matriz de covariância condicional do modelo candidato  $m$  e  $\lambda_{m,t}$  é seu peso correspondente no modelo combinado. Na aplicação empírica do artigo, os autores utilizam uma combinação convexa, de forma que  $\sum_{m=1}^M \lambda_{m,t} = 1$ . Outra restrição

imposta é a de não-negatividade dos pesos na combinação, ou seja,  $\lambda_{m,t} \geq 0 \forall m$ . Ao impor tais restrições é garantido que a matriz resultante da combinação será positiva definida considerando que os modelos individuais também forneceram matrizes de covariância condicional positivas definidas.

Percebe-se que um fator crucial no desempenho do portfólio resultante será a determinação dos pesos que cada previsão terá no modelo combinado. Inúmeras são as formas de encontrar tais valores. Na abordagem econômica de Caldeira et al. (2015) são utilizadas duas versões do problema de média-variância do portfólio. A primeira é a do investidor que deseja minimizar a variância do portfólio sujeito a um retorno objetivado. Ou seja, o investidor deseja o maior retorno ajustado ao risco. A outra versão é a do investidor que deseja minimizar a variância do portfólio, independente dos retornos esperados. As duas versões serão detalhadas tendo em vista que serão utilizadas também na aplicação empírica desta dissertação.

O problema de otimização do portfólio de média variância pode ser definido como

$$\begin{aligned} \min_w w_t' H_t^m w_t & \quad (2.2) \\ \text{sujeito a} & \\ w_t' \mu &= \mu_0 \\ \sum_{i=1}^N w_i &= 1 \end{aligned}$$

no qual o vetor  $w_t$  é o vetor de pesos do portfólio no período  $t$ , o qual é definido em  $t - 1$ .  $H_t^m$  é a matriz de covariância condicional positiva definida do modelo candidato  $m$  para o período  $t$  previsto em  $t - 1$ .  $\mu$  é o vetor de retornos esperados e  $\mu_0$  é o retorno exigido. Outra restrição imposta nesse problema é a do portfólio estar 100% posicionado no mercado.

Como mencionado anteriormente, o problema de média variância possui solução fechada, a qual é dada por

$$w_t = (H_t^m)^{-1} \frac{\mu(C\mu_0 - B) + \iota(A - B\mu_0)}{AC - B^2} \quad (2.3)$$

onde  $\iota$  é o vetor de 1 e

$$\begin{aligned} A &= \mu(H_t^m)^{-1}\mu, \\ B &= \mu(H_t^m)^{-1}\iota, \\ C &= \iota'(H_t^m)^{-1}\iota. \end{aligned}$$

Encontrados os pesos de cada ativo no portfólio, o investidor está interessado em conhecer medidas de desempenho como o índice sharpe (SR).

$$SR_m = \frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m^2} \quad (2.4)$$

no qual

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w'_t R_{t+1}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (w'_t R_{t+1} - \hat{\mu}_m)^2}{T-1}.$$

O trabalho de Caldeira et al. (2015) também utiliza o parâmetro de esquecimento  $\delta$  conforme Stock e Watson (2004), de tal forma que as médias e desvio padrão são calculadas conforme

$$\hat{\mu}_m = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \delta^{T-1-t} w'_t R_{t+1}}{T-1}$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \delta^{T-1-t} (w'_t R_{t+1} - \hat{\mu}_m)^2}{T-1}$$

Quando o parâmetro  $\delta = 1$  retorna-se à expressão comum da média e desvio. Valores de  $\delta < 1$  implicam no desconto no peso dado às informações mais antigas no cálculo do retorno médio e variância do portfólio. A combinação de modelos de previsão da matriz de covariância tem na estimação dos  $\lambda$  sua etapa principal. No contexto do problema de média variância, o peso de cada modelo candidato deve levar em consideração o retorno ajustado ao risco proporcionado pelos estimadores individuais. Modelos que resultam em  $SR$  superiores devem receber maior peso no cálculo da matriz de covariância combinada, e, seguindo a mesma lógica, os modelos de pior desempenho devem ser penalizados.

$$\lambda_m = \frac{\left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)} \quad (2.5)$$

Esta regra de combinação derivada pelos autos, a qual leva em consideração o problema econômico na determinação de  $\lambda$ , pertence a um caso geral no qual é introduzido um parâmetro de agressividade  $\eta$ .

$$\lambda_m = \frac{\left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta} \quad (2.6)$$

Quanto maior o valor de  $\eta$ , maior será o peso dado ao modelo com previsão que resulta no portfólio com maior retorno ajustado ao risco. Outro ponto de destaque nessa formulação geral é que ela engloba o caso do portfólio igualmente ponderado como um caso específico quando  $\eta = 0$ . Por fim, a matriz de covariância combinada, do problema de média variância, é dada por:

$$H_t^{Comb} = \frac{1}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta} \sum_{m=1}^M \left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta H_t^m. \quad (2.7)$$

O segundo problema econômico, do portfólio de mínima variância, é o seguinte:

$$\begin{aligned} \min_w w_t' H_t^m w_t & \quad (2.8) \\ \text{sujeito a} & \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 & \end{aligned}$$

Fortuitamente, este problema também possui solução fechada, diminuindo os custos computacionais visto que dispensa o uso de otimização numérica. A solução do problema é dada por

$$w_t = \frac{\iota'(H_t^m)^{-1}}{\iota'(H_t^m)^{-1}\iota}$$

O investidor que deseja minimizar a variância do portfólio, independentemente de um retorno exigido, precisa de um método que penalize os modelos que resultam em portfólios com alta volatilidade, dando maior peso aqueles de menor volatilidade. Sendo assim, o estimador dos pesos de cada modelo na matriz de covariância condicional é

$$\lambda_m = \frac{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta}. \quad (2.9)$$

O modelo combinado resultando desse estimador será

$$H_t^{Comb} = \frac{1}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta} \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta H_t^m\right]. \quad (2.10)$$

As principais conclusões tiradas da aplicação empírica, utilizando dados da bolsa estadunidense - entre outras como asiáticas e europeias -, indicam que os modelos combinados tendem a resultar em portfólios com os melhores desempenhos econômicos, tanto para o investidor de média variância, quanto de mínima variância.

## 3 Aplicação Empírica

A aplicação empírica realizada para este trabalho tem por objetivo avaliar se a combinação de modelos de previsão para a matriz de covariância dos ativos pode ajudar dois perfis de investidores a selecionarem seus portfólios exclusivamente compostos por renda variável, mais especificamente, ações de empresas brasileiras. A base de dados é composta pelas 30 empresas com maior volume de negociação na bolsa de valores. Algumas empresas, como a Petrobrás, possuíam as duas classes de ações entre as mais negociadas da bolsa de valores, ações ordinárias e preferenciais. Nestes casos, foram utilizadas apenas as classes com maior liquidez de cada empresa. A lista completa das ações que compõem a base de dados e algumas estatísticas podem ser conferidas no apêndice deste trabalho. A amostra é composta por 1236 observações, desde janeiro de 2009, tendo sido separadas as primeiras 500 observações para estimação das matrizes de covariância condicionais, restando as demais observações para os testes fora-da-amostra. É de interesse investigar se, utilizando-se da abordagem econômica de Caldeira et al. (2015) na determinação dos pesos de cada modelo de previsão individual no modelo combinado, os investidores de média-variância e de mínima variância obterão portfólios com melhores resultados tendo em vista a utilização dos modelos combinados na solução de seus respectivos problemas de alocação. O benchmark escolhido será o portfólio resultando do modelo combinado igualmente ponderado.

### 3.1 Metodologia

Nesta seção será exposta a metodologia utilizada para atingir os objetivos traçados na introdução do presente trabalho. Em se tratando de combinação de modelos para estimação da matriz de volatilidade, Amendola e Storti (2015) — pioneiros no estudo de combinação de previsão de modelos volatilidade multivariada — elenca 3 elementos necessários a um “modelo combinado”:

- a) Identificação dos modelos candidatos
- b) Uma regra de combinação
- c) Um estimador dos pesos de cada modelo na combinação.

Seguindo a mesma lógica, a seguir serão apresentados os modelos candidatos utilizados e, posteriormente, a regra de combinação e o estimador de pesos utilizados.

## 3.2 Modelos candidatos à combinação

Os modelos utilizados na aplicação empírica desta dissertação foram escolhidos devido a sua aplicabilidade prática e disponibilidade de implementação. Foi utilizado o pacote estatístico de Kevin Sheppard para o software Matlab. O grupo de candidatos é composto em essência por modelos da família MGARCH, assumindo-se que o retorno dos ativos é dotado de heterocedasticidade condicional e segue  $R_t = z_t(H_t^m)$ . Os modelos de correlação multivariados da família GARCH exploram a decomposição da variância condicional em desvios padrões condicionais e correlações condicionais, especificamente,

$$H_t \equiv D_t R_t D_t \quad (3.1)$$

no qual  $D_t$  é uma matriz diagonal  $k \times k$  dos desvios padrões condicionais do modelo GARCH univariado com  $\sqrt{h_{it}}$  na diagonal  $i$  e  $R_t$  é a matriz de correlação variante no tempo. Sob certas condições, essa decomposição permite a estimação dos parâmetros de volatilidade e correlação sejam estimados em duas etapas.

Um dos primeiros modelos desenvolvidos para o caso multivariado é o *Constant Conditional Correlation* de Bollerslev (1990) o qual tem em sua primeira etapa a especificação do processo GARCH univariado para a variância condicional de cada série de ativos,  $r_{i,t}$ :

$$h_{i,t} = \omega_i + \alpha_i r_{i,t}^2 + \beta h_{i,t-1}. \quad (3.2)$$

Assumindo que a correlação condicional é constante (CCC), o estimador de correlação é dado por:

$$\hat{R}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_{i,t} \hat{\epsilon}_{j,t}}{\sqrt{\sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_{i,t}^2 \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_{j,t}^2}}, \quad (3.3)$$

no qual  $\hat{\epsilon}_{i,t} = \frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$ .

### 3.2.1 Modelo DCC

O modelo *Dynamic Conditional Correlation* de Engle (2002), estende a especificação CCC para incluir dinâmica na correlação, tendo em sua formulação original o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} D_t &= \text{diag}(h_t) & h_{i,t} &= \sqrt{H_{t,(ii)}} \\ H_{t,(ii)} &= a_{0,i} + a_{1,r} r_{i,t-1}^2 + b_{1,i} H_{t-1,(ii)} \\ R_t &= (\text{diag}(Q_t))^{-1} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1} \end{aligned}$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha(\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}) + \beta Q_{t-1}$$

no qual  $\epsilon_t = D_t^{-1}r_t$  é o resíduo padronizado e  $\bar{Q} = (1/N)\sum_{t=1}^T \epsilon_t\epsilon'_t$ . A utilização da inversa da raiz quadrada da diagonal  $Q$  garante que a matriz  $R_t$  será positiva definida.

Diferencia-se do modelo BEEK de Engle e Kroner (1995) pois este assume uma dinâmica homogênea dada pela seguinte equação:

$$H_t = (1 - \alpha^2 - \beta^2)\bar{H} + \alpha^2(r_{t-1}r'_{t-1} + \beta^2 H_{t-1})$$

onde  $\bar{H} = (1/T)\sum_{t=1}^T r_t r'_t$ . As estimativas de  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser obtidas por um QML gaussiano quando modelos forem de baixa dimensão. Caso contrário, os estimadores serão viesados conforme demonstram via simulações de Monte Carlo Engle, Shephard e Sheppard (2008). As simulações também mostram que o viés não afeta os estimadores CQML dos parâmetros dos modelos BEKK e DCC. O estimador RM pode ser visto como um caso especial do modelo BEKK sem *drift* no qual  $\beta^2 = 1 - \alpha^2 = 0.94$ .

### 3.2.2 Modelo RM

O modelo *Riskmetrics* de Morgan et al. (1996) é um caso específico do modelo EWMA (*exponentially weighted moving average*), o qual é dado por

$$H_t = \alpha R'_{t-1} R_{t-1} + (1 - \alpha)H_{t-1}. \quad (3.4)$$

O parâmetro  $\alpha$  pode ser estimado por máxima verossimilhança. Entretanto, a simplificação do modelo RM define a priori o valor de  $\alpha = 0.04$ , que por si só já garante que a matriz de covariância condicional resultante será PSD (positiva semi-definida).

$$H_t = C'C + \alpha R'_{t-1} + \beta H_{t-1} \quad (3.5)$$

### 3.2.3 Modelo SVECH

O modelo Scalar Vech de Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) é definido da seguinte forma:

$$H_t = C'C + \alpha R_{t-1} R'_{t-1} + \beta H_{t-1}. \quad (3.6)$$

Uma abordagem específica de Engle e Mezrich (1996), sugere que a estimação da matriz de interceptos, a qual normalmente demanda a estimação de  $N(N+1)/2$  elementos, seja feita utilizando-se um estimador auxiliar dado por

$$\hat{C}'\hat{C} = \bar{S}(1 - \alpha - \beta) \quad (3.7)$$

onde

$$\bar{S} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t' R_t \quad (3.8)$$

resultando então em

$$H_t = \bar{S}(1 - \alpha - \beta) + \alpha R_{t-1} R_{t-1}' + \beta H_{t-1}. \quad (3.9)$$

Impondo a restrição  $\alpha + \beta < 1$  garante-se a estacionariedade da covariância.

### 3.2.4 Modelo ADCC

O modelo *Asymmetric Dynamic Conditional Correlation* de Cappiello, Engle e Sheppard (2006) leva em consideração um dos fatos estilizados das séries de retornos das ações: a assimetria. A assimetria pode ser incluída na especificação da volatilidade univariada. Dentre essas especificações, uma que leva em consideração o fato estilizado em questão é o modelo GJR, introduzido por Glosten, Jagannathan e Runkle (1993), o qual permite modelar as inovações incluindo o chamado efeito alavancagem. Variante de um modelo GARCH, inclui na sua estrutura termos de alavancagem para modelar os clusters de volatilidade assimétricos, sendo adequado quando os choques negativos contribuem mais para a volatilidade que os choques positivos. Introduzindo a especificação GJR no modelo DCC temos:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{R} - \gamma \bar{S} + a \epsilon_{t-1} \hat{\epsilon}_{t-1}' + g \hat{\zeta}_{t-1} \hat{\zeta}_{t-1}' + b Q_{t-1} \quad (3.10)$$

No qual  $\hat{\zeta}_{t-1}$  é o resíduo padronizado multiplicado pelo vetor indicador  $I_{\{\epsilon_t < 0\}}$  que assumirá o valor de 1 quando os choques forem negativos e 0 caso contrário. Este é o termo que ajusta no modelo o efeito da assimetria. Assim, os coeficientes do efeito alavancagem dão peso maior às mudanças negativas.

### 3.2.5 Modelo OGARCH

O modelo Ortogonal GARCH de Alexander (2001) assume que os retornos são gerados a partir de um conjunto de  $m$  fatores ortogonais condicionais.

$$r_t = W f_t + \epsilon_t \quad (3.11)$$

no qual  $W$  é a matriz  $K \times m$  de *loadings* dos fatores,  $f_t$  é o vetor de inovação dos fatores com média zero e  $\epsilon_t$  é o vetor de resíduos. Dois pressupostos são feitos no intuito de simplificar a estimação: os fatores são ortogonais condicionais ( $E[f_{it} f_{jt} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \forall i \neq j$ ) e os fatores são condicionalmente ortogonais aos erros ( $E[f_{it} \epsilon_{jt} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0 \forall i \in 1, \dots, m \forall j \in 1, \dots, K$ ). A covariância condicional é dada por:

$$H_t = W F_t W' + \Omega \quad (3.12)$$

no qual  $F_t$  é a matriz de covariância condicional diagonal dos fatores e  $\Omega$  é a matriz de covariância dos resíduos invariante no tempo. A variância condicional de cada fator é parametrizada utilizando-se a especificação tradicional GARCH.

### 3.3 Regra de Combinação

A regra de combinação utilizada será a apresentada no capítulo de revisão de literatura proposto por Caldeira et al. (2015). O parâmetro  $\eta$  será utilizado como proposto para calibrar o peso dado aos modelos, conforme explanado no capítulo anterior. O caso em que  $\eta = 0$ , o qual resulta na combinação igualmente ponderada, será o benchmark. Na aplicação foram utilizados também os valores de  $\eta$  iguais a 1, 2, 5 e 10. O estimador dos pesos de cada modelo,  $\lambda$ , será o apresentado no capítulo 2, reproduzido abaixo por conveniência:

Estimador no problema de média-variância:

$$\lambda_m = \frac{\left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{\hat{\mu}_m}{\hat{\sigma}_m}\right)^\eta}$$

Estimador no problema de mínima-variância:

$$\lambda_m = \frac{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta}{\sum_{m=1}^M \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_m^2}\right)^\eta}$$

Seguindo o trabalho dos autores, foi imposta restrição de não negatividade de  $\lambda$ , definindo peso zero para o modelo quando seu SR for negativo, garantindo, assim, que a matriz resultante da combinação seja positiva definida.

Por fim, o rebalanceamento dos portfólios é diário para os portfólios resultantes de todos modelos individuais e combinados.

### 3.4 Método de avaliação dos modelos

Tendo em vista que a finalidade é a aplicação das matrizes de covariâncias, sejam elas individuais ou combinadas, na determinação do vetor de pesos de cada ativo no portfólio do praticante de mercado, torna-se importante avaliar os modelos segundo os resultados obtidos por esses portfólios. O retorno ajustado ao risco, normalmente medido pelo índice Sharpe, será o maior interesse do investidor de média variância, bem como a volatilidade – aqui medida pelo desvio padrão – para o investidor de mínima variância. As

medidas estatísticas de retorno médio do portfólio ( $\hat{\mu}$ ) e desvio padrão ( $\hat{\sigma}$ ) são calculadas da seguinte forma:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} w' R_{t+1} \quad (3.13)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (w' R_{t+1} - R_p)^2} \quad (3.14)$$

no qual  $R_p$  é o retorno realizado médio do portfólio.

Muitas estratégias de investimentos barram no empecilho dos custos de transação, os quais podem tornar inviável uma estratégia. Uma das formas de se levar em consideração os custos de transação é pela medição do chamado *turnover*, o qual será a fração do portfólio que foi alterado de um período para o posterior. Ou seja,

$$turnover_t = \sum_{j=1}^N (|w_{j,t+1} - w_{j,t}|). \quad (3.15)$$

Conhecido o *turnover*, pode-se calcular o retorno líquido do portfólio. Porém, ainda há de ser previamente definido um valor que englobe os custos de transação. Lembrando que a taxa de corretagem, que atualmente no Brasil é fixa em diversas corretoras de valores, não é a única taxa paga para se operar no mercado. Devem ser consideradas as taxas contratuais como emolumentos, custódia, etc, bem como os custos "ocultos" como o *bid ask spread* entre outros. Esse custo total ( $c$ ) por transação efetuada será determinante no retorno líquido do portfólio conforme:

$$R_{p,t}^{liq} = (1 - c.turnover_t)(1 + w' R_{t+1}) - 1. \quad (3.16)$$

O mesmo cálculo para o resultado líquido foi realizado por Corte, Sarno e Thornton (2008), Thornton e Valente (2012). No trabalho de Caldeira et al. (2015) foi definido o valor de 15 pontos base para a variável  $c$ . Apesar de as taxas operacionais, em média, serem maiores no Brasil, os investidores institucionais ainda são responsáveis por uma expressiva parcela das negociações. Sendo assim, mesmo com as diferenças entre as bolsas, decidiu-se por também utilizar o  $c = 15$  pontos base no presente trabalho. Por fim, o índice Sharpe (SR), foi calculado utilizando o retorno líquido como medida de retorno, assim como desvio padrão líquido.

### 3.5 Análise dos Resultados

A análise da performance dos portfólios será feita de duas formas. Primeiramente serão comparados os modelos individuais com os modelos combinados para o problema

de média variância. Posteriormente, serão avaliados os resultados quando as previsões para as matrizes de covariância dos ativos foram aplicadas no problema de mínima variância. Por fim, uma reflexão será feita analisando todos os dados em conjunto. O modelo combinado igualmente ponderado será o benchmark, e, através do procedimento de *bootstrap* estacionário de Politis e Romano (1994) com  $B = 1.000$  reamostragens e tamanho de bloco  $b = 5$ , foi testada a diferença do SR dos portfólios com relação aos outros modelos. Nas tabelas 1 e 2 serão denotados com asterisco os valores que são estatisticamente diferentes do benchmark ao nível de significância de 5%.

A tabela 1 mostra os resultados referentes ao problema de média variância. São apresentados os resultados brutos, média diária percentual, desvio padrão, turnover e índice Sharpe líquido. Verifica-se que os modelos combinados a partir da abordagem econômica resultam em portfólios com maior índice Sharpe quando comparados aos portfólios resultantes da utilização das previsões dos modelos individuais, sendo todos estatisticamente diferentes do benchmark.

Tabela 1: Resultados para o problema de Média-Variância

Modelos	Retorno	Desvio	Turnover	Sharpe
DCC	0.003	1.136	0.421	-0.051
Risk Metrics	-0.065	1.621	0.674	-0.090*
O-Garch	-0.016	1.208	0.084	-0.024
ADCC	0.005	1.134	0.423	-0.050*
SVECH	0.001	1.132	0.302	-0.028
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.005	1.094	0.291	-0.034
C - Med-Var ( $\eta = 1$ )	0.266	1.288	0.987	0.083*
C - Med-Var ( $\eta = 2$ )	0.318	1.336	1.101	0.103*
C - Med-Var ( $\eta = 5$ )	0.403	1.413	1.257	0.135*
C - Med-Var ( $\eta = 10$ )	0.458	1.490	1.342	0.154*

O portfólio com o maior índice Sharpe líquido foi o resultante do modelo combinado com parâmetro  $\eta = 10$ . Em contrapartida, o *turnover* desse portfólio é muito elevado (1.342) e, caso o valor dos custos operacionais estabelecidos não condizerem com a realidade do praticante do mercado, esse resultado pode ser comprometido. O modelo combinado de pesos iguais ( $\eta = 0$ ) possui retorno maior que os modelos individuais OGarch, ADCC, Riskmetrics e DCC. Entretanto, ao considerar os custos de rebalanceamento, o retorno líquido acaba por tornar-se negativo e o índice Sharpe perder para os modelos individuais

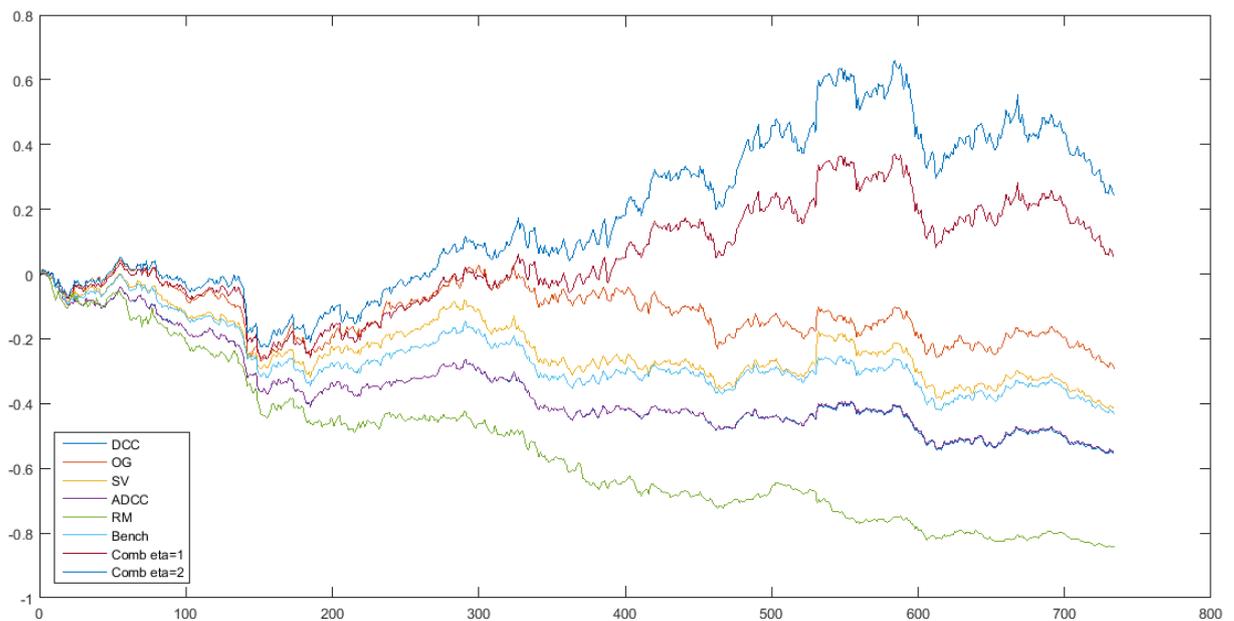


Figura 1: Retorno líquido acumulado

SVECH e OGarch, mesmo com o desvio padrão inferior ao do último. Contudo, cabe frisar que, nessas comparações específicas, as diferenças de SR não são estatisticamente significativas ao nível de 5%. Observando o *turnover* dos portfólios, percebe-se que, em geral para o problema da média variância, tal medida tende a ser maior para os modelos combinados, com exceção do combinado igualmente ponderado, que tem o *turnover* superior apenas ao do modelo OGarch. O mesmo padrão não se repete para o problema de mínima variância, como será visto logo à frente. Por fim, cabe salientar que os únicos modelos que terminaram o período *out-of-sample* com índices Sharpe líquido positivos foram os modelos combinados da abordagem econômica.

A figura 1 ilustra os resultados líquidos dos portfólios resultantes da utilização dos modelos individuais e combinados com  $\eta = 0, 1, 2$ . Percebe-se graficamente a superioridade dos modelos combinados com abordagem econômica em relação aos modelos individuais. O modelo de pesos igualmente ponderado ( $\eta = 0$ ), em boa parte do tempo, é superado pelos modelos OGarch e SVECH. O boxplot 2 mostra os pesos dados aos modelos individuais na combinação. Percebe-se que quanto maior o parâmetro de agressividade, maior é o peso dado aos modelos com melhor desempenho, conforme espera-se da abordagem econômica de Caldeira et al. (2015).

A tabela 2 apresenta os resultados encontrados para o problema de mínima variância. Analisando os modelos individuais, primeiramente, percebemos que o melhor modelo é o SVECH, com um desvio padrão de 1.0212. O modelo com maior volatilidade é o Riskmetrics. Como pode ser notado no boxplot da figura 3 dos pesos de cada modelo individual nas

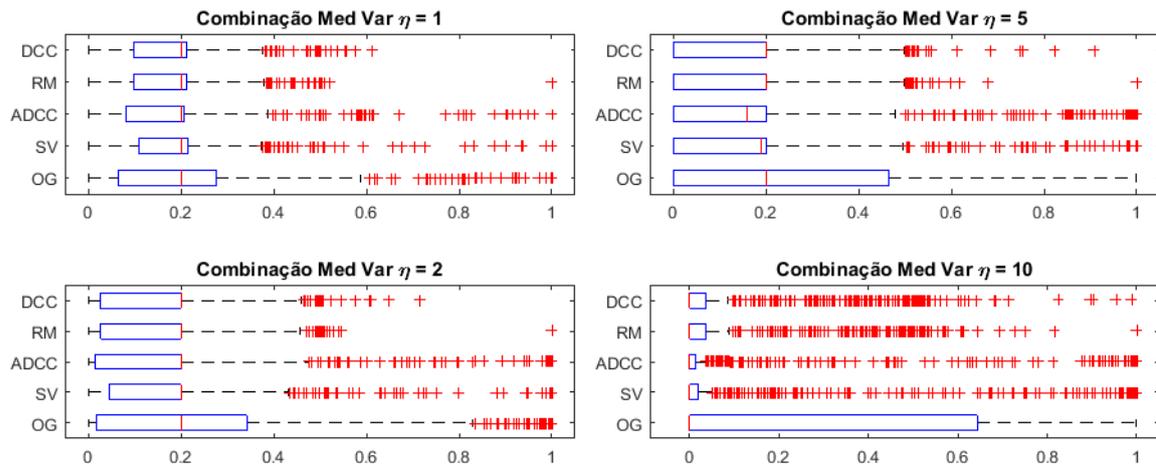


Figura 2: Boxplot: Pesos dos modelos nas combinações med-var

combinações, os modelos combinados tenderão a dar maior peso ao SVECH e menor ao Riskmetrics, aumentando essa diferença cada vez mais a medida em que o parâmetro de agressividade  $\eta$  aumenta.

Tabela 2: Resultados para o problema de Mínima-Variância

Modelos	Retorno	Desvio	Turnover	Sharpe
DCC	0.014	1.030*	0.366	-0.040
Risk Metrics	0.000	1.669*	0.676	-0.055*
O-Garch	0.011	1.123*	0.045	0.001
ADCC	0.016	1.028*	0.367	-0.039
SVECH	0.029	1.021*	0.247	-0.008
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.022	0.998	0.254	-0.017
C - Min-Var ( $\eta = 1$ )	0.023	0.987*	0.249	0.083*
C - Min-Var ( $\eta = 2$ )	0.023	0.980*	0.246	0.103*
C - Min-Var ( $\eta = 5$ )	0.025	0.968*	0.247	0.135*
C - Min-Var ( $\eta = 10$ )	0.027	0.963*	0.257	0.154*

Quanto aos modelos combinados, mais uma vez percebe-se que a combinação dos modelos ajuda na performance dos portfólios resultantes. O desvio padrão dos portfólios de modelos combinados é menor para os modelos combinados quando comparado a qualquer modelo individual. Mesmo no problema de mínima variância, os níveis de retorno e índice Sharpe dos modelos combinados são superiores a todos modelos individuais. Nas combinações de mínima variância, quando o parâmetro  $\eta = 0$  (de pesos iguais) o portfólio

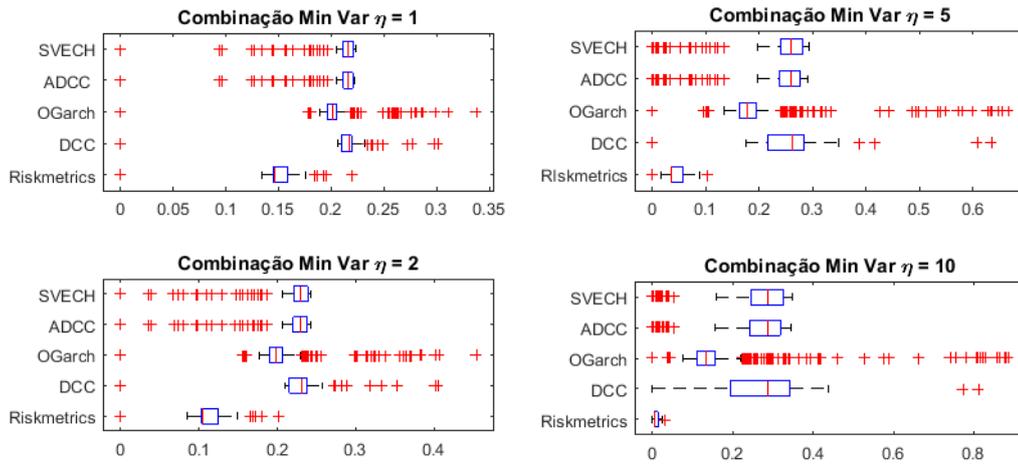


Figura 3: Boxplot: Pesos dos modelos nas combinações min-var

resultante já satisfaz o praticante de mercado ao resultar em um portfólio de menor variância em relação aos modelos individuais. Porém, os resultados ainda melhoram ao ser utilizada a abordagem econômica.

As conclusões a que podemos chegar mostram que combinar previsões da matriz de covariância condicional melhora o desempenho dos portfólios resultante de sua utilização, indo ao encontro dos resultados encontrados por Caldeira et al. (2015) e Amendola e Storti (2015), bem como a literatura anterior para os casos de combinação de previsão univariada.

### 3.5.1 Efeito dos custos de transação

Um tema sempre relevante ao tema de gestão de portfólio é quanto aos custos de transação e seus efeitos nos resultados líquidos. Como informado na metodologia, o custo de transação utilizado no cálculo do retorno líquido do portfólio foi de 15 b.p. Entretanto, dadas as especificidades do mercado de capitais, os custos podem não ser exatamente os planejados. Por exemplo, o aluguel de ativos para operações *short* pode sofrer alterações tendo em vista a disponibilidade no BTC (banco de títulos e custódia) da bolsa de valores. Para medir e dar maior intuição ao leitor sobre como alterações no custo operacional podem impactar nos resultados líquidos das estratégias implementadas no trabalho desenvolvido, os resultados foram recalculados e ilustrados nos gráficos a seguir. Foram considerados cenários em que os custos de transação fosse 20, 30, 40 e 50 b.p. Para dar maior intuição aos efeitos, junto aos resultados foi plotado o desempenho de um investidor comprado no índice futuro bovespa, sem custo de rebalanceamento. Os resultados mostram nitidamente que a mudança nos resultados é brusca ao aumentar a taxa de 30 para 40 b.p. Tornando, definitivamente, impraticável a estratégia caso os custos sejam de 50 b.p.

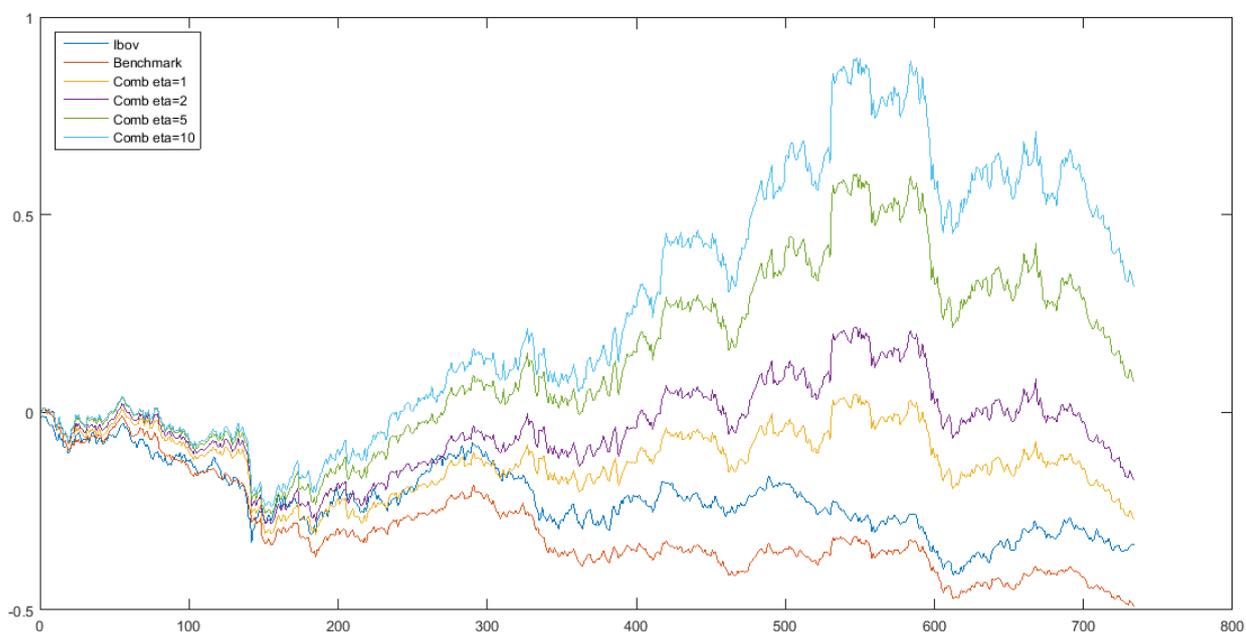


Figura 4: Resultados Líquidos com custos = 20bp

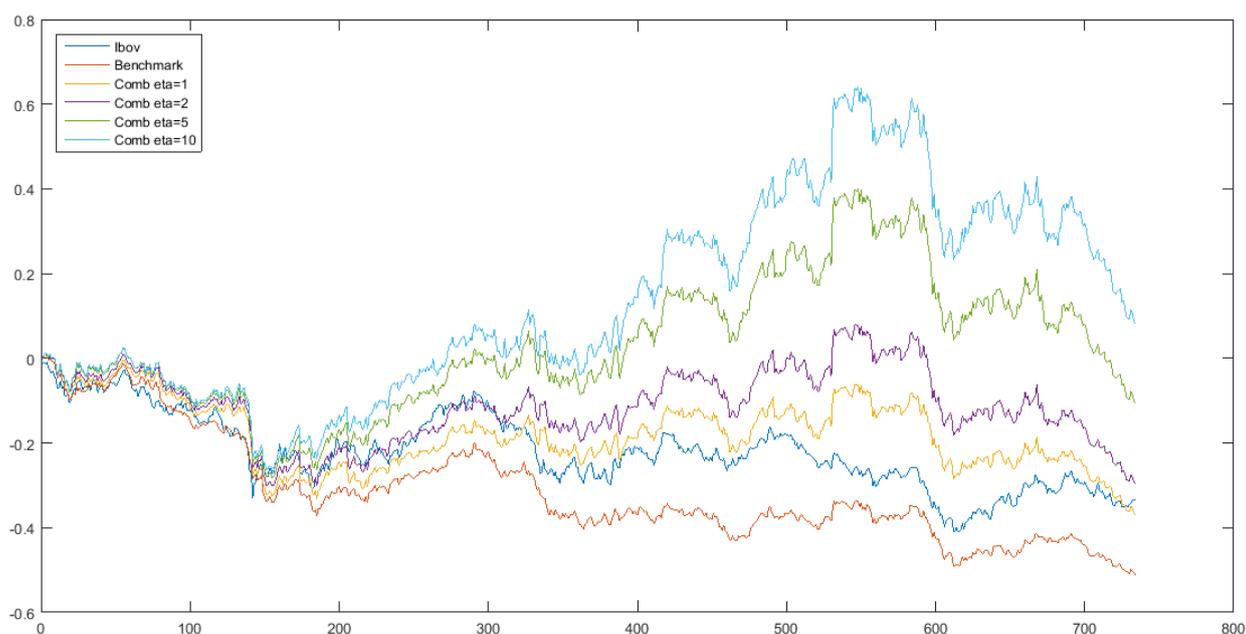


Figura 5: Resultados Líquidos com custos = 30bp

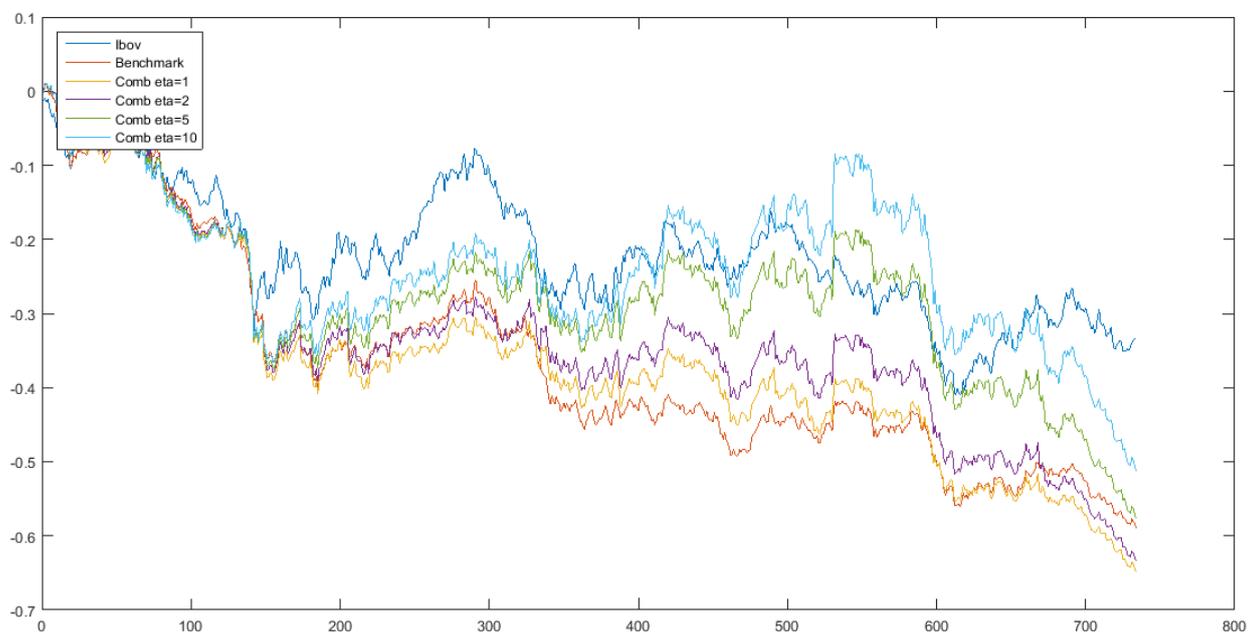


Figura 6: Resultados Líquidos com custos = 40bp

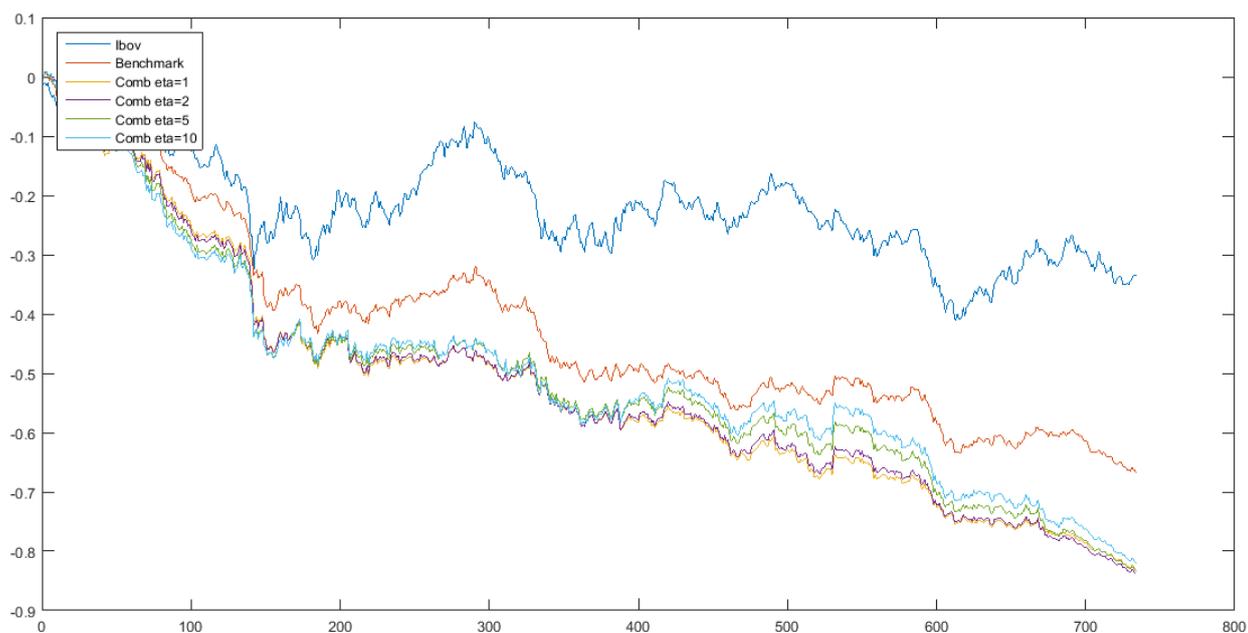


Figura 7: Resultados Líquidos com custos = 50bp

## 4 Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo principal avaliar se a combinação de previsões para a matriz de covariância condicional, quando utilizada uma abordagem econômica na determinação dos pesos de cada modelo, resulta em portfólios com melhores resultados econômicos para o investidor do mercado de ações brasileiro. A motivação para o estudo de modelos combinados vem de toda literatura apresentada no decorrer do trabalho, a qual afirma e ratifica os benefícios de sua utilização. Entretanto, o recente estudo de Caldeira et al. (2015) tem um peso especial, tendo em vista que a metodologia desenvolvida tem em sua essência um fator diferencial: a tomada de decisão do praticante de mercado. Outro ponto a ser destacado é que a metodologia utilizada não demandou a utilização de uma proxy para a matriz de covariância, como seria necessário no método de Amendola e Storti (2015) ou outros que fundamentam-se na minimização de uma função de perda estatística para determinar os pesos da combinação.

O diferencial deste trabalho é o estudo da combinação de previsões de volatilidade multivariada com aplicação empírica inédita com dados do mercado de ações brasileiro. O tema combinação de previsões já possui consolidado entendimento de seus benefícios para o caso univariado, contudo, o campo de estudo das combinações de previsões de volatilidade multivariada ainda pode ser explorado pela literatura, tanto brasileira, quanto de outros países.

Os resultados da aplicação empírica reforçam os benefícios da utilização de modelos combinados no processo de gestão de um portfólio, resultando em benefícios econômicos, maiores retornos ajustados ao risco e portfólios de menor variância.

Dentre as limitações do presente estudo, uma é a base de dados, a qual poderia contar com um maior número de observações, bem como dados intradiários. Entretanto, base de dados de alta frequência para o mercado brasileiro ainda não é uma realidade à disposição dos pesquisadores em geral. Apesar do método utilizado não precisar de uma proxy para matriz de volatilidade, seria interessante poder comparar os portfólios resultantes da abordagem econômica com aqueles dos modelos estatísticos de Amendola e Storti (2015).

Quanto aos possíveis estudos e aplicações empíricas futuras com dados brasileiros, o avanço tecnológico e a maior disponibilidade de dados de alta frequência que se espera num futuro próximo, abre margem a novas combinações de previsões: modelos candidatos que utilizam-se de dados intradiários. Golosnoy, Gribisch e Liesenfeld (2012), Bauwens, Storti e Violante (2012) e Noureldin, Shephard e Sheppard (2012) mostram como contornar os problemas de microestrutura de mercado decorrentes da utilização de dados de alta

frequência. A inclusão desses diferentes modelos possivelmente permitiria aos modelos combinados explorarem partes da volatilidade que os modelos com dados diários não o podem. Por fim, outro ponto que pode ser explorado é uma combinação com restrições quanto ao turnover do portfólio resultante, visto que os modelos combinados apresentaram elevados índices de turnover, comprometendo parte dos resultados.

## Referências

- AIOLFI, M.; TIMMERMANN, A. Persistence in forecasting performance and conditional combination strategies. *Journal of Econometrics*, Elsevier, v. 135, n. 1, p. 31–53, 2006. Citado na página 13.
- ALEXANDER, C. Orthogonal garch. *Mastering risk*, v. 2, p. 21–38, 2001. Citado na página 25.
- AMENC, N. et al. Edhec-risk north american index survey 2011. *EDHEC-Risk Institute*, 2012. Citado na página 9.
- AMENDOLA, A.; STORTI, G. *Combination of multivariate volatility forecasts*. [S.l.], 2009. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/hum/wpaper/sfb649dp2009-007.html>>. Citado na página 17.
- AMENDOLA, A.; STORTI, G. Model Uncertainty and Forecast Combination in High-Dimensional Multivariate Volatility Prediction. *International Journal of Forecasting*, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 10, 11, 14, 17, 18, 22 e 34.
- BATES, J. M.; GRANGER, C. W. J. The combination of forecasts. *OR*, Operational Research Society, v. 20, n. 4, p. 451–468, 1969. ISSN 14732858. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3008764>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.
- BAUWENS, L.; LAURENT, S.; ROMBOUTS, J. V. K. Multivariate garch models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, John Wiley Sons, Ltd., v. 21, n. 1, p. 79–109, 2006. ISSN 1099-1255. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jae.842>>. Citado na página 9.
- BAUWENS, L.; STORTI, G.; VIOLANTE, F. *Dynamic conditional correlation models for realized covariance matrices*. [S.l.], 2012. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/cor/louvco/2012060.html>>. Citado na página 34.
- BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307–327, 1986. Citado na página 9.
- BOLLERSLEV, T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized arch model. *The Review of Economics and Statistics*, The MIT Press, v. 72, n. 3, p. 498–505, 1990. ISSN 00346535, 15309142. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2109358>>. Citado na página 23.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R.; WOOLDRIDGE, J. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, v. 96, n. 1, p. 116–131, 1988. ISSN 00223808, 1537534X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1830713>>. Citado na página 24.
- CALDEIRA, J. et al. Combining multivariate volatility forecasts: an economic-based approach. *Disponível em SSRN*, 2015. Citado 10 vezes nas páginas 10, 11, 14, 19, 20, 22, 26, 27, 29 e 34.

- CAPPIELLO, L.; ENGLE, R. F.; SHEPPARD, K. Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial econometrics*, Oxford Univ Press, v. 4, n. 4, p. 537–572, 2006. Citado na página 25.
- CAVALERI, R.; RIBEIRO, E. P. Combinação de previsões de volatilidade: Um estudo. *Revista EconomiA*, 2011. Citado na página 13.
- CLEMEN, R. T. Combining forecasts: A review and annotated bibliography. *International Journal of Forecasting*, v. 5, n. 4, p. 559 – 583, 1989. ISSN 0169-2070. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0169207089900125>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.
- CORTE, P. D.; SARNO, L.; THORNTON, D. L. The expectation hypothesis of the term structure of very short-term rates: Statistical tests and economic value. *Journal of Financial Economics*, Elsevier, v. 89, n. 1, p. 158–174, 2008. Citado na página 27.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing Predictive Accuracy. p. 253–265, 1995. Citado na página 17.
- DIEBOLD, F. X.; PAULY, P. Structural change and the combination of forecasts. *Journal of Forecasting*, John Wiley Sons, Ltd., v. 6, n. 1, p. 21–40, 1987. ISSN 1099-131X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/for.3980060103>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.
- ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business Economic Statistics*, Taylor Francis, Ltd. on behalf of American Statistical Association, v. 20, n. 3, p. pp. 339–350, 2002. ISSN 07350015. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1392121>>. Citado na página 23.
- ENGLE, R.; COLACITO, R. Testing and valuing dynamic correlations for asset allocation. *Journal of business & economic statistics*, American Statistical Association, v. 24, n. 2, p. 238–253, 2006. Citado na página 13.
- ENGLE, R.; MEZRICH, J. Garch for groups: A round-up of recent developments in garch techniques for estimating correlation. *Risk-London-Risk Magazine Limited-*, Risk Magazine Limited, v. 9, p. 36–40, 1996. Citado na página 24.
- ENGLE, R. F. United Kingdom Inflation. v. 50, n. 4, p. 987–1007, 1982. Citado na página 9.
- ENGLE, R. F.; KRONER, K. F. Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, Cambridge University Press, v. 11, n. 1, p. 122–150, 1995. ISSN 02664666, 14694360. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3532933>>. Citado na página 24.
- ENGLE, R. F.; SHEPHARD, N.; SHEPPARD, K. *Fitting vast dimensional time-varying covariance models*. [S.l.], 2008. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/p/oxf/wpaper/403.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 24.
- FIGLEWSKI, S.; URICH, T. Optimal aggregation of money supply forecasts: Accuracy, profitability and market efficiency. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 38, n. 3, p. 695–710, 1983. Citado na página 10.

FLEMING, J.; KIRBY, C.; OSTDIEK, B. The Economic Value of Volatility Timing. *LVI*, n. 1, p. 329–352, 2001. Citado na página 18.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, v. 48, n. 5, p. 1779–1801, 1993. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v48y1993i5p1779-1801.html>>. Citado na página 25.

GOLOSNOY, V.; GRIBISCH, B.; LIESENFELD, R. The conditional autoregressive wishart model for multivariate stock market volatility. *Journal of Econometrics*, v. 167, n. 1, p. 211 – 223, 2012. ISSN 0304-4076. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407611002582>>. Citado na página 34.

GRANGER, C. W.; RAMANATHAN, R. Improved methods of combining forecasts. *Journal of Forecasting*, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 197–204, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. Consistent ranking of volatility models. *Journal of Econometrics*, v. 131, n. 1-2, p. 97–121, 2006. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/a/eee/econom/v131y2006i1-2p97-121.html>>. Citado na página 16.

HANSEN, P. R.; LUNDE, A. Consistent ranking of volatility models. v. 131, p. 97–121, 2006. Disponível em: <[http://refhub.elsevier.com/S0169-2070\(14\)00007-7/sbref18](http://refhub.elsevier.com/S0169-2070(14)00007-7/sbref18)>. Citado na página 18.

HENDRY, D. F.; CLEMENTS, M. P. Pooling of forecasts. *Econometrics Journal*, Blackwell Publishing Ltd., v. 7, n. 1, p. 1–31, 2004. ISSN 1368-423X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1368-423X.2004.00119.x>>. Citado na página 9.

LAURENT, S.; ROMBOUTS, J. V. K.; VIOLANTE, F. On the Forecasting accuracy of Multivariate Garch Models. *Journal of Applied Econometrics*, v. 955, n. April 2011, p. 934–955, 2012. Citado na página 16.

LAURENT, S.; ROMBOUTS, J. V. K.; VIOLANTE, F. On loss functions and ranking forecasting performances of multivariate volatility models. *Journal of Econometrics*, Elsevier B.V., v. 173, n. 1, p. 1–10, 2013. ISSN 0304-4076. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jeconom.2012.08.004>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

MAKRIDAKIS, S.; HIBON, M. The m3-competition: results, conclusions and implications. *International journal of forecasting*, Elsevier, v. 16, n. 4, p. 451–476, 2000. Citado na página 12.

MARCELLINO, M. Forecast pooling for european macroeconomic variables\*. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Blackwell Publishing Ltd, v. 66, n. 1, p. 91–112, 2004. ISSN 1468-0084. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-0084.2004.00071.x>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 13.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, v. 1, p. 77–91, 1952. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2975974>>. Citado na página 9.

- MORGAN, J. et al. Riskmetrics technical document. New York, 1996. Citado na página 24.
- NOURELDIN, D.; SHEPHARD, N.; SHEPPARD, K. Multivariate high frequency based volatility (HEAVY) models. *Journal of Applied Econometrics*, v. 27, n. 6, p. 907–933, 09 2012. Disponível em: <<http://ideas.repec.org/a/wly/japmet/v27y2012i6p907-933.html>>. Citado na página 34.
- PATTON, A. J. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics*, v. 160, n. 1, p. 246–256, January 2011. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 16.
- PATTON, A. J.; SHEPPARD, K. Evaluating Volatility and Correlation Forecasts. 2007. Citado na página 17.
- PATTON, A. J.; SHEPPARD, K. Evaluating volatility and correlation forecasts. In: *Handbook of financial time series*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 801–838. Citado na página 13.
- POLITIS, D. N.; ROMANO, J. P. The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical association*, Taylor & Francis Group, v. 89, n. 428, p. 1303–1313, 1994. Citado na página 28.
- RAPACH, D. E.; STRAUSS, J. K.; ZHOU, G. Out-of-sample equity premium prediction: Combination forecasts and links to the real economy. *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, v. 23, n. 2, p. 821–862, 2010. Citado na página 13.
- SILVENNOINEN, A.; TERÄSVIRTA, T. Multivariate garch models. In: \_\_\_\_\_. *Handbook of Financial Time Series*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 201–229. ISBN 978-3-540-71297-8. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8\\_9](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_9)>. Citado na página 9.
- STEVENS, G. V. G. On the Inverse of the Covariance in Portfolio Analysis. *The Journal of Finance*, v. 53, n. 5, p. 1821–1827, 1998. Citado na página 16.
- STOCK, J. H.; WATSON, M. W. Combination forecasts of output growth in a seven-country data set. *Journal of Forecasting*, John Wiley Sons, Ltd., v. 23, n. 6, p. 405–430, 2004. ISSN 1099-131X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/for.928>>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 13 e 20.
- TERUI, N.; DIJK, H. K. V. Combined forecasts from linear and nonlinear time series models. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 421–438, 2002. Citado na página 13.
- THORNTON, D. L.; VALENTE, G. Out-of-sample predictions of bond excess returns and forward rates: An asset allocation perspective. *Review of Financial Studies*, Soc Financial Studies, v. 25, n. 10, p. 3141–3168, 2012. Citado na página 27.

# APÊNDICE A – Apêndice

Tabela 3: Base de Dados - Estatísticas Out-of-Sample

<b>Ação</b>	<b>Ret. Méd.(%)</b>	<b>Ret. Acum. (%)</b>	<b>Desvio</b>
ALLL3	-0,11	-54,48	1,74
BBAS3	0,08	79,61	5,96
BRML3	0,01	7,84	3,59
BRKM5	0,02	17,75	2,74
BRFS3	0,07	75,33	8,86
CCRO3	0,09	92,94	3,73
ELET3	-0,16	-68,92	4,73
CMIG4	0,08	81,04	2,47
CSNA3	-0,07	-38,78	4,12
CYRE3	-0,04	-24,65	1,56
DTEX3	0,00	1,39	2,12
ENBR3	0,02	15,82	0,90
EMBR3	0,06	58,99	2,98
EVEN3	0,01	5,57	1,13
GFSA3	-0,15	-65,36	2,02
GGBR4	-0,04	-21,61	2,40
GOLL4	-0,13	-60,41	4,35
HYPE3	-0,03	-17,91	3,39
ITUB4	0,00	-1,97	2,80
JBSS3	0,03	26,55	1,11
LAME4	0,08	76,43	3,72
MRFG3	-0,19	-74,67	3,09
MRVE3	-0,08	-43,27	1,90
OIBR4	-0,14	-64,38	2,45
PDGR3	-0,23	-81,85	2,54
PETR4	-0,06	-37,19	2,78
RSID3	-0,26	-85,17	3,81
SUZB5	-0,06	-35,56	2,86
USIM5	-0,05	-28,95	3,19
VALE5	-0,05	-31,51	4,44

Tabela 4: Resultados para o problema de Média-Variância

<b>Modelos</b>	<b>Retorno</b>	<b>Desvio</b>	<b>Turnover</b>	<b>Sharpe</b>
DCC	0,003	1.136	0.0421	-0.051
Risk Metrics	-0,065	1.621	0.674	-0.090*
O-Garch	-0.016	1.208	0.084	-0.024
ADCC	0,005	1.134	0.423	-0.050*
SVECH	0.0011	1.132	0.302	-0.028
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.005	1.094	0.291	-0.034
C - Med-Var ( $\eta = 1$ )	0,266	1.288	0.987	0.083*
C - Med-Var ( $\eta = 2$ )	0,318	1.336	1.101	0.103*
C - Med-Var ( $\eta = 5$ )	0,403	1.4126	1.257	0.135*
C - Med-Var ( $\eta = 10$ )	0,458	1.490	1.342	0.154*

Tabela 5: Resultados para o problema de Mínima-Variância

<b>Modelos</b>	<b>Retorno</b>	<b>Desvio</b>	<b>Turnover</b>	<b>Sharpe</b>
DCC	0.014	1.030	0.366	-0.040
Risk Metrics	0,000	1.669	0.676	-0.055*
O-Garch	0.011	1.123	0.045	0.001
ADCC	0,016	1.028	0.367	-0.039
SVECH	0.0298	1.021	0.247	-0.008
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.022	0.998	0.254	-0.017
C - Min-Var ( $\eta = 1$ )	0,023	0.987	0.249	0.083*
C - Min-Var ( $\eta = 2$ )	0,023	0.980	0.246	0.103*
C - Min-Var ( $\eta = 5$ )	0,025	0.968	0.247	0.135*
C - Min-Var ( $\eta = 10$ )	0,027	0.963	0.257	0.154*

Tabela 6: Resultados para todos modelos - Ordenados por SR

<b>Modelos</b>	<b>Retorno</b>	<b>Desvio</b>	<b>Turnover</b>	<b>Sharpe</b>
C - Med-Var ( $\eta = 10$ )	0.4588	1.4906	1.3422	0.1544
C - Med-Var ( $\eta = 5$ )	0.4038	1.4266	1.2574	0.1357
C - Med-Var ( $\eta = 2$ )	0.3186	1.3366	1.1013	0.1039
C - Med-Var ( $\eta = 1$ )	0.2665	1.2889	0.9878	0.0830
Ogarch - Min-Var	0.0112	1.1231	0.0458	0.0016
SVECH - Min-Var	0.0298	1.0212	0.2472	-0.0081
C - Min-Var ( $\eta = 10$ )	0.0274	0.9636	0.2578	-0.0130
C - Min-Var ( $\eta = 5$ )	0.0253	0.9685	0.2472	-0.0135
C - Min-Var ( $\eta = 2$ )	0.0235	0.9804	0.2466	-0.0153
C - Min-Var ( $\eta = 1$ )	0.0230	0.9877	0.2494	-0.0162
C - Min-Var ( $\eta = 0$ )	0.0226	0.9980	0.2545	-0.0174
OGarch	-0.0156	1.2082	0.0837	-0.0237
SVECH	0.0111	1.1321	0.3022	-0.0278
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.0050	1.0948	0.2919	-0.0346
ADCC - Min-Var	0.0164	1.0287	0.3677	-0.0394
DCC - Min Var	0.0149	1.0310	0.3669	-0.0407
ADCC	0.0048	1.1340	0.4228	-0.0496
DCC	0.0031	1.1357	0.4207	-0.0507
RM - Min-Var	0.0006	1.6691	0.6765	-0.0552
RM	-0.0649	1.6215	0.6742	-0.0895
Ibovespa (buy and hold)	-0.0455	1.4112	0.0000	-0.0322

Tabela 7: Resultados para todos modelos - Ordenados por Desvio

<b>Modelos</b>	<b>Retorno</b>	<b>Desvio</b>	<b>Turnover</b>	<b>Sharpe</b>
C - Min-Var ( $\eta = 10$ )	0.0274	0.9636	0.2578	-0.0130
C - Min-Var ( $\eta = 5$ )	0.0253	0.9685	0.2472	-0.0135
C - Min-Var ( $\eta = 2$ )	0.0235	0.9804	0.2466	-0.0153
C - Min-Var ( $\eta = 1$ )	0.0230	0.9877	0.2494	-0.0162
C - Min-Var ( $\eta = 0$ )	0.0226	0.9980	0.2545	-0.0174
SVECH - Min-Var	0.0298	1.0212	0.2472	-0.0081
ADCC - Min-Var	0.0164	1.0287	0.3677	-0.0394
DCC - Min Var	0.0149	1.0310	0.3669	-0.0407
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.0050	1.0948	0.2919	-0.0346
Ogarch - Min-Var	0.0112	1.1231	0.0458	0.0016
SVECH	0.0111	1.1321	0.3022	-0.0278
ADCC	0.0048	1.1340	0.4228	-0.0496
DCC	0.0031	1.1357	0.4207	-0.0507
OGarch	-0.0156	1.2082	0.0837	-0.0237
C - Med-Var ( $\eta = 1$ )	0.2665	1.2889	0.9878	0.0830
C - Med-Var ( $\eta = 2$ )	0.3186	1.3366	1.1013	0.1039
Ibovespa (buy and hold)	-0.0455	1.4112	0.0000	-0.0322
C - Med-Var ( $\eta = 5$ )	0.4038	1.4266	1.2574	0.1357
C - Med-Var ( $\eta = 10$ )	0.4588	1.4906	1.3422	0.1544
RM	-0.0649	1.6215	0.6742	-0.0895
RM - Min-Var	0.0006	1.6691	0.6765	-0.0552

Tabela 8: Resultados para todos modelos - Ordenados por Turnover

<b>Modelos</b>	<b>Retorno</b>	<b>Desvio</b>	<b>Turnover</b>	<b>Sharpe</b>
Ibovespa (buy and hold)	-0.0455	1.4112	0.0000	-0.0322
Ogarch - Min-Var	0.0112	1.1231	0.0458	0.0016
OGarch	-0.0156	1.2082	0.0837	-0.0237
C - Min-Var ( $\eta = 2$ )	0.0235	0.9804	0.2466	-0.0153
C - Min-Var ( $\eta = 5$ )	0.0253	0.9685	0.2472	-0.0135
SVECH - Min-Var	0.0298	1.0212	0.2472	-0.0081
C - Min-Var ( $\eta = 1$ )	0.0230	0.9877	0.2494	-0.0162
C - Min-Var ( $\eta = 0$ )	0.0226	0.9980	0.2545	-0.0174
C - Min-Var ( $\eta = 10$ )	0.0274	0.9636	0.2578	-0.0130
Equally-Weighted ( $\eta = 0$ )	0.0050	1.0948	0.2919	-0.0346
SVECH	0.0111	1.1321	0.3022	-0.0278
DCC - Min Var	0.0149	1.0310	0.3669	-0.0407
ADCC - Min-Var	0.0164	1.0287	0.3677	-0.0394
DCC	0.0031	1.1357	0.4207	-0.0507
ADCC	0.0048	1.1340	0.4228	-0.0496
RM	-0.0649	1.6215	0.6742	-0.0895
RM - Min-Var	0.0006	1.6691	0.6765	-0.0552
C - Med-Var ( $\eta = 1$ )	0.2665	1.2889	0.9878	0.0830
C - Med-Var ( $\eta = 2$ )	0.3186	1.3366	1.1013	0.1039
C - Med-Var ( $\eta = 5$ )	0.4038	1.4266	1.2574	0.1357
C - Med-Var ( $\eta = 10$ )	0.4588	1.4906	1.3422	0.1544