

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA O  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS COM ATUADORES  
SATURANTES**

Porto Alegre  
2008

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA O  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS COM ATUADORES  
SATURANTES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior

Porto Alegre  
2008

**JEFERSON VIEIRA FLORES**

**ESTRATÉGIA DE CONTROLE PARA O  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS COM ATUADORES  
SATURANTES**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Junior, UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse,  
França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto, UFSC  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse, França

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, PUCRS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico da Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Arturo Suman Bretas

Porto Alegre, junho de 2008.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, que mesmo longe, esteve sempre tão presente.

À Dinara, pelos momentos de compreensão, amor e carinho.

À Lu e Deigo, por fazerem minha vida na UFRGS mais divertida.

Aos amigos, pelas discussões filosóficas e momentos de lazer.

Ao meu orientador, João Manoel, por toda ajuda e dedicação.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma nova metodologia para a síntese simultânea de controlador e laço *anti-windup* visando o problema de seguimento de referências em sistemas sujeitos à saturação. Além do projeto dos controladores, será apresentada uma estimativa dos domínios de estabilidade e do conjunto de referências admissíveis. O seguimento de referências constantes e a rejeição de perturbações, também constantes, será garantido pelo princípio do modelo interno, ou seja, uma ação integral será adicionada a uma malha de controle com realimentação de saída. Além da adição desta ação integral, uma mudança de coordenadas será aplicada ao sistema, onde será garantido que o único ponto de equilíbrio que garante erro nulo de seguimento está no interior da sua região de linearidade. Os efeitos da saturação no sistema serão considerados através de condições de setor modificadas, as quais introduzem novos graus de liberdade ao projeto. Em um primeiro momento, a metodologia será aplicada para sistemas de tempo contínuo, considerando um esquema de controle conhecido como “integradores inteligentes”. Posteriormente, este esquema será simplificado, no que foi chamado de solução “clássica”. Além de apresentar um esquema de controle mais simples e um número menor de condições, estas condições são obtidas diretamente na forma de LMIs, evitando assim, a utilização de esquemas iterativos. Alguns problemas de otimização serão apresentados, podendo levar a três objetivos de controle distintos: maximização da referência admissível, maximização da condição inicial e maximização da perturbação admissível. Por meio de exemplos, será mostrado que esta solução apresenta resultados menos conservativos do que os apresentados na literatura corrente, além de chamar a atenção para um problema ignorado por outros autores. Este problema se refere à existência de pontos de equilíbrio dentro dos domínios de estabilidade mas fora da região linear, o que impossibilita a garantia de erro de seguimento nulo. Num segundo momento, esta metodologia será estendida para sistemas de tempo discreto. Mais uma vez, condições LMI serão obtidas a fim de projetar os controladores e oferecer estimativas dos domínios de estabilidade. Por não haver uma referência direta para comparação dos resultados, a metodologia será aplicada para exemplos estáveis, instáveis e com integradores, tanto no caso monovariável quanto no caso multivariável. Finalmente, será apresentado um estudo dos pontos de equilíbrio fora da região de linearidade, como mencionado anteriormente, considerando tanto sistemas de tempo contínuo quanto em tempo discreto. Este estudo será realizado para alguns tipos de sistemas, considerando apenas o caso monovariável. Será provado que estes equilíbrios só são possíveis em plantas assintoticamente estáveis, exigindo a consideração de uma condição extra na solução do problema de otimização.

**Palavras-chave:** Seguimento de referências, rejeição de perturbações, *anti-windup*, saturação de controle, Inequações matriciais lineares (LMIs).

## ABSTRACT

This work addresses the problem of tracking constant references for linear systems subject to control saturation. The main idea is to present LMI conditions in order to design both a stabilizing controller and an anti-windup gain. These conditions ensure that the trajectories of the closed-loop system are bounded by an invariant ellipsoidal set, provided that the initial conditions are taken in this set and the references and the disturbances belong to a certain admissible set. The constant reference tracking and constant disturbance rejection is taken into account by the internal model principle, i. e., considering the introduction of an integral action in a unitary output feedback scheme. We also introduce the error co-ordinate representation, where is proved that there exists only one equilibrium point inside the linearity region and that this equilibrium point ensures perfect reference tracking. In order to consider the saturation effects, we use a modified sector condition, introducing new degrees of freedom to the synthesis problem. In a first step, the proposed framework was applied to the control scheme called “intelligent integrators”, regarding continuous-time systems. However, this control scheme does not allow the simultaneous synthesis so it is simplified to the so called “classical” anti-windup scheme. Based on this simplified control structure, LMI conditions are directly derived, avoiding therefore the necessity of applying iterative schemes. Convex optimization problems aiming at the maximization of the invariant set of admissible states and/or the maximization of the set of admissible references/disturbances are proposed. We show, by means of an example, that the obtained results are less conservative than the ones previously presented in related works. In these examples, we also show that a study about the existence of other equilibria inside the invariant set is worthwhile. Later, the proposed framework is extended to discrete-time systems, where new LMI conditions are presented in order to synthesize the controller and present an estimate of the stability domains. Due to a lack of related works, our framework is applied to stable, unstable and integrator examples. These examples consider both single and multi-variable systems. Finally, we conclude this work with a study about the possibility of existence of other equilibria inside the invariant set. For the single-input case, we show that this is only possible if the open-loop system is asymptotically stable. In this case, in order to avoid convergence to these points, additional constraints on the admissible references to be tracked should be considered. It is worth to emphasize that such kind of analysis has not been performed in previous works.

**Keywords:** Reference Tracking, disturbance rejection, anti-windup, LMI, control saturation.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	9
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	11
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	12
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
<b>2 CONCEITOS DE BASE</b> . . . . .	16
<b>2.1 Introdução</b> . . . . .	16
<b>2.2 Sistemas Lineares</b> . . . . .	16
2.2.1 Estabilidade BIBO . . . . .	16
2.2.2 Estabilidade interna . . . . .	17
2.2.3 Princípio do modelo interno . . . . .	18
<b>2.3 Sistemas não-lineares</b> . . . . .	19
2.3.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov . . . . .	19
2.3.2 Problema de Lure . . . . .	21
<b>2.4 Comentários Finais</b> . . . . .	25
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: SISTEMAS LINEARES SUJEITOS À SATURAÇÃO DE CONTROLE</b> . . . . .	26
<b>3.1 Introdução</b> . . . . .	26
<b>3.2 Sistema de Interesse</b> . . . . .	26
<b>3.3 Problema de Regulação</b> . . . . .	28
3.3.1 Análise de estabilidade . . . . .	28
3.3.2 Estabilização . . . . .	28
<b>3.4 Problema de <i>anti-windup</i></b> . . . . .	29
<b>3.5 Problema de seguimento de referências</b> . . . . .	30
3.5.1 Controle preditivo baseado em modelo . . . . .	30
3.5.2 Condicionador de referências . . . . .	31
3.5.3 Regulação de saída . . . . .	34
3.5.4 Abordagem via princípio do modelo interno . . . . .	34
<b>3.6 Problema de tolerância e atenuação de perturbações</b> . . . . .	35
<b>3.7 Modelos de Saturação</b> . . . . .	36
3.7.1 Modelagem por não-linearidade do tipo zona-morta . . . . .	36
3.7.2 Modelagem politópica . . . . .	37
3.7.3 Modelagem por regiões de saturação . . . . .	39
<b>3.8 Pontos de Equilíbrio em Sistemas Sujeitos à Saturação</b> . . . . .	40

3.9	Comentários Finais . . . . .	40
<b>4</b>	<b>PROBLEMA DE SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM SISTEMAS SUJEITOS À SATURAÇÃO: CASO CONTÍNUO . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.2	Abordagem “Integradores Inteligentes” . . . . .	42
4.2.1	Formulação geral . . . . .	42
4.2.2	Propriedades dos pontos de equilíbrio . . . . .	45
4.2.3	Formulação do problema . . . . .	47
4.2.4	Resultado principal . . . . .	47
4.3	Abordagem “Clássica” . . . . .	51
4.4	Problema de Otimização . . . . .	53
4.4.1	Domínio de invariância contendo um conjunto conhecido <i>a priori</i> . . . . .	53
4.4.2	Maximização de $\Omega(P, \nu)$ e $\Omega(R, \sigma)$ . . . . .	53
4.5	Exemplos Numéricos . . . . .	56
4.5.1	Maximização da referência admissível . . . . .	57
4.5.2	Maximização do conjunto de condições iniciais . . . . .	65
4.5.3	Maximização da perturbação admissível . . . . .	68
4.6	Comentários Finais . . . . .	71
<b>5</b>	<b>PROBLEMA DE SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM SISTEMAS SUJEITOS À SATURAÇÃO: CASO DISCRETO . . . . .</b>	<b>74</b>
5.1	Introdução . . . . .	74
5.2	Abordagem “Clássica” . . . . .	74
5.2.1	Formulação geral . . . . .	74
5.2.2	Propriedades dos pontos de equilíbrio . . . . .	76
5.2.3	Colocação do problema . . . . .	77
5.2.4	Resultado principal . . . . .	77
5.3	Problema de Otimização . . . . .	79
5.3.1	Maximização de $\Omega(P, \nu)$ e $\Omega(R, \sigma)$ . . . . .	79
5.4	Exemplos Numéricos . . . . .	80
5.4.1	Influência da variação de parâmetros . . . . .	81
5.4.2	Maximização da referência admissível . . . . .	83
5.4.3	Maximização do conjunto de condições iniciais . . . . .	87
5.4.4	Maximização da perturbação admissível . . . . .	90
5.5	Comentários Finais . . . . .	92
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DA EXISTÊNCIA DE PONTOS DE EQUILÍBRIO FORA DA REGIÃO DE LINEARIDADE . . . . .</b>	<b>95</b>
6.1	Introdução . . . . .	95
6.2	Caso Contínuo . . . . .	95
6.3	Caso Discreto . . . . .	98
6.4	Exemplos Numéricos . . . . .	100
6.5	Comentários Finais . . . . .	102
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>105</b>

<b>APÊNDICE A</b>	<b>INEQUAÇÕES LINEARES MATRICIAIS</b>	113
A.0.1	Definição	113
A.0.2	Complemento de Schur	113
A.0.3	<i>S-procedure</i>	114

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Princípio do Modelo Interno - Espaço de Estados. . . . .	19
Figura 2:	Sistema na Forma de Lure . . . . .	21
Figura 3:	Condição de Setor - Zona-morta. . . . .	22
Figura 4:	Estabilidade Absoluta - Caso Local e Global. . . . .	23
Figura 5:	Condição de setor linear por partes . . . . .	24
Figura 6:	Esquema de Controle com Laço de <i>Anti-windup</i> . . . . .	29
Figura 7:	Condicionador de Referência . . . . .	31
Figura 8:	Tolerância a Perturbações . . . . .	36
Figura 9:	Regiões de Saturação . . . . .	39
Figura 10:	Esquema de Controle: “Integradores Inteligentes” . . . . .	45
Figura 11:	Esquema de Controle: Solução “Clássica” . . . . .	52
Figura 12:	Maximização de $\alpha Z_b$ . . . . .	54
Figura 13:	Máxima Referência - PO1 . . . . .	58
Figura 14:	Máxima Referência - Integrador Duplo - PO2 . . . . .	59
Figura 15:	Saída do Sistema - Planta Estável - PO2 . . . . .	60
Figura 16:	Saída do Sistema - Planta Estável $r = 0.55$ - PO2 . . . . .	61
Figura 17:	Saída do Sistema - Planta Instável $r = 0.5$ - PO2 . . . . .	62
Figura 18:	Saída do Sistema - Planta Multivariável - PO2 . . . . .	62
Figura 19:	Variação de $\lambda$ - “Integradores Inteligentes” . . . . .	63
Figura 20:	Variação de $\lambda$ - Caso “Clássico” . . . . .	64
Figura 21:	Resposta à Condição Inicial - Integrador Duplo - PO1 . . . . .	65
Figura 22:	Resposta à Condição Inicial - Planta Estável - PO2 . . . . .	66
Figura 23:	Comparação entre $E_c = 0$ e $E_c \neq 0$ . . . . .	67
Figura 24:	Resposta à Condição Inicial - Integrador Duplo - PO2 . . . . .	67
Figura 25:	Resposta à Condição Inicial - Planta Instável - PO2 . . . . .	68
Figura 26:	Resposta à Condição Inicial - Planta Multivariável - PO2 . . . . .	69
Figura 27:	Resposta à Perturbação - Integrador Duplo - PO1 . . . . .	70
Figura 28:	Resposta à Perturbação - Integrador Duplo - PO2 . . . . .	70
Figura 29:	Resposta à Perturbação - Planta Estável - PO2 . . . . .	71
Figura 30:	Resposta à Perturbação - Planta Instável - PO2 . . . . .	72
Figura 31:	Resposta à Perturbação - Planta Multivariável - PO2 . . . . .	72
Figura 32:	Detalhe - Planta Multivariável . . . . .	73
Figura 33:	Máxima Referência - Integrador Duplo - POD1 . . . . .	84
Figura 34:	Máxima Referência - Planta Estável - Equilíbrios Parasitas . . . . .	84
Figura 35:	Máxima Referência - Planta Estável - POD1 . . . . .	85

Figura 36:	Máxima Referência - Planta Instável - POD1 . . . . .	86
Figura 37:	Máxima Referência - Planta Multivariável - POD1 . . . . .	86
Figura 38:	Máxima Condição Inicial - Integrador Duplo - POD1 . . . . .	87
Figura 39:	Máxima Condição Inicial - Planta Estável - POD1 . . . . .	88
Figura 40:	Comparação - $E_c = 0$ e $E_c \neq 0$ . . . . .	89
Figura 41:	Máxima Condição Inicial - Planta Instável - POD1 . . . . .	89
Figura 42:	Máxima Condição Inicial - Planta Multivariável - POD1 . . . . .	90
Figura 43:	Máxima Perturbação - Integrador Duplo - POD1 . . . . .	91
Figura 44:	Máxima Perturbação - Planta Estável - POD1 . . . . .	91
Figura 45:	Máxima Perturbação - Planta Instável - POD1 . . . . .	92
Figura 46:	Máxima Perturbação - Planta multivariável - POD1 . . . . .	93
Figura 47:	Máxima Perturbação - Integrador Duplo - POD2 . . . . .	93
Figura 48:	Máxima Perturbação - Planta Instável - POD2 . . . . .	94
Figura 49:	Comparação PO2 e PO2 restrito . . . . .	101
Figura 50:	Comparação POD1 e POD1 restrito . . . . .	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Maximização da Referência Admissível . . . . .	58
Tabela 2:	Maximização da Referência - Planta Estável. . . . .	60
Tabela 3:	Variação de $\lambda$ - “Integradores Inteligentes” . . . . .	63
Tabela 4:	Variação de $\lambda$ - Caso “Clássico” . . . . .	64
Tabela 5:	Maximização da Condição Inicial - PO2. . . . .	66
Tabela 6:	Variação de $\lambda, \omega, \nu$ e $\sigma$ . . . . .	82
Tabela 7:	Maximização da Referência - POD2 . . . . .	85
Tabela 8:	Maximização da Condição Inicial - POD2 . . . . .	88
Tabela 9:	Maximização da Perturbação Admissível - POD2 . . . . .	92
Tabela 10:	Efeito da Adição de (120) e (129) . . . . .	101

## LISTA DE SÍMBOLOS

$v_{(i)}$	$i$ -ésimo componente do vetor $v$
$A_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $A$
$A^T$	transposta da matriz $A$
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$0_{n \times m}$	matriz de dimensão $n \times m$ com todos elementos nulos
$\text{rank}(A)$	posto da matriz $A$
$\text{traço}(A)$	traço da matriz $A$
$\text{diag}\{x\}$	matriz diagonal formada pelos elementos do vetor $x$
$\text{diag}\{A, B\}$	matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $A$ e $B$ , isto é, $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$
$\text{cov}\{A_j\}$	envelope convexo com vértices $A_j$
$A > (\geq) 0$	matriz (semi)definida positiva
$\text{sat}_{w_0}(w)$	saturação com limites simétricos em $\pm w_0$ aplicada ao vetor $w$
$\Psi_{w_0}(w)$	função vetorial equivalente a $w - \text{sat}_{w_0}(w)$
$\Omega(P, \vartheta)$	elipsóide definido por $x^T P x \leq \vartheta$
$\mathcal{L}_2$	espaço de sinais com norma-2 finita
$\ x(t)\ _2$	norma-2 do sinal $x(t)$ : $\ x(t)\ _2 = \left( \int_0^\infty x(t)^T x(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
BMI	<i>bilinear matrix inequalities</i>
BIBO	<i>bounded-input, bounded-output</i>
LMI	<i>linear matrix inequalities</i>
MIMO	<i>multi-input, multi-output</i>
PID	proporcional-integral-derivativo
SISO	<i>single-input, single-output</i>

# 1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de controle são de vital importância para a indústria moderna, onde os métodos de produção devem atender aos cada vez mais restritos requisitos de desempenho e produtividade. Esta importância proporciona uma demanda cada vez maior de ferramentas teóricas e práticas capazes de lidar com a complexidade destes processos. Aliado a isto, aplicações envolvendo equipamentos de alta tecnologia e confiabilidade exigem estratégias de controle que levem em conta todas as particularidades dos sistemas, a fim de garantir alta precisão nas respostas, bem como imunidade a falhas e comportamentos não previstos. Todavia, de modo a atingir estas amplas metas, métodos de projeto de sistemas de controle devem considerar especificações estritas de desempenho, estabilidade e robustez. Além disso os modelos utilizados são geralmente aproximações de uma realidade muito mais complexa. Neste contexto, é importante ter um modelo apropriado e considerar no projeto do controle os efeitos de comportamentos dinâmicos não-lineares, bem como restrições tecnológicas e de segurança.

Uma das restrições de projeto mais crítica é a limitação física ou construtiva dos atuadores no que diz respeito à quantidade de energia que estes podem entregar ao sistema. Quando estes limites são violados, o sistema passa a se comportar como se não existisse um controlador, o que, na maioria dos casos, impossibilita o cumprimento de alguns requisitos do projeto. Os efeitos mais comuns da violação destes limites são a perda de performance, o surgimento de trajetórias indesejadas como ciclos-limite e, no pior caso, a instabilidade do sistema. A partir destas constatações, nasce a motivação e o interesse pelo estudo de sistemas sujeitos a saturações, no sentido de considerá-las explicitamente no projeto do controlador, a fim de se evitar comportamentos indesejáveis, ou, pelo menos, de poder avaliar os seus efeitos sobre a estabilidade, o desempenho e a robustez do sistema em malha-fechada.

A maneira mais usual de reduzir os efeitos da saturação é o chamado *anti-windup*, onde um controle previamente projetado desconsiderando a saturação é realimentado com a diferença entre os sinais de entrada e saída do atuador, através de um compensador estático ou dinâmico. O objetivo desta técnica é corrigir o estado do controlador a fim de recuperar o desempenho do sistema saturado. Os primeiros trabalhos a tratar deste problema foram (LOZIER, 1956) e (FERTIK; ROSS, 1967), os quais contribuíram para a abertura de um novo campo de pesquisa para vários autores nas décadas seguintes. Os resultados deste tipo de técnica estão fortemente condicionados ao modelo escolhido para representar os efeitos da saturação. O desenvolvimento destes modelos vem sendo aprimorado nos últimos anos, com destaque para os trabalhos de (HU; LIN; CHEN, 2002) e (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005).

Por outro lado, em uma perspectiva prática, o seguimento de referências é um dos objetivos de controle mais empregados na indústria. A maioria dos processos tem como

objetivo seguir uma dada referência, podendo ser temperatura, pressão, vazão, altitude ou até mesmo uma trajetória pré-definida para um robô. Um dos mais célebres exemplos de seguimento de referências é o sistema de piloto automático em aviões, onde o sistema de controle é responsável por manter uma altitude específica. Considerando os sistemas lineares, o princípio do modelo interno é uma das formas mais comuns de se garantir o seguimento de referências com erro nulo. Este princípio consiste em incorporar os modos instáveis da referência no próprio controlador. É baseado neste princípio que se justifica a grande utilização de controladores contendo ação integral, como no caso dos controladores proporcional-integral-derivativo (PID), no seguimento de referências constantes. Além disto, a maioria das técnicas de projeto de controladores existentes com fins de assegurar o seguimento de referência, estabilidade e certos níveis de desempenho para o sistema em malha-fechada são baseados no domínio da frequência e, em sua maioria, não se adaptam à análise de comportamentos não lineares provenientes de restrições do sinal de controle.

O seguimento de referência em sistemas sujeitos à saturação é a junção dos dois problemas discutidos até agora. No início do ano 2000, Matthew C. Turner (TURNER; POSTLETHWAITE; WALKER, 2000) já apontava a escassez de trabalhos tratando deste tema. Quando comparado aos trabalhos tratando do problema de regulação, este panorama pouco se modificou nestes últimos anos. Os meios mais usuais de tratar o seguimento de referências em sistemas com controles restritos podem ser resumidos em duas linhas de pesquisa distintas: a primeira delas trata o problema de forma iterativa, baseando-se em técnicas de controle preditivo. Neste tipo de solução, uma seqüência de ações de controle é escolhida de forma a prever a evolução do sistema. A cada instante uma nova seqüência é calculada e substitui a anterior, levando em conta dois objetivos: otimizar o desempenho do seguimento e evitar que o sistema viole as restrições. A segunda linha de pesquisa tem como objetivo projetar os ganhos do controlador e do laço *anti-windup*, além de estudar a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Neste tipo de solução são apresentadas estimativas dos domínios de estabilidade do sistema e sua formulação é baseada em inequações lineares matriciais (LMI's). Na maioria das vezes, a conservatividade das soluções propostas impede que a síntese do controlador e do laço *anti-windup* sejam realizadas em uma única etapa.

É nesta segunda linha de pesquisa que este trabalho se baseia, considerando o estudo de um sistema linear sujeito à saturação dos atuadores. O objetivo é garantir o seguimento de referências constantes e a rejeição de perturbações também constantes, em regime permanente, através da adição de uma ação integral à malha de controle. A partir das condições de (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005), pretende-se obter relações lineares que permitam o projeto simultâneo do controlador e do laço *anti-windup*, além de apresentar estimativas dos domínios de estabilidade do sistema e dos conjuntos de referências/perturbações admissíveis.

Este trabalho será apresentado da seguinte forma: no Capítulo 2, alguns conceitos básicos de sistemas lineares e não-lineares serão apresentados, seguidos por uma revisão bibliográfica sobre sistemas saturados no Capítulo 3. Nesta revisão, serão apresentadas as técnicas mais comuns de síntese e análise de sistemas sujeitos à saturação, destacando principalmente o problema de seguimento de referências. Estes capítulos iniciais tem como objetivo ilustrar quais problemas e abordagens da teoria de controle este trabalho irá utilizar.

No Capítulo 4, os resultados principais deste trabalho serão apresentados considerando sistemas de tempo contínuo, em uma comparação direta com os resultados apre-

sentados em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e (CAO; LIN; WARD, 2004). Além de uma solução baseada nestes trabalhos, um novo esquema de controle será proposto, com estrutura mais simples e com um número reduzido de LMIs. Por meio de exemplos, as soluções serão comparadas a fim de evidenciar suas qualidades e defeitos. No Capítulo 5, os resultados obtidos para sistemas contínuos serão estendidos para sistemas em tempo discreto. Mesmo sem uma referência para comparação direta, a aplicabilidade da solução desenvolvida é mostrada através de exemplos numéricos.

Finalmente, um estudo sobre pontos de equilíbrio indesejados será apresentado no Capítulo 6. A existência de pontos de equilíbrio no interior do domínio de estabilidade do sistema que não garantem seguimento com erro nulo nunca foi explorada em trabalhos prévios. A partir de características do sistema em malha-aberta foram estabelecidas condições que garantem a existência de um único ponto de equilíbrio dentro dos domínios de estabilidade, o qual apresenta erro de seguimento nulo.

O trabalho será finalizado com conclusões e perspectivas de trabalhos futuros, além de um breve resumo sobre inequações lineares matriciais (LMIs) no Apêndice A.

## 2 CONCEITOS DE BASE

### 2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos utilizados ao longo dos desenvolvimentos subsequentes. No que se refere a sistemas lineares, destacam-se os conceitos de estabilidade interna e entrada-saída, além do princípio do modelo interno. Na área de sistemas não-lineares, o maior destaque será para a estabilidade no sentido de Lyapunov, conjuntos invariantes e estabilidade absoluta. Estes conceitos serão a base de todos os desenvolvimentos apresentados neste trabalho, o que torna seu entendimento fundamental.

### 2.2 Sistemas Lineares

Nesta seção serão apresentados os conceitos associados sistemas lineares utilizados nos capítulos seguintes. Apesar do foco principal do trabalho ser sistemas sujeitos à saturação, quando não saturado, estes sistemas comportam-se como um sistema linear. A seção será dividida em três subseções, sendo uma delas tratando da estabilidade entrada-saída (BIBO estabilidade), outra tratando da estabilidade interna e, finalmente, uma subseção tratando do princípio do modelo interno. A maioria dos conceitos aqui apresentados foram retirados de (CHEN, 1970).

#### 2.2.1 Estabilidade BIBO

O conceito de estabilidade BIBO (*bounded-input bounded-output*) estabelece uma relação direta entre a entrada e a saída do sistema. Para o caso SISO, ela pode ser definida como:

**Definição 2.2.1** *Um sistema é dito BIBO estável se toda entrada limitada produz uma saída também limitada.*

Esta definição só se aplica para a resposta com estados iniciais nulos (*zero-state response*) e se o sistema estiver inicialmente relaxado. Assim, pode-se dizer que um sistema causal é BIBO estável se, e somente se, a sua resposta impulsiva  $g(t)$  for absolutamente integrável no intervalo  $[0, \infty)$  ou, ainda (CHEN, 1970),

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt \leq M < \infty,$$

para um dado  $M$  constante.

Em termos de funções de transferência, uma função de transferência racional própria  $\hat{g}(s)$  é BIBO estável se, e somente se, todo pólo de  $\hat{g}(s)$  possui parte real negativa ou, equivalentemente, está no semi-plano esquerdo do plano complexo.

Um sistema linear multivariável com resposta impulsiva matricial  $\mathbf{G}(t) = [g_{ij}(t)]$  é BIBO estável se, e somente se, cada  $g_{ij}(t)$  é absolutamente integrável em  $[0, \infty)$ . Em termos de funções de transferência, um sistema multivariável com uma matriz de função de transferência  $\hat{\mathbf{G}}(s) = [\hat{g}_{ij}(s)]$  é BIBO estável se, e somente se, todo pólo de todas as  $\hat{g}_{ij}(s)$  possuir parte real negativa.

No espaço de estados, o estudo da estabilidade do sistema pode ser feito com base nos autovalores da matriz  $A$ . Pode-se mostrar que todo pólo de  $\hat{\mathbf{G}}(s)$  é um autovalor de  $A$ , entretanto, nem todo autovalor de  $A$  é um pólo de  $\hat{\mathbf{G}}(s)$ . Isto ocorre devido a possíveis cancelamentos entre pólos e zeros na função de transferência, o que possibilita que um sistema seja BIBO estável mesmo que este possua modos instáveis internamente. Devido a este problema, faz-se necessária uma análise da estabilidade interna do sistema. Esta análise é mostrada na seção a seguir.

### 2.2.2 Estabilidade interna

Considere a representação no espaço de estados do sistema autônomo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1)$$

excitado por um estado inicial  $x_0$ . É fácil de observar que a resposta temporal deste sistema é dada por

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Baseado nesta resposta, a seguinte definição de estabilidade interna pode ser enunciada:

**Definição 2.2.2** *O sistema (1) é marginalmente estável ou estável no sentido de Lyapunov se cada estado inicial finito  $x_0$  produz um resposta limitada. Este sistema será dito assintoticamente estável se ele for estável e ainda sua saída tenda a 0 quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Segue que, em termos dos autovalores de  $A$ , a estabilidade interna do sistema fica caracterizada como:

- O sistema (1) é estável se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  possuem parte real negativa;
- O sistema (1) é marginalmente estável se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  possuem parte real nula ou negativa e aqueles com parte real nula são raízes simples do polinômio mínimo de  $A$ ;
- O sistema (1) é assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de  $A$  possuem parte real negativa.

Assim, pode-se afirmar que estabilidade assintótica implica em estabilidade BIBO, mas estabilidade BIBO não necessariamente implica em estabilidade assintótica. Estes conceitos de estabilidade serão expandidos para sistema não-lineares ao longo deste capítulo.

### 2.2.3 Princípio do modelo interno

O princípio do modelo interno baseia-se na introdução do modelo da referência que deseja-se seguir e/ou da perturbação a ser rejeitada no laço de controle. Esta forma de garantir o seguimento é insensível às variações paramétricas do modelo, garantindo assim, seguimento com erro nulo e rejeição a perturbações de forma robusta. No espaço de estados, o princípio do modelo interno pode ser formulado da seguinte forma:

Considere um planta descrita por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Eu(t) + E_d d(t) \end{cases} \quad (2)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  é a saída do sistema e  $d(t) \in \mathbb{R}^q$  é um vetor de perturbações. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $E_d$  e  $B_d$  são constantes, de dimensões compatíveis, assume-se que o par  $(A, B)$  é controlável e ainda que o par  $(C, A)$  é observável. O sinal de perturbação  $d(t)$  é gerado pela dinâmica

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t), \quad d(t) = C_d x_d(t)$$

e a referência que deseja-se seguir com erro nulo é dada por

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t), \quad r(t) = C_r x_r(t).$$

Sejam  $\phi_d(s)$  e  $\phi_r(s)$  os polinômios mínimos de  $A_d$  e  $A_r$ , respectivamente, e que

$$\phi(s) = s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \alpha_2 s^{m-2} + \dots + \alpha_m$$

seja o mínimo múltiplo comum das raízes de  $\phi_d(s)$  e  $\phi_r(s)$  no semi-plano direito fechado do plano  $s$ . Logo, todas as raízes de  $\phi(s)$  possuem parte real não-negativa. O modelo interno  $\phi^{-1}(s)I_q$  pode ser realizado como

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) \\ y_c(t) = x_c(t) \end{cases} \quad (3)$$

onde  $A_c = \text{diag}\{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma\}$  e  $B_c = \text{diag}\{\tau, \tau, \dots, \tau\}$ . Neste caso,  $A_c$  e  $B_c$  são formados por  $q$  elementos  $\Gamma$  (ou  $\tau$ ), definidos por

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & -\alpha_{m-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

e  $e = r - y(t)$ . Neste caso,  $A_c \in \mathbb{R}^{mq \times mq}$  e  $B_c \in \mathbb{R}^{mq \times q}$ . A inclusão do modelo interno leva ao seguinte sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -B_c E \end{bmatrix} u.$$

Para que os autovalores do sistema composto possam ser posicionados arbitrariamente pela realimentação estática de estado

$$u = [K \quad K_c] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

basta que o sistema (2) seja controlável e ainda que nenhuma raiz de  $\phi(s)$  seja um zero de transmissão da planta. Isto pode ser obtido se a seguinte relação for verificada:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & 0 & B \\ B_c C & sI - A_c & -B_c E \end{bmatrix} = n + mq.$$

A configuração final do sistema em malha-fechada é apresentada na Figura 1.

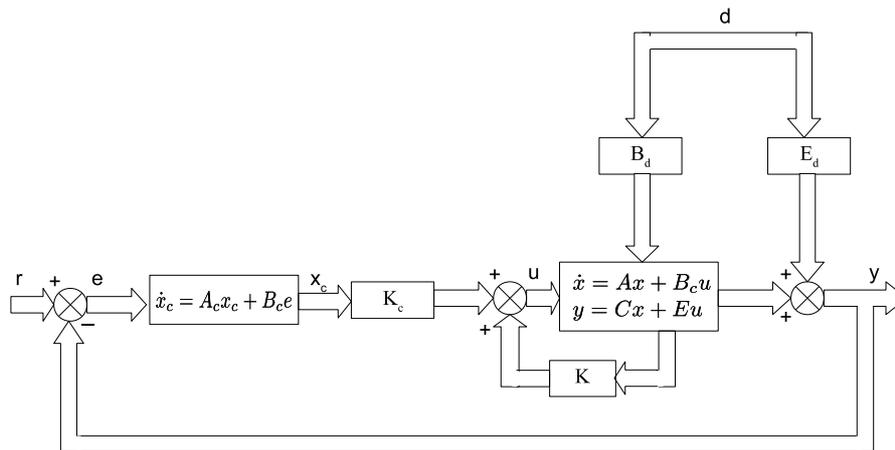


Figura 1: Princípio do Modelo Interno - Espaço de Estados.

É baseado neste princípio que insere-se uma ação integral na malha de controle quando deseja-se seguir referências constantes e rejeitar perturbações, também constantes. Neste caso, em regime permanente, o erro de seguimento de referência será dado pela expressão

$$e(\infty) = r - C(-A)^{-1} B u(\infty) + C(-A)^{-1} B_d d.$$

Desta forma, a carga acumulada no integrador é responsável por estabelecer  $u(\infty)$  de tal forma que a presença da perturbação e da referência sejam compensados, tornando assim, o erro nulo.

## 2.3 Sistemas não-lineares

O estudo dos sistemas não-lineares é um dos tópicos mais complexos na área de sistemas de controle. A presença de não-linearidades na malha de controle faz com que algumas verdades estabelecidas em sistemas lineares tenham sua aplicabilidade restrita ou, em alguns casos, estejam completamente erradas. Nesta seção, o objetivo é apresentar os conceitos de sistema não-lineares utilizados nos capítulos seguintes. O foco principal será a estabilização deste tipo de sistema, tanto pelos teoremas de estabilidade de Lyapunov quanto pela abordagem via estabilidade absoluta. Além disso, alguns conceitos como região de atração e conjuntos invariantes serão apresentados, já que estes conceitos aparecerão várias vezes ao longo do trabalho.

### 2.3.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Um dos métodos mais usuais para se caracterizar a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estudá-la através dos métodos de Lyapunov. Os teoremas de estabilidade de Lyapunov fornecem condições suficientes para caracterizar a estabilidade destes pontos de

equilíbrio. O princípio básico destes teoremas é que o ponto de equilíbrio será considerado estável se todas as trajetórias iniciadas em pontos próximos não apenas se manterão próximas como podem tender ao ponto de equilíbrio. Alguns autores (SASTRY, 1999), consideram este método como uma generalização do conceito de medir a “dissipação de energia” do sistema a fim de analisar a sua estabilidade.

A seguir, será apresentado o segundo método de Lyapunov para a caracterização da estabilidade em sistema não-lineares.

**Teorema 2.3.1** (KHALIL, 1992) *Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para o sistema  $\dot{x} = f(x)$  onde  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow D$  e  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio contendo  $x = 0$ . Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ em } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \text{ em } D. \end{aligned}$$

*Então  $x = 0$  é estável. Além disso, se*

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ em } D - \{0\},$$

*então  $x = 0$  é assintoticamente estável.*

### 2.3.1.1 Região de atração

Quando um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, é interessante determinar quão afastado deste ponto pode-se iniciar uma trajetória assintoticamente convergente. Este interesse dá origem à definição de região de atração de um dado ponto de equilíbrio, como a seguir:

**Definição 2.3.1** *A região de atração de um dado ponto de equilíbrio é o conjunto de todos os pontos para os quais as trajetórias do sistema iniciadas nestes pontos convergem assintoticamente para o equilíbrio.*

A determinação exata da região de atração de um ponto de equilíbrio pode ser difícil ou até mesmo impossível, impondo assim a necessidade da determinação de estimativas desta região. Uma das estimativas mais comuns, apesar de conservativa, é através de domínios de Lyapunov. Um domínio de Lyapunov é definido com uma curva de nível da função de Lyapunov, ou seja,  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq c\}$ . Se uma função de Lyapunov garante estabilidade assintótica em um domínio  $D$  e ainda se  $\Omega_c \subset D$  é limitado, então toda trajetória iniciada em  $\Omega_c$  permanece confinada a este conjunto e ainda tende ao ponto de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim,  $\Omega_c$  é uma estimativa da região de atração do sistema. Outra maneira de estimar a região de atração é determinando as trajetórias que definem o seu limite. Estas estimativas são obtidas através da utilização de simulações numéricas, estando assim, fora do escopo deste trabalho.

### 2.3.1.2 Conjuntos invariantes

Conjuntos invariantes são de grande utilidade no projeto de sistemas de controle. Seu princípio básico é que toda trajetória do sistema inicializada dentro deste tipo de conjunto permanece confinada em seu interior. A seguir será apresentada uma definição formal destes conjuntos.

**Definição 2.3.2** (KHALIL, 1992) Um conjunto  $M$  é dito invariante em relação ao sistema autônomo  $\dot{x} = f(x)$  se

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O conjunto  $M$  será dito positivamente invariante se

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0.$$

Finalmente, o conjunto  $M$  será contrativamente invariante se

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t)) = x_e$$

onde  $x_e$  é um dado ponto de equilíbrio no interior de  $M$ .

No que se refere a sistemas com saturação, os conjuntos invariantes podem ser usados como estimativas da região de atração de um dado ponto de equilíbrio. Em (BLANCHINI, 1999), é feita uma extensa análise sobre conjuntos invariantes e suas aplicações a sistemas de controle. Outras aplicações dos conceitos de invariância e contratividade podem ser encontrados em (CASTELAN, 1992), (CASTELAN; TARBOURIECH, 1994), (SUAREZ; ALVAREZ; J., 1995), (PITTET; TARBOURIECH; BURGAT, 1997), (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 1999), (HU; LIN, 2002), (LIN; LV, 2007) e (COUTINHO; GOMES DA SILVA JR, 2007).

### 2.3.2 Problema de Lure

Muitos sistemas não-lineares podem ser representados através de um sistema linear realimentado por um elemento não-linear, conforme mostrado na Figura 2. O estudo da estabilidade deste tipo de sistema constitui-se no chamado Problema de Lure.

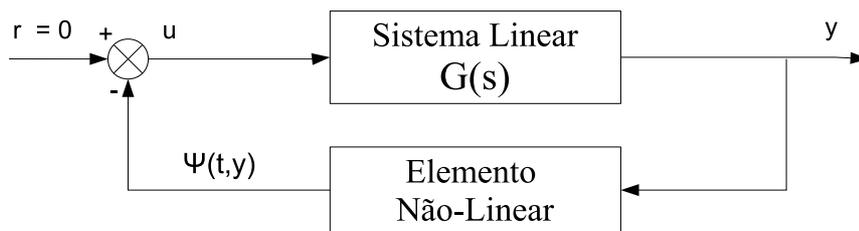


Figura 2: Sistema na Forma de Lure

O sistema da Figura 2 pode ser representado como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -\psi(t, y) \end{aligned} \tag{4}$$

onde o par  $(A, B)$  é controlável, o par  $(C, A)$  é observável e  $\psi(t, y)$  é uma não-linearidade sem memória, linear por partes em  $t$  e localmente Lipschitz (ver (KHALIL, 1992)) em  $y$ . A não-linearidade  $\psi(t, y)$  deve obedecer uma série de condições chamadas condições de setor. Algumas destas condições de setor são definidas a seguir:

### 2.3.2.1 Condição de Setor Clássica

Esta é a condição de setor mais comum na literatura (KHALIL, 1992), (SASTRY, 1999) e (SLOTINE; LI, 1991). Uma possível definição formal é a seguinte:

**Definição 2.3.3** Uma função contínua  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao setor  $[k_1, k_2]$  se existem dois números não-negativos  $k_1$  e  $k_2$ ,  $k_2 > k_1$ , tais que

$$k_1 y^2 \leq y\psi(t, u) \leq k_2 y^2 \quad (5)$$

se verifica. A relação (5) pode ser escrita na forma

$$[\psi(t, y) - k_1 y][\psi(t, y) - k_2 y] \leq 0. \quad (6)$$

No caso multivariável ( $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) e considerando o setor  $[0, k_{(i)}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , pode-se escrever a relação (6) na forma

$$\psi(t, y_{(i)})[\psi(t, y_{(i)}) - k_{(i)} y_{(i)}] \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (7)$$

ou ainda, matricialmente

$$\psi(t, y)^T [\psi(t, y) - \Lambda u] \leq 0, \quad (8)$$

onde  $\Lambda = \text{diag}\{k_{(i)}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Esta condição garante que  $\psi(t, y)$  esteja localizada no primeiro e terceiro quadrantes e ainda que  $y\psi(t, y) \geq 0$ . A satisfação de uma dada condição de setor pode ser caracterizada tanto de forma local quanto global. Por exemplo, para o caso de uma não-linearidade do tipo zona morta, pode-se notar que esta verifica o setor  $[0, 1]$  globalmente, isto é,  $\forall y$ , (ver Figura 3(a)) e que este tipo de não-linearidade verifica o setor  $[0, b]$ ,  $b < 1$ , apenas para  $y \in [-a, a]$ , ou seja, de forma local.

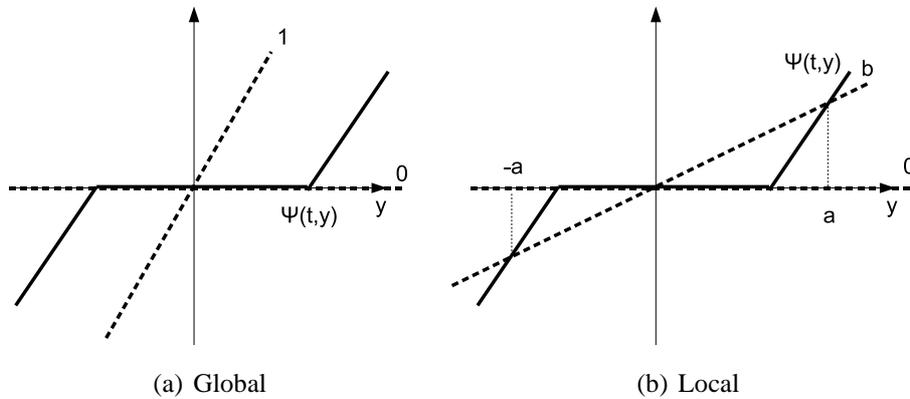


Figura 3: Condição de Setor - Zona-morta.

### 2.3.2.2 Estabilidade Absoluta

Baseado no sistema na forma de Lure e das condições de setor acima, pode-se definir a estabilidade absoluta como segue:

**Definição 2.3.4** (KHALIL, 1992) Considere o sistema (4), onde a não-linearidade  $\psi(t, y)$  satisfaz uma dada condição de setor. Este sistema é globalmente absolutamente estável se a origem é globalmente assintoticamente estável para qualquer não-linearidade em um dado setor. Este sistema será localmente absolutamente estável se a origem é assintoticamente estável para qualquer não-linearidade parcialmente contida em um dado setor.

Pode-se notar que a estabilidade absoluta é uma característica exclusiva do sistema e do setor escolhido, sendo válida para qualquer não-linearidade pertencente a este setor.

Na Figura 4(a) é ilustrada a estabilidade absoluta local. É fácil de notar que a não-linearidade verifica a condição de setor apenas no intervalo  $[a, b]$ . Na Figura 4(b) pode-se notar que a condição de setor é verificada para todo  $y$ , caracterizando assim, a estabilidade absoluta global.

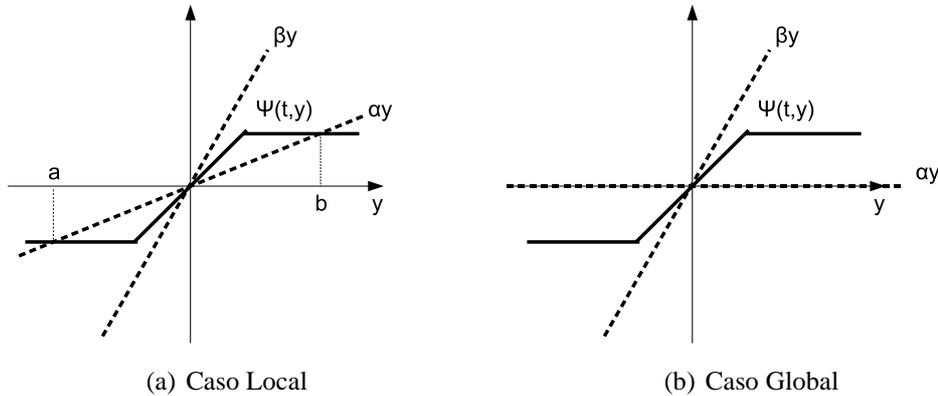


Figura 4: Estabilidade Absoluta - Caso Local e Global.

Além da condição de setor clássica, outras condições de setor foram estabelecidas na literatura. Algumas destas condições são apresentadas nas seções a seguir:

### 2.3.2.3 Condição de setor modificada

Esta condição é uma generalização da condição de setor clássica, aplicada a não-linearidades do tipo zona-morta descentralizada, definida por

$$\Psi_{u_0(i)}(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{(i)}(t) - u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)}(t) > u_{0(i)} \\ 0 & \text{se } -u_{0(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{(i)}(t) + u_{0(i)} & \text{se } u_{(i)}(t) < -u_{0(i)}. \end{cases} \quad (9)$$

Para este caso, a relação (8) pode ser substituída por (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005)

$$\Psi_{u_0}(u(t))^T T [\Psi_{u_0}(u(t)) - v(t)] \leq 0 \quad (10)$$

onde  $T$  é uma matriz diagonal positiva definida. Neste caso, esta condição só é válida se  $u(t)$  e  $v(t)$  pertencem ao conjunto  $S(u - v, u_0)$ , definido como segue:

$$S(u - v, u_0) \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^m; |u_{(i)} - v_{(i)}| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (11)$$

**Observação 2.3.1** Considerando  $u(t) = K\xi(t)$ , pode-se mostrar que  $\Psi_{u_0}(K\xi(t))$  satisfaz a condição de setor clássica  $\Psi_{u_0}(K\xi(t))[\Psi_{u_0}(K\xi(t)) - \Lambda K\xi(t)] \leq 0, \forall \xi \in S(K, u_0^\lambda)$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal e (PAIM, 2003)

$$S(K, u_0^\lambda) \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^m; |K_{(i)}\xi| \leq \frac{u_{0(i)}}{1 - \Lambda_{i,i}}, i = 1, \dots, m \right\}.$$

A condição de setor modificada pode ser escrita, considerando  $v(t) = G\xi$ , como

$$\Psi_{u_0}(K\xi)^T T [\Psi_{u_0}(K\xi) - G\xi] \leq 0, \quad (12)$$

a qual é válida  $\forall \xi \in S(K - G, u_0)$ , onde  $S(K - G, u_0)$  é definido em (11).

Assim, pode-se estabelecer a condição de setor clássica aplicada à não-linearidade zona morta descentralizada como um caso particular da condição de setor modificada, onde  $T = I_m$  e ainda  $G = \Lambda K$ .

**Observação 2.3.2** Neste caso, o sentido de estabilidade absoluta se perde, além do seu apelo geométrico. Por outro lado, esta condição de setor permite a obtenção de condições de estabilidade diretamente na forma de LMIs. Por ser menos conservativa, pois leva em consideração a característica da não-linearidade, a condição de setor modificada vem apresentado resultados menos conservativos quando aplicada ao problema de regulação de sistema lineares sujeitos à saturação (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005). Um dos objetivos deste trabalho é aplicar esta condição para o problema de seguimento de referências e verificar se a redução da conservatividade se mantém.

#### 2.3.2.4 Condição de setor linear por partes

A condição de setor linear por partes foi apresentada em (HU; HUANG; LIN, 2004), em conjunto com uma extensa análise sobre os critérios de estabilidade utilizando este tipo função. Ela baseia-se no princípio de que o setor é uma combinação de várias retas com inclinações diferentes. A seguir será apresentada uma definição deste tipo de condição.

**Definição 2.3.5** Considere as funções  $\phi_1(u)$  e  $\phi_2(u)$  com simetria ímpar, linear por partes e convexas para  $u > 0$ . Então a não-linearidade sem memória  $\psi(u, t)$  estará inclusa no setor  $(\phi_1(u), \phi_2(u))$  se a relação

$$[\psi(u, t) - \phi_1(u)][\psi(u, t) - \phi_2(u)] \leq 0$$

se verifica.

Este tipo de condição de setor é mais geral, como exemplificado nas Figuras 5(a) e 5(b).

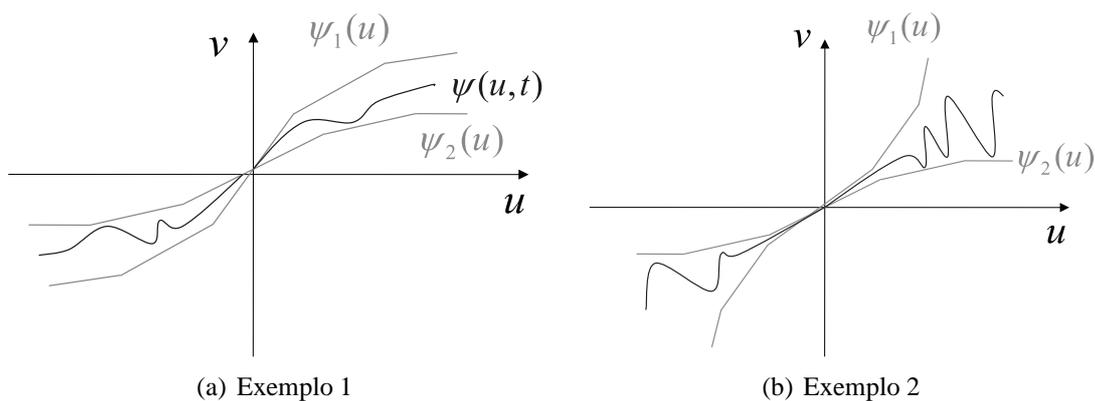


Figura 5: Condição de setor linear por partes

#### 2.3.2.5 Aplicação da condição de setor na determinação da estabilidade

Nesta seção, será mostrado como as condições de setor podem ser utilizadas a fim de caracterizar a estabilidade do sistema. As considerações desta seção serão baseadas na

condição de setor modificada, já que esta é o foco principal deste trabalho, e na função de Lyapunov definida no Teorema 2.3.1. A sua extensão para a condição de setor clássica é direta.

Seja  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lyapunov e  $\dot{V}(x(t))$  a derivada desta função ao longo das trajetórias do sistema. Da Seção 2.3.2.3, sabe-se que, se  $u(t)$  e  $v(t)$  pertencem a  $S(u(t) - v(t), u_0)$ , então a condição (10) é verificada. Aplicado o *S-procedure* conforme apresentado em (BOYD et al., 1994) obtém-se

$$\dot{V}(x(t)) - 2\Psi_{u_0}(u(t))^T T [\Psi_{u_0}(u(t)) - v(t)] < 0,$$

a partir da qual pode-se concluir que  $\dot{V}(x(t)) < 0 \forall u(t), v(t) \in S(u(t) - v(t), u_0)$ . Com isso, garante-se que as condições do Teorema 2.3.1 são verificadas localmente, na região de validade da condição de setor.

## 2.4 Comentários Finais

Neste capítulo, foram discutidos alguns conceitos da teoria de controle que serão de fundamental importância ao longo deste trabalho. Os conceitos de estabilidade foram apresentados tanto para sistemas lineares, na forma de BIBO estabilidade e estabilidade interna, quanto para sistemas não-lineares, onde a estabilidade foi apresentada através dos métodos de Lyapunov e em termos de estabilidade absoluta. Pretendeu-se assim, abordar os conceitos mais importantes destas teorias, facilitando a compreensão dos desenvolvimentos subsequentes.

## 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: SISTEMAS LINEARES SUJEITOS À SATURAÇÃO DE CONTROLE

### 3.1 Introdução

Por mais que as teorias em sistemas de controle evoluam, estas teorias não podem ser dissociadas da realidade e das aplicações práticas que originaram seu desenvolvimento. Um projeto que garanta um dado desempenho de nada valerá se os elementos físicos que compõem a planta não puderem responder da forma esperada. Estas restrições podem ser tanto construtivas, como capacidade de abertura de uma válvula ou tensão de alimentação de um amplificador, quanto inerentes ao processo que se deseja controlar, por exemplo, inércia ou tempo de resposta. Foi visando introduzir estas restrições físicas nos modelos teóricos que surgiu o conceito de saturação.

Os efeitos causados pela saturação são bem conhecidos da comunidade científica. O menos nocivo deles é a perda de desempenho, podendo deixar o sistema mais lento e menos amortecido. Além disso, a saturação pode provocar o aparecimento de pontos de equilíbrio parasitas, fazendo com que os estados do sistema tendam a um ponto de operação diferente do projetado. Nesta mesma linha de raciocínio, a saturação pode tornar o sistema oscilatório com o aparecimento de ciclos-limite ou ainda, em um caso extremo, levar o sistema em malha-fechada à instabilidade.

Visando reduzir estes efeitos nocivos, o estudo da saturação seguiu por vários rumos nos últimos anos. No problema de análise, alguns autores procuraram modelar os efeitos da saturação no sistema, enquanto outros estabeleceram condições e domínios de estabilidade para o mesmo. No problema de síntese, novos esquemas de controle foram propostos, bem como novas formas de projetar estes controladores. Este capítulo apresenta alguns destes temas, mostrando um pouco do que a literatura tem a oferecer sobre o assunto.

### 3.2 Sistema de Interesse

Nesta seção, será apresentada uma formulação básica do sistema estudado neste trabalho. Nela, serão definidas algumas propriedades importantes dos sistemas sujeitos à saturação de controle. A maioria da formulação apresentada é decorrente de (PAIM, 2003) e (GOMES DA SILVA Jr., 1997)

Considere o sistema linear, em tempo contínuo, invariante no tempo e descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_r r(t) + B_d d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (13)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$

é a saída do sistema,  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  é a referência que se deseja seguir e  $d(t) \in \mathbb{R}^k$  é um vetor de perturbações. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $B_r$ , e  $B_d$  são constantes e de dimensões compatíveis.

Considere agora, que o controle é uma realimentação estática dos estados do sistema, isto é,

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Se nenhuma restrição é aplicada ao controle e ainda  $r(t) = 0$  e  $q(t) = 0$ , o sistema (13) apresenta um comportamento linear em malha-fechada dado por

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t).$$

Neste caso, pode-se caracterizar a estabilidade do sistema baseado nos autovalores da matriz  $(A + BK)$ , conforme apresentado na Seção 2.2.2. Se o sistema é estabilizável, então a matriz de ganho  $K$  pode ser escolhida de tal forma que os autovalores da matriz de  $(A + BK)$  sejam posicionados em qualquer lugar do semi-plano esquerdo, no caso contínuo.

Considerando agora, o sinal de controle limitado em sua amplitude, ou seja, cada componente do vetor  $u(t)$  está restrita entre um valor máximo e mínimo. Assim,  $u(t)$  deve pertencer ao conjunto poliedral definido por

$$\Omega \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m; -u_0 \leq u \leq u_0\} \quad (14)$$

com  $u_{0(i)} > 0$  para  $\forall i = 1, \dots, m$ . A lei de controle efetivamente aplicada ao sistema é  $u(t) = \text{sat}_{u_0}(Kx(t))$ , onde cada componente de  $u(t)$  é dado por

$$u_{(i)}(t) = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{se } -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} \quad (15)$$

Assim, o sistema em malha-fechada com restrição de controle é dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_r r(t) + B_d d(t) \quad (16)$$

Em relação ao sistema (16), pode-se definir a chamada região de linearidade ou região linear do sistema. Nesta região, o valor de  $K_{(i)}x(t)$  está confinado entre  $-u_{0(i)}$  e  $u_{0(i)}$ , isto é, não viola os limites de controle. Esta região é definida como

$$S(K, u_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq Kx(t) \leq u_0\}. \quad (17)$$

Nesta região, o sistema (16) apresenta um comportamento localmente linear. É importante observar que, mesmo com o sistema inicializado em  $S(K, u_0)$ , isto não quer dizer que seu comportamento global seja linear.

**Observação 3.2.1** *As definições apresentadas para o controle via realimentação estática de estado podem ser estendidas para o caso de realimentação de saída. A matriz  $K$  pode ser obtida reescrevendo o sistema de forma conveniente. Por exemplo, considerando uma realimentação estática de saída,  $K = \bar{K}C$  (LIN; STOORVOGEL; SABERI, 1996). O caso de realimentação dinâmica de saída pode ser reformulado como um problema de realimentação estática de saída, considerando-se um sistema aumentado.*

Nas seções seguintes, serão apresentados os problemas mais usuais decorrentes desta formulação. No início de cada seção, serão apresentadas condições às quais a solução se aplica, mostrando ainda as referências relevantes sobre cada assunto.

### 3.3 Problema de Regulação

O problema de regulação é um dos problemas mais estudados quando se trata de sistemas sujeitos à saturação. Nesta seção, será considerado o caso em que sistema (13) não está sujeito a influências externas, isto é,  $r(t) = 0$  e  $d(t) = 0$ . A seguir, serão mostrados alguns estudos realizados neste tipo de problema.

#### 3.3.1 Análise de estabilidade

Dado um controlador calculado previamente, a análise da estabilidade engloba uma série de estudos feito sobre comportamento do sistema em malha-fechada. Os principais objetivos, neste caso, são determinar os domínios de estabilidade do sistema e estudar o seu desempenho.

Pode-se definir como domínio de estabilidade de um sistema uma região do espaço de estados onde, para qualquer condição inicial em seu interior, as trajetórias do sistema ficam confinadas. Isto nada mais é do que aplicar os conceitos de invariância de conjuntos aos sistemas saturados. O objetivo, neste caso, é obter a maior estimativa da região de atração possível para aquele dado controle. Alguns exemplos deste tipo de análise podem ser encontrados em (DOLPHUS; SCHMITENDORF, 1991), (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002), (PAIM et al., 2002) e (EBENBAUER; ALLGOWER, 2007), além daqueles já citados na Seção 2.3.1.2.

#### 3.3.2 Estabilização

Neste caso, o objetivo é projetar uma estrutura de controle e um controlador de tal forma que o sistema resultante em malha-fechada seja estável, podendo esta estabilidade ser global, semi-global ou apenas local. No caso global, (SONTAG; SUSSMANN, 1990) e (BURGAT; TARBOURIECH, 1992) afirmam que sempre é possível encontrar uma realimentação de estados que estabilize o sistema saturado, desde que este seja estável em malha aberta. Geralmente, estabilidade global implica em desempenho insatisfatório.

A estabilização semi-global implica em uma região de atração tão grande quanto se queira, desde que limitada. Em (HU; LIN, 2001) e (LIN; SABERI, 1993) são apresentados resultados neste sentido para o caso em que o par  $(A, B)$  é estabilizável e que o sistema não seja instável. O caso local é o que melhor se aplica a sistemas instáveis em malha-aberta. Neste caso, a garantia de estabilidade é feita para uma região particular do espaço de estados, ou seja, um conjunto contrativo associado a uma função de Lyapunov (ver Seção 2.3.1.1). Fora desta região nada pode-se garantir sobre a estabilidade do sistema. A estabilização local é abordada em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2001) e (PITTET; TARBOURIECH; BURGAT, 1997), entre outros.

Além do objetivo de estabilização, pode-se impor algumas restrições de desempenho ao sistema em malha-fechada. Neste caso, o objetivo é que este sistema atenda a requisitos de performance como tempo de estabilização e máximo sobre-sinal. No caso de uma formulação via LMIs, (CHILALI; GAHINET, 1996) e (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999) apresentam condições para alocação de pólos em regiões específicas do espaço de estados como, por exemplo, um círculo centrado na origem, um setor circular ou uma interseção de planos. A alocação dos pólos do sistema nestas regiões está intimamente ligada ao seu desempenho em malha-fechada, desde que se trate de uma vizinhança do ponto de equilíbrio na região linear do sistema.

### 3.4 Problema de *anti-windup*

A síntese de malhas de *anti-windup* é um dos tópicos mais explorados no que se refere a sistemas com saturação. Inicialmente, o problema de *windup* foi detectado em malhas de controle com ação integral, sendo depois expandido para qualquer diferença entre a saída e a entrada de algum elemento na malha de controle (DOYLE; SMITH; ENNS, 1987). Um dos possíveis esquemas de controle envolvendo laço *anti-windup* é apresentado na Figura 6.

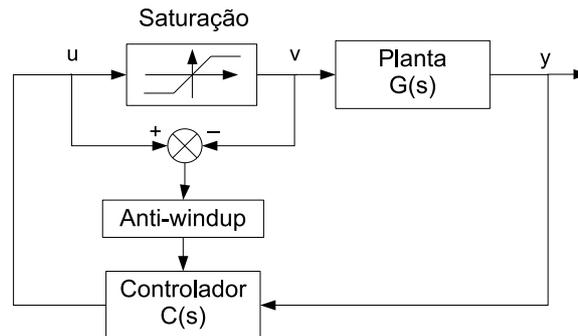


Figura 6: Esquema de Controle com Laço de *Anti-windup*

O princípio básico da técnica de *anti-windup* para sistemas com saturação consiste em projetar um controlador nominal que não leve em conta o efeito da saturação e depois projetar um outro controlador a fim recuperar a perda de desempenho causada pela mesma. Neste tipo de problema, o objetivo do laço *anti-windup* é a melhoria de desempenho ou a maximização dos domínios de estabilidade do sistema. Para alcançar estes objetivos, a compensação de *windup* pode ser feita tanto de maneira estática quanto dinâmica.

Visando recuperar a performance de controladores PID, pode-se citar as técnicas *ad hoc* como o *back calculation* de (FERTIK; ROSS, 1967), os “integradores inteligentes” de (KRIKELIS, 1980) e o *anti-reset windup* de (ASTROM; WITTENMARK, 1984). As primeiras tentativas de se analisar a estabilidade de laços de *anti-windup* foram os trabalhos (GLATTFELDER; SCHAUFELBERGER, 1983) e (KAPASOURIS; ATHANS; STEIN, 1988), onde foram aplicados os critérios do círculo e de Popov e em (CAMPO; MORARI, 1990), baseado no teorema dos pequenos ganhos (*scaled small gain theorem*). Outros métodos utilizados incluem análise por funções descritivas (ASTROM; RUNDQWIST, 1989), análise de ganhos incrementais (ROMANCHUK; SMITH, 1996) e a técnica de subespaços invariantes (KAPOOR; TEEL; DAOUTIDIS, 1998).

Em (WALGAMA; STERNBY, 1990), os autores observam que diversas técnicas de *anti-windup* apresentam características de observação de estados. Baseado em observações semelhantes, (KOTHARE et al., 1994) unifica as principais técnicas de *anti-windup* conhecidas. Utilizando-se desta metodologia geral, (MIYAMOTO; VINNICOMBE, 1996) propõem uma técnica que permite realizar o projeto baseado em desempenho  $H_\infty$ . Resultados menos conservativos foram obtidos pelo chamado *anti-windup*  $\mathcal{L}_2$ , onde uma lei de controle não-linear é utilizada a fim de compensar os efeitos da saturação.

No escopo deste trabalho, as técnicas mais relevantes são aquelas baseadas em LMIs. Em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002), os domínios de estabilidade do sistema são caracterizados explicitamente, maximizando-se a estimativa da região de atração da origem. A modelagem dos efeitos da saturação foi obtida através da

condição de setor clássica. Em (HU; LIN; CHEN, 2002), uma formulação baseada em BMIs relaxadas é proposta, usando agora como modelo de saturação condições politópicas menos conservativas. A síntese de *anti-windup* estático baseada em condições de setor modificadas é proposta em (GOMES DA SILVA Jr.; TARBOURIECH., 2003). Neste tipo de modelagem, a estrutura da condição de setor clássica é relaxada, adicionando graus de liberdade ao sistema e permitindo a obtenção de condições diretamente na forma de LMIs.

Resultados relativos a compensadores dinâmicos de *anti-windup* são apresentados em (GRIMM et al., 2003). Neste trabalho, os autores garantem um ganho  $\mathcal{L}_2$  finito para um sistema exponencialmente estável. Em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2006) e (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr.; BENDER, 2006), a síntese de *anti-windup* dinâmico é considerada para o caso discreto e, em (GOMES DA SILVA Jr.; LIMON; ALAMO, 2005) e (BENDER, 2006), a síntese simultânea do controlador e dos laços de *anti-windup* é proposta para sistemas limitados em amplitude e taxa de variação, metodologia estendida para sistemas com restrição em aceleração em (BENDER; GOMES DA SILVA Jr, 2007).

### 3.5 Problema de seguimento de referências

O problema de seguimento de referências em sistemas sujeitos à saturação é mais crítico quando comparado ao problema de regulação. A restrição mais evidente neste caso é o fato de o sistema não conseguir seguir com erro nulo uma referência qualquer, dando origem a um conjunto de referências admissíveis. Além disso, a presença de um sinal externo pode levar as trajetórias do sistema a divergir.

Em termos do sistema (13), considera-se  $r \neq 0$  e  $d = 0$ . Neste tipo de problema, dois objetivos distintos podem ser destacados. No primeiro, o objetivo é identificar e/ou maximizar a referência que o sistema pode seguir. Além disto, estimativas dos domínios de estabilidade podem ser obtidas. No segundo caso, o objetivo é otimizar a performance do seguimento para uma dada referência, ou, ainda, minimizar os efeitos de perturbações na saída do sistema.

A seguir, será apresentado um resumo das técnicas mais usuais de seguimento de referências sujeitos à saturação, baseado em (REGINATTO, 2000). Algumas técnicas utilizando *anti-windup* já foram expostas na seção anterior.

#### 3.5.1 Controle preditivo baseado em modelo

Nestas técnicas de controle, o modelo do processo é utilizado para prever o comportamento futuro do sistema e uma seqüência de ações de controle em malha-aberta é calculada através da solução de um problema de otimização. O primeiro elemento desta seqüência é então utilizado como entrada de controle e os demais elementos são descartados. Aplicando-se uma abordagem de horizontes deslizantes, o problema de otimização é resolvido a cada período de amostragem e as medidas do sistema são consideradas na correção da predição do modelo, conferindo um caráter de malha-fechada à estratégia.

A predição do comportamento do sistema pode ser considerada, por exemplo, como

$$\begin{aligned} x_{k+\delta+1|k} &= Ax_{k+\delta|k} + B\Delta u_{k+\delta|k} \\ y_{k+\delta|k} &= Cx_{k+\delta|k}, \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $x_{k+\delta|k}$  é o estado do sistema na amostra  $k + \delta$  predito na amostra  $k$ . O custo a ser minimizado é, em geral, um critério quadrático envolvendo o erro de seguimento,

$e_{k+\delta|k} = r_{k+\delta|k} - y_{k+\delta|k}$ , e o erro de controle  $\Delta u_{k+\delta|k}$  como, por exemplo

$$J_N(x_k, r, \Delta \bar{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (e_{k+\delta|k}^T Q e_{k+\delta|k} + \Delta u_{k+\delta|k}^T R \Delta u_{k+\delta|k}), \quad (19)$$

onde  $R = R^T > 0$ ,  $Q = Q^T \geq 0$ , o par  $(Q^{1/2}, A)$  é detectável,  $N$  é o horizonte de predição e ainda  $\Delta \bar{u}_k = (\Delta u_{k|k}, \Delta u_{k+1|k}, \dots, \Delta u_{k+N-1|k})$ .

Assim, o custo  $J_N$  deve ser minimizado em relação a  $\Delta \bar{u}_k$ , respeitando as restrições e a dinâmica (18), na forma

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \bar{u}_k} J_N(x_k, r, \Delta \bar{u}_k) \\ \text{sujeito a } & \begin{cases} \|u_{k+j|k}\|_\infty \leq M, \quad j = 0, \dots, N-1 \\ \|\Delta u_{k+j|k}\|_\infty \leq R, \quad j = 0, \dots, N-1 \\ x_{k|k} = x_k \\ \text{dinâmica (18)} \\ e_{k+\delta|k} = r_{k+j|k} - y_{k+j|k}, \quad j = 0, \dots, N-1, \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $M$  e  $R$  representam os limites das restrições do sinal de controle e de sua taxa de variação, respectivamente.

Uma grande vantagem deste tipo de técnica é a facilidade de incorporar as restrições no problema de otimização (20). Suas maiores dificuldades são a garantia de factibilidade do problema de otimização e a garantia da estabilidade do sistema (RAWLINGS, 2000). Uma análise mais profunda sobre este tipo de controle sob restrições pode ser encontrada em (MACIEJOWSKI, 2002), (GRIMM et al., 2007), (HU; CHEN, 2007), (CAMACHO; BORDONS, 1997) (OLIVEIRA; BIEGLER, 1994) ou (MICHALSKA; MAYNE, 1993).

### 3.5.2 Condicionador de referências

Este tipo de abordagem permite tratar de forma separada os problemas de desempenho em regime permanente e de satisfação de restrições. Isto pode ser obtido através da introdução de um condicionador de referências (*reference governor*), elemento de controle que atua entre o sinal de referência e a entrada do sistema em malha-fechada. A Figura 7 ilustra a introdução deste elemento na malha de controle.

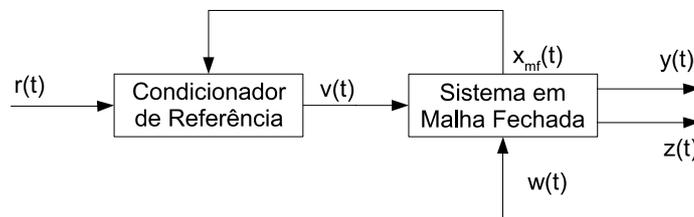


Figura 7: Condicionador de Referência

Os condicionadores de referências foram muito populares na década de 1990 e início dos anos 2000. Para um estudo mais aprofundado do tema é recomendada a leitura dos trabalhos (GILBERT; KOLMANOVSKY, 1999a), (GILBERT; KOLMANOVSKY, 2001), (GILBERT; KOLMANOVSKY, 2002), (KAPASOURIS; ATHANS; STEIN, 1988), (ANGELI; CASAVOLA; MOSCA, 2000) e (BLANCHINI; MIANI, 2000), além de outros trabalhos citados nesta seção.

O projeto deste tipo de controlador poder feito em duas partes. Em uma primeira etapa, um controlador é projetado para o sistema sem levar em conta as restrições, com o objetivo de garantir os requisitos de desempenho e estabilidade. A característica não-linear do sistema (restrições) fica exclusivamente confinada ao condicionador de referência.

O condicionador de referência ajusta as transições do sinal  $v(t)$  de tal maneira que as restrições sejam respeitadas para um grande número de sinais de referência e condições iniciais. Ele gera sinais  $v(t)$  como uma seqüência de sinais admissíveis no que diz respeito à violação das restrições, tais que  $v(t)$  tenda otimamente em direção ao valor atual de  $r(t)$ . Para algumas condições razoáveis, o valor de  $v(t)$  será igual ao valor nominal da referência  $r(t)$  em um tempo finito. Neste sentido, o condicionador de referência implementa uma espécie de controle preditivo, nos moldes daqueles apresentados na seção anterior. A grande diferença do condicionador de referências em relação aos controladores preditivos é a utilização de conceitos de conjuntos admissíveis. A seguir será mostrada uma breve formulação para o caso discreto. Extensões para caso contínuo podem ser encontradas em (BEMPORAD, 1998), (GILBERT; KOLMANOVSKY, 1999b) ou (MILLER et al., 2000).

Considere o sistema em malha-fechada para o qual foi projetado um controle sem considerar as restrições, dado por

$$\begin{aligned} x_{mf}(k+1) &= A_{mf}x_{mf}(k) + B_{mf}r(k) \\ y(k) &= C_{mf}x_{mf}(k) \\ z(k) &= C_{zmf}x_{mf}(k) + D_{zmf}r(k) \end{aligned} \quad (20)$$

onde  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um conjunto de variáveis que deve satisfazer restrições do tipo  $z \in Z$ . Este tipo de representação pode ser usada para modelar tanto restrições no estado quanto no sinal de controle. Neste ponto, é importante definir o que é uma referência realizável para um dado sistema:

**Definição 3.5.1** (REGINATTO, 2000) *Uma referência é dita realizável em regime permanente para o sistema (20) se o ponto de equilíbrio correspondente satisfaz  $z^e = C_{zmf}x_{mf}^e(k) + D_{zmf}r \in Z$ . Assim, o conjunto de referências realizáveis em regime permanente pode ser dado por*

$$R_0 \triangleq \{r : H_0 r \in Z\}, \quad (21)$$

com  $H_0 = D_{zmf} + C_{zmf}(I - A_{mf})^{-1}B_{mf}$ .

*Pode-se dizer, então, que o sinal de referência é realizável se a trajetória é tal  $z(t) \in Z, \forall t \geq 0$ .*

Para fins de simplicidade, a matriz  $A_{mf}$  será considerada Schur-estável, o par  $(C_{zmf}, A_{mf})$  é observável e ainda  $Z$  é um conjunto compacto na forma  $Z = \{z \in \mathbb{R}^{n_z} : \eta_i(z) \leq 0, i = 1, \dots, n_\eta\}$ . Se as funções  $\eta(\cdot)$  forem lineares, então  $Z$  será um politopo. A seguir, serão mostradas as duas estratégias mais usuais de se implementar um condicionador de referências.

**Condicionador estático:** Neste tipo de condicionador, a referência é corrigida apenas por um ganho, na forma

$$v(k) = \kappa(r, x_{mf})r(k), \quad (22)$$

onde  $\kappa(r, x_{mf})$  é dado por

$$\kappa(r, x_{mf}) = \max_{\zeta \in [0,1]} \left\{ \begin{array}{l} A_{mf}x_{mf}(k) + B_{mf}\zeta r(k) \in O_{\infty}(A_{mf}, C_{mf}, Z) \\ C_{zmf}x_{mf}(k) + D_{zmf}\zeta r(k) \in Z \end{array} \right\}. \quad (23)$$

O conjunto  $O_{\infty}(A_{mf}, C_{mf}, Z)$  é conhecido como máximo conjunto saída-admissível (*maximal output admissible set*)<sup>1</sup>. Uma explicação mais detalhada sobre estes conjuntos pode ser encontrada no Apêndice B de (REGINATTO, 2000) e nas referências lá contidas.

Assim, a relação (23) se resume a encontrar um escalar  $\zeta$  tal que o sistema permaneça dentro do conjunto de saída-admissível e ainda que as restrições não sejam violadas. A simplicidade deste tipo de condicionador vem associada a alguns problemas de estabilidade, como mostrado em (GILBERT; KOLMANOVSKY, 1995).

**Condicionador dinâmico:** Neste caso, a referência é corrigida segundo a dinâmica

$$v(k+1) = v(k) + \kappa(r, x_G)(r(k) - v(k)), \quad (24)$$

onde  $x_G$  é o estado aumentado incluindo a dinâmica de  $v(k)$ . O ganho  $\kappa(r, x_G)$  serve como ponderação entre a influência de  $r(k)$  ou  $v(k)$  na saída do condicionador. No caso em que  $\kappa(r, x_G) = 0$ , tem-se  $v(k+1) = v(k)$ . Quando  $\kappa(r, x_G) = 1$ , onde as restrições não são violadas, a saída do condicionador será a própria referência desejada, atrasada de uma amostra, ou seja  $v(k+1) = r(k)$ .

O sistema aumentado é dado por

$$\begin{aligned} x_G(k+1) &= A_G x_G(k) + B_G \kappa(r, x_G)(r(k) - [I \ 0]x_G(k)) \\ z(k) &= C_G x_G(k) \end{aligned} \quad (25)$$

onde

$$A_G = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_{mf} & A_{mf} \end{bmatrix}, \quad B_G = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_G = [ \ D_{zmf} \quad C_{zmf} \ ].$$

Com isto, o ganho  $\kappa(r, x_G)$  é determinado através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\kappa(r, x_G) = \max\{\zeta \in [0, 1] : A_G x_G(k) + B_G \zeta (r(k) - [I \ 0]x_G(k)) \in O_{\infty}(A_G, C_G, Z)\}. \quad (26)$$

Quando calculado desta forma, o condicionador dinâmico garante que o sistema recupere assintoticamente o desempenho do sistema nominal quando uma referência converge a um valor realizável. Esta propriedade é mais forte do que a garantia de estabilidade do condicionador estático. Seu maior problema é a restrição da referência modificada a valores realizáveis mesmo durante os transitórios, o que compromete a velocidade de convergência da resposta do sistema (GILBERT; KOLMANOVSKY; TAN, 1995).

---

<sup>1</sup>Este conjunto pode ser definido como o maior conjunto positivamente invariante tal que as trajetórias do sistema satisfazem a restrição  $z(t) \in Z, \forall t \geq 0$

### 3.5.3 Regulação de saída

Este tipo de abordagem baseia-se em uma realimentação de estados composta por uma realimentação de estados linear, que desconsidera a saturação, adicionada de um elemento não-linear. Pode-se provar que, para um dado elemento não-linear e não-negativo na realimentação, o sistema seguirá assintoticamente uma referência constante e ainda seu estado ficará confinado a um certo conjunto elipsoidal. A maioria dos trabalhos nesta área tratam o problema tanto na forma de realimentação de estados quanto na forma de realimentação de erro.

Os trabalhos mais relevantes desta abordagem são (LIN; STOOORVOGEL; SABERI, 1996), onde a teoria de regulação de saída de (FRANCIS, 1977) é aplicada ao caso com saturação em conjunto com a noção de estabilidade semi-global. Em (TURNER; POSTLETHWAITE; WALKER, 2000) o trabalho de (LIN; STOOORVOGEL; SABERI, 1996) é estendido para o caso multivariável. Em (HU; LIN, 2000), é caracterizada uma região de regulabilidade assintótica, isto é, um conjunto de condições iniciais do sistema e da referência/perturbação para o qual a regulação de saída ainda é possível. Recentemente, nessa mesma linha, pode-se citar os trabalhos (SU; WU, 2006), (TENG; FU; DUAN, 2007) e (PAVLOV; WOUW; NIJMEIJER, 2007).

Os maiores problemas deste tipo de solução são a determinação de um termo não-linear adequado a fim de recuperar o desempenho do controlador nominal e ainda a falta de robustez no cálculo do seguimento de referência, já que nenhuma ação integral ou controlador dinâmico é utilizado.

### 3.5.4 Abordagem via princípio do modelo interno

Esta abordagem baseia-se no princípio do modelo interno (ver Seção 2.2.3), ou seja, inserir os pólos instáveis da função de transferência da referência que se deseja seguir no controlador. A maioria dos autores considera o seguimento de referências constantes, fazendo-se necessária a introdução de uma ação integral na malha de controle. Um dos primeiros trabalhos neste sentido foi (KRIKELIS, 1980), onde foi proposta a técnica chamada de “integradores inteligentes”.

Este tipo de solução foi amplamente estudada em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e (CAO; LIN; WARD, 2004). Em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), o esquema de controle utilizado considera a introdução de uma ação integral e de um laço de *anti-windup*, conforme proposto inicialmente em (KRIKELIS; BARKAS, 1984). Uma metodologia para a síntese de uma realimentação de estados estabilizante e do ganho de *anti-windup* é proposta, com o objetivo de garantir que as trajetórias do sistema em malha-fechada não deixem um conjunto elipsoidal, desde que as condições iniciais pertençam a este conjunto e que as referências e perturbações do sistema pertençam a um dado conjunto admissível. Além disso, é garantido que o ponto de equilíbrio associado com o perfeito seguimento de referência está no interior da região linear do sistema. Finalmente, uma comparação entre a solução via equações algébricas de Riccati (ARE) e LMIs é apresentada, considerando um modelo politópico a fim de representar os efeitos da saturação no sistema. Estes resultados foram estendidos para sistemas discretos e com referências variantes em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000).

Seguindo as mesmas idéias, mas utilizando um modelo politópico menos conservativo, estes resultados foram melhorados em (CAO; LIN; WARD, 2004). Mesmo com condições menos conservativas, ainda não foi possível fazer a síntese simultânea do controlador estabilizante e do ganho *anti-windup*, exigindo assim, a utilização de pro-

cedimentos iterativos. Estes procedimentos iterativos são o maior problema destas abordagens, ocasionados pelo fato de que as condições teóricas são representadas na forma de inequações matriciais não-lineares. Outro problema que não foi considerado em nenhum dos trabalhos é que, para um dado conjunto de referências/perturbações admissíveis, podem existir pontos de equilíbrio no interior dos domínios de estabilidade, mas fora da região de linearidade, que não garantam erro de seguimento nulo.

É pelas lacunas deixadas por estas abordagens que este trabalho se justifica. Utilizando a condição de setor modificada de (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005), o objetivo é promover a síntese simultânea do controlador e do laço *anti-windup* e ainda garantir que não existam equilíbrios dentro da região de estabilidade mas fora da região linear. Os resultados obtidos até agora podem ser encontrados em (FLORES; ECKHARD; GOMES DA SILVA JR, 2008).

### 3.6 Problema de tolerância e atenuação de perturbações

Os sistemas físicos estão sujeitos a uma enorme quantidade de perturbações, erros de medida ou incertezas. Neste caso, é importante estudar como o controlador projetado se comporta quando submetido a este tipo de influência externa, se estes efeitos indesejados são tolerados ou, preferencialmente, totalmente rejeitados. Se as perturbações forem suficientemente fortes, pode-se perder a garantia de que os estados do sistema permaneçam confinados no interior do domínio de estabilidade (PAIM, 2003). Para este tipo de problema, o sistema (13) está sujeito a uma referência nula e a uma perturbação  $d \neq 0$ . Na verdade, se a referência  $r(t)$  e a perturbação  $d(t)$  forem da mesma natureza (por exemplo, constantes ou senóides de mesma frequência), os dois elementos podem ser combinados a fim de formar um termo de referência/perturbação  $q(t)$ . Neste caso, a garantia de seguimento de referência e a tolerância a perturbações podem ser consideradas como um problema único. É este tipo de abordagem que será utilizado nos capítulos seguintes.

As perturbações normalmente estudadas podem ser de dois tipos: O vetor  $d(t)$  pode ser limitado em energia, ou seja, considera-se que o sinal  $d(t)$  tem norma  $\mathcal{L}_2$  menor que  $\tau_d$ , isto é, a relação

$$\|d(t)\|_2^2 = \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt \leq \tau_d, \forall t \geq 0$$

se verifica. Este tipo de perturbação é conhecida como perturbação  $\mathcal{L}_2$ , utilizada nos trabalhos (BENDER, 2006) e (PAIM, 2003), entre outros. Normalmente, este tipo de perturbação atua no sistema durante um intervalo de tempo e depois tem seus efeitos zerados. O outro tipo de perturbação é a perturbação limitada em amplitude. Neste caso, o sinal  $d(t)$  pertence ao conjunto  $\mathcal{D}$ , definido por

$$\mathcal{D} \triangleq \{d : d^T(t)d(t) \leq \tau_d, \forall t \geq 0\}.$$

Esta classe engloba várias perturbações persistentes como, por exemplo, as perturbações contantes. Resultados considerando este tipo de perturbação podem ser encontrados no Capítulo 10 de (HU; LIN, 2001), nos trabalhos de Blanchini (BLANCHINI; SZNAIER, 1995), (BLANCHINI; SZNAIER, 2000), na tese (SU, 2002) e referências lá contidas. É este tipo de perturbação que será estudado ao longo deste trabalho.

A seguir, serão caracterizados os problemas de atenuação e tolerância a perturbações (PAIM, 2003):

**Problema 3.6.1 Tolerância a perturbações:** Neste caso, o objetivo é analisar se existe um conjunto invariante para as trajetórias do sistema na presença das perturbações. Considere os conjuntos  $S_0$  e  $S_1$  tais que

- Para  $d(t) = 0$ , toda trajetória iniciada em  $S_0$  converge assintoticamente para a origem;
- Para  $d(t) \neq 0$ , a estabilidade do sistema é garantida, isto é, para todo  $x(0) \in S_1$ , as trajetórias do sistema não deixam  $S_0$ . Esta definição é ilustrada na Figura 8.

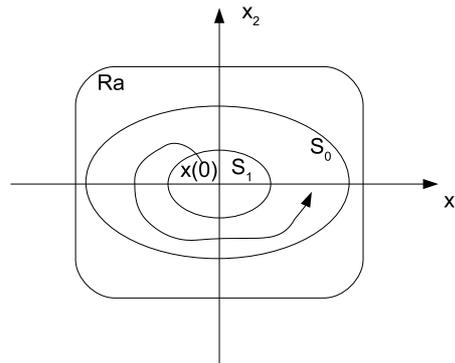


Figura 8: Tolerância a Perturbações

**Problema 3.6.2 Atenuação de perturbações:** Este problema é um problema adicional ao de tolerância, onde o objetivo é minimizar os efeitos da perturbação nas variáveis de interesse do sistema (geralmente a saída). Isto pode ser obtido minimizando a relação perturbação/saída (minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  (BOYD et al., 1994), por exemplo) ou, ainda, através do princípio do modelo interno. É a opção via princípio do modelo interno que será considerada ao longo deste trabalho.

### 3.7 Modelos de Saturação

Para os problemas de síntese e análise, existem várias maneiras de modelar os efeitos da saturação. Como a saturação é o único efeito não-linear presente no sistema considerado, a forma como esta é modelada está diretamente ligada com a conservatividade das soluções. Além disto, com uma modelagem adequada, pode-se obter condições de estabilidade diretamente na forma de LMIs, evitando assim o uso de esquemas iterativos. As modelagens mais relevantes são: por não-linearidade de setor do tipo zona-morta (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005), politópica (MOLCHANOV; PYATNITSKIY, 1989), por regiões de saturação (GOMES DA SILVA Jr., 1997), por incerteza paramétrica limitada em norma (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2000) e por saturação homogênea (CASTELAN, 1992). Uma visão geral sobre algumas destas modelagens pode ser encontrada em (PAIM, 2003). A seguir serão detalhadas as três primeiras delas.

#### 3.7.1 Modelagem por não-linearidade do tipo zona-morta

Esta modelagem foi apresentada em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005) e se baseia na condição de setor modificada (10). Como visto na Seção 2.3.2.1, esta

condição de setor aplica-se somente a não-linearidades do tipo zona-morta. Com isto, é necessária uma pequena alteração no sistema (13), descrita a seguir:

Considere o sistema (13). Este sistema não altera-se caso o sinal  $BKx(t)$  seja somado e subtraído em seu lado direito, originando, assim

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t) + B \text{sat}_{u_0}(Kx(t)) - BKx(t) + B_r r(t) + B_d d(t)$$

que, devido ao fato da não-linearidade ser definida como  $\Psi_{u_0}(u(t)) = u(t) - \text{sat}_{u_0}(u(t))$ , pode ser reescrita na forma

$$\dot{x}(t) = (A + B K)x(t) - B \Psi_{u_0}(Kx(t)) + B_r r(t) + B_d d(t). \quad (27)$$

É através da equação (27) que pode-se inferir sobre a estabilidade do sistema saturado usando a condição de setor modificada.

Considere a matriz  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e o conjunto poliedral

$$S(K - G, u_0) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; |(K_{(i)} - G_{(i)})x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (28)$$

Então, o seguinte lema pode ser enunciado:

**Lema 3.7.1** *Se  $x(t) \in S(K - G, u_0)$ , então a relação*

$$\Psi_{u_0}(Kx(t))^T T [\Psi_{u_0}(Kx(t)) - Gx(t)] \leq 0 \quad (29)$$

*é verificada para todo  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal positiva definida.*

A prova formal deste lema pode ser encontrada em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005) ou ainda em (BENDER, 2006).

### 3.7.2 Modelagem politópica

A modelagem politópica foi inicialmente proposta em (MOLCHANOV; PYATNITSKIY, 1989), aplicada a alguns casos especiais do sistema (13), com  $r(t) = 0$  e  $d(t)=0$ . Para aplicações deste tipo de modelagem são recomendados os trabalhos (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA Jr., 1997), (SCORLETTI; FOLCHER; EL GHAOUI, 1997), (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e referências ali contidas. Neste tipo de modelagem, pode-se definir o vetor de controle como

$$u_{(i)}(t) = \text{sat}_{u_0}(K_{(i)}x(t)) = \alpha_{(i)}(x(t))K_{(i)}x(t) \quad (30)$$

onde

$$\alpha_{(i)}(x(t)) = \begin{cases} \frac{u_{0(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \\ 1 & \text{se } -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ \frac{-u_{0(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (31)$$

com  $0 < \alpha_{(i)}(x(t)) \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . É importante notar que  $\alpha_{(i)}(x(t))$  pode ser considerado um indicativo do grau de saturação do sistema. Além disso, serão considerados  $\alpha_{(i)}(t) = \alpha_{(i)}(x(t))$  e ainda  $\Delta(\alpha(t)) = \text{diag}\{\alpha_{(i)}(x(t))\}$ . Assim, o sistema (13) pode ser reescrito na forma

$$\dot{x}(t) = (A + B\Delta(\alpha(t))K)x(t) = A_t x(t). \quad (32)$$

Quanto menor for o valor de  $\alpha_{(i)}(t)$ , mais distante o estado  $x(t)$  estará da região linear. Considere, agora, um conjunto compacto  $\Pi_0$ . Para  $x(t) \in \Pi_0$ , pode-se definir o seguinte limite inferior para o vetor  $\alpha(t)$ :

$$\alpha_{\min(i)} = \min \alpha_{(i)}(t); x(t) \in \Pi_0.$$

Assim,  $\forall x(t) \in \Pi_0$ , os escalares  $\alpha_{(i)}(t)$  satisfazem  $0 < \alpha_{\min(i)} \leq \alpha_{(i)}(t) \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Então, pode-se definir  $2^m$  matrizes  $\mathcal{A}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2^m$  como

$$\mathcal{A}_j = A + B\Delta(\gamma_{(j)})K, \quad (33)$$

onde  $\Delta(\gamma_{(j)})$  é uma matriz diagonal de forma que os elementos  $\gamma_{(ji)}$  assumem valores 1 ou  $\alpha_{\min(i)}$ . A partir da definição de  $\mathcal{A}_j$  pode-se concluir que,  $\forall x(t) \in \Pi_0^2$ ,

$$A_t \in \text{cov}\{\mathcal{A}_j; j = 1, \dots, 2^m\}$$

ou seja,  $A_t$  pertence a um politopo de matrizes o qual os vértices são as matrizes  $\mathcal{A}_j$ . Logo, o sistema (13) pode ser representado localmente pelo modelo

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t))\mathcal{A}_j x(t), \quad j = 1, \dots, 2^m \quad (34)$$

com  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t)) = 1$  e  $\lambda_j(x(t)) \geq 0$ . Todas as trajetórias do sistema sob saturação podem ser obtidas pelo modelo (34), mas nem todas as trajetórias do modelo são trajetórias reais do sistema. Por isso, faz-se necessária a determinação de uma região de validade do modelo. Esta região é definida como

$$S(K, u_0^\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0^\alpha \leq Kx \leq u_0^\alpha\} \quad (35)$$

com  $u_0^\alpha = \frac{u_{0(i)}}{\alpha_{\min(i)}}$ . O domínio  $S(K, u_0^\alpha)$  contém necessariamente o conjunto  $\Pi_0$ . Para utilizar o modelo politópico a fim de tirar conclusões sobre a estabilidade do sistema (13), precisa-se garantir que todas as trajetórias iniciadas em  $\Pi_0$  permaneçam em  $S(K, u_0^\alpha)$ .

Condições politópicas menos conservativas são apresentadas em (HU; LIN; CHEN, 2002). Sua formulação é baseada na matriz de realimentação de estados  $K$ , em uma realimentação auxiliar  $H$  e em um vetor  $v \in \mathcal{V}$ , com  $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^m; v_{(i)} = 1 \text{ ou } 0, i = 1, \dots, m\}$ . Pode-se assim, definir o vetor  $M(v, K, H)$  como

$$M(v, K, H) = \begin{bmatrix} v_1 k_1 + (1 - v_1)h_1 \\ \vdots \\ v_m k_m + (1 - v_m)h_m \end{bmatrix}.$$

Os  $2^m$  elementos do vetor  $v$  são utilizados para escolher entre as linhas das matrizes  $K$  e  $H$ , formando assim,  $M(v, K, H)$ . Por exemplo, para  $m=2$ , tem-se

$$\{M(v, K, H) : v \in \mathcal{V}\} = \left\{ H, \begin{bmatrix} h_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, K \right\}.$$

A utilização desta condição só será válida se a restrição  $x(t) \in S(H, u_0)$ ,  $S(H, u) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n; |H_{(i)}x| \leq u_{0(i)}, i = 1 \dots, m\}$  for verificada. Com os graus de liberdade adicionados pela matriz  $H$ , as relações decorrentes das condições de estabilidade são menos conservativas, permitindo assim, que estas condições sejam escritas na forma de LMIs. A modelagem precedente aparece, então, como um caso particular desta última, quando  $H = K$ .

<sup>2</sup>Onde  $\text{cov}\{\mathcal{W}\}$  representa o envelope convexo cujos vértices são dados por  $\mathcal{W}$ .

### 3.7.3 Modelagem por regiões de saturação

Esta modelagem consiste em dividir o espaço de estados em diferentes regiões, onde o sistema se comportará como um sistema linear com uma perturbação aditiva. Considere o sistema (13). Para este sistema, pode-se definir o seguinte vetor  $\varsigma_{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , onde  $\varsigma_{(i)}$  atende às seguintes condições:

- Se  $u_{(i)}(t)$  está saturado no limite superior, isto é,  $K(i)x(t) > u_{0(i)}$ , então  $\varsigma_{(i)} = 1$ ;
- Se  $u_{(i)}(t)$  está na região linear, isto é,  $-u_{0(i)} \leq K(i)x(t) \leq u_{0(i)}$ , então  $\varsigma_{(i)} = 0$ ;
- Se  $u_{(i)}(t)$  está saturado no limite inferior, isto é,  $K(i)x(t) < -u_{0(i)}$ , então  $\varsigma_{(i)} = -1$ .

Logo, cada vetor  $\varsigma$  representa uma combinação possível entre as entradas saturadas e não-saturadas. É possível, assim, construir  $3^m$  vetores  $\varsigma$ . Por exemplo, um sistema com duas entradas e duas saídas ( $m = 2$ ) apresenta nove regiões de saturação, mostradas na Figura 9.

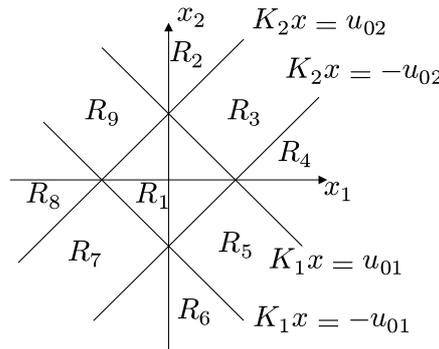


Figura 9: Regiões de Saturação

Baseado em  $\varsigma$ , a evolução das trajetórias do sistema (13) pode ser determinada por

$$\dot{x}(t) = (A + B \text{diag}\{1_m - |\varsigma_{(j)}|\}K)x(t) + Bu(\varsigma_{(i)}) + B_r r(t) + B_d d(t), \quad j = 1 \dots, 3^m \quad (36)$$

onde

$$u_{(i)}(\varsigma_{(j)}) = \begin{cases} u_{0(i)} & \text{se } \varsigma_{(ji)} = 1 \\ 0 & \text{se } \varsigma_{(ji)} = 0 \\ -u_{0(i)} & \text{se } \varsigma_{(ji)} = -1 \end{cases} \quad (37)$$

Assim, o sistema saturado poder ser escrito genericamente como um sistema linear com uma perturbação aditiva, como a seguir (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 1999):

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_{(j)}x(t) + p_{(j)} + B_r r(t) + B_d d(t), \quad j = 1 \dots, 3^m \quad (38)$$

com  $\bar{A}_{(j)} = (A + B \text{diag}\{1_m - |\varsigma_{(j)}|\}K)$  e  $p_{(j)} = u(\varsigma_{(i)})$ .

### 3.8 Pontos de Equilíbrio em Sistemas Sujeitos à Saturação

A presença da saturação pode levar o sistema a equilíbrios onde os objetivos de projeto não são satisfeitos, invalidando todo o projeto do controlador. A fim de evitar que isto aconteça, é interessante forçar que estes pontos de equilíbrio não existam ou estejam fora dos domínios de estabilidade do sistema. No caso de um sistema não linear qualquer, considerações importantes sobre seus pontos de equilíbrio podem ser encontradas em (KHALIL, 1992).

Considerando o modelo por regiões de saturação, os pontos de equilíbrio do sistema (38) para  $r(t) = 0$  e  $d(t) = 0$  podem ser calculados a partir de

$$x_e = \bar{A}_{(j)}^{-1} p_{(j)}, \quad j = 1 \dots, 3^m.$$

O ponto de equilíbrio  $x_e$  será efetivamente um ponto de equilíbrio do sistema (38) se, para uma dada região de saturação  $j$ , este ponto de equilíbrio encontra-se realmente no interior desta região (GOMES DA SILVA Jr., 1997). Este teste torna-se uma maneira prática de verificar se um dado ponto de equilíbrio é realmente um ponto de equilíbrio do sistema saturado.

Em (SUAREZ; ALVAREZ; J., 1995), são estabelecidas algumas condições genéricas para a existência de pontos de equilíbrio do sistema SISO

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B \text{sat}_{u_0} u(t) \\ u(t) &= Kx(t), \end{aligned} \quad (39)$$

resumidas no Lema a seguir:

**Lema 3.8.1** *Considere o par  $(A, B)$  controlável e ainda  $n_u$  o número de autovalores de  $A \in \mathbb{R}^n$  com parte real positiva. Então o seguinte pode ser afirmado sobre os pontos de equilíbrio de (39):*

- *Se  $A$  é inversível e ainda se  $n_u$  é ímpar, então (39) possui três pontos de equilíbrio, sendo um deles estável e dois pontos de sela, no caso  $n_u < n$ . No caso  $n_u = n$ , os equilíbrios são um estável e dois instáveis;*
- *Se  $A$  é inversível e ainda se  $n_u$  é par, então (39) possui um único ponto de equilíbrio, estável;*
- *Se  $\det(A) = 0$ , então (39) possui um único ponto de equilíbrio, estável.*

No caso multivariável, a caracterização dos pontos de equilíbrio do sistema é mais complexa. Este tipo de problema envolve a existência de bifurcações não-diferenciáveis, onde um ponto de equilíbrio desaparece quando este colide com algum dos limites de saturação. Maiores detalhes sobre a teoria de bifurcações podem ser encontrados em (ALONSO et al., 2004).

### 3.9 Comentários Finais

Neste capítulo foi apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre sistemas sujeitos a saturação, mostrando, sempre que possível, a sua relação com os objetivos deste trabalho. Baseado num sistema genérico, foram caracterizados os problemas de síntese, análise e tolerância a perturbações. O maior destaque foi dado ao problema de seguimento

de referências, expandindo e atualizando alguns dos métodos apresentados em (REGI-NATTO, 2000). Além disso, alguns modelos de saturação foram melhor caracterizados, já que estes têm papel fundamental na conservatividade das soluções mostradas. Por fim, foi apresentado um breve estudo sobre os pontos de equilíbrio em sistemas saturados, estudo este que será particularizado no Capítulo 6.

## 4 PROBLEMA DE SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM SISTEMAS SUJEITOS À SATURAÇÃO: CASO CONTÍNUO

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será mostrado um dos resultados principais deste trabalho. A idéia básica é aplicar a condição de setor modificada de (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2005) para modelar os efeitos da saturação no esquema de controle proposto em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e posteriormente analisado em (CAO; LIN; WARD, 2004). Através de formulação LMI, o objetivo é calcular o controlador e o ganho *anti-windup* em um único passo, evitando assim soluções iterativas. Além disso, estimativas do domínio de estabilidade e do conjunto de perturbações admissíveis são apresentadas.

Este capítulo é baseado em duas seções principais. Na primeira delas, o esquema de controle proposto por (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) é utilizado em sua íntegra, no que é chamado de “Integradores Inteligentes”, seguindo a nomenclatura adotada inicialmente em (KRIKELIS, 1980). Na seção seguinte, este esquema é simplificado na chamada abordagem “Clássica”. O capítulo será encerrado com alguns exemplos numéricos e comentários finais.

É importante ressaltar que os desenvolvimentos aqui apresentados estão resumidos no trabalho (FLORES; ECKHARD; GOMES DA SILVA JR, 2008).

### 4.2 Abordagem “Integradores Inteligentes”

#### 4.2.1 Formulação geral

Considere o sistema linear, invariante no tempo, descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_d d \\ y(t) = Cx(t) \\ e(t) = y(t) - r \end{cases} \quad (40)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é a saída do sistema,  $d \in \mathbb{R}^k$  é um vetor de perturbações constantes,  $r \in \mathbb{R}^p$  é um vetor referências constantes que deseja-se seguir e  $e(t) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $B_d$  são constantes e de dimensões compatíveis. O vetor de saturação é dado por

$$\text{sat}_{u_0(i)}(u_{(i)}(t)) \triangleq \text{sign}(u_{(i)}(t)) \min(|u_{(i)}(t)|, u_{0(i)}), \forall i = 1, \dots, m. \quad (41)$$

Sobre este sistema, as seguintes hipóteses serão feitas:

**A1** O par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(C, A)$  é observável;

**A2** A condição (YOUNG; WILLEMS, 1972)

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p$$

é verificada;

**A3** Matrizes  $B$  e  $C$  possuem posto completo;

**A4** O número de entradas é maior ou igual ao número de saídas ( $m \geq p$ ).

Caso a suposição A1 não seja atendida, basta que se aplique uma transformação de similaridade no sistema, separando a parte controlável e observável da parte que não pode ser alterada. A suposição A2 força que a função de transferência do sistema não possua zeros de transmissão na origem. Caso isto não se verifique, a adição de um integrador não garantirá o seguimento de referências constantes. As suposições A3 e A4 garantem que não há combinação linear entre as colunas ou linhas das matrizes  $B$  e  $C$  e entre as saídas do sistema.

A fim de garantir o seguimento de referências constantes com erro nulo em regime permanente, faz-se necessária a introdução de uma ação integral à malha de controle. Esta adição se justifica pelo princípio do modelo interno, apresentado na Seção 2.2.3. Isto é obtido com a introdução do estado adicional  $\xi(t) \in \mathbb{R}^p$ , definido como

$$\dot{\xi}(t) = e(t) + E_c(\text{sat}_{v_0}(v(t)) - v(t)), \quad (42)$$

onde  $v(t) \in \mathbb{R}^p$  é uma entrada de controle adicional que pode ser utilizada com o intuito de melhorar a performance do sistema em malha fechada. A estratégia adotada não permite que o limite de saturação  $v_0$  seja calculado durante o problema de síntese, mas sua influência pode ser analisada *a posteriori*. O termo  $E_c(\text{sat}_{v_0}(v(t)) - v(t))$  foi adicionado a fim de corrigir quaisquer efeitos indesejáveis causados pela saturação dos atuadores. A matriz  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é conhecida como matriz de ganho *anti-windup* e o valor de  $v_0$  pode ser escolhido como um parâmetro de projeto.

Seguindo a formulação proposta em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), é introduzida a mudança de coordenadas do sistema para as chamadas coordenadas de erro (KRIKELIS; BARKAS, 1984). Nestas coordenadas, o novo vetor de estados é definido como

$$z(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} \quad (43)$$

onde  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$  é dado por  $x_2(t) = M_1 x(t)$  e  $M_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  é escolhida de tal forma que

$$M_2 = \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

seja não-singular.

A partir de (40), pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CB\text{sat}_{u_0}(u(t)) + CB_d d \\ \dot{x}_2(t) &= M_1 Ax(t) + M_1 B\text{sat}_{u_0}(u(t)) + M_1 B_d d \end{aligned}$$

Estas relações podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} Ax(t) + \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} B_d d$$

ou, partindo do fato que  $M_2 = [C^T \ M_1^T]^T$  é inversível, como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} Cx(t) \\ M_1 x(t) \end{bmatrix} + M_2 B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + M_2 B_d d.$$

Devido ao fato de  $Cx(t) = e(t) + r$  e  $x_2(t) = M_1 x(t)$ , a relação anterior é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} e(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + M_2 B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} r + M_2 B_d d. \quad (44)$$

ou, após a composição com (42) afim de formar  $z(t)$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & 0 \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ x_2(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_2 B \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}_{v_0}(v(t)) \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ E_c \end{bmatrix} (\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)) + \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} E \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} M_2 B_d \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (45)$$

Assim, nestas coordenadas, o sistema original (40) pode ser reescrito como

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_2 (\text{sat}_{v_0}(v(t)) - v(t)) + \mathbf{B}_3 q \quad (46)$$

de tal forma que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & 0_{n \times p} \\ E^T & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} M_2 B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ E_c \end{bmatrix} = \mathbf{V} E_c, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(n-p) \times p} \end{bmatrix} \text{ e } q = M_2 A M_2^{-1} E r + M_2 B_d d$$

Nota-se que, pelas suposições A1-A3, o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  também é controlável.

**Observação 4.2.1** *É importante notar que o novo vetor de influências externas  $q$  é agora uma combinação entre o sinal de referência e a perturbação agindo no sistema. Em (CAO; LIN; WARD, 2004) as matrizes  $M_2 A M_2^{-1} E$  e  $M_2 B_d$  são incorporadas à matriz  $\mathbf{B}_3$ , deixando  $q = [r^T \ d^T]^T$ . Este tipo de solução provoca uma dificuldade adicional na composição das LMIs, já que é necessária a existência da pseudo-inversa pela esquerda de  $\mathbf{B}_3$ . Esta pseudo-inversa pode não existir, dependendo das matrizes  $A$ ,  $M_2$  e  $B_d$ . Conservando a formulação proposta em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), a matriz  $\mathbf{B}_3$  possui a desejável propriedade de  $\mathbf{B}_3^T \mathbf{B}_3 = I_n$ .*

**Observação 4.2.2** *Se  $E_c$  for considerado nulo, então a evolução de  $\xi(t)$  se dá como uma ação integral pura, definida em (KRIKELIS; BARKAS, 1984). O modelo conhecido como integradores inteligentes proposto em (KRIKELIS; BARKAS, 1984) considera  $v(t) = \xi(t) = [0 \ I_p]z(t)$ , ou seja,*

$$\dot{\xi}(t) = e(t) + E_c (\text{sat}_{v_0}(\xi(t)) - \xi(t)).$$

A fim de estabilizar o sistema (46), as seguintes realimentações estáticas de estados serão utilizadas:

$$u(t) = F_1 z(t), \quad F_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)} \quad (47)$$

$$v(t) = F_2 z(t), \quad F_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}. \quad (48)$$

A partir desta realimentação, o sistema (46) pode ser escrito na forma

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(F_1 z(t)) + \mathbf{B}_2 (\text{sat}_{v_0}(F_2 z(t)) - F_2 z(t)) + \mathbf{B}_3 q \quad (49)$$

ou, após somar e subtrair  $F_1 z(t)$  no lado direito da equação, por

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F_1)z(t) + \mathbf{B}_1 (\text{sat}_{u_0}(F_1 z(t)) - F_1 z(t)) + \mathbf{B}_2 (\text{sat}_{v_0}(F_2 z(t)) - F_2 z(t)) + \mathbf{B}_3 q. \quad (50)$$

Utilizando a não-linearidade zona-morta descentralizada (9), o sistema (50) é dado por

$$\dot{z}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F_1)z(t) - \mathbf{B}_1 \Psi_{u_0}(F_1 z(t)) - \mathbf{B}_2 \Psi_{v_0}(F_2 z(t)) + \mathbf{B}_3 q. \quad (51)$$

ou ainda, por

$$\dot{z}(t) = \mathbb{A}z(t) - \mathbf{B}_1 \Psi_{u_0}(F_1 z(t)) - \mathbf{B}_2 \Psi_{v_0}(F_2 z(t)) + \mathbf{B}_3 q, \quad (52)$$

onde  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F_1$ . O esquema de controle utilizado é ilustrado na Figura 10.

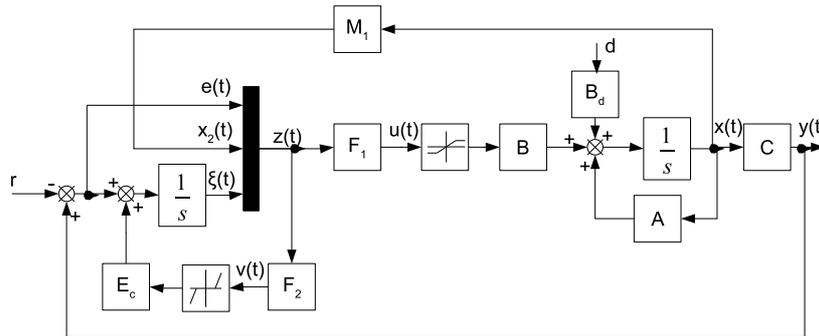


Figura 10: Esquema de Controle: “Integradores Inteligentes”

#### 4.2.2 Propriedades dos pontos de equilíbrio

A transformação do sistema de coordenadas para as coordenadas do erro se justifica por algumas propriedades especiais dos pontos de equilíbrio do sistema. Os resultados desta seção são uma compilação dos resultados de (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000).

Como um dos objetivos de controle é garantir o seguimento de referências com erro nulo, o ponto de equilíbrio  $z_e$  do sistema (52) deve ser da forma

$$z_e = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2e} \\ \xi_e \end{bmatrix}. \quad (53)$$

As condições para existência deste tipo de ponto de equilíbrio podem ser resumidas no lema a seguir:

**Lema 4.2.1** *Suponha  $\mathbb{A}$  Hurwitz e considere os conjuntos  $S(F_1, u_0)$  e  $S(F_2, v_0)$  dados por*

$$S(F_1, u_0) \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; |F_1 z| \leq u_0\} \quad (54)$$

$$S(F_2, v_0) \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; |F_2 z| \leq v_0\}. \quad (55)$$

*Então, existe um ponto de equilíbrio na forma (53) no interior da intersecção das regiões lineares do sistema, isto é,  $z_e \in S(F_1, u_0) \cap S(F_2, v_0)$ .*

*Prova.* No ponto de equilíbrio, o sistema (52) satisfaz

$$0 = \mathbb{A}z_e - \mathbf{B}_1 \Psi_{u_0}(F_1 z_e) - \mathbf{B}_2 \Psi_{v_0}(F_2 z_e) + \mathbf{B}_3 d$$

ou, baseado nas matrizes de transformação do sistema,

$$0 = M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(F_1 z_e) + M_2 B_d d + M_2 A M_2^{-1} E r \quad (56)$$

$$0 = E^T \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + E_c (\text{sat}_{v_0}(F_2 z_e) - F_2 z_e). \quad (57)$$

Suponto  $E_c \neq 0$ , para que o erro em equilíbrio seja nulo, a relação (57) força que  $\text{sat}_{v_0}(F_2 z_e) = F_2 z_e$ , isto é, que  $z_e \in S(F_2, v_0)$ . A relação (56) pode descrever até  $3^m$  regiões de saturação em  $\mathbb{R}^{n+p}$  (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 1999), levando assim a, no máximo,  $3^m$  pontos de equilíbrio (vide Seção 3.8). Estes pontos de equilíbrio podem ser localmente estudados em termos de existência mas, a fim de simplificar este estudo, serão considerados apenas os pontos de equilíbrio no interior da região linear  $S(F_1, u_0)$ . Assim, o equilíbrio na forma (53) estará contido em  $S(F_1, u_0) \cap S(F_2, v_0)$ . ■ Na região linear, o sistema (52) é representado pela dinâmica

$$\dot{z}(t) = \mathbb{A}z(t) + \mathbf{B}_3 q, \quad (58)$$

o que leva ao seguinte ponto de equilíbrio

$$z_e = -\mathbb{A}^{-1} \mathbf{B}_3 q. \quad (59)$$

Em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) prova-se que este ponto de equilíbrio é o único ponto de equilíbrio no interior da região linear. Pontos de equilíbrio fora desta região e que não garantem seguimento não foram considerados pelos autores. Um breve estudo sobre estes pontos de equilíbrio é mostrado no Capítulo 6.

A fim de garantir  $z_e \in S(F_1, u_0) \cap S(F_2, v_0)$ , as restrições

$$\left| -F_{1(i)}(\mathbb{A}^{-1} \mathbf{B}_3 q) \right| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (60)$$

$$\left| -F_{2(g)}(\mathbb{A}^{-1} \mathbf{B}_3 q) \right| \leq v_{0(g)} \quad g = 1, \dots, p \quad (61)$$

devem ser verificadas para todo sinal de referência/perturbação  $q$ . Estas relações serão incorporadas nas condições teóricas para a síntese do controlador na forma de relações matriciais, como será mostrado na Seção 4.2.4.

### 4.2.3 Formulação do problema

Considere  $\mathcal{Z}_0$  o conjunto de condições iniciais admissíveis e  $\mathcal{Q}_0$  o conjunto de referências/perturbações admissíveis para o sistema (52). Baseado nestes conjuntos, o seguinte problema é formulado:

**Problema 4.2.1** *Calcular simultaneamente os ganhos do controlador  $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e o ganho anti-windup  $E_c$  tais que,  $\forall z(0) \in \mathcal{Z}_0$  e  $\forall r, d$  tais que  $q \in \mathcal{Q}_0$ , para o sistema (52), o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  seja localmente assintoticamente estável e ainda  $y(t) \rightarrow r$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Um problema de otimização implícito no Problema 4.2.1 é determinar  $F_1$ ,  $F_2$  e  $E_c$  tais que os conjuntos admissíveis  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{Q}_0$  sejam maximizados. Neste caso, os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{Q}_0$  serão considerados os conjuntos elipsoidais definidos por

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \Omega(P, \nu) = \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; z^T P z \leq \nu\}, P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}, \nu > 0 \in \mathbb{R} \\ \mathcal{Q}_0 &= \Omega(R, \sigma) = \{q \in \mathbb{R}^n; q^T R q \leq \sigma\}, R = R^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \sigma > 0 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

### 4.2.4 Resultado principal

Considere as matrizes  $G_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $G_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$ , os conjuntos  $S(F_1 - G_1, u_0)$  e  $S(F_2 - G_2, v_0)$  definidos por

$$\begin{aligned}S(F_1 - G_1, u_0) &\triangleq \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; |(F_{1(i)} - G_{1(i)})z| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \\ S(F_2 - G_2, v_0) &\triangleq \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; |(F_{2(g)} - G_{2(g)})z| \leq v_{0(g)}, g = 1, \dots, p\}\end{aligned}$$

e a função candidata de Lyapunov quadrática

$$V(z(t)) = z(t)^T P z(t). \quad (62)$$

Baseado nestas matrizes, o seguinte teorema pode ser enunciado:

**Teorema 4.2.1** *Se existem matrizes simétricas positivas definidas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$ ,  $X_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , matrizes diagonais positivas definidas  $L_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $L_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  e os escalares positivos  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  satisfazendo<sup>1</sup>*

$$\begin{bmatrix} WA^T + AW + B_1 Y_1 + Y_1^T B_1^T + \lambda W & * & * & * & * \\ -L_1 B_1^T + X_1^T & -2L_1 & * & * & * \\ -M V^T + X_2^T & 0 & -2L_2 & * & * \\ B_3^T & 0 & 0 & -\omega R & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \sigma - \lambda \nu \end{bmatrix} < 0 \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{1(i)} - X_{1(i)}^T & \nu^{-1} u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{2(g)} - X_{2(g)}^T & \nu^{-1} v_{0(g)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, g = 1, \dots, p \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -B_3 B_3^T (AW + B_1 Y_1) \\ -(AW + B_1 Y_1)^T B_3 B_3^T \\ B_3^T \\ Y_{1(i)} \end{pmatrix} & * & * \\ \omega R & * & * \\ 0 & (\omega \sigma)^{-1} u_{0(i)}^2 & * \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, m \quad (66)$$

<sup>1</sup>Os elementos \* são escolhidos de forma a manter a simetria das matrizes.

e

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T(\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y_1) \\ -(\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y_1)^T\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ Y_{2(g)} \end{pmatrix} & * & * \\ \omega R & * & * \\ 0 & (\omega\sigma)^{-1}v_{0(g)}^2 & * \end{bmatrix} \geq 0, \quad g = 1, \dots, p \quad (67)$$

então os ganhos  $F_1 = Y_1W^{-1}$ ,  $F_2 = Y_2W^{-1}$  e  $E_c = ML_2^{-1}$  são tais que,  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$ , o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  é um domínio positivamente invariante para o sistema (52) e (59) é o único ponto de equilíbrio na forma (53) no interior de  $S(F_1, u_0) \cap S(F_2, v_0)$ .

*Prova.* Calculando a derivada temporal da função (62) ao longo das trajetórias do sistema (52), tem-se<sup>2</sup>

$$\dot{V}(z) = z^T(\mathbb{A}^T P + P\mathbb{A})z - 2z^T P\mathbf{B}_1\Psi_{u_0}(F_1z) - 2z^T P\mathbf{B}_2\Psi_{v_0}(F_2z) + 2z^T P\mathbf{B}_3q,$$

onde  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1F_1$ . Usando agora as condições de setor modificadas  $\Psi_{u_0}(F_1z)T_1[\Psi_{u_0}(F_1z) - G_1z] \leq 0$  e  $\Psi_{v_0}(F_2z)T_2[\Psi_{v_0}(F_2z) - G_2z] \leq 0$ , segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq \dot{V}(z) - 2\Psi_{u_0}(F_1z)T_1\Psi_{u_0}(F_1z) + 2\Psi_{u_0}(F_1z)T_1G_1z - 2\Psi_{v_0}(F_2z)T_2\Psi_{v_0}(F_2z) \\ &\quad + 2\Psi_{v_0}(F_2z)T_2G_2z, \quad \forall z \in S(F_1 - G_1, u_0) \cap S(F_2 - G_2, v_0). \end{aligned} \quad (68)$$

O conjunto  $\Omega(P, \nu)$  será positivamente invariante  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$  se for garantido que  $\dot{V}(z)$  seja negativa-definida para todo  $z$  e  $q$  tais que  $z^T Pz = \nu$  e  $q^T Rq \leq \sigma$ . Usando o *S-procedure* (vide Apêndice A.0.3), isto pode ser obtido caso existam os escalares positivos  $\lambda$  e  $\omega$  tais que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq z^T(\mathbb{A}^T P + P\mathbb{A})z - 2z^T[-P\mathbf{B}_1 + G_1^T T_1]\Psi_{u_0}(F_1z) - 2\Psi_{u_0}(F_1z)^T T_1\Psi_{u_0}(F_1z) \\ &\quad - 2z^T[-P\mathbf{B}_2 + G_2^T T_2]\Psi_{v_0}(F_2z) - 2\Psi_{v_0}(F_2z)^T T_2\Psi_{v_0}(F_2z) + 2z^T P\mathbf{B}_3q \\ &\quad + \lambda(z^T Pz - \nu) + \omega(\sigma - q^T Rq) < 0 \end{aligned}$$

e  $\Omega(P, \nu) \subset S(F_1 - G_1, u_0) \cap S(F_2 - G_2, v_0)$ .

Esta relação pode ser escrita na forma matricial como

$$\dot{V}(z) \leq \begin{bmatrix} z^T & \Psi_{u_0}(F_1z)^T & \Psi_{v_0}(F_2z)^T & q^T & I \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} z(t) \\ \Psi_{u_0}(F_1z) \\ \Psi_{v_0}(F_2z) \\ q \\ I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P + P\mathbb{A} + \lambda P & -P\mathbf{B}_1 + G_1^T T_1 & -P\mathbf{B}_2 + G_2^T T_2 & P\mathbf{B}_3 & 0 \\ * & -2T_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2T_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\omega R & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda\nu + \omega\sigma \end{bmatrix}.$$

Como trata-se de uma relação quadrática, basta que  $\mathcal{M}$  seja negativa definida para garantir-se que  $\dot{V}(z)$  também o seja. Relembrando que  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{V}E_c$  e que  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1F_1$ ,

<sup>2</sup>Para fins de prova, a dependência temporal de  $z(t)$  foi omitida.

basta pré e pós-multiplicar  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{P^{-1}, T_1^{-1}, T_2^{-1}, I, I\}$  e considerar a mudança de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $X_1 = P^{-1}G_1^T$ ,  $X_2 = P^{-1}G_2^T$ ,  $Y_1 = F_1P^{-1}$ ,  $Y_2 = F_2P^{-1}$ ,  $L_1 = T_1^{-1}$ ,  $L_2 = T_2^{-1}$  e  $M = E_cT_2^{-1}$  para concluir que  $\mathcal{M} < 0$  é equivalente à relação (63).

As relações (64) e (65) garantem a inclusão de  $z(t)$  na região onde a condição de setor modificada se verifica, isto é,  $z(t) \in S(F_1 - G_1, u_0) \cap S(F_2 - G_2, v_0)$ . A relação (64), após pré e pós-multiplicação por  $\text{diag}\{P, I\}$  e a substituição de variáveis, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P & * \\ F_{1(i)} - G_{1(i)} & \nu^{-1}u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (69)$$

a qual, após a aplicação do complemento de Schur, é equivalente a

$$P - (F_{1(i)} - G_{1(i)})^T \frac{\nu}{u_{0(i)}^2} (F_{1(i)} - G_{1(i)}) \geq 0.$$

Segue então,  $\forall z$ , que

$$z^T P z - z^T (F_{1(i)} - G_{1(i)})^T \frac{\nu}{u_{0(i)}^2} (F_{1(i)} - G_{1(i)}) z \geq 0 \quad (70)$$

ou, ainda

$$z^T (F_{1(i)} - G_{1(i)})^T \frac{\nu}{u_{0(i)}^2} (F_{1(i)} - G_{1(i)}) z \leq z^T P z.$$

Pela definição do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ , sabe-se que,  $\forall z \in \Omega(P, \nu)$ ,

$$z^T (F_{1(i)} - G_{1(i)})^T \frac{\nu}{u_{0(i)}^2} (F_{1(i)} - G_{1(i)}) z \leq z^T P z \leq \nu,$$

relação esta, que é equivalente a

$$z^T (F_{1(i)} - G_{1(i)})^T (F_{1(i)} - G_{1(i)}) z \leq u_{0(i)}^2 \quad (71)$$

de onde conclui-se que (64) garante  $\Omega(P, \nu) \subset S(F_1 - G_1, u_0)$ . De maneira análoga, (65) garante  $\Omega(P, \nu) \subset S(F_2 - G_2, v_0)$

As relações (66) e (67) garantem que o equilíbrio está no interior da interseção das regiões de linearidade do sistema. Como mostrado na Seção 4.2.2, nesta região existe um único ponto de equilíbrio e este ponto de equilíbrio garante erro nulo de seguimento de referência para qualquer  $q \in \Omega(R, \sigma)$ . A seguir, será mostrada a prova da relação (66) apenas, já que a prova da relação (67) pode ser obtida de forma análoga. Esta prova é a versão completa da prova apresentada em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000).

Substituindo-se  $P^{-1} = W$  e  $P^{-1}F_1 = Y_1$ , a relação (66) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(\mathbb{A}^T \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T - \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T \mathbb{A})P^{-1} & * & * \\ \mathbf{B}_3^T & \omega R & * \\ P^{-1}F_{1(i)} & 0 & (\omega\sigma)^{-1}u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (72)$$

ou, após a aplicação do complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} -P^{-1}(\mathbb{A}^T \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T - \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T \mathbb{A})P^{-1} - \omega^{-1} \mathbf{B}_3 R^{-1} \mathbf{B}_3^T & * \\ P^{-1}F_{1(i)} & (\omega\sigma)^{-1}u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (73)$$

Caso o complemento de Schur seja novamente aplicado à relação (73) e esta for multiplicada pelo escalar positivo  $\omega^{-1}$ , tem-se

$$-\omega^{-1}P^{-1}[\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T + \mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}]P^{-1} - \omega^{-2}\mathbf{B}_3R^{-1}\mathbf{B}_3^T - P^{-1}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}P^{-1} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (74)$$

Considere agora a relação quadrática  $(P^{-1}\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3 + \omega^{-1}\mathbf{B}_3R^{-1})R(\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}P^{-1} + R^{-1}\mathbf{B}_3^T) \geq 0$ , a qual é equivalente a

$$P^{-1}\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3R\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}P^{-1} \geq -\omega^{-1}P^{-1}\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}P^{-1} - \omega^{-1}P^{-1}\mathbf{B}_3\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}P^{-1} - \omega^{-2}\mathbf{B}_3R^{-1}\mathbf{B}_3^T. \quad (75)$$

Baseado na relação (75), segue diretamente que, se a relação (74) é verificada, então

$$P^{-1}\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3R\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}P^{-1} - P^{-1}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}P^{-1} \geq 0. \quad (76)$$

também será verificada. Pré e pós-multiplicando a relação acima por  $P$ , tem-se

$$\mathbb{A}^T\mathbf{B}_3R\mathbf{B}_3^T\mathbb{A} - F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)} \geq 0. \quad (77)$$

Seguindo a mesma metodologia utilizada na prova de (64) e lembrando que  $\mathbf{B}_3^T\mathbf{B}_3 = I_n$ , a relação (77) pode ser convertida em um termo quadrático da forma

$$q^TRq - q^T\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}^{-T}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{B}_3q \geq 0$$

ou ainda,

$$q^T\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}^{-T}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{B}_3q \leq q^TRq.$$

Pela definição do elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$ , tem-se,  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$ ,

$$q^T\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}^{-T}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{B}_3q \leq q^TRq \leq \sigma,$$

relação esta, que é equivalente a

$$q^T\mathbf{B}_3^T\mathbb{A}^{-T}F_{1(i)}^T\frac{\sigma}{u_{0(i)}^2}F_{1(i)}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{B}_3q \leq u_{0(i)}^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (78)$$

Logo, prova-se que  $z_e \in S(F_1, u_0)$  é equivalente a verificar a relação (66). A prova da relação (67) é análoga. ■

Em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) é apresentada uma forma alternativa para a relação (66). A grande vantagem desta relação é que ela independe de  $F_1$ , apresentando assim resultados menos conservativos. Esta outra forma para a relação (66) será utilizada nas seções a seguir, resumida no seguinte lema:

**Lema 4.2.2** (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) *O ponto de equilíbrio  $z_e$  está no interior da região  $S(F_1, u_0)$  se  $q \in S(\mathcal{F}, u_0)$ , onde  $S(\mathcal{F}, u_0)$  é definida por<sup>3</sup>*

$$S(\mathcal{F}, u_0) \triangleq \{q \in \mathbb{R}^n; |\mathcal{F}_{(i)}q| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m\},$$

<sup>3</sup>O sinal # denota a pseudo-inversa pela direita de uma matriz. Caso a matriz seja quadrada, a pseudo-inversa pode ser substituída pela própria inversa da matriz.

e

$$\mathcal{F} = -[0 \ I_m] \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^\# \mathbf{B}_3. \quad (79)$$

Assim, considerando que  $q \in \Omega(R, \sigma)$ , a relação (66) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} R \\ \mathcal{F}^{(i)} \quad \sigma^{-1} u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (80)$$

*Prova.* O ponto de equilíbrio  $z_e$ , caso exista, satisfaz a relação  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F_1) z_e = -\mathbf{B}_3 q$ , a qual é equivalente a

$$\begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ F_{11} & F_{12} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_3 q$$

onde  $F_1 = [F_{11} \ F_{12}]$ . Da matriz de transformação de coordenadas, tem-se que

$$\begin{bmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix}$$

e, pelas suposições A1 e A2, segue que

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p$$

o que permite a escrita da seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ F_{11} & F_{12} \end{bmatrix} z_e = - \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^\# \mathbf{B}_3 q$$

onde

$$\begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^\# = I_{n+p}.$$

Assim, segue que

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \end{bmatrix} z_e = F_1 z_e = -[0 \ I_m] \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & M_2 B \\ E^T & 0 \end{bmatrix}^\# \mathbf{B}_3 q, \quad (81)$$

o que prova a equivalência entre  $z_e \in S(F_1, u_0)$  e  $q \in S(\mathcal{F}, u_0)$ . A prova da relação (80) é análoga àquela apresentada para a prova das relações (64) e (65) do Teorema 4.2.1. Assim, (80) garante que  $\Omega(R, \sigma) \subset S(\mathcal{F}, u_0)$ , ou seja, que todo  $q$  admissível pertença a  $S(\mathcal{F}, u_0)$ . ■

Baseado nos desenvolvimentos do Teorema 4.2.1 e do Lema 4.2.2, serão apresentados na Seção 4.4 alguns problemas de otimização convexa utilizados no projeto dos controladores.

### 4.3 Abordagem “Clássica”

A chamada abordagem “clássica”, na verdade, é uma simplificação do esquema de controle da seção anterior. O esquema de controle foi alterado de forma que termo de *anti-windup* é calculado agora, em função da entrada de controle original, eliminando a entrada de controle auxiliar  $v(t)$ , ou seja, um laço de *anti-windup* clássico é utilizado. Um

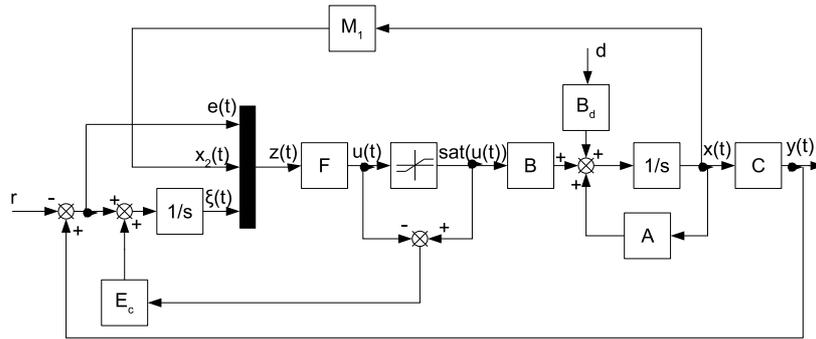


Figura 11: Esquema de Controle: Solução “Clássica”

dos motivos que levaram à eliminação de  $v(t)$  é a falta de um critério claro na escolha de  $v_0$ , normalmente sendo escolhido  $v_0 = u_0$ . Se  $F_1 = F_2$ , um valor menor de  $v_0$  adicionaria um caráter antecipatório à compensação de *windup*. As vantagens desta antecipação pode ser um objetivo para trabalhos futuros. Estas mudanças são ilustradas no esquema de controle da Figura 11.

No que se refere à formulação propriamente dita, a ação integral é introduzida ao sistema como

$$\dot{\xi}(t) = e(t) + E_c(\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)). \quad (82)$$

A representação nas coordenadas do erro é praticamente a mesma, dando origem ao sistema aumentado

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(t)) + \mathbf{B}_2(\text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)) + \mathbf{B}_3 q, \quad (83)$$

o qual pode ser escrito na forma

$$\dot{z} = \mathbb{A}z(t) - \mathbb{B}\Psi_{u_0}(Fz(t)) + \mathbf{B}_3 q \quad (84)$$

onde  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 F$  e  $\mathbb{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ . Neste caso, as considerações feitas sobre os pontos de equilíbrio do sistema continuam válidas, apenas levando em conta o fato de que agora basta que  $z_e \in S(F, u_0)$  e não mais à intersecção das regiões de linearidade. Os resultados desta seção são resumidos no teorema a seguir:

**Teorema 4.3.1** *Se existem matrizes simétricas positivas-definidas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , a matriz diagonal positiva-definida  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e os escalares positivos  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} W\mathbf{A}^T + \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y + Y^T \mathbf{B}_1^T + \lambda W & * & * & * \\ -L\mathbf{B}_1^T - M^T \mathbf{V}^T + X^T & -2L & * & * \\ \mathbf{B}_3^T & 0 & -\omega R & * \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\nu + \omega\sigma \end{bmatrix} < 0 \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & \nu^{-1} u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} R & * \\ \mathcal{F}_{(i)} & \sigma^{-1} u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (86)$$

então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que,  $\forall q \in \Omega(R, \nu)$ , o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  é uma região positivamente invariante para as trajetórias do sistema (84) e  $z_e$  é o único ponto de equilíbrio na forma (53) no interior da região  $S(F, u_0)$ .

*Prova.* A prova deste teorema segue os mesmo passos da prova do Teorema 4.2.1. Por não acrescentar nenhuma novidade quanto ao procedimento de obtenção das relações, esta será omitida. ■

Assim como no caso dos “integradores inteligentes”, uma relação análoga às relações (66) e (67) pode ser obtida a fim de garantir a inclusão de  $z_e$  em  $S(F, u_0)$ . A relação (86) foi escolhida por ser mais simples e menos restritiva, já que esta independe de  $F$ .

**Observação 4.3.1** *É importante notar que esta abordagem reduz o número de relações em  $2p$ , o que é bastante significativo em sistemas com um grande número de entradas e saídas. Esta redução implica em custo computacional e tempo de cálculo dos controladores menor do que aqueles obtidos na abordagem “integradores inteligentes”.*

## 4.4 Problema de Otimização

Baseado nos teoremas das seções anteriores, pode-se formular alguns problemas de otimização a fim de obter os ganhos do controlador e do laço de *anti-windup*. Estes problemas podem ser divididos em dois casos distintos:

### 4.4.1 Domínio de invariância contendo um conjunto conhecido *a priori*

Neste caso, os ganhos  $F_1$ ,  $F_2$  e  $E_c$  deverão ser calculados a fim de garantir que o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  seja um domínio invariante e que  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  contenham as regiões dadas. Em geral, tais regiões podem ser caracterizadas através dos conjuntos poliedrais  $\mathcal{Z}_b = \text{cov}\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$  e  $\mathcal{Q}_b = \text{cov}\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ , onde os vértices  $z_i \in \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $i = 1, \dots, l$  e  $q_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, s$  são conhecidos *a priori*. Assim, basta que as restrições adicionais

$$\begin{bmatrix} \nu & z'_i \\ z_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

e

$$q'_j R q_j \leq \sigma, \quad j = 1, \dots, s$$

sejam satisfeitas.

### 4.4.2 Maximização de $\Omega(P, \nu)$ e $\Omega(R, \sigma)$

Neste caso, o objetivo é calcular  $F_1$ ,  $F_2$  e  $E_c$  de tal forma que o tamanho dos elipsóides  $\Omega(P, \nu)$  e/ou  $\Omega(R, \sigma)$  sejam maximizados. O tamanho dos conjuntos  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  pode ser medido em relação aos conjuntos poliedrais  $\mathcal{Z}_b$  e  $\mathcal{Q}_b$  definidos anteriormente e onde os vértices  $z_i \in \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $i = 1, \dots, l$  e  $q_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, s$  correspondem, neste caso, às direções em que deseja-se maximizá-los. Os conjuntos  $\mathcal{Z}_b$  e  $\mathcal{Q}_b$  são conhecidos como *shape sets*.

Assim, o objetivo do problema de otimização torna-se maximizar  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  a fim de maximizar  $\alpha \mathcal{Z}_b \subset \Omega(P, \nu)$  e  $\beta \mathcal{Q}_b \subset \Omega(R, \sigma)$ . A Figura 12 ilustra este procedimento para a maximização de  $\Omega(P, \nu)$ . Neste exemplo,  $Ra$  pode ser considerado como qualquer restrição nos tamanhos dos elipsóides.

Dois problemas de otimização podem então ser formulados como segue, sendo um deles relativo à abordagem “integradores inteligentes” e outro relativo à abordagem “clássica”:

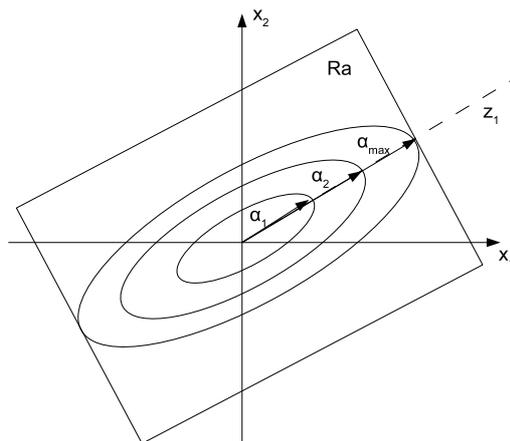


Figura 12: Maximização de  $\alpha Z_b$ .

**PO1:** A fim de comparar os resultados deste capítulo com aqueles apresentados em (CAO; LIN; WARD, 2004), é necessário que algumas restrições sejam impostas nas variáveis  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$ . Neste caso, considera-se  $\omega = \lambda$  e  $\nu = \sigma = 1$ , gerando os elipsóides  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$ . O seguinte problema de otimização convexa pode ser proposto:

$$\begin{aligned}
 & \min (1 - \epsilon)\gamma + \epsilon\delta \\
 & \text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{cc} \gamma & z'_i \\ z_i & W \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \\
 q'_j R q_j \leq \delta, \quad j = 1, \dots, s \\
 \left[ \begin{array}{ccc} W \mathbf{A}^T + \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y_1 + Y_1^T \mathbf{B}_1^T + \lambda W & * & * & * \\ -L_1 \mathbf{B}_1^T + X_1^T & -2L_1 & * & * \\ -M \mathbf{V}^T + X_2^T & 0 & -2L_2 & * \\ \mathbf{B}_3^T & 0 & 0 & -\lambda R \end{array} \right] < 0 \\
 \left[ \begin{array}{cc} W & * \\ Y_{1(i)} - X_{1(i)}^T & u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 \left[ \begin{array}{cc} W & * \\ Y_{2(g)} - X_{2(g)}^T & v_{0(g)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad g = 1, \dots, p \\
 \left[ \begin{array}{cc} R & * \\ \mathcal{F}_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 \left[ \begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{c} -\mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T (\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y_1) \\ -(\mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y_1)^T \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ Y_{2(g)} \end{array} \right) & * & * \\ \lambda R & * & * \\ 0 & \lambda^{-1} v_{0(g)}^2 & \end{array} \right] \geq 0, \\
 g = 1, \dots, p.
 \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{87}$$

**PO2:** Esta é a versão do problema PO1 para a abordagem “clássica”. Seu objetivo principal é mostrar que, mesmo com menos graus de liberdade, o sistema ainda apresenta melhores resultados do que os apresentados (CAO; LIN; WARD, 2004).

$$\min (1 - \epsilon)\gamma + \epsilon\delta$$

$$\text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \gamma & \mathbf{z}'_i \\ \mathbf{z}_i & W \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ \mathbf{q}'_j R \mathbf{q}_j \leq \delta, \quad j = 1, \dots, s \\ \left[ \begin{array}{ccc} W \mathbf{A}^T + \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y + Y^T \mathbf{B}_1^T + \lambda W & * & * \\ -L \mathbf{B}_1^T - M^T \mathbf{V}^T + X^T & -2L & * \\ & \mathbf{B}_3^T & 0 \quad -\lambda R \end{array} \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \left[ \begin{array}{cc} R & * \\ \mathcal{F}_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (88)$$

Em todos os casos, considerando  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$  e  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ , a minimização de  $\gamma$  e  $\delta$  implica na maximização de  $\alpha$  e  $\beta$ . O escalar  $0 \leq \epsilon \leq 1$  pode ser escolhido a fim de priorizar a maximização de  $\Omega(P, \nu)$  ou  $\Omega(R, \sigma)$ . Na solução destes problemas de otimização, será utilizado um *grid* em relação à variável  $\lambda$ . Assim, todas as relações utilizadas tornam-se LMIs.

A maximização da referência admissível está relacionada aos elipsóides  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  de forma distinta. Para o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ , esta referência, na verdade, é uma condição inicial do sistema. É fácil de notar que, caso  $x_2 = 0$  e  $\xi = 0$ , a condição inicial nas coordenadas do erro será

$$z(0) = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, basta que o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  seja maximizado em  $\mathcal{Z}_b = \text{cov}\{\mathbf{z}_1\}$ ,  $\mathbf{z}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , para que a referência também seja maximizada. Após calculada a matriz  $P$ , pode-se determinar a máxima referência, para o caso SISO e considerando  $x_2(0) = 0$  e  $\xi = 0$ , da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} -r & 0 & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq 1 \Rightarrow r P(1, 1) r \leq 1 \Rightarrow r \leq \frac{\pm 1}{\sqrt{P(1, 1)}}.$$

Para o elipsóide  $\Omega(R, \nu)$ , basta que este seja maximizado em  $\mathcal{Q}_b = \text{cov}\{\mathbf{q}_1\}$ ,  $\mathbf{q}_1 = [(M_2 A M_2^{-1} E)^T \ 0]^T$  para que a referência seja maximizada. O procedimento para a obtenção desta referência é análogo ao anterior, considerando apenas a matriz  $R$  em vez da matriz  $P$ .

Diferentemente da máxima referência admissível, a condição inicial dos estados do sistema ( $x_2(0)$ ) está exclusivamente relacionada ao tamanho do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ . Tendo

a matriz  $P$  calculada para algum dos problemas de otimização acima,  $x_2(0)$  pode ser determinado, para uma referência desejada  $r_d$  e  $\xi = 0$ , através de

$$\begin{bmatrix} r_d^T & x_2(0)^T & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} r_d \\ x_2(0) \\ 0 \end{bmatrix} \leq 1.$$

Tendo  $x_2(0)$  calculado, a determinação de  $x(0)$  pode ser feita diretamente, através da matriz  $M_1$ .

## 4.5 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados exemplos numéricos com a finalidade de ilustrar algumas propriedades importantes dos desenvolvimentos deste capítulo. Quando possível, é através destes exemplos que será mostrado que os resultados obtidos são menos conservativos do que aqueles apresentados em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e (CAO; LIN; WARD, 2004). A seção será dividida em três partes, cada uma delas apresentando objetivos de controle distintos: maximização da referência, maximização do conjunto das condições iniciais e maximização da perturbação.

Os exemplos utilizados nesta seção são os seguintes:

**Integrador Duplo:** Este exemplo é o conhecido caso de dois integradores em cascata apresentado em (TYAN; BERNSTEIN, 1995) e posteriormente estudado em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e (CAO; LIN; WARD, 2004). Este exemplo será a base de comparação entre as metodologias propostas neste capítulo e aquelas apresentadas na literatura. Sua representação no espaço de estados é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], \text{ e } u_0 = 0.3.$$

Quando necessário, o valor dos limites da entrada de controle adicional  $v(t)$  serão considerados iguais aos limites da entrada de controle  $u(t)$ , ou seja,  $v_0 = u_0 = 0.3$ . Por simplicidade,  $M_1 = [0 \ 1]$ , o qual leva a  $M_2 = I_2$ . O integrador duplo possui uma propriedade muito interessante: devido ao fato de  $M_2 A M_2^{-1} E = 0$ , a referência  $r$  não influencia no elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$ . Isto implica que a máxima referência admissível é definida unicamente por  $\Omega(P, \nu)$  e ainda que  $\Omega(R, \nu)$  define exclusivamente a máxima perturbação admissível.

**Planta Estável:** Para este caso, foi considerada uma planta estável em malha-aberta dada por

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

Novamente,  $M_1 = [0 \ 1]$  tal que  $M_2 = I_2$ . É importante notar que este exemplo não apresenta a propriedade de  $M_2 A M_2^{-1} E = 0$ . Com isto, a máxima referência admissível será o menor valor entre a referência determinada por  $\Omega(P, \nu)$  e aquela determinada por  $\Omega(R, \sigma)$ . Este exemplo será utilizado para mostrar a existência de pontos de equilíbrio indesejáveis no interior de  $\Omega(P, \nu)$ .

**Planta Instável:** Considere a planta com um pólo instável dada por

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

Como nos outros exemplos,  $M_1 = [0 \ 1]$  tal que  $M_2 = I_2$ . Esta planta será utilizada para mostrar que a abordagem proposta é capaz de estabilizar o sistema, garantir seguimento de referência e ainda rejeitar perturbações constantes.

**Planta Multivariável:** Este exemplo consiste em projetar um controlador para a dinâmica longitudinal do eixo de ataque do avião de caça F-16, apresentado em (SCMITENDORF; SCHIRM, 1991). Sua formulação, no espaço de estados é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.87 & 43.22 \\ 0 & 0.99 & -1.34 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], B = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 17.25 & 1.58 \\ 0.17 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$B_d = -B, u_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}, \text{ e } M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com esta escolha de  $M_1$  tem-se  $M_2 = I_3$ . Os pólos do sistema em malha aberta são  $\{0, -7.6505, 5.4405\}$ , ou seja, pólos na origem, estável e instável, respectivamente.

#### 4.5.1 Maximização da referência admissível

Neste caso, o objetivo de controle é maximizar a referência que o sistema é capaz de seguir com erro nulo. O procedimento para o cálculo desta referência é apresentado na Seção 4.4. A seguir, a referência será maximizada para cada uma das abordagens propostas neste capítulo. Finalmente, um relação entre a máxima referência e a posição dos pólos em malha-fechada será estabelecida, oferecendo assim, um objetivo de controle adicional.

##### 4.5.1.1 “Integradores inteligentes” (POI)

Para a abordagem “integradores inteligentes” foi aplicado o mesmo procedimento usado em (CAO; LIN; WARD, 2004), isto é, dados os controladores  $F_1$ ,  $F_2$  e  $E_c = 1$ , então o problema de otimização convexo foi resolvido com o objetivo de maximizar a referência que o sistema pode seguir. O problema de otimização PO1<sup>4</sup> foi aplicado aos controladores apresentados em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), tanto para a abordagem equações algébricas de Riccati (ARE) quanto para a solução via LMIs. Estes controladores são dados por

$$F_1^{ARE} = [-0.45 \ -0.95 \ -0.10] \quad F_2^{ARE} = [9.51 \ 10.0 \ 4.48] \\ F_1^{LMI} = [-0.28 \ -0.61 \ -0.04] \quad F_2^{LMI} = [3.24 \ 4.997 \ 2.32]$$

e os resultados obtidos são mostrados na Tabela 1. Pode-se notar que os resultados obtidos para o problema PO1 são bem menos conservativos do que aqueles apresentados nas referências. Este mesmo problema foi resolvido considerando  $F_1$  e  $F_2$  livres e  $E_c = 1$ . Neste caso, a máxima referência obtida, considerando  $x_2(0) = 0$  e  $\xi(0) = 0$ , foi  $r_{max} =$

Tabela 1: Maximização da Referência Admissível

Solução	$r_{max}^{ARE}$	$r_{max}^{LMI}$
(TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000)	1.0876	1.7598
(CAO; LIN; WARD, 2004)	1.9777	2.6223
Otimização PO1	4.2225	5.1427

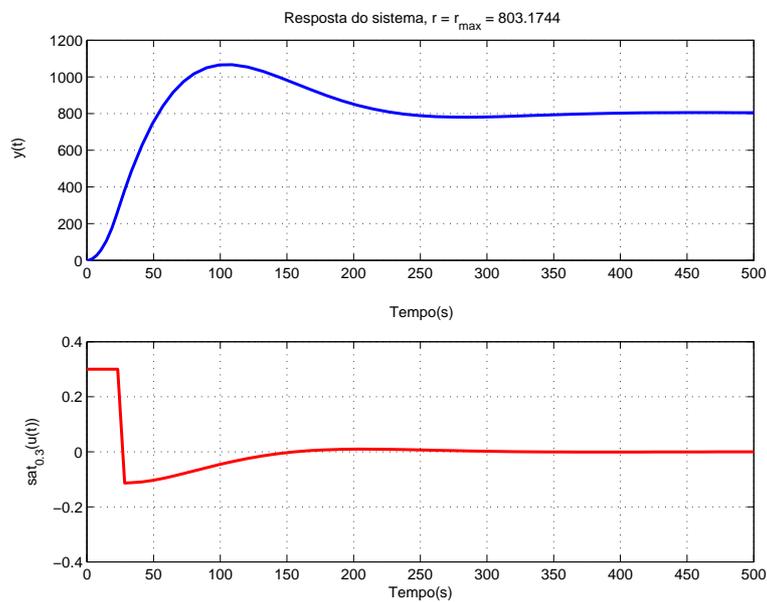


Figura 13: Máxima Referência - PO1

803.1744. A resposta do sistema para esta referência é mostrada na Figura 13. Esta figura tem como objetivo mostrar que o sistema realmente é capaz de seguir uma referência desta amplitude. Além disso, mostra que o sinal de controle permanece saturado por mais de 10% do tempo de acomodação do sistema.

#### 4.5.1.2 Solução “clássica” (PO2)

Como não existe nenhum controlador calculado *a priori*, o problema PO2 foi resolvido utilizando todas as variáveis livres.

Como no caso do integrador duplo a referência é determinada exclusivamente pelo elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ , o problema PO2 foi resolvido considerando  $\epsilon = 0$  e ainda  $\lambda = 6.5 \times 10^{-3}$ . Com isto, os resultados obtidos foram

$$E_c = -1.4020, F = \begin{bmatrix} -0.4168 & -21.6875 & -0.0064 \end{bmatrix}$$

e  $r_{max} = 891.3698$ . Mais uma vez os resultados foram menos conservativos em relação a literatura e ao problema PO1. A verificação da capacidade de seguimento foi feita através de simulações e é mostrada na Figura 14.

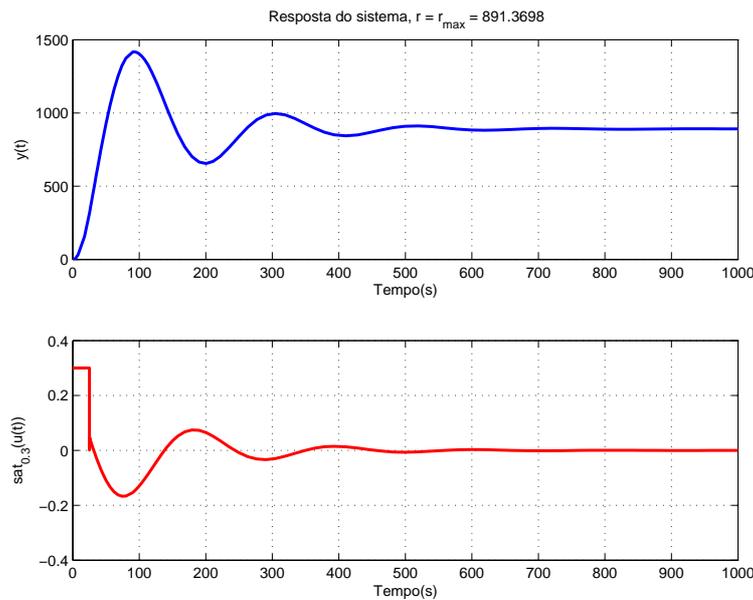


Figura 14: Máxima Referência - Integrador Duplo - PO2

O comportamento da abordagem “clássica” foi analisado no caso em que  $E_c = 1$ , ou seja, mesmas condições do caso “integradores inteligentes”. A referência máxima obtida foi de  $r_{max} = 803.6829$ , praticamente o mesmo valor obtido para o problema PO1. Neste caso, pode-se concluir que o problema PO1 realmente não traz nenhuma vantagem significativa em relação ao problema PO2.

Para os exemplos estável e instável, a máxima referência é determinada pelos dois elipsóides. Neste caso, faz-se necessário  $Q_b = cov\{q_1\}$  com  $q_1 = [(M_2 A M_2^{-1} E)^T 0]^T$ , bem como decidir qual peso deve ser escolhido na maximização os elipsóides. Ao longo

<sup>4</sup>Na verdade, trata-se de um problema similar, onde  $F_1$ ,  $F_2$  e  $E_c$  são conhecidos, e não incógnitas em  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $M$ .

deste trabalho, a referência relativa ao elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  foi chamada de  $r_{max1}$  e a referência relativa a  $\Omega(R, \sigma)$  foi chamada de  $r_{max2}$ . Na Tabela 2 é apresentada a variação das referências em relação aos valores de  $\epsilon$ . Baseado nesta tabela, nota-se que há pouca

Tabela 2: Maximização da Referência - Planta Estável.

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0.5$
$r_{max1}$	$2.3562 \times 10^4$	$2.7696 \times 10^3$	$4.3349 \times 10^3$
$r_{max2}$	$2.4657 \times 10^{-4}$	245.4187	245.1580

diferença entre a escolha de  $\epsilon = 0.5$  ou  $\epsilon = 1$ . Na Figura 15 é mostrada a saída do sistema para uma referência  $r = 50$  em  $0 \leq t \leq 20$  e  $r = -50$  em  $t > 20$ , considerando  $x_2 = 0$  e  $\xi = 0$ . É importante notar que estes valores encontram-se distantes dos valores máximos de referência admitida.

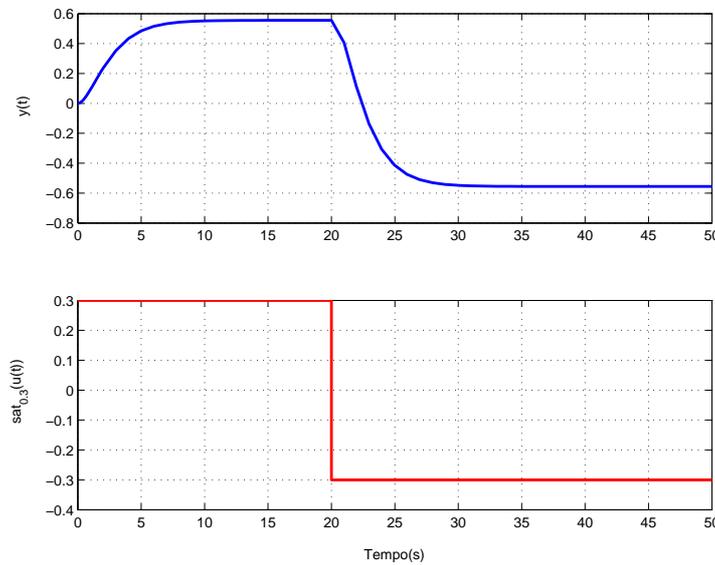


Figura 15: Saída do Sistema - Planta Estável - PO2

Nota-se claramente que o sistema permanece saturado todo o tempo e que, mesmo assim, ele se acomoda em um valor de referência diferente do desejado, mas ainda dentro do elipsóide. Neste caso,

$$P = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0.0532 & 0.1135 & 0.0760 \\ 0.1135 & 0.2522 & 0.1675 \\ 0.0760 & 0.1675 & 0.1135 \end{bmatrix}, z_{eo} = \begin{bmatrix} -49.4444 \\ 0.3333 \\ 32.6793 \end{bmatrix}$$

para a referência  $r = 50$  e  $z_{eo} = \begin{bmatrix} 49.4444 \\ 0.3333 \\ 32.6793 \end{bmatrix}$ , para  $r = -50$ . Em ambos os casos,

$z_{eo}^T P z_{eo} = 5.5843 \times 10^{-6}$ , valor este que confirma que  $z_{eo}$  está realmente no interior de  $\Omega(P, 1)$ . Foi este exemplo que motivou o estudo dos pontos de equilíbrio fora da região linear realizado no Capítulo 6. Por enquanto, para o caso estável, toda referência maior

que  $r = 0.5556$  será desconsiderada<sup>5</sup>. Na Figura 16 é mostrada a saída do sistema para o caso  $r = 0.55$ .

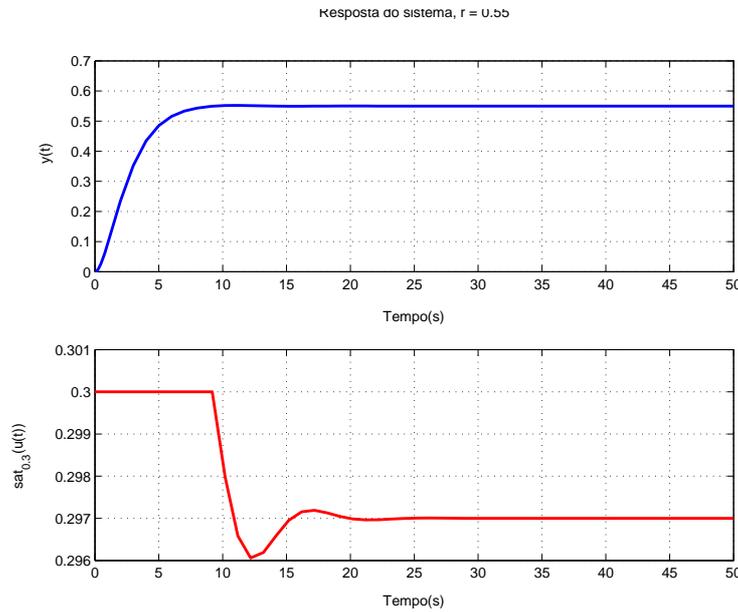


Figura 16: Saída do Sistema - Planta Estável  $r = 0.55$  - PO2

Um detalhe importante desta figura é o fato do sistema ter conseguido seguir a referência mesmo permanecendo mais da metade do tempo de acomodação saturado. No caso da planta instável, a máxima referência obtida foi de  $r_{max2} = 0.5542$ , cuja simulação é mostrada na Figura 17.

Finalmente, o problema de maximização foi aplicado à planta multivariável. Como esta planta possui apenas uma entrada, a determinação da máxima referência é feita de forma análoga aos exemplos SISO. A aplicação de PO2 resultou em uma máxima referência  $r_{max2} = 147.9413$ . A simulação deste sistema é mostrada na Figura 18. Pode-se notar a rápida convergência do sistema assim que os sinais de controle deixam de saturar. Isso mostra que o *anti-windup* está evitando que o integrador acumule uma carga excessiva.

#### 4.5.1.3 Posicionamento de pólos

Neste exemplo, o objetivo é mostrar que a posição dos pólos em malha-fechada está intimamente ligada ao valor de  $\lambda$  e que existe um compromisso entre o tempo de acomodação e a máxima referência admissível. A estrutura  $W\mathbf{A}^T + \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y + Y^T\mathbf{B}_1^T + \lambda W$  do primeiro termo das inequações (63) e (85) tem um papel semelhante ao da relação (20) em (CHILALI; GAHINET, 1996), onde os pólos são alocados à esquerda de uma reta vertical no plano  $s$  passando por  $s = -\lambda/2$ . Com isto, é esperado que, para valores pequenos de  $\lambda$ , o sistema seja lento mas siga referências grandes com erro nulo e que, para valores grandes de  $\lambda$ , o sistema seja rápido, porém siga referências menores.

Para o problema PO1, foi utilizado o exemplo do integrador duplo com  $\mathcal{Z}_b = cov\{\mathbf{z}_1\}$ ,  $\mathbf{z}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\epsilon = 0$  e  $E_c = 1$ . O valor de  $\lambda$  foi variado entre  $1.2 \times 10^{-5}$  e 1.2, apresentando os resultados resumidos na Tabela 3. Na Figura 19, são apresentadas a

<sup>5</sup>Valor de  $G_v(0)u_0$ , onde  $G_v(0)$  é o ganho estático da planta em relação a entrada saturada  $v(t) = sat_{u_0}(u(t))$ .

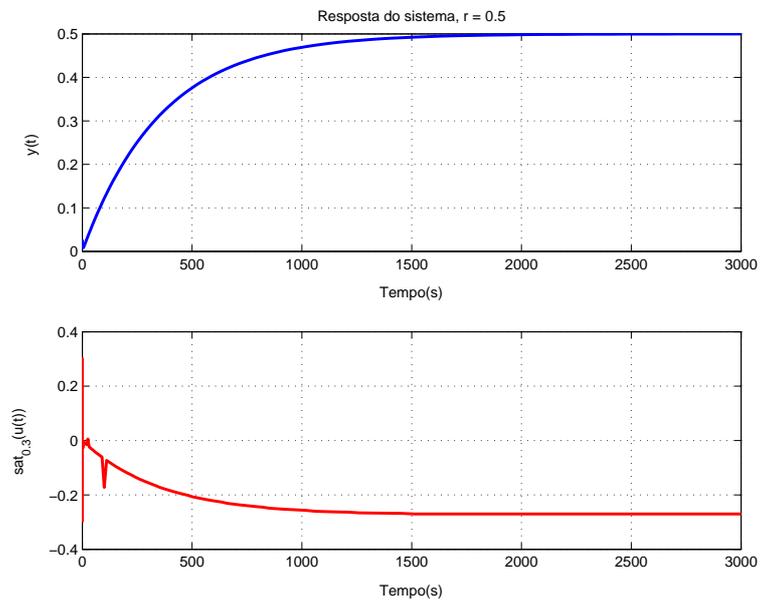


Figura 17: Saída do Sistema - Planta Instável  $r = 0.5$  - PO2

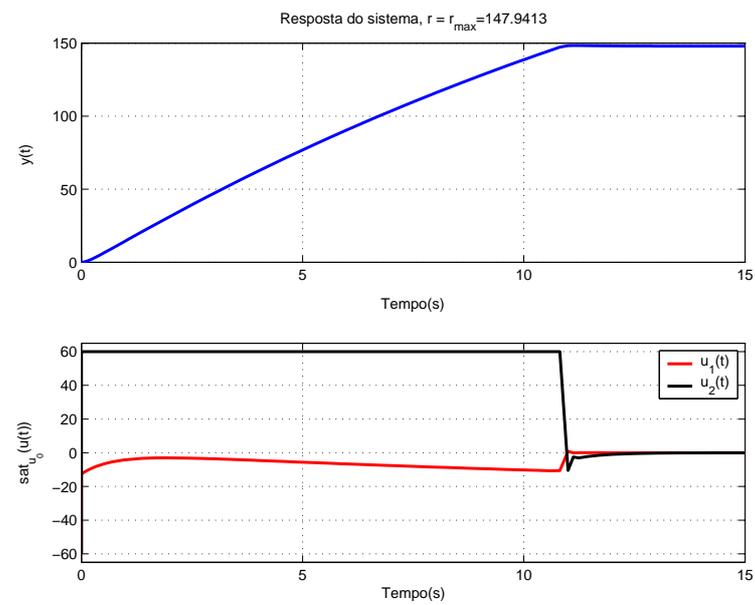


Figura 18: Saída do Sistema - Planta Multivariável - PO2

saída do sistema e o sinal de controle para cada um dos valores de  $\lambda$  da tabela anterior. Todas as simulações foram feitas considerando  $r = 0.3441$ , ou seja, a menor referência admissível comum a todos os casos. Pode-se notar que, nos três menores valores de  $\lambda$ , o sistema permanece pouco tempo saturado, já que a referência escolhida é muito menor que a máxima referência admissível.

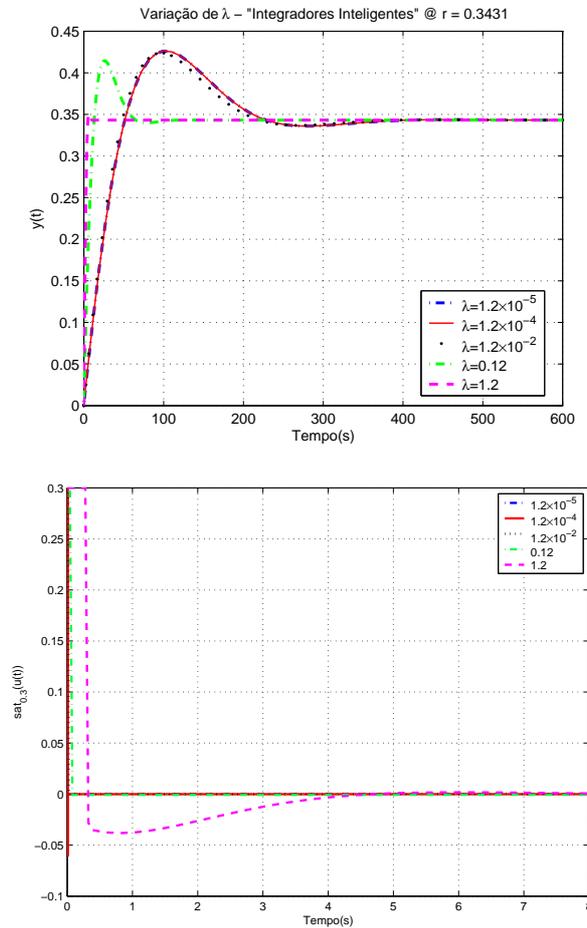


Figura 19: Variação de  $\lambda$  - “Integradores Inteligentes”

No problema PO2, foi utilizado o exemplo estável onde  $\mathcal{Z}_b = \text{cov}\{z_1\}$ ,  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\epsilon = 0.5$  e  $E_c$  livre. O valor de  $\lambda$  foi variado entre  $9.7 \times 10^{-5}$  e  $9.7$ , apresentando os resultados resumidos na Tabela 4.

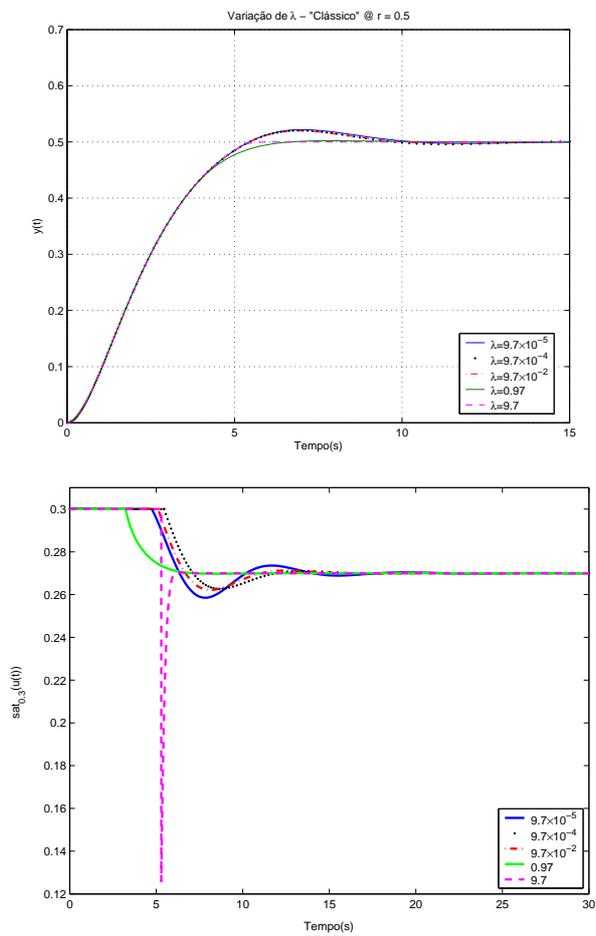
Pode-se notar que o compromisso entre a referência e o valor de  $\lambda$  continua o mesmo, isto é, inversamente proporcional. Um fato interessante que pode ser observado na Figura 20 é que a variação do tempo de seguimento é menos pronunciada neste caso. Estas simulações foram feitas considerando-se uma referência de amplitude 0.5, muito próxima do menor valor obtido. Isto é justificado pelo fato das referências maiores que 0.5556 não garantirem erro nulo (vide seção anterior ou o Capítulo 6). Assim, o “esforço” necessário para alcançar estas referências pode ser utilizado a fim de tornar o sistema mais rápido.

Tabela 3: Variação de  $\lambda$  - “Integradores Inteligentes”

$\lambda$	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-2}$	0.12	1.2
$r_{max}$	803.1744	801.2981	619.0280	34.4438	0.3431

Tabela 4: Variação de  $\lambda$  - Caso “Clássico”

$\lambda$	$9.7 \times 10^{-5}$	$9.7 \times 10^{-4}$	$9.7 \times 10^{-2}$	0.97	9.7
$r_{max}$	245.1580	242.2713	183.4285	20.9912	0.5556

Figura 20: Variação de  $\lambda$  - Caso “Clássico”

## 4.5.2 Maximização do conjunto de condições iniciais

Nesta seção, o objetivo é maximizar o conjunto de condições iniciais para as quais o sistema garante o seguimento. O tamanho do conjunto está diretamente relacionado à direção de maximização escolhida. Caso o interesse seja uma maximização uniforme de  $\Omega(P, \nu)$ , pode-se utilizar como critério de minimização o traço da matriz  $W$ , isto é, minimizando o traço de  $W$  obtém-se, indiretamente, a maximização do traço de  $P$ . A fim de manter a comparação com (CAO; LIN; WARD, 2004), o critério de maximização continua sendo maximizar  $\alpha$  tal que  $\alpha Z_b \subset \Omega(P, \nu)$ . Mais uma vez, a direção escolhida foi  $Z_b = cov\{z_1\}$ ,  $z_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ . A seguir serão apresentados os resultados para cada um dos problemas de otimização.

### 4.5.2.1 “Integradores inteligentes” (PO1)

Neste caso, o problema de otimização PO1 foi aplicado ao exemplo do integrador duplo para um valor de  $E_c$  fixo. Como a direção de maximização é a mesma da máxima referência, é de se esperar que os resultados para  $\alpha_{opt}$  sejam muito próximos aos valores de  $r_{max}$ . Para  $E_c = 1$ , o valor obtido foi  $\alpha_{opt} = 803.6513$ , estimativa menos conservativa do que  $\alpha_{opt} = 669.2$  apresentado em (CAO; LIN; WARD, 2004). Para uma referência arbitrária  $r = 500$ , o máximo valor possível de condição inicial para os estados do sistema é  $x_2(0) = \pm 34.4551$ . Na Figura 21 é mostrada a saída do sistema para esta referência e condição inicial. Devido ao fato do sistema ser instável em malha aberta, ele torna-

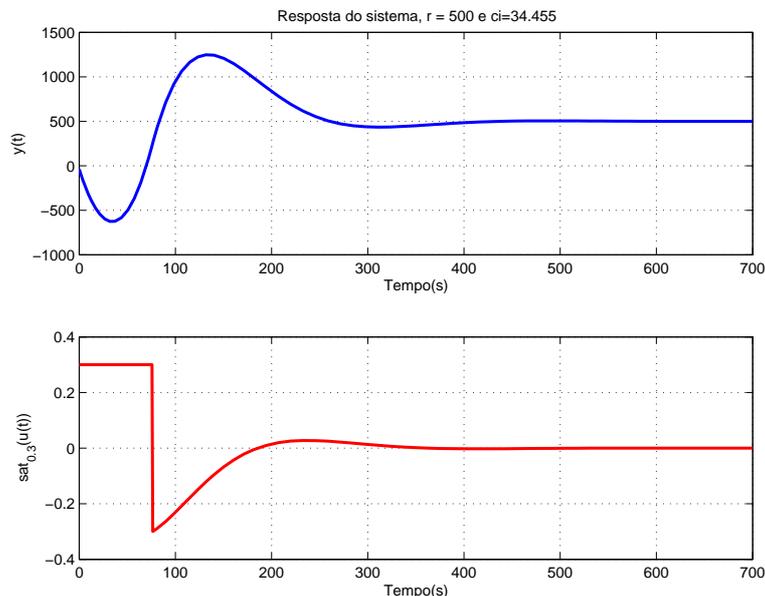


Figura 21: Resposta à Condição Inicial - Integrador Duplo - PO1

se mais sensível à influência da condição inicial, mas mesmo assim consegue seguir a referência desejada. A referência e a condição inicial estão relacionadas, ou seja, para uma referência menor, a condição inicial poderá ser maior.

### 4.5.2.2 Solução “clássica” (PO2)

O problema de otimização convexa PO2 foi aplicado a todos os exemplos utilizados neste capítulo. Nos casos estável e instável, o valor esperado de  $\alpha_{opt}$  já não deve

ser próximo ao valor da referência máxima, já que esta era determinada também pelo elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$ . Na Tabela 5 é mostrado o valor da  $\alpha_{opt}$  para cada um dos exemplos, sendo  $\epsilon = 0, 5$  e  $grid$  em  $\lambda$ .

Tabela 5: Maximização da Condição Inicial - PO2.

	Planta estável	Integrador duplo	Planta instável
$\alpha_{opt}$	$2.3460 \times 10^4$	891.3673	8.1594

No caso do integrador duplo, o problema de otimização foi utilizado a fim de verificar o seu comportamento com  $E_c = 1$ . Analogamente ao problema de maximização da referência, o resultado de  $\alpha_{opt} = 803.5173$  é muito próximo ao valor obtido com o problema PO1. Isto reforça a hipótese de que a abordagem “integradores inteligentes” não traz vantagens em relação à abordagem clássica.

Para o exemplo estável seguindo uma referência de  $r = 0.5$ , a máxima condição inicial admissível é  $x_2(0) = \pm 4302.9$ . Este valor elevado justifica-se pelo fato da planta ser estável em malha-aberta, ou seja, se não houvesse a saturação, este sistema garantiria o seguimento com erro nulo para condições iniciais infinitas. A saída do sistema, nesta situação, é apresentada na Figura 22, onde nota-se que, mesmo permanecendo saturado em grande parte do tempo, o sistema consegue garantir o seguimento da referência.

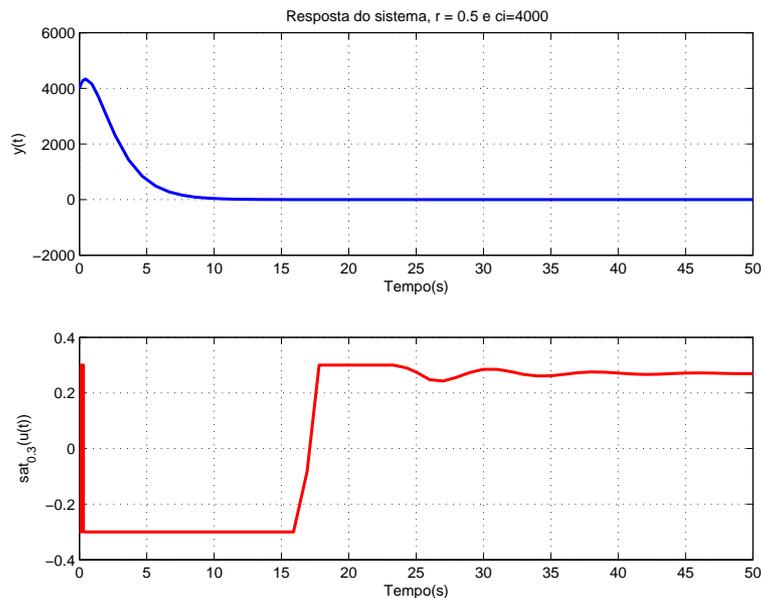


Figura 22: Resposta à Condição Inicial - Planta Estável - PO2

Este exemplo serve também, para mostrar a eficiência do laço de *anti-windup*. Na Figura 23, é mostrada uma comparação entre o controlador anterior e um controlador calculado sem considerar o laço *anti-windup*, isto é,  $E_c = 0$ . Pode-se notar que, para  $E_c \neq 0$ , o tempo que o sistema leva para atingir o seguimento com erro nulo depois que o sinal controle deixar de saturar é cerca de três vezes menor.

Devido ao fato do integrador duplo não ser estável em malha-aberta, a máxima condição inicial possível para a referência  $r = 0.5$  é  $x_2(0) = 24.5479$ , cuja resposta é mostrada na Figura 24.

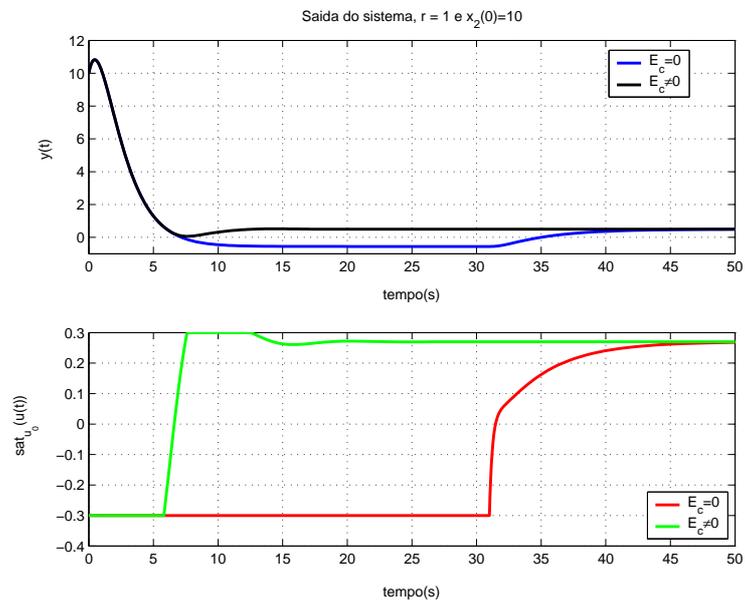


Figura 23: Comparação entre  $E_c = 0$  e  $E_c \neq 0$

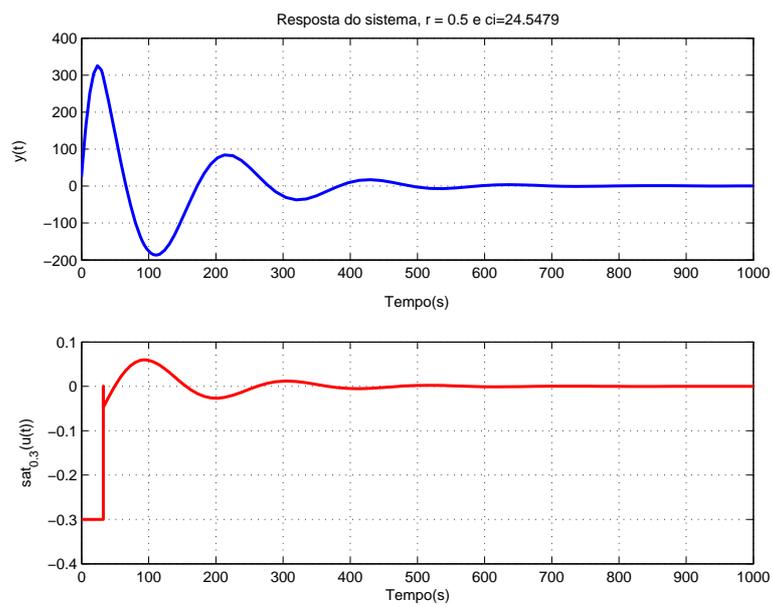


Figura 24: Resposta à Condição Inicial - Integrador Duplo - PO2

A condição inicial admissível para o exemplo da planta instável com  $r = 0.5$  é  $x_2(0) = 0.0243$ . Como mostrado na Figura 25, a influência da condição inicial é imperceptível. Para esta planta, nestas condições, pode-se dizer que praticamente nenhuma condição inicial relevante é admissível.

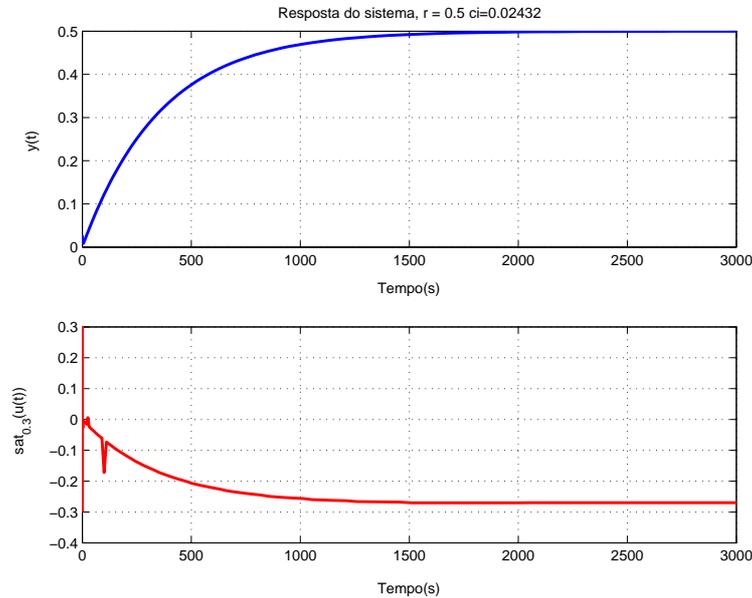


Figura 25: Resposta à Condição Inicial - Planta Instável - PO2

O exemplo multivariável exige um pouco mais de cuidado na hora de determinar  $x_2(0)$ . Como  $M_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ ,  $x_2(0)$  terá duas componentes, ou seja,  $x_2(0) = [x_{21}(0) \ x_{22}(0)]^T$ . Para fins de exemplo, será considerado  $x_{21}(0) = x_{22}(0)$ , o qual, após a aplicação de PO2, apresentou  $x_{21}(0) = x_{22}(0) = 32.1602$ . A saída do sistema é mostrada na Figura 26, onde percebe-se que o sistema satura duas vezes antes de estabilizar.

#### 4.5.3 Maximização da perturbação admissível

Nesta seção, o objetivo é maximizar a perturbação para a qual o sistema consegue seguir uma dada referência fixa  $r_d$ . Para isto, será feita a maximização  $\beta Q_b \subset \Omega(R, \sigma)$  e, a partir de  $\beta_{opt}$  e da direção escolhida, calcular a maior perturbação constante possível de ser rejeitada. Como a referência a ser seguida é fixa, a relação

$$\begin{bmatrix} \gamma & z'_i \\ z_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, l$$

deve ser alterada a fim de que a referência desejada seja a máxima referência admissível pelo sistema. Assim, têm-se

$$\begin{bmatrix} r_d^2 & z'_i \\ z_i & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, l. \quad (89)$$

Como apresentado em (CAO; LIN; WARD, 2004), são escolhidos  $Z_b = cov\{z_1\}$ ,  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $Q_b = cov\{q_1\}$  com  $q_1 = [r_d \ 0.1]^T$  e  $\epsilon = 1$ . Partindo da direção  $q_1$  escolhido, a máxima perturbação a ser rejeitada será  $d = 0.1\beta_{opt}$ . Isto ocorre pelo fato de

$$q_1^T R q_1 \leq \delta_{opt} \Leftrightarrow [r_d \ 0.1] R \begin{bmatrix} r_d \\ 0.1 \end{bmatrix} \leq \frac{1}{\beta_{opt}^2} \Leftrightarrow [r_d \beta_{opt} \ 0.1 \beta_{opt}] R \begin{bmatrix} r_d \beta_{opt} \\ 0.1 \beta_{opt} \end{bmatrix} \leq 1$$

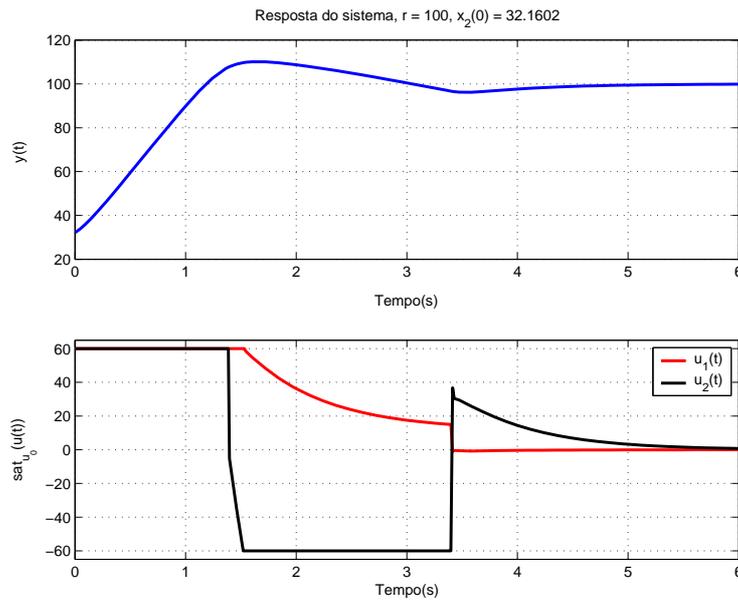


Figura 26: Resposta à Condição Inicial - Planta Multivariável - PO2

#### 4.5.3.1 “Integradores inteligentes” (PO1)

Seguindo a metodologia apresentada em (CAO; LIN; WARD, 2004), o problema de otimização PO1 foi aplicado ao exemplo dos integradores duplos com  $E_c$  fixo e igual à unidade. A solução obtida para um *grid* em  $\lambda$  foi  $\beta_{opt} = 4.1861$ ,  $\lambda_{opt} = 0.0290$ . Pode-se notar que este resultado é menos conservativo do que  $\beta_{opt} = 1.7275$  apresentado em (CAO; LIN; WARD, 2004), podendo assim, rejeitar uma perturbação de  $d_{max} = 0.4186$  quando o objetivo é seguir uma referência unitária ( $r_d = 1$ ). Na Figura 27, é apresentada a simulação do sistema para esta referência e a perturbação  $d_{max}$ . Pode-se notar que, mesmo apresentando um sobre sinal elevado e permanecendo grande parte do tempo saturado, o sistema é plenamente capaz de rejeitar a perturbação.

#### 4.5.3.2 Solução “clássica” (PO2)

O problema PO2 foi aplicado a todos os exemplos com suas variáveis livres e *grid* em  $\lambda$ . A fim de manter a comparação com o problema anterior, apenas no exemplo do integrador duplo a referência desejada foi considerada unitária. Nos demais exemplos, a referência desejada foi considerada  $r_d = 0.5$ , admissível para o caso estável.

O exemplo dos integradores duplos apresentou como resultado  $\beta_{opt} = 5.8349$  para um  $\lambda_{opt} = 0.0340$ , mais uma vez menos conservativo do que aqueles obtidos até agora. Na Figura 28 é apresentada a simulação do sistema quando submetido à perturbação  $d_{max} = 0.5835$ .

É importante notar que o comportamento apresentado é muito próximo do apresentado na Figura 27, apenas ressaltando o menor tempo de estabilização e sobre-sinal.

Para o exemplo estável, o resultado obtido foi  $\beta_{opt} = 1.5791$  e, no caso exemplo instável,  $\beta_{opt} = 0.6879$ . Na Figura 29, o exemplo estável é simulado para uma perturbação máxima de  $d_{max} = -0.1579$ . A simulação do exemplo instável é mostrada na Figura 30. É fácil de notar que, em ambos os casos, o sistema garantiu o seguimento, mesmo com o sistema estável voltando a ficar saturado após a aplicação da perturbação. Além disso, pode-se observar que o tempo de acomodação é idêntico, tanto para o seguimento quanto

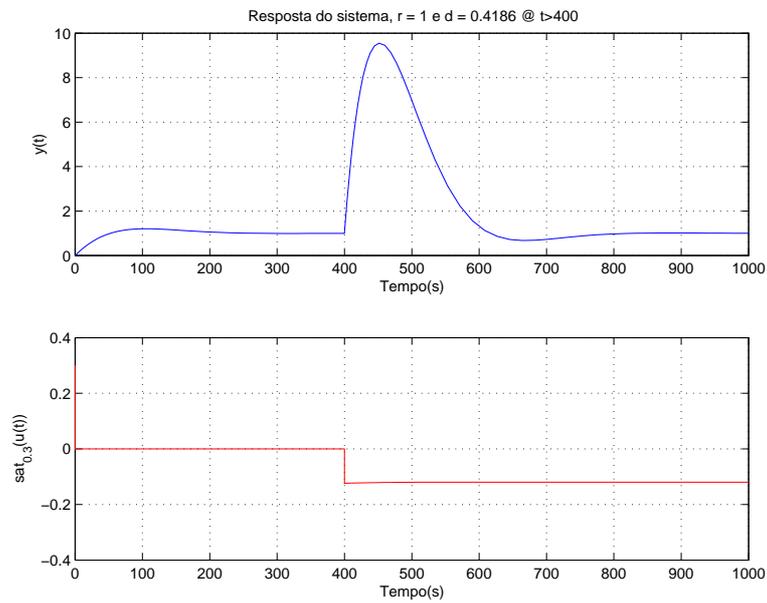


Figura 27: Resposta à Perturbação - Integrador Duplo - PO1

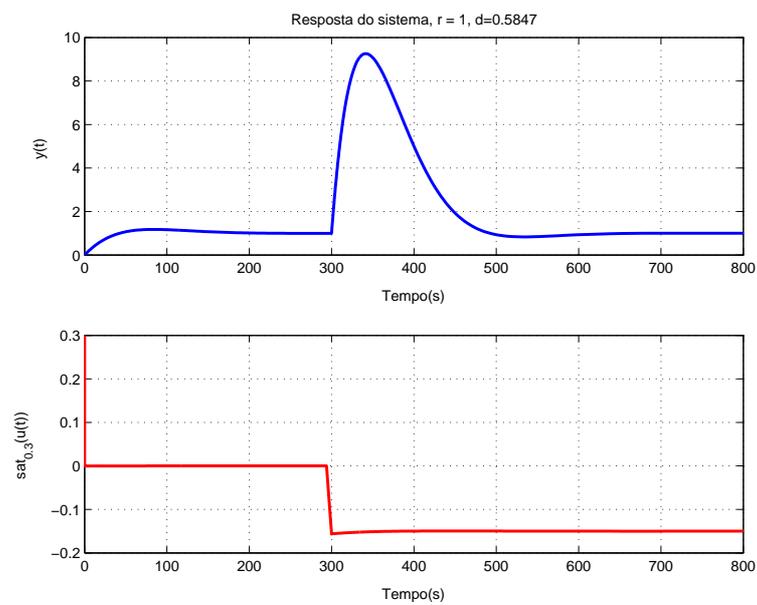


Figura 28: Resposta à Perturbação - Integrador Duplo - PO2

para a rejeição. Isto implica que não existem modos lentos cancelados no seguimento e que reaparecem na rejeição da perturbação.

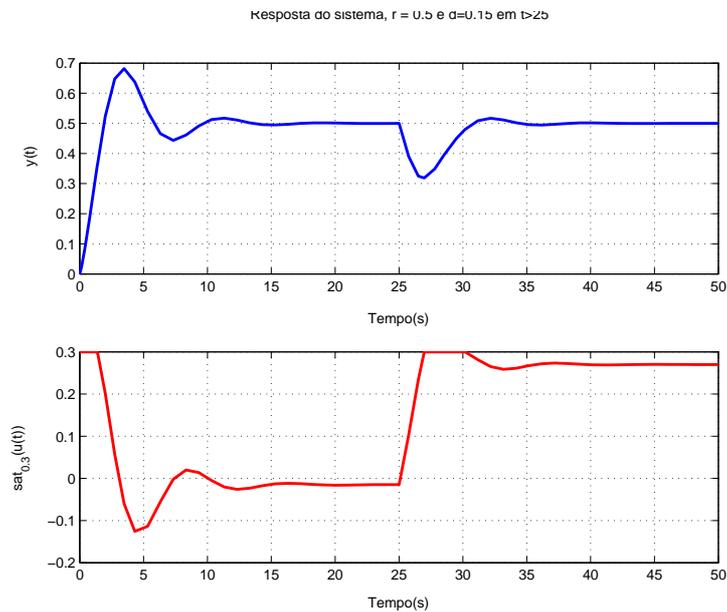


Figura 29: Resposta à Perturbação - Planta Estável - PO2

No caso da planta multivariável, considera-se a maximização na direção  $q_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ . Com isto, existem duas perturbações  $d_1$  e  $d_2$  a serem determinadas. Assim como no problema de maximização da condição inicial, foi escolhido  $d_1 = d_2$ . Uma outra alternativa seria maximizar o elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$  na direção  $q_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ , determinando assim  $d_{1max}$  e, logo após, maximizar na direção  $q_1 = [1 \ 0 \ 1]^T$ , a qual define  $d_{2max}$ . A aplicação de PO2 apresentou como resultado  $d_1 = d_2 = 59.8$ . Para mostrar a influência de cada uma das perturbações, a perturbação  $d_1$  foi aplicada em  $t > 4s$  e  $d_2$  foi aplicada em  $t > 7s$ , conforme mostrado na Figura 31.

A Figura 32 apresenta em detalhe o sinal de controle após a aplicação das duas perturbações. Pode-se notar que os dois controles voltam a saturar após a entrada das perturbações no sistema, mas, mesmo assim, o seguimento é garantido.

## 4.6 Comentários Finais

Um novo método para cálculo dos controladores em uma estrutura de controle utilizando ação integral e realimentação de estados com o objetivo de garantir o seguimento de referências e a rejeição de perturbações constantes na presença de saturação de controle foi proposto. Através de condições teóricas, é possível calcular simultaneamente uma realimentação estática de estados e o ganho de *anti-windup*, garantindo, assim, que as trajetórias do sistema em malha-fechada fiquem confinadas em um conjunto invariante, desde que as condições iniciais pertençam a este mesmo conjunto e que as referências e perturbações pertençam a um conjunto admissível.

Baseado nestas condições teóricas, problemas de otimização convexa foram propostos, a fim de maximizar a referência admissível, o conjunto das condições iniciais ou o conjunto das perturbações admissíveis. A maior vantagem da metodologia proposta em relação aos trabalhos anteriores é o fato de que as condições teóricas podem ser expressas

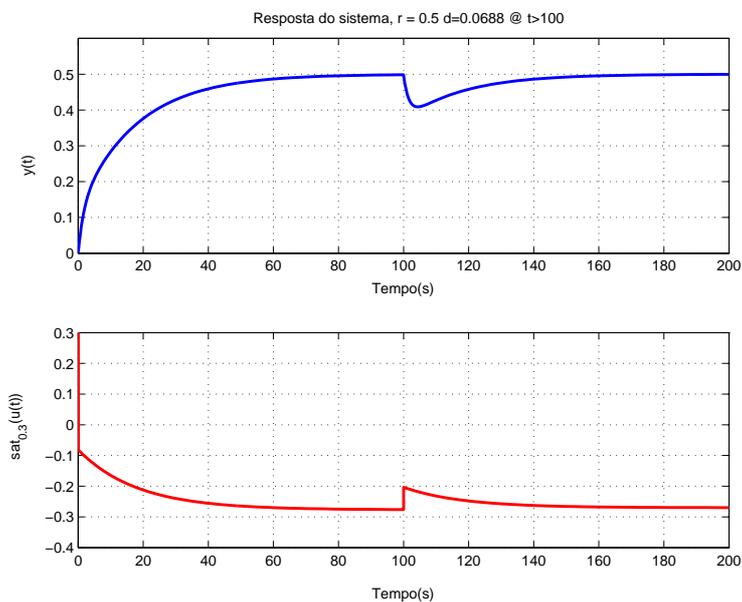


Figura 30: Resposta à Perturbação - Planta Instável - PO2

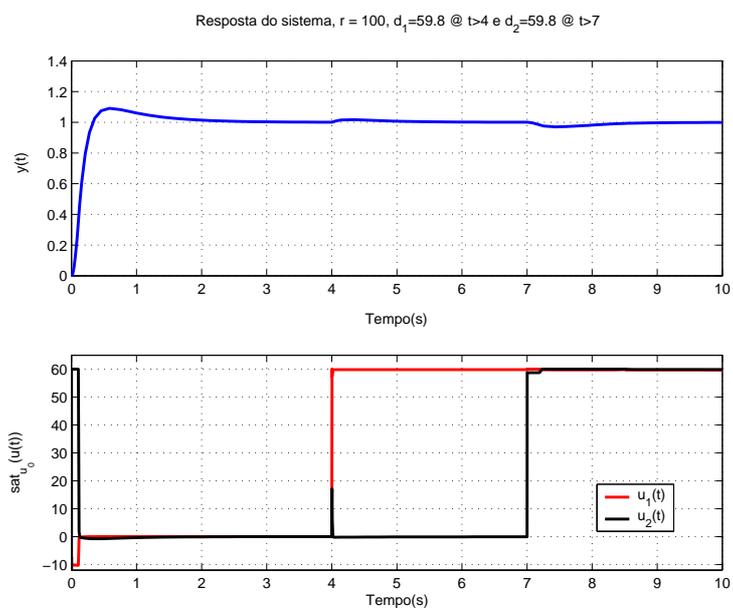


Figura 31: Resposta à Perturbação - Planta Multivariável - PO2

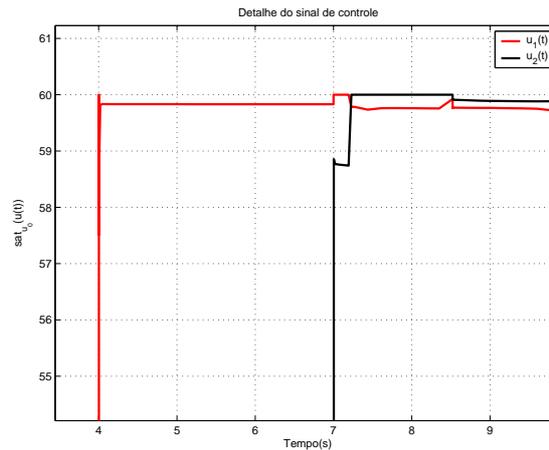


Figura 32: Detalhe - Planta Multivariável

diretamente na forma de LMIs, eliminando, assim, a necessidade da aplicação de esquemas iterativos para a solução dos problemas de otimização. Através da simplificação do esquema de controle, o número de condições LMIs foi reduzido, sem que esta redução comprometesse os resultados obtidos.

Através de exemplos, foi mostrado que os resultados obtidos são menos conservativos do que os apresentados na literatura. Além disso, a gama de exemplos foi expandida, cobrindo, assim, a maioria dos sistemas reais. Em cada caso, simulações foram apresentadas, mostrando o comportamento do sistema e ilustrando propriedades importantes. Finalmente, foi estabelecida uma relação entre as condições obtidas e as condições de posicionamento de pólos de (CHILALI; GAHINET, 1996), estabelecendo assim, um compromisso entre tempo de seguimento e máxima referência admissível.

## 5 PROBLEMA DE SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM SISTEMAS SUJEITOS À SATURAÇÃO: CASO DISCRETO

### 5.1 Introdução

Este capítulo consiste na extensão da metodologia desenvolvida no capítulo anterior para sistemas em tempo discreto. Das duas soluções apresentadas, apenas o esquema de controle “clássico” será considerado, já que o esquema “integradores inteligentes” apresenta poucas vantagens. Mais uma vez, o objetivo é calcular, em um único passo, o controlador estabilizante e o ganho de laço *anti-windup* a fim de maximizar os conjuntos de condições iniciais e referências/perturbações admissíveis. As referências principais são (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), onde o trabalho (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) foi estendido para o caso discreto com referências variantes e (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2006), onde a condição de setor modificada é apresentada para sistemas de tempo discreto.

### 5.2 Abordagem “Clássica”

#### 5.2.1 Formulação geral

Considere o sistema em tempo discreto sujeito à saturação dos atuadores, descrito por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B \text{sat}_{u_0}(u(k)) + B_d d \\ y(k) &= Cx(k) \\ e(k) &= y(k) - r \end{aligned} \quad (90)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  é a saída do sistema,  $d \in \mathbb{R}^k$  é um vetor de perturbações constantes,  $r \in \mathbb{R}^p$  é a referência constante que se deseja seguir e  $e(k) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  são matrizes contantes, reais e de dimensões apropriadas. Cada componente do termo de saturação em (90) pode ser definida como

$$\text{sat}_{u_{0(i)}}(u_{(i)}(k)) \triangleq \text{sign}(u_{(i)}(k)) \min(|u_{(i)}(k)|, u_{0(i)}), \quad i = 1, \dots, m.$$

As suposições A1, A3 e A4 são iguais às suposições apresentadas no capítulo anterior. A relação A2 deve ser modificada para

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} I_n - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p.$$

Como o objetivo de controle é garantir o seguimento de referências contantes com erro nulo e rejeitar perturbações também constantes em regime permanente, uma ação integral

em tempo discreto é adicionada à malha de controle (vide princípio do modelo interno). Assim, é introduzido o estado adicional  $\xi(k) \in \mathbb{R}^p$  dado por

$$\xi(k+1) = e(k) + \xi(k) + E_c(\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k)). \quad (91)$$

O termo  $E_c(\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k))$  corresponde a um termo de *anti-windup*, introduzido a fim de evitar quaisquer efeitos indesejados causados pela saturação do atuador.  $E_c \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é a chamada matriz de ganho *anti-windup*.

A exemplo do capítulo anterior, é feita a mudança de coordenadas do sistema para as coordenadas do erro (KRIKELIS; BARKAS, 1984). Nestas coordenadas, o novo vetor de estados é dado por

$$z(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ x_2(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} \quad (92)$$

com  $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-p}$  definido por  $x_2(k) = M_1 x(k)$ , onde  $M_1 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$  é escolhida de tal forma que

$$M_2 = \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

seja inversível.

A partir do sistema (90), pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Cx(k+1) = CAx(k) + CB\text{sat}_{u_0}(u(k)) + CB_d d \\ x_2(k+1) &= M_1 x(k+1) = M_1 Ax(k) + M_1 B\text{sat}_{u_0}(u(k)) + M_1 B_d d. \end{aligned} \quad (93)$$

No caso discreto, o erro na amostra seguinte é dado por  $e(k+1) = y(k+1) - r$ , ou seja,  $y(k+1) = e(k+1) + r$ . Com isto, a relação (93) pode ser reescrita como

$$e(k+1) = CAx(k) + CB\text{sat}_{u_0}(u(k)) + r + CB_d d$$

ou, na forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} Ax(k) + \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} B\text{sat}_{u_0}(u(k)) + \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} C \\ M_1 \end{bmatrix} B_d d.$$

Por suposição,  $M_2 = [C^T \ M_1^T]^T$  é inversível, o que permite que a relação acima seja escrita na forma

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} Cx(k) \\ M_1 x(k) \end{bmatrix} + M_2 B\text{sat}_{u_0}(u(k)) + \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} r + M_2 B_d d$$

a qual, após a substituição de  $Cx(k) = e(k) + r$  e  $x_2(k) = M_1 x(k)$ , é dada por

$$\begin{bmatrix} e(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = M_2 A M_2^{-1} \begin{bmatrix} e(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + M_2 B\text{sat}_{u_0}(u(k)) + (M_2 A M_2^{-1} - I_n) \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} r + M_2 B_d d. \quad (94)$$

A composição da equação (94) com o termo integral (91), forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \xi(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & 0 \\ E^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ x_2(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_2 B \\ 0 \end{bmatrix} \text{sat}_{u_0}(u(k)) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ E_c \end{bmatrix} (\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k)) + \begin{bmatrix} (M_2 A M_2^{-1} - I_n) E & M_2 B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (95)$$

Assim, neste novo sistema de coordenadas, (90) pode ser reescrito como

$$z(k+1) = \mathbf{A}z(k) + \mathbf{B}_1 \text{sat}_{u_0}(u(k)) + \mathbf{B}_2(\text{sat}_{u_0}(u(k)) - u(k)) + \mathbf{B}_3q, \quad (96)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_2AM_2^{-1} & 0_{n \times p} \\ E^T & I_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} M_2B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ E_c \end{bmatrix} = \mathbf{V}E_c, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{(n-p) \times p} \end{bmatrix}, \quad \text{e } q = (M_2AM_2^{-1} - I_n)Er + M_2B_d d.$$

Novamente, a perturbação constante do sistema,  $q$ , é uma combinação entre a referência que deseja-se seguir e a perturbação original a ser rejeitada.

Considerando, agora, o sinal de controle como uma realimentação estática do estado  $z(k)$ , então

$$u(k) = Fz(k), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)},$$

o que leva ao seguinte sistema em malha-fechada:

$$z(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F)z(k) - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\Psi_{u_0}(Fz(k)) + \mathbf{B}_3q \quad (97)$$

com  $\Psi_{w_0}(w(k)) = w(k) - \text{sat}_{w_0}(w(k))$  sendo uma não-linearidade do tipo zona morta descentralizada. De forma análoga ao caso contínuo, ou seja, considerando  $\mathbb{A} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1F$  e  $\mathbb{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , o sistema (97) pode ser reescrito como

$$z(k+1) = \mathbb{A}z(k) - \mathbb{B}\Psi_{u_0}(Fz(k)) + \mathbf{B}_3q. \quad (98)$$

### 5.2.2 Propriedades dos pontos de equilíbrio

As considerações sobre os pontos de equilíbrio do sistema são análogas àquelas apresentadas no capítulo anterior. Devido a algumas particularidades do caso discreto, elas serão novamente apresentadas.

Como o objetivo é o seguimento de referências com erro nulo, o ponto de equilíbrio de interesse deve ser da forma

$$z_e = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2e} \\ \xi_e \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Suponha, agora, que este ponto de equilíbrio esteja no interior da região de linearidade do sistema, ou seja,  $z_e \in S(F, u_0)$ , com

$$S(F, u_0) \triangleq \{z \in \mathbb{R}^{n+p}; |F_{(i)}z| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}.$$

Se  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F)$  é Schur-estável, então foi provado em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) que o ponto de equilíbrio

$$z_e = (I_{n+p} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F))^{-1}\mathbf{B}_3q, \quad (100)$$

é o único ponto de equilíbrio do sistema (98) no interior  $S(F, u_0)$ . A fim de satisfazer  $z_e \in S(F, u_0)$ , é necessário adicionar a seguinte restrição ao vetor de referência/perturbação  $q$ :

$$|F_{(i)}((I_{n+p} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_1F))^{-1}\mathbf{B}_3q)| \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (101)$$

Ainda baseado nos resultados de (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), pode-se provar que  $z_e \in S(F, u_0)$  é equivalente a  $q \in S(\mathcal{F}, u_0)$  onde

$$S(\mathcal{F}, u_0) \triangleq \{q \in \mathbb{R}^n; |\mathcal{F}_{(i)}q| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\},$$

$$\mathcal{F} = [0 \ I_m] \begin{bmatrix} I_n - M_2 A M_2^{-1} & -M_2 B \\ -E^T & 0 \end{bmatrix}^\# \mathbf{B}_3. \quad (102)$$

A prova desta solução segue os mesmos passos mostrados no capítulo anterior. Com isto, obtém-se uma condição independente de  $F$ .

### 5.2.3 Colocação do problema

Para o caso discreto, o objetivo de controle é análogo ao objetivo apresentado para os “integradores inteligentes”, apenas levando em conta que existe um único ganho estabilizante  $F$ . Assim, este problema pode ser resumido como

**Problema 5.2.1** *Calcular o ganho do controlador  $F \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e a matriz de ganho anti-windup  $E_c$  tais que,  $\forall z(0) \in \Omega(P, \nu)$  e  $\forall r, d$  tal que  $q \in \Omega(R, \sigma)$ , o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é localmente assintoticamente estável e ainda  $y(k) \rightarrow r$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

Mais uma vez será considerado o objetivo implícito de calcular os ganhos a fim de maximizar os domínios de estabilidade e de referências/perturbações admissíveis. É importante ressaltar que este não é o foco principal de (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), já que, neste artigo, os autores estão interessados em mostrar a aplicabilidade da metodologia para o caso de referências variantes. Assim, a comparação direta dos resultados obtidos fica prejudicada.

### 5.2.4 Resultado principal

Os resultados principais deste capítulo podem ser resumidos no seguinte teorema:

**Teorema 5.2.1** *Se existem as matrizes simétricas positivas-definidas  $W \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times (n+p)}$  e  $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , uma matriz diagonal positiva-definida  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e os escalares positivos  $\lambda, \omega, \nu$  e  $\sigma$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} -\lambda W & * & * & * & * \\ X & -2L & * & * & * \\ 0 & 0 & -\omega R & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\nu + \omega\sigma - \nu & * \\ \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1 Y & -L\mathbf{B}_1 - M\mathbf{V} & \mathbf{B}_3 & 0 & -W \end{bmatrix} \leq 0, \quad (103)$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{(i)} - X_{(i)} & \nu^{-1}u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (104)$$

e

$$\begin{bmatrix} R & * \\ \mathcal{F}_{(i)} & \sigma^{-1}u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (105)$$

então os ganhos  $F = YW^{-1}$  e  $E_c = ML^{-1}$  são tais que,  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$ , o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  é uma região de invariância positiva para o sistema (98) e ainda (100) é o único ponto de equilíbrio na forma (99) dentro de  $S(F, u_0)$ .

*Prova.* A satisfação de (104) implica que o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  está incluído na região  $S(F - G, u_0)$ . Logo, para todo  $z(t) \in \Omega(P, \nu)$ , segue que a não-linearidade  $\Psi_{u_0}(Fz(t))$  satisfaz a condição de setor (10). Esta condição será utilizada na prova da relação (103).

A relação (105) vem da inclusão do vetor de referências/perturbações admissíveis  $q \in \Omega(R, \sigma)$  na região  $S(\mathcal{F}, u_0)$ . Esta condição é satisfeita caso a relação

$$q^T \mathcal{F}_{(i)}^T \frac{\sigma}{u_{0(i)}^2} \mathcal{F}_{(i)} q \leq q^T R q \leq \sigma, \quad i = 1, \dots, m \quad (106)$$

seja verificada. Com a aplicação do complemento de Schur em (106), segue que (105) garante,  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$ , que  $q \in S(\mathcal{F}, u_0)$ . Como provado na seção anterior, isto significa que o ponto de equilíbrio  $z_e$  contido na região linear é único e garante erro de seguimento nulo em regime permanente.

Considere a seguinte função candidata de Lyapunov quadrática

$$V(k) = z(k)^T P z(k). \quad (107)$$

O valor desta função na amostra seguinte é dado por

$$V(k+1) = \eta^T \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P \mathbb{A} & * & * \\ -\mathbb{B}^T P \mathbb{A} & \mathbb{B}^T P \mathbb{B} & * \\ \mathbf{B}_3^T P \mathbb{A} & -\mathbf{B}_3^T P \mathbb{B} & \mathbf{B}_3^T P \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \eta, \quad (108)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} z(k) \\ \Psi_{u_0}(Fz(k)) \\ q \end{bmatrix}.$$

Para garantir a invariância do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ , basta que  $z(k+1) \in \Omega(P, \nu)$ , ou seja,  $z(k+1)^T P z(k+1) \leq \nu$ ,  $\forall z(k) \in \Omega(P, \nu)$  e  $\forall q \in \Omega(R, \sigma)$ . Usando o *S-procedure*, pode-se mostrar que isto é garantido se existirem os escalares  $\lambda > 0$  e  $\omega > 0$  que verificam a relação

$$V(k+1) - \nu - \lambda(z(k)^T P z(k) - \nu) - \omega(q^T R q - \sigma) \leq 0 \quad (109)$$

Considere agora, que  $z(t) \in S(F - G, u_0)$  e que o Lema 3.7.1 se verifica para o caso discreto. Então, (109) será verificada se

$$V(k+1) \leq V(k+1) - \nu - \lambda(z(k)^T P z(k) - \nu) - \omega(q^T R q - \sigma) - \eta^T \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ TG & -2T & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta. \quad (110)$$

A relação (110) pode ser colocada na forma matricial por

$$[\eta^T \quad I] \mathcal{M} \begin{bmatrix} \eta \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (111)$$

onde  $\mathcal{M}$  é dado por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T P \mathbb{A} - \lambda P & * & * & * \\ -\mathbb{B}^T P \mathbb{A} + GT & \mathbb{B}^T P \mathbb{B} - 2T & * & * \\ \mathbf{B}_3^T P \mathbb{A} & -\mathbf{B}_3^T P \mathbb{B} & \mathbf{B}_3^T P \mathbf{B}_3 - \omega R & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \nu + \omega \sigma - \nu \end{bmatrix}. \quad (112)$$

Assim, para que (110) seja satisfeita, basta que  $\mathcal{M} < 0$  e que  $\Omega(P, \nu) \subset S(F - G, u_0)$ . Esta última condição é satisfeita pela relação (104). A condição  $\mathcal{M} < 0$  pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & * & * & * \\ GT & -2T & * & * \\ 0 & 0 & -\omega R & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\nu + \omega\sigma - \nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}^T \\ \mathbb{B}^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbf{B}_3 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (113)$$

ou, após a aplicação do complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} -\lambda P & * & * & * & * \\ TG & -2T & * & * & * \\ 0 & 0 & -\omega R & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\nu + \omega\sigma - \nu & * \\ \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbf{B}_3 & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (114)$$

Pré e pós-multiplicando (114) por  $diag\{P^{-1}, T^{-1}, I, I, I\}$  e fazendo a substituição de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $X = GP^{-1}$ ,  $Y = FP^{-1}$ ,  $L = T^{-1}$  e  $M = E_c T^{-1}$  conclui-se então, que (114) é equivalente a (103), encerrando assim a prova do teorema. ■

### 5.3 Problema de Otimização

Baseado no teorema da seção anterior, pode-se formular alguns problemas de otimização a fim de obter os ganhos do controlador e do laço de *anti-windup*. Como no caso contínuo, estes problemas podem ser divididos em dois casos distintos. O primeiro caso, onde  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  são determinados pela inclusão de um conjunto poliedral, é análogo ao apresentado no capítulo anterior. Assim, apenas o caso da maximização dos elipsóides será detalhado, a seguir.

#### 5.3.1 Maximização de $\Omega(P, \nu)$ e $\Omega(R, \sigma)$

Mais uma vez, o tamanho de  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  pode ser medido em relação aos conjuntos poliedrais  $\mathcal{Z}_b = cov\{z_1, z_2, \dots, z_l\}$  e  $\mathcal{Q}_b = cov\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ , onde os vértices  $z_i \in \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $i = 1, \dots, l$  e  $q_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, s$  são as direções em que se deseja maximizar os elipsóides, conhecidas *a priori*. Assim, o objetivo é maximizar os escalares  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  a fim de maximizar  $\alpha\mathcal{Z}_b \subset \Omega(P, \nu)$  e  $\beta\mathcal{Q}_b \subset \Omega(R, \sigma)$ . Em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000) é apresentado um estudo sobre os critérios de maximização a serem utilizados, onde os autores sugerem como critério a minimização de  $traço(R) + \frac{1}{\sigma}$ , devido ao fato do elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$  ser mais restritivo do que o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .

A seguir, serão apresentadas duas formas de se obter a solução do problema de otimização, cada uma delas baseada em um critério diferente.

**POD1:** Este problema de otimização é análogo ao utilizado na seção anterior, isto é, possui como critério de otimização o tamanho dos elipsóides em uma dada direção específica. Este problema será aplicado a todos os exemplos e a todos os objetivos de maximização. Sua formalização é dada por

$$\min (1 - \epsilon)\gamma + \epsilon\delta$$

$$\text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \nu\gamma & \mathbf{z}'_i \\ \mathbf{z}_i & W \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ \mathbf{q}'_j R \mathbf{q}_j \leq \sigma\delta, \quad j = 1, \dots, s \\ \text{Relações (103)-(105).} \end{array} \right. \quad (115)$$

**POD2:** Neste caso, o critério de maximização adotado é o mesmo considerado em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), aqui chamado de solução “traço”. A fim de tornar a relações do Teorema 5.2.1 idênticas às apresentadas em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), as substituições  $\chi = \frac{1}{\nu}$  e  $\eta = \frac{1}{\sigma}$  fazem-se necessárias. Assim, o novo critério de maximização é  $\text{traço}(R) + \eta$ , originando o seguinte problema de otimização:

$$\text{sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \min \text{traço}(R) + \eta \\ \left[ \begin{array}{cccccc} -\lambda W & * & * & * & * & * \\ X & -2L & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\omega R & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\eta + \omega\chi - \eta & * & * \\ \mathbf{A}W + \mathbf{B}_1Y & -L\mathbf{B}_1 - M\mathbf{V} & \mathbf{B}_3 & 0 & 0 & -W \end{array} \right] \leq 0, \\ \text{Relação (104),} \\ \left[ \begin{array}{cc} R & * \\ \mathcal{F}_{(i)} & \eta u_{0(i)}^2 \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \quad (116)$$

Mais uma vez,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ ,  $\beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$  e  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Na solução dos problemas de otimização será utilizado um *grid* em relação às variáveis  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$ , fazendo com que todas as relações utilizadas nos problemas de otimização tornem-se LMIs. A escolha destes parâmetros será apresentada junto dos resultados. Os métodos para a determinação da máxima referência e da condição inicial admitidas pelo sistema é análogo ao apresentado para o caso contínuo.

## 5.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, o comportamento da solução proposta será ilustrado baseado em exemplos numéricos. Os exemplos escolhidos são idênticos aos utilizados no caso contínuo, apenas considerando sua formulação em tempo discreto. Como dito anteriormente, a comparação destes resultados com a literatura apresentada fica prejudicada, considerando que nem (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000), nem (CAO; LIN; WARD, 2004), foram diretamente estendidos para o caso discreto. O trabalho (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000) foca seus resultados na variação da referência, sem explicitar diretamente a máxima referência obtida ou os conjuntos admissíveis. Os exemplos utilizados nesta seção foram os seguintes

**Integrador Duplo:** Este exemplo é a versão discreta do caso de dois integradores em cascata. Sua representação no espaço de estados é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad \text{e } u_0 = 0.3.$$

Para manter a coerência com o caso contínuo,  $M_1 = [0 \ 1]$ , o qual leva a  $M_2 = I_2$ . Novamente, a desejável propriedade  $(I_n - M_2 A M_2^{-1})E = 0$  é verificada, fazendo com que a referência  $r$  não influencie no elipsóide  $\Omega(R, \sigma)$ . Assim, a máxima referência admissível é definida unicamente por  $\Omega(P, \nu)$  e ainda  $\Omega(R, \nu)$  define exclusivamente a máxima perturbação admissível.

**Planta Estável:** Para este caso, foi considerada uma planta estável em malha-aberta dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

Novamente,  $M_1 = [0 \ 1]$  tal que  $M_2 = I_2$ . Neste caso, a máxima referência admissível será o menor valor entre a referência determinada por  $\Omega(P, \nu)$  e aquela determinada por  $\Omega(R, \sigma)$ . Este exemplo será utilizado para mostrar que a existência de pontos de equilíbrio indesejáveis no interior de  $\Omega(P, \nu)$  é motivo de preocupação mesmo para sistemas em tempo discreto.

**Planta Instável:** Considere a planta com um pólo instável dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], M_1 = [0 \ 1] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

Esta planta será utilizada para mostrar que a solução proposta é capaz de estabilizar o sistema, garantir seguimento de referência e ainda rejeitar perturbações constantes, mesmo para plantas instáveis.

**Planta Multivariável:** Este exemplo é a discretização do exemplo multivariável utilizado na capítulo anterior, conforme apresentado em (CHELLABOINA; HADDAD; OH, 1999) e estudado em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000). Sua formulação, no espaço de estados é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1025 & 0.2080 \\ 0 & 1.1167 & 4.1522 \\ 0 & 0.0951 & 1.0716 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], B = - \begin{bmatrix} 0.0879 & 0.0097 \\ 1.8038 & 0.2140 \\ 0.0992 & 0.0326 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, u_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}, \text{ e } M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com esta escolha de  $M_1$  tem-se  $M_2 = I_3$ . Este exemplo tem como objetivo mostrar a aplicabilidade da solução proposta a um sistema multivariável retirado de um problema real. Os autovalores da matriz  $A$  são dados por  $\{1.0000, 1.7229, 0.4654\}$ .

#### 5.4.1 Influência da variação de parâmetros

O objetivo desta seção é analisar como os parâmetros  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  influenciam nos resultados do problema de otimização. A Tabela 5.4.1 apresenta os resultados do problema de otimização para a planta estável, com  $\epsilon = 0.5$ ,  $\mathcal{Z}_b = cov\{z_1\}$ ,  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{Q}_b = cov\{q_1\}$  com  $q_1 = [(M_2 A M_2^{-1} - I_n)E]^T \ 0]^T$ .

Pode-se notar que  $\lambda$  influencia da mesma forma em todas as variáveis de interesse. Assim, quanto maior o valor de  $\lambda$ , melhores tendem a ser os resultados. Infelizmente, esta

Influência da variação de parâmetros					
Variação de $\lambda$ ( $\omega = 1.0 \times 10^{-5}$ , $\nu = 1.0 \times 10^{-4}$ , $\sigma = \nu$ )					
$\lambda$	0.9000	0.8000	0.5000	0.2000	0.1000
$\alpha$	15.3198	6.8455	0.5356	0.0704	0.0294
$\beta$	0.6277	0.3196	0.0236	0.0026	0.0009
$r_{max1}$	$1.9896 \times 10^3$	$1.0127 \times 10^3$	$0.0748 \times 10^3$	$0.0081 \times 10^3$	$0.0030 \times 10^3$
$r_{max2}$	6.9764	3.5522	0.2628	0.0286	0.0104
Variação de $\omega$ ( $\lambda = 0.9$ , $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$ , $\sigma = \nu$ )					
$\omega$	$1.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-6}$
$\alpha$	137.2529	96.0340	53.7874	42.5101	15.6091
$\beta$	14.9916	14.9918	5.5361	1.7516	0.5538
$r_{max1}$	$4.3448 \times 10^3$	$3.0426 \times 10^3$	$1.7576 \times 10^3$	$1.7563 \times 10^3$	$1.7568 \times 10^3$
$r_{max2}$	52.6898	52.6898	19.4587	6.1560	1.9464
Variação de $\nu$ ( $\lambda = 0.9$ , $\omega = 0.01$ , $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$ )					
$\nu$	$1.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-5}$
$\alpha$	223.2618	137.2412	54.7233	20.0400	11.0011
$\beta$	5.1706	5.2624	5.5424	6.2662	7.2422
$r_{max1}$	$1.6373 \times 10^3$	$1.6678 \times 10^3$	$1.7559 \times 10^3$	$2.0111 \times 10^3$	$3.4813 \times 10^3$
$r_{max2}$	181.6984	184.9405	194.7703	220.2506	254.5437
Variação de $\sigma$ ( $\lambda = 0.9$ , $\omega = 0.01$ , $\nu = 0.1$ )					
$\sigma$	$1.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-5}$
$\alpha$	499.6460	743.7363	395.5589	327.9742	223.2618
$\beta$	14.9941	14.9977	14.9900	14.9910	5.1706
$r_{max1}$	$3.3301 \times 10^3$	$3.3452 \times 10^3$	$3.2545 \times 10^3$	$1.9551 \times 10^3$	$1.6373 \times 10^3$
$r_{max2}$	5.2694	16.6654	52.6872	166.6406	181.6984

Tabela 6: Variação de  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$

variável tem um limitante superior, ou seja, para que a relação (103) garanta a estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada, deve-se ter  $\lambda < 1$ . Uma condição ainda mais restritiva é que, para dados  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$ , o valor de  $\lambda$  fica limitado por  $\lambda\nu + \omega\sigma - \nu$ . A variação de  $\omega$  se comporta de maneira análoga a  $\lambda$ , com a vantagem de poder assumir qualquer valor desde que  $\sigma$  seja suficientemente pequeno.

O valor de  $\nu$  apresenta resultados diferentes para  $\alpha$  do que as demais variáveis, apresentando um comportamento diretamente proporcional. Assim, se o objetivo for maximizar  $\alpha$ , o valor de  $\nu$  deverá ser grande. Outro fator importante é que o valor de  $\beta$  é menos sensível à variação de  $\nu$  do que as demais variáveis de interesse. Para  $\lambda$ ,  $\omega$  e  $\sigma$  fixos,  $\nu$  pode assumir qualquer valor desejado.

A variável  $\sigma$  apresenta um comportamento peculiar, já que esta possui um pico de variação próximo a  $\sigma = 1.0 \times 10^{-2}$  para  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $r_{max1}$ . Outros fatos marcantes são a pouca variação em relação as variáveis  $\beta$  e  $r_{max1}$  e a grande variação para as demais. Assim como  $\omega$ , a variação de  $\sigma$  está limitada pela relação  $\lambda\nu + \omega\sigma - \nu$ .

#### 5.4.2 Maximização da referência admissível

Assim como no caso contínuo, o objetivo de controle é maximizar a referência que o sistema é capaz de seguir com erro nulo. O procedimento para o cálculo desta referência, considerando  $x_2(0) = 0$  e  $\xi(0) = 0$ , é apresentado na Seção 4.4. Os problemas de otimização serão aplicados a cada um dos exemplos acima. Os parâmetros  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  indicados em cada exemplo correspondem à configuração que apresentou a maior referência possível. Nos exemplos SISO da abordagem clássica, os elipsóides foram maximizados nas direções  $\mathcal{Z}_b = cov\{z_1\}$  com  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{Q}_b = cov\{q_1\}$  com  $q_1 = [((M_2AM_2^{-1} - I_n)E)^T \ 0]^T$ . Para o exemplo multivariável as direções foram  $z_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e  $q_1 = [((M_2AM_2^{-1} - I_n)E)^T \ 0 \ 0]^T$ .

##### 5.4.2.1 Solução “clássica” (POD1)

O primeiro exemplo ao qual POD1 foi aplicado é o caso do integrador duplo. Como a referência máxima admissível depende exclusivamente de  $\Omega(P, \nu)$ , o problema foi resolvido considerando  $\epsilon = 0$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0 \times 10^{-5}$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$ , resultando em  $r_{max} = 532.1852$ . O resultado da simulação do sistema é apresentado na Figura 33, onde nota-se claramente que o sistema satura três vezes em limites distintos antes de se acomodar.

A aplicação de POD1 para a planta estável apresentou o problema de existência de pontos de equilíbrio fora da região linear, mas ainda no interior do elipsóide. Os resultados para  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-6}$  foram  $r_{max1} = 2338.6$  e  $r_{max2} = 1666.1$ . A Figura 34 mostra a saída do sistema para uma referência  $r = 100$  para  $0 \leq k \leq 70$  e  $r = -100$  para  $k > 70$ . Pode-se notar que a saída do sistema não ultrapassa o valor<sup>1</sup>  $G_v(1)u_0 = 15$ . Novamente, um estudo mais detalhado sobre este tipo de ponto de equilíbrio será apresentado no Capítulo 6. Assim, para o exemplo estável, qualquer referência maior que  $r = 15$  será desconsiderada. Na Figura 35 é apresentada a saída do sistema para  $r = 14$ . Pode-se notar que o sistema permanece saturado por quase todo o tempo de estabilização.

Para a planta instável, o POD1 foi aplicado considerando  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.83$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-4}$ , tendo como resultado  $r_{max1} = 19.7914$  e

<sup>1</sup>As funções de transferência de malha fechada são definidas por  $G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)}$ ,  $G_d(z) = \frac{y(z)}{d(z)}$  onde  $v(t) = (sat_{u_0}(u(k)))$ .

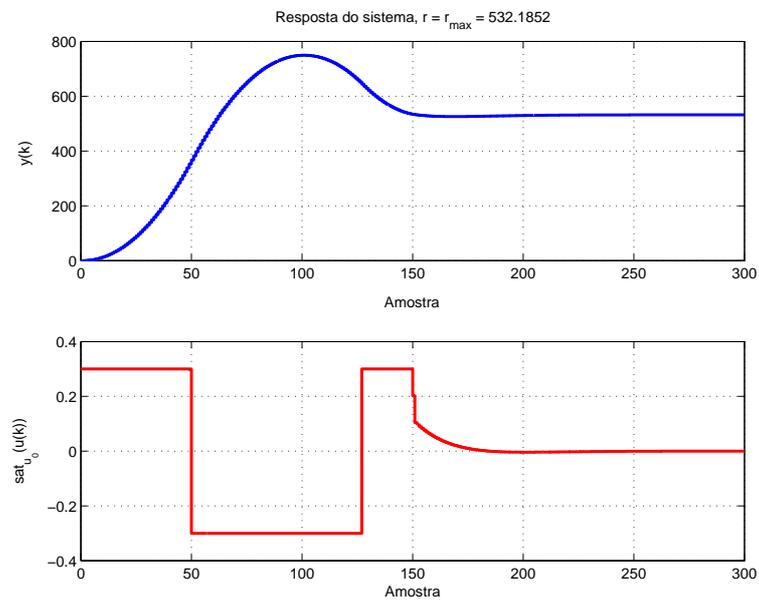


Figura 33: Máxima Referência - Integrador Duplo - POD1

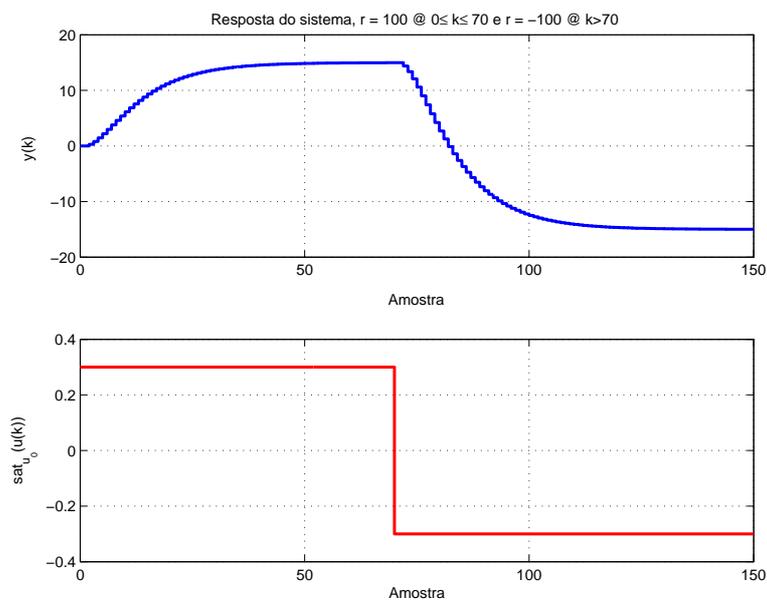


Figura 34: Máxima Referência - Planta Estável - Equilíbrios Parasitas

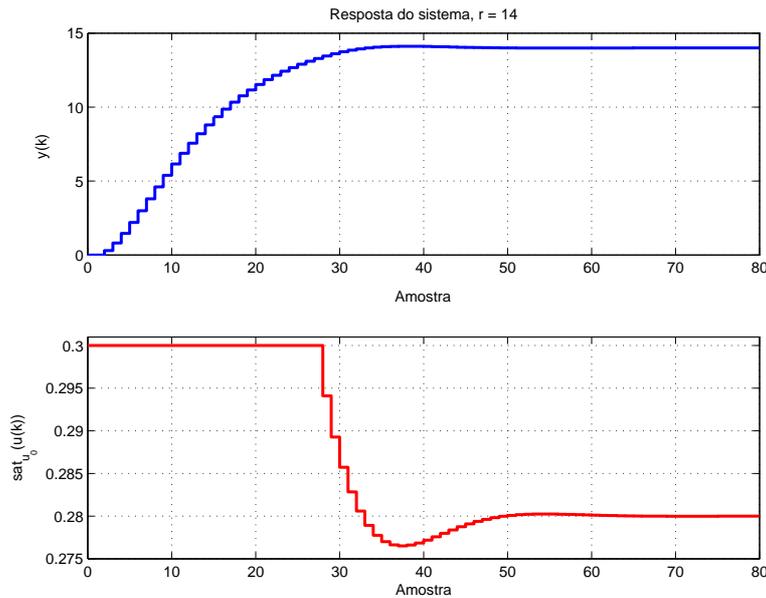


Figura 35: Máxima Referência - Planta Estável - POD1

$r_{max2} = 13.2174$ . Mais uma vez, simulação da saída do sistema e do sinal de controle é apresentada na Figura 36.

O último exemplo a ser estudado é o caso multivariável. O sistema escolhido apresenta uma única saída, fazendo com que o cálculo da máxima referência admissível seja feito de forma análoga ao caso SISO. Mais uma vez,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 0.01$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\sigma = \nu$ , parâmetros que geraram como resultado, após a solução de POD1,  $r_{max1} = 1793.8$  e  $r_{max2} = 104.1962$ . Estes resultados são ilustrados através da simulação da saída do sistema apresentada na Figura 37. Para os dois sinais de controle, pode-se observar um caráter inicial análogo ao apresentado para o exemplo do integrador duplo, isto é, o sinal de controle oscilando entre os limites de saturação.

#### 5.4.2.2 Solução “traço” (POD2)

Neste caso, não é necessária a escolha de nenhuma direção de otimização bem como de  $\epsilon$ . Um cuidado que deve-se ter é que, como o critério desconsidera  $\Omega(P, \nu)$ , a referência  $r_{max1}$  pode ser menor que  $r_{max2}$ . Para fins de comparação, os parâmetros  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  são os mesmos utilizados no problema POD1. Os resultados obtidos após a solução de POD2 são mostrados na Tabela 7.

Tabela 7: Maximização da Referência - POD2

	Integrador Duplo	Planta Estável	Planta Instável	Multivariável
$r_{max1}$	527.9145	6672.0	159.4810	2083.8
$r_{max2}$	698.3267	1617.8	9.2839	60.3193

Pode-se notar que o valor de referência obtido para o integrador duplo é muito próximo ao valor obtido pelo problema POD1. Outro fato relevante é que, ao contrário dos outros exemplos, a referência mais restritiva foi  $r_{max1}$ . É provável que, utilizando-se um critério que leve em conta  $\Omega(P, \nu)$ , a máxima referência admissível seja maior. Para a planta estável, os resultados obtidos também foram muito próximos aos do POD1, fato que não

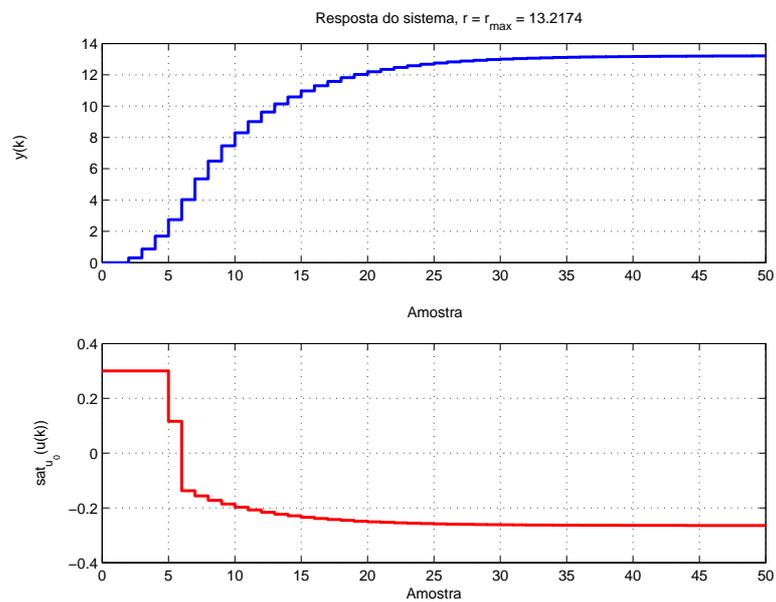


Figura 36: Máxima Referência - Planta Instável - POD1

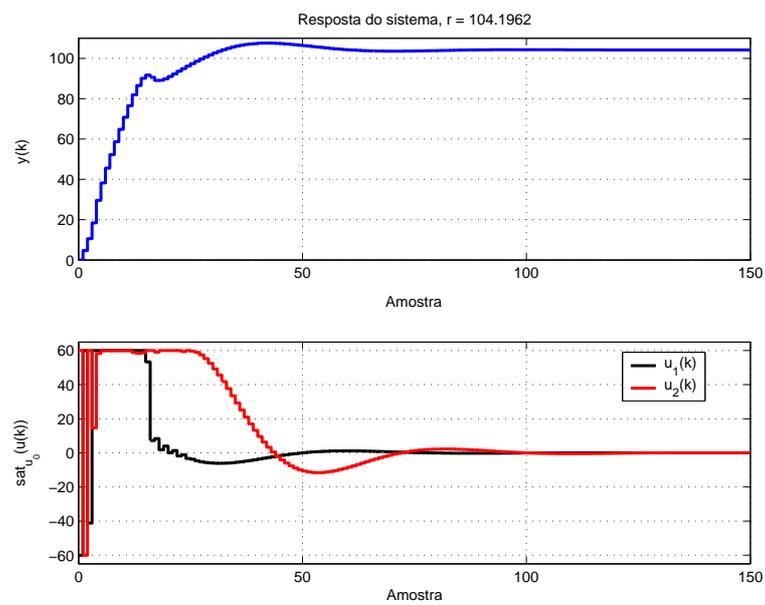


Figura 37: Máxima Referência - Planta Multivariável - POD1

ocorreu para a planta estável e a planta multivariável, onde os resultados obtidos foram cerca de 30% menores. Isto pode ser explicado pelo fato da direção  $q_1$  não ser a direção de maximização mais restritiva.

### 5.4.3 Maximização do conjunto de condições iniciais

O objetivo, agora, é maximizar o conjunto de condições iniciais do sistema (90), isto é, determinar  $x_2(0)$  com  $\xi(0) = 0$  para qual o seguimento de referências com erro nulo é garantido. Um cuidado que deve-se ter na escolha dos parâmetros é que a referência desejada ainda seja admissível pelo sistema. Isto faz com que, para alguns exemplos  $\epsilon = 0$  e outros  $\epsilon = 0.5$ .

#### 5.4.3.1 Solução “clássica” (POD1)

Seguindo a mesma linha apresentada no caso contínuo, a condição inicial admissível para o sistema foi maximizada considerando unicamente o elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  e considerando uma referência desejada  $r = 5.0$ . Para o integrador duplo utilizando como parâmetros  $\epsilon = 0$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0 \times 10^{-5}$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-5}$ , o máximo valor de  $x_2(0)$  encontrado foi  $x_2(0) = 70.5620$ , cuja simulação da saída do sistema é apresentada na Figura 38. É fácil de notar que esta condição acentuou o caráter oscilatório que a resposta apresentava para a maximização da referência.

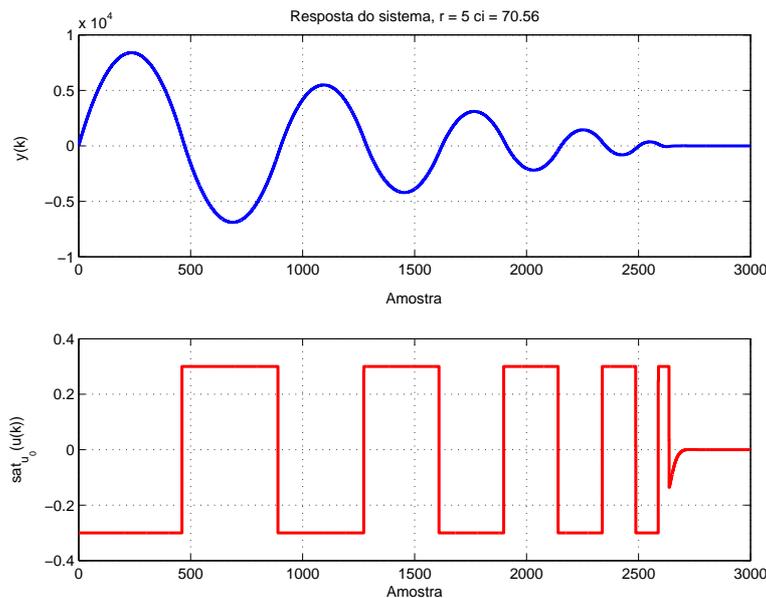


Figura 38: Máxima Condição Inicial - Integrador Duplo - POD1

Para aplicação de POD1 na planta estável, é esperado que esta consiga garantir o seguimento de referência com erro nulo para grandes valores de  $x_2(0)$ . Tendo como parâmetros  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 0.1$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\sigma = 0.1$ , o resultado obtido foi  $x_2(0) = 886.3017$ . Na simulação apresentada na Figura 39 pode-se notar que, além do elevado sobre-sinal, o sinal de controle permanece saturado por quase todo tempo de acomodação. Isto indica um grande esforço do laço *anti-windup*.

A exemplo do caso contínuo, foi projetado um controlador considerando  $E_c = 0$ . Mais uma vez, o objetivo é comparar a influência do termo *anti-windup*. Na Figura 40, nota-se que o sistema com compensação de *windup* se acomoda muito mais rápido do que

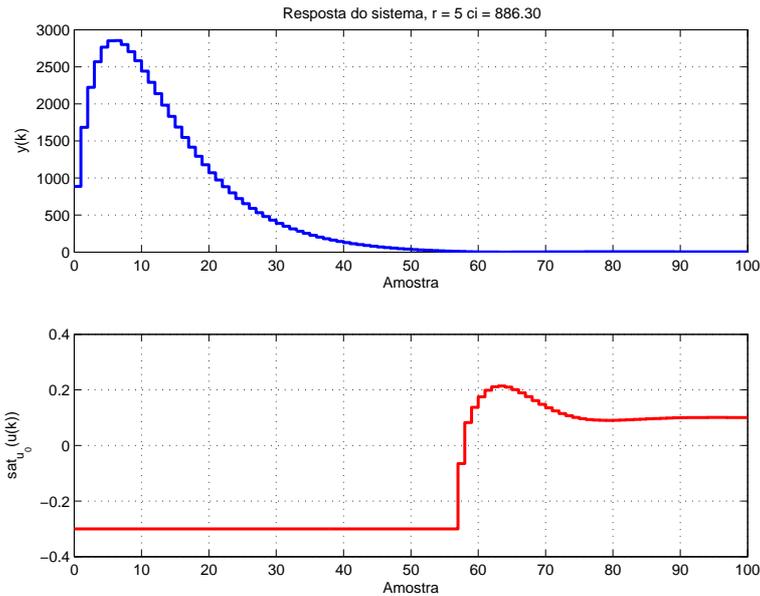


Figura 39: Máxima Condição Inicial - Planta Estável - POD1

o controlador com  $E_c = 0$ . Novamente, o tempo que o sistema leva para se acomodar após o controle deixar de saturar é menor no sistema com *anti-windup*.

Em se tratando do exemplo instável, é esperado que este admita a menor condição inicial para a qual o seguimento é garantido. O problema POD1 foi aplicado ao sistema considerando  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.83$ ,  $\omega = 1$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-4}$ , apresentando como resultado  $x_2(0) = 2.2984$ . Na Figura 41 nota-se que o sistema se torna mais lento e o controle permanece saturado em grande parte do tempo de acomodação.

Considerando a planta multivariável e de forma análoga ao caso contínuo, foi escolhido  $x_{21}(0) = x_{22}(0)$  e, ainda,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-3}$ . O problema POD1 apresentou como solução  $x_{21}(0) = x_{22}(0) = 22.6473$ , mostrada na Figura 42.

#### 5.4.3.2 Solução “traço” (POD2)

A aplicação de POD2, neste caso, fica prejudicada, já que este não considera o tamanho do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$  no critério de maximização. Mesmo sem considerar este elipsóide, será mostrado que a condição inicial obtida por POD2 ainda está em um valor aceitável, isto é, é significativa em relação à referência. Uma forma alternativa, seria utilizar como critério a minimização de  $\text{traço}(W^{-1}) + \chi + \text{traço}(R) + \eta$ . Os resultados da aplicação de POD2 em cada um dos exemplos são mostrados na Tabela 8. Mais uma vez, os parâmetros  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  foram os mesmos utilizados no problema POD1.

Tabela 8: Maximização da Condição Inicial - POD2

	Integrador Duplo	Planta Estável	Planta Instável	Multivariável
$x_2(0)$	23.6601	350.8061	2.2157	22.9612

A única melhora nos resultados em relação aos obtidos pelo problema POD1 foi para o exemplo multivariável, mas mesmo assim pouco relevante. Nos demais exemplos, ou o resultado foi praticamente o mesmo (planta instável), ou consideravelmente menor.

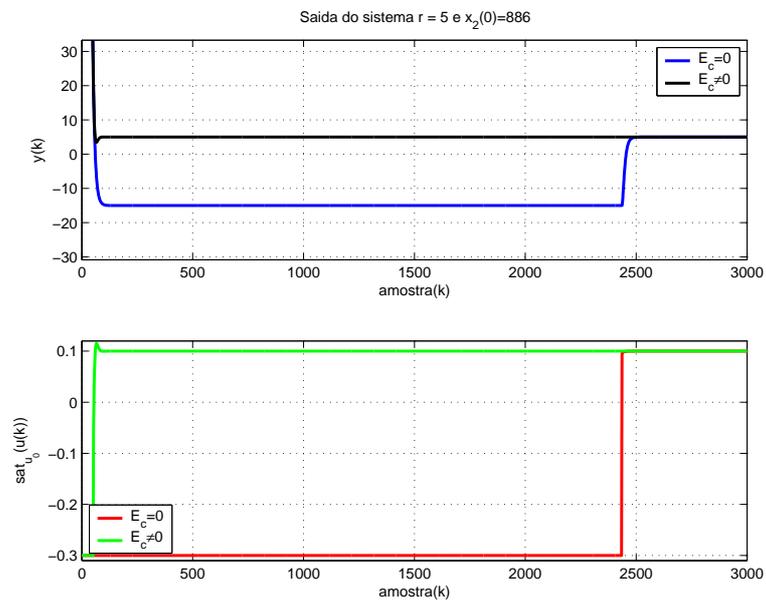


Figura 40: Comparação -  $E_c = 0$  e  $E_c \neq 0$ .

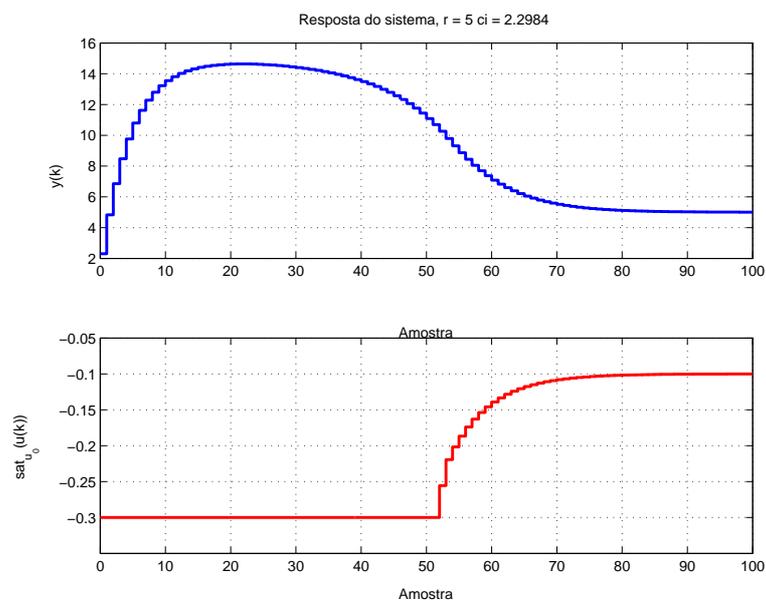


Figura 41: Máxima Condição Inicial - Planta Instável - POD1

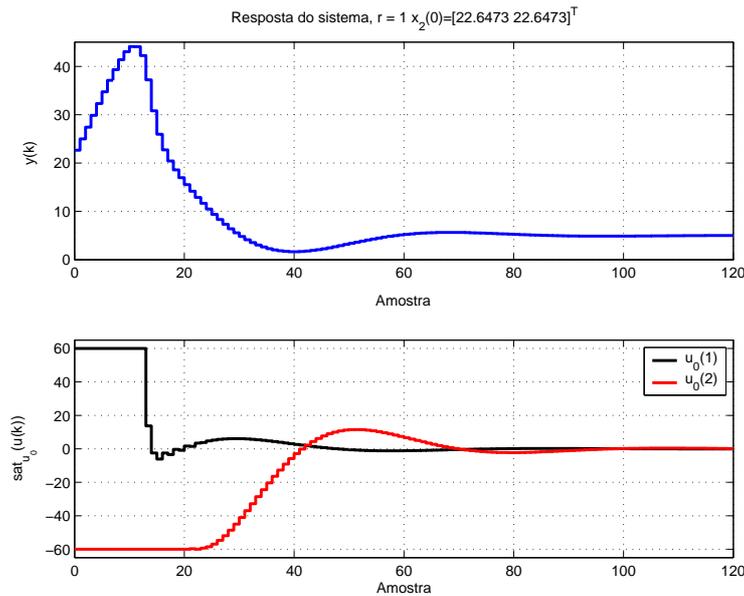


Figura 42: Máxima Condição Inicial - Planta Multivariável - POD1

#### 5.4.4 Maximização da perturbação admissível

Assim como no caso contínuo, o objetivo é maximizar a perturbação constante para qual o sistema consegue garantir o seguimento da referência desejada  $r_d$ . Mais uma vez, a primeira relação do problema POD1 deve substituída pela relação (89), a fim de que  $\Omega(P, \nu)$  seja maximizado para a referência  $r_d$ . Em todos os casos, a referência escolhida foi  $r_d = 1$ .

##### 5.4.4.1 Solução “clássica” (POD1)

Neste caso, como não é possível uma comparação direta com a literatura, existe a liberdade na escolha da direção  $q_1$ . A direção escolhida foi  $q_1 = [((M_2 A M_2^{-1} - I_n) E)^T (M_2 B_d)^T]^T$  para todos exemplos, o que leva a maximização conjunta na direção  $r = 1$  e  $d = 1$

O problema POD1 foi aplicado ao integrador duplo considerando como parâmetros  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 0.01$ ,  $\nu = 1$  e  $\sigma = 1$ , os quais resultarem em  $\beta_{opt} = 0.0619$ . Como está ilustrado na Figura 43, mesmo este pequeno valor de perturbação provoca um grande sobre-sinal na saída do sistema. O sinal de controle não chega a atingir os limites de saturação devido ao fato da referência escolhida ser muito menor que a máxima referência admissível. A perturbação  $d = 0.0619$  foi aplicada em  $k > 150$ .

Para o exemplo da planta estável, os parâmetros utilizados foram  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 0.001$ ,  $\nu = 1$  e  $\sigma = 1$ . A solução do problema POD1 apresentou  $\beta_{opt} = 0.2542$ , o qual foi aplicado ao sistema em  $k > 50$ , conforme mostrado na Figura 44. Pode-se notar que a perturbação faz com que o sistema volte a saturar e assim permanecer por quase todo o tempo de rejeição.

Conforme o esperado, a planta instável foi a que apresentou piores resultados em relação a rejeição da perturbação. Para os parâmetros  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0 \times 10^{-4}$ ,  $\nu = 1$  e  $\sigma = 100$ , o resultado obtido foi  $\beta_{opt} = 0.0405$ . Esta perturbação foi aplicada à saída do sistema em  $k > 100$ , conforme mostrado na Figura 45. O sistema inicia saturado, mas a perturbação não é suficiente para fazer com que o controle volte a

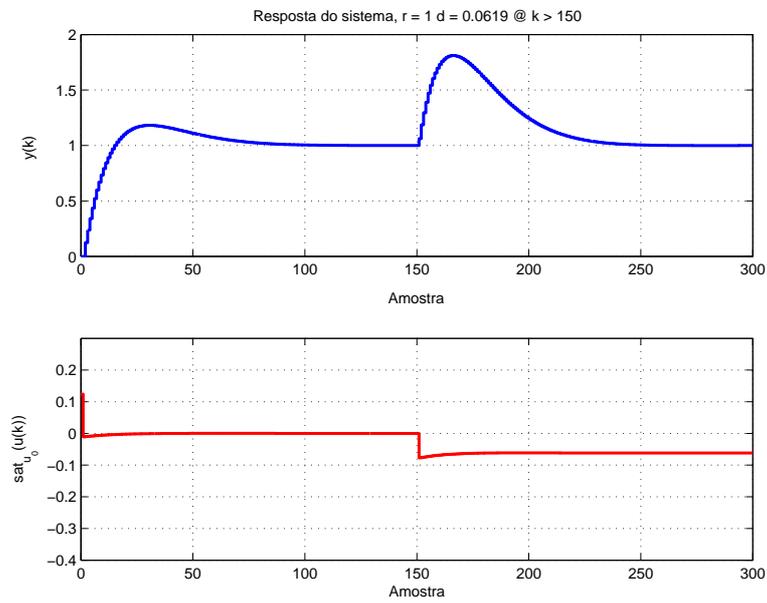


Figura 43: Máxima Perturbação - Integrador Duplo - POD1

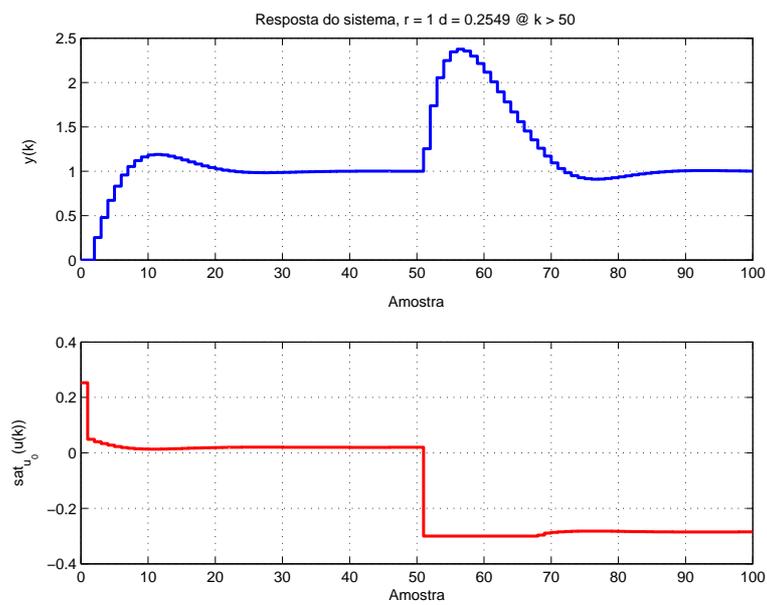


Figura 44: Máxima Perturbação - Planta Estável - POD1

saturar.

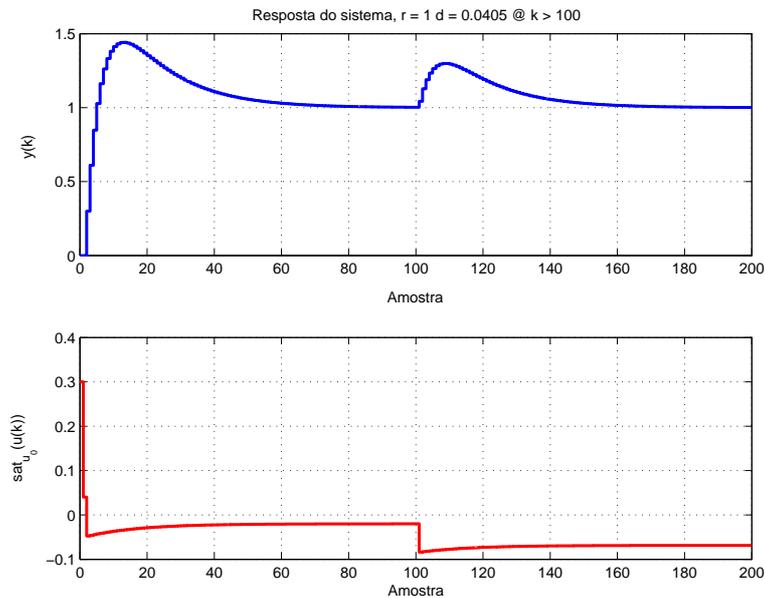


Figura 45: Máxima Perturbação - Planta Instável - POD1

Levando em conta as mesmas considerações relativas a planta multivariável feitas para caso contínuo, o problema POD1 foi resolvido considerando os parâmetros  $\epsilon = 1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-5}$  e  $\sigma = 1.0 \times 10^{-3}$  e apresentando como resultado  $d_1 = d_2 = 1.3509$ . A simulação da saída do sistema e sinal de controle é apresentada na Figura 46, onde nota-se que a referência não chega a saturar o sistema, mas a perturbação faz com que a saída  $u_2(k)$  fique saturada por quase todo tempo de seguimento.

#### 5.4.4.2 Solução “traço” (POD2)

Seguindo a metodologia adotada no outros exemplo, os parâmetros  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  serão os mesmos utilizados para o problema POD1, permitindo assim, uma comparação direta dos resultados obtidos. As soluções obtidas são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9: Maximização da Perturbação Admissível - POD2

	Integrador Duplo	Planta Estável	Planta Instável	multivariável
$d_{max}$	0.2904	0.2565	0.1954	1.4260

Pode-se notar que houve um ganho significativo nos resultados do integrador duplo e da planta instável, provavelmente causada pela existência de uma direção menos conservativa do que a escolhida no POD1. Já o ganho para os casos estável e multivariável não foi tão grande, mas mesmo assim houve uma melhora. A resposta do sistema para os casos do integrador duplo e da planta estável é mostrada nas Figuras 47 e 48, respectivamente.

## 5.5 Comentários Finais

Nesta capítulo, a solução apresentada no Capítulo 4 foi estendida para sistemas em tempo discreto. Mais uma vez, foi possível estabelecer condições teóricas para a síntese simultânea do controlador estabilizante e do ganho *anti-windup* a fim de garantir

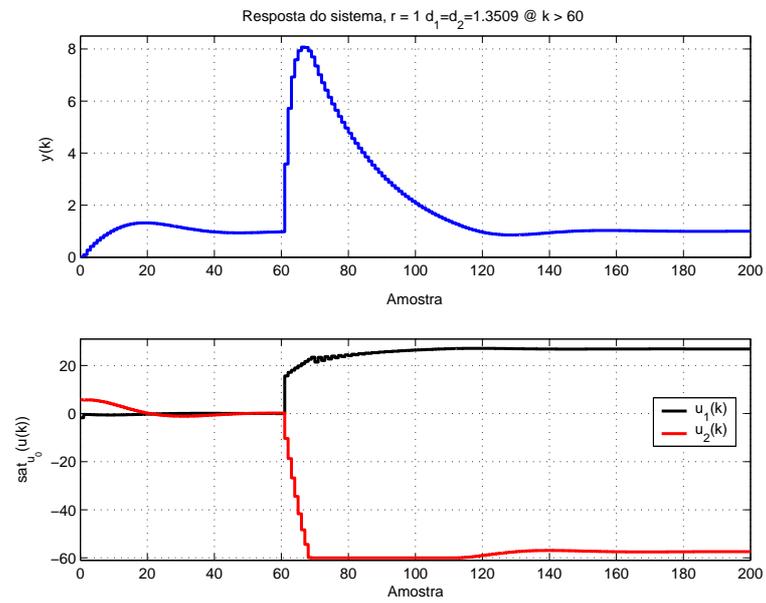


Figura 46: Máxima Perturbação - Planta multivariável - POD1

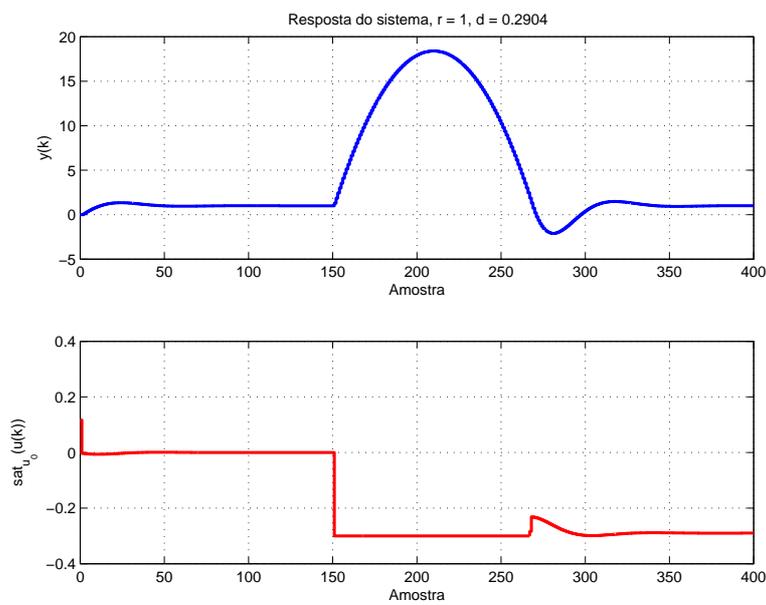


Figura 47: Máxima Perturbação - Integrador Duplo - POD2

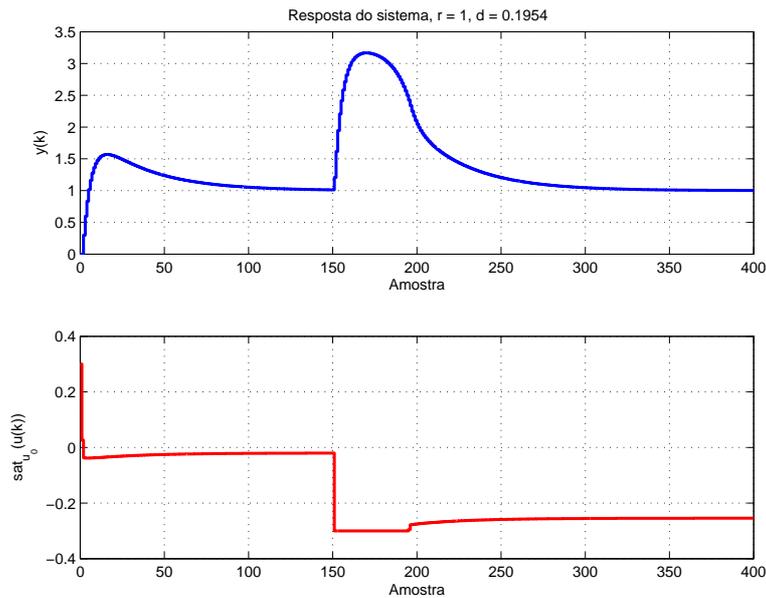


Figura 48: Máxima Perturbação - Planta Instável - POD2

o seguimento de referências constantes e a rejeição de perturbação também constantes. Foi possível determinar um conjunto de condições iniciais para as quais as trajetórias do sistema ficam confinadas, além de um conjunto de influências externas admissíveis.

Mesmo sem ter um trabalho para comparação direta de resultados, foi mostrada a aplicabilidade da abordagem proposta para uma gama de exemplos e objetivos de controle. Um breve estudo sobre a influências da escolha de alguns parâmetros de projeto foi apresentado, estabelecendo assim, tendências de escolha para estes parâmetros nos exemplos seguintes. Além disso, foi estabelecida uma comparação entre a abordagem proposta e a abordagem que considera como critério da maximização o traço( $R$ ) +  $\eta$ . Para a abordagem proposta em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000), este era o critério que apresentava os melhores resultados. Esta comparação mostrou que a otimização proposta em (TARBOURIECH; QUEINNEC; PITTET, 2000) só apresenta melhora significativa dos resultados quando o objetivo de otimização é a maximização do conjunto de perturbações admissíveis. Finalmente, um problema multivariável foi apresentado a fim de mostrar o comportamento do sistema quando há características distintas nos pólos da planta.

## 6 ANÁLISE DA EXISTÊNCIA DE PONTOS DE EQUILÍBRIO FORA DA REGIÃO DE LINEARIDADE

### 6.1 Introdução

Os resultados apresentados até agora garantem apenas que, caso exista um ponto de equilíbrio garantindo erro de seguimento nulo, este ponto estará dentro da região de linearidade do sistema. Entretanto, nada é observado sobre a existência de outros pontos de equilíbrio fora da região linear. O que deseja-se estudar é se, para um dado  $z(0) \in \Omega(P, \nu)$  e  $\forall r, q$  tal que  $q \in \Omega(R, \sigma)$ , pode ocorrer a existência de um ponto de equilíbrio fora de  $S(F, u_0)$  mas ainda no interior de  $\Omega(P, \nu)$ . Neste caso, este suposto ponto de equilíbrio ocasionará um erro de seguimento na saída do sistema. Esta possibilidade não foi considerada em nenhum dos trabalhos anteriores que utilizam esta topologia de controle. Assim, neste capítulo será feito um estudo sobre estes pontos de equilíbrio e ainda, quando necessário, serão apresentadas condições que impossibilitem a sua existência.

Nas seções a seguir, serão apresentadas condições baseadas nos autovalores da matriz  $A$  e nas funções de transferência do sistema em malha aberta, tanto para sistemas de tempo contínuo quanto para sistemas em tempo discreto. As condições apresentadas se aplicam apenas para o caso SISO. Condições para sistemas multivariáveis serão objetivos de estudos futuros.

### 6.2 Caso Contínuo

Considere as funções de transferência em malha-aberta  $G_v(s)$  e  $G_d(s)$ , definidas por

$$G_v(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B \quad G_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = C(sI_n - A)^{-1}B_d$$

onde  $v(t) = (\text{sat}_{u_0}(u(t)))$ . As condições aqui apresentadas consideram  $G_v(0) > 0$  e  $G_d(0) > 0$ . A dedução para  $G_v(0) < 0$  e  $G_d(0) < 0$  é feita de forma análoga. Além disso, considere  $z_{eo}$  como o possível ponto de equilíbrio fora da região linear. Caso  $z_{eo}$  exista, então as seguintes equações devem ser verificadas:

$$0 = \hat{A} \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + M_2 B \text{sat}_{u_0}(Fz_{eo}) + q, \quad (117)$$

$$0 = E^T \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + E_c (\text{sat}_{u_0}(Fz_{eo}) - Fz_{eo}), \quad (118)$$

onde  $\hat{A} = M_2 A M_2^{-1}$ . Note que a relação (118) é equivalente a

$$e_e = E_c \Psi_{u_0}(Fz_{eo}). \quad (119)$$

Caso  $E_c$  fosse nulo, a existência de outros pontos de equilíbrio não seria possível. Neste caso, o integrador continuaria a acumular carga indefinidamente, levando o sistema à perda da estabilidade no sentido de Lyapunov.

Supõe-se que todas as condições do Teorema 4.3.1 são verificadas. Baseado neste teorema, pode-se então enunciar os seguintes corolários, relativos a três casos dos autovalores da matriz  $A$ .

**Caso 1:** Matriz  $A$  possui todos os autovalores com parte real negativa (sistema em malha aberta assintoticamente estável).

Neste caso, o seguinte corolário pode ser enunciado em relação à existência de  $z_{eo}$ :

**Corolário 6.2.1** *Se o sistema em malha-aberta é assintoticamente estável e se a referência  $r$  e a perturbação  $d$  são constantes e verificam a relação*

$$\left| [I - G_d(0)] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \right| \leq G_v(0)u_0, \quad (120)$$

então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .

*Prova.* Suponha que o sistema (40) está saturado em qualquer um de seus limites (aqui chamado de  $u_e$ ) e ainda que o ponto de equilíbrio  $z_{eo}$  existe. Então, a saída  $y_{eo}$  do sistema será dada por

$$y_{eo} = G_v(0)u_e + G_d(0)d. \quad (121)$$

Considere  $E_c < 0$  e que o sistema está saturado em seu limite superior. Neste caso,  $u_e = u_0$  e ainda  $\Psi_{u_0}(Fz_{eo}) > 0$ . Pela relação (119), pode-se concluir que este equilíbrio existirá somente se  $e_e = y_{eo} - r < 0$  ou, ainda, se

$$G_v(0)u_0 + G_d(0)d - r < 0. \quad (122)$$

Desta equação, segue que o ponto de equilíbrio  $z_{eo}$  só existirá se  $r - G_d(0)d > G_v(0)u_0$ , o que contradiz a relação (120).

Considere agora,  $E_c < 0$  e que o sistema está saturado em seu limite inferior. Neste caso,  $u_e = -u_0$  e ainda  $\Psi_{u_0}(Fz_{eo}) < 0$ . Pela relação (119), pode-se concluir que este equilíbrio existirá somente se  $e_e = y_{eo} - r > 0$  ou, ainda, se

$$-G_v(0)u_0 + G_d(0)d - r > 0. \quad (123)$$

Desta equação, segue que o ponto de equilíbrio  $z_{eo}$  só existirá se  $r - G_d(0)d < -G_v(0)u_0$ , o que também contradiz a relação (120).

É importante notar que se  $E_c > 0$ , por construção, não há a possibilidade de existência de  $z_{eo}$ , devido ao fato que a relação (119) não possui solução. Se o sistema está saturado em seu limite superior, então  $\Psi_{u_0}(Fz_{eo}) > 0$  e  $y_{eo} < r$ , o que impossibilita a verificação de (119). O mesmo pode-se concluir para quando o sistema estiver saturado em seu limite inferior. ■

**Observação 6.2.1** A ocorrência destes pontos de equilíbrio está diretamente relacionada a introdução do laço de anti-windup na malha de controle. No caso sem anti-windup ( $E_c = 0$ ), a relação (119) implicaria em erro nulo de seguimento também para estes pontos. Conforme provado anteriormente, o único ponto de equilíbrio que garante erro nulo de seguimento dentro de  $\Omega(P, \nu)$  está no interior da região de linearidade do sistema, o que contradiz a suposição de que o equilíbrio está fora desta região.

**Observação 6.2.2** Note que, caso (120) não seja satisfeita, mesmo que  $r$  e  $d$  sejam tais que  $q \in \Omega(R, \sigma)$ , isto implica que  $r$  não é uma referência admissível (realizável) no sentido da Definição 3.5.1. Na abordagem proposta, o conjunto  $Z$  seria equivalente a  $S(F, u_0)$ . Assim, nada pode-se garantir sobre o erro de seguimento para esta referência.

**Caso 2:** Matriz  $A$  é não-singular e possui pelo menos um autovalor com parte real positiva.

Para plantas instáveis em malha-aberta, o seguinte corolário resume a existência de  $z_{eo}$ :

**Corolário 6.2.2** Se o sistema (40) é instável, então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .

*Prova.* O sistema nas coordenadas do erro (46) pode ser reescrito na forma

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \mathbb{B}sat_{u_0}(Fz(t)) + \mathbf{B}_3q \quad (124)$$

onde  $\tilde{A} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2F$  e  $\mathbb{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , conforme definido anteriormente. Assim, o suposto ponto de equilíbrio  $z_{eo}$  fora da região linear deve ser da forma

$$z_{eo} = \tilde{A}^{-1}(-\mathbb{B}u_e - \mathbf{B}_3q),$$

onde  $u_e$  é o um dos limites de saturação.

Fazendo a mudança de variável  $\bar{z}(t) = z(t) - z_{eo}$  no entorno do ponto de equilíbrio, segue que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) &= \tilde{A}\bar{z}(t) + \tilde{A}z_{eo} + \mathbb{B}sat_{u_0}(F\bar{z} - Fz_{eo}) + \mathbf{B}_3q, \\ \dot{\bar{z}}(t) &= \tilde{A}\bar{z}(t) + \tilde{A}z_{eo} + \mathbb{B}u_e + \mathbf{B}_3q, \\ \dot{\bar{z}}(t) &= \tilde{A}\bar{z}(t). \end{aligned} \quad (125)$$

Por definição, a matriz  $\tilde{A} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2F$  pode ser escrita, considerando  $F = [f_1 \ f_2]$ , como

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} M_2AM_2^{-1} & 0_{n \times p} \\ E^T - E_cf_1 & -E_cf_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, uma matriz bloco-triangular inferior. Assim, como  $M_2AM_2^{-1}$  é uma transformação de similaridade e esta não altera os autovalores da matriz  $A$ ,  $\tilde{A}$  possuirá os mesmos autovalores de  $A$ , acrescidos dos autovalores de  $-E_cf_2$ . Logo, se  $A$  é instável, então  $\tilde{A}$  também será, o que implica que  $z_{eo}$ , se existir, é um ponto equilíbrio instável e, conseqüentemente, não pode estar no interior de  $\Omega(P, \nu)$ , pois existiriam direções invariantes (associadas aos autovetores de  $\tilde{A}$ ) nas quais as condições iniciais provocariam a divergência das trajetórias. ■

**Caso 3:** Matriz  $A$  possui pelo menos um autovalor real nulo.

Para este tipo de sistema, a existência de  $z_{eo}$  pode ser resumida no corolário a seguir:

**Corolário 6.2.3** *Se o sistema (40) possui pólos na origem, então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .*

*Prova.* Este caso é equivalente a um integrador em malha aberta sujeito a uma entrada constante. É conhecido da teoria de análise de sistemas lineares que um sistema em malha-aberta com pólos em zero sujeito a uma entrada constante tende a divergir, ou seja,  $y(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Suponha agora que o sistema (40) está saturado em qualquer um de seus limites, admitindo o seguinte comportamento:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_e + B_d d \Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}$$

Partindo das suposições que os pares  $(A, B)$  e  $(C, A)$  são controláveis e observáveis, respectivamente, e de que o sistema está em equilíbrio em  $z_{eo}$ , a saída do sistema  $y(t) = Cx(t)$  diverge e, conseqüentemente,  $e(t) = y(t) - r$  também diverge. Como o ponto de equilíbrio  $z_{eo}$ , por definição, é dado por

$$z_{eo} = \begin{bmatrix} e_{eo} \\ x_{2eo} \\ \xi_{eo} \end{bmatrix},$$

então, o fato do sinal de erro estar divergindo contradiz a suposição de que o sistema está em equilíbrio. Note que, caso contrário, existe sinal de controle suficiente para cancelar os efeitos da perturbação e o ponto de equilíbrio estará na região linear, alcançada devido ao fato de  $BFz_e = -B_d d$ . ■

### 6.3 Caso Discreto

Considere agora, as funções de transferência em malha-aberta  $G_v(z)$  e  $G_d(z)$ , definidas por

$$G_v(z) = \frac{y(z)}{v(z)} = C(zI_n - A)^{-1}B \quad G_d(z) = \frac{y(z)}{d(z)} = C(zI_n - A)^{-1}B$$

onde  $v(k)$  é o sinal de controle efetivamente entregue à planta, definido como  $v(k) = (\text{sat}_{u_0}(u(k)))$ . Como no caso contínuo, foi considerado como valor de regime permanente das funções de transferência  $G_v(1) > 0$  e  $G_d(1) > 0$ . A dedução para  $G_v(1) < 0$  e  $G_d(1) < 0$  é análoga. Além disso, considere  $z_{eo}$  como o possível ponto de equilíbrio fora da região linear. Caso,  $z_{eo}$  exista, então as seguintes equações devem ser verificadas:

$$\begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \hat{A} \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + M_2 B \text{sat}_{u_0}(Fz_{eo}) + q, \quad (126)$$

$$\xi_e = E^T \begin{bmatrix} e_e \\ x_{2e} \end{bmatrix} + \xi_e + E_c (\text{sat}_{u_0}(Fz_{eo}) - Fz_{eo}), \quad (127)$$

onde  $\hat{A} = M_2 A M_2^{-1}$ . Note que, assim como no caso contínuo, a relação (127) é equivalente a

$$e_e = E_c \Psi_{u_0}(Fz_{eo}). \quad (128)$$

Seguindo a metodologia adotada, a análise da existência de  $z_{eo}$  será apresentada considerando três casos relacionado aos autovalores da matriz  $A$ . Supõe-se que todas as condições do Teorema 5.2.1 são verificadas, possibilitando assim, o enunciado dos seguintes corolários:

**Caso 1:** Matriz  $A$  possui todos autovalores no interior do círculo unitário (sistema em malha aberta assintoticamente estável).

**Corolário 6.3.1** *Se o sistema em malha-aberta é assintoticamente estável e se a referência  $r$  e a perturbação  $d$  são constantes e verificam a relação*

$$\left| [I - G_d(1)] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \right| \leq G_v(1)u_0, \quad (129)$$

*então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .*

*Prova.* Esta prova é análoga a prova apresentada no caso contínuo. Por não acrescentar nenhum novo conhecimento, ela será omitida. ■

É importante ressaltar que as Observações 6.2.1 e 6.2.2 apresentadas para sistemas contínuos continuam sendo válidas em se tratando de sistemas discretos.

**Caso 2:** Matriz  $I_n - A$  é não-singular e  $A$  possui pelo menos um autovalor fora do círculo unitário (sistema em malha-aberta é exponencialmente instável).

Para plantas instáveis em malha-aberta, o seguinte corolário resume a existência de  $z_{eo}$ :

**Corolário 6.3.2** *Se o sistema (90) é instável, então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .*

*Prova.* Esta prova é feita seguindo os mesmo passos da prova para o caso contínuo. Devido a algumas características especiais de sistemas em tempo discreto, ela será apresentada a seguir. O sistema nas coordenadas do erro (96) pode ser reescrito na forma

$$z(k+1) = \tilde{A}z(k) + \mathbb{B}sat_{u_0}(Fz(k)) + \mathbf{B}_3q \quad (130)$$

onde  $\tilde{A} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2F$  e  $\mathbb{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ , conforme definido anteriormente. Assim, o suposto ponto de equilíbrio  $z_{eo}$  fora da região linear deve ser da forma

$$z_{eo} = (I_{n+p} - \tilde{A})^{-1}(-\mathbb{B}u_e - \mathbf{B}_3q),$$

onde  $u_e$  é o um dos limites de saturação.

Fazendo, agora, a mudança de variável  $\bar{z}(k) = z(k) - z_{eo}$  no entorno do ponto de equilíbrio, segue que

$$\begin{aligned} \bar{z}(k+1) + z_{eo} &= \tilde{A}\bar{z}(k) + \tilde{A}z_{eo} + \mathbb{B}sat_{u_0}(F\bar{z}(k) - Fz_{eo}) + \mathbf{B}_3q, \\ \bar{z}(k) &= \tilde{A}\bar{z}(k) + (\tilde{A} - I_{n+p})z_{eo} + \mathbb{B}u_e + \mathbf{B}_3q, \\ \dot{\bar{z}}(k) &= \tilde{A}\bar{z}(k). \end{aligned} \quad (131)$$

Por definição, a matriz  $\tilde{A} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 F$  pode ser escrita, considerando  $F = [f_1 \ f_2]$ , como

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} M_2 A M_2^{-1} & 0_{n \times p} \\ E^T - E_c f_1 & I_p - E_c f_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, uma matriz bloco-triangular inferior. Assim, como  $M_2 A M_2^{-1}$  é uma transformação de similaridade e não altera os autovalores da matriz,  $\tilde{A}$  possuirá os mesmos autovalores de  $A$ , acrescidos dos autovalores de  $I_p - E_c f_2$ . Logo, se  $A$  é instável, então  $\tilde{A}$  também será, o que implica que  $z_{eo}$ , se existir, é um ponto de equilíbrio instável e, conseqüentemente, não pode estar no interior de  $\Omega(P, \nu)$  pois, como no caso contínuo, existiriam direções invariantes (associadas aos autovetores de  $\tilde{A}$ ) nas quais as condições iniciais provocariam a divergência das trajetórias. ■

**Caso 3:** Matriz  $A$  possui pelo menos um autovalor real unitário (sistema com integradores).

Para este tipo de sistema, a existência de  $z_{eo}$  pode ser resumida no corolário a seguir:

**Corolário 6.3.3** *Se o sistema (90) possui pólos na origem, então o ponto de equilíbrio  $z_e \in S(F, u_0)$  é o único ponto de equilíbrio no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ .*

*Prova.* Assim como no caso contínuo, este sistema continuará se comportando como um integrador em malha aberta sujeito a uma entrada constante, o que faz com que a prova do Corolário 6.3.3 siga os mesmos passos da prova do Corolário 6.2.3. ■

É importante ressaltar que o estudo da possível existência de pontos de equilíbrio fora da região linear para sistemas cuja matriz  $A$  apresenta autovalores puramente imaginários (ou autovalores sobre o círculo unitário, no caso discreto) está sob investigação. Este estudo ainda não foi concluído por tratar da existência de órbitas estáveis no entorno de um ponto de equilíbrio saturado.

## 6.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, serão mostrados alguns resultados numéricos para o exemplo da planta estável. O objetivo é fazer uma comparação direta entre os resultados apresentados nos capítulos anteriores e os resultados apresentados após a adição das condições (120) e (129).

Para o caso contínuo, o sistema utilizado foi

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 1 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

com  $M_1 = [0 \ 1]$  tal que  $M_2 = I_2$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\mathcal{Z}_b = \text{cov}\{z_1\}$  onde  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{Q}_b = \text{cov}\{q_1\}$  com  $q_1 = [((M_2 A M_2^{-1} - I_n) E)^T \ 0]^T$ . Para este problema,  $G_v(0) = 1.8519$  o que leva a  $G_v(0)u_0 = 0.5556$  e ainda  $G_d(0) = 3.5185$  o que leva a  $G_d(0)u_0 = 1.0556$ . O chamado PO2 restrito é o problema de otimização PO2 adicionado da restrição (120).

Para o caso discreto, considere

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } u_0 = 0.3.$$

com  $M_1 = [0 \ 1]$  tal que  $M_2 = I_2$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$ ,  $\sigma = 1.0 \times 10^{-6}$ ,  $\mathcal{Z}_b = cov\{z_1\}$  onde  $z_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$  e  $\mathcal{Q}_b = cov\{q_1\}$  com  $q_1 = [(M_2 A M_2^{-1} E)^T \ 0]^T$ . Neste caso,  $G_v(1) = 50$  o que leva a  $G_v(1).u_0 = 15$ . Novamente, o chamado POD1 restrito é o problema de otimização POD1 adicionado da restrição (129).

Uma comparação entre os resultados obtidos é apresentada na Tabela 6.4

	PO2	PO2 restrito	POD1	POD1 restrito
$\alpha$	108.4566	43.2656	230.4685	3.9176
$\beta$	5.5556	0.5556	14.9907	0.1349
$r_{max1}$	$1.5816 \times 10^4$	$1.4530 \times 10^3$	$2.3386 \times 10^3$	$3.2802 \times 10^3$
$r_{max2}$	245.1580	0.5555	$1.6661 \times 10^3$	14.9964

Tabela 10: Efeito da Adição de (120) e (129)

Pode-se notar que as restrições (120) e (129), além de restringir o valor das referências em  $G_v(0)u_0$  (ou  $G_v(1)u_0$ ), também diminuem consideravelmente o tamanho dos escalares  $\alpha$  e  $\beta$ . Vale a pena ressaltar que esta restrição só se aplica para os casos onde é necessário determinar a máxima referência admissível. Na maximização da condição inicial, desde que a referência seja admissível, pode-se utilizar os problemas de otimização sem considerar esta restrição, conforme mostrado nas Figuras 22 e 39. Mais uma vez vale ressaltar que este resultado só será válido para referências respeitando (120) e (129).

Na Figura 49 é apresentada uma comparação entre as simulações do sistema considerando PO2 e PO2 restrito. Pode-se observar que o comportamento apresentado é análogo, destacando-se apenas que o sinal de controle de PO2 restrito é ligeiramente mais oscilatório.

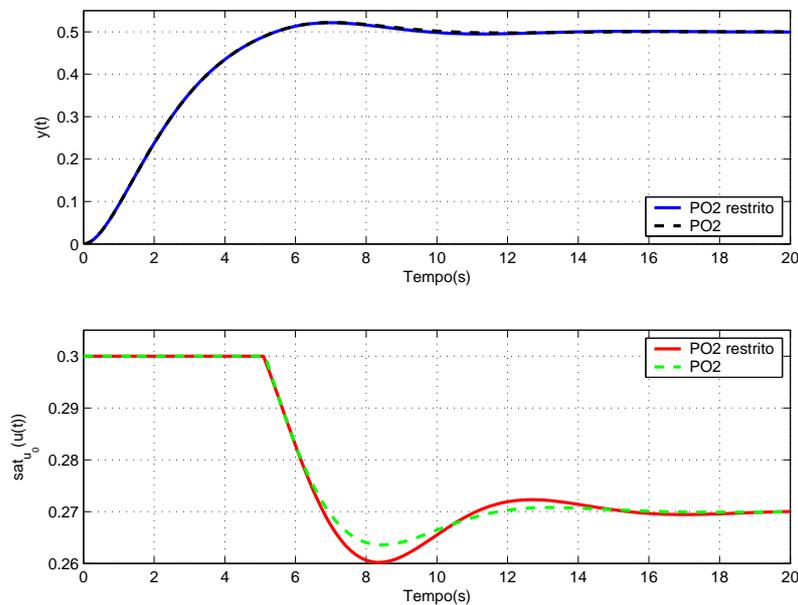


Figura 49: Comparação PO2 e PO2 restrito

Na Figura 50 tem-se a comparação entre POD1 e POD1 restrito. O sinal de controle de POD1 restrito permanece saturado por mais tempo do que o controle de POD1, o que faz com que a saída seja ligeiramente mais lenta. Assim como no caso contínuo, a diferença foi pouco significativa.

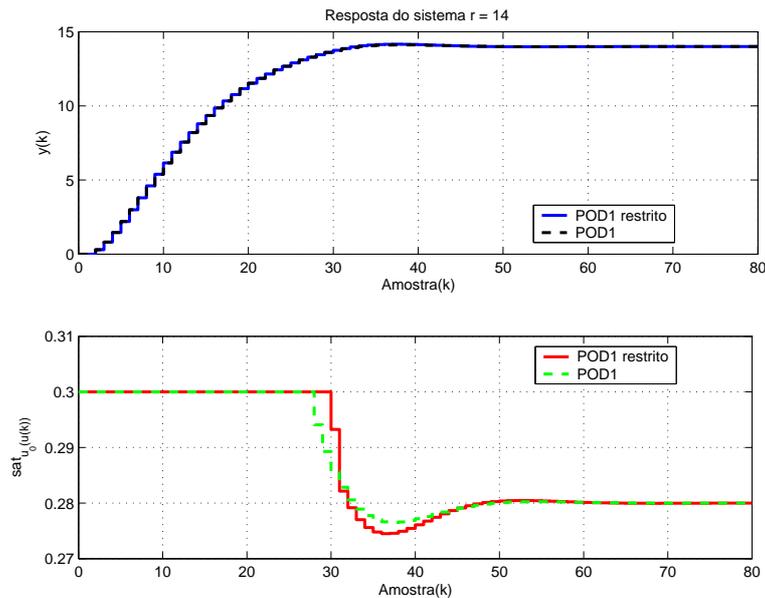


Figura 50: Comparação POD1 e POD1 restrito

## 6.5 Comentários Finais

Neste capítulo foi mostrado que a existência de pontos de equilíbrio fora da região linear, mas ainda no interior do elipsóide  $\Omega(P, \nu)$ , é uma realidade para alguns tipos de sistemas. O estudo apresentado foi baseado nos autovalores da matriz  $A$ , considerando sistemas SISO, tanto para o caso contínuo quanto para o caso discreto.

Para plantas instáveis ou que possuem integradores, foi mostrado que não existem estes equilíbrios indesejados, possibilitando assim, que as metodologias apresentadas nos capítulos anteriores possam ser aplicadas sem nenhuma alteração. Para plantas estáveis, mostrou-se a necessidade de uma nova restrição a fim de evitar que estes equilíbrio apareçam.

Por meio de exemplos, foi mostrado que esta restrição adicional diminui as estimativas dos tamanhos dos elipsóides  $\Omega(P, \nu)$  e  $\Omega(R, \sigma)$  mas, por sua vez, garante que a referência máxima seja admissível para o sistema, isto é, seja seguida com erro nulo em regime permanente. Além disso, foi mostrado que, em termos de desempenho, esta nova restrição pouco influencia, mantendo as características dos casos sem restrição.

Mais uma vez, é importante ressaltar que alguns casos permaneceram em aberto. A possibilidade da existência de pontos de equilíbrio para plantas marginalmente estáveis e da existência de ciclos-limite ou órbitas estáveis ainda esta sob investigação. Além disso, faz-se necessária a extensão dos estudos apresentados para o caso de sistemas multivariáveis.

## 7 CONCLUSÕES

O problema de seguimento de referências, considerando uma abordagem no espaço de estados e a estabilidade interna do sistema, tem sido um tópico pouco explorado pelos estudiosos de sistemas sujeitos à saturação. Quando forçados a lidar com este tipo de problema, projetistas e autores lançam mão de técnicas iterativas (controladores preditivos, condicionadores de referência, etc) ou fazem a sintonia de controladores altamente restritivos, evitando assim, que o sistema sature. Os poucos autores que se aventuram neste tipo de problema apresentam soluções baseadas em dois passos: em um primeiro momento, um controlador estabilizante é projetado e, logo após, os efeitos indesejados da saturação são corrigidos através de um laço de *anti-windup*. Motivado por esses fatos, este trabalho apresentou uma metodologia de síntese simultânea de controlador e laço *anti-windup* para sistemas visando o seguimento de referências constantes.

Em um primeiro momento, a metodologia foi desenvolvida para sistemas em tempo contínuo, seguindo a linha apresentada em (TARBOURIECH; PITTET; BURGAT, 2000) e (CAO; LIN; WARD, 2004). Além do cálculo dos controladores, estimativas dos domínios de estabilidade do sistema em malha-fechada foram apresentadas, isto é, conjuntos onde as trajetória do sistema ficam confinadas. Esta topologia de controle foi simplificada, dando origem à solução “clássica”. Para este novo esquema de controle foram obtidas novas condições LMI, as quais permitiram o cumprimento dos objetivos de projeto. Através dos problemas de otimização propostos, pode-se escolher como objetivo de controle a maximização da referência para o qual o seguimento é garantido, do conjunto de condições iniciais do sistema ou ainda, da perturbação constante que pode ser rejeitada. Além disso, uma alternativa de posicionamento de pólos é apresentada, ao custo da diminuição da máxima referência admissível. Por meio de exemplos foi evidenciado que, além das vantagens de um esquema de controle com menos LMIs e da síntese simultânea, os resultados são menos conservativos do que os apresentados até então na literatura, considerando abordagens similares. Estes resultados foram aplicados a um número considerável de exemplos, com o intuito de validar a metodologia proposta.

A seqüência natural deste trabalho foi estender a metodologia apresentada para sistema em tempo discreto. Nesta área, o número de referências é menor ainda, dificultando, assim, as comparações dos resultados encontrados. Além dos objetivos de controle comuns ao caso contínuo, um estudo sobre a influência da variação dos parâmetros de projeto foi apresentado, servindo de guia para a obtenção dos melhores resultados possíveis. Mais uma vez, a metodologia proposta foi aplicada a vários exemplos considerando dois critérios de otimização diferentes, estabelecendo uma comparação entre eles.

A melhoria considerável dos resultados e a síntese simultânea do controlador e do laço de *anti-windup* só foram possíveis devido aos graus de liberdade introduzidos pela condição de setor modificada apresentada em (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH,

2005) e (GOMES DA SILVA Jr; TARBOURIECH, 2006). Este trabalho confirmou a expectativa de que os resultados menos conservativos obtidos para o problema de regulação poderiam ser estendidos para o seguimento de referências.

A parte final deste trabalho surgiu após alguns exemplos não se comportarem da maneira esperada. Estes exemplos atentaram para a necessidade do estudo da existência de pontos de equilíbrio indesejados, ou seja, que não garantem erro nulo de seguimento. Através de procedimentos algébricos simples, foi mostrado que estes pontos não existem para sistemas instáveis ou com integradores, exigindo restrições adicionais apenas para plantas estáveis em malha aberta. Estas considerações não foram levadas em conta em nenhum dos trabalhos prévios desta mesma linha.

Apesar de apresentar algumas contribuições relevantes cientificamente, este trabalho está longe de esgotar as possibilidades da metodologia escolhida ou da área de seguimento de referências para sistemas saturados. A seguir serão mostrados alguns tópicos possíveis para a seqüência deste trabalho:

- Estudo formal da existência de pontos de equilíbrio parasitas (que não garantem o seguimento com erro zero) no caso multivariável, além de concluir o estudo feito até agora, considerando plantas marginalmente estáveis;
- Estudo formal da existência de ciclos-limite dentro da região de estabilidade;
- Tratamento de restrições assimétricas de controle e conseqüente utilização de domínios elipsoidais invariantes não centrados na origem;
- Proposição de novas estratégias considerando realimentação dinâmica de saída e utilização de controladores de estrutura fixa, como PIDs;
- Incorporação de requisitos de desempenho e robustez na síntese;
- Generalização das metodologias de projeto para outros tipos de referências, notadamente senoidais;
- Proposição de metodologias de projeto considerando simultaneamente saturações em amplitude e taxa de variação dos sinais de controle;
- Aplicação da metodologia proposta a plantas reais como, por exemplo, a plantas que simulam processos químicos ou manipuladores robóticos;
- Extensão da metodologia para o caso de plantas não-lineares. Neste caso, deverá focar na classe de sistemas racionais e na classe de sistemas tipo Lure.

## REFERÊNCIAS

ALONSO, D. M.; BERNS, D. W.; PAOLINI, E. E.; MOIOLA, J. L. **Bifurcation Control in Feedback Systems**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. (Lecture Notes in Control and Information Sciences).

ANGELI, D.; CASAVOLA, A.; MOSCA, E. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.10, n.13, p.1091–1103, 2000.

ASTROM, K. J.; RUNDQWIST, L. Integrator windup and how to avoid it. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'89), 1989, Pittsburg, USA. **Proceedings...** IEEE, 1989. p.1693–1698.

ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer Controlled Systems: theory and design**. New Jersey: Prentice Hall Professional Technical Reference, 1984.

BEMPORAD, A. Reference governor for constrained nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.43, n.3, p.415–419, 1998.

BEMPORAD, A.; MORARI, M.; DUA, V.; PISTIKOPOULOS, E. N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. **Automatica**, Kidlington, v.38, n.1, p.3–20, Jan. 2002.

BENDER, F. A. **Técnicas de compensação dinâmica para sistemas lineares com saturação de controle**. 2006. Dissertação (Mestrado) — PPGEE,UFRGS, Porto Alegre - RS, 2006.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. Acceleration-Bounded Control Design for Actuator Fault Prevention. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC '07), 2007, New York, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.5218–5223.

BERNSTEIN, D. S.; MICHEL, A. N. A chronological bibliography on saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.5, n.5, p.375–380, 1995.

BLANCHINI, F. Set invariance in control - a survey. **Automatica**, Kidlington, v.35, n.11, p.1747–1768, Nov. 1999.

BLANCHINI, F.; MIANI, S. Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction. **SIAM J. Control and Optimization**, Philadelphia, PA, v.38, n.3, p.971–994, 2000.

BLANCHINI, F.; SZNAIER, M. Persistent disturbance rejection via static-state feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.40, p.1127–1131, Jun. 1995.

BLANCHINI, F.; SZNAIER, M. A convex optimization approach to fixed-order controller design for disturbance rejection in SISO systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.45, p.784–789, Apr. 2000.

BOYD, S.; GHAOUI, E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. 1st.ed. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

BURGAT, C.; TARBOURIECH, S. Global stability of a class of systems with saturated controls. **International Journal of Systems and Science**, Oxford, v.23, p.37–56, 1992.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. A. **Model Predictive Control in the Process Industry**. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1997.

CAMPO, P. J.; MORARI, M. Robust control of processes subject to saturation nonlinearities. **Computers & Chemical Engineering**, Oxford, v.14, p.343–358, 1990.

CAO, Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. Anti-windup design of output tracking systems subject to actuator saturation and constant disturbances. **Automatica**, Kidlington, v.40, n.7, p.1221–1228, 2004.

CASTELAN, E. B. **Sur l'Invariance Positive et la Commande sous Contraintes de Systèmes Linéaires Multivariables**. 1992. Ph.D (Thesis) — Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, 1992.

CASTELAN, E.; TARBOURIECH, S. On positive invariance and output feedback stabilization of input constrained linear systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'94), 1994, Baltimore, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1994. v.3, p.2740–2744.

CHELLABOINA, V.; HADDAD, W.; OH, J.-H. Fixed-structure controller design for discrete-time systems with actuator amplitude and rate saturation constraints. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'99), 1999, San Diego, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1999. v.3, p.1992–1996.

CHEN, C. **Linear System Theory and Design**. 2.ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1970. p.679.

CHEN, C. **Linear System Theory and Design**. 3.ed. New York, NY: Oxford University Press, 1999. p.346.

CHILALI, M.; GAHINET, P.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.41, n.3, p.358–367, 1996.

CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in LMI regions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.44, n.12, p.2257–2270, 1999.

COUTINHO, D. F.; D. J. PAGANO, A. T. On the estimation of robust stability regions for nonlinear systems with saturation. **Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, SP, Brasil, v.15, p.269–278, Sept. 2004.

COUTINHO, D.; GOMES DA SILVA JR, J. M. Estimating the Region of Attraction of Nonlinear Control Systems with Saturating Actuators. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'07), 2007, New York, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.4715–4720.

DOLPHUS, R.; SCHMITENDORF, W. Stability analysis for a class of linear controllers under control constraints. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'91), 30., 1991, Brighton, UK. **Proceedings...** New York: IEEE, 1991. p.77–80.

DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'87), 1987, Minneapolis, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1987. p.1034–1039.

EBENBAUER, C.; ALLGOWER, F. Stability analysis of constrained control systems: an alternative approach. **Systems & Control Letters**, North-Holland, v.56, n.2, p.93–98, Feb. 2007.

FERTIK, H. A.; ROSS, C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature. **ISA Transactions**, Chapel Hill, v.6, p.317–328, 1967.

FLORES, J. V.; ECKHARD, D.; GOMES DA SILVA JR, J. M. On the Tracking Problem for Linear Systems subject to Control Saturation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 17., 2008, Seoul, Korea. **Proceedings...** Kidlington: IFAC, 2008.

FRANCIS, B. The Linear Multivariable Regulator Problem. **SIAM J. Control and Optimization**, Philadelphia, PA, v.15, n.3, p.486–505, 1977.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Discrete-time reference governors for systems with state and control constraints and disturbance inputs. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'95), 34., 1995, New Orleans, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1995. v.2, p.1189–1194.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Fast reference governors for systems with state and control constraints and disturbance inputs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.9, n.15, p.1117–1141, 1999.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Set-point control of nonlinear systems with state and control constraints: a lyapunov-function, reference-governor approach. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'99), 38., 1999, Phoenix, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1999. v.3, p.2507–2512.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. A generalized reference governor for nonlinear systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'01), 40., 2001, Orlando, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2001. v.5, p.4222–4227.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I. Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: a generalized reference governor. **Automatica**, Kidlington, v.38, n.12, p.2063–2073, 2002.

GILBERT, E.; KOLMANOVSKY, I.; TAN, K. "Discrete-time reference governors and the nonlinear control of systems with state and control constraints. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.5, p.487–504, 1995.

GLATTFELDER, A.; SCHAUFELBERGER, W. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.28, n.12, p.1074–1081, 1983.

GOMES DA SILVA Jr., J. M. **Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes**. 1997. Ph.D (Thesys) — Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, 1997.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; LIMON, D.; ALAMO, T. Dynamic Output Feedback for Discrete-Time Systems under Amplitude and Rate Actuator Constraints. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'05), 44., 2005, Seville, Spain. **Proceedings...** New York: IEEE, 2005. p.5588– 5593.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Polyhedral regions of local stability for linear discrete-time systems with saturating controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.44, n.11, p.2081–2085, 1999.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, (CDC'00), 39., 2000, Sydney, Australia. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4, p.3260–3265.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH., S. Anti-Windup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'03), 42., 2003, Maui, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2003.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'04), 2004, Boston, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2004. v.6, p.5298–5303.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA Jr, J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability for discrete-time linear systems. **Systems & Control Letters**, North-Holland, v.55, p.184–192, 2006.

GOMES DA SILVA Jr., J. M.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2002., 2002, Glasgow, Scotland. **Proceedings...** New York: IEEE, 2002. v.2, p.1106–1111.

GOMES DA SILVA Jr, J.; TARBOURIECH, S. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.46, p.119–125, 2001.

GRIMM, G.; HATFIELD, J.; POSTLETHWAITE, I.; TEEL, A.; TURNER, M.; ZACCARIAN, L. Anti-windup for stable systems with input saturation: an LMI-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.48, n.9, p.1500–1525, 2003.

GRIMM, G.; MESSINA, M. J.; TUNA, S. E.; TEEL, A. R. Nominally Robust Model Predictive Control With State Constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.10, p.1856–1870, 2007.

HU, T.; HUANG, B.; LIN, Z. Absolute stability with a generalized sector condition. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.49, n.4, p.535–548, 2004.

HU, T.; LIN, Z. Output regulation of general linear systems with saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'00), 39., 2000, Sydney, Australia. **Proceedings...** New York: IEEE, 2000. v.4, p.3242–3247.

HU, T.; LIN, Z. **Control systems with actuator saturation: analysis and design**. Boston, MA: Birkhauser, 2001.

HU, T.; LIN, Z. Exact characterization of invariant ellipsoids for single input linear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.47, n.1, p.164–169, 2002.

HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. **Automatica**, Kidlington, v.38, p.351–359, 2002.

HU, X.; CHEN, W. Model predictive control of nonlinear systems: stability region and feasible initial control. **International Journal of Automation and Computing**, New York, NY, v.4, n.2, p.195–202, 2007.

KAPASOURIS, P.; ATHANS, M.; STEIN, G. Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'88), 27., 1988, Austin, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1988. p.469–479.

KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. **Actuator Saturation Control**. New York, NY: Marcel Dekker, Inc., 2002.

KAPOOR, N.; TEEL, A. R.; DAOUTIDIS, P. An anti-windup design for linear systems with input saturation. **Automatica**, Kidlington, v.34, n.5, p.559–574, 1998.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992. xii+564p.

KOTHARE, M. V.; CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N. A Unified Framework for the Study of Anti-windup Designs. **Automatica**, Kidlington, v.30, n.12, p.1869–1883, 1994.

KRIKELIS, N. J. State feedback integral control with “intelligent” integrators. **International Journal of Control**, Abingdon, v.32, n.3, p.465–473, 1980.

KRIKELIS, N. J.; BARKAS, S. K. Design of tracking systems subject to actuator saturation and integrator wind-up. **International Journal of Control**, Abingdon, v.39, n.4, p.667–682, 1984.

LIN, Z.; LV, L. Set Invariance Conditions for Singular Linear Systems Subject to Actuator Saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.52, n.12, p.2351–2355, 2007.

- LIN, Z.; SABERI, A. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to “input saturation” via linear feedbacks. **Systems & Control Letters**, North-Holland, v.21, n.3, p.225–239, 1993.
- LIN, Z.; STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A. Output regulation for linear systems subject to input saturation. **Automatica**, Kidlington, v.32, n.1, p.29–47, 1996.
- LOZIER, J. A steady state approach to the theory of saturable servo systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, New York, v.1, n.1, p.19–39, 1956.
- MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive control with constraints**. Essex, England: Prentice Hall, 2002.
- MICHALSKA, H.; MAYNE, D. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.38, n.11, p.1623–1633, 1993.
- MILLER, R.; KOLMANOVSKY, I.; GILBERT, E.; WASHABAUGH, P. Control of constrained nonlinear systems: a case study. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.20, n.1, p.23–32, 2000.
- MIYAMOTO, A.; VINNICOMBE, G. Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representation. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC’96), 35., 1996, Kobe, Japan. **Proceedings...** New York: IEEE, 1996. p.2838–2840.
- MOLCHANOV, A. P.; PYATNITSKIY, Y. S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. **Systems & Control Letters**, North-Holland, v.13, n.1, p.59–64, 1989.
- OLIVEIRA, N. M. C. de; BIEGLER, L. T. Constraint handling and stability properties of model-predictive control. **AIChE Journal**, Newark, v.40, n.7, p.1138–1155, 1994.
- PAIM, C. **Análise e Controle de Sistemas Lineares sob Saturação**. 2003. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2003.
- PAIM, C.; TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; CASTELAN, E. B. New Conditions for Determining Stability Regions for Linear Systems with Saturating Actuators. In: XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA’02), 2002, Natal, Brasil. **Anais...** Natal: UFRN, 2002. p.2433–2437.
- PAVLOV, A.; WOUW, N. van de; NIJMEIJER, H. Global nonlinear output regulation: convergence-based controller design. **Automatica**, Kidlington, v.43, n.3, p.456–463, 2007.
- PITTET, C.; TARBOURIECH, S.; BURGAT, C. Stability regions for linear systems with saturating controls via circle and Popov criteria. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC’97), 36., 1997, San Diego, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1997. v.5, p.4518–4523.
- RAWLINGS, J. Tutorial overview of model predictive control. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.20, n.3, p.38–52, 2000.

REGINATTO, R. **Contribuições ao projeto de controladores não-lineares para sistemas com restrições no controle.** 2000. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2000.

ROCHA, T. C. T. **Positively invariant domains of linear systems with constraints on the control variables.** 1994. Master (Thesys) — LCMI/PGEEL,UFSC, Florianópolis, Brazil, 1994.

ROMANCHUK, B.; SMITH, M. Incremental gain analysis of linear systems with bounded controls and its application to the anti-windup problem. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, (CDC'96), 35., 1996, Tampa, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1996. v.3, p.2942–2947.

SASTRY, S. **Nonlinear Systems: analysis, stability and control.** New York, NY: Springer, 1999. xxv+667p. (Interdisciplinary Applied Mathematics, v.10).

SCMITENDORF, W. E.; SCHIRM, W. Stabilization via dynamic output feedback: a numerical approach. **AIAA Journal of Guidance, Control e Dynamics**, Reston, v.14, p.1083–1086, 1991.

SCORLETTI, G.; FOLCHER, J.; EL GHAOU, L. Convex output feedback control designs with input saturations : a comparison. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN (ROCOND'97), 2., 1997, Budapeste, Hungria. **Proceedings...** Kidlington: IFAC, 1997. p.179–184.

SHEWCHUN, J.; FERON, E. High performance bounded control. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'97), 1997, New Mexico, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1997. v.5, p.3250–3254.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: analysis and design.** Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1996.

SLOTINE, J.; LI, W. **Applied Nonlinear Control.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1991. xv+461p.

SONTAG, E. D.; SUSSMANN, H. D. Nonlinear output feedback design for linear systems with saturation control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'90), 29., 1990, Honolulu, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1990. p.3414–3416.

SU, S. W. **Nonlinear Robust Disturbance Rejection.** 2002. Ph.D (Thesys) — The Australian National University, Canberra, Austrália, 2002.

SU, W.; WU, J. Performance Limitation in Output Regulation of a Nonlinear System under Disturbance. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'06), 45., 2006, San Diego, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 2006. p.3254–3259.

SUAREZ, R.; ALVAREZ, J.; J., A. Regions of Attraction of Closed-Loop Linear Systems with Saturated Linear Feedback. **Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control**, [S.l.], v.5, n.4, p.1–22, 1995.

SUSSMANN, H.; SONTAG, E.; YANG, Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.39, n.12, p.2411–2425, 1994.

TARBOURIECH, S.; (EDITORS), G. G. **Control of uncertain systems with bounded inputs**. Secaucus, NJ: Springer-Verlag New York, Inc., 1997.

TARBOURIECH, S.; GARCIA, G.; (EDITORS), A. H. G. **Advances Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints**. Secaucus, NJ: Springer-Verlag New York, Inc., 2007.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr., J. M. Admissible polyhedra for discrete-time linear systems with saturating controls. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC'97), 1997, New Mexico, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1997. v.6, p.3915–3919.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA Jr., J. M.; BENDER, F. A. Dynamic anti-windup synthesis for discrete-time linear systems subject to input saturation and  $\mathcal{L}_2$  disturbances. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, 5., 2006, Toulouse, France. **Proceedings...** Kidlington: IFAC, 2006. p.665–682.

TARBOURIECH, S.; PITTET, C.; BURGAT, C. Output tracking problem for systems with input saturations via nonlinear integrating actions. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.10, n.6, p.489–512, 2000.

TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I.; GARCIA, G. Stability region enlargement through anti-windup strategy for linear systems with dynamics restricted actuator. **International Journal of Systems and Science**, Oxford, v.37, n.2, p.79–90, 2006.

TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I.; PITTET, C. Output-reference tracking problem for discrete-time systems with input saturations. **IEEE Proceedings on Control Theory and Applications**, New York, v.147, n.4, p.447–455, 2000.

TENG, Y.; FU, Y.; DUAN, G. Output Regulation of Singular Linear Systems with Input Saturation via Nonlinear Feedback. In: IEEE CONFERENCE ON INDUSTRIAL ELECTRONICS AND APPLICATIONS (ICIEA'07), 2., 2007, Harbin, China. **Proceedings...** New York: IEEE, 2007. p.526–530.

TURNER, M. C.; POSTLETHWAITE, I.; WALKER, D. J. Non-linear tracking control for multivariable constrained input linear systems. **International Journal of Control**, Abingdon, v.73, n.12, p.1160–1172, 2000.

TYAN, F.; BERNSTEIN, D. S. Anti-windup compensator synthesis for systems with saturation actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, New Jersey, v.5, n.5, p.521–537, 1995.

VANANTWERP, J.; BRAATZ, R. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, Kidlington, v.10, n.12, p.363–385, 2000.

WALGAMA, K. S.; STERNBY, J. Inherent observer property in a class of *anti-windup* compensators. **International Journal of Control**, Abingdon, v.52, p.705–724, 1990.

YOUNG, P. C.; WILLEMS, J. C. An approach to the linear multivariable servomechanism problem. **International Journal of Control**, Abingdon, v.15, p.961–979, 1972.

## APÊNDICE A INEQUAÇÕES LINEARES MATRICIAIS

Nesta seção serão mostradas algumas ferramentas comumente utilizadas a fim de expressar os desenvolvimentos obtidos na forma de LMIs. A formulação através de LMIs ganhou grande importância após o trabalho (BOYD et al., 1994), onde foi evidenciada sua aplicação em sistemas de controle. Segundo o autor, sua maior vantagem é que as LMIs que surgem da maioria dos problemas de controle podem ser formuladas como um problema de otimização convexa, relativamente amigável de se resolver computacionalmente.

### A.0.1 Definição

Uma LMI é uma desigualdade da forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{(i)} F_{(i)} > 0 \quad (132)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é a variável de interesse e  $F_{(i)} = F_{(i)}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes conhecidas. Desde que o cone de matrizes definidas positivas seja convexo e a matriz  $F(x)$  seja uma função a fim em  $x$ , então a restrição  $F(x) > 0$  é uma restrição convexa em  $x$ . Esta é uma das propriedades fundamentais das LMIs. Com isso, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & \\ & F(x) > 0 \end{aligned} \quad (133)$$

no qual  $c \in \mathbb{R}^m$ . O problema (133) é uma generalização do problema de programação linear clássico em um cone de matrizes definidas positivas.

### A.0.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é a ferramenta utilizada para converter inequações não-lineares convexas em LMIs. Considere a seguinte não linearidade convexa

$$Q(s) - S^T(x)R(x)^{-1}S(x) > 0, \quad Q(x) = Q^T(x), \quad R(x) = R^T(x) > 0. \quad (134)$$

Através da aplicação deste complemento, é possível converter a inequação (134) na LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S^T(x) \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (135)$$

Uma prova relativamente simples do complemento de Schur pode ser encontrado no Apêndice de (VANANTWERP; BRAATZ, 2000).

### A.0.3 *S-procedure*

Um dos problemas mais comuns na programação convexa é o caso onde a definição em sinal de um função quadrática deve verificar-se sempre que a definição em sinal de outra função quadrática for verificada. O *S-procedure* é uma maneira conservativa de aproximar esta relação através de uma LMI. A seguir será apresentado o *S-procedure* para funções quadráticas e inequações estritas (BOYD et al., 1994). Seja  $T_0, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas sujeitas à seguinte condição:

$$\xi^T T_0 \xi > 0, \text{ para todo } \xi \neq 0 \text{ tal que } \xi^T T_{(i)} \xi \geq 0, i = 1, \dots, p. \quad (136)$$

Pode-se demonstrar que, se existem  $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_p \geq 0$  tais que

$$T_0 - \sum_{i=1}^p \tau_{(i)} T_{(i)} > 0, \quad (137)$$

então a relação (136) se verifica. É importante notar que a condição (137) é uma LMI nas variáveis  $T_0$  e  $\tau_1, \dots, \tau_p$ .