

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

PAULO CORRÊA DA SILVEIRA NETO

UTILIZAÇÃO DE CÓPULAS COM DINÂMICA
SEMIPARAMÉTRICA PARA ESTIMAÇÃO DE
MEDIDAS DE RISCO DE MERCADO

Porto Alegre
2015

PAULO CORRÊA DA SILVEIRA NETO

**UTILIZAÇÃO DE CÓPULAS COM DINÂMICA
SEMIPARAMÉTRICA PARA ESTIMAÇÃO DE
MEDIDAS DE RISCO DE MERCADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

**Porto Alegre
2015**

CIP - Catalogação na Publicação

Silveira Neto, Paulo Corrêa da
Utilização de cópulas com dinâmica semiparamétrica
para estimação de medidas de risco de mercado / Paulo
Corrêa da Silveira Neto. -- 2016.
39 f.

Orientador: Flávio Augusto Ziegelmann.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2016.

1. Cópulas dinâmicas. 2. Dinâmica semiparamétrica.
3. Risco de mercado. 4. Valor em risco. 5. Expected
shortfall. I. Ziegelmann, Flávio Augusto, orient.
II. Título.

PAULO CORRÊA DA SILVEIRA NETO

**UTILIZAÇÃO DE CÓPULAS COM DINÂMICA
SEMIPARAMÉTRICA PARA ESTIMAÇÃO DE
MEDIDAS DE RISCO DE MERCADO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em Porto Alegre, 05 de novembro de 2015.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann - Orientador

UFRGS

Prof. Dr. Emerson Fernandes Marçal

FGV

Profa. Dra. Francielle de Lima e Silva

UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Scherer Perlin

UFRGS

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram durante o curso de mestrado. Especialmente à minha noiva, Sheyla, pelo amor, esforço conjunto e apoio em todos os momentos.

Aos meus pais, Edilson e Taís, meu irmão, Gudy, e meu tio, Jerônimo, pelo carinho e suporte.

Aos colegas do Banco Cooperativo Sicredi pela compreensão e incentivo.

Aos colegas e novos amigos do PPGE pelas risadas, trabalhos em grupo e troca de ideias e conhecimento.

À banca examinadora, pelas sugestões e contribuições.

E ao Professor Flávio, pela orientação, conversas, valiosos conselhos, paciência e dedicação ao longo de toda caminhada.

Resumo

A análise de risco de mercado, o risco associado a perdas financeiras resultantes de flutuações de preços de mercado, é fundamental para instituições financeiras e gestores de carteiras. A alocação dos ativos nas carteiras envolve decisões risco/retorno eficientes, frequentemente limitadas por uma política de risco. Muitos modelos tradicionais simplificam a estimação do risco de mercado impondo muitas suposições, como distribuições simétricas, correlações lineares, normalidade, entre outras. A utilização de cópulas flexibiliza a estimação da estrutura de dependência dessas séries de tempo, possibilitando a modelagem de séries de tempo multivariadas em dois passos: estimações marginais e da dependência entre as séries. Neste trabalho, utilizou-se um modelo de cópulas com dinâmica semiparamétrica para medição de risco de mercado. A estrutura dinâmica das cópulas conta com um parâmetro de dependência que varia ao longo do tempo, em que a proposta semiparamétrica possibilita a modelagem de qualquer tipo de forma funcional que a estrutura dinâmica venha a apresentar. O modelo proposto por Hafner e Reznikova (2010), de dinâmica semiparamétrica, é comparado com o modelo sugerido por Patton (2006), que apresenta dinâmica paramétrica. Todas as cópulas no trabalho são bivariadas. Os dados consistem em quatro séries de tempo do mercado brasileiro de ações. Para cada um desses pares, utilizou-se modelos ARMA-GARCH para a estimação das marginais, enquanto a dependência entre as séries foi estimada utilizando os dois modelos de cópulas dinâmicas mencionados. Para comparar as metodologias estimaram-se duas medidas de risco de mercado: Valor em Risco e *Expected Shortfall*. Testes de hipóteses foram implementados para verificar a qualidade das estimativas de risco.

Palavras-chave: Cópulas dinâmicas. Dinâmica semi-paramétrica. Risco de mercado. Valor em risco. *Expected shortfall*.

Abstract

Market risk management, i.e. managing the risk associated with financial loss resulting from market price fluctuations, is fundamental to financial institutions and portfolio managers. Allocations involve efficient risk/return decisions, often restricted by an investment policy statement. Many traditional models simplify risk estimation imposing several assumptions, like symmetrical distributions, the existence of only linear correlations, normality, among others. The modelling of the dependence structure of these time series can be flexibly achieved by using copulas. This approach can model a complex multivariate time series structure by analyzing the problem in two blocks: marginal distributions estimation and dependence estimation. The dynamic structure of these copulas can account for a dependence parameter that changes over time, whereas the semiparametric option makes it possible to model any kind of functional form in the dynamic structure. We compare the model suggested by Hafner and Reznikova (2010), which is a dynamic semiparametric one, with the model suggested by Patton (2006), which is also dynamic but fully parametric. The copulas in this work are all bivariate. The data consists of four Brazilian stock market time series. For each of these pairs, ARMA-GARCH models have been used to model the marginals, while the dependences between the series are modeled by using the two methods mentioned above. For the comparison between these methodologies, we estimate Value at Risk and Expected Shortfall of the portfolios built for each pair of assets. Hypothesis tests are implemented to verify the quality of the risk estimates.

Keywords: Dynamic copulas. Semiparametric dynamics. Market risk. Value at risk. Expected shortfall.

Sumário

1	Introdução	7
2	Metodologia	9
2.1	<i>Risco de Mercado</i>	9
2.1.1	<i>Medidas Coerentes de Risco</i>	10
2.1.2	<i>Valor em Risco</i>	11
2.1.3	Expected Shortfall	12
2.2	<i>Cópulas</i>	12
2.2.1	<i>Definição</i>	13
2.2.2	<i>Estimação</i>	14
2.3	<i>Cópulas Dinâmicas</i>	16
2.3.1	<i>Dinâmica Paramétrica</i>	17
2.3.2	<i>Dinâmica Semiparamétrica</i>	18
2.3.2.1	Seleção da Janela Ótima	19
3	Aplicação	22
3.1	<i>Descrição dos Dados</i>	22
3.2	<i>Estimação</i>	23
3.2.1	<i>Estimação das Marginais</i>	24
3.2.2	<i>Estimação das Cópulas</i>	25
3.2.3	<i>Estimação das Medidas de Risco de Mercado</i>	28
3.3	<i>Comparação e Testes</i>	30
4	Considerações Finais	35
	Referências	36
	Apêndice A - Medidas de Associação	38

1 Introdução

Para análise de carteiras no mercado financeiro é necessário mensurar o risco de perdas resultantes de oscilações dos valores de mercado de posições ativas e passivas, o que se denomina Risco de Mercado. Muitas vezes, a escolha entre carteiras pode ser delimitada pela quantidade de risco que elas assumem, além de existirem regulações legais que preveem a mensuração das posições das carteiras de bancos e fundos de investimento diariamente. É importante, portanto, propor e estudar medidas robustas e consistentes de risco que consigam captar com precisão as possíveis perdas dessas carteiras.

Os modelos comumente utilizados no mercado simplificam a mensuração desses riscos, uma vez que fazem suposições como distribuições simétricas, correlações lineares, normalidade, entre outras características que nem sempre se sustentam, como verificado por Christoffersen e Diebold (2006) e Silva Filho e Ziegelmann (2014).

Este trabalho faz uma revisão da definição de medidas coerentes de risco, com as propriedades desejáveis para medir precisamente o risco a que as carteiras estão expostas. Como as séries do mercado financeiro nem sempre têm as propriedades assumidas pela maioria dos modelos mais simples de séries temporais, possuindo muitas vezes distribuições assimétricas e caudas pesadas, torna-se difícil a tarefa de modelá-las com precisão utilizando-se modelos que não consideram este tipo de comportamento.

Para a modelagem da estrutura de dependência dessas séries, a utilização de cópulas surge como uma alternativa que torna o trabalho mais prático, uma vez que propõe a modelagem de toda complexidade das séries nas distribuições marginais, para, com os resíduos obtidos, estimar a estrutura de dependência das séries. Portanto, o objetivo deste trabalho é estimar modelos de cópulas, assumindo um modelo semiparamétrico para a dinâmica da dependência e utilizar as estruturas de dependência obtidas para a mensuração das medidas de risco. Utilizando dados reais, o modelo de cópulas com dinâmica semiparamétrica é comparado com o modelo de dinâmica paramétrica.

A Seção 2 deste trabalho conceitua risco de mercado, destacando sua importância e aplicações. São definidas medidas coerentes de risco e apresentadas duas medidas para risco de mercado. A seção ainda conta com uma apresentação do conceito de cópulas, expondo suas definições e processo de estimação. O conceito de cópulas é estendido para o caso dinâmico e dois modelos de cópulas dinâmicas são apresentados, um com dinâmica paramétrica e outro com dinâmica semiparamétrica. Na Seção 3 os modelos apresentados

anteriormente são aplicados a quatro pares de retornos de séries de ações do mercado financeiro brasileiro. Para cada um dos pares são realizadas 1973 estimativas de cada uma das duas abordagens propostas, com tamanho de amostra fixo. Utilizando seis níveis de confiança, são estimadas as medidas de risco de mercado apresentadas. Finalmente, testes de hipóteses foram realizados para avaliação da qualidade dos modelos e uma função perda foi calculada para cada uma das estimativas. Na Seção 4 são realizadas as considerações finais do trabalho, analisando os resultados dos dois modelos na medição de risco de mercado e propondo possíveis extensões deste trabalho.

2 Metodologia

Inicialmente será apresentado o conceito de Risco de Mercado, o que este mede, qual a sua importância e suas aplicações. Após, serão definidas medidas coerentes de risco e propostas duas medidas de Risco de Mercado. Será revisado o conceito de cópulas e as possibilidades que elas trazem de aumentar a precisão com que as medidas apresentadas anteriormente são calculadas, incorporando nos modelos grande parte da complexidade típica dos dados do mercado financeiro. Serão definidas, também, algumas medidas de associação alternativas à correlação linear, exibindo suas diferentes características e aplicações.

A metodologia ainda apresenta dois modelos de cópulas dinâmicas nas quais o parâmetro de dependência varia ao longo do tempo. No primeiro, proposto por Patton (2006), o parâmetro de dependência varia através de uma estrutura paramétrica, enquanto que no outro, proposto por Hafner e Reznikova (2010), varia semiparametricamente. Para os dois casos serão apresentadas suas definições, características e procedimentos de estimação.

2.1 *Risco de Mercado*

Risco de Mercado busca estimar as perdas de valor das posições de uma carteira devido a variações no valor de ações, taxas de juros, taxas de câmbio, preços de *commodities* ou outro indicador em que os valores sejam determinados pelo mercado. É de interesse das instituições financeiras a estimação de quanto estas carteiras estão sujeitas a perdas inesperadas e qual o volume dessas perdas. Além disso, *traders* e gestores geralmente são limitados pelo Risco de Mercado a fim de evitar perdas, respeitando o apetite de risco da instituição. Outra função do Risco de Mercado é regulatória, pois as instituições devem alocar capital a uma proporção do Risco de Mercado que apresentam.

Como as carteiras possuem diversos ativos que variam conjuntamente, a estimação do Risco de Mercado envolve, além de estimação de volatilidade dos fatores de risco e da dependência entre estes fatores. Em Alexander (2008) encontra-se uma revisão extensa sobre Riscos de Mercado e diferentes maneiras de estimar Valor em Risco e *Expected Shortfall* com definições e exemplos.

2.1.1 Medidas Coerentes de Risco

Para formalizar a escolha de qual medida de risco utilizar, necessita-se definir as características necessárias de uma medida de risco. Artzner (1999) formula as propriedades necessárias para o que chama de uma "Medida Coerente de Risco". Seja $\varrho(r)$ uma medida de risco e r_1, r_2 os log-retornos de dois ativos quaisquer, considera-se esta uma medida de risco coerente se ela satisfaz quatro axiomas:

a) Normalidade:

$$\varrho(0) = 0.$$

Se o indivíduo não possui ativos, seu risco é zero;

b) Monotonicidade:

$$\text{Se } r_1 \geq r_2, \text{ então } \varrho(r_1) \leq \varrho(r_2).$$

Se os retornos r_1 de uma carteira são sempre maiores ou iguais que os retornos r_2 de uma segunda carteira, ou seja, $P(r_1 < r_2) = 0$, então o risco de r_1 é menor que o risco de r_2 ;

c) Subaditividade:

$$\varrho(r_1 + r_2) \leq \varrho(r_1) + \varrho(r_2).$$

O risco de uma carteira contendo dois ativos diferentes é, no máximo, a soma dos riscos desses dois ativos medidos individualmente. Ou seja, a diversificação da carteira diminui o risco tomado;

d) Homogeneidade Positiva:

$$\text{Se } \alpha \geq 0, \text{ então } \varrho(\alpha r_1) = \alpha \varrho(r_1).$$

Ao aumentar ou diminuir a quantidade de um ativo específico em carteira, o risco aumenta e diminui na mesma proporção. Por exemplo, ao dobrar a quantidade comprada de r_1 em uma carteira com apenas este ativo, o risco atribuído à carteira também dobra;

e) Invariância de Translação:

Se A é um ativo determinístico com retorno a garantido, então

$$\varrho(r_1 + a) = \varrho(r_1) - a.$$

O ativo A apenas adiciona retorno a ao ativo. Em particular, se $a = \varrho(r_1)$, então $\varrho(r_1 + a) = 0$.

2.1.2 Valor em Risco

Como os valores dos ativos podem variar livremente, sem valor máximo definido e na maioria o valor zero como mínimo, surge como uma primeira sugestão mensurar as possíveis perdas dado um certo nível de confiança α . A ideia é analisar as séries dos retornos do ativo para verificar a magnitude destas perdas. Dado $r_h = \ln(\frac{P_t}{P_{t-h}})$ o log-retorno de h dias úteis do preço P_t de um determinado ativo, define-se VaR_α como:

$$P(r_h < VaR_\alpha) = \alpha. \quad (2.1)$$

Ou seja, existe uma probabilidade α do ativo apresentar retornos menores que o VaR_α estimado. O VaR é o percentil α dos retornos da carteira. Ao assumir que o log-retorno dos ativos segue distribuição normal com média μ e variância σ^2 , o cálculo do VaR torna-se ainda mais simples:

$$P(r < VaR_\alpha) = P\left(\frac{r - \mu}{\sigma} < \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right),$$

em que $Z \sim N(0, 1)$. Então se $P(r < VaR_\alpha) = \alpha$, então

$$P\left(Z < \frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Por definição, $P(Z < \Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$, então

$$\frac{VaR_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (2.2)$$

em que Φ é a função de distribuição da normal padrão.

Pela facilidade e simplicidade na obtenção, o VaR é amplamente utilizado pelas instituições financeiras. Ao assumir distribuição normal e média zero para os retornos,

as únicas estimativas a realizar são a volatilidade da carteira, que envolve a estimação da volatilidade por fator de risco, e suas correlações lineares. O Banco Central do Brasil também utiliza o *VaR* nos seus instrumentos regulatórios, como se pode observar, por exemplo, na Circular 3634, de março de 2013.

Porém, os ativos do mercado financeiro não possuem distribuições tão comportadas quanto a distribuição normal. Muitas vezes possuem caudas pesadas, distribuições assimétricas e correlações maiores para valores negativos, fatos que são negligenciados ao se supor uma distribuição simétrica e bem comportada para os dados.

Artzner (1999) ainda demonstra que o *VaR* não é uma medida coerente de risco, mostrando que a subaditividade vale apenas quando a distribuição dos retornos é elipticamente distribuída, como mostra Oliveira (2009), ou seja, quando o *VaR* é uma função apenas da média e da variância dos retornos. Como o *VaR* não satisfaz as condições necessárias para ser considerado como medida coerente de risco, torna-se necessário definir uma métrica que atenda a todos os axiomas anteriormente citados.

2.1.3 Expected Shortfall

O *Expected Shortfall (ES)* é uma medida que, ao contrário do *VaR*, considera o peso da cauda inferior da distribuição de probabilidade do portfólio. Assim, leva em conta o tamanho da perda, em média, e não apenas a probabilidade da perda ocorrer. O *ES* pode ser definido como:

$$ES_{\alpha}(r) = E[r | r \leq VaR_{\alpha}]. \quad (2.3)$$

Dado um nível de confiança $1 - \alpha$, o *ES* é a perda esperada, uma vez que o retorno foi menor que o *VaR*. A utilização desta medida elimina o problema de depender apenas da média e da variância da distribuição, uma vez que incorpora todo peso da cauda na medida. Artzner (1999) demonstra que o *ES* atende a todos os axiomas exigidos para pertencer ao conjunto das medidas coerentes de risco.

2.2 Cópulas

Cópulas são ferramentas para a modelagem multivariada de séries temporais que possibilitam a separação da modelagem das séries em dois estágios, primeiramente explorando-as individualmente e, após, realizando do estudo de sua dependência. Há uma revisão sobre medidas de associação no Apêndice deste trabalho.

Cópuas vêm sendo amplamente utilizadas para a análise de séries do mercado financeiro devido às características complexas que estas séries apresentam e sua contribuição para a solução do problema de se medir de forma mal especificada o risco, os possíveis retornos e a dinâmica dos investimentos. As definições aqui apresentadas podem ser encontradas em Nelsen (2007) e Cherubini (2004).

2.2.1 Definição

Dadas X_1, X_2, \dots, X_n n variáveis aleatórias, uma Cópula é uma função que aplicada às suas funções de distribuição acumuladas $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ a sua distribuição conjunta $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, de forma que:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.4)$$

Estas funções $C(\cdot)$ devem obedecer algumas propriedades para se tornarem cópuas. Para definir exatamente quais são essas funções, necessita-se da definição formal de cópula.¹:

Definição 2.1. *Uma subcópula bidimensional, $\mathcal{C}(u, v)$, é uma função real definida em $A \times B$, em que A e B são subconjuntos do intervalo $I = [0, 1]$ contendo 0 e 1 tal que:*

- a) *para cada $u \in A$ e $v \in B$: $\mathcal{C}(0, v) = 0 = \mathcal{C}(u, 0)$;*
- b) *$\mathcal{C}(u, 1) = u$ e $\mathcal{C}(1, v) = v$ para cada $(u, v) \in A \times B$;*
- c) *para cada retângulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ dentro de $A \times B$ tal que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$*

$$\mathcal{C}(u_2, v_2) - \mathcal{C}(u_1, v_2) - \mathcal{C}(u_2, v_1) + \mathcal{C}(u_1, v_1) \geq 0.$$

Definição 2.2. *Uma Cópula bidimensional C é uma subcópula bidimensional com $A = B = I$.*

Percebe-se nas definições que cópuas possuem propriedades muito parecidas com as de funções de distribuição acumulada multivariadas. Garantir que o domínio da função seja o intervalo $[0, 1]$ é básico para que os argumentos da função sejam as funções de

¹A partir daqui e até o final do trabalho, serão utilizadas apenas duas variáveis para as definições e exemplos, as quais podem ser generalizadas para casos com mais variáveis.

distribuição acumuladas marginais. O item (i) garante que para valores improváveis de uma das variáveis, a probabilidade da ocorrência na distribuição conjunta também é zero. O segundo item da definição garante que, no limite superior de uma das variáveis, a função dependa apenas da variável restante. Já (iii) restringe que, como as distribuições acumuladas, a cópula seja crescente nas duas variáveis.

Teorema 2.1 (Teorema de Sklar (1959)). *Sejam $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ funções de distribuição marginais, então, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}$:*

a) *Se \mathcal{C} é qualquer subcópula cujo domínio contém $\text{Dom } F_X \times \text{Dom } F_Y$, $\mathcal{C}(F_X(x), F_Y(y))$ é uma distribuição conjunta com marginais $F_X(x)$ e $F_Y(y)$;*

b) *Reciprocamente, se $F_{XY}(x, y)$ é uma função de distribuição conjunta com margens $F_X(x)$, $F_Y(y)$, existe uma única subcópula \mathcal{C} , com domínio $\text{Dom } F_X \times \text{Dom } F_Y$, tal que*

$$F_{XY}(x, y) = \mathcal{C}(F_X(x), F_Y(y)).$$

Se $F_X(x)$, $F_Y(y)$ são contínuas, então a subcópula é uma cópula; se não, existe uma cópula C tal que

$$C(u, v) = \mathcal{C}(u, v),$$

para cada $(u, v) \in \text{Dom } F_X \times \text{Dom } F_Y$.

Um dos resultados do Teorema de Sklar é que, dadas $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, qualquer cópula $C(u, v)$ leva a alguma função de distribuição acumulada conjunta de X e Y , $F_{XY}(x, y)$, permitindo a modelagem de diferentes distribuições conjuntas, dadas duas funções de distribuição acumuladas. O teorema ainda garante que existe uma única cópula $C(u, v)$ que leva as distribuições acumuladas $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ à verdadeira distribuição $F_{XY}(x, y)$.

2.2.2 Estimação

Para a estimação das cópulas será utilizado o método de máxima verossimilhança, sendo necessária a obtenção da função densidade de probabilidade a ser utilizada na maximização. Para encontrar a função densidade de probabilidade multivariada $f(x, y)$, deriva-se a função de distribuição acumulada em relação as suas variáveis:

$$\begin{aligned}
f_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial x \partial y} \\
&= \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_x(x) \partial F_y(y)} \\
&= f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot c(F_X(x), F_Y(y)),
\end{aligned}$$

em que $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$. Encontrado o formato da função densidade de probabilidade podemos escrever a função de verossimilhança. Considerando uma amostra (\mathbf{x}, \mathbf{y}) de tamanho n em que $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ e $\theta = \{\theta_x, \theta_y, \theta_c\}$ os parâmetros referentes a f_x , f_y e c , respectivamente, a função de verossimilhança a ser maximizada é

$$\mathcal{L}(\theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta_x) \cdot f_Y(y_i; \theta_y) \cdot c(F_X(x_i), F_Y(y_i); \theta_c), \quad (2.5)$$

aplicando logaritmo, a função log-verossimilhança tem a forma

$$\ell(\theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \log [f_X(x_i; \theta_x) \cdot f_Y(y_i; \theta_y) \cdot c(F_X(x_i), F_Y(y_i); \theta_c)],$$

que pode ser escrita como

$$\ell(\theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \log f_X(x_i; \theta_x) + \sum_{i=1}^n \ln f_Y(y_i; \theta_y) + \sum_{i=1}^n \ln c(F_X(x_i), F_Y(y_i); \theta_c), \quad (2.6)$$

por fim, o estimador de máxima verossimilhança é tal que

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta} \ell(\theta|\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.7)$$

A Equação (2.6) pode ser maximizada de duas maneiras. A primeira, de forma completa, encontrando-se conjuntamente θ_x , θ_y e θ_c que maximizam a função de verossimilhança.

No entanto, a maximização conjunta pode demandar muito custo computacional. Joe e Xu (1996) sugerem que a estimação seja feita em dois passos, o que chamam de método IFM (Inferência para as Marginais).

Neste método, primeiramente realiza-se a inferência para as marginais, utilizando-se esta inferência para estimar os parâmetros da cópula. Vale lembrar que θ_x e θ_y também influenciam os valores de θ_c , o que torna as inferências realizadas pelo método IFM menos precisas que a estimativa conjunta. Porém, Joe e Xu (1996) mostram que o método IFM, assim como o método exato, é assintoticamente normal e consistente.

Feita a modelagem das marginais, o procedimento seguinte é calcular a função de distribuição acumulada suposta nos valores dos resíduos obtendo $u_i = F_X(x_i)$ e $v_i = F_Y(y_i)$. É possível mostrar que u e v possuem distribuição uniforme, porém, como uma avaliação adicional da modelagem univariada das séries, verifica-se se $u \sim U[0, 1]$ e $v \sim U[0, 1]$ por meio de teste para aderência de distribuições. Neste trabalho será utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov, proposto por Kolmogorov (1933).

Estima-se então o parâmetro θ por máxima verossimilhança. A função de verossimilhança tem o formato:

$$\mathcal{L}(\theta_c | \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta), \quad (2.8)$$

aplicando logaritmo, a função log-verossimilhança da cópula tem a forma

$$\ell(\theta_c | \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \ln [c(u_i, v_i; \theta)],$$

em que o estimador de máxima verossimilhança é tal que

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta} \ell(\theta_c | \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.9)$$

2.3 Cópulas Dinâmicas

A utilização de cópulas permite uma modelagem mais cuidadosa e precisa da dependência entre variáveis aleatórias. Porém, as definições até aqui apresentadas supõem que os parâmetros das cópulas θ_c são constantes ao longo do tempo, o que não é objeto de estudo deste trabalho. Assim como as volatilidades dos retornos dos ativos variam temporalmente, a dependência entre eles também pode variar. Assim, é necessário apresentar a definição de cópulas condicionais, a qual incorpora a possibilidade de os parâmetros

da cópula variarem ao longo do tempo, condicionalmente às informações passadas. Uma extensa revisão sobre cópulas dinâmicas pode ser encontrada em Cherubini *et al.* (2011). O Teorema a seguir generaliza o Teorema de Sklar para o caso condicional:

Teorema 2.2 (Patton, 2006). *Seja $F_{X|Z}(\cdot|z)$ a distribuição condicional de X dado $Z = z$, $F_{Y|Z}(\cdot|z)$ a distribuição condicional de Y dado $Z = z$, $F_{XY|Z}(\cdot, \cdot|z)$ a distribuição condicional conjunta de (X, Y) dado $Z = z$ e \mathcal{Z} o suporte de Z . Então, se $F_{X|Z}(\cdot|z)$ e $F_{Y|Z}(\cdot|z)$ são contínuas, existe uma única cópula condicional $C(\cdot|z)$ tal que*

$$F_{XY|Z}(x, y|z) = C(F_{X|Z}(x|z), F_{Y|Z}(y|z)|z). \quad (2.10)$$

Reciprocamente, se $F_{X|Z}(\cdot|z)$ é a distribuição condicional de X dado $Z = z$, $F_{Y|Z}(\cdot|z)$ a distribuição condicional de Y dado $Z = z$ e $C(\cdot|z)$ uma família de cópulas condicionais mensuráveis em z , então a função $F_{XY|Z}(\cdot, \cdot|z)$ definida pela Equação (2.12) é uma função de distribuição condicional bivariada com marginais condicionais $F_{X|Z}(\cdot|z)$ e $F_{Y|Z}(\cdot|z)$.

É importante ressaltar que, para que o Teorema seja válido, o conjunto de informações que condiciona cada uma das distribuições marginais deve ser o mesmo. Patton (2006) salienta a recíproca do teorema, permitindo unir distribuições contínuas de qualquer tipo, com qualquer cópula, obtendo uma distribuição conjunta válida das duas variáveis. Sugere ainda uma equação paramétrica para a dinâmica dos parâmetros das cópulas, que será apresentada a seguir.

2.3.1 Dinâmica Paramétrica

A abordagem paramétrica para a dinâmica das cópulas proposta por Patton (2006) possui o seguinte formato:

$$\theta_t = \Lambda \left(\omega + \beta\theta_{t-1} + \alpha \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |u_{t-i} - v_{t-i}| \right), \quad (2.11)$$

em que Λ é uma função que garante que θ_t esteja no domínio do parâmetro da cópula escolhida. A estimação é realizada por máxima verossimilhança, como mostrado na Equação (2.6), pode-se estimar o parâmetro das copulas separadamente dos parâmetros das

marginais. A função log-verossimilhança a ser maximizada é

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{MLE} &= \max_{\omega, \beta, \alpha} \ell(\theta | \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \ell(\theta | \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{t=1}^T \log [c(u_t, v_t; \theta_t)].\end{aligned}\quad (2.12)$$

Como salienta o autor, a estrutura proposta para a dinâmica do parâmetro de dependência se parece com uma estrutura ARMA(1,10) restrita, por ser composta de um coeficiente autorregressivo e a média do módulo das diferenças dos últimos 10 valores das distribuições acumuladas, que deve capturar alguma possível longa dependência entre as variáveis.

2.3.2 Dinâmica Semiparamétrica

O modelo de cópulas com dinâmica semiparamétrica definido por Hafner e Reznikova (2010), apresentado a seguir, considera que a cópula é caracterizada por um parâmetro θ que varia ao longo do tempo de forma não-paramétrica. Este pode ser representado por uma função $\theta(t/T)$ no tempo. O modelo ainda conta com duas suposições que garantem que o processo é localmente estacionário.

Considere um processo estocástico bivariado (X_t, Y_t) utilizando o conceito de cópulas para definir a distribuição conjunta $F_{X_t Y_t}$. Pelo Teorema 2.1, sabe-se que existe uma única cópula tal que

$$F_{X_t Y_t}(X_t, Y_t) = C_t(F_{X_t}(X_t), F_{Y_t}(Y_t)).\quad (2.13)$$

Considere agora as seguintes suposições:

Suposição 1. *Os processos $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ são covariância-estacionários.*

Suposição 2. *A função $\theta(\cdot)$ é no mínimo duas vezes diferenciável em $[0, 1]$*

As duas suposições garantem que a função $\theta(t/T)$ é comportada o suficiente para assegurar o processo de estimação apresentado a seguir.

A estimação sugerida por Hafner e Reznikova (2010) é realizada em dois estágios, como caracterizada na Equação (2.6). Pode-se escrever a função log-verossimilhança como

$$\ell(\theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{t=1}^T \log f_{X_t}(x_t; \theta_{x_t}) + \sum_{t=1}^T \log f_{Y_t}(y_t; \theta_{y_t}) + \sum_{t=1}^T \log c(F_{X_t}(x_t), F_{Y_t}(y_t); \theta(t/T)),\quad (2.14)$$

na qual as distribuições marginais são estimadas por um modelo ARMA-GARCH, e os resíduos dos modelos ajustados são utilizados para estimar o parâmetro de dependência da cópula através do método de verossimilhança local.

A estimação por máxima verossimilhança local, proposta por Fan, Farmen e Gijbels (1998) consiste em maximizar em cada instante de tempo uma função de verossimilhança ponderada. A ponderação é realizada pela distância do ponto que está sendo estimado em relação aos outros pontos da amostra. Para tanto, é necessária a adoção de uma função Kernel que define os pesos com que cada observação contribui para a estimação local. Hafner e Reznikova (2010) adotam uma densidade $Normal(0, 1)$ para a realização das estimativas. Porém, entende-se que não deveriam ser utilizadas observações futuras para a estimação de medidas de risco. Portanto, neste trabalho foi proposta como função Kernel a densidade da distribuição $Normal(0, 1)$ para as observações passadas e zero para as observações futuras.

Definindo $u_t = F_{x_t}(x_t)$ e $v_t = F_{y_t}(y_t)$, a função de verossimilhança local tem o formato

$$\ell(\theta; h, \tau) = \sum_{t=1}^T c(u_t, v_t; \theta) K_h(t/T - \tau), \quad (2.15)$$

para $\tau \in [0, 1]$, em que $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$, $K(\cdot)$ é a função Kernel definida anteriormente, h um parâmetro de suavização e $K_h(\cdot) = (1/h)K(\cdot/h)$. O estimador de máxima verossimilhança local da função $\theta(\tau)$ é dado por

$$\hat{\theta}(\tau) = \arg \max_{\theta} \ell(\theta, h, \tau). \quad (2.16)$$

Como na maioria dos estimadores que utilizam funções Kernel, este também é sensível ao parâmetro de calibragem. Valores maiores de h produzirão funções $\theta(t/T)$ mais suaves, enquanto valores pequenos de h produzirão curvas com mais ruído. Hafner e Reznikova (2010) propõem um procedimento para escolhas ótimas para a janela h , que é apresentado a seguir.

2.3.2.1 Seleção da Janela Ótima

Para selecionar uma janela ótima h , necessita-se primeiramente a seleção de uma janela piloto para estimar viés e variância. Fan, Farmen e Gijbels (1998) sugerem a

utilização de um critério chamado ESRC (*Extended Residual Square Criterion*). O ESRC pode ser escrito como.

$$ESRC(\tau; h) = J_T - 2(\tau) s_T(\tau) \{1 + \|K\|^2/nh\} \quad (2.17)$$

em que $J_T(\tau)$ e $s_T(\tau)$ são estimadores de $J(\tau)$ e $s(\tau)$, respectivamente

$$J_T(\tau) = l_t''(\hat{\theta}(\tau))e \quad (2.18)$$

$$s_T(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^T (l_t'(\theta^*(t/T)))^2 K_h(t/T - \tau)}{\sum_{t=1}^T K_h(t/T - \tau)} \quad (2.19)$$

em que $\theta^*(t/T)$ é a função de dependência estimada utilizando um estimador local quadrático e $l_t' = \frac{\partial c(u,v)}{\partial \theta}$. A janela piloto é tal que

$$\hat{h}^* = \arg \min_h \left\{ \int ESRC(x; h) w(x) dx \right\}, \quad (2.20)$$

para alguma função peso w . Com a estimativa fornecida pela janela piloto minimiza-se o erro quadrático médio estimado, dado por $M\hat{S}E(\tau; h) = \hat{b}^2(\tau; h) + \hat{v}(\tau; h)$ em que

$$b(\tau) = \left\{ \frac{\theta''(\tau)}{2} + J(\tau)^{-1} \frac{g(\tau)}{2} \theta'(\tau)^2 \right\} \mu_2(K),$$

$$v(\tau) = J(\tau)^{-2} s(\tau) \|K\|^2,$$

em que $s(\tau) = E[(l_t'(\theta))^2 | t/T = \tau]$, $J(\tau) = E[l_t''(\theta) | t/T = \tau]$ e $g(\tau) = E[l_t'''(\theta) | t/T = \tau]$, $\theta'(\tau)$ e $\theta''(\tau)$ as derivadas extraídas da estimativa utilizando a janela piloto. Por fim, a janela ótima é

$$\hat{h} = \arg \min_h \left\{ \int M\hat{S}E(x; h) w(x) dx \right\}. \quad (2.21)$$

Da minimização do erro quadrático médio para escolha da janela ótima, serão utilizadas as funções estimadas $\hat{b}(\tau)$ e $\hat{v}(\tau)$ para o intervalo de confiança para $\theta(\tau)$

$$\hat{\theta}(\tau) - \hat{B}(\tau, \hat{h}) \pm F_{1-\alpha/2}^{-1} \hat{V}^{1/2}(\tau, \hat{h}), \quad (2.22)$$

em que

$$\hat{B}(\tau, \hat{h}) = \int \hat{b}(\tau, \hat{h}) K_h(x - \tau) dx, \quad (2.23)$$

$$\hat{V}(\tau, \hat{h}) = \int \hat{v}(\tau, \hat{h}) K_h(x - \tau) dx \quad (2.24)$$

são as estimativas pontuais de viés e variância.

3 Aplicação

Neste trabalho foram utilizados dados de séries temporais do mercado financeiro brasileiro obtidos junto à BM&FBOVESPA para a estimação dos modelos apresentados. Após as estimativas, foram computadas as medidas de Risco de Mercado. Foram utilizadas duplas de séries de ativos muitas vezes operados conjuntamente no mercado, com o objetivo de trazer mais sentido às aplicações do trabalho. Verificou-se quais modelos apresentam melhor desempenho nas medidas de Risco de Mercado, o que também foi verificados via testes de hipóteses.

Todas as rotinas de tratamento dos dados, programação e execução dos algoritmos que envolveram a estimação dos modelos de cópulas com dinâmica paramétrica e semi-paramétrica e a organização dos resultados foram realizadas no software *Revolution R*, com apoio dos pacotes *copulas* e *rugarch*, além das rotinas disponibilizadas pelo professor Andrew Patton no seu *website*, que foram traduzidas para linguagem *R*.

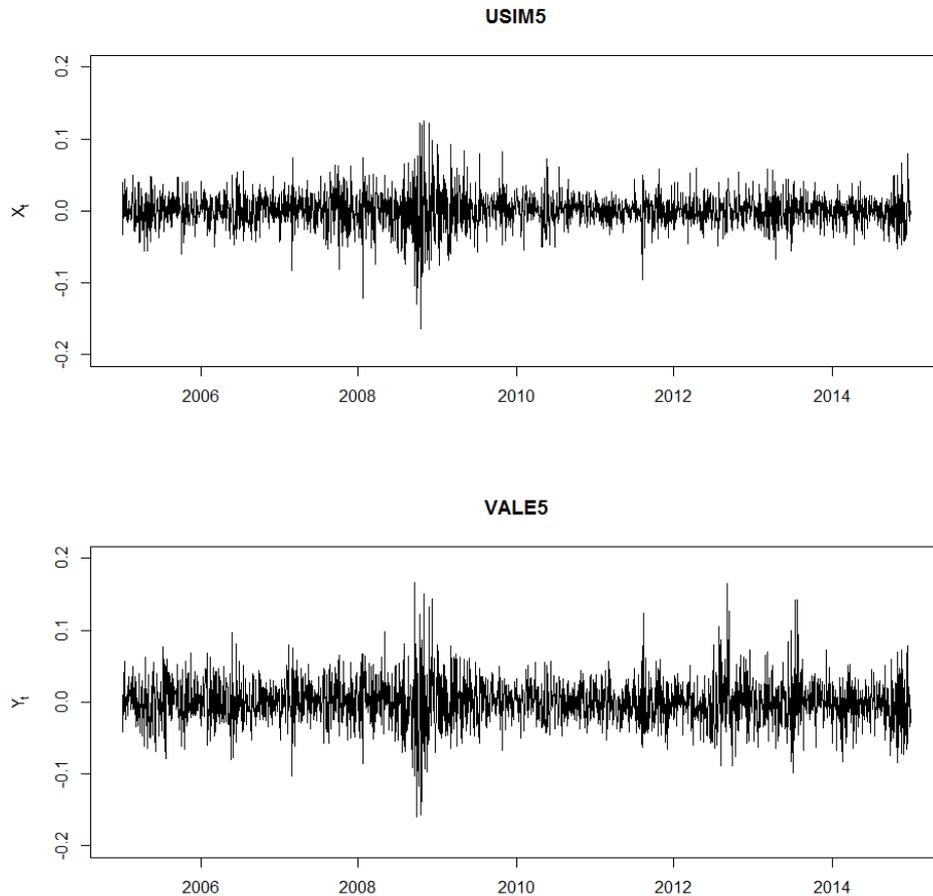
3.1 Descrição dos Dados

Foram escolhidos quatro pares de séries de preço de fechamento de ações do mercado brasileiro para a estimação dos modelos. O primeiro par é formado por ações das empresas Vale S.A. (VALE5) e Usiminas (USIM5), que fazem parte do mesmo setor de siderurgia e metalurgia e, portanto, podem apresentar algum tipo de dependência. O segundo par é formado por ações do setor de serviços bancários, Banco do Brasil (BBAS3) e Bradesco (BBDC3), um banco público e um banco privado, respectivamente. No terceiro par encontram-se ações ordinárias e preferenciais da Petrobras (PETR3 e PETR4), comuns em estratégias de arbitragem. Para o quarto par foram escolhidas duas empresas do setor da indústria da construção, Cyrela (CYRE3) e Grefisa (GFSA3). Na Figura 3.1 encontram-se as séries dos log-retornos do par VALE5-USIM5.

Os dados foram obtidos no período de 03/01/2005 a 30/12/2014, totalizando 2472 observações, equivalentes a 10 anos de informação. A partir das séries temporais escolhidas, as estimações foram feitas considerando as séries de log-retornos de um dia, r_t , das séries temporais escolhidas, definido como

$$Y_t = \log(r_t/r_{t-1}) = \log(r_t) - \log(r_{t-1}). \quad (3.1)$$

Figura 3.1: Séries temporais dos retornos das ações USIM5 e VALE5



Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Para o cálculo das medidas de Risco de Mercado e verificação das excedências de VaR e ES foram utilizadas carteiras comprando os dois ativos com o mesmo peso.

3.2 Estimação

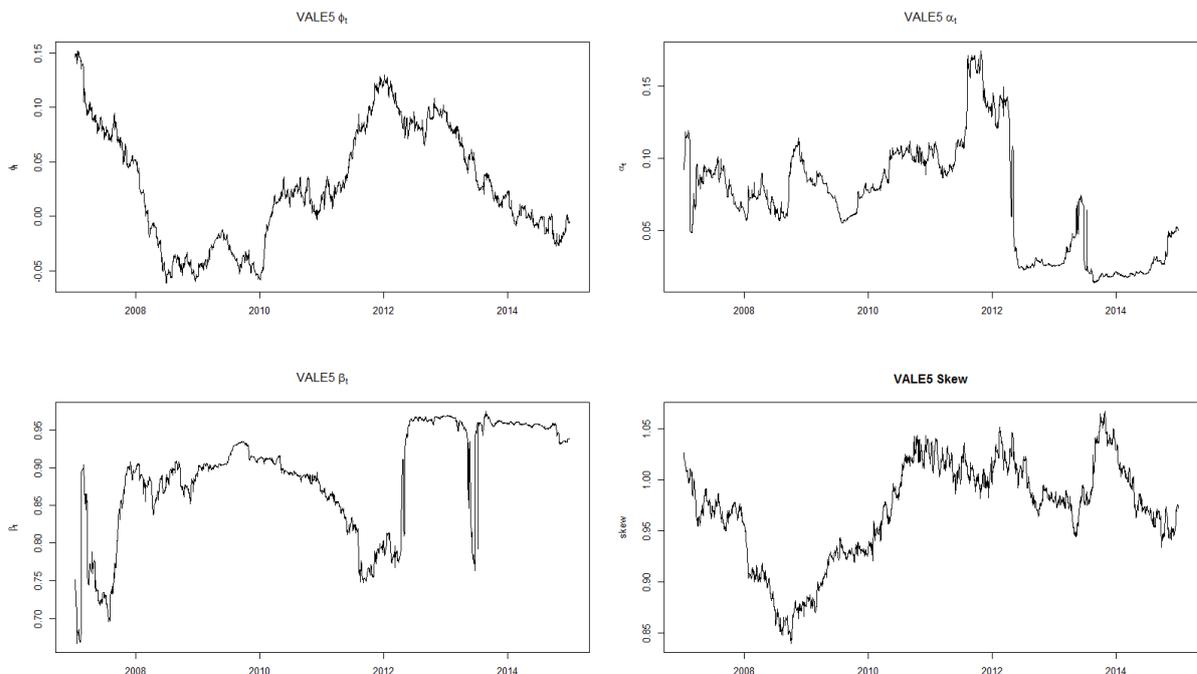
No mercado financeiro é comum a estimação diária dos modelos e previsão do VaR um passo à frente, processo que foi replicado neste trabalho. Portanto, foi fixada uma janela de tempo de 500 observações, totalizando 1973 janelas de estimação. Para cada uma das janelas obtidas, foram realizadas as estimativas das séries individualmente e estimados os modelos de cópulas propostos na Seção 2.3 com os resíduos obtidos das estimativas marginais. Após a estimação das cópulas, foram computadas as medidas de Risco de Mercado apresentadas, utilizando-se simulações.

3.2.1 Estimação das Marginais

Para cada uma das janelas temporais foram estimadas as séries individualmente por meio de modelos ARMA-GARCH, considerando-se distribuição *skew-t* para os erros. Para a definição da estrutura ARMA-GARCH utilizada janela a janela, foi modelada a série inteira, verificando-se qual a estrutura adequada para esta série. Essa estrutura foi utilizada reestimando os parâmetros para cada uma das janelas temporais durante a estimação.

Desta forma foram obtidas séries das estimativas dos parâmetros das estruturas propostas. Na Figura 3.2 encontram-se as estimativas para a série de retornos da Vale S.A., cuja estrutura proposta foi do formato ARMA(1,0)-GARCH(1,1). No gráfico superior esquerdo encontram-se as estimativas para o parâmetro autorregressivo em cada janela de tempo. O gráfico superior direito e o inferior esquerdo mostram as estimativas dos parâmetros para a volatilidade na série, enquanto o gráfico inferior direito exibe a estimativa do parâmetro de assimetria da distribuição t-assimétrica ao longo das janelas.

Figura 3.2: Estimativas dos parâmetros da VALE5



Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

3.2.2 Estimação das Cópulas

Inicialmente o que se deve verificar é se as funções de distribuição acumulada, calculadas nos valores dos resíduos, seguem distribuição uniforme. Como citado, neste trabalho utilizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov para realizar esta verificação, testando a hipótese nula de que as distribuições acumuladas dos resíduos seguem distribuição $U[0, 1]$. Na Tabela 3.1 encontram-se os p-valores dos testes realizados. Nenhum teste rejeita a hipótese nula de que os dados seguem distribuição uniforme, o que nos permite seguir para a modelagem das cópulas.

Tabela 3.1: P-valores do Teste de Kolmogorov-Smirnov para os resíduos levados às suas funções acumuladas

Série	VALE5	USIM5	BBAS3	BBDC3	PETR3	PETR4	CYRE3	GFS3A3
p-valor	0.10	0.16	0.55	0.43	0.35	0.29	0.17	0.19

Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Para a estimação dos modelos de cópulas dinâmicas propostos, primeiramente é necessário escolher qual cópula será utilizada para a estimação dos modelos dinâmicos. Neste trabalho foram propostas quatro cópulas para o ajuste da dependência entre as variáveis: Clayton, Frank, Gumbel e Joe. Para cada um dos pares de séries temporais foram resgatados as distribuições acumuladas dos resíduos e estimado o valor do parâmetro estático para cada uma das cópulas propostas.

Como orientado por Hafner e Reznikova (2010), foi utilizada a máxima verossimilhança de cada uma das estimativas para avaliar qual cópula deveria ser escolhida. A Tabela 3.2 exhibe os valores de máxima verossimilhança das estimativas estáticas para cada uma das cópulas propostas, em negrito a cópula escolhida.

Tabela 3.2: Máxima Verossimilhança das Estimativas Estáticas

	Clayton	Frank	Gumbel	Joe
VALE5 - USIM5	407.25	470.90	452.56	326.59
BBAS3 - BBDC3	446.13	538.39	505.73	369.13
PETR3 - PETR4	2554.74	2886.38	2982.15	2460.80
CYRE3 - GFS3A3	485.67	580.19	534.97	389.67

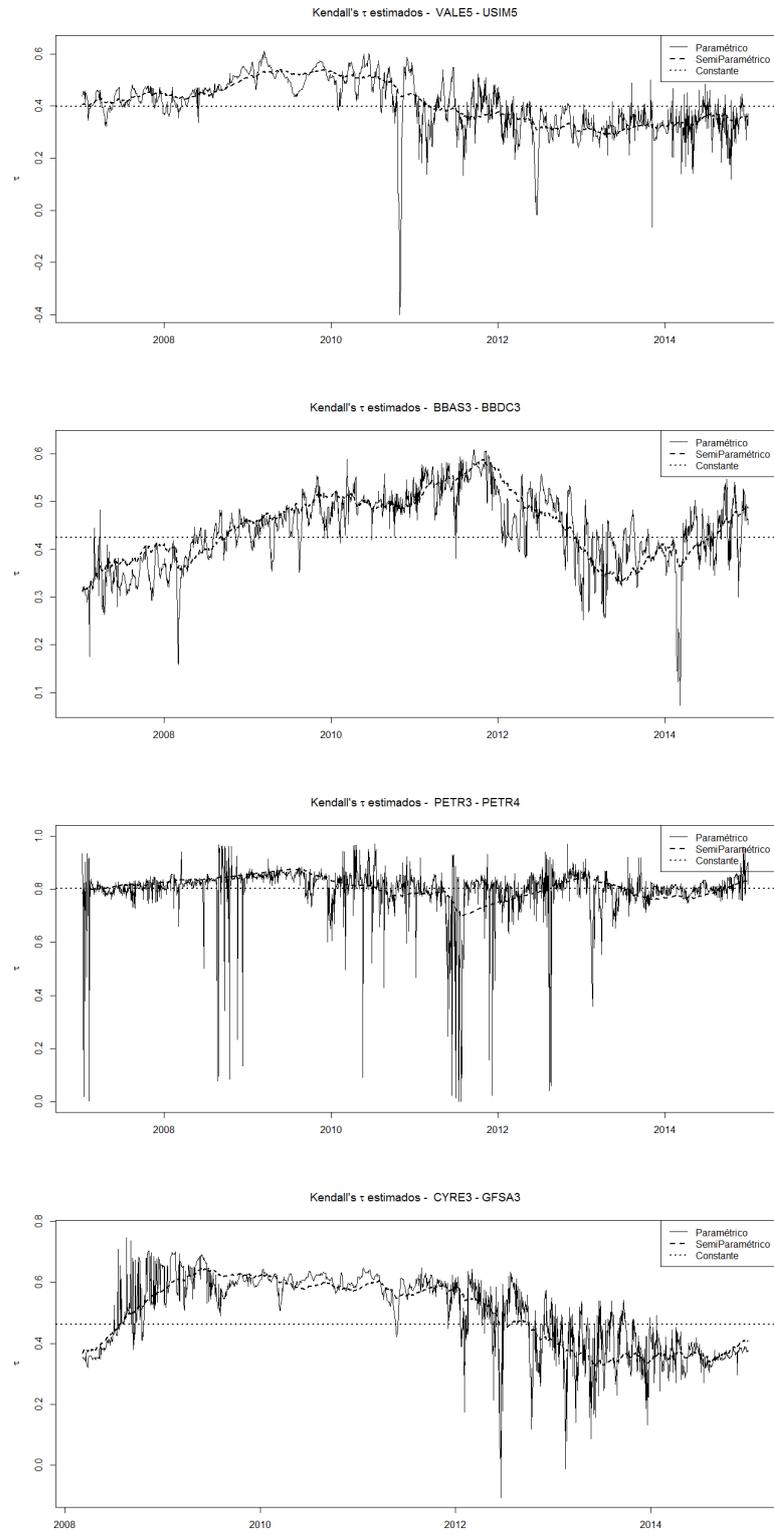
Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Após a determinação da cópula a ser utilizada, foram estimados os modelos de cópula com dinâmica paramétrica e com dinâmica semiparamétrica para cada uma das janelas temporais e recuperado o último valor estimado, que foi utilizado para a estimação das medidas de risco de mercado. A Figura 3.3 apresenta as estimativas do τ de Kendall ao longo do tempo resultantes dos modelos estático, com dinâmica paramétrica e semiparamétrica para os quatro pares de ações propostos.

Nota-se que as estimativas do modelo semiparamétrico estão menos sujeitas a grandes variações do que as estimativas do modelo paramétrico. Por serem mais suaves, as estimativas da abordagem semiparamétrica sugerem melhor a direção da dependência entre as variáveis. Essa exibição menos sinuosa facilita o trabalho dos operadores no mercado financeiro. É importante observar, também, que, conforme esperado, as estimativas dinâmicas situam-se em torno da estimativa estática.

O modelo semiparamétrico poderia apresentar estimativas ainda mais suaves se o Kernel proposto fosse a densidade da distribuição $Normal(0, 1)$. Como com o Kernel assimétrico a observação mais recente é a que possui maior peso, sua entrada na amostra causa um pequeno choque nas estimativas. Com uma função Kernel simétrica, apesar do problema de considerar o futuro, as estimativas são mais suaves, pelo fato de que as novas observações entram com a menor ponderação e vão ganhando peso ao longo da amostra.

É de interesse da estimação de riscos que as últimas observações possuam maior peso nas estimativas, uma vez que é importante que os modelos respondam rapidamente a choques ou mudanças repentinas de regime, o modelo semiparamétrico utilizando Kernel assimétrico contempla esta característica. Em Silva Filho e Ziegelmann (2012) encontra-se uma aplicação onde modelos de cópula com mudança de regime solucionam o problema de possíveis quebras estruturais na dependência entre as variáveis.

Figura 3.3: Kendall's τ estimados

Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

3.2.3 Estimação das Medidas de Risco de Mercado

A estimação das medidas de risco de mercado foi realizada com simulações. Para cada modelo de cópulas e para cada par de séries foram realizados os seguintes passos para o cálculo do *VaR* e do *Expected Shortfall*:

a) para cada instante de tempo foram gerados, utilizando-se as cópulas estimadas, 10000 pares de valores aleatórios, os quais refletem a estrutura de dependência da cópula utilizada;

b) com as estimativas dos modelos univariados, cada um dos valores gerados foi levado à densidade da distribuição t-assimétrica estimada em cada instante de tempo, obtendo-se os resíduos para a realização das previsões;

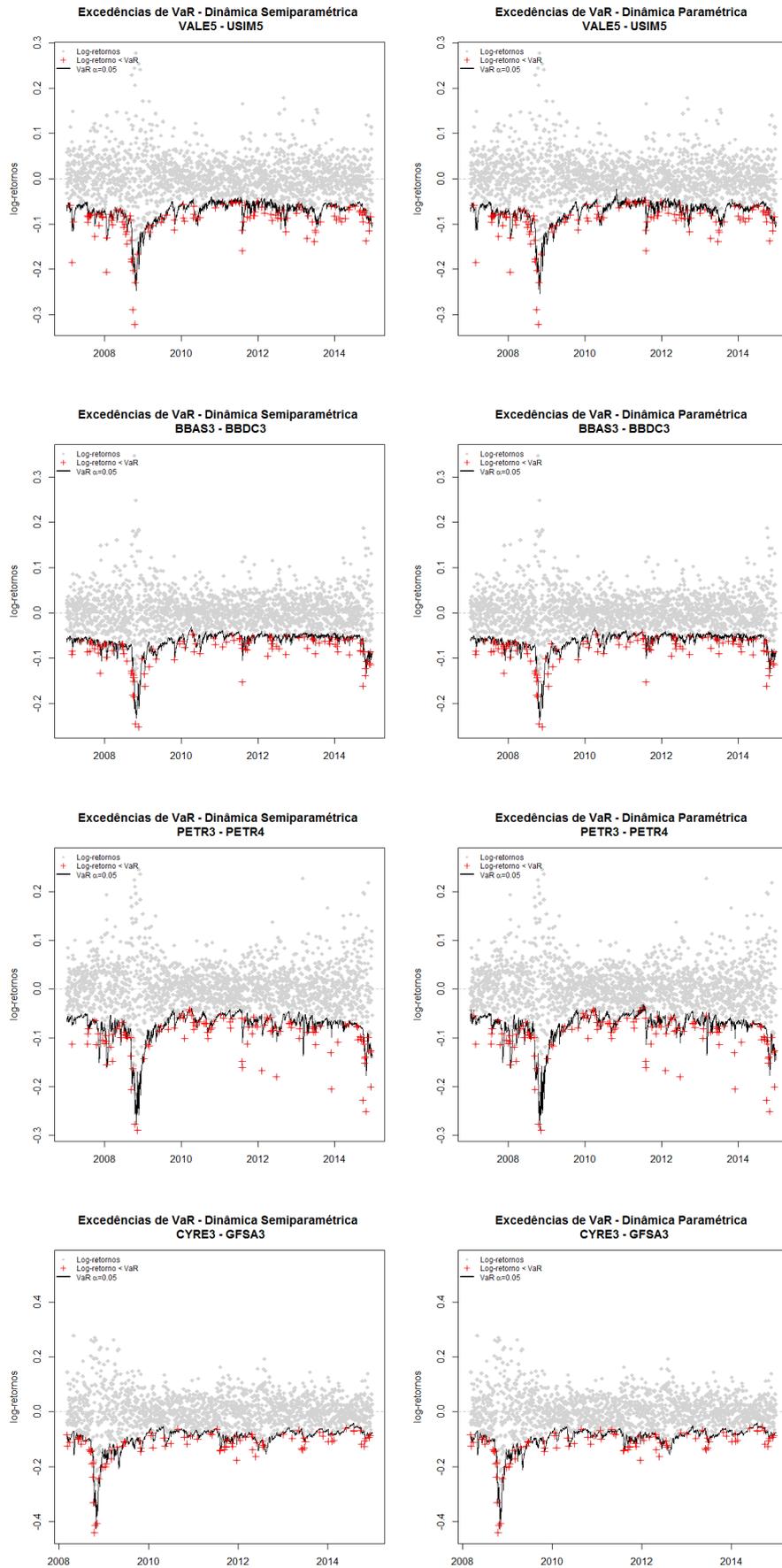
c) foram utilizadas as estruturas ARMA-GARCH estimadas para gerar previsões um passo à frente da dupla de variáveis, sempre considerando os reais valores observados para as variáveis defasadas, formando assim 10000 pares de séries temporais de retornos previstos. Estes pares de séries foram somados, representando uma carteira hipotética com pesos iguais para os dois ativos;

d) em cada instante de tempo foi obtido o *VaR* como o percentil $\alpha\%$ dos 10000 valores gerados. O *Expected Shortfall* foi calculado como a média dos valores inferiores ao *VaR* calculado.

Após obtidas as séries de *VaR* para cada uma das séries, estas foram comparadas com os retornos das carteiras propostas.

A Figura 3.4 mostra que a diferença entre as estimativas de *VaR* dos modelos é sutil. Pode-se notar que algumas das excedências de *VaR* ocorrem muito abaixo dos valores estimados, o que corrobora a utilização de uma distribuição com caudas pesadas para a modelagem das séries univariadas. A crise financeira do final de 2008 também é evidente no gráfico, podendo-se verificar que as volatilidades e, por consequência, as estimativas de *VaR*, crescem consideravelmente.

Figura 3.4: Excedências de VaR para $\alpha = 0,05$



Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

3.3 Comparação e Testes

Para avaliar se as medidas de *VaR* e *Expected Shortfall* cumpriram o objetivo de estimar as perdas estimadas com $(1 - \alpha)\%$ de confiança e a perda média das excedências de *VaR*, foram utilizados três testes de hipóteses. O primeiro, proposto por Christoffersen, Hahn e Inoue (2001), testa se a quantidade de excedências da série de *VaR* estimada é compatível com a quantidade de excedências esperadas. O segundo teste, proposto por Christoffersen e Pelletier (2004), avalia se o tempo entre as excedências de *VaR* é independente e se estas não estão aglomeradas. O último teste, proposto por McNeil e Frey (2000), verifica se os retornos que excedem o *VaR* descontados do *Expected Shortfall* estimado têm média zero e são independentes. Por último, a fim de comparar a qualidade das medidas para evitar perdas, foi calculada uma função perda proposta por Rivera, Lee e Mishra (2003) que possui o formato

$$Q = P^{-1} \sum_{t=R}^T (\alpha - d_{t+1}^{\alpha})(y_{t-1} - VaR_{t+1}^{\alpha}), \quad (3.2)$$

em que $d_{t+1}^{\alpha} = 1(y_{t-1} < VaR_{t+1}^{\alpha})$. Esta função perda aplica uma penalidade com peso $(1 - \alpha)$ quando $y_{t-1} < VaR_{t+1}^{\alpha}$.

Todos os testes foram aplicados considerando-se seis níveis de confiança: 1%, 2%, 3%, 4%, 5% e 10%. Para cada nível de confiança foram realizados os procedimentos especificados na Sessão 3.4 para os quatro pares de séries propostos.

Tabela 3.3: Testes de Christoffersen

VALE5 - USIM5	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	34	54	71	92	114	217
p-valor	0.00*	0.03*	0.13	0.14	0.12	0.15
Paramétrico	34	55	72	97	115	217
p-valor	0.00*	0.02*	0.10	0.04*	0.10	0.15
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
BBAS3 - BBDC3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	30	53	75	91	107	187
p-valor	0.03*	0.04*	0.04*	0.18	0.39	0.44
Paramétrico	31	51	73	89	110	187
p-valor	0.02*	0.08*	0.08*	0.26	0.25	0.44
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
PETR3 - PETR4	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	23	44	68	91	116	229
p-valor	0.47	0.47	0.26	0.18	0.08	0.02*
Paramétrico	25	48	72	97	118	228
p-valor	0.25	0.18	0.10	0.04*	0.05	0.02*
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
CYRE3 - GFSA3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	31	45	60	74	90	188
p-valor	0.00*	0.06	0.20	0.43	0.54	0.13
Paramétrico	31	45	59	78	91	186
p-valor	0.00*	0.06	0.25	0.21	0.47	0.17
Excedências Esperadas	16	33	50	67	84	169

Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

A Tabela 3.3 mostra os resultados do Teste de Christoffersen tanto para o modelo com a dinâmica paramétrica quanto para o modelo com a dinâmica semiparamétrica. Ocorrem pequenas diferenças nas excedências de VaR das duas abordagens. Para os ajustes dos modelos considerando as séries VALE5-USIM5, BBAS3-BBDC3 os modelos apresentaram dificuldades nas estimativas para os três níveis mais baixos de confiança, assim como no par CYRE3-GFSA3, que rejeita a hipótese nula apenas quando $\alpha = 1\%$. Para o ajuste do modelo considerando as séries PETR3-PETR4, o resultado do teste indica que não há evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula do número correto de estimativas exceto para $\alpha = 10\%$, essa diferença de comportamento pode dever-se ao fato deste par ser o único que utiliza-se cópula Gumbel ao invés de Frank.

O fato de o número de excedências de VaR dos modelos ser maior do que o espe-

rado, confirmado pela rejeição da hipótese nula dos testes em alguns níveis de confiança, caracteriza um problema para a análise de risco de mercado, já que esses resultados significam que os modelos estão subestimando o risco das carteiras. De fato, há um *trade-off* resultado-risco em sub ou superestimar o risco dos ativos. Porém, em uma abordagem em que a maior preocupação é o risco, um excesso de retornos menores que o *VaR* é preferível a um número baixo de excedências.

O resultado do teste proposto por Christoffersen e Pelletier (2004) indica, baseado nos valores das séries, que não há evidências suficientes para rejeitar a hipótese nula de independência nos intervalos entre excessos de *VaR* para as duas abordagens em todos os pares de séries e níveis de confiança. A ausência de *clusters* de excedência, indicada pelo teste, mostra que os modelos ajustaram-se rapidamente às mudanças de volatilidade que aconteceram nos 10 anos da amostra, propriedade muito importante para modelos de risco de mercado.

Tabela 3.4: Testes de McNeil e Frey

VALE5 - USIM5	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	34	54	71	92	114	217
p-valor	0.14	0.05	0.02*	0.04*	0.04*	0.03*
Paramétrico	34	54	71	92	114	217
p-valor	0.15	0.04*	0.02*	0.03*	0.04*	0.02*
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
BBAS3-BBDC3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	30	53	75	91	107	187
p-valor	0.14	0.17	0.09	0.06	0.02*	0.00*
Paramétrico	30	53	75	91	107	187
p-valor	0.17	0.15	0.09	0.04*	0.02*	0.00*
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
PETR3 - PETR4	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	23	44	68	91	116	229
p-valor	0.14	0.19	0.25	0.38	0.36	0.44
Paramétrico	23	44	68	91	116	229
p-valor	0.20	0.17	0.20	0.33	0.36	0.38
Excedências Esperadas	19	39	59	78	98	197
CYRE3 - GFSA3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	31	45	60	74	90	188
p-valor	0.01*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.06
Paramétrico	31	45	60	74	90	188
p-valor	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.00*	0.08
Excedências Esperadas	16	33	50	67	84	169

Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Os resultados do Teste de McNeil e Frey, na Tabela 3.4, alinham-se com os resultados encontrados no Teste de Christoffersen, mostrando que os modelos subestimam o risco das carteiras. Porém, enquanto no teste de excedências de VaR os modelos falham para os níveis de confiança mais baixos, rejeitando a hipótese nula de os retornos excedem o VaR $\alpha\%$ das vezes, o Teste de McNeil e Frey mostra que o *Expected Shortfall* está melhor estimado para os níveis mais baixos de confiança do que para os níveis mais altos.

Tabela 3.5: Função Perda - *VaR*

VALE5 - USIM5	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	276.94	486.65	666.78	828.62	985.16	1654.28
Paramétrico	280.22	488.17	666.15	832.77	988.42	1654.60
BBAS3 - BBDC3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	238.53	418.89	579.61	725.27	862.69	1432.65
Paramétrico	237.69	419.17	578.95	726.00	863.10	1428.92
PETR3 - PETR4	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	308.28	525.06	714.81	890.64	1056.05	1743.98
Paramétrico	308.00	527.96	717.51	891.89	1056.73	1746.66
CYRE3 - GFSA3	$\alpha = .01$	$\alpha = .02$	$\alpha = .03$	$\alpha = .04$	$\alpha = .05$	$\alpha = .10$
Semiparamétrico	292.32	517.84	712.79	892.71	1062.56	1793.97
Paramétrico	297.18	519.89	712.27	896.16	1063.33	1794.89

Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Finalizando as comparações, na Tabela 3.5, as funções perdas mostram que os modelos apresentam resultados muito parecidos. O modelo com dinâmica semiparamétrica apresenta valores consistentemente menores que os do modelo com dinâmica paramétrica, o que pode indicar um melhor desempenho nas medidas de risco de mercado. Os números ligeiramente menores de excedências de *VaR* no Teste de Christoffersen (Tabela 3.3) já mostravam uma leve vantagem do modelo com dinâmica semiparamétrica, que também pode ser vista ao se comparar as funções perda.

4 Considerações Finais

Neste trabalho foram utilizadas duas abordagens para analisar a dependência de séries de retornos de ações do mercado financeiro brasileiro com a utilização de cópulas.

Para quatro pares de retornos de séries de preços propostos, foram estimados os modelos de dinâmica paramétrica sugerido por Patton (2006) e de dinâmica semiparamétrica proposto por Hafner e Reznikova (2010). Após a estimativa dos modelos, foram estimadas medidas de risco de mercado para comparação dos dois métodos.

Foi realizada uma modificação no modelo semiparamétrico: a adoção de uma função Kernel assimétrica, com o objetivo de não se utilizar observações futuras para a mensuração do risco de mercado.

O modelo com dinâmica semiparamétrica produz estimativas no mínimo tão boas quanto as da abordagem paramétrica, apresentando leve vantagem nas comparações propostas, mostrando tanto nos testes quanto nas funções perda que esta tende a subestimar menos o risco de mercado das carteiras do que a abordagem com dinâmica paramétrica.

Além disso, a dinâmica semiparamétrica gera estimativas mais suaves para a dependência das variáveis, apresentando menor incerteza quanto a sua direção e comportamento, o que facilita o trabalho de operadores do mercado financeiro que necessitam de clareza e segurança para a realização de operações. As estimativas do modelo paramétrico tenderam a variar muito, em movimentos que não mostraram naturalidade no processo dinâmico da dependência das variáveis. A ausência de parâmetros e da imposição da forma funcional da dinâmica de dependência do modelo semiparamétrico também são vantagens da modelagem semiparamétrica.

Como sugestão de estudos futuros, recomenda-se o aumento da dimensão dos modelos, verificando se a vantagem da modelagem semiparamétrica mantém-se para um número maior de variáveis. Aplicações para cópulas com mais de duas variáveis que podem ser adaptadas para a modelagem com dinâmica semiparamétrica são encontradas em Tofoli e Ziegelmann (2013). Outras formas paramétricas para o modelo de dinâmica paramétrica também podem ser testadas, adicionando-se mais parâmetros autorregressivos ou variando-se a quantidade de observações passadas para o parâmetro de média móvel.

Em relação aos resultados, as metodologias poderiam ser comparadas em modelos de seleção de carteiras, a fim de verificar qual realiza melhor o trabalho de minimizar o risco, dado um vetor de retornos previstos.

Referências

- ALEXANDER, C. **Market Risk Analysis: Value-at-risk models**. Chichester: John Wiley, 2008.
- ARTZNER, P. et al. Coherent Measures of Risk. **Mathematical Finance**, Oxford, v. 9, p. 203-228, 1999. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1467-9965.00068>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Circular n. 3634 de 4 de março de 2013**. Estabelece os procedimentos para o cálculo da parcela dos ativos ponderados pelo risco (RWA) referente às exposições sujeitas à variação de taxas de juros prefixadas denominadas em real cujo requerimento de capital é calculado mediante abordagem padronizada (RWA-JUR1), de que trata a Resolução nº 4.193, de 1º de março de 2013. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/busca/downloadNormativo.asp?arquivo=/Lists/Normativos/Attachments/49003/Circ_3634_v1_O.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- CHERUBINI, U. et al. **Dynamic copula methods in finance**. Chichester: John Wiley, 2011.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula methods in finance**. Chichester: John Wiley, 2004.
- CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F. X. Financial Asset Returns, Direction-of-Change Forecasting, and Volatility Dynamics. **Management Science**, Providence, v. 52, n. 8, p. 1273-1287, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1060.052>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- CHRISTOFFERSEN, P.; HAHN, J.; INOUE, A. Testing and comparing Value-at-Risk measures. **Journal of Empirical Finance**, Amsterdam, v. 8, n. 3, p. 325-342, 2001. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0927-5398\(01\)00025-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0927-5398(01)00025-1)>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- CHRISTOFFERSEN, P.; PELLETIER, D. Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach. **Journal of Financial Econometrics**, Cary, v. 2, n. 1, p. 84-108, 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/jjfinec/nbh004>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- FAN, J.; FARMEN, M.; GIJBELS, I. Local Maximum likelihood estimation and inference. **Journal of the Royal Statistical Society: Serie B**, Oxford, v. 60, n. 3, p. 591-608, 1998. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/1467-9868.00142>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- GONZÁLES-RIVERA, G.; LEE, T.; MISHRA, S. Forecasting volatility: A reality check based on option pricing utility function, value-at-risk, and predictive likelihood. **International Journal of Forecasting**, Chichester, v. 20, n.4, p. 629-654, 2004. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijforecast.2003.10.003>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- GHALANOS, A. **Rugarch**: Univariate GARCH models. R package, 2015. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>>. Acesso em: 28 mar. 2016.
- HAFNER, C.M.; REZNIKOVA, O. Efficient Estimation of a semiparametric dynamic

copula model. **Computational Statistics & Data Analysis**, Amsterdam, v. 54, n. 11, p. 2609-2627, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2010.01.013>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

HOFERT, M. et al. **copula**: Multivariate Dependence with Copulas. R package, 2015. Disponível em: <<https://cran.r-project.org/web/packages/copula/copula.pdf>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

JOE, H.; XU, J.J. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Columbia: University of British Columbia, Department of Statistics, 1996. (Technical Report, 166). Disponível em: <<https://open.library.ubc.ca/media/stream/pdf/52383/1.0225985/4>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

MCNAIL, A. J.; FREY, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. **Journal of Empirical Finance**, Amsterdam, v. 7, n. 3-4, p. 271-300, 2000. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0927-5398\(00\)00012-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8)>. Acesso em: 28 mar. 2016.

NELSEN, R. B. **An Introduction to Copulas**. New York: Springer, 2007.

OLIVEIRA, E. P. **Medidas Coerentes de Risco**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: <http://wwwimpa.br/opencms/pt/ensino/downloads/dissertacoes_de_mestrado/dissertacoes_2009/Elsio_Paiva_Oliveira.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2016.

PATTON, A. J., Modelling asymmetric exchange rate dependence. **International Economic Review**, Philadelphia, v. 47, n. 2, p. 527-556, 2006. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1468-2354.2006.00387.x>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

SILVA FILHO, O. C.; ZIEGELMANN, F. A. DUEKER, M. Modeling Dependence Dynamics through Copulas with Regime Switching. **Insurance: mathematics & economics**, Amsterdam, v. 50, p. 346-356, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.insmathco.2012.01.001>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

SILVA FILHO, O. C.; ZIEGELMANN, F. A. Assessing some stylized facts about financial market indexes: a Markov copula approach. **Journal of Economic Studies**, Aberdeen, v. 41, n. 2, p. 253-271, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1108/JES-06-2012-0080>>. Acesso em: 28 mar. 2016.

TOFOLI, P. V.; ZIEGELMANN, F. A. Dynamic D-Vine Copula Model With Applications to Value-at-Risk. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL AND FINANCIAL ECONOMETRICS, 7, 2013, London, **Proceedings...** . London: CFE, 2013. Disponível em: <https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=sbe35&paper_id=57>. Acesso em: 28 mar. 2016.

Apêndice A - Medidas de Associação

Como as inferências sobre as marginais são feitas separadamente, o principal papel das Cópulas é modelar a forma com que as variáveis se relacionam. Portanto é conveniente definirmos algumas medidas de associação, ou seja, métricas que procuram exibir como as variáveis respondem umas às outras².

Correlação Linear

Sejam X e Y um par de variáveis aleatórias com média e variância finitas, seu coeficiente de correlação ρ_{XY} é:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}.$$

A correlação linear, que pode tomar valores no intervalo $[-1, 1]$, mede a força e a direção do relacionamento linear de duas variáveis aleatórias. Um dos problemas desta medida é que apenas capta relações lineares entre as variáveis. Por exemplo, no caso de $Y = X^3$, a correlação linear é menor que 1 enquanto a variável Y depende única e exclusivamente do valor de X . Outro ponto é que supõe que a dependência é a mesma em qualquer região do domínio das variáveis, o que não se verifica nas séries do mercado financeiro, onde observamos que um valor extremo arrasta os outros mais do que um valor em torno da média.

Para contornar esses problemas definiremos outras medidas de associação que procuram contorná-los, captando não-linearidades e dependências locais.

Kendall's τ

O coeficiente τ de Kendall, proposto por Kendall (1938) é uma das medidas alternativas à correlação linear. Podemos defini-lo como:

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u, z) dC(u, z) - 1.$$

Esta medida indica a diferença entre a probabilidade de concordância e discordância de duas variáveis aleatórias. Dados dois vetores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , os vetores são

²A partir daqui trataremos as variáveis aleatórias sempre no caso contínuo

concordantes se $x_1 > x_2$ e $y_1 > y_2$ ou $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$, caso contrário estes vetores são discordantes. Em termos de probabilidades, podemos expressá-la como:

$$\tau = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0).$$

Para o caso amostral, dada uma amostra de pares (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , o estimador chamado Kendall's τ amostral é

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} A_{ij},$$

em que

$$A_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0 \\ -1 & \text{se } (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \end{cases}.$$

Note que essa medida, no caso citado anteriormente, $Y = X^3$, acusaria associação perfeita entre as duas variáveis, captando a não-linearidade da relação entre elas.

Spearman's ρ

Outra medida que procura descobrir se quando uma variável cresce, a outra acompanha o crescimento é a proposta por Spearman (1904). Essa medida ainda verifica se as variáveis crescem de maneira ordenada. No contexto de cópulas, o ρ de Spearman é definido como:

$$\rho_S = 12 \iint_{I^2} [C(u, v) - uv] dudv.$$

O estimador amostral dá uma intuição do que significa a medida. Ordenando os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} e definindo $R_i = \text{Posição}(x_i)$ e $S_i = \text{Posição}(y_i)$, o estimador amostral para ρ_S é:

$$\hat{\rho}_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Na fórmula percebe-se que quanto mais as posições dos vetores ordenados se parecem, maior o valor de ρ_S .