Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sobre Medidas Unicamente Maximizantes e outras questões em Otimização Ergódica

Dissertação de Mestrado

Thomás Jung Spier

Porto Alegre, julho de 2016.

Dissertação submetida por Thomás Jung Spier[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dr. Rafael Rigão Souza (UFRGS)

Banca Examinadora:
Dr. Artur Oscar Lopes (UFRGS)
Dra. Joana Mohr (UFRGS)
Dr. Lucas Henrique Backes (UFRGS)

Data da Apresentação: 20 de maio de 2016.

[1]Bolsista do Conselho Nacional do Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

A meu orientador Rafael Rigão Souza pela amizade, disposição, orientação e inúmeros ensinamentos.

Ao amigo e professor Rogério Steffenon por todos os conselhos e pelo exemplo de profissional e pessoa.

Aos membros da banca examinadora pelas valiosas sugestões e correções.

À professora Maria Eliani Jung pelo incentivo inicial nas olimpíadas e no aprendizado da matemática.

Aos meus Pais, Vó Eli e Dinda Raquel pela paciência, compreensão e apoio constante. Vocês são minha base.

Aos demais familiares e amigos por sempre estarem presentes.

Ao Batuta e Marley pelo companheirismo.

Todos colegas e professores do Instituto de Matemática. Em especial aos professores Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Artur Oscar Lopes a quem devo muito de minha formação.

Aos funcionários do IM pela atenção e paciência.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Muito Obrigado!

Resumo

Nessa dissertação estudamos Sistemas Dinâmicos do ponto de vista da Otimização Ergódica. Analizamos o problema da maximização da integral de potenciais com respeito à probabilidades invariantes pela dinâmica. Mostramos que toda medida ergódica é unicamente maximizante para algum potencial. Verificamos que o conjunto de potenciais com exatamente uma medida maximizadora é residual. Esses resultados são obtidos através de técnicas da Teoria Ergódica e Análise Convexa.

Palavras-chave: Otimização Ergódica, Análise Convexa, Probabilidades Unicamente Maximizantes.

Abstract

In this thesis we study dynamical systems trough the viewpoint of ergodic optimization. We analyze the problem of maximizing integrals of potentials with respect to invariant probabilities. We show that every ergodic measure is uniquely maximizing for some potential. We also verify that the set of potentials with exactly one maximizing measure is residual. This results are obtained through techniques of ergodic theory and convex analysis.

Key-words: Ergodic Optimization, Convex Analysis, Uniquely Maximizing Probabilities.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

No presente trabalho abordamos Sistemas Dinâmicos sob o ponto de vista da Otimização Ergódica. Analisamos o problema de maximização das integrais de potenciais $\phi : M \to \mathbb{R}$ com respeito a probabilidades invariantes pela dinâmica $f : M \to M$. As questões consideradas referem-se a existência e presença de certos conjuntos de medidas maximizantes. No primeiro sentido mostramos que toda medida ergódica é unicamente maximizadora para algum observável, já na segunda perspectiva verificamos que esse fenômemo é o que geralmente ocorre ao tomarmos um potencial qualquer. Tais resultados são iluminados sob a ótica da Análise Convexa. Como fontes de inspiração e referência citamos especialmente [2], [5], [7] e [9], os quais contém os enunciados finais desse texto.

A dissertação é estruturada em dois capítulos. No primeiro deles recordamos objetos e ferramentas da Teoria Ergódica necessários para o desenvolvimento das ideias nas seções posteriores. No segundo capítulo começamos apresentando três quantidades associadadas a um observável e discutimos sua relação com a questão de maximização. Em seguida mudamos o foco e passamos a caracterizar os conjuntos de medidas maximizantes. Encerramos o trabalho concluindo que tais conjuntos são unitários ao experimentarmos potenciais genéricos.

Capítulo 2

Preliminares

Como preparação para os próximos capítulos relembramos alguns conceitos e teoremas fundamentais da Teoria Ergódica. No decorrer dessa dissertação iremos sempre trabalhar no contexto de espaços métricos compactos (M, d), com a topologia induzida pela métrica e a respectiva σ–álgebra de Borel, que denotamos por $\mathcal{B}$.

Definição 2.0.1. *Um sistema dinâmico é um par (M, f), onde M é um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ é contínua sobrejetiva.*

A Teoria Ergódica se concentra no estudo de sistemas dinâmicos que possuem alguma probabilidade invariante, portanto recordamos a seguinte definição.

Definição 2.0.2. *Uma probabilidade μ em M é dita invariante para dinâmica f se $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ para qualquer boreliano $B \in \mathcal{B}$. Denotamos $\mathcal{M}(f)$ o conjunto das probabilidades invariantes do sistema dinâmico (M, f).*

Todos sistemas dinâmicos que iremos estudar possuem alguma probabilidade invariante. Essa afirmação é estabelecida pelo seguinte teorema.

Teorema 2.0.3. *Se M é métrico compacto e $f : M \to M$ é contínua, então $\mathcal{M}(f) \neq \emptyset$.*

Iremos esboçar a demonstração desse teorema, porém antes disso recordamos outros objetos e resultados relevantes. Representamos por $\mathcal{M}(M)$ o espaço vetorial das medidas borelianas com sinal em M. Consideramos a norma da variação total $\|\mu\| := |\mu|(M)$ para $\mu \in \mathcal{M}(M)$. Os potenciais, ou observáveis, de M são as funções contínuas $\phi : M \to \mathbb{R}$, e seu conjunto é rotulado $C(M)$. Tomamos a norma da continuidade uniforme $\|\cdot\|_\infty$ em $C(M)$ a qual associa $\|\phi\|_\infty := \sup_{x \in M} |\phi(x)|$, e com isso $C(M)$ é um espaço de Banach.

Pelo clássico Teorema de Riesz-Markov $(\mathcal{M}(M), \|\cdot\|)$ é isometricamente isomorfo ao dual do espaço $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$. Através dessa identificação e do Teorema de Hahn-Banach 2.0.5, apresentado mais adiante, fica claro que dadas $\mu,\ \nu \in \mathcal{M}(f)$ vale

$$\mu = \nu \iff \int \phi \, d\mu = \int \phi \, d\nu,\ \forall \phi \in C(M).$$

Um artifício que é utilizado em espaços vetoriais de dimensão infinita é o de enfraquecer a topologia visando tornar alguns fechados em compactos. Realizamos a construção da topologia fraca* em $\mathcal{M}(M)$, isto é, escolhemos a menor topologia em $\mathcal{M}(M)$ para a qual as aplicações $\mu \mapsto \int \phi \, d\mu$ são contínuas para qualquer $\phi \in C(M)$. Um net $(\mu_\alpha)_\alpha$ em $\mathcal{M}(M)$ converge a μ nessa topologia, $\mu_\alpha \xrightarrow{w*} \mu$, se e somente se, $\int \phi \, d\mu_\alpha \to \int \phi \, d\mu,\ \forall \phi \in C(M)$. Além disso, sobre tais circunstâncias verifica-se que os funcionais lineares contínuos na topologia fraca* são exatamente os funcionais lineares contínuos para topologia original gerada pela norma.

Em algumas situações particulares é necessário o manuseio de medidas com sinal invariantes pela dinâmica, ou seja, medidas μ que satisfazem $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B),\ \forall B \in \mathcal{B}$. Nomeamos E_f o espaço vetorial das medidas com sinal de M invariantes por f, e C_f o seu respectivo cone de medidas positivas, isto é, $C_f = \{\mu \in E_f \mid \mu(B) \geqslant 0, \forall B \in \mathcal{B}\}$.

Finalmente escrevemos $\mathcal{M}_1(M)$ para o simplexo de $\mathcal{M}(M)$ constituído apenas pelas probabilidades em M, ou seja,

$$\mathcal{M}_1(M) := \{\mu \in \mathcal{M}(M) \mid \mu(M) = 1, \mu(B) \geqslant 0, \forall B \in \mathcal{B}\}.$$

Observe que podemos escrever $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}_1(M) \cap C_f = \mathcal{M}_1(M) \cap E_f$. Além disso, verifica-se que se $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ então

$$\mu \in \mathcal{M}(f) \iff \int \phi \, d\mu = \int \phi \circ f \, d\mu, \ \forall \phi \in C(M).$$

A topologia fraca* considerada em $\mathcal{M}_1(M)$ pode ser caracterizada através de bases de vizinhanças definidas à partir de subconjuntos abertos de M. Dados $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma família de abertos de M e $\epsilon > 0$, definimos a vizinhança $V(\mu, \mathcal{A}, \epsilon)$ de μ como

$$V(\mu, \mathcal{A}, \epsilon) := \{\nu \in \mathcal{M}_1(M) \mid \mu(A_i) < \nu(A_i) + \epsilon, \ \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

O fato dessa base de vizinhanças também dar lugar a topologia fraca* é estabelecido como uma das equivalências do Teorema de Portmanteau apresentada à seguir.

Teorema 2.0.4 (Portmanteau)**.** *A topologia gerada pela base de vizinhanças*

$$\left\{ V(\mu, \mathcal{A}, \epsilon) \,\middle|\, \mu \in \mathcal{M}_1(M), \ \mathcal{A}, \ \epsilon > 0 \right\}$$

é a topologia fraca de* $\mathcal{M}_1(M)$.

Outro recurso disponível para trabalhar com a topologia fraca* em $\mathcal{M}_1(M)$ ou $\mathcal{M}(f)$ é que é metrizável em ambos espaços topológicos. Isso facilita o uso dessa topologia, pois permite utilizar argumentos com sequências, que em geral são mais simples de tratar. Esse resultado e os Teoremas de Riesz-Markov e Portmanteau 2.0.4 estão presentes em [11].

Dois enunciados especialmente úteis no estudo de espaços vetoriais e funcionais lineares são as versões geométrica e usual do Teorema de Hahn-Banach. A primeira delas permite estender funcionais lineares contínuos definidos apenas em subespaços ao espaço como um todo, e assim proporciona um meio hábil de construir funcionais com características especiais. Já a segunda versão é de muita ajuda ao lidar com subconjuntos convexos de um espaço vetorial normado. Demonstrações de ambos resultados podem ser consultadas em [3].

Teorema 2.0.5 (Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial topológico localmente convexo e V um subespaço vetorial de E. Então todo funcional linear contínuo $\phi_0 : V \to \mathbb{R}$ pode ser estendido a E preservando linearidade e continuidade, isto é, existe $\phi : E \to \mathbb{R}$ linear contínuo tal que $\phi\big|_V \equiv \phi_0$.*

Teorema 2.0.6 (Geométrico de Hahn-Banach)**.** *Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço vetorial topológico localmente convexo E. Se A é compacto e B é fechado, então existe funcional linear contínuo $\phi : E \to \mathbb{R}$ com*

$$\sup_{x \in A} \phi(x) < \inf_{x \in B} \phi(x).$$

Note que qualquer espaço normado é também um espaço vetorial topológico, e portanto está no escopo de ambas versões de Hahn-Banach. Além disso, temos que $\mathcal{M}(M)$ com a topologia fraca* é um espaço vetorial topológico localmente convexo. Logo podemos aplicar o Teorema Geométrico de Hahn-Banach para conjuntos fechados e compactos apenas na topologia fraca*. Esse fato pode ser consultado em [3].

O próximo teorema consolida o propósito atribuído a topologia fraca* ao recuperar a compacidade das bolas fechadas unitárias, que não são compactas para a topologia da norma em espaços vetorias de dimensão infinita. Como aplicação determinamos a compacidade de alguns conjuntos já citados.

Teorema 2.0.7 (Banach-Alaoglu)**.** *Para todo espaço normado E a bola fechada unitária $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca* de E'.*

Através desse teorema obtemos que a bola unitária fechada $B_{\mathcal{M}(M)}$ é compacta na topologia fraca*. Note que $\mathcal{M}_1(M)$ e $\mathcal{M}(f)$ são fechados em $B_{\mathcal{M}(M)}$, e portanto $\mathcal{M}_1(M)$ e $\mathcal{M}(f)$ são compactos na topologia fraca*.

A dinâmica em (M, f) induz uma ação em $\mathcal{M}_1(M)$, que oferece uma nova perspectiva sobre as probabilidades invariantes. Introduzimos a aplicação $f_* : \mathcal{M}_1(M) \to \mathcal{M}_1(M),\ \mu \mapsto f_*\mu$ associada à f de modo que

$$f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)),\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Repare que dada $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ temos

$$\int \phi \, d(f_*\mu) = \int \phi \circ f \, d\mu,\ \forall \phi \in C(M),$$

e consequentemente $\mu \in \mathcal{M}(f)$ se, e só se, $f_*\mu = \mu$. Denotamos

$$f_*^j := \underbrace{f_* \circ f_* \circ \cdots \circ f_*}_{j} \text{ para } j \in \mathbb{N} \text{ e } f_*^0 := Id_{\mathcal{M}_1(M)}.$$

O lema à seguir, que verifica propriedades essenciais de f_*, tem sua demonstração baseada na obra [11].

Lema 2.0.8. *Seja (M, f) sistema dinâmico, a aplicação f_* é contínua relativamente a topologia fraca* e preserva combinações convexas.*

Demonstração. É imediato que f_* preserva combinações convexas. De fato, dados $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{M}_1(M)$ e $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ com $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ temos

$$f_*\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mu_i\right)(B) = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mu_i\right)(f^{-1}(B)) = \sum_{i=1}^{n} t_i \mu_i (f^{-1}(B)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i f_* \mu_i (B), \ \forall B \in \mathcal{B} \implies f_*\left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i f_* \mu_i.$$

Assuma que a sequência $(\mu_n)_n$ em $\mathcal{M}_1(M)$ possua limite $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$. Dada $\phi \in C(M)$ temos que $\phi \circ f \in C(M)$, e portanto

$$\lim_n \int \phi \circ f \, d\mu_n = \int \phi \circ f \, d\mu.$$

Com isso,

$$\lim_n \int \phi \, d(f_* \mu_n) = \lim_n \int \phi \circ f \, d\mu_n =$$

$$= \int \phi \circ f \, d\mu = \int \phi \, df_* \mu, \ \forall \phi \in C(M) \implies f_*\left(\lim_n \mu_n\right) = f_* \mu = \lim_n f_* \mu_n.$$

Concluímos que f_* é sequencialmente contínua, e portanto contínua, pois $\mathcal{M}_1(M)$ é espaço métrico. Isso demonstra o lema. $\square$

O resultado enunciado abaixo, conforme [11], descreve uma receita para construção de probabilidades invariantes para uma dinâmica qualquer fixada.

Teorema 2.0.9. *Sejam (M, f) um sistema dinâmico, $(\nu_n)_n$ sequência de probabilidades em M e defina para $n \in \mathbb{N}$*

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_*^k \nu_n.$$

Então qualquer ponto de acumulação μ de $(\mu_n)_n$ na topologia fraca é uma probabilidade f-invariante.*

Demonstração. Admita que $\lim_k \mu_{n_k} = \mu$, pela continuidade de f_*, verificada no Lema 2.0.8, temos que

$$f_*\mu = f_*(\lim_k \mu_{n_k}) = \lim_k f_*\mu_{n_k}.$$

Do fato de f_* preservar combinações convexas,

$$f_*\mu_{n_k} = f_*\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu_{n_k}\right) = \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} f_*^j \nu_{n_k}.$$

Fixado $\phi \in C(M)$ obtemos que,

$$\left|\int \phi \, d(f_*\mu_{n_k}) - \int \phi \, d\mu_{n_k}\right| = \left|\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\int \phi \, d(f_*^j \nu_{n_k}) - \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int \phi \, d(f_*^j \nu_{n_k})\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n_k}\left(\int \phi \, d(f_*^{n_k}\nu_{n_k}) - \int \phi \, d\nu_{n_k}\right)\right| = \left|\frac{1}{n_k}\left(\int \phi \circ f^{n_k} \, d\nu_{n_k} - \int \phi \, d\nu_{n_k}\right)\right| =$$

$$= \left|\int \frac{\phi \circ f^{n_k} - \phi}{n_k} \, d\nu_{n_k}\right| \leqslant \int \frac{|\phi \circ f^{n_k}| + |\phi|}{n_k} \, d\nu_{n_k} \leqslant 2\frac{\|\phi\|_\infty}{n_k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo,

$$\int \phi \, d(f_*\mu) = \lim_k \int \phi \, d(f_*\mu_{n_k}) = \lim_k \int \phi \, d\mu_{n_k} = \int \phi \, d\mu \implies$$

$$f_*\mu = \mu \iff \mu \in \mathcal{M}(f).$$

Concluímos que μ é uma probabilidade invariante por f, como queríamos. $\square$

Para provar o teorema de existência 2.0.3 tome uma probabilidade qualquer $\nu \in \mathcal{M}_1(M)$ e defina a sequência $(\nu_n)_n$ em $\mathcal{M}_1(M)$ como $\nu_n := \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_*^k \nu$. Do fato de $\mathcal{M}_1(M)$ ser compacto na topologia fraca* obtemos ponto de acumulação μ de $(\nu_n)_n$, que pelo teorema anterior sabemos ser invariante. Daí deduzimos $\mu \in \mathcal{M}(f) \neq \varnothing$ o que demonstra o Teorema 2.0.3.

Uma demonstração mais curta do teorema de existência pode ser obtida simplesmente através da convexidade e compacidade de $\mathcal{M}_1(M)$ e continuidade de f_*, que se encaixam nas hipóteses do Teorema de Tychonoff-Schauder.

Teorema 2.0.10 (Tychonoff-Schauder)**.** *Seja K um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico e $T : K \to K$ uma função contínua tal que $T(K)$ é um compacto em K. Então T possui um ponto fixo.*

O conjunto de probabilidades $\mathcal{M}_1(M)$ é um convexo compacto do espaço vetorial topológico $\mathcal{M}(M)$ com a topologia fraca* e $f_* : \mathcal{M}_1(M) \to \mathcal{M}_1(M)$ é contínua com $f_*(\mathcal{M}_1(M))$ compacto. O Teorema 2.0.3 é imediato, porque todo ponto fixo de f_*, que por Tychonoff-Schauder sabemos existirem, pertencem a $\mathcal{M}(f)$. Os Teoremas 2.0.7 e 2.0.10 podem ser encontrados em [3].

Uma propriedade extremamente relevante, e muitas vezes desejável, satisfeita por algumas probabilidades invariantes é a de ergodicidade. Esse conceito está relacionado com a irredutibilidade da dinâmica no sentido exposto à seguir.

Definição 2.0.11. *Uma probabilidade $\mu \in \mathcal{M}(f)$ é ergódica se dado um boreliano B satifazendo $f^{-1}(B) = B$ vale que $\mu(B) \in \{0, 1\}$. Escrevemos $\mathcal{M}_e(f)$ o subconjunto de $\mathcal{M}(f)$ constituído pelas medidas ergódicas.*

O Teorema Ergódico de Birkhoff é um dos principais da Teoria Ergódica. Por meio dele visualizamos uma conexão entre as médias temporais e globais de observáveis. Além disso, esse teorema ilustra a importância da ergodicidade, hipótese sobre a qual conseguimos resultado mais preciso. A obra [11] contém demonstração desse resultado.

Teorema 2.0.12 (Ergódico de Birkhoff)**.** *Sejam (M, f) sistema dinâmico e μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função μ-integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\phi}(x) := \lim_n \frac{S_n\phi}{n}(x) = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\phi \circ f^k)(x)$$

existe em μ-q.t.p. $x \in M$ e valem:

(i) $\tilde{\phi}$ é f-invariante e μ-integrável;

(ii) $\displaystyle\int \tilde{\phi}\, d\mu = \int \phi\, d\mu$;

(iii) Se $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$ então $\tilde{\phi}(x) = \displaystyle\int \phi\, d\mu$ em μ-q.t.p. $x \in M$;

Podemos realizar o conceito de medidas ergódicas no contexto de convexidade. É imediato verificar que $\mathcal{M}(f)$ é um conjunto convexo, o que nos traz a noção de extremos de $\mathcal{M}(f)$. Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}(f)$ é um extremo do convexo $\mathcal{M}(f)$ se $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, com $t \in (0, 1)$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$, implica $\mu_1 = \mu = \mu_2$. A exposição abaixo segue o roteiro de [11].

Lema 2.0.13. *As medidas ergódicas são precisamente os extremos de $\mathcal{M}(f)$.*

Demonstração. Primeiramente se $\mu \in \mathcal{M}(f)\backslash\mathcal{M}_e(f)$ então existe subconjunto $A \subseteq M$ com $f^{-1}(A) = A$ e $\mu(A) \neq 0, 1$. Defina as probabilidades μ_A e μ_{A^C} como

$$\mu_A(B) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)} \text{ e } \mu_{A^C}(B) := \frac{\mu(A^C \cap B)}{\mu(A^C)}, \forall B \in \mathcal{B}.$$

Note que $\mu_A, \mu_{A^C} \in \mathcal{M}(f)$ devido a invariância de A e μ por f:

$$\mu_{A^C}(f^{-1}(B)) = \frac{\mu(A^C \cap f^{-1}(B))}{\mu(A^C)} = \frac{\mu((f^{-1}(A))^C \cap f^{-1}(B))}{\mu(A)} =$$

$$= \frac{\mu(f^{-1}(A^C) \cap f^{-1}(B))}{\mu(A^C)} = \frac{\mu(f^{-1}(A^C \cap B))}{\mu(A^C)} =$$

$$= \frac{\mu(A^C \cap B))}{\mu(A^C)} = \mu_{A^C}(B),\ \forall B \in \mathcal{B} \implies \mu_{A^C} \in \mathcal{M}(f), \text{ e analogamente } \mu_A \in \mathcal{M}(f).$$

Agora, $\mu = \mu(A)\mu_A + \mu(A^C)\mu_{A^C}$, onde $\mu_A \neq \mu \neq \mu_{A^C}$ e $\mu(A) + \mu(A^C) = 1$, e portanto μ não é extremo do convexo $\mathcal{M}(f)$. Isso mostra que necessariamente todo extremo de $\mathcal{M}(f)$ é uma medida ergódica.

Admita agora que μ é probabilidade ergódica e exista combinação convexa $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ com $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$ e $t \in (0,1)$. Vamos mostrar que $\mu_1 = \mu = \mu_2$, donde segue que μ é extremal. Observe que μ_1 e μ_2 são absolutamente contínuas com relação à μ:

$$\mu(B) = 0 \implies t\mu_1(B) + (1-t)\mu_2(B) = 0 \implies \mu_1(B) = 0 = \mu_2(B).$$

Dada qualquer $\phi \in C(M)$ pelo Teorema Ergódico de Birkhoff aplicado à $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$ vale que:

$$\tilde{\phi} = \int \phi \, d\mu \quad \mu\text{-q.t.p.}$$

E logo, como $\mu_i \ll \mu,\ i = 1, 2$,

$$\tilde{\phi} = \int \phi \, d\mu \quad \mu_i\text{-q.t.p.} \implies \int \tilde{\phi} \, d\mu_i = \int \phi \, d\mu \tag{2.1}$$

Por outro lado aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff 2.0.12 para μ_i conseguimos,

$$\int \tilde{\phi} \, d\mu_i = \int \phi \, d\mu_i. \tag{2.2}$$

Pelas equações 2.1 e 2.2 obtemos,

$$\int \phi \, d\mu_i = \int \tilde{\phi} \, d\mu_i = \int \phi \, d\mu, \ \forall \phi \in C(M), \ \forall i \in \{1, 2\}.$$

Consequentemente $\mu_1 = \mu = \mu_2$, como queríamos. $\square$

Para completar a coletânea de definições e resultados, citamos o Teorema de Choquet, que afirma que toda probabilidade invariante pode ser escrita de maneira única como uma combinação convexa generalizada de medidas ergódicas. A relevância desse resultado reside no fato de que podemos estender diversos enunciados inicialmente verificados apenas em $\mathcal{M}_e(f)$ para probabilidades invariantes em geral. Além disso, obtemos como consequência desse teorema a existência de medidas ergódicas para qualquer sistema dinâmico. A demonstração pode ser consultada em [12].

Teorema 2.0.14 (Choquet)**.** *Considere um sistema dinâmico (M, f), então para qualquer $\mu \in \mathcal{M}(f)$ existe uma única probabilidade m_μ na σ-álgebra de borel de $\mathcal{M}(f)$ com $m_\mu(\mathcal{M}_e(f)) = 1$ e baricentro μ, ou seja,*

$$\int \phi \, d\mu = \int_{\mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\nu \, dm_\mu(\nu), \ \forall \phi \in C(M).$$

Capítulo 3

Otimização Ergódica

3.1 Conceitos iniciais

A principal motivação da Otimização Ergódica é estudar a maximização das integrais de potenciais $\phi : M \to \mathbb{R}$ com respeito a medidas em $\mathcal{M}(f)$ e caracterizar as probabilidades que atingem o máximo. Nesta seção mencionamos brevemente três perspectivas sobre essa questão e verificamos um resultado que amarra as três abordagens. Essa exposição segue o artigo [6].

Dado um sistema dinâmico podemos estudar certos aspectos através das médias temporais $\dfrac{S_n\phi}{n} := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ f^k$. O Teorema Ergódico de Birkhoff 2.0.12 elucida uma conexão entre as médias temporais e globais, e portanto sugere que as médias temporais desempenham um papel relevante na questão básica de maximização da integral de um potencial. A pergunta natural que surge nessas circunstâncias é o que pode ser dito sobre o limite superior de $\left(\dfrac{S_n\phi(x)}{n}\right)_n$ quando percorremos $x \in M$.

Definição 3.1.1. *Dado um potencial $\phi : M \to \mathbb{R}$ definimos*

$$\alpha(\phi) := \sup_{x \in M} \overline{\lim_{n}} \frac{S_n\phi}{n}(x),$$

o máximo dentre os pontos de acumulação das sequências $\left(\frac{S_n\phi}{n}(x)\right)_n$ *ao variar* $x \in M$*.*

A segunda abordagem tem suas raízes na noção de cobordos, que são potenciais especiais da forma $(h \circ f - h) : M \to \mathbb{R}$ onde $h \in C(M)$. A partir daí brota uma relação de equivalência sobre os observáveis.

Definição 3.1.2. *Dois potencias* $\phi, \psi \in C(M)$ *são ditos cohomólogos, ou equivalentes,* $\psi \sim \phi$*, se sua diferença é um cobordo, ou seja, se existe potencial* $h \in C(M)$ *tal que* $\phi - \psi = h \circ f - h$*.*

A propriedade básica de funções cohomólogas é que partilham suas médias temporais e globais. Mais precisamente se $\phi \sim \psi$ e $(n_k)_k$ é sequência crescente em $\mathbb{N}$ então

$$\lim_k \frac{S_{n_k}\phi}{n_k}(x) = \lim_k \frac{S_{n_k}\psi}{n_k}(x),\ \forall x \text{ tal que algum dos dois limites existe e} \tag{3.1}$$

$$\int \phi \, d\mu = \int \psi \, d\mu,\ \forall \mu \in \mathcal{M}(f). \tag{3.2}$$

De fato, $\phi \sim \psi \iff \phi = \psi + h \circ f - h$ e portanto para qualquer sequência crescente $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ e x tal que algum dos limites de 3.1 existe:

$$\lim_k \frac{S_{n_k}\phi}{n_k}(x) = \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}(\phi \circ f^j)(x) =$$

$$= \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}(\psi \circ f^j + h \circ f^{j+1} - h \circ f^j)(x) =$$

$$= \lim_k \left(\frac{h \circ f^{n_k} - h}{n_k} + \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\psi \circ f^j\right)(x) =$$

$$= \lim_k \left(\frac{(h \circ f^{n_k} - h)}{n_k}(x) + \frac{S_{n_k}\psi}{n_k}(x)\right) = \lim_k \frac{S_{n_k}\psi}{n_k}(x) \implies$$

$$\lim_k \frac{S_{n_k}\phi}{n_k}(x) = \lim_k \frac{S_{n_k}\psi}{n_k}(x).$$

Além disso, dada $\mu \in \mathcal{M}(f)$,

$$\int \phi \, d\mu = \int \psi + h \circ f - h \, d\mu = \int \psi \, d\mu + \int h \circ f \, d\mu - \int h \, d\mu =$$

$$= \int \psi \, d\mu + \int h \, d(f_* \mu) - \int h \, d\mu = \int \psi \, d\mu + \int h \, d\mu - \int h \, d\mu = \int \psi \, d\mu \implies$$

$$\int \phi \, d\mu = \int \psi \, d\mu, \ \forall \mu \in \mathcal{M}(f).$$

Essas relações insinuam que observáveis cohomólogos são idênticos do ponto de vista da questão de maximização. Introduzimos uma nova quantidade associada as classes de cohomologia.

Definição 3.1.3. *Para um observável $\phi : M \to \mathbb{R}$ define-se*

$$\gamma(\phi) := \inf_{\psi \sim \phi} \sup_{x \in M} \psi(x),$$

o ínfimo dos supremos das funções na classe de cohomologia de ϕ.

Note que ambos $\alpha(\phi)$ e $\gamma(\phi)$ tem suas definições independentes da estrutura de $\mathcal{M}(f)$ e utilizam apenas conceitos ligados a dinâmica f e topologia de M.

Finalmente trabalhamos com medidas invariantes, e nos concentramos na questão que abre essa seção.

Definição 3.1.4. *Seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ contínua, denotamos*

$$\mathcal{M}_{max}(\phi) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}(f) \,\middle|\, \int \phi \, d\nu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu \right\},$$

o conjunto das medidas maximizantes de ϕ.

A compacidade de $\mathcal{M}(f)$ e continuidade da aplicação $\mu \mapsto \int \phi \, d\mu$ na topologia fraca* implicam que o supremo é atingido por alguma probabilidade, e logo $\mathcal{M}_{max}(\phi) \neq \varnothing$, $\forall \phi \in C(M)$. Algumas observações imediatas sobre $\mathcal{M}_{max}(\phi)$ é que é um conjunto convexo e compacto na topologia fraca*. De fato, se $\nu, \eta \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$ e $t \in [0, 1]$ então

$$\int \phi \, d(t\nu + (1-t)\eta) = t \int \phi \, d\nu + (1-t) \int \phi \, d\eta =$$

$$= t \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu + (1-t) \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu \implies$$

$$(t\nu + (1-t)\eta) \in \mathcal{M}_{max}(\phi),$$

o que verifica a convexidade de $\mathcal{M}_{max}(\phi)$. Além disso, se $(\nu_n)_n$ é sequência em $\mathcal{M}_{max}(\phi)$ com $\nu_n \overset{w*}{\to} \nu \in \mathcal{M}(f)$ então

$$\int \phi \, d\nu = \lim_n \int \phi \, d\nu_n = \lim_n \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu \implies$$

$$\nu \in \mathcal{M}_{max}(\phi),$$

e logo $\mathcal{M}_{max}(\phi)$ é compacto. A equação 3.2 e linearidade da integral implicam que para quaisquer $\psi \sim \phi$, $A > 0$ e $B \in \mathbb{R}$ vale $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \mathcal{M}_{max}(A\psi + B)$.

As três abordagens apresentadas para o estudo de um potencial $\phi \in C(M)$ estão intimamente relacionadas, como mostra a próxima proposição.

Proposição 3.1.5. *Dado qualquer observável $\phi : M \to \mathbb{R}$ vale a igualdade*

$$\alpha(\phi) = \gamma(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu,$$

onde o supremo é atingido por alguma $\mu_0 \in \mathcal{M}_e(f)$.

Demonstração. Verificamos três desigualdades:

1. $\gamma(\phi) \leqslant \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu$: Observemos inicialmente que $\dfrac{S_k(\phi \circ f)}{k} \sim \phi$, $\forall k \in \mathbb{N}$. De fato, se $\psi_k := \dfrac{-1}{k} \sum_{n=1}^{k} S_n \phi \in C(M)$ então

$$\frac{S_k(\phi \circ f)}{k} + \psi_k \circ f - \psi_k = \frac{S_k(\phi \circ f)}{k} - \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} S_n \phi \circ f + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k} S_n \phi =$$

$$= \frac{S_k(\phi \circ f)}{k} - \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} S_n(\phi \circ f) + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} S_n\phi =$$

$$= \frac{S_k(\phi \circ f)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}[S_n\phi - S_n(\phi \circ f)] = \frac{S_k(\phi \circ f)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}[\phi - \phi \circ f^n] =$$

$$= \phi + \frac{S_k(\phi \circ f)}{k} - \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} \phi \circ f^n = \phi.$$

Com isso, $\dfrac{S_k(\phi \circ f)}{k} = \phi - \psi_k \circ f + \psi_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$, e logo

$$\gamma(\phi) = \inf_{\psi \sim \phi} \sup_{x \in M} \psi(x) \leqslant \inf_{k} \sup_{x \in M} (\phi - \psi_k \circ f + \psi_k)(x) \implies$$

$$\gamma(\phi) \leqslant \inf_{k} \sup_{x \in M} \frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x).$$

Como $\dfrac{S_k(\phi \circ f)}{k}$ é contínua e M compacto, existe $x_k \in M$ com

$$\frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x_k) = \sup_{x \in M} \frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x).$$

Defina $\mu_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} f_*^n \delta_{f(x_k)}$, onde $\delta_{f(x_k)}$ é a probabilidade delta de Dirac no ponto $f(x_k)$, ou seja, $\delta_{f(x_k)}(B) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x_k) \in B \\ 0 & \text{se } f(x_k) \notin B \end{cases}$ para qualquer $B \in \mathcal{B}$. Note que

$$\frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x_k) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}(\phi \circ f^n)(x_k) = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1}(\phi \circ f^n)(f(x_k)) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1}\int \phi \circ f^n \, d\delta_{f(x_k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1}\int \phi \, d(f_*^n \delta_{f(x_k)}) = \int \phi \, d\mu_k \implies$$

$$\frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x_k) = \int \phi \, d\mu_k.$$

Pela compacidade de $\mathcal{M}_1(M)$ existe ponto de acumulação $\nu \in \mathcal{M}_1(M)$ de $(\mu_k)_k$, e pelo Teorema 2.0.9 vale que $\nu \in \mathcal{M}(f)$. Assuma que $\mu_{n_k} \overset{w*}{\to} \nu$, então:

$$\gamma(\phi) \leqslant \inf_k \sup_{x \in M} \frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x) = \inf_k \frac{S_k(\phi \circ f)}{k}(x_k) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_k \frac{S_{n_k}(\phi \circ f)}{n_k}(x_{n_k}) = \inf_k \int \phi \, d\mu_{n_k} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_k \int \phi \, d\mu_{n_k} = \int \phi \, d\nu \leqslant \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu.$$

Daí segue que $\gamma(\phi) \leqslant \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu$.

2. $\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu \leqslant \alpha(\phi)$: Já sabemos que $\mathcal{M}_{max}(\phi) \neq \varnothing$ e portanto existe $\nu \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$. Agora pelo Teorema de Choquet 2.0.14 existe m_ν probabilidade em $\mathcal{M}(f)$ com $m_\nu(\mathcal{M}_e(f)) = 1$ tal que

$$\int \psi \, d\nu = \int_{\mathcal{M}(f)} \int \psi \, d\lambda \, dm_\nu(\lambda), \ \forall \psi \in C(M).$$

Logo deve existir $\mu_0 \in \mathcal{M}_e(f)$ com

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu = \int \phi \, d\nu \leqslant \int \phi \, d\mu_0 \implies \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu = \int \phi \, d\mu_0 \iff$$

$$\mu_0 \in \mathcal{M}_{max}(\phi) \cap \mathcal{M}_e(f).$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.0.12:

$$\lim_n \frac{S_n \phi}{n} = \int \phi \, d\mu_0, \text{ para } \mu_0\text{-q.t.p.}$$

Em particular existe $x_0 \in M$ com $\lim_n \frac{S_n\phi}{n}(x_0) = \int \phi\, d\mu_0$. Com isso

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\mu_0 = \lim_n \frac{S_n\phi}{n}(x_0) = \overline{\lim_n} \frac{S_n\phi}{n}(x_0) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \frac{S_n\phi}{n}(x) = \alpha(\phi) \implies \int \phi\, d\mu_0 = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi\, d\mu \leqslant \alpha(\phi),$$

onde $\mu_0 \in \mathcal{M}_e(f)$.

3. $\alpha(\phi) \leqslant \gamma(\phi)$: Fixe alguma $\phi \sim \psi = \phi + h \circ f - h$, e observe que pela equação 3.1:

$$\overline{\lim_n} \frac{S_n\phi}{n}(x) = \overline{\lim_n} \frac{S_n\psi}{n}(x), \ \forall x \in M.$$

Logo,

$$\alpha(\phi) = \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \frac{S_n\phi}{n}(x) = \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \frac{S_n\psi}{n}(x) = \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\psi \circ f^k)(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{y \in M} \psi(y) = \sup_{x \in M} \overline{\lim_n} \sup_{y \in M} \psi(y) = \sup_{y \in M} \psi(y) \implies$$

$$\alpha(\phi) \leqslant \sup_{x \in M} \psi(x).$$

Finalmente tomando o ínfimo sobre $\psi \sim \phi$ conseguimos

$$\alpha(\phi) \leqslant \inf_{\psi \sim \phi} \sup_{x \in M} \psi(x) = \gamma(\phi).$$

Logo $\alpha(\phi) = \gamma(\phi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi\, d\mu = \int \phi\, d\mu_0$, onde $\mu_0 \in \mathcal{M}_e(f)$. Isso demonstra o enunciado. $\square$

Concluímos a seção apresentando uma maneira de explorar a igualdade do teorema anterior. Chamamos ψ de *subação* com relação a ϕ quando satisfaz a desigualdade $\psi \circ f \geqslant \psi + \phi - \gamma(\phi)$. Nesse caso, uma medida ν é maximizante para ϕ se, e somente se, $(\psi \circ f - \psi - \phi)\Big|_{supp(\nu)} \equiv -\gamma(\phi)$. De fato, é fácil ver que para qualquer $\nu \in \mathcal{M}(f)$:

$$\int \phi \, d\nu - \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\mu = \int \phi \, d\nu - \gamma(\phi) = \int \phi - \gamma(\phi) \, d\nu \leqslant \int \psi \circ f - \psi \, d\nu = 0.$$

Como $\phi - \gamma(\phi) \leqslant \psi \circ f - \psi$, ocorre igualdade se, e apenas se, é satisfeita a relação $(\psi \circ f - \psi - \phi)\Big|_{supp(\nu)} \equiv -\gamma(\phi)$. Em suma, as subações permitem detectar as regiões de M que contém os suportes das medidas maximizadoras, e assim possivelmente descrever o suporte de tais probabilidades.

3.2 Medidas Maximizantes

Vamos tratar a questão de quais são as coleções possíveis de medidas maximizantes, ou seja, iremos buscamos uma descrição mais pálpavel do conjunto $\{\mathcal{M}_{max}(\phi) \mid \phi \in C(M)\}$. Investigaremos em particular se toda medida ergódica μ é unicamente maximizante, isto é, se existe algum potencial particular ϕ satisfazendo $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \{\mu\}$.

Note que para potenciais cohomólogos a constantes temos que todas medidas são maximizantes, e portanto é claro que toda probabilidade invariante é maximizante para algum observável. O assunto proposto nessa seção é mais específico e pede especialmente um parecer sobre medidas unicamente maximizantes.

Como o conjunto de medidas maximizantes de um potencial sempre possui uma medida ergódica, é claro que somente as probabilidades ergódicas podem ser unicamente maximizantes. Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$, um candidato natural $\phi \in C(M)$ tal que $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \{\mu\}$ é $\phi(x) = -d(x, supp(\mu))$. Obtemos nesse caso que $\mu \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$ e possivelmente $\mathcal{M}_{max}(\phi) \neq \mathcal{M}(f)$, mas não há garantias que $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \{\mu\}$. Essa sugestão só tem sucesso garantido quando μ é unicamente ergódica em seu suporte.

A existência do potencial ϕ com $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \{\mu\}$ obtida nessa seção não assume hipóteses adicionais sobre $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$. Além disso, a técnica funciona para outros subconjuntos de $\mathcal{M}(f)$ que guardam semelhança com as medidas ergódicas. Como consequência obtemos descrição dos subconjuntos de medidas maximizantes. Pelo Teorema de Choquet 2.0.14 apresentado no início do texto sabemos que $\mathcal{M}(f)$ é um simplexo com extremais ergódicas. A caracterização das medidas maximizantes que obtemos se dá precisamente em termos de suconjuntos de $\mathcal{M}_e(f)$. Iremos seguir a estrutura do artigo [9].

Começamos fazendo um estudo detalhado de funcionais afins contínuos em $\mathcal{M}(f)$. Dado um observável $\phi \in C(M)$ sabemos que este induz um funcional linear contínuo em $\mathcal{M}(M)$ dado por $\mu \mapsto \displaystyle\int \phi \, d\mu$. Sua restrição a $\mathcal{M}(f)$ é contínua e afim, isto é, preserva combinações convexas. Mais geralmente, uma função $L : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ é dita afim se

$$L(t\mu + (1-t)\nu) = tL(\mu) + (1-t)L(\nu), \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}(f), t \in [0,1].$$

Escrevemos $A(\mathcal{M}(f))$ para o conjunto de funções $L : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ afins e contínuas na topologia fraca*. A primeira proposição mostra que todos funcionais $L \in A(\mathcal{M}(f))$ são da forma $\mu \mapsto \displaystyle\int \phi \, d\mu$ para alguma $\phi \in C(M)$. Esse resultado é no fundo uma aplicação do Teorema de Riesz-Markov.

Proposição 3.2.1. *Seja $L \in A(\mathcal{M}(f))$ então existe $\phi \in C(M)$ tal que*

$$L(\mu) = \int \phi \, d\mu.$$

Demonstração. A estratégia da demonstração é estender L sucessivamente para funcionais contínuos em C_f, E_f e $\mathcal{M}(M)$, e em seguida usar a tecnologia de dualidade da Análise Funcional para obter o potencial ϕ.

Note que cada elemento não-nulo $m \in C_f$ pode ser escrito de maneira única como $m = c\mu$ onde $c > 0$ e $\mu \in \mathcal{M}(f)$. De fato, basta tomar probabilidade $\mu := \dfrac{m}{m(M)} \in \mathcal{M}(f)$ e constante $c := m(M) > 0$. Considere $L_1 : C_f \to \mathbb{R}$ definido por

$$L_1(c\mu) := cL(\mu), \text{ onde } c > 0 \text{ e } \mu \in \mathcal{M}(f).$$

Claramente L_1 é positivamente homogêneo por construção, pois dado $\lambda \geqslant 0$ vale $L_1(\lambda c\mu) = \lambda c L(\mu) = \lambda L_1(c\mu)$. Utilizando esse fato e que L é afim temos a aditividade de L_1:

$$L_1(c\mu + d\nu) = L_1\left((c+d)\left(\frac{c}{c+d}\mu + \frac{d}{c+d}\nu\right)\right) =$$

$$= (c+d)L\left(\frac{c}{c+d}\mu + \frac{d}{c+d}\nu\right) = (c+d)\left(\frac{c}{c+d}L(\mu) + \frac{d}{c+d}L(\nu)\right) =$$

$$= cL(\mu) + dL(\nu) = L_1(c\mu) + L_1(d\nu).$$

Além disso, a continuidade de L implica que L_1 é contínuo em $C_f \backslash \{0\}$. Considere net $(c_\beta \mu_\beta)_\beta$ em $C_f \backslash \{0\}$ com $c_\beta \mu_\beta \overset{w*}{\to} c\mu \in C_f \backslash \{0\}$, temos que

$$c_\beta = \int 1 \; d(c_\beta \mu_\beta) \to \int 1 \; d(c\mu) = c,$$

e portanto $\mu_\beta \overset{w*}{\to} \mu \implies L(\mu_\beta) \to L(\mu)$. Logo

$$L_1(c_\beta \mu_\beta) = c_\beta L(\mu_\beta) \to cL(\mu) = L_1(c\mu).$$

Afirmamos que L_1 também é contínuo no zero. Para verificar isso, tome net $c_\beta \mu_\beta \to 0$. Novamente $c_\beta = \displaystyle\int 1 \; d(c_\beta \mu_\beta) \to 0$ e como $\mathcal{M}(f)$ é compacto e L é contínuo temos $\{L(\mu_\beta)\}_\beta$ limitado. Logo $L_1(m_\beta) = c_\beta L(\mu_\beta) \to 0$, o que prova a afirmação. Concluímos que L_1 é funcional positivamente homogêneo, aditivo e contínuo em C_f.

Dado $\mu \in E_f$ considere as componentes positiva e negativa de μ dadas por $\mu^+ := \max\{\mu, 0\}$ e $\mu^- := \max\{-\mu, 0\}$, respectivamente, temos $\mu = \mu^+ - \mu^-$. É evidente que μ^+ e μ^- são medidas positivas em M, afirmamos que μ^+ e μ^- também são invariantes por f. De fato,

$$\mu^+(f^{-1}(B)) = \max\{\mu(f^{-1}(B)), 0\} = \max\{\mu(B), 0\} = \mu^+(B), \; \forall B \in \mathcal{B},$$

o que implica $\mu^+ \in C_f$, e de maneira análoga $\mu^- \in C_f$.

Estendemos L_1 à $L_2 : E_f \to \mathbb{R}$ fazendo $L_2(\mu) := L_1(\mu^+) - L_1(\mu^-)$. A aditividade de L_1 implica que a imagem de qualquer medida em E_f por L_2

independe de sua decomposição em medidas de C_f. Se $\mu^+, \mu^-, m_1, m_2 \in C_f$ com $\mu^+ - \mu^- = \mu = m_1 - m_2$, então

$$\mu^+ + m_2 = m_1 + \mu^- \implies L_1(\mu^+) + L_1(m_2) = L_1(m_1) + L_1(\mu^-) \implies$$

$$L_1(\mu^+) - L_1(\mu^-) = L_1(m_1) - L_1(m_2).$$

Note que L_2 é linear, pois tomando $\mu, \nu \in E_f$ e $\lambda \geqslant 0$, temos

$$\lambda\mu - \nu = (\lambda\mu^+ + \nu^-) - (\lambda\mu^- + \nu^+) \implies$$

$$L_2(\lambda\mu - \nu) = L_1(\lambda\mu^+ + \nu^-) - L_1(\lambda\mu^- + \nu^+) =$$

$$= \lambda L_1(\mu^+) + L_1(\nu^-) - \lambda L_1(\mu^-) - L_1(\nu^+) =$$

$$= \lambda(L_1(\mu^+) - L_1(\mu^-)) - (L_1(\nu^+) - L_1(\nu^-)) = \lambda L_2(\mu) - L_2(\nu).$$

Agora verificamos a continuidade de L_2. Como E_f é espaço vetorial topológico e L_2 é linear temos que é suficiente verificar que o núcleo de L_2, $Nuc(L_2)$, é fechado para concluir que L_2 é contínuo. Uma demonstração desse fato está presente em [3].

Vamos mostrar que $Nuc(L_2)$ é fechado na topologia fraca*. A linearidade de L_2 permite reduzir a demonstração a verificar que $Nuc(L_2) \cap B_{\mathcal{M}(M)}$ é fechado na topologia fraca*, onde $B_{\mathcal{M}(M)}$ é a bola fechada unitária de $(\mathcal{M}(M), \| \cdot \|)$. Considere um net $(\mu_\alpha)_\alpha$ em $Nuc(L_2)$ com $\mu_\alpha \overset{w*}{\to} \mu$. Observe que $\mu_\alpha^+, \mu_\alpha^- \in C_f \cap B_{\mathcal{M}(M)}$, $\forall \alpha$. Como C_f é fechado e a bola $B_{\mathcal{M}(M)}$ é compacta na topologia fraca* pelo Teorema 2.0.7, temos que $C_f \cap B_{\mathcal{M}(M)}$ é compacto na topologia fraca*. Logo existe subnet $(\mu_\beta)_\beta$ tal que $\mu_\beta^+ \overset{w*}{\to} \nu_1$ e $\mu_\beta^- \overset{w*}{\to} \nu_2$, onde $\nu_1, \nu_2 \in C_f$, e logo $\mu = \lim_\beta \mu_\beta = \lim_\beta(\mu_\beta^+ - \mu_\beta^-) = \nu_1 - \nu_2$. Pela continuidade de L_1 temos que

$$L_2(\mu) = L_2(\nu_1) - L_2(\nu_2) = L_1(\nu_1) - L_1(\nu_2) = \lim_\beta(L_1(\mu_\beta^+) - L_1(\mu_\beta^-)) =$$
$$= \lim_\beta L_2(\mu_\beta) = 0 \implies L_2(\mu) = 0 \iff \mu \in Nuc(L_2).$$

Isso mostra que $Nuc(L_2)$ é fechado na topologia fraca* e portanto L_2 é contínuo nessa mesma topologia.

Finalmente $L_2 : E_f \to \mathbb{R}$ é funcional linear contínuo no subespaço vetorial E_f do espaço vetorial topológico localmente convexo $\mathcal{M}(M)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach 2.0.5 existe $L_3 : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$ linear contínuo com $L_3\Big|_{E_f} \equiv L_2$. Pelo Teorema de Riesz-Markov $C(M)$ é dual de $\mathcal{M}(M)$ e portanto existe $\phi \in C(M)$ tal que $L_3(\mu) = \int \phi \, d\mu$. Restringindo a $\mathcal{M}(f)$ obtemos que

$$L(\mu) = L_3(\mu) = \int \phi \, d\mu, \; \forall \mu \in \mathcal{M}(f).$$

Isso prova o enunciado. □

O fato de $\mathcal{M}(f)$ ser simplexo, resultado contido no Teorema de Choquet 2.0.14, permite o uso de ferramentas mais específicas para analisar sua estrutura linear e de funcionais afins. Um exemplo disso, que logo mais nos será útil, é a especialização do Teorema de Edwards para $\mathcal{M}(f)$, apresentada abaixo. O livro [1] estabelece generalização desse enunciado.

Teorema 3.2.2 (Edwards)**.** *Sejam $\xi : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ convexa semicontínua superiormente e $\eta : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ côncava semicontínua inferiormente, onde $\mathcal{M}(f)$ está munido da topologia fraca*. Se $\xi \leqslant \eta$ então existe $L \in A(\mathcal{M}(f))$ funcional afim contínuo com $\xi \leqslant L \leqslant \eta$.*

Uma propriedade facilmente verificável do conjunto de medidas maximizantes é que para qualquer $\phi \in C(M)$ se $t\mu + (1-t)\nu \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$, onde $t \in (0,1)$ e $\mu, \nu \in \mathcal{M}(f)$, então $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$. Denotamos faces os objetos mais gerais de $\mathcal{M}(f)$ com essa característica.

Definição 3.2.3. *Uma face de $\mathcal{M}(f)$ é um subconjunto convexo $F \subseteq \mathcal{M}(f)$ tal que se $t\mu + (1-t)\nu \in F$, onde $t \in (0,1)$ e $\mu, \nu \in \mathcal{M}(f)$, então $\mu, \nu \in F$. Uma face que é fechada como subconjunto de $\mathcal{M}(f)$ na topologia fraca* é dita uma face fechada.*

O interessante é que essa propriedade isolada é suficiente para caracterizar os conjuntos maximizantes. Foi demonstrado no artigo [8], em um contexto mais geral, que todas as faces fechadas de um simplexo compacto metrizável estão expostas.

Teorema 3.2.4. *As faces fechadas de $\mathcal{M}(f)$ são precisamente os subconjuntos maximizantes de potenciais, ou seja,*

$$\{F \mid F \text{ é face fechada de } \mathcal{M}(f)\} = \{\mathcal{M}_{max}(\phi) \mid \phi \in C(M)\}.$$

Demonstração. Dada uma face fechada F de $\mathcal{M}(f)$ construiremos um funcional afim contínuo L tal que $L\Big|_F \equiv 0$ e $L\Big|_{\mathcal{M}(f)\backslash F} < 0$.

Seja $\mu \in \mathcal{M}(f)\backslash F$, pelo Teorema Geométrico de Hahn-Banach 2.0.6 existe funcional linear contínuo $\lambda : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$ tal que $\lambda(\mu) < 0$ e $\lambda\Big|_F \geqslant 0$, pois F e $\{\mu\}$ são convexos disjuntos com F fechado e $\{\mu\}$ compacto e $\mathcal{M}(M)$ é espaço vetorial topológico localmente convexo com a topologia fraca*. Defina as aplicações $\eta, \xi : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ como

$$\eta(\nu) = \min(\lambda(\nu), 0) \text{ e } \xi\Big|_F \equiv 0,\ \xi\Big|_{\mathcal{M}(f)\backslash F} \equiv -\max_{\nu\in\mathcal{M}(f)} |\lambda(\nu)|.$$

Agora, η é contínuo e côncavo, pois é mínimo de dois funcionais lineares contínuos, e ξ é semicontínuo superiormente e convexo. A semicontinuidade superior é devida ao fato de F ser fechado e a convexidade de ξ segue de F ser face. De fato, sejam $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathcal{M}(f)$ se $t\tilde{\mu}+(1-t)\tilde{\nu} \in \mathcal{M}(f)\backslash F$, então é claro que

$$\begin{gathered}\xi(t\tilde{\mu} + (1-t)\tilde{\nu}) = -\max_{\nu\in\mathcal{M}(f)} |\lambda(\nu)| = \\ = t(-\max_{\nu\in\mathcal{M}(f)} |\lambda(\nu)|) + (1-t)(-\max_{\nu\in\mathcal{M}(f)} |\lambda(\nu)|) \leqslant t\xi(\tilde{\mu}) + (1-t)\xi(\tilde{\nu}).\end{gathered}$$

Já se $t\tilde{\mu} + (1-t)\tilde{\nu} \in F$ então por F ser face temos $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in F$, e portanto

$$\xi(t\tilde{\mu} + (1-t)\tilde{\nu}) = 0 = t\xi(\tilde{\mu}) + (1-t)\xi(\tilde{\nu}).$$

Logo ξ é aplicação convexa.

Além disso, por contrução $\xi \leqslant \eta$. Pelas propriedades já citadas de η e ξ estamos nas hipótes do Teorema de Edwards 3.2.2. Logo existe funcional afim contínuo $L_\mu : \mathcal{M}(f) \to \mathbb{R}$ com $\xi \leqslant L_\mu \leqslant \eta$. Esse funcional afim satisfaz $L_\mu(\mu) \leqslant \eta(\mu) = \min(\lambda(\mu), 0) = \lambda(\mu) < 0$ e $0 \equiv \xi\Big|_F \leqslant L_\mu\Big|_F \leqslant \eta\Big|_F \equiv 0 \implies L_\mu\Big|_F \equiv 0$. Além disso, $L_\mu \leqslant \eta = \min(\lambda, 0) \leqslant 0$ implica que L_μ é não-positivo.

Considere N subconjunto fechado de $\mathcal{M}(f)$ disjunto de F. Para cada elemento $\mu \in N$ defina $V_\mu := \{\nu \in N | L_\mu(\nu) < 0\}$ vizinhança de μ. Temos que $N = \bigcup_{\mu \in N} V_\mu$ e como N é compacto, pois é subconjunto fechado do compacto $\mathcal{M}(f)$, existe subcobertura $N = \bigcup_{k=1}^{n} V_{\mu_k}$. Defina $L_N := \sum_{k=1}^{n} L_{\mu_k}$, então L_N é funcional afim contínuo não-positivo com $L_N\Big|_N < 0$ e $L_N\Big|_F \equiv 0$.

Como F é fechado dentro do espaço métrico $\mathcal{M}(f)$ temos que é um G_δ, ou seja, podemos escrever $\mathcal{M}(f)\backslash F = \bigcup_k N_k$, onde N_k é fechado para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Essa representação pode ser obtida fazendo

$$N_k = \left\{ x \in \mathcal{M}(f) \;\middle|\; d(x, F) \geqslant \frac{1}{k} \right\}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Reescalamos $L_{N_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ de modo que $\max_{\nu \in \mathcal{M}(f)} |L_{N_k}(\nu)| = \frac{1}{2^k}, \forall k \in \mathbb{N}$. Finalmente definimos $L = \sum_k L_{N_k}$, e obtemos o funcional com as propriedades que desejávamos. É claro que L é afim contínuo e satisfaz

$$L\Big|_F = \sum_k L_{N_k}\Big|_F \equiv 0.$$

Além disso, dada $\nu \in \mathcal{M}(f)\backslash F = \bigcup_k N_k$ existe $j \in \mathbb{N}$ com $\nu \in N_j$, e portanto

$$L(\nu) = \sum_k L_{N_k}(\nu) \leqslant L_{N_j}(\nu) < 0 \implies$$

$$L(\nu) < 0, \ \forall \nu \in \mathcal{M}(f)\backslash F \iff L\Big|_{\mathcal{M}(f)\backslash F} < 0.$$

Para terminar, pela proposição 3.2.1 existe um potencial $\phi \in C(M)$ tal que $L(\nu) = \int \phi \, d\nu, \ \forall \nu \in \mathcal{M}(f)$. Logo $F = L^{-1}(0) = \mathcal{M}_{max}(\phi)$, e porconseguinte toda face fechada é subconjunto maximizante. Por outro lado já sabemos que todo subconjunto maximizante é face fechada. Isso verifica que os conjuntos coincidem. $\square$

O próximo enunciado é uma das ferramentas utilizadas na caracterização das faces fechadas de $\mathcal{M}(f)$. Para a demonstração seguimos a obra [12].

Lema 3.2.5. *Seja $E \subseteq \mathcal{M}_e(f)$ fechado na topologia fraca*, então*

$$supp(m_\mu) \subseteq E \iff \mu \in \overline{conv(E)}.$$

Demonstração. ($\implies$) Supõe $supp(m_\mu) \subseteq E$, então para qualquer $\phi \in C(M)$ temos

$$\int \phi \, d\mu = \int_{\mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\lambda \, dm_\mu(\lambda) = \int_{supp(m_\mu)} \int \phi \, d\lambda \, dm_\mu(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in supp(m_\mu)} \int \phi \, d\lambda \leqslant \sup_{\lambda \in E} \int \phi \, d\lambda \leqslant \sup_{\lambda \in \overline{conv(E)}} \int \phi \, d\lambda \implies$$

$$\int \phi \, d\mu \leqslant \sup_{\lambda \in \overline{conv(E)}} \int \phi \, d\lambda. \tag{3.3}$$

Assuma, por absurdo, que $\mu \notin \overline{conv(E)}$. Como os conjuntos $\{\mu\}$ e $\overline{conv(E)}$ são convexos fechados disjuntos e $\{\mu\}$ é compacto, temos pelo Teorema Geométrico de Hahn-Banach 2.0.6 e Teorema de Riesz-Markov que existe $\phi \in C(M)$ com

$$\sup_{\lambda \in \overline{conv(E)}} \int \phi \, d\lambda < \int \phi \, d\mu. \tag{3.4}$$

Pelas desigualdades 3.3 e 3.4 obtemos

$$\sup_{\lambda \in \overline{conv(E)}} \int \phi \, d\lambda < \int \phi \, d\mu \leqslant \sup_{\lambda \in \overline{conv(E)}} \int \phi \, d\lambda,$$

o que é uma contradição. Logo $\mu \in \overline{conv(E)}$.

($\impliedby$) Assuma agora que $\mu \in \overline{conv(E)}$, como $\mathcal{M}(f)$ é espaço métrico, existe sequência $\mu_k = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \nu_i^k$ convergindo a μ onde $\lambda_i^k \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k = 1$ e

$\nu_i^k \in E$. Associamos a μ_k a medida
$m_k := \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^k \delta_{\nu_i^k} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}(f))$, com $supp(m_k) \subseteq E$. Do fato de $\mathcal{M}(f)$ ser métrico compacto temos que $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}(f))$ é compacto na topologia fraca*, e portanto existe subsequência $m_{k'} \overset{w*}{\to} m \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}(f))$.

Agora,

$$\int \phi \, d\mu = \lim_{k'} \int \phi \, d\mu_{k'} = \lim_{k'} \int_{\mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\lambda \, dm_{k'}(\lambda) =$$

$$= \int_{\mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\lambda \, dm(\lambda), \quad \forall \phi \in C(M) \implies$$

$$\int \phi \, d\mu = \int_{\mathcal{M}(f)} \int \phi \, d\lambda \, dm(\lambda), \; \forall \phi \in C(M). \tag{3.5}$$

Como $m_{k'}(E) = 1, \; \forall k'$ e E é fechado, temos que $supp(m_{k'}) \subseteq E, \; \forall k'$. Pelo Teorema de Portmanteau 2.0.4, dados A subconjunto aberto de $\mathcal{M}(f) \backslash E$ e $\epsilon > 0$ temos que $V(m, \{A\}, \epsilon)$ é vizinhança de m na topologia fraca*. Do fato de $m_{k'} \overset{w*}{\to} m$ obtemos que $m_{k'} \in V(m, \{A\}, \epsilon) \iff m(A) < m_{k'}(A) + \epsilon$ para todo k' grande. Acontece que $A \subseteq \mathcal{M}(f) \backslash E$ e $supp(m_{k'}) \subseteq E, \forall k'$ e logo $m_{k'}(A) = 0, \forall k'$. Com isso

$$m(A) < m_{k'}(A) + \epsilon = \epsilon, \forall k' \text{ grande} \implies m(A) < \epsilon, \forall \epsilon > 0 \implies m(A) = 0.$$

Concluímos que $m(A) = 0$ para qualquer aberto $A \subseteq \mathcal{M}(f) \backslash E$, e portanto $supp(m) \subseteq E$. Em particular $supp(m) \subseteq E \implies m(E) = 1 \implies m(\mathcal{M}_e(f)) = 1$. Pela equação 3.5 e $m(\mathcal{M}_e(f)) = 1$ concluímos através da unicidade do Teorema de Choquet 2.0.14 que $m = m_\mu$, e portanto

$$supp(m_\mu) = supp(m) \subseteq E.$$

Isso encerra a demonstração. $\square$

Com o auxílio desse lema estamos preparados para classificar as faces fechadas de $\mathcal{M}(f)$.

Teorema 3.2.6. *(i) Toda face fechada F de $\mathcal{M}(f)$ é da forma $\overline{conv(E)}$ onde $E = F \cap \mathcal{M}_e(f)$.*

(ii) Se $E \subseteq \mathcal{M}_e(f)$ é fechado na topologia fraca então $\overline{conv(E)}$ é uma face fechada de $\mathcal{M}(f)$.*

Demonstração. (i) Seja F uma face fechada de $\mathcal{M}(f)$. Pelo Teorema 3.2.4 sabemos que $F = \mathcal{M}_{max}(\phi)$ para algum potencial $\phi \in C(M)$ e a proposição 3.1.5 nos diz que $E := \mathcal{M}_e(f) \cap F = \mathcal{M}_e(f) \cap \mathcal{M}_{max}(\phi) \neq \varnothing$. Vamos verificar que $\overline{conv(E)} = F$.

Por um lado, como F é convexo fechado e $E \subseteq F$ é claro que vale $\overline{conv(E)} \subseteq F$. Suponha, por contradição, que exista $\mu \in F \backslash \overline{conv(E)}$. Pelo Teorema Geométrico de Hahn-Banach 2.0.6 existe funcional linear L com $L(\mu) > 0$ e $L\Big|_{\overline{conv(E)}} \leqslant 0$. Considere $F' := \left\{\nu \in F \;\middle|\; L(\nu) = \sup\limits_{\lambda \in F} L(\lambda)\right\}$, então $F' \neq \varnothing$, pois F é compacto, e $F' \cap E = \varnothing$, porque $L(\mu) > 0 \geqslant L(\nu), \forall \nu \in E$.

Além disso, F' é uma face de F, e portanto uma face de $\mathcal{M}(f)$. De fato, assuma que $t\nu_1 + (1-t)\nu_2 \in F'$ com $t \in (0,1)$ e $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}(f)$, então $t\nu_1 + (1-t)\nu_2 \in F$, e como F é face, $\nu_1, \nu_2 \in F$. Agora,

$$tL(\nu_1) + (1-t)L(\nu_2) = L(t\nu_1 + (1-t)\nu_2) = \sup_{\lambda \in F} L(\lambda) \implies$$
$$L(\nu_1) = L(\nu_2) = \sup_{\lambda \in F} L(\lambda) \implies \nu_1, \nu_2 \in F'.$$

Isso mostra que F' é face. É imediato através da continuidade de L que F' é fechado. Concluímos que F' é face fechada.

Utilizando o mesmo raciocínio do início da demonstração obtemos, por F' ser face fechada de $\mathcal{M}(f)$, que

$$\exists \mu_0 \in F' \cap \mathcal{M}_e(f) = F' \cap F \cap \mathcal{M}_e(f) = F' \cap E \implies F' \cap E \neq \varnothing,$$

um absurdo. Concluímos que $F = \overline{conv(E)}$.

(ii) Seja $\mu \in \overline{conv(E)}$ e suponha que $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ com $t \in (0,1)$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$. Pelo Teorema de Choquet 2.0.14 temos que existem medidas m_μ, m_{μ_1} e m_{μ_2} com baricentros μ, μ_1 e μ_2, respectivamente.

Pela unicidade do Teorema de Choquet 2.0.14 é válido que

$$m_\mu = tm_{\mu_1} + (1-t)m_{\mu_2}.$$

O Lema 3.2.5 implica que $supp(m_\mu) \subseteq E$, donde segue $supp(m_{\mu_i}) \subseteq E$. Desse mesmo lema resulta que $\mu_i \in \overline{conv(E)}$ para $i = 1, 2$. Concluímos que $\overline{conv(E)}$ é face fechada, como queríamos. $\square$

Finalmente verificamos o teorema mencionado no início dessa seção.

Teorema 3.2.7. *Seja $E \subseteq \mathcal{M}_e(f)$ um conjunto fechado em $\mathcal{M}(f)$, então existe um potencial $\phi \in C(M)$ tal que $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \overline{conv(E)}$. Reciprocamente, para qualquer $\phi \in C(M)$ o conjunto das medidas maximizantes é da forma $\overline{conv(E)}$ para algum subconjunto $E \subseteq \mathcal{M}_e(f)$.*

Demonstração. Basta combinar os resultados 3.2.4 e 3.2.6. $\square$

Como consequência desse teorema temos o caso particular de conjuntos unitários de medidas ergódicas.

Corolário 3.2.8. *Dada $\mu \in \mathcal{M}_e(f)$ existe $\phi \in C(M)$ tal que $\mathcal{M}_{max}(\phi) = \{\mu\}$.*

Isso mostra que para qualquer medida ergódica existe a possibilidade de observar algumas de suas propriedades através de um potencial para o qual é maximizante. Embora a existência de tal potencial seja atestada por esse último resultado, em geral é difícil obtê-lo explicitamente, até mesmo nos casos mais simples. Encerramos a seção mencionando o seguinte problema em aberto:

Para a dinâmica no circúlo S^1, $f : S^1 \to S^1$, $x \to 2x(mod\ 1)$, encontrar explicitamente potencial ϕ tal que a medida de Lebesgue é unicamente maximizante.

3.3 Genericidade

Na seção anterior foi comprovado que qualquer medida ergódica é unicamente maximizante, o que assegura a existência de vários potenciais que possuem apenas uma única medida maximizante. Isso motiva o questionamento sobre quão frequentemente devemos esperar que valha $\#\mathcal{M}_{max}(\phi) = 1$ ao experimentarmos observáveis $\phi \in C(M)$.

Dizemos que uma propriedade é genérica para um dado espaço topológico se o conjunto U dos elementos que possuem tal propriedade contém uma interseção enumerável de abertos densos, $U \supseteq \bigcap_n U_n$. Vamos mostrar que a existência de uma única medida maximizante é robusta desse ponto de vista para a topologia da convergência uniforme em $C(M)$. Essa seção é estruturada de acordo com [2], [5] e [10].

Teorema 3.3.1. *Genericamente para a norma da convergência uniforme um potencial possui uma única probabilidade maximizante, que é ergódica.*

A genericidade ainda é válida quando nos restringirmos a outros subespaços de potenciais. Para $\alpha \in [0, 1]$ definimos o espaço de funçoes α-Hölder de M como

$$C^{0,\alpha}(M) := \left\{ \phi \in C(M) \;\middle|\; \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^{\alpha}} < \infty \right\}.$$

Note que para $\alpha = 0$, devido a compacidade de M, recuperamos o conjunto de funções contínuas, $C^{0,\alpha}(M) = C^{0,0}(M) = C(M)$. Já se $\alpha = 1$ intitulamos $C^{0,\alpha}(M) = C^{0,1}(M)$ o espaço de funções Lipschitz.

Para qualquer $\phi \in C^{0,\alpha}(M)$ definimos a quantidade $|\phi|_{\alpha} := \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^{\alpha}}$. Equipamos o espaço $C^{0,\alpha}(M)$ com a norma

$$\|\phi\|_{\alpha} := \max \{\|\phi\|_{\infty}, |\phi|_{\alpha}\}, \; \forall \phi \in C^{0,\alpha}(M).$$

Verifica-se que $(C^{0,\alpha}(M), \|\cdot\|_{\alpha})$ é um espaço de Banach que se realiza continuamente e densamente em $(C(M), \|\cdot\|_{\infty})$, ou seja, a função inclusão $i : (C^{0,\alpha}(M), \|\cdot\|_{\alpha}) \to (C(M), \|\cdot\|_{\infty})$, $\phi \mapsto \phi$, é contínua e sua imagem é densa em $(C(M), \|\cdot\|_{\infty})$.

A regularidade das funções Hölder as torna proeminentes na Teoria Ergódica e existem resultados muito profundos as envolvendo. Abaixo anunciamos a genericidade para essa classe de funções.

Teorema 3.3.2. *Genericamente um potencial em* $(C^{0,\alpha}(M), \|\cdot\|_\alpha)$ *possui uma única medida maximizante, que é ergódica.*

A principal conjectura em Otimização Ergódica durante a última década, que motivou os resultados aqui expostos, previa que para uma dinâmica expansiva genericamente os potenciais Lipschitz ou Hölder possuem uma única medida maximizante suportada em uma órbita periódica. Nesse texto verificaremos através de técnicas da Análise Convexa que genericamente existe uma única medida maximizante, deixando em aberto a questão sobre o suporte de tais medidas. Recentemente no artigo [4] a conjectura foi verificada por completo utilizando ferramentas próprias das áreas de Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica.

Concluímos o texto obtendo ambos resultados 3.3.1 e 3.3.2 como corolários de um mesmo teorema, que se exprime na linguagem de Análise Funcional. Lembremos que para qualquer espaço normado E existe um mergulho canônico $Av : E \to E''$. Essa aplicação é uma isometria linear definida como $Av(\phi) = Av_\phi : E' \to \mathbb{R}, \quad Av_\phi(\xi) := \xi(\phi), \quad \forall \phi \in E$. Um espaço normado E é dito reflexivo se o mapa Av é sobrejetor, e portanto um isomorfismo isométrico.

Pelo Teorema de Riesz-Markov para qualquer espaço métrico compacto M o espaço de Banach $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ é reflexivo e seu dual é isométrico isomorfo a $(\mathcal{M}(M), \|\cdot\|)$. Nesse caso, $Av_\phi(\mu) = \displaystyle\int \phi \, d\mu, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(M), \forall \phi \in C(M)$. A próxima demonstração segue a apresentada em [2].

Teorema 3.3.3. *Sejam* E *espaço normado reflexivo separável,* $C \subseteq E'$ *convexo compacto na topologia fraca* e para* $\phi \in E$ *defina*

$$\mathcal{M}_{max}(\phi) := \left\{ \xi \in C \;\middle|\; Av_\phi(\xi) = \max_{x \in C} Av_\phi(x) \right\}.$$

Considere H *espaço vetorial topológico que se realiza continuamente e densamente em* E*. Então genericamente para* $\phi \in H$ *vale* $\#\mathcal{M}_{max}(\phi) = 1$.

Demonstração. Como H é denso em E, que é separável, existe $(\psi_n)_n$ sequência em H que é densa em E. Pelo Teorema de Hahn-Banach 2.0.5 e reflexividade de E temos que

$$\{\phi \in H \mid \#\mathcal{M}_{max}(\phi) > 1\} = \bigcup_{n,m} F_{n,m},$$

onde

$$F_{n,m} := \left\{ \phi \in H \;\middle|\; \exists x, y \in \mathcal{M}_{max}(\phi) \text{ t.q. } \|Av_{\psi_n}(x) - Av_{\psi_n}(y)\| \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Vamos mostrar que os $F_{n,m}$ são fechados e possuem interior vazio em H para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. Denotamos $\gamma(\phi) := \max_{x \in C} Av_\phi(x)$, onde o máximo é atingido, pois C é compacto na topologia fraca* e a função avaliação Av_ϕ é contínua nessa mesma topologia. Começamos com o seguinte:

Lema 3.3.4. *Considere $(\phi_n)_n$ sequência em H com $\phi_n \to \phi \in H$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ assuma que $\xi_n \in \mathcal{M}_{max}(\phi_n)$ e tome ξ um ponto de acumulação de $(\xi_n)_n$ na topologia fraca*. Então $\lim_n \gamma(\phi_n) = \gamma(\phi)$ e $\xi \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$.*

Demonstração. Como H se realiza continuamente em E e $\phi_n \to \phi$, fazendo $R = \max_{x \in C} \|x\|$ temos que para todo $\epsilon > 0$ e n grande vale

$$\|Av_\phi - Av_{\phi_n}\| = \|\phi - \phi_n\| \leqslant \frac{\epsilon}{R} \implies$$

$$\max_{x \in C} Av_\phi(x) - \frac{\epsilon}{R} \leqslant \max_{x \in C} Av_{\phi_n}(x) \leqslant \max_{x \in C} Av_\phi(x) + \frac{\epsilon}{R} \implies \lim_n \gamma(\phi_n) = \gamma(\phi).$$

Passando a subsequência se necessário podemos assumir $\xi_n \overset{w*}{\to} \xi$. Note que

$$\xi_n \in \mathcal{M}_{max}(\phi_n) \implies Av_{\phi_n}(\xi_n) = \gamma(\phi_n),$$

e portanto, para finalizar mostramos que $Av_{\phi_n}(\xi_n) \to Av_\phi(\xi)$. De fato,

$$|Av_\phi(\xi) - Av_{\phi_n}(\xi_n)| \leqslant |Av_\phi(\xi - \xi_n)| + |Av_{\phi - \phi_n}(\xi_n)| \leqslant$$

$$\leqslant |Av_\phi(\xi - \xi_n)| + \|\phi - \phi_n\| \cdot \|\xi_n\|.$$

Como $(\xi_n)_n$ converge fracamente temos $\{\|\xi_n\|\}_n$ limitado. Logo

$$|Av_\phi(\xi) - Av_{\phi_n}(\xi_n)| \leqslant |Av_\phi(\xi - \xi_n)| + \|\phi - \phi_n\| \cdot \|\xi_n\| \overset{n \to +\infty}{\to} 0$$

Isso prova o Lema. $\square$

Vamos verificar que $F_{n,m}$ é fechado $\forall n, m \in \mathbb{N}$. Considere $(\phi_k)_k$ sequência em $F_{n,m}$ com $\phi_k \to \phi$ em H. Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, como $\phi_k \in F_{n,m}$, existem $x_k, y_k \in \mathcal{M}_{max}(\phi_k)$ com $|Av_{\psi_n}(x_k) - Av_{\psi_n}(y_k)| \geqslant \dfrac{1}{m}$. Pela compacidade de C existem x e y pontos de acumulação de $(x_k)_k$ e $(y_k)_k$, respectivamente. Pelo Lema 3.3.4 conseguimos $x, y \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$, e logo mais a continuidade de Av_{ψ_n} implica $|Av_{\psi_n}(x) - Av_{\psi_n}(y)| \geqslant \dfrac{1}{m}$. Daí segue que existem $x, y \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$ com $|Av_{\psi_n}(x) - Av_{\psi_n}(y)| \geqslant \dfrac{1}{m}$. Concluímos que $\phi \in F_{n,m}$, que é por conseguinte fechado.

Resta provar que $int F_{n,m} = \varnothing$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $\gamma_n : H \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma_n(\phi, \epsilon) := \gamma(\phi + \epsilon\psi_n)$. Afirmamos que se $\phi \in \bigcup\limits_m F_{n,m}$ então $\gamma_n(\phi, \cdot)$ não é diferenciável em $\epsilon = 0$. Assuma que existem as derivadas laterais para $\gamma_n(\phi, \cdot)$ em $\epsilon = 0$. Acontece que $\phi \in F_{n,m}$ para um determinado m implica que existem $x, y \in \mathcal{M}_{max}(\phi)$ com $Av_{\psi_n}(x) \geqslant Av_{\psi_n}(y) + \dfrac{1}{m}$. Agora,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\gamma_n(\phi, \epsilon) - \gamma_n(\phi, 0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\gamma(\phi + \epsilon\psi_n) - \gamma(\phi)}{\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\gamma(\phi + \epsilon\psi_n) - Av_\phi(x)}{\epsilon} \geqslant \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{Av_{\phi+\epsilon\psi_n}(x) - Av_\phi(x)}{\epsilon} = Av_{\psi_n}(x) \geqslant$$

$$\geqslant Av_{\psi_n}(y) + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{Av_{\phi+\epsilon\psi_n}(y) - Av_\phi(y)}{\epsilon} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{m} + \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\gamma(\phi + \epsilon\psi_n) - Av_\phi(y)}{\epsilon} = \frac{1}{m} + \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\gamma(\phi + \epsilon\psi_n) - \gamma(\phi)}{\epsilon} =$$

$$= \frac{1}{m} + \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\gamma_n(\phi, \epsilon) - \gamma_n(\phi, 0)}{\epsilon} \implies$$

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\gamma_n(\phi, \epsilon) - \gamma_n(\phi, 0)}{\epsilon} \geqslant \frac{1}{m} + \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{\gamma_n(\phi, \epsilon) - \gamma_n(\phi, 0)}{\epsilon}.$$

Logo para $\gamma_n(\phi, \cdot)$ a derivada à direita é maior do que a derivada à esquerda em $\epsilon = 0$, o que verifica a afirmação. Recorremos a outro lema:

Lema 3.3.5. *A aplicação $\gamma : E \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \gamma(\phi)$ é convexa.*

Demonstração. Dados $\phi, \psi \in E$ e $t \in [0,1]$ temos

$$\gamma(t\phi + (1-t)\psi) = \max_{x \in C} Av_{t\phi+(1-t)\psi}(x) =$$

$$= \max_{x \in C}[t \cdot Av_{\phi}(x) + (1-t) \cdot Av_{\psi}(x)] \leqslant \max_{x \in C}[t \cdot Av_{\phi}(x)] + \max_{x \in C}[(1-t) \cdot Av_{\psi}(x)] =$$

$$= t \cdot \gamma(\phi) + (1-t) \cdot \gamma(\psi) \implies \gamma(t\phi + (1-t)\psi) \leqslant t \cdot \gamma(\phi) + (1-t) \cdot \gamma(\psi),$$

o que encerra o lema. □

Pelo Lema 3.3.5 as funções $\gamma_n(\phi, \cdot)$ são convexas para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $\phi \in E$ fixados, e logo são diferenciáveis a menos de conjunto enumerável de pontos. Em contrapartida, observe que $\gamma_n(\phi, \epsilon_0) = \gamma_n(\phi + \epsilon_0\psi_n, 0)$ e pela afirmação se $\phi + \epsilon_0\psi_n \in F_{n,m}$ então $\gamma_n(\phi, \cdot)$ não é diferenciável em $\epsilon = \epsilon_0$.

Pelas considerações acima concluímos que existem $\epsilon \in \mathbb{R}$ arbitrariamente próximos de 0 onde $\gamma_n(\phi, \epsilon)$ é diferenciável, e portanto $\phi + \epsilon\psi_n \notin F_{n,m}$. Concluímos que $int(F_{n,m}) = \varnothing$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, e que $\{\phi \in H \mid \#\mathcal{M}_{max}(\phi) = 1\}$ é genérico em H. □

Demonstração. (Teorema 3.3.1) Note que $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach separável reflexivo e $\mathcal{M}(f) \subseteq C(M)'$ é convexo e compacto na topologia fraca*. Fazendo $H = C(M)$ obtemos pelo Teorema 3.3.3 que genericamente para $\phi \in C(M)$ vale $\#\mathcal{M}_{max}(\phi) = 1$. □

Demonstração. (Teorema 3.3.2) Temos que $\mathcal{M}(f) \subseteq C(M)'$ é convexo e compacto na topologia fraca*, $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$ é espaço de Banach separável reflexivo e $(C^{0,\alpha}(M), \|\cdot\|_\alpha)$ é espaço vetorial topológico que se realiza continuamente e densamente no espaço $(C(M), \|\cdot\|_\infty)$. Basta aplicar 3.3.3 para concluir a demonstração. □

Referências Bibliográficas

[1] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer, New York, 1971.

[2] A. Baraviera, R. Leplaideur e A. O. Lopes, *Ergodic optimization, zero temperature limits and the max-plus algebra*, 29° Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Rio de Janeiro, 2013.

[3] E. Botelho, G. Pellegrino, D. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[4] G. Contreras, *Ground States are generically a Periodic Orbit*, preprint (2015).

[5] G. Contreras, A. O. Lopes e P. Thieullen, *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*, Ergodic Theory and Dynamical Systems Vol 21, 1379-1409, 2001.

[6] J. P. Conze e Y. Guivarc'h, *Croissance de sommes ergodiques et principe variationnel*, preprint (1993).

[7] L. R. Ferreira Júnior, *Otimização Ergódica para Difeomorfismos de Anosov*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas (2015).

[8] E. B. Davies, *A generalized theory of convexity*, Procedings of the London Mathematical Society Vol 17, 644-652, 1967.

[9] O. Jenkinson, *Every ergodic measure is uniquely maximizing*, Discrete & Continuous Dynamical Systems Vol 16, 383-392, 2006.

[10] O. Jenkinson, *Ergodic optimization*, Discrete & Continuous Dynamical Systems Vol 15, 197-224, (2006).

[11] K. Oliveira e M. Viana, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, Sociedade Brasileira de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[12] R. R. Pelphs, *Lectures on Choquet's theorem*, Springer, New York, 2001.