

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Dissertação de mestrado

MODELAGEM DOS TEMPOS DE FALHAS AO
LONGO DO CALENDÁRIO

Mestranda:
LIANE WERNER

Orientador:
JOSÉ LUIS DUARTE RIBEIRO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção como requisito parcial à obtenção do título
de Mestre em Engenharia de Produção

Área de concentração: Engenharia de Qualidade

Porto Alegre, junho de 1996.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação a meu filho amado, *Cristiano Werner Araujo*, pois mesmo na sua doce infância, teve paciência e compreensão para que o meu “tema” se concretizasse.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS, por Ele conceder-me saúde e capacidade para chegar no mestrado, por dar-me forças para concluir essa dissertação e por ter me cercado de pessoas prestativas e atenciosas ao longo desse curso.

Sou grata ao meu orientador Prof. José Luis Duarte Ribeiro, que com sua paciência e suas grandiosas contribuições impulsionaram a elaboração e conclusão da dissertação.

Agradeço a minha mãe, Eda Werner, que deu seu apoio me substituindo em muitas situações nos cuidados à meu filho Cristiano, possibilitando assim, que essa fosse concluída.

Agradeço também a meu filho, Cristiano Werner Araujo, que mesmo sem entender, soube compreender e aceitar o tempo que deixei de dedicar a ele, para realizar essa tarefa.

Aos professores integrantes da Banca, agradeço por suas contribuições e correções que tornam esse trabalho mais rico. Em especial, a Prof. Sara Carmona, que me auxiliou para que parte da dissertação fosse elaborada.

Agradeço aos Professores do Programa de Pós-Graduação de Engenharia de Produção que participaram na minha formação como mestre.

Por fim agradeço aos colegas do curso pelos momentos agradáveis e de trabalho árduo que dividimos, especialmente as colegas e amigas Márcia Echeveste e Carla Ten Caten.

SUMÁRIO

Sumário.....	iv
Lista de figuras.....	vii
Lista de tabelas.....	ix
Resumo.....	x
Abstract	xi
Capítulo 1-Introdução.....	01
1.1. Comentários iniciais.....	01
1.2. Tema, objetivos e justificativa.....	03
1.3. Método.....	05
1.4. Estrutura.....	06
1.5. Limitações do trabalho.....	07
Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica.....	09
2.1. Garantia.....	09
2.2. Distribuição de Probabilidade de uma v.a. contínua.....	12
2.3. Medidas de confiabilidade.....	13
2.4. Distribuição de Weibull.....	15
2.4.1. Caso particular: Distribuição Exponencial.....	18
2.5. Simulação de Monte Carlo.....	19
2.6. Distribuição Binomial.....	25
2.6.1 Aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal.....	27
2.7. Intervalo de Confiança para uma proporção.....	28
2.8. Distribuições bidimensionais.....	29
2.9. Distribuições de somas e quocientes.....	30
2.9.1. Distribuições de somas.....	31
2.9.2. Distribuições de quocientes.....	34

Capítulo 3 - Modelagem dos tempos de falha ao longo calendário.....	40
3.1. Apresentação do problema.....	40
3.2. Modelagem via simulação de Monte Carlo.....	41
3.2.1. Modelagem via simulação de Monte Carlo com um grupo de clientes.....	42
3.2.2. Modelagem via simulação de Monte Carlo com vários grupos de clientes.....	46
3.3. Modelagem via método de análise matemática fechada....	53
 Cap4 - Estudos de casos.....	 62
4.1. Estudo de caso prático para um grupo de clientes via simulação de Monte Carlo.....	 62
4.1.1. Apresentação das informações.....	63
4.1.2. Modelagem matemática.....	65
4.1.3. Distribuições do tempo de utilização dos produtos pelos clientes e o intervalo de tempo desde a fabricação até a venda.....	 65
4.1.4. Suavização da distribuição de reclamações mês a mês..	67
4.1.5. Ajuste das reclamações para a obtenção da distribuição do tempo de falha.....	 69
4.1.6. Ajuste das reclamações observadas em 1995.....	70
4.1.7. Estimativas de confiabilidade.....	71
4.1.8. Previsão de reclamações para o futuro.....	72
4.2. Estudo de caso via método de análise matemática	76
4.2.1. Método de análise matemática do exemplo apresentado por Werner, Ribeiro & Vaccaro.....	 76
4.2.2. Método de análise matemática fechada para o estudo do caso prático.....	 81
4.3. Estudo de caso para onde há mais de um grupo de clientes usando a simulação de Monte Carlo.....	 84

Cap5- Considerações Finais.....	87
5.1. Conclusões	87
5.2. Trabalhos Futuros.....	89
Anexo I.....	92
Referências Bibliográficas.....	93

LISTA DE FIGURAS

	pág.
2.1. Fluxograma do processo de garantia.....	10
2.2. Uma função densidade de probabilidade.....	12
2.3. Função densidade de probabilidade e função densidade acumulada.....	13
2.4. Um exemplo de função de confiabilidade.....	14
2.5. Distribuição de Weibull: função densidade de probabilidade, função de confiabilidade e função taxa de risco para diversos valores do parâmetro de forma γ	17
2.6. Fluxograma do método de simulação de Monte Carlo.....	22
2.7. Distribuições para a simulação do sistema de teste e reparo.....	23
2.8. Tempos de processo para 100 simulações do sistema.....	24
2.9. Distribuição binomial com $n = 15$ e $\pi = 0,1$	26
2.10. Região de integração para obter a distribuição das somadas.....	32
2.11. Função densidade de probabilidade de uma exponencial com parâmetro $\lambda=1/\theta$	33
2.12. Distribuição gama $\Gamma(2,\lambda)$, resultado da soma de duas distribuições exponenciais com parâmetro $\lambda=1/\theta$	34
2.13. Região de integração para obter a distribuição dos quocientes.....	35
2.14. Função densidade de probabilidade gama com parâmetros $\alpha_1 = 1,5$ e $\lambda = 2$ ($f_X(x)$) e gama com parâmetros $\alpha_2 = 4$ e $\lambda = 2$ ($f_Y(y)$).....	37
2.15. Distribuição resultante para o comportamento de Y/X	39
3.1. Quebras mês a mês conforme observado na simulação 137.....	44
3.2. Estimativa média e intervalo de confiança de 95% para a proporção de quebras.....	46
3.3. Fluxograma para a modelagem via simulação de Monte Carlo para vários grupos de clientes.....	49

3.4.	Quebras mês a mês conforme observado na simulação.....	51
3.5.	Estimativa e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações, em lotes de 100 unidades do produto.....	52
3.6.	Função resultante do quociente de uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_2 = 1/\theta_2$ por uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_1 = 1/\theta_1$	56
4.1.	Distribuição de probabilidade do tempo de uso para o produto.....	66
4.2.	Distribuição de probabilidade do intervalo de tempo entre a manufatura e a venda.....	67
4.3.	Dados das reclamações e as médias móveis de 7 meses.....	68
4.4.	Resultados da simulação, buscando-se um ajuste ótimo para o período de 1995.....	70
4.5.	Distribuições de Weibull para o padrão da fábrica e a curva ajustada para 1995.....	72
4.6.	Previsão da produção do produto.....	73
4.7.	Tendência da produção do produto.....	73
4.8.	Componentes sazonais da produção do produto.....	74
4.9.	Previsão de ocorrências de reclamações para o produto.....	74
4.10.	Função de confiabilidade do produto.....	75
4.11.	Comparação dos resultados obtidos através de método de análise matemática e método de análise via simulação de Monte Carlo.....	78
4.12.	Método de análise matemática aplicando-se um deslocamento de tempo igual a dois dias.....	79
4.13.	Estimativas das proporções de quebras mês a mês.....	80
4.14.	Estimativa e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em lotes de 100 unidades do produto.....	81
4.15.	Comparação dos resultados obtidos através de método de análise matemática e método de análise via simulação de Monte Carlo.....	83

4.16	Quebras mês a mês conforme observado na simulação.....	85
4.17.	Estimativa e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em lotes de 100 unidades do produto, utilizado por vários grupos de clientes.....	86

LISTA DE TABELAS

2.1. Tempos de teste e reparo de placas de circuito impresso.....	pág. 24
3.1. Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para a modelagem via simulação de Monte Carlo para apenas um grupos de clientes.....	44
3.2. Proporções médias e intervalo de confiança de 95% para as proporções de quebras mês a mês.....	45
3.3. Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para a modelagem via simulação de Monte Carlo com diferentes grupos de clientes.....	50
3.4. Proporções e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em lotes de 100 unidades do produto.....	52
4.1. Apresentação dos dados de assistência técnica.....	64
4.2. Dados das reclamações e as médias móveis correspondentes.....	68
4.3. Parâmetros da distribuição de Weibull, tempos característicos e MTBF estimados para o produto no período de 1995 em comparação com os padrões da fábrica.....	71
4.4. Previsão de ocorrências de reclamações para o produto.....	75
4.5. Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais.....	76
4.6. Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para o caso prático.....	81
4.7. Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para o caso de diferentes grupos de clientes.....	84

RESUMO

Um dos modos de avaliar a confiabilidade de um produto é verificando o comportamento das falhas em testes de uso contínuo. Contudo, essa informação não permite saber em que data a falha ocorrerá. Para resolver esse impasse abordamos na presente dissertação a modelagem dos tempos de falha *ao longo do calendário*. A modelagem desses tempos permite uma melhor administração do sistema de garantia e assistência técnica, além de possibilitar a empresa estimar e monitorar a confiabilidade do produto.

Para proceder com a modelagem, é preciso, inicialmente, conhecer a distribuição de três variáveis: *o tempo de vida do produto*, em horas de uso contínuo; *o tempo de uso do produto*, em horas por dia; e *o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda*, em dias.

Conhecendo o comportamento dessa variáveis duas alternativas de solução são apresentadas: (a) Modelagem via simulação de Monte Carlo e (b) Modelagem através de solução matemática fechada. São discutidos os casos em que há um ou vários grupos de clientes que utilizam o produto.

ABSTRACT

One way to evaluate the reliability of some product is to verify the behavior of the fails in tests of continuous use. Nevertheless, this information doesn't allow to know in what date the fail will occur. To solve this impasse, in the present dissertation we approach the modeling of the fails time *along the calendar*. The modeling of these times allow a better administration of the guarantee's system and technical maintenance, as well as to provide to the company to estimate and monitorize the reliability of the product.

To proceed with the modeling it's necessary, first of all, to know the distribution of three variables, the product lifetime, in hours of continuous use; the time of product's use, in hours per day, and the interval of time between the manufacture and the sale, in days.

Knowing the behavior of these variables, two alternatives of solution are presented: *(a)* modeling through Monte Carlo's simulation and *(b)* modeling through closed mathematical solution. The cases in what there are one or several groups of customers who make use of the product are discussed.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1- Comentários Iniciais

Nos tempos atuais, face as mudanças que vem ocorrendo e a complexidade apresentada pelos equipamentos e produtos, passou a ser vital a produção de equipamentos e instrumentos altamente confiáveis. Como exemplo, podemos citar os equipamentos cirúrgicos utilizados em hospitais, as transmissões feitas via satélite, e a exploração do espaço em sondas ou ônibus espaciais.

A confiabilidade é de fundamental importância e vem nos auxiliar para fazer previsões sobre quando e que equipamentos, peças e instrumentos irão falhar. Sendo assim, é possível uma substituição prévia de peças ou equipamentos para que vidas sejam poupadas em acidentes aéreos, para que missões de pesquisa espaciais não sejam abortadas e nem transmissões de lazer e cultura sejam bruscamente interrompidas.

Devido ao aumento da concorrência e às alterações no mercado consumidor nas últimas décadas, as empresas necessitam gerar esforços cada vez maiores para sobreviverem. A obtenção de prazos e preços competitivos, a flexibilidade produtiva ou ainda o aumento na qualidade dos produtos, são alguns dos modos de sobrevivência diante dos competidores.

Um meio utilizado pelo consumidor para obter um indicativo de qualidade da empresa é se o produto por ela oferecido tem qualidade. Mesmo que, segundo Sandberg (1987) a confiabilidade e a qualidade tem muito em comum e as pessoas pagam para tê-las, a confiabilidade apresenta uma dimensão extra: o tempo.

No caso de eventualmente ocorrer uma falha, o tempo de garantia oferecido e o atendimento do serviço técnico são igualmente tomados como indicativos de qualidade. Para assegurar uma boa imagem frente aos clientes, as empresas procuram aumentar a confiabilidade de seus produtos.

Produtos com níveis altos de confiabilidade possuem maior durabilidade e consequentemente reduzem os encargos no período de garantia. Por outro lado, a falta de confiabilidade gera a insatisfação do cliente, uma vez que as falhas implicam em indisponibilidade do produto e, caso o produto não esteja no período de garantia, pode gerar gastos inesperados com reparo e substituições. Estas situações desagradáveis às quais os consumidores ficam sujeitos na ocorrência da falha podem levar a perda de segmentos significativos de mercado.

Para poder garantir a confiabilidade de um produto, é necessário que a empresa possua um programa de confiabilidade, este programa inclui os procedimentos a serem utilizados na fase de projeto, na fase de manufatura e no pós-venda.

Entretanto um programa de confiabilidade pode ser implementado somente após o entendimento do significado de confiabilidade, e somente compreendendo o que é confiabilidade é que poderemos atingi-la. Segundo Halpern (1978) a confiabilidade está embasada em quatro elementos principais:

- *probabilidade*, demonstrando que confiabilidade pode ser traduzida em termos mensuráveis, através da distribuição das falhas;
 - *desempenho*, que é o conjunto de requisitos de uso que definem uma função a ser executada, de preferência sem falha;
 - *tempo de operação* está vinculado a operar, sem falhas, num período previamente definido;
 - *condições de operação* são as circunstâncias ambientais e operacionais a qual o produto é submetido.
-

Sendo assim defini-se **confiabilidade como a probabilidade de um produto, submetido a condições previamente estabelecidas, desempenhar as funções especificadas no projeto, durante um período de tempo também especificado.**

Para poder estimar ou realizar previsão de confiabilidade de qualquer tipo de produto, segundo Parkinson & Martin (1976) é necessário durante o projeto ter disponíveis informações a priori, para ser possível definir a distribuição de parâmetros do projeto dos componentes, e conseqüentemente, do produto.

Sendo assim, para alcançar uma alta confiabilidade é necessário conhecer o tempo de vida do produto. Essa informação pode ser obtida através de ensaios de laboratório, sejam eles acelerados ou não. Essa informação também pode ser obtida através da análise dos dados de campo, obtidos junto aos clientes. Para analisar as informações proveniente dos clientes, segundo Burgess (1987) a empresa precisa implementar um sistema de registro da confiabilidade, isto é, montar um sistema de coleta de informações tais como: tempo acumulado de operação, número de falhas, condições apresentadas no momento da ocorrência de cada falha.

A existência de tal sistema é a base para os estudos de confiabilidade e para a administração dos serviços de garantia e assistência técnica.

O fundamental é desenvolver e fornecer aos clientes produtos de alta confiabilidade e que, na eventualidade de uma falha, possam ser recolocados em funcionamento com o mínimo de transtorno para o cliente.

1.2-Tema, objetivos e justificativa

Confiabilidade não é um termo novo, mas ainda causa um grande impacto e curiosidade nas pessoas que trabalham para que ela, a confiabilidade, esteja presente no produto.

Uma forma de avaliar a confiabilidade presente em um produto é verificando qual é o comportamento das falhas desse produto na medida que está sendo utilizado, ou seja, conhecer o tempo de sobrevivência do produto.

Para estimar a confiabilidade de um produto usualmente são realizados ensaios em laboratório computando-se o número de horas acumuladas que o produto foi usado até ocorrer uma falha. Essa informação pura e simplesmente não é suficiente para esclarecer em que data a falha irá ocorrer. A falta dessa data não permite ao produtor se mobilizar e planejar sua equipe de assistência técnica, assim como dificulta o estabelecimento do prazo de garantia que não lhe cause prejuízo, mas que também seja satisfatório para os clientes.

Necessitamos então obter informações de quando *ao longo do calendário* a falha ocorrerá, sendo esse o tema dessa dissertação.

Já o **objetivo principal dessa dissertação é modelar os tempos de falha *ao longo do calendário***, permitindo obter estimativas mês a mês do número de quebras e/ou reclamações.

A modelagem pode ser realizada através de várias técnicas, temos como objetivo apresentar duas alternativas para realizar a análise. A primeira é uma técnica de simulação, que será enfocada para quando o produto é utilizado por um ou vários grupos de clientes. Como complemento apresentaremos um método de análise matemática, enfocando apenas um grupo de clientes.

Como objetivos secundários:

(i) Pretendemos fornecer outras estatísticas que darão suporte às decisões necessárias para o planejamento e administração dos serviços de garantia e assistência técnica, bem como auxiliarão no dimensionamento das equipes de manutenção e assistência técnica.

(ii) Realizar aplicações da modelagem em estudos de casos, a fim de facilitar a compreensão da sistemática de modelagem dos tempos de falha *ao longo do*

calendário. Mostrando como podemos verificar qual é a confiabilidade de um produto e como obter estimativas do número de quebras mês a mês.

1.3-Método

O método utilizado para elaboração dessa dissertação inicia com a captação do problema a ser desenvolvido. Equacionado o problema, passamos a desdobrá-lo, buscando alternativas de solução.

Serão abordadas duas alternativas de modelagem, que são:

- (i) Método de análise via simulação de Monte Carlo
- (ii) Método de análise matemática fechada

O método de análise via simulação de Monte Carlo é descrita e implementada com auxílio de um software, desenvolvido conforme os passos da simulação. Para realizar a simulação foi necessário buscar referências na literatura que fornecessem suporte na descrição da simulação, bem como quais são os procedimentos do método de simulação de Monte Carlo. Além disso, foi importante fixar as fórmulas para as distribuições de probabilidades usadas na dissertação, assim como recapitular as técnicas estatísticas utilizadas. De posse do método de análise via simulação, realizamos uma aplicação prática junto a uma indústria.

A fim de enriquecer o trabalho, desenvolvemos para o método de análise via simulação de Monte Carlo, o enfoque quando temos diferentes grupos de clientes, isto é, quando o produto que está sendo alvo de estudo pode ser utilizado por grupos de clientes que submetem a diferentes intensidades ou tempo de uso. Com o objetivo de exemplificar esse enfoque um estudo de caso hipotético, será desenvolvido.

Concluída a primeira alternativa buscamos o método de análise matemática fechada para o problema proposto. Como embasamento para a resolução, foi necessário recorrer a literatura, relembrar e aprofundar os conhecimentos sobre os teoremas de distribuições

conjuntas, mais especificamente a distribuições de somas e quocientes. Após a elaboração desse método de análise, ilustraremos essa alternativa através de dois estudos de casos.

Para finalizar tecemos as considerações finais e listamos sugestões de tópicos para pesquisas futuras.

1.4-Estrutura

Esse trabalho busca contribuir para a divulgação e utilização da confiabilidade, assim sendo no capítulo 1 inserimos a confiabilidade no contexto dos dias atuais e a salientamos sua importância, destacamos a definição usual de confiabilidade, enfocamos os objetivos a serem alcançados, descrevemos o método de realização desse trabalho, bem como estabelecemos as suas limitações.

No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica que embasa todo o trabalho. Esse embasamento se dá através da descrição dos tópicos e das técnicas estatísticas a serem utilizadas ao longo da dissertação, permitindo ao leitor uma maior compreensão do assunto a ser abordado. Os tópicos a serem abordados nesse capítulo são: garantia, medidas de confiabilidade, distribuições de probabilidades e a técnica de simulação de Monte Carlo.

No capítulo 3 descrevemos passo a passo as etapas da modelagem matemática dos tempos de falha *ao longo do calendário*. Uma alternativa de modelagem propõe e faz uso da simulação de Monte Carlo, outra alternativa é através de solução matemática fechada. Nesse capítulo abordaremos para o método de análise via simulação de Monte Carlo a possibilidade de produtos serem utilizados por vários grupos de clientes.

Com o objetivo de enriquecer a dissertação, complementaremos os métodos descritos fazendo aplicações (estudo de caso) que serão amplamente abordadas no capítulo 4. A aplicação prática de um produto eletro-mecânico será utilizada para ilustrar o método de análise via simulação de Monte Carlo, com apenas um grupo de clientes. Para o caso de vários grupos de clientes, elaboraremos uma aplicação hipotética. Além

desses, apresentaremos dois estudos de casos para exemplificar o método de análise matemática fechada.

O trabalho é finalizado no capítulo 5, através das conclusões obtidas, e das sugestões deixadas para outros trabalhos que poderão ser desenvolvidos.

1.5-Limitações do trabalho

Esse trabalho prevê a discussão da *modelagem dos tempos de falha ao longo do calendário* descrevendo dois métodos para equacionar o problema. As duas alternativas de solução serão abordadas através da descrição dos passos a serem seguidos para obter o resultado, ou seja, a estimativa do tempo de falha, medido em dias ao longo do calendário.

Para utilizar as alternativas de solução faz-se necessário acessar o comportamento das variáveis em estudo, é portanto importante sabermos qual a distribuição probabilística ou empírica que melhor representa os dados. Ressaltamos que a fim de ser possível a aplicação da modelagem, através desses métodos, é indispensável possuir ou ter acesso aos dados básicos necessários.

A abordagem de solução matemática fechada esta limitada a apresentar os resultados obtidos com duas distribuições de probabilidade: a distribuição de Weibull e a distribuição exponencial (caso particular da distribuição de Weibull).

Produtos estão sempre sujeitos a ocorrência de falhas. O estudo do comportamento de falhas é o principal objetivo dessa dissertação, no entanto é fundamental ressaltar que a modelagem restringiu-se a primeira falha do produto. Falhas subsequentes que poderiam ocorrer (talvez ainda dentro do período de garantia) não são contemplados pelo modelo proposto.

Salientamos que essa dissertação não visa abordar métodos de estabelecimento de prazos de garantia, nem prever os custos nesse período, nem dimensionar equipes de manutenção e assistência técnica, apesar de gerar as informações que são importantes para realizar tais previsões.

Métodos de redução de variância, que podem aprimorar o método de análise obtida via simulação de Monte Carlo, também não serão abordados neste trabalho. Essa técnica foi abordada por Kumamoto, Tanaka & Inoue (1977), ficando como sugestão para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A importância de realizar uma revisão bibliográfica é uniformizar os conhecimentos primordiais para melhorar a compreensão do texto. Nesse capítulo iremos abordar conceitos importantes visando enriquecer a contextualização e colaborar com a interpretação dos conteúdos.

A seqüência dos itens nessa revisão bibliográfica seguem a mesma ordem em que eles aparecem no desenvolvimento dessa dissertação.

2.1. Garantia

Para aumentar sua fatia de mercado os fabricantes precisam providenciar garantias atrativas para seus produtos. Isso mostra que *garantia* está se tornado um fator importante no processo de decisão dos consumidores.

Para Hill, Beall & Blischke (1991) quando um fornecedor garante um produto, ele assume uma obrigação com o consumidor. Essa obrigação gera custos para o fornecedor através das falhas do produto. Em geral os termos de garantia requerem que o produto seja reparado, que uma reposição seja providenciada, ou que um reembolso em dinheiro seja dado.

Segundo Elsayed (1996) garantia é um contrato ou acordo sobre o qual o produtor de um produto ou serviço concorda em reparar, substituir ou providenciar serviços quando o produto falha ou o serviço não atende os requisitos do consumidor antes de um tempo especificado (prazo de garantia).

Na figura 2.1 é apresentada a sistemática de ação quando ocorre uma falha no período de garantia, independente do prazo ou tipo de garantia oferecido pelo fabricante. Note que o processo de garantia, inicia no momento da aquisição do produto pelo usuário final, que o coloca em uso com certa intensidade por um período de tempo.

Quando a primeira falha é percebida, o primeiro passo a ser verificado é se o produto se encontra dentro do período de garantia, em caso positivo é necessário saber se o cliente irá fazer uso de seu direito de garantia, se a resposta for afirmativa será necessário saber se a solicitação é pertinente ou se a revenda não irá filtrar essa solicitação. Se após toda essa questões o cliente tiver respostas afirmativas, ele terá sua unidade do produto reparada ou substituída, voltando então a ser colocada em serviço.

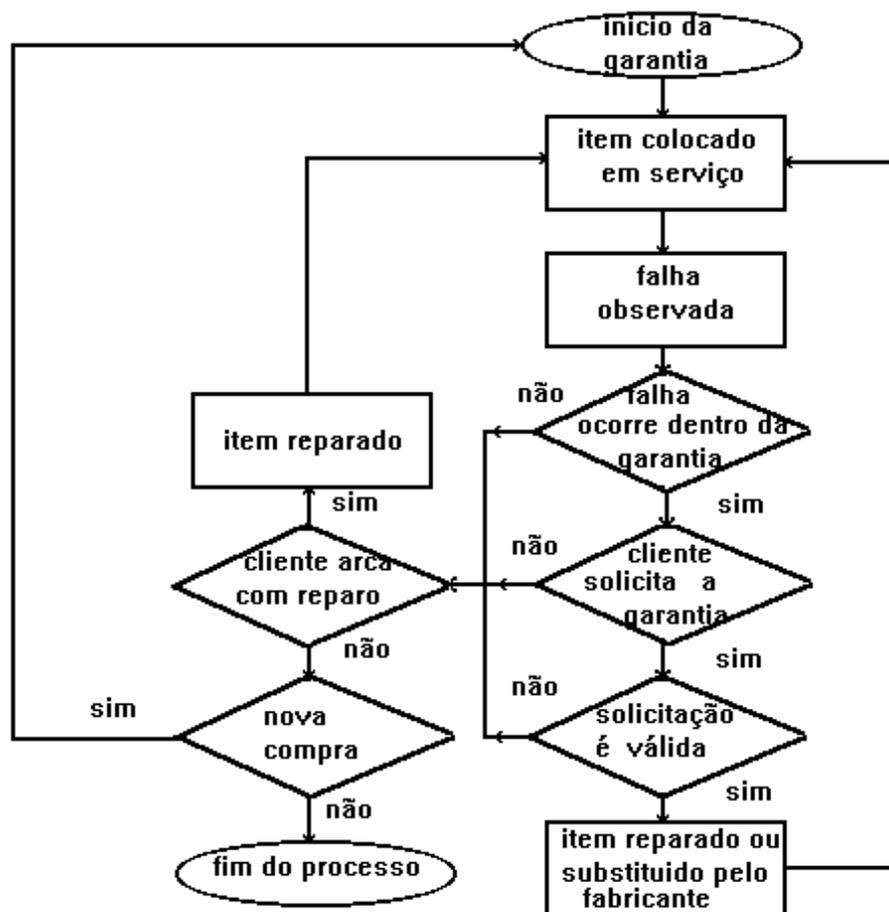


Figura 2.1 - Fluxograma do processo de garantia.

Caso a falha ocorra fora do período de garantia, ou o cliente não solicita a garantia ou então a solicitação não é válida, o cliente tem liberdade de arcar ou não como reparo do item. Caso o cliente arque com as despesas do reparo, o item é reparado e novamente colocado em uso. Caso o cliente não arque com as despesas de reparo, se verifica se ocorre uma nova compra, caso positivo o novo item entra no início do processo de garantia, caso negativo termina o processo.

Segundo Dalrymple & Parsons (1976) os principais objetivos da garantia de produtos e serviços são:

- (i) Estimular as vendas através da redução da ansiedade dos consumidores sobre os problemas de pós venda, e
- (ii) Repetir negócios, onde os consumidores ficaram satisfeitos.

A fim de alcançar esses objetivos é necessário que a empresa esteja estruturada para tranquilizar e satisfazer os consumidores. Isto consiste que os produtos e serviços sejam de qualidade, além de terem alta confiabilidade, mas para atingir essas etapas é necessário ouvir a “voz do cliente”.

Segundo Grimaldi & Mancuso (1995) quando não existe contato direto da empresa com o cliente, isto é ouvir a “voz do cliente”, a parceria deve ser mantida através de canais de distribuição e/ou assistência técnica.

Com as informações provenientes dos canais de distribuição (revendas) e/ou assistência técnica é possível atualizar o banco de dados de garantia. Complementando-o com dados sobre o produto, tal como a data de fabricação, podemos dar um tratamento estatístico que auxilia a alcançar o objetivo de aprimorar o produto e satisfazer o cliente, minimizando os custos no período de garantia.

Na seqüência serão apresentados diversos conceitos probabilísticos fundamentais para embasar o tema da dissertação, ou seja, a modelagem dos tempos de falha ao longo do calendário.

2.2. Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua

Uma variável aleatória contínua pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo definido, onde não podemos listar todos os valores com suas respectivas probabilidades. Então a solução é construir uma função densidade de probabilidade (f.d.p.), baseada na função $f(x)$ correspondente. Veja um exemplo gráfico na figura 2.2.

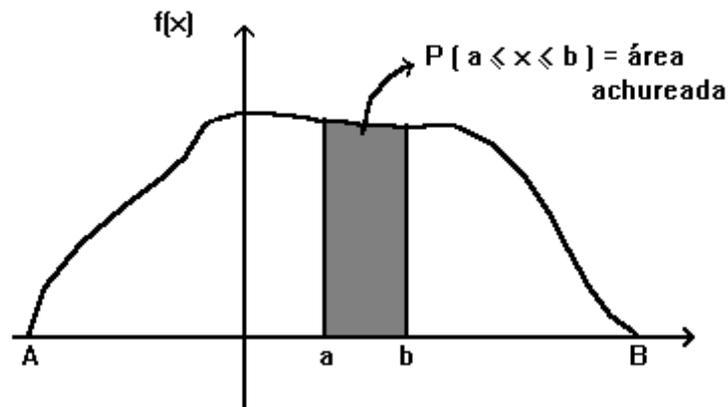


Figura 2.2 - Uma função densidade de probabilidade

Função densidade de probabilidade: Seja X uma variável aleatória contínua, a função $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade da v.a. X , se satisfaz as seguintes condições:

$$\text{i) } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad (2.1)$$

$$\text{ii) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

$$\text{iii) } P(X \in A) = \int_A f(x) dx, \quad A \subset \mathfrak{R}$$

OBS.: A probabilidade de X ser exatamente igual a um certo valor especificado será igual a zero, isto é, $P(X=x) = 0$.

Função de distribuição acumulada $F(x)$: Se X é uma V.A. contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então sua acumulada é:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = P(X \leq x), \forall x \in \mathcal{R} \quad (2.3)$$

2.3. Medidas de Confiabilidade

No campo da confiabilidade estamos interessados no tempo de vida até a falha, o qual é uma v.a. assumindo valores em $[0, +\infty]$ e pode ser interpretada como a frequência relativa da ocorrência de falhas por unidade de tempo.

Como a partir da f.d.p. podemos obter a função de distribuição acumulada (f.d.a.), que nada mais é do que uma representação da probabilidade de falha no intervalo $(0, t]$ então temos que:

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx = P(T \leq t) \quad (2.4)$$

Na figura 2.3 podemos observar graficamente uma função densidade de probabilidade e uma função distribuição acumulada.

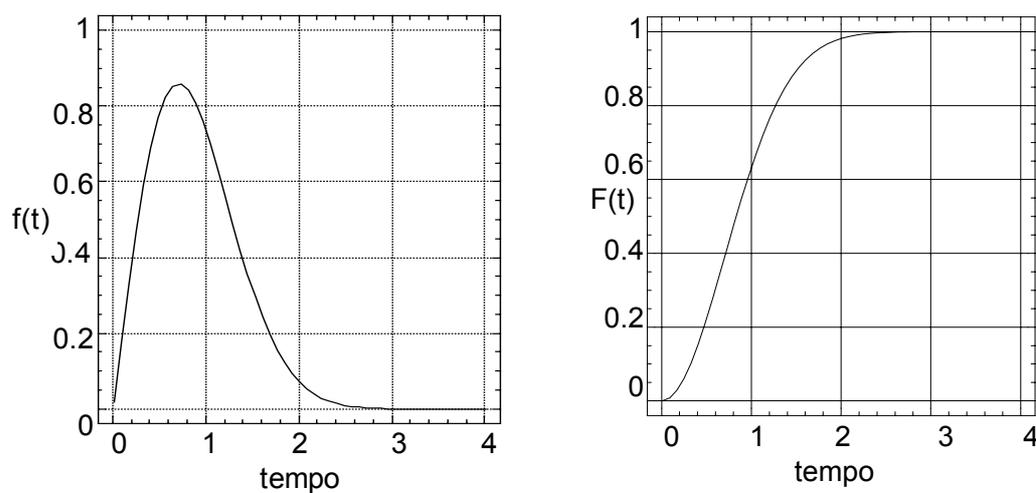


Figura 2.3 - Função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada

A função de confiabilidade, simbolizada por $R(t)$ (do inglês Reliability), representa a probabilidade de não haver falha no intervalo $(0, t]$. Ela é dada por:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(x) dx = \int_t^{+\infty} f(x) dx, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

que segue a forma do gráfico da figura 2.4.

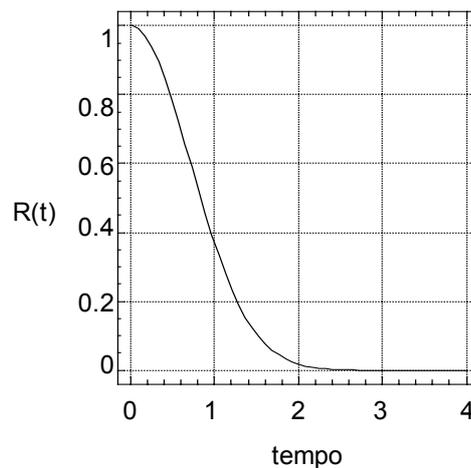


Figura 2.4 - Um exemplo de Função de Confiabilidade $R(t)$

A função $R(t)$ nos dá a proporção das falhas que ocorrem ao longo do tempo, mas esta proporção é tomada em relação ao tamanho da população no tempo $t = 0$, e o que procuramos é uma função que nos informe a proporção da população sobrevivente que deve falhar no próximo intervalo de tempo.

Tal informação é obtida a partir da função taxa de falha $h(t)$ (hazard rate function), que é definida como o limite da probabilidade condicional de falhas, excluídas as que já ocorreram, por unidade de tempo, quando o intervalo de tempo tende a zero. Matematicamente:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[\text{falha}(t, t + \Delta t) / \text{sobreviveu em } t]}{\Delta t}$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[t \leq T \leq t + \Delta t / T > t]}{\Delta t} \quad (2.6)$$

usando o conceito de probabilidade condicional, temos:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.7)$$

$h(t)$ pode ser estimado, à partir de um experimento com vários componentes em teste:

$$h(t) \approx \frac{\# \text{ falhas em } (t, t + \Delta t)}{\Delta t \cdot \# \text{ sobreviventes no instante } t}, \quad \Delta t \approx 0$$

Uma distribuição de vida pode ser melhor compreendida através da função taxa de falhas pois esta reflete o comportamento do itens sobreviventes.

Segundo Burgess (1987), grosseiramente, somente dois tipos de informações são requeridas para calcular a confiabilidade de um produto: o número total de falhas em um período de interesse e o tempo total acumulado de operação para o período de interesse.

De posse dessas informações podemos calcular, segundo Burgess (1987), as duas medidas mais comuns de confiabilidade: a taxa de falha e o tempo médio até a falha (MTTF). A taxa de falha pode também ser descrita como sendo o inverso do tempo médio até a falha e é expressa tipicamente em termos do número de falhas por unidade de tempo. O MTTF é expresso, freqüentemente, como sendo o número médio de horas antes da primeira falha ocorrer. Esse tempo é calculado dividindo o tempo total acumulado de operação pelo número total de falhas.

Quando o item que se encontra em estudo pode ser reparado, isto é, a falha que existe no produto é resolvida e esse é colocado novamente em funcionamento calculamos o MTBF (Mean Time Between Failure ou tempo médio entre falhas).

2.4.Distribuição de Weibull

Calculando a função de confiabilidade pode-se modelar o tempo de vida através de distribuições de probabilidade adequadas. Em confiabilidade os modelos mais usados são: Exponencial, Normal, Gama, Log-normal, Weibull.

Abordaremos aqui a distribuição de Weibull, pois é uma das mais populares no campo da confiabilidade, prestando-se a descrever tanto os casos em que a taxa de falha é crescente, decrescente ou constante.

O modelo físico que justifica a distribuição de Weibull origina-se da teoria dos valores extremos (as distribuições de Gumbell) mais especificamente da distribuição do menor valores, definida para valores positivos.

Uma outra maneira de apresentar a distribuição de Weibull é a seguinte: seja um item sujeito a ocorrência aleatória e independente de um grande número de imperfeições e se o tempo até a falha é determinado pela imperfeição mais grave, isto é o ponto mais fraco entre um grande número de imperfeições do sistema, então a distribuição resultante tenderá a uma distribuição de Weibull.

Segundo Kapur (1977) a distribuição de Weibull é facilmente lembrada na sua forma acumulativa. A distribuição acumulada de Weibull de três parâmetros é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\left[\frac{(t-\delta)}{(\theta-\delta)}\right]^\gamma}, \quad t \geq \delta, \delta \in \mathfrak{R}, \gamma > 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.8)$$

onde: γ = parâmetro de forma

θ = parâmetro de escala ou vida característica

δ = parâmetro de localização ou vida mínima

A distribuição de Weibull de três parâmetros pode sempre ser convertida para uma distribuição de Weibull de dois parâmetros através de uma transformação linear. A distribuição de Weibull com dois parâmetros, nada mais é do que uma distribuição de Weibull de três parâmetros sendo que o parâmetro de localização é zero e é **nessa condição que iremos utilizar a distribuição de Weibull.**

Para a distribuição de Weibull com dois parâmetros a função distribuição acumulada é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}, \quad t \geq 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.9)$$

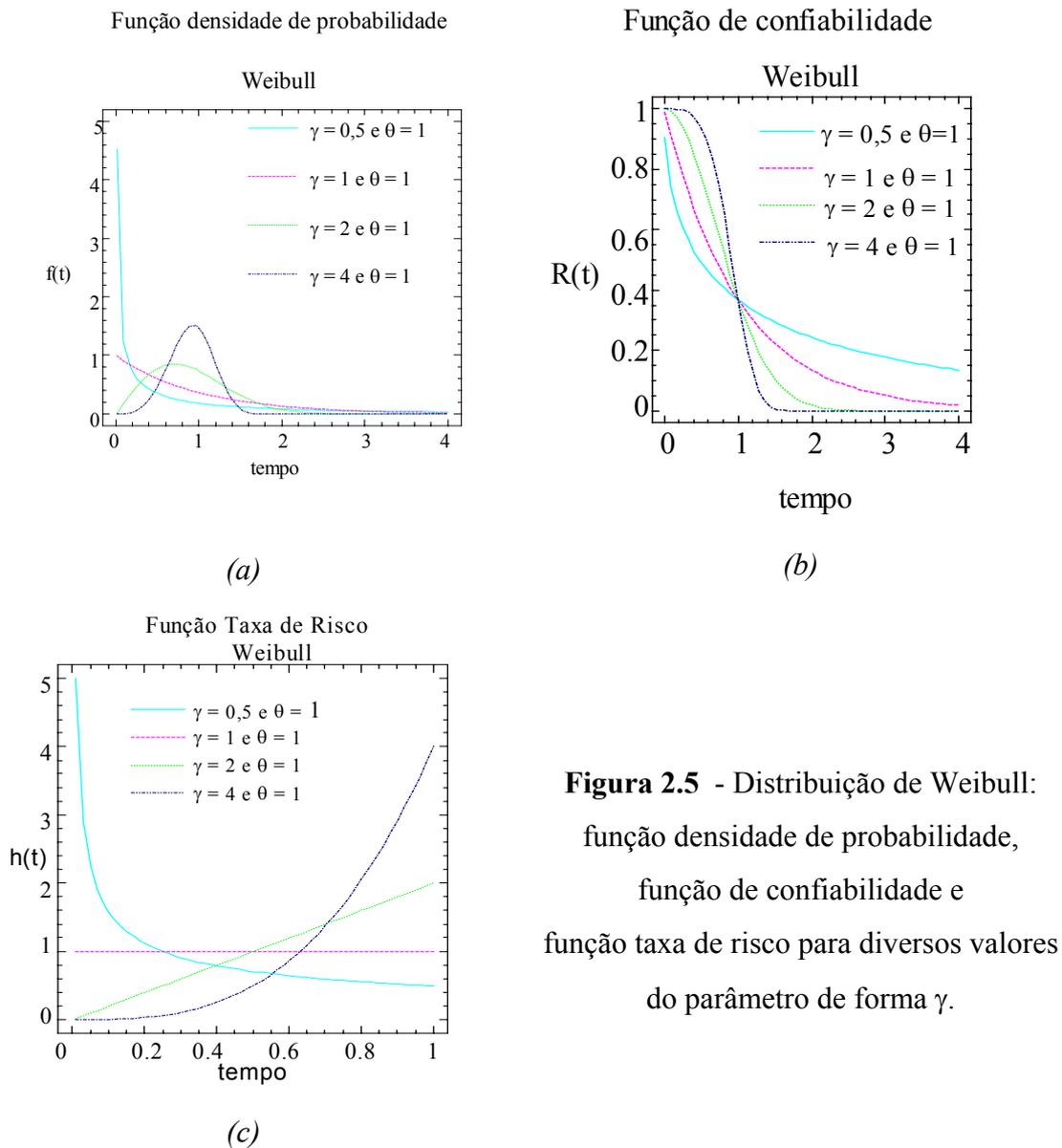


Figura 2.5 - Distribuição de Weibull: função densidade de probabilidade, função de confiabilidade e função taxa de risco para diversos valores do parâmetro de forma γ .

Através do conceito da função de confiabilidade, dado na equação (2.5) temos que:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}, \quad t \geq 0, \gamma > 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.10)$$

$$e \quad R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\gamma}, t \geq 0, \gamma > 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.11)$$

A função de taxa de falha da distribuição Weibull, com base na equação (2.7), é dada por:

$$h(t) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\gamma-1} \quad t \geq 0, \gamma > 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.12)$$

Na figura 2.5 temos: (a) a função densidade de probabilidade, (b) a função de confiabilidade e (c) a função taxa de falha para quatro diferentes distribuições de Weibull.

2.4.1. Caso particular: Distribuição Exponencial

Como caso particular da distribuição de Weibull, a distribuição Exponencial desempenha importante papel para descrever fenômenos na área de confiabilidade onde a probabilidade de falha não se altera ao longo do uso (taxa de falha constante). Como por exemplo, segundo Meyer (1983), é bastante razoável admitir que um fusível ou um rolamento de rubis sejam “tão bons quanto novos”, enquanto estiverem ainda funcionando. Isto é, se um fusível não tiver fundido, estará praticamente em estado de novo; nem o rolamento se alterará (muito) devido ao desgaste. Em casos como esses, a distribuição Exponencial apresenta-se como um modelo adequado de análise.

A distribuição Exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull (de dois parâmetros), para a situação onde o parâmetro de forma (γ) assume valor um. Sendo assim podemos reescrever a equação (2.10), com $\gamma = 1$ para obtermos o função densidade de probabilidade:

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}}, t \geq 0 \text{ e } \theta > 0 \quad (2.13)$$

Na equação (2.13) podemos observar diretamente o valor esperado dessa distribuição (θ). Para a distribuição Exponencial o valor de θ também é conhecido como sendo o MTBF (tempo médio entre falhas). Apesar disso, a equação (2.13) não é a mais usual na literatura, a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial mais usual, é dada por:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad , \quad t \geq 0 \text{ e } \lambda > 0 \quad (2.14)$$

Salientamos, no entanto, que **faremos uso da equação (2.13) para representar a distribuição Exponencial ao longo dessa dissertação**. Em algumas situações será necessário operacionalizar a função densidade de probabilidade Exponencial com a função Weibull, facilitando e uniformizando assim a notação.

2.5. Simulação de Monte Carlo

A idéia de construir modelos de simulação é muito antiga, segundo Dachs (1988). As primeiras simulações feitas pelo homem talvez tenham sido na forma de maquetes para edificações e, mais tarde em simulações de combate, usando pedras e galhos de árvores para representar batalhões e obstáculos. Possivelmente o avanço da ciência não teria alcançado o estágio atual, se o homem não tivesse a habilidade quase inata de criar modelos e simular o comportamento de fenômenos do mundo real usando esses modelos.

Conforme Weir (1971) na área de confiabilidade geralmente é utilizado a simulação computacional, pois com a aplicação manual pode ser averiguado somente um resultado, enquanto que com a simulação é possível termos um sistema contínuo de operações e resultados.

Segundo Naylor et alli (1971) a definição de Shubik parece ser a mais apropriada por ser típica entre as definições mais usuais, seja ela: “A simulação de um sistema ou organismo é a operação de um modelo (ou simulador) que representa esse sistema ou organismo. O modelo é passível de manipulações que seriam difíceis de levar a cabo na entidade que ele representa, quer pelo preço, quer pela impraticabilidade ou impossibilidade de fazê-las. As propriedades concernentes ao comportamento de um sistema ou subsistema podem ser inferidas estudando-se a operação do modelo”.

Uma das variedades da simulação é o método de Monte Carlo que é uma técnica de simulação que tem base probabilística ou estocástica. Segundo Naylor et alli (1971), dois tipos de problema dão margem ao uso desta técnica:

(i) Os problemas que envolvem alguma forma de processo estocástico. A demanda de consumidores, o tempo de produção são exemplos de variáveis que podem ser consideradas de natureza estocástica. O método de Monte Carlo foi desenvolvido com base no uso não apenas da maioria das distribuições de probabilidade bem conhecidas como para o caso de distribuições empíricas.

(ii) Certos problemas matemáticos não podem ser facilmente resolvidos (se houver solução) por métodos estritamente determinísticos. Entretanto é possível obtermos soluções aproximadas para esses problemas simulando um processo estocástico cujos momentos, funções densidades satisfaçam as relações funcionais ou requisitos de solução de problemas determinísticos. A solução para espalhar alguns poucos pontos sobre uma esfera de modo que esses pontos sejam equidistantes e cubram toda a superfície é um exemplo dessa aplicação da simulação.

O problema a ser solucionado nessa dissertação é um processo de natureza estocástica, isso é do tipo (i).

Segundo Hahn & Shapiro (1967) a simulação de Monte Carlo é uma técnica para obtenção de informações sobre o desempenho do sistema a partir dos dados dos

componentes. Ele consiste na “construção” de muitos sistemas a partir de cálculos computacionais e avaliação do desempenho de cada sistema sintetizado. Para Kamat & Riley (1975) a simulação de Monte Carlo pode ser usada para encontrar a confiabilidade de um sistema complexo com relativa facilidade.

Consideremos um sistema que é composto por muitos componentes. Digamos, que estão disponíveis mil unidades de cada componente que compõe esse sistema. Nós podemos então construir mil sistemas e obter mil medidas do desempenho do sistema. Se, contudo, a estrutura do sistema - o relacionamento entre os vários componentes e o desempenho do sistema - é conhecida, o desempenho do sistema pode ser calculado a partir das medidas dos componentes *sem* de fato construir os sistemas. Além disso, se em vez de ter mil unidades de cada componente, nós conhecermos a distribuição de cada componente, é possível obter as medidas desses componentes pelo comportamento de mil valores extraídos de cada distribuição. Esses valores aleatórios podem ser usados para calcular o desempenho dos mil sistemas. Este procedimento, é o método de Monte Carlo, e pode ser visualizado no fluxograma na figura 2.6.

Com o intuito de facilitar a compreensão do funcionamento do Método de Monte Carlo, vamos apresentar um exemplo do tempo total de teste e reparo de placas de circuito impresso.

Em uma fábrica de placas de circuito impresso, a seção de teste e reparo é constituída de três estações: a primeira onde é realizada a inspeção visual, a segunda onde são realizados os retoques de solda e a terceira onde executa-se o teste final, para verificar se a placa está funcionando.

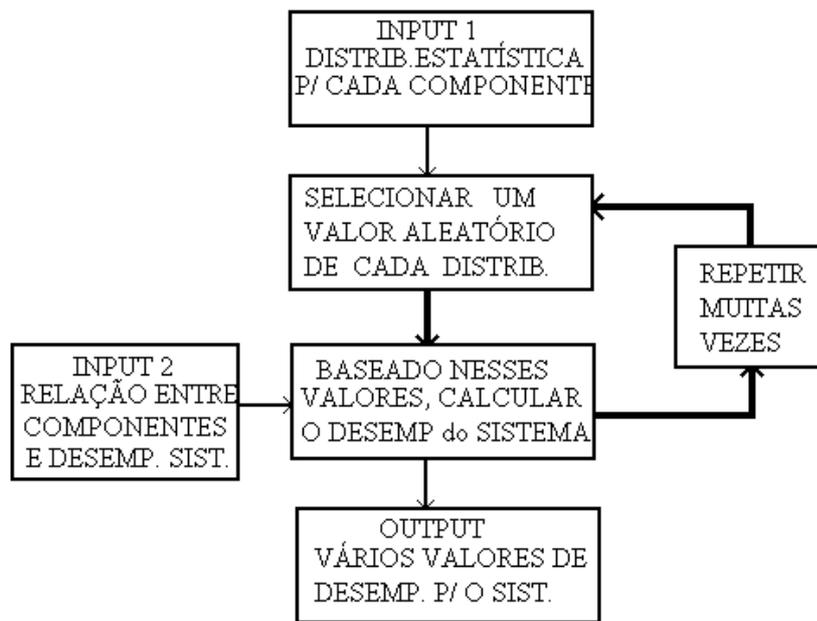


Figura 2.6 - Fluxograma do método de simulação de Monte Carlo.

Aplicaremos o método nessas três estações de teste e reparo. A distribuição do tempo de verificação visual, que refere-se a primeira estação tem distribuição normal, com média 9 minutos e desvio padrão de três minutos. Um valor aleatório é selecionado dessa distribuição - digamos, 11,3 minutos.

Valores aleatórios são obtidos de forma similar para representar os tempos de processo das demais estações, dadas por: uma distribuição de Weibull com $\gamma = 2$ e $\theta = 10$ para a estação 2, de onde observamos um tempo de reparo de 9,2 minutos, e uma distribuição exponencial com $\lambda = 2$ minutos na estação 3, de onde observamos um tempo de verificação de 0,3 minutos.

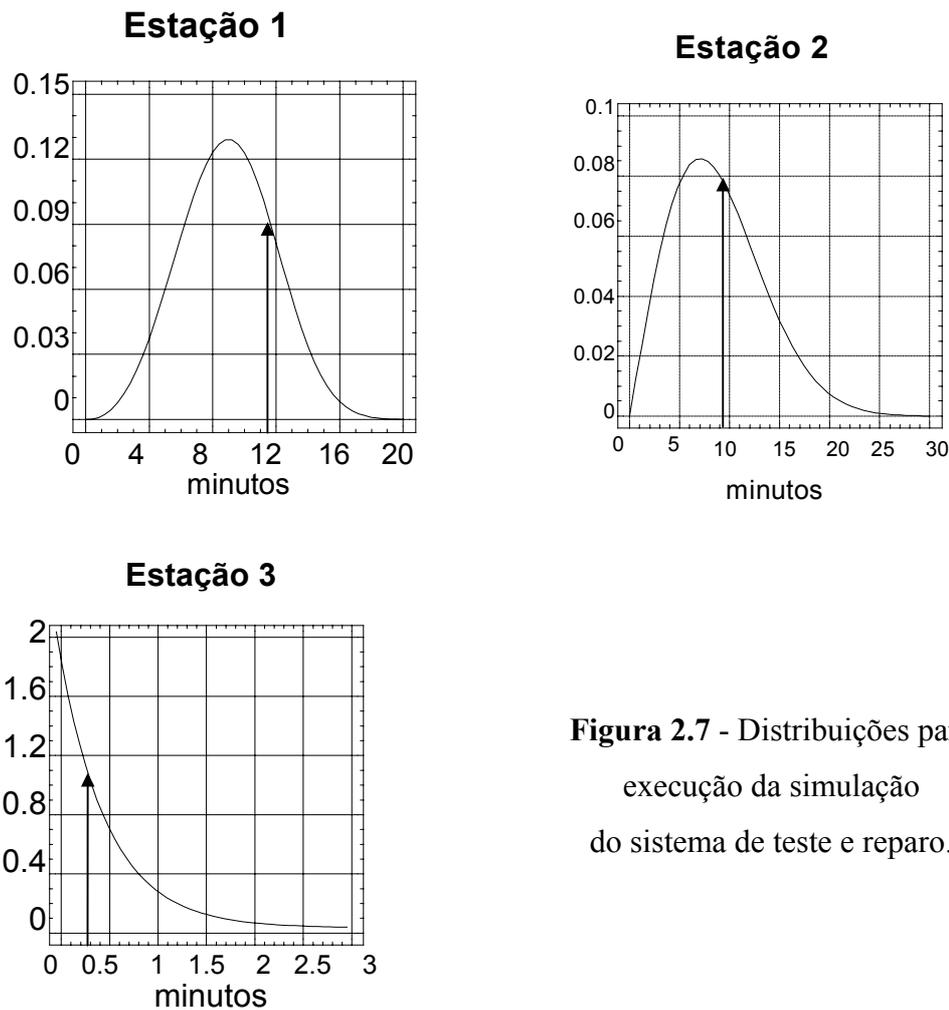


Figura 2.7 - Distribuições para execução da simulação do sistema de teste e reparo.

O tempo total da primeira simulação do sistema é de 20,8 minutos. Este processo é ilustrado na figura 2.7. Simulando várias vezes, obteremos um novo resultado para o tempo total do processo de verificação, em cada repetição da simulação. Na tabela 2.1 são apresentados os dez primeiros resultados obtidos nas 100 simulações em computador. No histograma da figura 2.8 observamos os resultados dessas 100 simulações.

Tabela 2.1 - Tempos de teste e reparo de placas de circuito impresso.

Estação 1	Estação 2	Estação 3	Tempo total de processo
11,3	9,2	0,3	20,8
10,5	10,1	0,8	21,4
9,7	11,3	0,4	21,4
10,3	8,8	0,3	19,4
8,6	12,2	0,4	21,2
9,5	11,7	0,6	21,8
12,9	8,7	0,1	21,7
10,3	7,3	0,5	18,1
9,9	10,9	0,3	21,1
11,2	9,1	0,2	20,5

Segundo Ribeiro (1995) o que obtemos é um conjunto de valores para uma variável de resposta, que pode ser tratado estatisticamente, como podemos observar através do exemplo. Além disso, a simulação de Monte Carlo é um método de amostragem, e a resposta está sujeita a erros, isto é, mesmo que tenhamos um tamanho de amostra grande estaremos sujeitos a que a estimativa obtida não seja exatamente igual ao parâmetro.

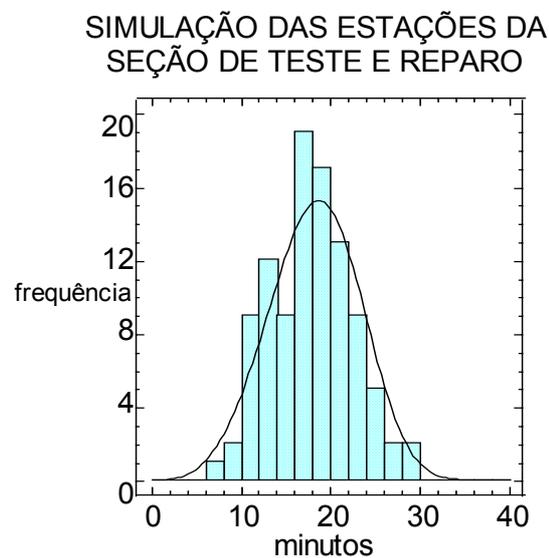


Figura 2.8 - Tempos de processo para 100 simulações do sistema.

2.6. Distribuição Binomial

Primeiramente, faz-se necessário definir uma distribuição de probabilidade discreta que nada mais é do que o conjunto de todos os valores resultantes de uma variável aleatória discreta (v.a.d.) e suas respectivas probabilidades. A função $f(x)$ é a função de probabilidades ou uma distribuição de probabilidades de uma v.a.d. se, para cada possível resultado x temos:

$$1) f(x) \geq 0 \quad (2.15)$$

$$2) \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1 \quad (2.16)$$

$$3) P(X=x) = f(x) \quad (2.17)$$

O termo binomial é usado para designar situações em que os resultados de uma v.a.d. podem ser agrupados em duas categorias, "sucesso" e "fracasso" que são mutuamente exclusivas. A distribuição binomial é útil para determinar a probabilidade de certo número de sucessos num conjunto de observações.

A distribuição binomial é caracterizada por:

- O experimento consiste em n tentativas em iguais condições.
- Cada tentativa tem um resultado, entre dois possíveis: sucesso ou fracasso.
- As probabilidades de sucesso π e de fracasso $(1 - \pi)$ permanecem constantes em todas as tentativas. Sendo que: $0 \leq \pi \leq 1$.
- Os resultados são independentes uns dos outros.

Para calcular uma probabilidade binomial, precisamos especificar:

n - número de tentativas

π - probabilidade de sucesso em cada tentativa

e é necessário observar:

x - número de sucessos (nas n tentativas)

Em n tentativas, temos x sucessos com probabilidade π e $n-x$ fracassos com probabilidade $(1-\pi)$. Como nessas n tentativas, não tem relevância a ordem que ocorre os x

sucessos e os $(n-x)$ fracassos, teremos a mesma probabilidade de ocorrência para qualquer combinação dos x sucessos e $(n-x)$ fracassos. Essa combinação é dada por:

$$C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (2.18)$$

De modo que:

$$P(X=x) = C_x^n \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x}, \quad x \in \{0,1,2,\dots,n\} \quad (2.19)$$

Exemplo: Seja $\pi=0,1$ a probabilidade de encontrar um item defeituoso, em 15 que tomamos aleatoriamente de uma linha produtiva. Temos a probabilidade de obter $x = 1$, dada por:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C_1^{15} \cdot 0,1^1 \cdot (1-0,1)^{15-1} \\ &= \frac{15!}{(14-1)!1!} \cdot 0,1 \cdot 0,9^{14} \\ &= 0,3432 \end{aligned}$$

Para cada valor de X em $\{0,1,2, \dots, 15\}$ temos uma probabilidade associada, a figura 2.9 mostra essas probabilidades graficamente.

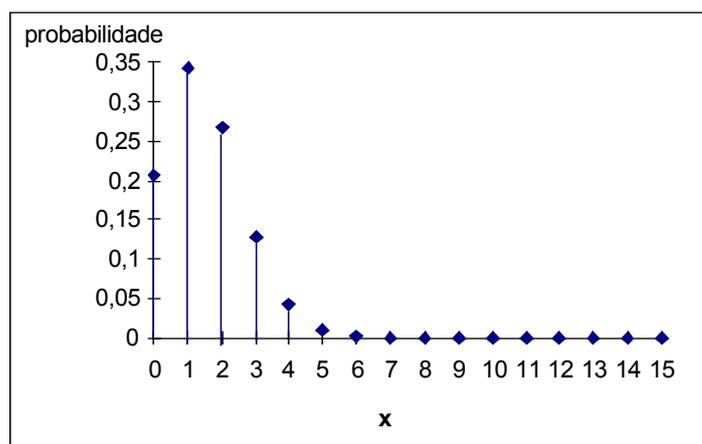


Figura 2.9 - Distribuição Binomial com $n = 15$ e $\pi = 0,1$.

A distribuição binomial tem por parâmetro π (a probabilidade de sucesso). Se X é o número de sucessos, então em função deste parâmetro podemos calcular:

$$E[X] = \sum_{i=0}^n x_i P(X = x_i) = n \pi \quad (2.20)$$

$$\text{VAR}[X] = \sum_{i=0}^n (x_i - E[X])^2 P(X = x_i) = n \pi (1 - \pi) \quad (2.21)$$

2.6.1. Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal:

Muitas situações podem ser convenientemente descritas pela distribuição binomial. O que ocorre é que muitas vezes temos um grande número de observações (n grande), tornando os cálculos muito trabalhosos.

O uso da normal para aproximar a binomial apresenta dificuldade conceitual. A distribuição normal é contínua e, enquanto a binomial é discreta. O problema se resolve fazendo uso do *teorema do limite central*, pois ele nos assegura que com um tamanho de amostra grande a distribuição binomial se aproxima da distribuição normal.

Então por exemplo, se desejamos determinar a probabilidade binomial de exatamente 7 sucessos, deveríamos calcular a probabilidade entre 6,5 e 7,5 (correção de continuidade) através da distribuição normal. O que estamos fazendo é atribuir intervalos da distribuição contínua para representar valores inteiros comuns às variáveis discretas.

Segundo Montgomery (1985) a aproximação da normal para a binomial é satisfatória para π próximo de 0,5 e $n > 10$. Na medida em que π se afasta de 0,5, maiores valores de n são necessários. Em geral, a aproximação não é adequada para:

$$\pi < \frac{1}{n+1} \quad \text{ou} \quad \pi > \frac{n}{n+1}$$

Exemplo: Numa linha produtiva a proporção de defeituosos é 0,4. A probabilidade de encontrarmos 3 itens defeituosos em 20 itens que tomamos aleatoriamente da produção é:

$$P(X=3) = C_3^{20} 0,4^3 (1-0,4)^{20-3} = 0,0124$$

Como a normal é expressa em função da média e desvio padrão, calculamos:

$$\mu = n \cdot \pi = 20 \cdot 0,4 = 8 \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)} = \sqrt{20 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 2,2$$

"exatamente 3" deve ser interpretado como o intervalo de 2,5 a 3,5 na curva normal.

$$\begin{aligned} P(2,5 < X < 3,5) &= P(X < 3,5) - P(X < 2,5) \\ &= P(Z < (3,5 - 8) / 2,2) - P(Z < (2,5 - 8) / 2,2) \\ &= \Phi(-2,5) - \Phi(-2,05) \\ &= 0,9938 - 0,9798 \\ &= 0,0140 \end{aligned}$$

O erro é de 0,0016 ou seja 0,0140 (probabilidade aproximada) menos 0,0124 (probabilidade exata). Calculando o erro relativo (em percentual) temos:

$$\mathcal{E}_r = \frac{0,014 - 0,0124}{0,0124} = 13\%$$

Este erro diminui na medida em que aumenta np .

2.7. Intervalo de Confiança para uma Proporção

A estimação por intervalo nos fornece um intervalo de valores centrados na estatística amostral, no qual julgamos estar o parâmetro com uma probabilidade conhecida de erro.

Em uma população podemos retirar k amostras diferentes para um determinado tamanho de amostra n . Cada amostra possível tem um valor como estimativa, e cada estimativa fornecerá um intervalo diferente para o parâmetro.

Fixamos uma probabilidade $(1-\alpha)$ de que o valor do parâmetro esteja contido no intervalo estimado, a essa probabilidade chamamos de nível de confiança. Por esta razão, chamamos de intervalos de confiança.

Seja, π : proporção populacional de determinada característica e

p : proporção amostral dessa característica.

Então o parâmetro π de uma distribuição binomial, por exemplo, a proporção de peças defeituosas, poderá ter em uma amostra de n elementos, x observações que são possuidoras de determinada característica, a proporção de defeituosos na amostra é estimada pelo estimador de máxima verossimilhança dado por $p = x/n$.

Satisfeitas as condições de aproximação da normal para a binomial, desejamos construir um intervalo em torno da estimativa amostral, isto é, achar $p \pm e$ de tal modo que esse intervalo tenha nível de confiança $1-\alpha$. Matematicamente temos:

$$P(p - e \leq \pi \leq p + e) = 1 - \alpha$$

Logo, temos como resultando o intervalo de confiança dado por:

$$p - Z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \pi \leq p + Z_{(1-\alpha/2)} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2.22)$$

onde: $Z_{(1-\alpha/2)}$ é o valor da distribuição normal padrão.

2.8. Distribuições Bidimensionais

Quando trabalhamos com duas ou mais variáveis sempre torna-se necessário conhecer o comportamento conjunto delas. No presente trabalho nos confrontaremos com tal situação, então definiremos nessa e na próxima seção como proceder.

Hoel, Port & Stone (1978) definem como *função de distribuição conjunta* F de duas variáveis aleatórias X e Y por:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad -\infty < x,y < +\infty \quad (2.23)$$

onde: X e Y são duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral de probabilidade.

Podemos usar a função de densidade conjunta para calcular a probabilidade de que o par (X,Y) esteja dentro de um retângulo plano. Considere o retângulo:

$$R = \{ (x,y) \mid a < x \leq b, c < y \leq d \}, \quad \text{onde } a < b \text{ e } c < d. \quad (2.24)$$

Então:

$$P((X,Y) \in R) = P(a < X \leq b, c < Y \leq d) \quad (2.25)$$

Se existir uma função não negativa f tal que

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u,v) dv \right) du \quad -\infty < x,y < +\infty$$

(2.26)

então f é chamada de função densidade conjunta de X e Y . Se F tiver densidade f , podemos rescrever (2.25) em termos de f , obtendo

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx \quad (2.27)$$

Usando as propriedades da integração e a definição de espaços de probabilidade, pode-se mostrar que a relação dada em (2.28) se verifica para subconjuntos A no plano:

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) dx dy \quad (2.28)$$

2.9. Distribuições de Somas e Quocientes

Sejam X e Y variáveis aleatórias tendo uma densidade conjunta f . Em muitos contextos segundo Hoel, Port & Stone (1978) temos uma variável aleatória Z definida em termos de X e Y e desejamos determinar a densidade de Z . Suponha que Z seja dada por $Z = \varphi(X,Y)$, onde φ é uma função real cujo domínio é um subconjunto de \mathfrak{R}^2 . Para um z fixo o evento $\{Z < z\}$ é equivalente ao evento $\{(X,Y) \in A_z\}$, onde A_z é o subconjunto de \mathfrak{R}^2 definido por

$$A_z = \{ (x,y) \mid \varphi(x,y) \leq z \}. \quad (2.29)$$

Assim,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P((X, Y) \in A_z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy \quad (2.30)$$

Se pudermos obter uma função não negativa g tal que

$$\iint_{A_z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^z g(v) dv, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2.31)$$

então g será necessariamente uma densidade de Z . Usaremos esse método para obter as densidades de $X+Y$ e Y/X .

2.9.1- Distribuição de Somas.

Seja $Z = X+Y$. Então

$$A_z = \{ (x, y) \mid x+y \leq z \}. \quad (2.32)$$

é simplesmente o semiplano à esquerda inferior da reta $x + y = z$ como mostra a figura 2.10.

Em (2.30) temos que:

$$F_Z(z) = \iint_{A_z} f(x, y) dx dy$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy dx$$

utilizando a mudança de variável: $y' = y + x \Leftrightarrow y = y' - x$, temos:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f(x, y' - x) dy' dx$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y' - x) dx dy'$$

então conforme (2.31):

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z g(y)dy \quad \text{e} \quad g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x)dx$$

assim podemos escrever:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2.33)$$

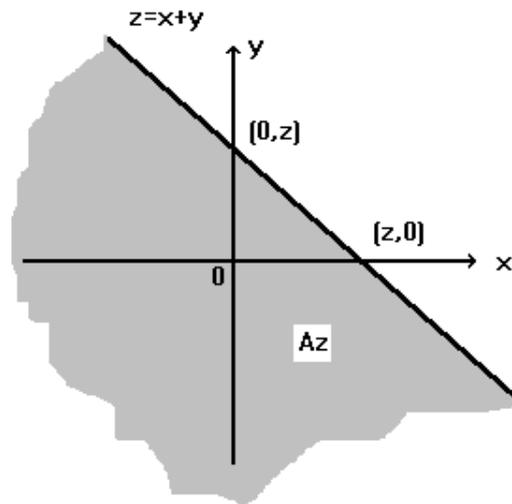


Figura 2.10 - Região de integração para obter a distribuição das somas.

Na maioria das aplicações de (2.33), X e Y são independentes e pode-se reescrever (2.33) como o produto das densidades, resultando em:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2.34)$$

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes não negativas, então

$$f_{X+Y}(z) = 0, \quad z \leq 0 \quad \text{e}$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx, \quad 0 < z < +\infty \quad (2.35)$$

Exemplo: Seja X e Y variáveis aleatórias independentes, cada uma com função densidade de probabilidade exponencial de parâmetro λ , que é um caso particular da distribuição de Weibull. A densidade de X é dada por $f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ para $x \geq 0$ e $f_X(x) = 0$ para $x < 0$. A densidade de Y é a mesma. Veja o gráfico de uma exponencial na figura 2.11.

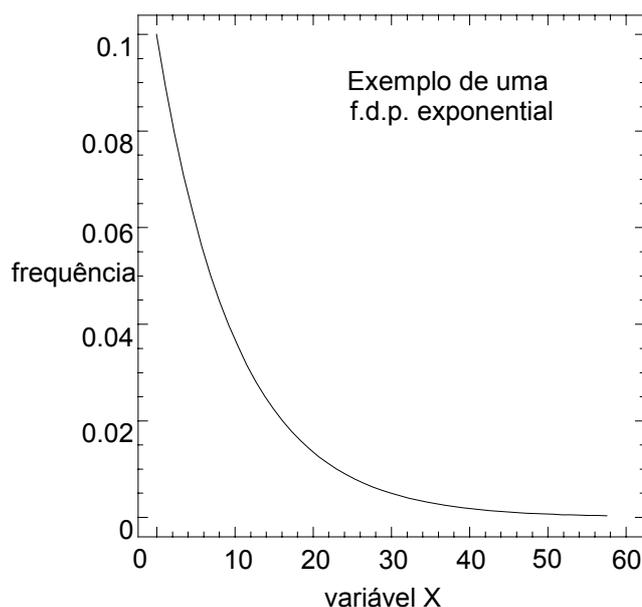


Figura 2.11 - Função densidade de probabilidade de uma distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda=1/\theta$.

Para conhecer a distribuição de $Z=X+Y$ utilizamos a equação (2.35) e obtemos:

$$f_{X+Y}(z) = 0 \quad z \leq 0$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(z-x)} dx$$

$$f_{X+Y}(z) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 e^{-\frac{z}{\theta}} \int_0^z dx$$

$$f_{X+Y}(z) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 z e^{-\frac{z}{\theta}} = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad 0 < z < +\infty \quad (2.36)$$

Vemos que $X+Y$ tem densidade gama $\Gamma(2,\lambda)$. Como pode ser visto na Figura 2.12

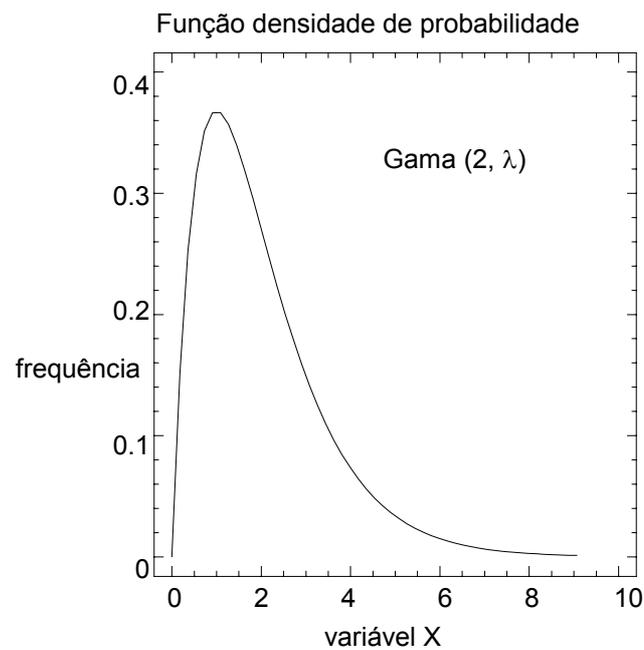


Figura 2.12 - Distribuição gama $\Gamma(2,\lambda)$, resultado da soma de duas distribuições exponenciais com parâmetro $\lambda = 1/\theta$.

2.9.2- Distribuição de Quocientes.

Seja $Z = Y/X$. Então

$$A_z = \{ (x,y) \mid y/x \leq z \} \quad (2.37)$$

Se $x < 0$, então $y/x \leq z$ se, e somente se $y \geq xz$. Assim,

$$A_z = \{ (x,y) \mid x < 0 \text{ e } y \geq xz \} \cup \{ (x,y) \mid x > 0 \text{ e } y \leq xz \} = A_{z1} \cup A_{z2} \quad (2.38)$$

A figura 2.13 mostra essa região de A_z .

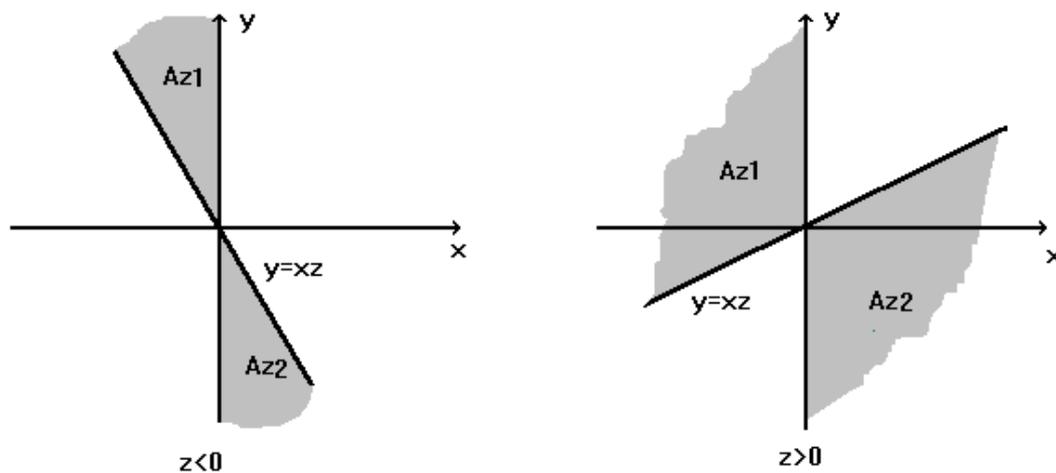


Figura 2.13 - Região de integração para obter a distribuição dos quocientes.

Em (2.30) temos que: (para $z < 0$)

$$F_Z(z) = \iint_{Az} f(x, y) dx dy$$

$$F_Z(z) = \iint_{Az1} f(x, y) dx dy + \iint_{Az2} f(x, y) dx dy$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 \int_{xz}^{+\infty} f(x, y) dy dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{xz} f(x, y) dy dx$$

utilizando a mudança de variável:

$$y' = y/x \Rightarrow y = y'x \quad e \quad dy' = dy/x$$

temos:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 \int_z^{+\infty} f(x, y'x) x dy' dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^z f(x, xy') x dy' dx$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z (-x) f(x, y'x) dy' dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^z x f(x, xy') dy' dx$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 (-x) f(x, y'x) dx dy' + \int_{-\infty}^z \int_0^{+\infty} x f(x, xy') dy' dx$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^0 (-x) f(x, y'x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x, y'x) dx \right] dy'$$

então temos conforme (2.30):

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, yx) dx$$

e podemos escrever:

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2.39)$$

De forma similar podemos mostrar o resultado encontrado em (2.39) é válido para $z > 0$.

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes não negativas, então

$$f_{Y/X}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Y/X}(z) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) f_Y(xz) dx, \quad 0 < z < +\infty \quad (2.40)$$

Exemplo: Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, sendo que X tem função densidade de probabilidade gama com parâmetros de forma α_1 e parâmetro de escala λ e Y tem função densidade de probabilidade gama com parâmetro de forma α_2 e parâmetro de escala λ . Sendo:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha_1)} \text{ para } x > 0 \text{ e} \quad (2.41)$$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^{\alpha_2} y^{\alpha_2-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha_2)} \text{ para } y > 0. \quad (2.42)$$

Substituindo na equação (2.41) os parâmetros $\alpha_1 = 1,5$ e $\lambda = 2$, obtemos:

$$f_X(x) = \frac{2^{1,5} x^{1,5-1} e^{-2x}}{\Gamma(1,5)}$$

$$f_X(x) \cong 3,2 \sqrt{x} \cdot e^{-2x} \text{ para } x > 0 \quad (2.43)$$

e substituindo na equação (2.42) os parâmetros $\alpha_2 = 4$ e $\lambda = 2$, obtemos:

$$f_Y(y) = \frac{2^4 y^{4-1} e^{-2y}}{\Gamma(4)}$$

$$f_Y(y) \cong 2,67 y^3 e^{-2y} \text{ para } y > 0. \quad (2.44)$$

A figura 2.14 apresenta as equações (2.43) e (2.44). Essas distribuições serão utilizadas para exemplificar a variável X e a variável Y, respectivamente, visando avaliar com parâmetros numéricos o comportamento de Y/X.

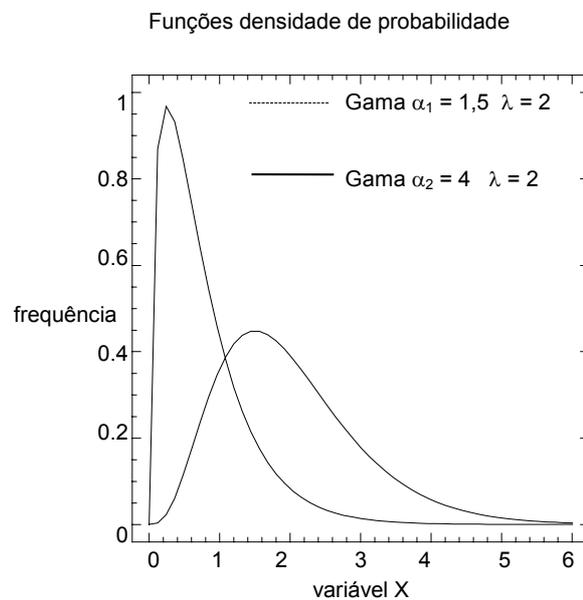


Figura 2.14 - Função densidade de probabilidade gama com parâmetros $\alpha_1 = 1,5$ e $\lambda=2$ ($f_X(x)$) e gama com parâmetros $\alpha_2 = 4$ e $\lambda =2$ ($f_Y(y)$).

Para conhecer a distribuição de $Z=Y/X$ utilizamos a equação (2.40) e obtemos:

$$\begin{aligned}
 f_{Y/X}(z) &= 0, & z \leq 0 & \quad e \\
 f_{Y/X}(z) &= \int_0^{+\infty} x \frac{\lambda^{\alpha_1} x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\lambda^{\alpha_2} xz^{\alpha_2-1} e^{-\lambda xz}}{\Gamma(\alpha_2)} dx \\
 f_{Y/X}(z) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{+\infty} x x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x} (xz)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda xz} dx \\
 f_{Y/X}(z) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} z^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda x(z+1)} dx \\
 f_{Y/X}(z) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} z^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{(\lambda(z+1))^{\alpha_1+\alpha_2}} \\
 f_{Y/X}(z) &= \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{z^{\alpha_2-1}}{(z+1)^{\alpha_1+\alpha_2}}, & 0 < z < +\infty & \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.45) os parâmetros das equações (2.43) e (2.44) obtemos:

$$\begin{aligned}
 f_{Y/X}(z) &= \frac{\Gamma(5,5)}{\Gamma(1,5)\Gamma(4)} \frac{z^3}{(z+1)^{5,5}} \\
 f_{Y/X}(z) &\cong 9,84 \frac{z^3}{(z+1)^{5,5}}, & 0 < z < +\infty & \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

A figura 2.15 mostra a distribuição resultante do quociente de Y e X, para as distribuições apresentadas na figura 2.14 (equação (2.46)).

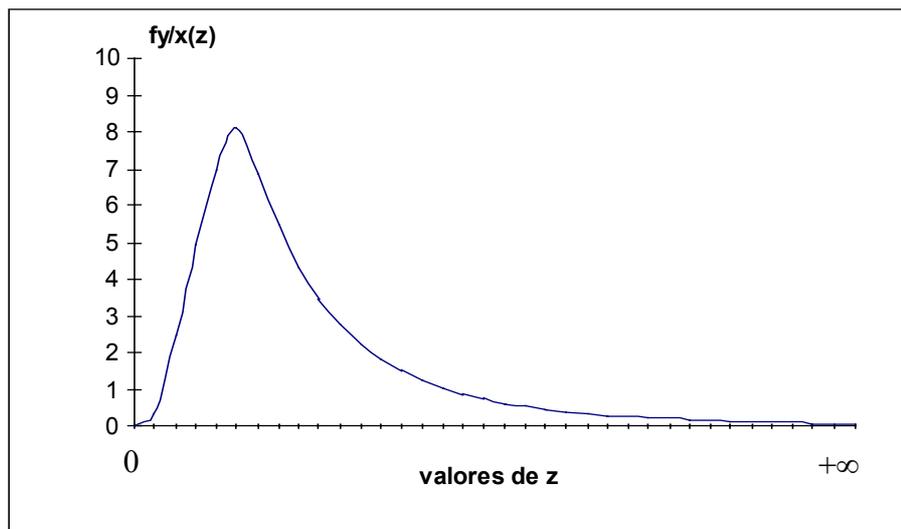


Figura 2.15 - Distribuição resultante para o comportamento de Y/X .

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DOS TEMPOS DE FALHA AO LONGO DO CALENDÁRIO

3.1. Apresentação do problema

Frente as constantes alterações que ocorrem no mercado mundial, as empresas necessitam se aperfeiçoar constantemente para poder continuar competindo. Vários são os modos de buscar a perfeição para satisfazer os clientes, um deles é através do oferecimento de prazos de garantia.

Para ser possível oferecer prazos de garantia é necessário que a empresa conheça o produto que está entregando ao consumidor. Independente do produto, esse estará sujeito a falhas e, para que a empresa possa fornecer prazos atrativos de garantia, sem sofrer grandes perdas, é importante ter acesso a informação referente à possível data de ocorrência de falha. Além disso, precisa certificar-se que no prazo de garantia oferecido não exista uma grande concentração das ocorrências de falha.

Na busca da solução para esse impasse propõe-se uma abordagem que será chamada de *modelagem dos tempos de falha ao longo do calendário*. Para realizar essa modelagem, é preciso, inicialmente, conhecer a distribuição das seguintes variáveis aleatórias:

- X_1 : *O tempo de vida do produto, em horas contínuas de uso*; Consiste em conhecer o comportamento do produto, considerando as horas de uso acumuladas até a ocorrência de falha. Em geral, o setor de engenharia detém essa informação. Ela pode ser obtida através de ensaios de laboratório ou em ensaios de campo. Via de regra, a análise é feita tomando como base o resultado de ensaios acelerados,
-

pois dessa forma é possível diminuir o tempo de desenvolvimento e aceitação do produto.

- X_2 : *O tempo de uso do produto, em horas por dia*; dependendo do produto e do cliente, o uso efetivo pode ser de poucos minutos a várias horas por dia. Um uso mais intenso implica maior desgaste, e a quebra é antecipada no calendário. O uso efetivo pode ser conhecido através de uma pesquisa de mercado junto aos clientes.
- X_3 : *O intervalo de tempo entre a manufatura e a venda, em dias*; após a manufatura, o produto não é imediatamente colocado em uso. Pode demorar de alguns dias a alguns meses para o produto ser transportado para a revenda e chegar efetivamente às mãos do consumidor. Essa informação pode ser obtida com uma pesquisa de mercado junto às revendas.

Conhecidas as informações das três variáveis X_1 , X_2 , X_3 é possível modelar o comportamento das falhas *ao longo do calendário*, conforme será demonstrado na seqüência deste trabalho. Duas alternativas de solução serão discutidas:

- Modelagem via simulação de Monte Carlo
- Modelagem através de solução matemática fechada.

É importante salientar que em muitas situações os grupos de clientes utilizam o mesmo produto com intensidades diferenciadas. Nesse caso além de conhecer X_2 (tempo de uso em horas por dia) também é necessário conhecer a intensidade com que o produto é utilizado por um determinado grupo de cliente. Esse assunto será abordado em maior detalhe no item 3.2.2 .

3.2. Modelagem via simulação de Monte Carlo

Através do uso do método de simulação de Monte Carlo, já descrito, passaremos a abordar a modelagem dos tempos de falha *ao longo do calendário*, isto é, discutiremos a forma de se obter a informação referente à possível data de ocorrência de falha.

Primeiramente descreveremos e exemplificaremos os passos dessa modelagem para quando apenas um grupo de clientes utiliza o produto. Após descreveremos e também exemplificaremos os passos da modelagem via simulação de Monte Carlo na situação em que o produto é utilizado por mais de um grupo de clientes.

3.2.1. Modelagem via simulação de Monte Carlo com um grupo de clientes

O procedimento passo a passo é o seguinte:

Passo 1: Calcular o intervalo de tempo no calendário entre o início do uso do produto até a primeira falha. Esse tempo é computado como o quociente entre o tempo de vida do produto, em horas de uso contínuo, e o tempo de uso do produto, em horas por dia:

$$Y = X_1 / X_2 \quad (3.1)$$

Passo 2: Como o produto não sai da fábrica diretamente às mãos do consumidor é preciso somar a Y o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda. Assim, resulta:

$$Z = Y + X_3 = (X_1 / X_2) + X_3 \quad (3.2)$$

Passo 3: Simulação da distribuição resultante. Fazendo uso do Método da Simulação de Monte Carlo, valores aleatórios são gerados para cada uma das variáveis iniciais X_1 , X_2 e X_3 , e o comportamento de Z é analisado. Gerando-se uma amostra suficientemente grande, é possível inferir a respeito da distribuição dos valores de Z , que representam o tempo entre a manufatura e a falha, em dias do calendário, para todas as quebras do produto.

Passo 4: Discretização da distribuição simulada. A variável Z expressa o comportamento dos tempos entre a manufatura e a falha de forma continuada em dias do calendário. O que nos interessa é conhecer a proporção ou número de falhas em certos períodos de tempo. Por isso, discretizamos a distribuição dos valores de Z em intervalos convenientes de tempo (falhas mês a mês, por exemplo) e para cada intervalo de

tempo (mês) temos a frequência f_i de falhas. A discretização dos resultados irá facilitar as decisões de cunho administrativo, tal como dimensionar as equipes de assistência técnica.

Passo 5: Para modelar o fato de que nem todas as quebras são reportadas ao fabricante, usamos o fator k_0 , chamado de fator de redução de reclamações. Assim genericamente, tem-se:

$$R_i = k_0 \times f_i \quad (3.3)$$

onde: R_i representa a estimativa do número de reclamações para o mês i ;

k_0 é o fator de redução de reclamações; ($k_0 \leq 1,0$)

f_i representa a estimativa do número de quebras para o mês i ;

Introduzindo o fator k_0 , obtemos o número de falhas do produto que são reportadas ao fabricante (reclamações ocorridas mês a mês *ao longo do calendário*).

Passo 6: Além da estimativa pontual para cada espaço de tempo, também há interesse em calcular intervalos de confiança para as estimativas de quebras/reclamações *ao longo do calendário*. Esses cálculos permitem concluir, com embasamento estatístico, a respeito de uma eventual melhora ou degradação no desempenho do produto.

A fim de facilitar a compreensão do texto utilizaremos o exemplo apresentado por Werner, Ribeiro & Vaccaro (1995) para ilustrar os passos acima aplicados à análise de apenas um lote de produtos.

Passos 1 e 2: Foram realizadas várias simulações e para cada conjunto de valores simulados de X_1 , X_2 e X_3 , calculou-se o valor de Z , ou seja, do tempo em dias desde a manufatura até a quebra.

Como essa modelagem é bastante flexível e admite qualquer distribuição de origem para as variáveis iniciais X_1 , X_2 e X_3 , foram utilizadas as distribuições de probabilidade dessas variáveis conforme a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para a modelagem via simulação de Monte Carlo para apenas um grupo de clientes.

Variável	Modelo	γ (Gama)	θ (Teta)	MTBF
Tempo de vida	Weibull	1,5	100	90
Tempo de uso	Weibull	1,5	0,5	-
Tempo até a venda	Weibull	1,5	10	-

Passo 3: Foram realizadas 200 simulações. Em cada uma delas foram gerados 100 conjuntos de valores, representando lotes de 100 unidades do produto. Como resultado, foi possível obter a distribuição dos tempos das quebras *ao longo do calendário* para cada amostra simulada.

Passo 4: Os valores simulados foram analisados em 20 classes de amplitude mensal (30 dias), obtendo-se uma estimativa da proporção de quebras/reclamações ao longo de cada mês a partir da data de fabricação do lote. A figura 3.1 apresenta os resultados obtidos em uma das 200 simulações rodadas.

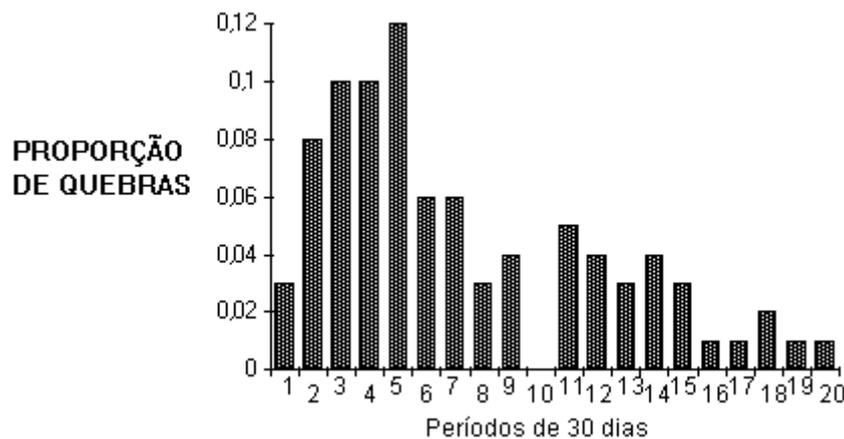


Figura 3.1: Quebras mês a mês conforme observado na simulação 137.

Passo 5: Foi utilizado o fator k_0 igual a 1 ou 100%, isto significa que todas as quebras que ocorreram no cliente final, se tornaram reclamações (são reportadas ao fabricante).

O fator k_0 próximo de 1 é caso típico de produtos com preço elevado, que representa um investimento para o cliente, como por exemplo uma lancha.

Passo 6: Com o intuito de permitir o cálculo dos intervalos de confiança para os percentuais de quebra/reclamações mês a mês, foram efetuadas um total de 200 simulações. Intervalos de confiança de 95% foram obtidos usando aproximação normal para o modelo binomial, que é o modelo apropriado para a análise de percentuais.

A Tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos após as 200 simulações. Essa Tabela mostra as proporções médias de quebras esperadas mês a mês, bem como os limites inferiores e superiores de 95% de confiança para essas proporções.

Tabela 3.2: Proporções médias e intervalos de confiança de 95% para as proporções de quebras mês a mês.

Classe (mês)	Proporção Média	Limite Inferior	Limite Superior
1	0,03345	0,00853	0,05837
2	0,07935	0,04189	0,11681
3	0,09230	0,05218	0,13242
4	0,08990	0,05025	0,12954
5	0,08145	0,04354	0,11936
6	0,06900	0,03387	0,10413
7	0,06230	0,02880	0,09579
8	0,05260	0,02166	0,08353
9	0,04085	0,01341	0,06828
10	0,03835	0,01173	0,06496
11	0,03290	0,00817	0,05762
12	0,02855	0,00546	0,05163
13	0,02625	0,00409	0,04840
14	0,02255	0,00197	0,04312
15	0,01925	0,00020	0,03829
16	0,01670	0	0,03446
17	0,01515	0	0,03207
18	0,01465	0	0,03130
19	0,01265	0	0,02813
20	0,01120	0	0,02578

A Figura 3.2, que apresenta os mesmos resultados da tabela 3.2. em forma gráfica, indica que as maiores proporções de quebras para esse lote ocorreram entre o segundo e o sexto mês, de onde passam a declinar. Além disso, se o período de garantia para esse produto fosse de 12 meses, estima-se que cerca de 66% das unidades necessitariam da

mesma, o que é confirmado pelo baixo MTBF do produto que é de 90 h. Essa análise revela que o produto não pode ser lançado no mercado sem que sua confiabilidade (X_I) seja aprimorada.

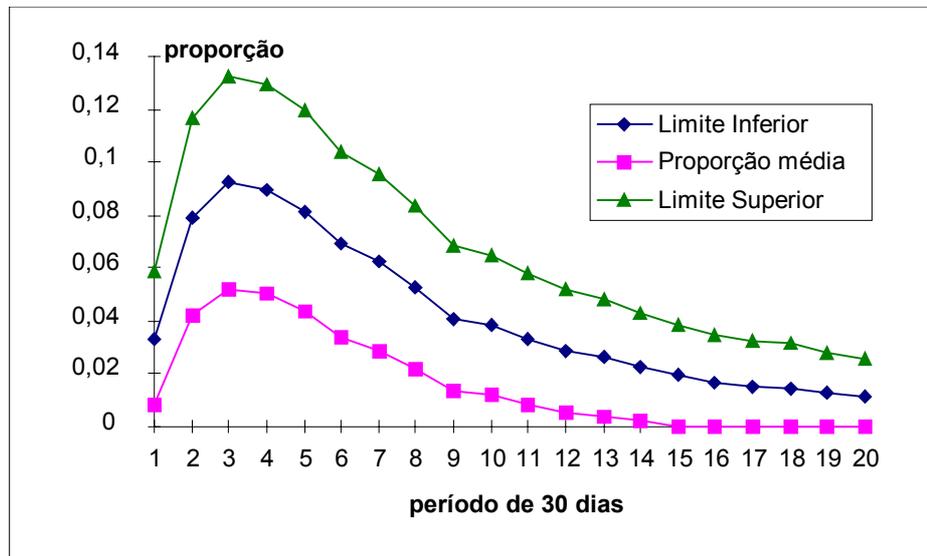


Figura 3.2: Estimativa média e intervalo de confiança de 95% para a proporção de quebras.

3.2.2. Modelagem via simulação de Monte Carlo com vários grupos de clientes

Muitas vezes um mesmo produto é utilizado por grupos de clientes diferenciados. Cada grupo pode submeter o produto a uma intensidade e/ou tempo de uso diferenciados.

Exemplos disso seriam ventiladores, condicionadores de ar utilizados em regiões climáticas diferentes: teríamos o grupo de cliente da região sul, da região central e da região norte. Se a região norte é uma região mais quente, possivelmente nessa região os ventiladores ficariam funcionando por um tempo maior, numa intensidade mais elevada.

Outro exemplo, seriam produtos eletro-mecânicos utilizados por amadores e profissionais. Nesse caso, amadores e profissionais configuram dois grupos de clientes que submetem o produto a uma intensidade e/ou tempo de uso diferenciados.

Expressando matematicamente, a cada grupo de clientes estará associada uma distribuição de probabilidade para X_1 (tempo até a falha, em horas de uso contínuo) e para X_2 (tempo de uso do produto, em horas/dia).

Para modelar essa situação utilizando o método de Monte Carlo, o procedimento passo a passo é o seguinte:

Passo 1: Gera-se através de uma distribuição aleatória um valor que irá definir a qual grupo pertence o cliente. Essa definição se dará de acordo com o percentual de clientes pertencentes a cada grupo, previamente conhecido através de pesquisa de mercado ou alguma outra fonte de informação.

Passo 2: Conhecido o grupo a que pertence o cliente gera-se um valor para a variável X_1 - tempo de vida, em horas contínuas de uso - para esse cliente.

Passo 3: Gera-se também, conforme o grupo a que pertence o cliente, um valor para a variável X_2 - tempo de uso, em horas por dia - para o cliente em questão.

Passo 4: Gera-se um valor para a variável X_3 - intervalo de tempo entre a manufatura e a venda ao cliente final, em dias.

Passo 5: Calcula-se o intervalo de tempo no calendário entre o início do uso do produto até a primeira falha. Conforme já descrito anteriormente, obtendo:

$$Y = X_1 / X_2 \quad (3.1)$$

Passo 6: Como o produto não sai da fábrica diretamente às mãos do consumidor é preciso somar a Y o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda. Assim, resulta:

$$Z = Y + X_3 \quad (3.2)$$

Passo 7: Voltar ao *Passo 1* gerando-se uma amostra suficientemente grande, para ser possível inferir a respeito da distribuição dos valores de Z .

Passo 8: Discretização da distribuição simulada. A distribuição dos valores de Z é discretizada em intervalos convenientes de tempo (falhas semana a semana ou mês a mês, etc.). Esses resultados são úteis para fins administrativos.

Passo 9: Para modelar o fato de que nem todas as quebras são reportadas ao fabricante, usa-se o fator k_0 , chamado de fator de redução de reclamações. Assim genericamente, tem-se:

$$R_i = k_0 \times f_i \quad (3.3)$$

onde: R_i representa a estimativa do número de reclamações para o mês i ;

k_0 é o fator de redução de reclamações;

f_i representa a estimativa do número de quebras para o mês i ;

Introduzindo o fator k_0 obtém-se o número de falhas do produto que são reportadas ao fabricante (reclamações ocorridas mês a mês *ao longo do calendário*).

Passo 10: Além da estimativa pontual para cada espaço de tempo, também há interesse em calcular intervalos de confiança para as estimativas de quebras/reclamações *ao longo do calendário*. Esses cálculos permitem concluir, com embasamento estatístico, a respeito de uma eventual melhora ou degradação no desempenho do produto.

Os passos de 1 a 10 foram esquematizados em um fluxograma, que é apresentado na figura 3.3.

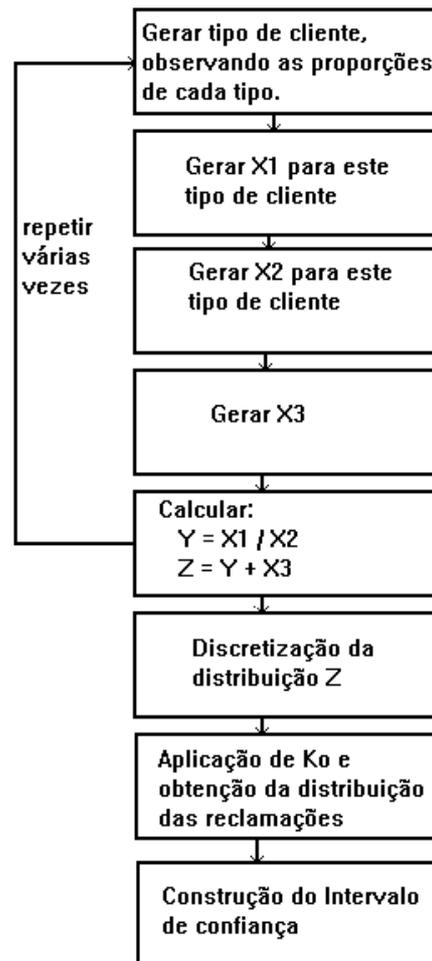


Figura 3.3. Fluxograma para a modelagem via simulação de Monte Carlo com diferentes grupos de clientes.

A fim de dar uma visão mais esclarecedora do texto exemplificaremos os dez passos acima descritos para a produção de apenas um lote, sendo que o produto é utilizado por 2 grupos de clientes.

Passo 1: O grupo 1 correspondente a 80% do total de clientes, que apresentam um modo amador de uso do produto e os demais 20% dos clientes que pertencem ao grupo 2, apresentam um modo de uso profissional do produto.

Então se um valor aleatório gerado de uma distribuição uniforme, que varia no intervalo $[0,1]$, for menor que 0,8 estaremos a frente de um cliente do tipo amador, caso contrário teremos representado um cliente do tipo profissional.

Passo 2 a 4: As distribuições de probabilidade utilizadas para as variáveis X_1 , X_2 e X_3 seguem a Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para a modelagem via simulação de Monte Carlo com diferentes grupos de clientes.

Variável	Grupo de clientes	Modelo	Parâmetros
X_1 : Tempo de vida do produto	1	Weibull	$\gamma = 2$ $\theta = 300$
X_1 : Tempo de vida do produto	2	Weibull	$\gamma = 2$ $\theta = 150$
X_2 : Tempo de uso do produto	1	Weibull	$\gamma = 5$ $\theta = 2$
X_2 : Tempo de uso do produto	2	Weibull	$\gamma = 5$ $\theta = 5$
X_3 : Intervalo até a venda	-	Exponencial	$\theta = 50$

Se o cliente gerado no *Passo 1* pertence ao grupo 1, então será gerado um valor para a variável X_1 , proveniente de uma distribuição Weibull com $\gamma = 2$ e $\theta = 300$. Para a variável X_2 será gerado um valor proveniente de uma distribuição Weibull com $\gamma = 5$ e $\theta = 2$ e finalmente será gerado para a variável X_3 um valor proveniente de uma distribuição exponencial com $\theta = 50$.

Passo 5 a 7: Após gerados os valores para as variáveis X_1 , X_2 e X_3 , procede-se o cálculo de Y e Z . Foram gerados 15000 valores, representando o fenômeno estudado. Como resultado, foi possível obter a distribuição dos tempos das quebras *ao longo do calendário*.

Passo 8: Os valores simulados foram agrupados em 20 classes de amplitude mensal (30 dias), obtendo-se uma estimativa da proporção de quebras ao longo de cada mês a partir da data de fabricação do lote. A figura 3.4 apresenta os resultados obtidos na simulação.

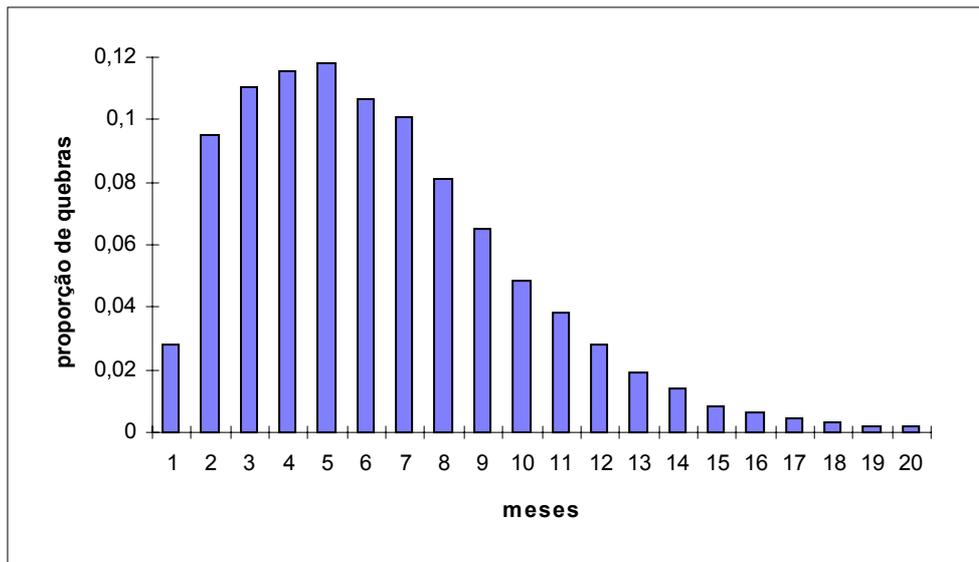


Figura 3.4: Quebras mês a mês conforme observado na simulação.

Passo 9: Foi utilizado o fator k_0 igual a 0.9 ou 90%, isto significa que de todas as quebras que ocorreram no cliente final, 90% foram reportadas ao fabricante (se tornaram reclamações), os outros 10% das quebras não chegaram ao conhecimento desse.

Passo 10: Intervalos de confiança de 95% foram obtidos para lotes de 100 unidades do produto, usando o modelo binomial aproximado através do modelo normal.

A Tabela 3.4 apresenta os resultados das proporções obtidas pela simulação. Essa Tabela mostra as proporções de reclamações esperadas mês a mês, bem como os limites inferiores e superiores de 95% de confiança para essas proporções.

Tabela 3.4: Proporções e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em lotes de 100 unidades do produto.

Classe (mês)	Limite Inferior	Proporção Média	Limite Superior
1	0	0,0251	0,0557
2	0,0308	0,0857	0,1405
3	0,0408	0,0995	0,1581
4	0,0440	0,1038	0,1636
5	0,0458	0,1063	0,1667
6	0,0382	0,0959	0,1537
7	0,0345	0,0909	0,1472
8	0,0221	0,0732	0,1243
9	0,0125	0,0584	0,1044
10	0,0037	0,0439	0,0841
11	0	0,0343	0,0699
12	0	0,0251	0,0557
13	0	0,0172	0,0426
14	0	0,0129	0,0350
15	0	0,0076	0,0245
16	0	0,0058	0,0207
17	0	0,0041	0,0167
18	0	0,0026	0,0127
19	0	0,0017	0,0097
20	0	0,0016	0,0095

A figura 3.5 apresenta os mesmos resultados da tabela 3.4 em forma gráfica. A figura evidencia que as maiores proporções apresentam entre o segundo e o sétimo mês. Se o período de garantia para esse produto for de 12 meses, estima-se que aproximadamente 84 % das vendas resultariam em reclamações de garantia, sendo evidente a necessidade de melhorar o produto antes de lançá-lo no mercado.

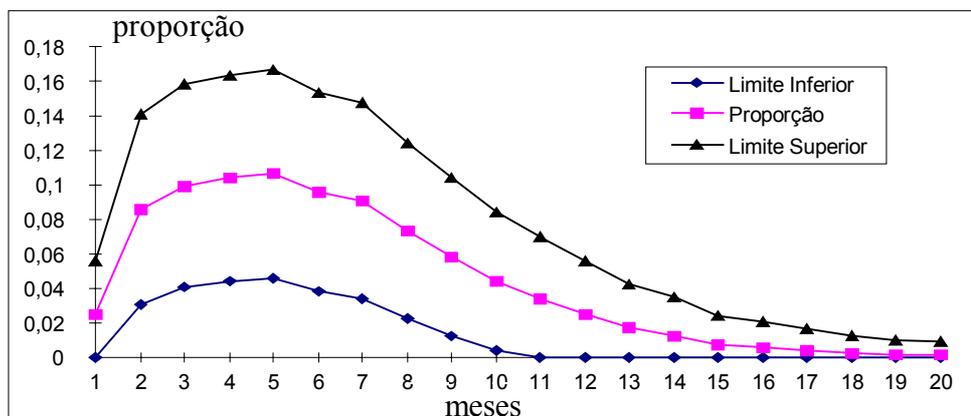


Figura 3.5: Estimativa e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em um lote de 100 unidades do produto.

3.3. Modelagem via método de análise matemática fechada

O método de análise via simulação de Monte Carlo é uma alternativa muito acessível, já que o computador é amplamente utilizado nos tempos atuais. Como não podemos nos prender em um método de análise único, abordaremos a modelagem fazendo uso de operações matemáticas, envolvendo duas distribuições e abordando o caso em que temos um único grupo de clientes.

Através da modelagem matemática fechada temos acesso a uma solução exata. Além disso, o resultado desse método de análise é mais rápido de ser obtido, pois não exige um tempo computacional como o método de análise via simulação de Monte Carlo.

A modelagem via método de análise matemática fechada consiste em modelar as distribuições das três variáveis X_1 , X_2 e X_3 e, obter a distribuição resultante para o tempo medido desde a manufatura até a ocorrência da primeira falha.

As operações a serem realizadas consistem em:

Passo 1: Obter a distribuição de probabilidade para o intervalo de tempo no calendário entre o início do uso do produto até a primeira falha. Essa distribuição é obtida a partir do quociente entre o tempo de vida do produto, em horas de uso contínuo, e o tempo de uso do produto, em horas por dia:

$$Y = X_1 / X_2 \Rightarrow f_Y(y) \quad (3.1)$$

Passo 2: Como o produto não sai da fábrica diretamente às mãos do consumidor é preciso somar a Y o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda e após obter a distribuição de probabilidade dessa soma. Assim, resulta:

$$Z = Y + X_3 = (X_1 / X_2) + X_3 \Rightarrow f_Z(z) \quad (3.2)$$

Visando equacionar as operações dadas por (3.1) e (3.2), no capítulo 2 abordamos os teoremas da distribuição da soma e do quociente de duas variáveis, na ocasião exemplificamos conforme a literatura, o comportamento da soma de duas distribuições exponenciais e o quociente de duas distribuições gama.

Vamos verificar o comportamento do quociente de:

- duas distribuições Exponenciais e
- duas distribuições de Weibull.

Para os resultados possíveis de serem resolvidos pelo método de análise matemática fechada, verificaremos o comportamento da soma com:

- uma distribuição Exponencial e
- uma distribuição Weibull.

Caso 1: O primeiro caso a ser estudado é o quociente de duas v.a. que seguem o modelo da distribuição exponencial. Seja X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com função densidade de probabilidade exponencial como descrito abaixo:

A densidade de X_2 é dada por:

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} \text{ para } x_2 \geq 0$$
$$f_{X_2}(x_2) = 0 \text{ para } x < 0. \quad (3.4)$$

A densidade de X_1 é a também exponencial, mas com parâmetro θ_1 , isto é,

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} \text{ para } x_1 \geq 0$$
$$f_{X_1}(x_1) = 0 \text{ para } x < 0. \quad (3.5)$$

Pela fórmula (2.40) temos que:

$$f_{X_1/X_2}(y) = \int_0^{+\infty} x_2 \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x_2 y}{\theta_1}} dx_2, \quad 0 < y < +\infty$$

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \int_0^{+\infty} x_2 e^{-\frac{x_2}{\theta_2} - \frac{x_2 y}{\theta_1}} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \int_0^{+\infty} x_2 e^{-\frac{(x_2 \theta_1 + x_2 y \theta_2)}{\theta_1 \theta_2}} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \int_0^{+\infty} x_2 e^{-\frac{x_2 (\theta_1 + y \theta_2)}{\theta_1 \theta_2}} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{\Gamma(2)}{\left(\frac{\theta_1 + y \theta_2}{\theta_1 \theta_2}\right)^2}$$

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \frac{(\theta_1 \theta_2)^2}{(\theta_1 + y \theta_2)^2}$$

$$\boxed{f_{X_1/X_2}(y) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + y \theta_2)^2}} \quad 0 < y < +\infty \quad (3.6)$$

A figura 3.6 apresenta o comportamento de alguns casos específicos da equação (3.6).

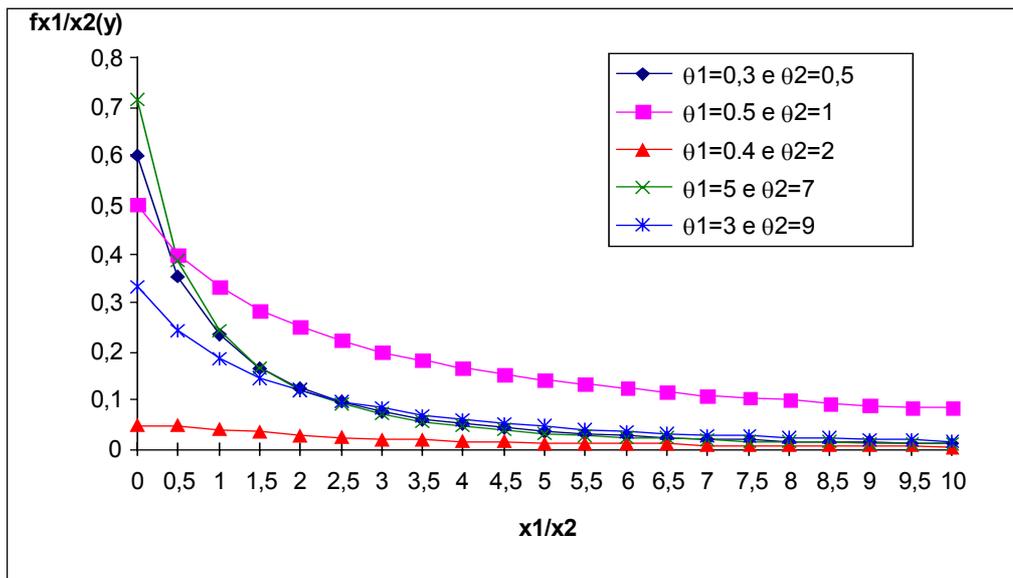


Figura 3.6 - Função resultante do quociente de uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_1 = 1/\theta_1$ por uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda_2 = 1/\theta_2$.

Caso 1A: Sendo que a função resultante do caso 1 tem o método de análise matemática fechada, passamos então, a encontrar a resultante dessa f.d.p dada pela equação (3.6) com a soma de uma função distribuição exponencial.

$$f_{X1/X2}(y) = f_Q(q) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + q \theta_2)^2} \text{ para } q \geq 0 \text{ e } f_Q(q) = 0 \text{ para } q < 0.$$

$$f_{X3}(x_3) = \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{x_3}{\theta_3}} \text{ para } x_3 \geq 0$$

$$f_{X3}(x_3) = 0 \text{ para } x_3 < 0. \quad (3.7)$$

Pela fórmula (2.35) temos que:

$$f_{Q+X3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X3}(z) = \int_0^z f_Q(q) f_{X3}(z-q) dq, \quad 0 < z < +\infty$$

$$\begin{aligned}
f_{Q+X_3}(z) &= \int \frac{\theta_1 \theta_2}{0(\theta_1 + q\theta_2)^2} \frac{1}{\theta_3} e^{-\frac{(z-q)}{\theta_3}} dq \\
f_{Q+X_3}(z) &= \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_3} \int \frac{1}{0(\theta_1 + q\theta_2)^2} e^{-\frac{(z-q)}{\theta_3}} dq \\
f_{Q+X_3}(z) &= \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_3} \int \frac{1}{0(\theta_1 + q\theta_2)^2} e^{-\frac{z}{\theta_3} + \frac{q}{\theta_3}} dq \\
f_{Q+X_3}(z) &= \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_3} e^{-\frac{z}{\theta_3}} \int \frac{1}{0(\theta_1 + q\theta_2)^2} e^{\frac{q}{\theta_3}} dq \tag{3.8}
\end{aligned}$$

A integral que aparece na equação (3.8) não pode ser resolvida de forma fechada. A alternativa é utilizar a análise numérica.

Caso 1B: Sendo que a função resultante do caso 1 tem solução matemática fechada, passamos então, a encontrar a resultante dessas f.d.p dada pela equação (3.6) com a soma de uma função distribuição Weibull.

$$\begin{aligned}
f_{X_1/X_2}(y) = f_Q(q) &= \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_2 + q\theta_1)^2} \text{ para } q \geq 0 \text{ e } f_Q(q) = 0 \text{ para } q < 0. \\
f_{X_3}(x_3) &= \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (x_3)^{\gamma_3 - 1} e^{-\left(\frac{x_3}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} \text{ para } x_3 \geq 0 \text{ e} \\
f_{X_3}(x_3) &= 0 \text{ para } x_3 < 0. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Pela fórmula (2.35) temos que:

$$\begin{aligned}
f_{Q+X_3}(z) &= 0, & z \leq 0 \text{ e} \\
f_{Q+X_3}(z) &= \int_0^z f_Q(q) f_{X_3}(z-q) dq, & 0 < z < +\infty \\
f_{Q+X_3}(z) &= \int_0^z \frac{\theta_1 \theta_2}{0(\theta_2 + q\theta_1)^2} \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-\left(\frac{z-q}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} dq \\
f_{Q+X_3}(z) &= \frac{\theta_1 \theta_2 \gamma_3 z}{\theta_3^{\gamma_3}} \int_0^z \frac{1}{0(\theta_2 + q\theta_1)^2} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-\frac{(z-q)^{\gamma_3}}{\theta_3^{\gamma_3}}} dq \\
f_{Q+X_3}(z) &= \frac{\theta_1 \theta_2 \gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} e^{-\frac{z^{\gamma_3}}{\theta_3^{\gamma_3}}} \int_0^z \frac{1}{0(\theta_2 + q\theta_1)^2} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-(z-q)^{\gamma_3}} dq
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Novamente, para resolver a integral que aparece na equação (3.11) é preciso usar técnicas numéricas.

Caso 2: O segundo caso a ser estudado é o quociente de duas v.a que seguem o modelo da distribuição de Weibull. Seja X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes, com suas respectivas funções densidades de probabilidade.

A densidade de X_2 é dada por:

$$\begin{aligned}
f_{X_2}(x_2) &= \frac{\gamma_2}{A_2} x_2^{\gamma_2-1} e^{-\frac{x_2^{\gamma_2}}{A_2}} \text{ para } x_2 \geq 0 \text{ e onde } A_2 = \theta_2^{\gamma_2} \\
f_{X_2}(x_2) &= 0 \text{ para } x_2 < 0.
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

A densidade de X_1 é:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\gamma_1}{A_1} x_1^{\gamma_1-1} e^{-\frac{x_1}{A_1}} \quad \text{para } x_1 \geq 0 \text{ e onde } A_1 = \theta_1^{\gamma_1}$$

$$f_{X_1}(x_1) = 0 \text{ para } x_1 < 0 \quad (3.12)$$

Pela fórmula (2.40) temos que:

$$f_{X_1/X_2}(z) = f_Q(q) = \int_0^{+\infty} x_2 \frac{\gamma_2}{A_2} x_2^{\gamma_2-1} e^{-\frac{x_2^{\gamma_2}}{A_2}} \frac{\gamma_1}{A_1} (x_2 z)^{\gamma_1-1} e^{-\frac{(x_2 z)^{\gamma_1}}{A_1}} dx_2, \quad \text{onde } 0 < z < +\infty$$

$$f_{X_1/X_2}(z) = f_Q(q) = \frac{\gamma_2}{A_2} \frac{\gamma_1}{A_1} \int_0^{+\infty} x_2^{\gamma_2} (x_2 z)^{\gamma_1-1} e^{-\frac{x_2^{\gamma_2}}{A_2} - \frac{(x_2 z)^{\gamma_1}}{A_1}} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(z) = f_Q(q) = \frac{\gamma_2}{A_2} \frac{\gamma_1}{A_1} \int_0^{+\infty} x_2^{\gamma_2 + \gamma_1 - 1} z^{\gamma_1 - 1} e^{-\left(\frac{x_2^{\gamma_2}}{A_2} + \frac{(x_2 z)^{\gamma_1}}{A_1}\right)} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(z) = f_Q(q) = \frac{\gamma_2}{A_2} \frac{\gamma_1}{A_1} z^{\gamma_1 - 1} \int_0^{+\infty} x_2^{\gamma_2 + \gamma_1 - 1} e^{-\left(\frac{x_2^{\gamma_2}}{A_2} + \frac{(x_2 z)^{\gamma_1}}{A_1}\right)} dx_2 \quad (3.13)$$

Sendo que não é possível obter a solução matemática fechada para integral dada em (3.13), exigindo assim, a análise numérica. A seguir vamos obter a soma entre o quociente X_1/X_2 e uma variável aleatória X_3 que segue o modelo da distribuição Weibull.

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (x_3)^{\gamma_3-1} e^{-\left(\frac{x_3}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} \quad \text{para } x_3 \geq 0 \text{ e}$$

$$f_{X_3}(x_3) = 0 \quad \text{para } x_3 < 0. \quad (3.9)$$

Pela fórmula (2.35) temos que:

$$f_{Q+X_3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) f_{X_3}(z-q) dq, \quad 0 < z < +\infty$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-\left(\frac{z-q}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} dq, \quad 0 < z < +\infty \quad (3.14)$$

Como a função $f_Q(q)$ precisa ser resolvida por análise numérica, fica evidente que a resolução da equação (3.14) também se dará através de análise numérica.

Passo 3: A seguir procederemos com a discretização da distribuição. Após encontrada a distribuição dos valores de Z , essa é discretizada em intervalos convenientes de tempo (falhas semana a semana ou mês a mês, etc.) e obtida a estimativa do número de quebras por intervalo de tempo (f_i).

Passo 4: Para modelar o fato de que nem todas as quebras são reportadas ao fabricante, usamos o fator k_0 , chamado de fator de redução de reclamações. Assim pela equação (3.3), tem-se:

$$R_i = k_0 \times f_i$$

onde: R_i representa a estimativa do número de reclamações para o mês i ;

k_0 é o fator de redução de reclamações;

f_i representa a estimativa do número de quebras para o mês i ;

Introduzindo o fator k_0 obtemos o número de falhas ocorridas mês a mês *ao longo do calendário* para todas as quebras do produto que são reportadas ao fabricante (reclamações).

Passo 5: A partir da estimativa para cada intervalo de tempo, há interesse em concluir, com embasamento estatístico, a respeito de uma eventual melhora ou degradação no desempenho do produto. Para tanto constroem-se um intervalo de confiança, aproximando-se a distribuição binomial pela distribuição normal.

CAPÍTULO 4

ESTUDO DE CASOS

Apresentaremos nesse capítulo aplicações dos métodos descritos. Uma aplicação prática de um produto eletro-mecânico será utilizada para elucidar a alternativa de método de análise via simulação de Monte Carlo, com apenas um grupo de clientes. Para exemplificar o método de análise matemática fechada, utilizaremos para as variáveis X_1 , X_2 e X_3 primeiramente as distribuições do exemplo citado no capítulo anterior. Depois as distribuições do caso prático, permitindo assim tecer algumas comparações entre as duas soluções. Desenvolveremos uma aplicação hipotética, para ilustrar o método de análise via simulação de Monte Carlo, com dois grupos de clientes que submetem o produto a um uso diferenciado.

4.1. Estudo de caso prático para um grupo de clientes via simulação de Monte Carlo

O presente estudo de caso apresenta uma análise do comportamento de certo produto eletro-mecânico. Analisaremos todas as quebras reportadas, ou seja, as reclamações que são provenientes dos dados de garantia disponíveis para o produto no período de jan/93 até out/95. Salientamos porém, que para realizar algumas análises necessitamos de dados fora desse período, ao qual tínhamos acesso.

Inicialmente é feita uma apresentação das informações extraídas do banco de dados da assistência técnica, de onde verificou-se o tempo do uso do produto pelos clientes (X_2) e o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda (X_3).

Em seguida, são feitas estimativas de confiabilidade embasadas em estudos de simulação. O procedimento utilizado é a partir do conhecimento da distribuição do número de reclamações mês a mês, Z , realizar várias simulações até que obtenha uma distribuição do tempo de vida do produto (X_i) que gere um número de reclamações mês a mês próximas às observadas. Por fim prevemos o número de reclamações mês a mês, construindo também um intervalo de confiança, levando em conta a programação da produção.

4.1.1. Apresentação das Informações

A Tabela 4.1 apresenta um sumário da produção, reclamações e reclamações associadas, para o produto. A definição de *reclamações* e *reclamações associadas* é a seguinte:

- *Reclamações*: total de notificações à fábrica de reclamações efetuadas no mês em questão, correspondendo aos produtos produzidos em qualquer momento no passado;
- *Reclamações associadas*: total de reclamações associadas aos produtos produzidos no mês em questão, correspondendo a reclamações efetuadas em qualquer momento no futuro.

À esquerda da Tabela 4.1 temos o mês e ano, a quantidade de produtos produzidos, além das quantidades de produtos vendidos e as reclamações no mês. No quadro à direita da Tabela 4.1 observamos as reclamações associadas e o percentual de reclamações (reclamações associadas/produzido) relativas ao mês referenciado.

Tabela 4.1: Apresentação dos dados de assistência técnica

Reclamações mês a mês				Reclamações associadas mês a mês			
mês/ano	produzido	vendido	reclamações*	mês/ano	produzido	reclamações** associadas	%
jan/93	32	44	37	jan/93	32	2	6,25
fev/93	187	218	0	fev/93	187	6	3,21
mar/93	296	275	111	mar/93	296	38	12,84
abr/93	492	465	98	abr/93	492	2	0,41
mai/93	632	334	97	mai/93	632	62	9,81
jun/93	672	688	54	jun/93	672	40	5,95
jul/93	396	601	18	jul/93	396	49	12,37
ago/93	283	539	0	ago/93	283	44	15,54
set/93	536	499	115	set/93	536	60	11,19
out/93	385	289	54	out/93	385	39	10,13
nov/93	0	229	13	nov/93	0	0	0
dez/93	20	200	72	dez/93	20	0	0
jan/94	152	210	0	jan/94	152	31	20,39
fev/94	446	531	20	fev/94	446	46	10,31
mar/94	654	681	41	mar/94	654	51	7,80
abr/94	1003	544	106	abr/94	1003	95	9,47
mai/94	1023	1478	46	mai/94	1023	70	6,84
jun/94	1924	1930	90	jun/94	1924	131	6,81
jul/94	1836	1782	69	jul/94	1836	89	4,85
ago/94	1717	1756	81	ago/94	1717	82	4,78
set/94	2169	2186	30	set/94	2169	77	3,55
out/94	2139	2161	99	out/94	2139	92	4,30
nov/94	1401	1383	153	nov/94	1401	46	3,28
dez/94	1061	1071	185	dez/94	1061	63	5,94
jan/95	339	301	0	jan/95	339	14	4,13
fev/95	718	728	87	fev/95	718	31	4,32
mar/95	2871	2912	58	mar/95	2871	111	3,87
abr/95	1482	1525	118	abr/95	1482	40	2,70
mai/95	2938	2756	109	mai/95	2938	89	3,03
jun/95	2501	2688	225	jun/95	2501	34	1,36
jul/95	2963	604	117	jul/95	2963	26	0,88
ago/95	634	-	92	ago/95	634	3	0,47
total	33902	31608	2395	total	33902	1535	----

* Todas as informações que constam no banco de dados

** Somente informações com número de série.

Analisando o percentual de reclamações (associadas) vemos que o desempenho do produto melhorou significativamente. Essa melhoria é observada através do percentual médio, que em 1993 era de 8% passando para 4% no período de julho de 1994 até meados de 1995. Através do teste não-paramétrico Mann-Whitney para comparar as duas médias independentes confirmamos a melhora do desempenho do produto ao nível de 5% de significância.

Existem um grande percentual de reclamações que são informadas sem o número de série do produto, permanecendo o seu registro apenas na coluna de reclamações reportadas da tabela 4.1, mas não constam na coluna de reclamações associadas, uma vez que se perde o rastreamento da informação.

4.1.2. Modelagem Matemática

Conhecidos os totais de reclamações mês a mês (ou seja, a distribuição do tempo até a falha em dias do calendário Z), usando o método de análise via simulação de Monte Carlo é possível estimar a confiabilidade dos produtos (ou seja, o tempo até a falha em horas de uso contínuo X_1).

A idéia é: dado os modelos ajustados para as variáveis aleatórias X_2 e X_3 , alterar o modelo para variável X_1 até obter uma distribuição de probabilidade para Z que gere totais de reclamações mês a mês compatíveis com aqueles apresentados na Tabela 4.1 (quadro à esquerda).

4.1.3. Distribuições do tempo de utilização dos produtos pelos clientes (X_2) e o intervalo de tempo desde a fabricação até a venda (X_3)

Para obtermos os valores da distribuição de X_1 é necessário primeiramente ajustar as distribuições para X_2 e X_3 . Utilizamos as informações provenientes do banco de dados da assistência técnica, de onde obtivemos os histogramas para X_2 e X_3 . Após, ajustamos uma distribuição de probabilidade a esses histogramas e obtivemos os modelos probabilísticos para o comportamento do tempo de uso do produto pelos clientes e do intervalo de tempo que os produtos permanecem na revenda, desde a fabricação até a venda ao usuário final.

Para a variável tempo de uso do cliente (X_2) foi introduzida uma redução no parâmetro de escala. Essa correção foi introduzida pela necessidade de remover o viés que existe no banco de dados da assistência técnica. Estima-se que a população de clientes

utilize o produto por um período (horas/semana) 25% menor que aquele utilizado pelo grupo registrado no banco de dados. Essa estimativa foi baseada no conhecimento dos engenheiros da assistência técnica, que possuem outras fontes de informação (resultado de pesquisas de mercado) referentes ao tempo de uso do produto.

A figura 4.1 apresenta o histograma com os resultados observados do tempo de uso do produto pelos clientes, sendo que a curva ajustada leva em conta a redução sugerida pelos engenheiros. Na figura 4.2 observamos os resultados que constam no banco de dados para o intervalo de tempo entre a manufatura e a venda ao cliente final, bem como a curva ajustada para modelar esse comportamento.

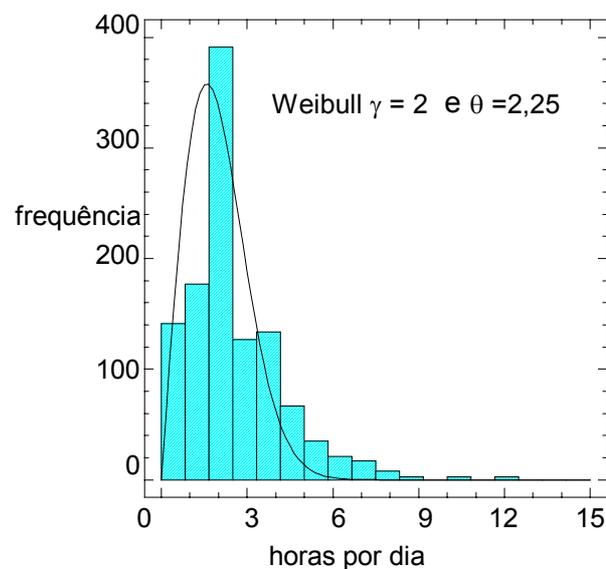


Figura 4.1: Distribuição de probabilidade do tempo de uso para o produto (X_2).

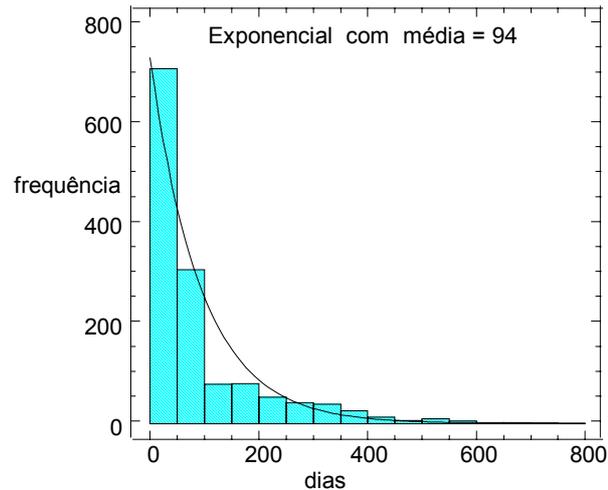


Figura 4.2: Distribuição de probabilidade do intervalo de tempo entre a manufatura e a venda (X_3).

4.1.4. Suavização da distribuição de reclamações mês a mês (Z).

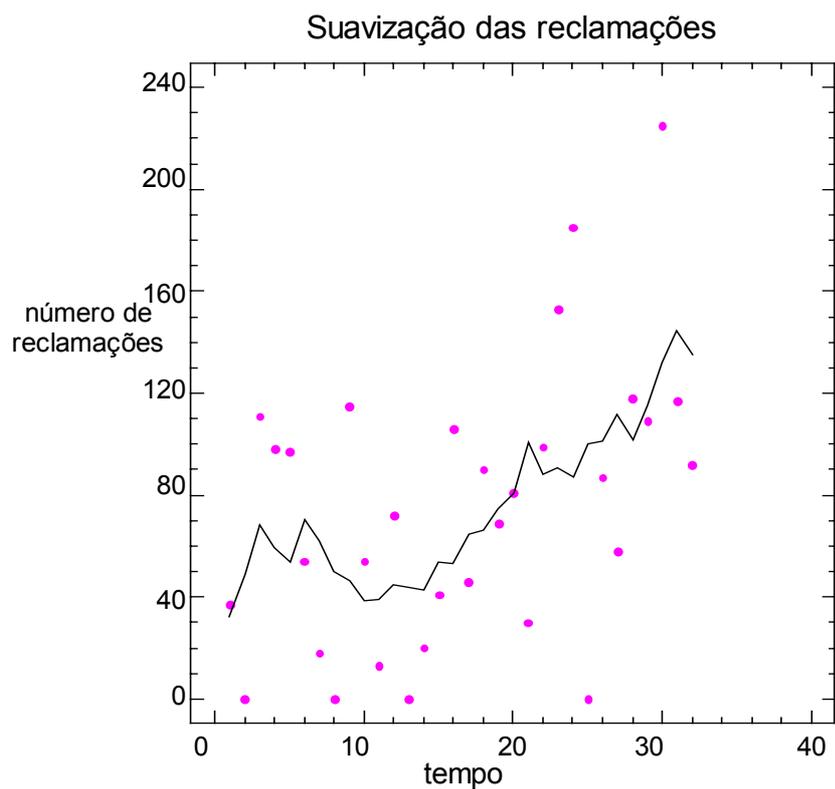
Conforme a coluna de reclamações da Tabela 4.1 podemos observar que ocorrem muitas oscilações. São responsáveis por essas oscilações fatos tais como: aglomeração dos registros das quebras por parte das revendas até repassar as informações para a fábrica e o período de férias no setor de garantia da fábrica - que nesse período não realiza nenhum registro.

Para minimizar essas oscilações fizemos uso da técnica de suavização por médias móveis. Tendo em vista a natureza das distorções existentes na coluna das reclamações, decidiu-se utilizar um período de 7 meses, isto é, a média de três meses passados, o mês atual e três meses futuros, para efetuar a suavização. Os dados suavizados são mais representativos do verdadeiro fluxo de reclamações que chegam a assistência técnica e, por isso, serão utilizados na análise.

Os dados de reclamações mês a mês e o resultado da suavização por médias móveis podem ser observados na Tabela 4.2 e na Figura 4.3.

Tabela 4.2 : Dados das reclamações e as médias móveis correspondentes.

mês	reclam.	médias móveis	mês	reclam.	médias móveis	mês	reclam.	médias móveis
jan/93	37	32,4	jan/94	0	43,7	jan/95	0	100,0
fev/93	0	49,3	fev/94	20	42,6	fev/95	87	101,4
mar/93	111	68,6	mar/94	41	53,6	mar/95	58	111,7
abr/93	98	59,3	abr/94	106	53,1	abr/95	118	102,0
mai/93	97	54,0	mai/94	46	64,7	mai/95	109	115,1
jun/93	54	70,4	jun/94	90	66,1	jun/95	225	132,2
jul/93	18	62,3	jul/94	69	74,4	jul/95	117	144,7
ago/93	0	50,1	ago/94	81	81,1	ago/95	92	135,4
set/93	115	46,6	set/94	30	101,0			
out/93	54	38,9	out/94	99	88,1			
nov/93	13	39,1	nov/94	153	90,7			
dez/93	72	45,0	dez/94	185	87,4			

**Figura 4.3:** Dados das reclamações e as médias móveis de 7 meses.

4.1.5. Ajuste das reclamações para obtenção da distribuição do tempo de falha X_I

Para obter a distribuição de X_I (tempo até a falha em horas de uso contínuo), aproxima-se, através de simulação, o comportamento das reclamações mês a mês. A simulação é feita considerando o mesmo modelo de distribuição de probabilidade para X_I (Weibull), alterando apenas os parâmetros do modelo até obter o resultado que melhor se ajusta às reclamações observadas mês a mês (Z).

Como as distribuições de X_2 e X_3 e Z (suavizado) são conhecidas, utilizamos essa sistemática a fim de obter os parâmetros da distribuição de probabilidade de X_I .

Para realizar essa análise, levamos em conta:

- (i) A programação da produção.
- (ii) O fator de correção para a porcentagem de quebras não reportadas, nessa análise será de 0,7, indicando que somente 70% dos clientes com direito a garantia reportaram seus problemas ou tiveram sua reclamação chegando ao conhecimento do fabricante (algumas reclamações são filtradas na revenda).
- (iii) As estimativas da quantidade de unidades vendidas, pois o que é produzido em certo mês permanece por algum tempo nas revendas. Pelo fato de permanecer na revenda as unidades levam algum tempo até que comecem a serem usadas efetivamente, defasando assim o período até que ocorra a falha.

Através da análise do percentual de reclamações (associadas) detectou-se uma alteração (melhoria) na confiabilidade do produto ao passar do período de 1993/94 para o período de 1994/95. Para reiterar essa análise foi realizado um ajuste para o número de reclamações no período de 1993/94 o que resultou em super estimativas para o número de reclamações no período de 1995. Essas estimativas altas indicam que a confiabilidade de produto se modificou (melhorou), assim para estimar a atual confiabilidade do produto vamos ajustar o número de reclamações mês a mês no período de 1995.

4.1.6. Ajuste das reclamações observadas em 1995

Ajustando uma distribuição de X_I para o período de 1995 encontramos como o melhor modelo uma distribuição de Weibull com $\gamma = 1,5$ e $\theta = 2100$. O gráfico de comparação das *reclamações x estimativa teórica* aparece na Figura 4.4.

Observa-se que o modelo de Weibull com $\gamma = 1,5$ e $\theta = 2100$ fornece um bom ajuste para o período de 1995. Contudo, esse modelo subestima o número de reclamações que ocorreram em 1993-1994, uma vez que nesse período (no passado) a confiabilidade do produto era menor.

No período inicial de 1993 podemos observar, também na figura 4.4, que temos um péssimo ajuste - oscilações das reclamações - devido à causas especiais, associadas a problemas no início da produção deste produto.

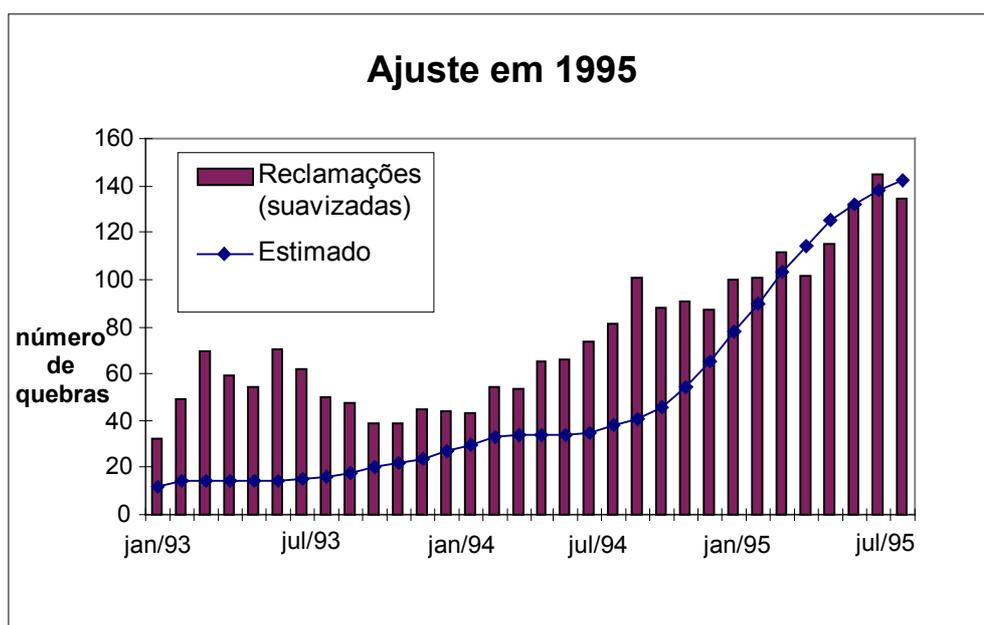


Figura 4.4: Resultados da simulação, buscando-se um ajuste ótimo para o período de 1995.

4.1.7. Estimativas de confiabilidade

Na Figura 4.4 o modelo foi ajustado para os meses de 1995, resultando em uma distribuição de Weibull com parâmetro de escala $\theta = 2100$ h, (MTBF = 1900 h). O número (médio) de reclamações mês a mês permaneceu próximo a 120 unidades. Além disto, através da análise gráfica da Figura 4.4 confirmamos a melhora ocorrida com o produto, pois o modelo simulado subestima os valores de reclamações em 1993/1994.

Utilizando técnicas de inferência estatística e com base nos modelos ajustados podemos observar, na Tabela 4.3, as estimativas resumo para o período de 1995 e o padrão da fábrica.

Tabela 4.3: Parâmetros da distribuição de Weibull, tempos característicos e MTBF estimados para o produto no período de 1995 em comparação com os padrões da fábrica.

	γ	θ	T_{10}	T_{50}	MTBF
Padrão	1,8	1745	500	1425	1550
1995	1,5	2100	470	1645	1900

A distribuição ajustada para o período de 1995 apresenta-se mais condensada à esquerda do que indica o padrão da fábrica, conforme verificamos na figura 4.5. Isso nos leva a encontrar um valor de T_{10} - referente à ocorrência de falha em 10% dos produtos - de 470 h que é menor que o padrão de 500 h. Apesar da distribuição ajustada para 1995 ser mais condensada à esquerda essa apresenta um parâmetro de escala θ elevado, o que gera um valor de $T_{50} = 1645$ h que é maior que o padrão. O mesmo ocorre com o MTBF que é estimado em 1900 h. Na figura 4.5 essas comparações podem ser observadas graficamente.

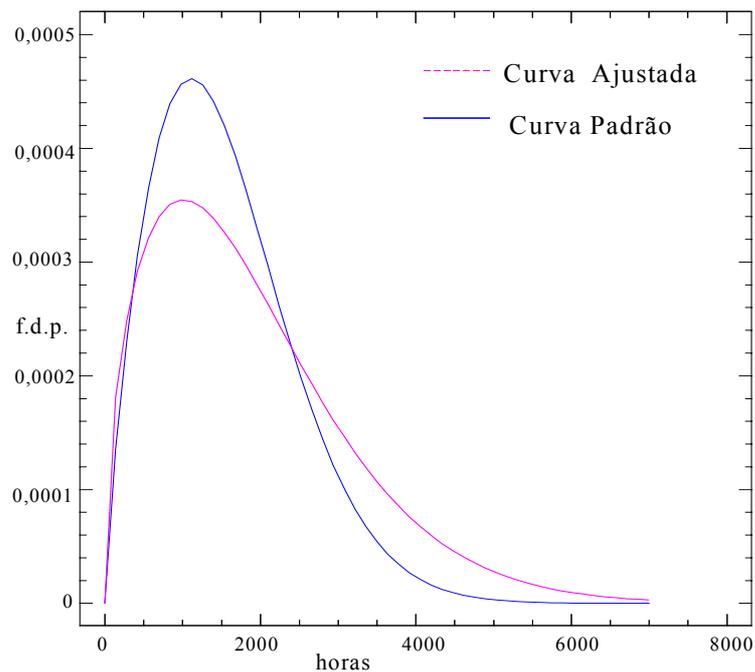


Figura 4.5: Distribuições de Weibull para o padrão da fábrica e a curva ajustada para 1995.

4.1.8. Previsão de Reclamações para o futuro

Levantamos a programação da produção até dez/95 e estimamos a produção de jan/96 a dez/96 utilizando análise de séries temporais, ajustando um modelo ARIMA. O modelo que melhor se ajustou foi um modelo com dois termos não sazonais e dois termos sazonais, sendo a sazonalidade de 12 meses. A Figura 4.6 mostra o comportamento estimado da produção.

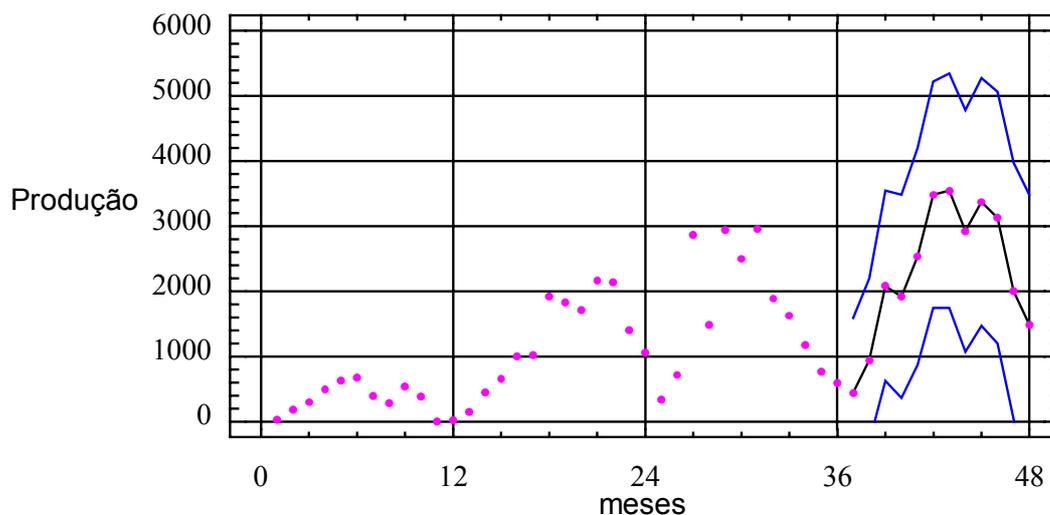


Figura 4.6: Previsão da Produção do produto.

Para melhor compreender o comportamento da produção, estudamos as componentes de *tendência* e *sazonalidade*. Na figura 4.7 analisamos o componente de tendência, de onde podemos verificar que a produção do produto tem crescido e aponta para uma estabilização. O pequeno declínio que se observa no final da curva ajustada se deve ao decréscimo apresentado nos últimos meses, que são os meses de baixa produção.

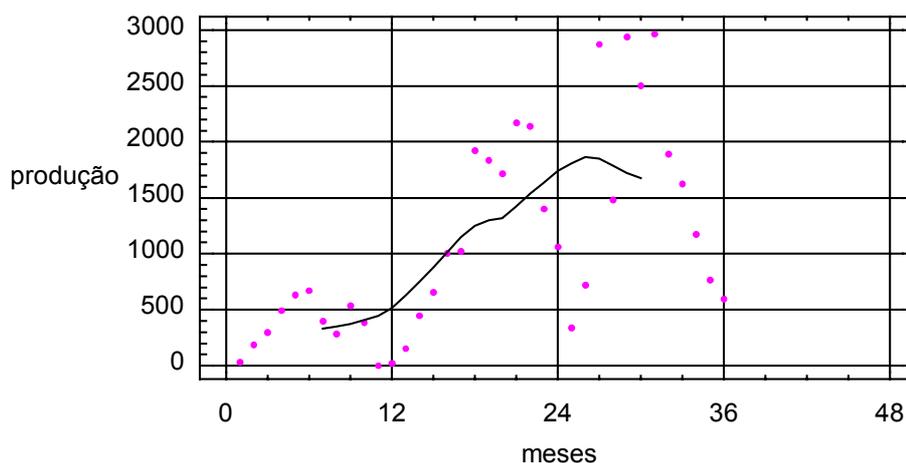


Figura 4.7: Tendência da produção do produto.

Na figura 4.8 temos o gráfico do componente de sazonalidade, que mostra que no período de novembro a fevereiro existe uma baixa produção desse produto, já no período de março a outubro a produção apresenta-se alta.

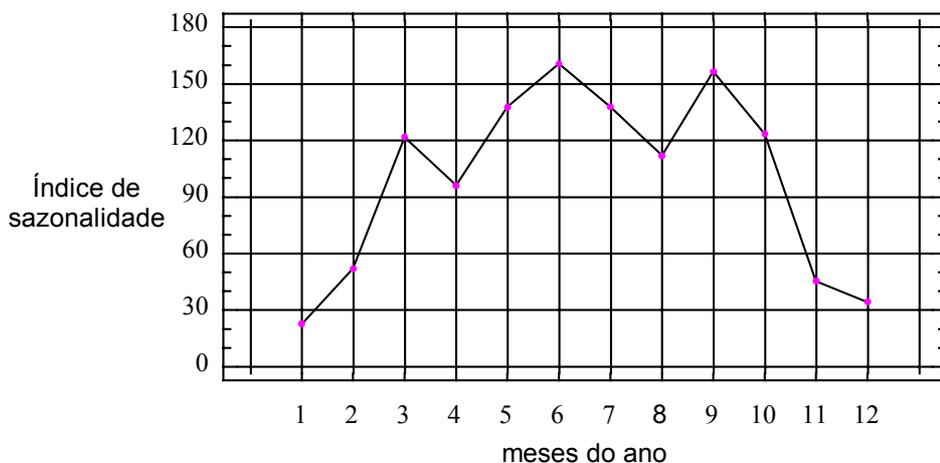


Figura 4.8: Componentes sazonais da produção do produto.

Na Figura 4.9 observamos que no período de 1993/94 a média estimada de reclamações era próxima de 20, crescendo em 1995 devido ao aumento da produção. Com base no modelo simulado e nas previsões de produção, foi possível obter o comportamento do número de reclamações previstas de jan/96 até jun/96.

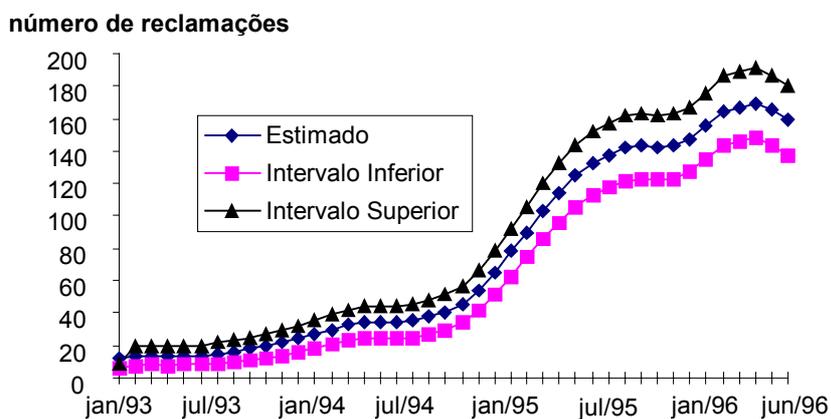


Figura 4.9: Previsão de ocorrências de reclamações para o produto.

Para melhor visualização e análise segue na Tabela 4.4 a estimativa média de produção e as previsões com seus respectivos intervalos.

Tabela 4.4: Previsão de ocorrências de reclamações para o produto.

Mês	Produção*	Reclamações mês a mês		
		Limite Inferior	Valor Estimado	Limite Superior
dez/95	594	127	147	167
jan/96	439	135	156	176
fev/96	940	143	165	186
mar/96	2084	146	167	189
abr/96	1922	148	169	191
mai/96	2536	144	166	187
jun/96	3483	138	159	180

* Em 1996 a produção é estimada.

As estimativas que aparecem na Figura 4.9 e na Tabela 4.4 foram feitas tomando como base a confiabilidade atual do produto, ou seja, considerando que os tempos até a falha deste produto sigam um modelo de Weibull com $\gamma=1,5$ e $\theta = 2100$. A distribuição de probabilidade correspondente a esse modelo aparece na Figura 4.5 e sua função de confiabilidade é apresentado na Figura 4.10.

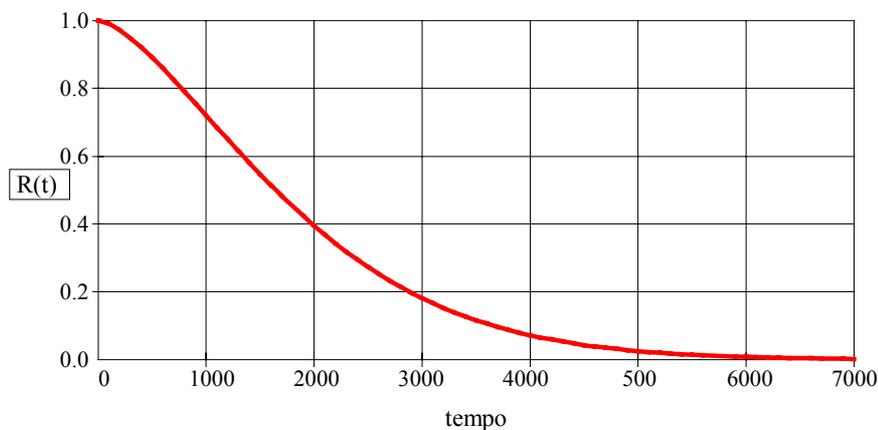


Figura 4.10: Função de confiabilidade do produto.

4.2. Estudos de caso via método de análise matemática

Como não foi possível obter a solução matemática fechada em alguns dos casos estudados, passamos a usar a análise numérica. A fim de obter a solução numérica foi

elaborado um programa de computador. O passo inicial é estabelecer qual será o deslocamento de tempo (dt) a ser usado, para tornar possível o cálculo das integrais de forma adequada. O deslocamento de tempo está diretamente vinculado com a razão entre o parâmetro de escala da distribuição de X_1 (θ_1) e o parâmetro de escala da distribuição de X_2 (θ_2), pois essa razão nos fornece uma idéia dos tempos médios até a falha *ao longo do calendário*. Empiricamente, fixamos como deslocamento de tempo aproximadamente um trinta avos da razão θ_1 / θ_2 .

Fixado o deslocamento de tempo, procede-se com o cálculo da integral contida em $f_Q(q)$. O limite superior dessa integral foi fixado em seis vezes a escala de tempo, ou seja, $6 \times \theta_1/\theta_2$. Conhecidos os valores de $f_Q(q)$, inicia-se os cálculos da integral que compõe $f_{Q+X_3}(z)$.

Em função dos valores obtidos para “q” gera-se o número necessário de meses para a obtenção dos valores da integral que compõe $f_{Q+X_3}(z)$, e conseqüentemente obtém-se os valores de $f_{Q+X_3}(z)$.

4.2.1. Método de análise matemática do exemplo apresentado por Werner, Ribeiro & Vaccaro

Procederemos com o estudo do método de análise matemática para o exemplo apresentado por Werner, Ribeiro & Vaccaro (1995), descrito e comentado no item 3.2.1. A tabela 4.5 reapresenta os modelos e seus respectivos parâmetros para as variáveis iniciais X_1 , X_2 , X_3 .

Tabela 4.5: Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais

Variável	Modelo	γ (Gama)	θ (Teta)	MTBF
Tempo de vida	Weibull	1,5	100	90
Tempo de uso	Weibull	1,5	0,5	-
Tempo até a venda	Weibull	1,5	10	-

Iniciamos o procedimento fixando, de modo aproximado, o deslocamento de tempo em:

$$dt = \frac{1}{30} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{30} \frac{100 \text{ horas}}{0,5 \text{ horas / dia}} = 6,67 \cong 6 \text{ dias}$$

A seguir computamos o quociente de X_1/X_2 que recaí no caso 2 do capítulo 3 (equação 3.13):

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{\gamma_2}{\theta_2^{\gamma_2}} \frac{\gamma_1}{\theta_1^{\gamma_1}} y^{\gamma_1-1} \int_0^{+\infty} x_2^{\gamma_2+\gamma_1-1} e^{-\left(\frac{1}{\theta_2^{\gamma_2}} x_2^{\gamma_2} + \frac{y^{\gamma_1}}{\theta_1^{\gamma_1}} x_2^{\gamma_1}\right)} dx_2$$

Substituindo pelos parâmetros apresentados na tabela 4.5, temos:

$$f_Q(q) = f_{X_1/X_2}(y) = \frac{1,5}{100^{1,5}} \frac{1,5}{0,5^{1,5}} y^{0,5} \int_0^{+\infty} x_2^2 \cdot e^{-\left(\frac{1}{0,75} x_2^{1,5} + \frac{y^{1,5}}{15} x_2^{1,5}\right)} dx_2$$

$$f_Q(q) = f_{X_1/X_2}(y) \cong 0,0064 \sqrt{y} \int_0^{+\infty} x_2^2 \cdot e^{-\left(1,33 x_2^{1,5} + \frac{y^{1,5}}{15} x_2^{1,5}\right)} dx_2 \quad (4.1)$$

Obtidos os valores resultantes para a equação 4.1, passamos a computar esses valores com a soma da distribuição da variável X_3 que é dada pela equação 4.2:

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{1,5}{10^{1,5}} (x_3)^{0,5} e^{-\left(\frac{x_3}{10}\right)^{1,5}} = 0,047 \sqrt{x_3} \cdot e^{-\left(\frac{x_3}{10}\right)^{1,5}} \quad \text{para } x_3 \geq 0 \text{ e}$$

$$f_{X_3}(x_3) = 0 \quad \text{para } x_3 < 0 \quad (4.2)$$

Substituindo a equação 4.2 na equação 3.14, transcrita abaixo,

$$f_{Q+X_3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-\left(\frac{z-q}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} dq, \quad 0 < z < +\infty$$

obtemos:

$$f_{Q+X_3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) 0,047\sqrt{z-q} \cdot e^{-\left(\frac{z-q}{10}\right)^{1,5}} dq, \quad 0 < z < +\infty \quad (4.3)$$

Os resultados da análise numérica para a equação 4.3, que fornece a distribuição de Z - tempo até a falha, em dias do calendário para todas as quebras do produto - foram obtidos usando o deslocamento de tempo igual a seis ($dt = 6$), e encontram-se na figura 4.11.

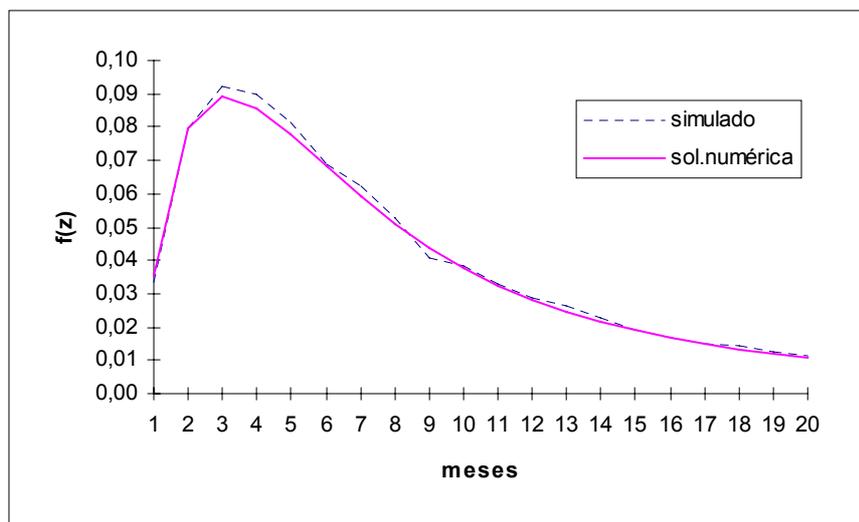


Figura 4.11: Comparação dos resultados obtidos através do método de análise matemática e método de análise via simulação de Monte Carlo.

Na figura 4.11 podemos observar ainda os resultados obtidos através do método de análise via simulação de Monte Carlo. Comparando os resultados, notamos que as distribuições apresentadas pelos dois métodos de análise são muito próximas, contudo é interessante ressaltar que o tempo computacional da análise numérica é significativamente maior que o tempo computacional do método de análise via simulação (30 min x 5 min).

Além disto, é possível observar a presença de algum ruído nas curvas. Para amenizar essas distorções podemos utilizar na análise numérica um deslocamento de tempo menor. Isso pode ser verificado pela análise da figura 4.12, onde obteve-se o resultado numérico para a equação (4.3) aplicando-se um deslocamento de tempo igual a dois dias.

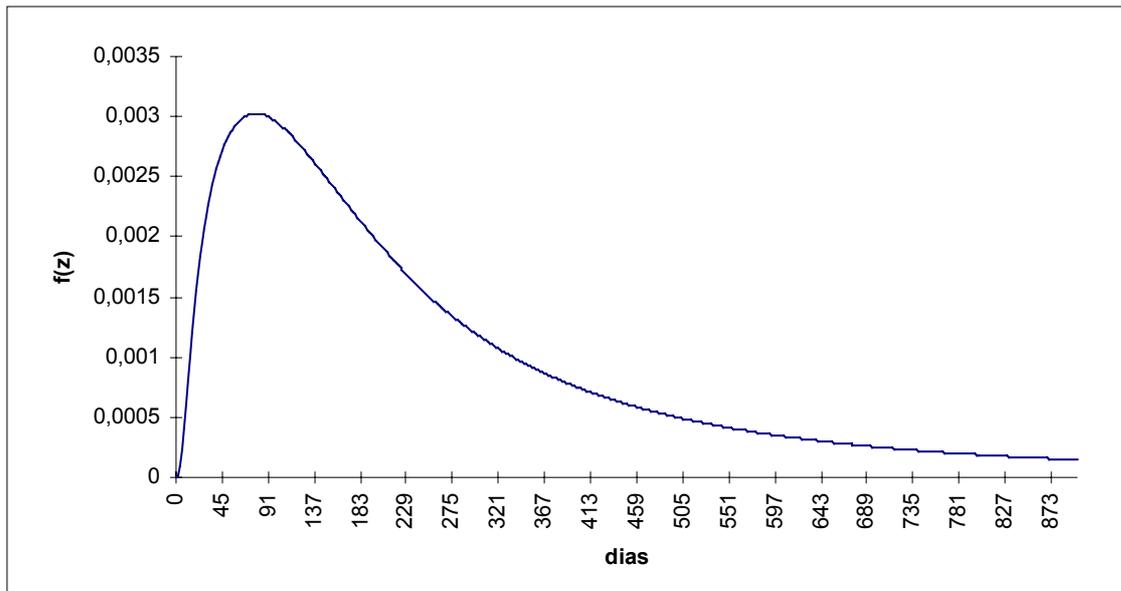


Figura 4.12: Método de análise matemática aplicando-se um deslocamento de tempo igual a dois dias.

Passo 3: A seguir procederemos com a discretização da distribuição obtida através da método de análise matemática com deslocamento de tempo igual a 6 dias ($dt = 6$). Utilizaremos períodos mensais para obter a estimativa do número/proporção quebras mês a mês. Esse resultados são apresentados na figura 4.13.

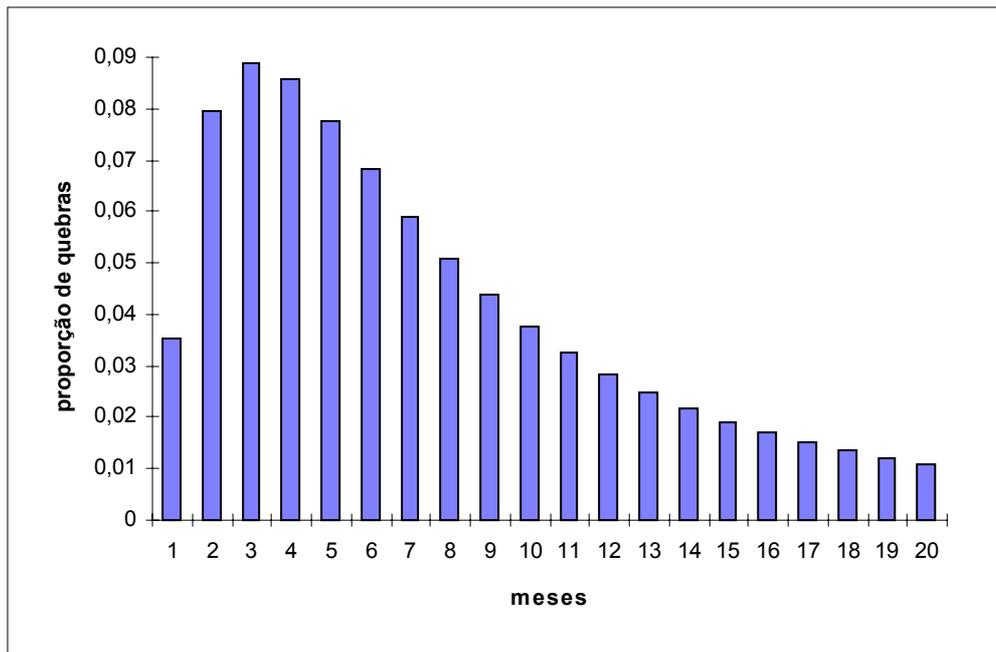


Figura 4.13: Estimativas das proporção de quebras mês a mês.

Passo 4: Para modelar o fato de que nem todas as quebras são reportadas ao fabricante, usamos o fator $k_0 = 0,9$, significando que 90% dos clientes reclamaram.

Passo 5: A partir da proporção de reclamações para cada intervalo de tempo, há interesse em concluir, com embasamento estatístico, a respeito de uma eventual melhora ou degradação no desempenho do produto. Para chegar a essa conclusão, calculamos intervalos de confiança para as estimativas das proporções de reclamações *ao longo do calendário*. O intervalo de confiança foi obtido usando o modelo binomial aproximado para o modelo normal.

Na figura 4.14 temos as estimativas das proporções de reclamações mês a mês e os limites do intervalo de confiança de 95%.

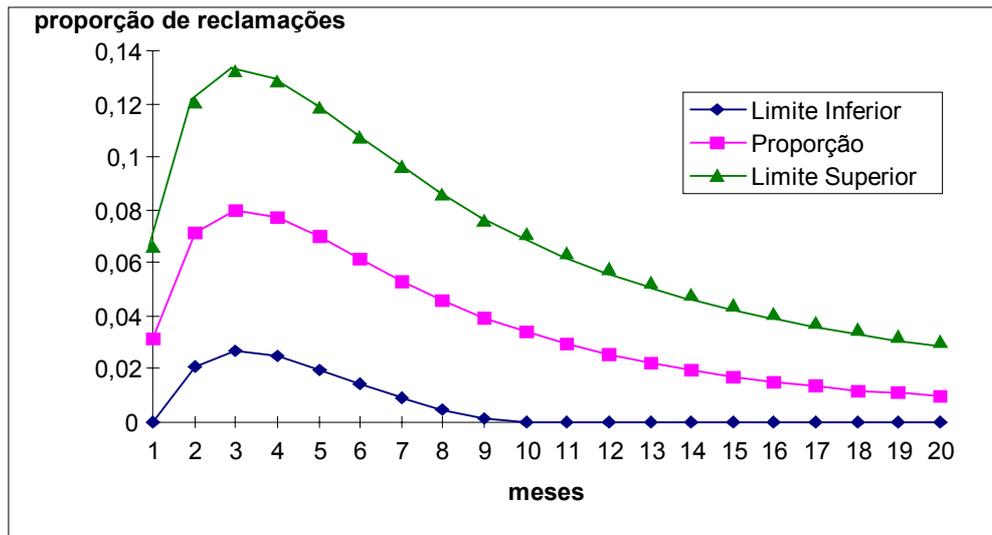


Figura 4.14: Estimativa e intervalo de confiança de 95 % para a proporção de reclamações mês a mês, em um lote de 100 unidades do produto.

4.2.2. Método de análise matemática para o estudo de caso prático.

Para ilustrar o método de análise matemática vamos fazer uso das informações que foram obtidas no caso 4.1. Para facilitar resumimos as distribuições com seus respectivos parâmetros na tabela 4.6

Tabela 4.6: Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para o caso prático.

Variável	Modelo	γ (Gama)	θ (Teta)
Tempo de vida (X_1)	Weibull	1,5	2100
Tempo de uso (X_2)	Weibull	2	2,25
Tempo até a venda (X_3)	Exponencial	1,0	95

Iniciamos o procedimento fixando, de modo aproximado, o deslocamento de tempo em:

$$dt = \frac{1}{30} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{30} \frac{2100 \text{ horas}}{2,25 \text{ horas / dia}} = 31,1 \cong 30 \text{ dias}$$

A seguir computamos o quociente de X_1/X_2 que recaí no caso 2 do capítulo 3 (equação 3.15):

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{\gamma_2}{\theta_2^{\gamma_2}} \frac{\gamma_1}{\theta_1^{\gamma_1}} y^{\gamma_1-1} \int_0^{+\infty} x_2^{\gamma_2+\gamma_1-1} e^{-\left(\frac{1}{\theta_2^{\gamma_2}} x_2^{\gamma_2} + \frac{y^{\gamma_1}}{\theta_1^{\gamma_1}} x_2^{\gamma_1}\right)} dx_2$$

Substituindo pelos parâmetros apresentados na tabela 4.6, temos:

$$f_{X_1/X_2}(y) = \frac{2}{2,25^2} \frac{1,5}{2100^{1,5}} y^{0,5} \int_0^{+\infty} x_2^{2,5} e^{-\left(\frac{1}{2,25^2} x_2^2 + \frac{y^{1,5}}{2100^{1,5}} x_2^{1,5}\right)} dx_2$$

$$f_{X_1/X_2}(y) \cong 0,00006 \sqrt{y} \int_0^{+\infty} x_2^{2,5} e^{-\left(0,1975 x_2^2 + \frac{y^{1,5}}{96234,1} x_2^{1,5}\right)} dx_2 \quad (4.4)$$

Obtidos os valores resultantes para a equação 4.4, passamos a computar esses valores com a soma da distribuição da variável X_3 que é dada pela equação 4.5:

$$f_{X_3}(x_3) = 0,1 \cdot e^{-0,1x_3} \quad \text{para } x_3 \geq 0 \text{ e}$$

$$f_{X_3}(x_3) = 0 \quad \text{para } x_3 < 0. \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.5) na equação (3.16), transcrita abaixo,

$$f_{Q+X_3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) \frac{\gamma_3}{\theta_3^{\gamma_3}} (z-q)^{\gamma_3-1} e^{-\left(\frac{z-q}{\theta_3}\right)^{\gamma_3}} dq, \quad 0 < z < +\infty$$

obtemos:

$$f_{Q+X_3}(z) = 0, \quad z \leq 0 \text{ e}$$

$$f_{Q+X_3}(z) = \int_0^z f_Q(q) 0,1 \cdot e^{-0,1(z-q)} dq, \quad 0 < z < +\infty \quad (4.6)$$

Os resultados da análise numérica obtidos para a equação 4.6, que fornece a distribuição de Z - tempo até a falha, em dias do calendário para todas as quebras do produto - usando o deslocamento de tempo igual a trinta ($dt = 30$), encontram-se na figura 4.15.

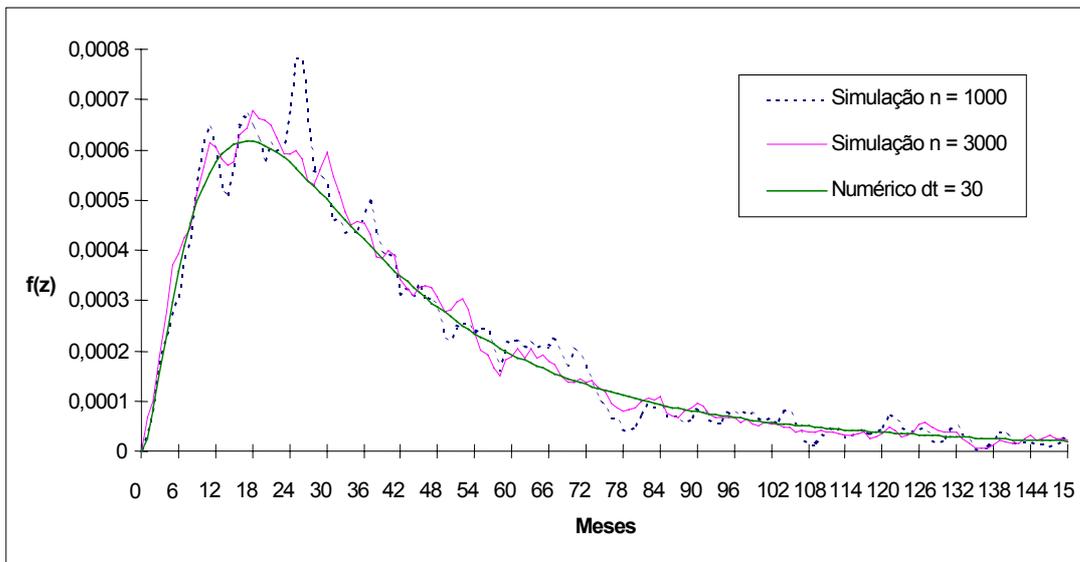


Figura 4.15: Comparação dos resultados obtidos através do método de análise matemática e método de análise via simulação de Monte Carlo.

Na figura 4.15 podemos observar ainda, os resultados obtidos através do método de análise via simulação de Monte Carlo. Comparando os resultados, notamos que as distribuições apresentadas pelos dois métodos são próximos, diferenciados apenas pela presença do nível de ruído. A curva da distribuição obtida através da análise numérica apresenta-se bem suave, isto provavelmente deve-se ao fato de que o deslocamento de tempo é adequado. Nas curvas obtidas através da análise via simulação de Monte Carlo a presença de ruído é notória, esses ruídos diminuem na medida que o número de valores gerados para obter o resultado da simulação aumenta.

4.3. Estudo de caso para onde há mais de um grupo de clientes usando a simulação de Monte Carlo.

Elaboraremos um estudo de caso para um produto genérico, para tanto seguiremos os passos descritos no item 3.2.2.

Passo 1: O grupo 1 o correspondente a clientes amadores, que somam 60% do total de clientes; o grupo 2 correspondente a clientes profissionais que somam 40% do total de clientes.

A partir dessa relação, um valor aleatório é gerado. Se esse valor for menor que 0,6 estaremos a frente de um cliente do tipo amador, caso contrário teremos representado um cliente do tipo profissional.

Passo 2 a 4: As distribuições de probabilidade utilizadas para as variáveis X_1 , X_2 e X_3 seguem a Tabela 4.7.

Tabela 4.7: Parâmetros das distribuições de probabilidade das variáveis iniciais para o caso de diferentes grupos de clientes.

Variável	Grupos de clientes	Modelo	Parâmetros
X_1 : Tempo de vida do produto	1	Weibull	$\gamma = 3$ $\theta = 600$
X_1 : Tempo de vida do produto	2	Weibull	$\gamma = 3$ $\theta = 200$
X_2 : Tempo de uso do produto	1	Normal	$\mu = 1,5$ $\sigma = 0,5$
X_2 : Tempo de uso do produto	2	Normal	$\mu = 6$ $\sigma = 0,5$
X_3 : Intervalo até a venda	-	Exponencial	$\theta = 30$

Se o cliente gerado no *Passo 1* pertence ao grupo 1 (amadores), então será gerado um valor para a variável X_1 , proveniente de uma distribuição Weibull com $\gamma = 3$ e $\theta = 600$. Para a variável X_2 será gerado um valor proveniente de uma distribuição Normal com $\mu = 1,5$ e $\sigma = 0,5$ e finalmente será gerado para a variável X_3 um valor proveniente de uma distribuição Exponencial com $\theta = 30$.

Passo 5 a 7: Após gerados os valores para as variáveis X_1 , X_2 e X_3 procede-se o cálculo de Y e Z . Foi realizada a simulação com 15000 valores. Como resultado, foi possível obter a distribuição dos tempos das quebras *ao longo do calendário*.

Passo 8: Os valores simulados foram analisados em 25 classes de amplitude mensal (30 dias), obtendo-se uma estimativa da proporção de quebras ao longo de cada mês a partir da data de fabricação do lote. A figura 4.16 apresenta os resultados obtidos na simulação.

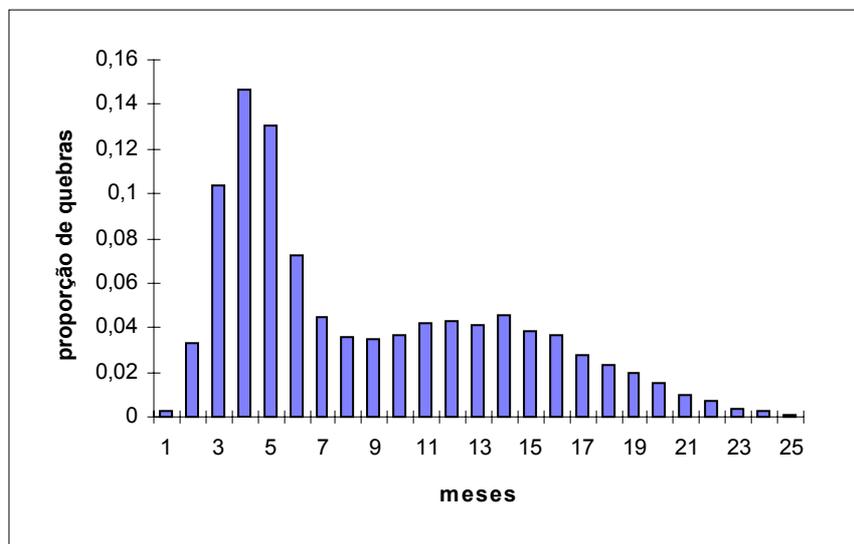


Figura 4.16: Quebras mês a mês conforme observado na simulação.

Passo 9: Foi utilizado o fator k_0 igual a 0.85 ou 85%. Isto significa que de todas as quebras que ocorreram no cliente final, 85% foram reportadas ao fabricante (se tornaram reclamações), os outros 15% das quebras não chegaram ao conhecimento desse.

Passo 10: Como a amostra tem um tamanho grande, construímos o intervalo de confiança de 95%. O intervalo de confiança foi obtido usando o modelo binomial aproximado para o modelo normal.

A figura 4.17 evidencia a existência de dois picos na distribuição das proporções de reclamações. O primeiro pico, apresenta-se entre o segundo e o sétimo mês. Esse pico deve-se aos clientes que fazem um uso profissional do produto, uma vez que esses usam o produto mais intensamente e, conseqüentemente, as falhas são antecipadas. O leve pico que se apresenta entre o décimo e décimo sétimo mês, refere-se aos clientes que fazem uso do produto de forma amadora, uma vez que esses utilizam o produto com intensidade menor. Se o período de garantia para esse produto fosse de 12 meses estima-se que 62% dos clientes usufruiriam dessa, indicando que o produto necessita ser mais desenvolvido.

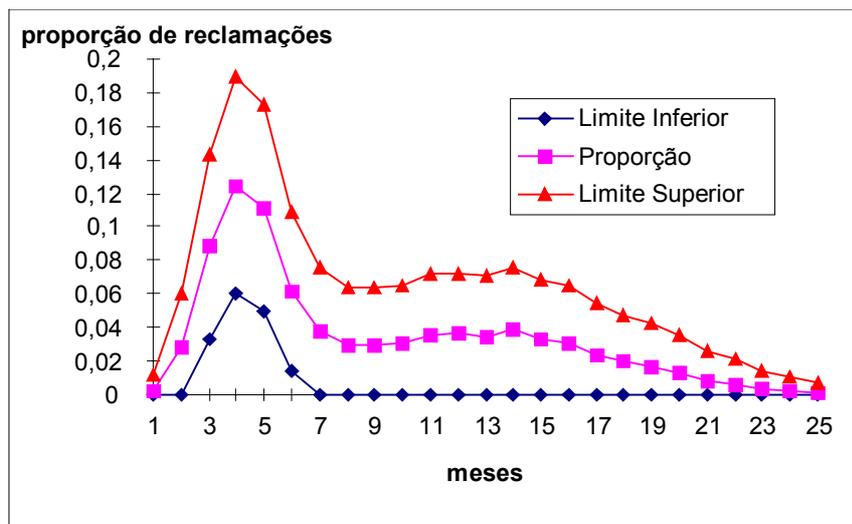


Figura 4.17: Estimativa e intervalo de confiança de 95% para a proporção de reclamações mês a mês, em um lote de 100 unidades do produto, utilizado por vários grupos de clientes.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1. Conclusões

Essa dissertação apresenta uma proposta para a modelagem do intervalo de tempo desde a manufatura até a eventual falha de um produto, a fim de que possamos conhecer a distribuição das ocorrências de falhas *ao longo do calendário* e, através da estimativa do número de quebras mês a mês, tomar decisões importantes referentes ao lançamento de novos produtos ou dimensionamento das equipes de assistência técnica.

Vários são os motivos pelos quais é importante modelar o intervalo de tempo desde a manufatura até a falha:

(i) permite acessar a confiabilidade efetiva do produto, ou seja, podemos obter a distribuição de X_1 (tempo até a falha em horas de uso contínuo). O procedimento consiste em aproximar, os resultados obtidos por simulação para a distribuição de quebras mês a mês - alterando os parâmetros da distribuição de X_1 e utilizando as distribuições já ajustadas do tempo de uso (X_2) e do intervalo de tempo entre a manufatura e a venda final (X_3) - aos resultados de quebras mês a mês observadas (Z).

(ii) permite o monitoramento indireto da confiabilidade, ou seja podemos rastrear o comportamento da confiabilidade do produto acompanhando a evolução do seu desempenho com o passar do tempo. Como exemplificado no caso 4.1, se ajustamos as quebras mês a mês utilizando a sistemática descrita acima, e, em

algum período de tempo observamos que as quebras reportadas se afastam significativamente das previsões, isso indica que houve uma alteração na confiabilidade do produto.

(iii) fornece suporte a decisões referentes ao lançamento de novos produtos/modelos. Se as estimativas de quebras/reclamações não são elevadas, o produto pode ser lançado no mercado. Caso contrário, o desenvolvimento deve continuar. Isso assegura que o cliente irá receber um produto suficientemente desenvolvido.

(iv) possibilita o dimensionamento das equipes de assistência técnica, pois através da estimativa do número de quebras/reclamações mês a mês pode-se avaliar o número esperado de clientes a serem atendidos.

(v) permite estimativas dos gastos com garantia, uma vez que sabemos qual o número esperado de quebras em períodos de tempo preestabelecidos.

(vi) permite ao cliente usufruir da estrutura de garantia e assistência técnica adequadamente dimensionada, a qual tem por objetivo minimizar o descontentamento gerado pela falha e conseqüentemente reduzir o prazo de indisponibilidade do produto.

Uma das alternativas propostas incorpora o uso de simulação de Monte Carlo, e isso assegura grande flexibilidade e sua ampla utilização. O uso da simulação de Monte Carlo permite que as variáveis aleatórias:

(a) Tempo de vida em horas de uso contínuo do produto,

(b) Tempo de uso do produto em horas por dia e

(c) Intervalo de tempo entre a manufatura do produto e a venda efetiva, podem seguir um modelo teórico qualquer (Weibull, Exponencial, Log-normal, etc.) ou podem ser repassados na forma de um histograma. Essa flexibilidade permite a análise de qualquer tipo de produto, seja ele um produto eletrônico ou mecânico ou misto, que é manufaturado e está sujeito a falha.

Apesar de ser um método de análise muito flexível, a simulação de Monte Carlo é uma aproximação, sujeita à ruídos. Assim como segunda alternativa, foi explorada a

possibilidade de uma análise matemática fechada. Soluções fechadas tem a vantagem de serem exatas e rápidas - pois dispensam o uso da simulação.

Contudo, não foi possível obter uma solução fechada para o problema. As integrais resultantes não tem solução fechada e precisam ser resolvidas numericamente. Nos estudos de caso analisados, a análise numérica não se mostrou superior a análise via simulação, pois exigia muito tempo computacional.

De qualquer modo o texto contém o formulário referente à análise numérica do problemas para os casos em que as variáveis iniciais X_1 , X_2 e X_3 sigam os modelos das distribuições Exponencial ou Weibull.

Em algumas situações, o produto pode ser utilizado por grupos diferenciados de clientes. Essa dissertação, também, enfoca o desenvolvimento de análises para a modelagem dessas situações. Nesses casos, decisões administrativas e suporte ao cliente necessitarão ser gerenciados.

Os métodos de análise apresentados para a modelagem dos tempos de falha *ao longo do calendário*, seja o método de análise via simulação de Monte Carlo ou o método de análise matemática, permitem à empresa estudar o comportamento das falhas ocorridas, e/ou fazer previsões em relação ao número esperado de reclamações que irá ocorrer, mês a mês, no futuro.

5.2.Trabalhos Futuros

O método de análise via simulação de Monte Carlo foi implementado em um software de ambiente MS-DOS, que não faz parte dessa dissertação, mas que pode ser aperfeiçoado com o acréscimo de saídas visuais. O desenvolvimento desse software e seu melhoramento, em ambiente windows, já é alvo da dissertação de outro aluno.

Muitas são as distribuições de probabilidades conhecidas. Exploramos o método de análise matemática de alguns casos (variáveis iniciais com distribuição de Weibull ou seu

caso particular, a distribuição Exponencial). Deixamos em aberto a oportunidade de continuar a explorar esse mesmo método fazendo uso de outras distribuições.

Além disto, o método de análise matemática é abordada apenas para um único grupo de clientes, ficando como uma outra oportunidade de trabalho futuro o desenvolvimento dessa alternativa de modelagem para o caso de vários grupos de clientes.

As alternativas apresentadas para a modelagem dos tempos de falha referem-se somente a primeira falha que pode vir a ocorrer com um produto. Outras falhas podem surgir neste mesmo produto e um trabalho que inclua na modelagem os tempos em que essas outras falhas irão ocorrer pode ser elaborado.

Através das estimativas do número de quebras/reclamações mês a mês e os limites dos intervalos de confiança podemos dimensionar as equipes de manutenção e/ou assistência técnica. A abordagem deste tópico fica como sugestão para um trabalho a ser desenvolvido futuramente.

As estimativas do número de quebras/reclamações também servem de base para o dimensionamento do prazo ótimo de garantia. Esse tópico poderia ser discutido em um trabalho futuro.

Outra sugestão seria a modelagem dos custos de garantia, levando em conta as estimativas de quebras/reclamações mês a mês.

Durante o desenvolvimento dessa dissertação em várias situações nos apoiamos no conhecimento dos engenheiro ou em resultados empíricos. Nesses pontos a estatística Bayesiana traria uma grande contribuição no aprimoramento e validação dos resultados.

Fica como sugestão o desenvolvimento futuro dessa tema, fazendo uso da estatística Bayesiana.

A análise via simulação de Monte Carlo pode ser aprimorada com a utilização de métodos de redução de variância. O uso destes métodos permitiria reduzir o tempo de processamento e/ou aumentar a precisão das estimativas.

*ANEXO I**Valores da função Gama*

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)! = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\dots(3)(2)(1) & \text{quando } n \text{ é par e } n > 2 \\ \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\dots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} & \text{quando } n \text{ é ímpar e } n > 2 \end{cases}$$

Integral

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BURGESS, J.A. Improving product reliability. Quality Progress. December, 1987. p.47-54.
 2. DACHS, J. N. W. Estatística Computacional. Livros técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro. 1988.
 3. DALRYMPLE, D.J. & PARSONS, L. Marketing Management. John Wiley & Sons, 1976.
 4. ELSAYED, Elsayed A. Reliability Engineering. Addison-Wesley, Reading, MA, 1996. 656 p. (Obs.: Esse livro estará disponível a partir de julho de 1996)
 5. GRIMALDI, R. & MANCUSO, I. H.. Folha de São Paulo. Série Qualidade Total. 27/03/94. São Paulo.
 6. HAHN, G. & SHAPIRO, S. Statistical Models in Engineering. John Wiley & Sons, New York, USA, 1967.
 7. HALPERN, S. The assurance Science. An Introduction to Quality Control and Reliability. New Jersey, USA, 1978.
 8. HILL, V.L., BEALL, C.W. & BLISCHKE, W.R. A simulation model for warranty analysis. International Journal of Production Economics, 22, 1991, p.131-140.
 9. HOEL, P. , PORT, S. & STONE, C. Introdução à Teoria da probabilidade. Editora Interciência. Rio de Janeiro, 1978.
-

10. KAMAT, S. J. & RILEY, M. W. Determination of reliability using event-based Monte Carlo simulation. IEEE transactions on reliability, vol.24, n.1. April, 1975. p.73-75.
 11. KAPUR, K. C. & LAMBERSON, L. R. Reliability in Engineering Design. John Wiley & Sons, New York, USA, 1977.
 12. KUMAMOTO, H. TANAKA, K. & INOUE, K. Efficient evaluations of system reliability by Monte Carlo method. IEEE transactions on reliability, vol.26, n.5. December, 1977. p.349-350.
 13. MEYER, PAUL L. Probabilidade. Aplicações à Estatística. Livros técnicos e Científicos Editora. Rio de Janeiro, 1983.
 14. MONTGOMERY, D. Introduction to Statistical Quality Control. John Wiley & Sons. New York, 1985.
 15. NAYLOR, T. Técnicas de Simulação em Computadores. Editora Vozes, São Paulo, 1971.
 16. PARKISON, D. B. & MARTIN, P. The effect of quality control procedures on component reliability. IEEE transactions on reliability, vol.25, n.5. December, 1976. p.311-315.
 17. RIBEIRO, J. L. D. Confiabilidade de Sistemas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Porto Alegre, 1994
 18. SANDBERG, JOEL B. Reliability for profit not just regulation. Quality Progress. August, 1987. p.51-54.
-

19. WEIR, KENDALL Analysis of maintenance man loading via simulation. IEEE transactions on reliability, vol.20, n.3. August, 1971. p.164 - 169.

 20. WERNER, L., RIBEIRO, J. L. & VACCARO, G. (1995) Modelagem dos tempos de falha ao longo do calendário. Trabalho apresentado no XV ENEGEP - Encontro Nacional de Engenharia de Produção, realizado em São Carlos, SP, set. 1995, e publicado em seus anais, Vol.3, pp.1215-1220.
-