UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problema de Dirichlet:

Soluções Fracas e Formulação Variacional

Dissertação de Mestrado

Hugo Henrique Kegler dos Santos

Porto Alegre, 18 de abril de 2008.

Dissertação submetida por Hugo Henrique Kegler dos Santos[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Resumo

No presente trabalho procurou-se estudar o Problema de Dirichlet, enxergando-o através de sua formulação variacional. Para tal, introduzimos os espaços de Sobolev e uma série de suas propriedades. Após, estudamos a formulação fraca do problema, onde, na busca pela existência e unicidade de sua solução, estudamos o funcional que surge naturalmente. Finalmente, usando esses resultados, apresentamos a formulação variacional do referido problema, para fecharmos o trabalho com um estudo de caso, onde a solução existe e é única.

Abstract

In the present work sought to study the Problem of Dirichlet, in a variational formulation view. To this end, we introduced the spaces of Sobolev, and a number of its properties. After we studied the weak formulation of the problem, where in the search for the existence and uniqueness of its solution, we studied the way that comes naturally. Finally, using these results, we present the variational formulation of the problem, to close the work with a case study where the solution exists and is unique.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à sociedade brasileira, por ter financiado toda minha educação superior, tanto através da bolsa da CAPES, que recebi em parte de meu mestrado, quanto através da Universidade pública e gratuita, que mesmo com os constantes ataques que vem sofrendo ao longo de décadas, consegue manter a qualidade.

Agradeço ao meu orientador Professor Alexandre Tavares Baravieira, que se dispôs a me orientar neste trabalho.

Agradeço ao Professor Leonardo Bonorino, que prestou um grande auxílio na elaboração deste trabalho, seja nas aulas que ministrou, que permitiram que este fosse escrito, seja na própria montagem do mesmo.

Ao Professor Luís Fernando Carvalho da Rocha, por estar sempre disposto a ajudar.

Ao colega André Meneghetti, desde o começo junto nesta jornada, passando pelas mesmas coisas, nas boas e nas ruins.

E agora aos agradecimentos não-acadêmicos, mas a pessoas que também tiveram participação ativa nessa etapa que venci.

Minha família: minha mãe, por tudo que fez por mim, pelo amor e dedicação constantes. Ao meu pai, por ser, em grande parte, responsável pelo que sou e por me lembrar constantemente da importância do estudo. Ao meu irmão Ney, que me deve dinheiro e afirma que não, e à minha irmã Elousys Tisky, de tiskynininha.

Minha namorada, Catarina, pelo companheirismo e por cuidar de mim, e a sua família, Claudião, Dona Elza, Nicole e Diego.

A Família Mariano: Coronel, Tia Elisa, Diorge e Maninho. Como já tive oportunidade de dizer, não tive tios e primos, mas fui abençoado com vocês.

Ao Tio Ingo, por ter disponibilizado o carango para a galera, o que tornou as longas viagens até o Vale muito mais curtas.

Pedroka, Cérebro, Colla e Kurt, que muito me atrapalharam, e também a quem muito atrapalhei. Pelo enorme bem que fizeram à Física, deixando-a como a encontraram. (Tá, o Colla, não).

A gurizada: Régis Luciano, Rivera (Carol e Antônia), Frank e Mariano. Bagaceiros de marca maior, que têm como hábito o imoral, mas que merecem alguma consideração.

Ao ilustre brasileiro Alberto Santos Dumont, pois através de seu invento, o avião, permitiu que eu fosse visitar, e também me visitassem, os amigos Bruno Bahia, Ribas Pezão (E-LI-SE!), Giancarlo Morelli ((i) Agora coleciono guitarras. (ii) Tão todas à venda, tenho que pagar a Gibson) e Rubens Halford (Robs, faz comigo!), que foram para longe, tentar a sorte na cidade grande, sofrendo por que lá não existe costela com osso. Só desossada, não é, Bruno?

Aos amigos Vinícius Eltz e Lucas Gallant, por se conduzirem sempre de forma tão fina e elegante. E em especial ao Gallant, pois a demonstração de seu teorema abriu meus olhos para muitas coisas na Matemática.

Rodrigo Lalas, Igor Velhinho (a criança bêbada), Clóvis Dias Costa, Tia Margarete, Caetano, Martini, Grandão e vários outros que presenciaram a todas as partidas no Olímpico Monumental nas temporadas de 2006 e 2007.

Cláudia Vieira, Ana Cláudia e João Gabriel, a quem eu gostaria de ter visto bem mais do que vi.

Lucinéia Fabris, por passar as páginas.

Kelly, Elise, Fábio Sanhudo (o mago do futsal), André Gustavo e tantos outros, que participaram se não dessa fase, com certeza da minha vida,com grande importância.

Ao Grêmio Foot-Ball Porto Alegrense, pelo 26/11/2005.

Ao Edu Jóia e ao Boca de Corneta eu não agradeço, pois não tiveram participação nenhuma, mal os vi, e pouco lembrei deles. Carecas.

E cadê a Thaísa, hein?

Sumário

1 Introdução

Nos cursos inicias de Equações Diferenciais nos deparamos com frequência com o Problema de Dirichlet (Problema este que se caracteriza por ser uma Equacão Diferencial Parcial com a condição de que, na fronteira do conjunto onde a função solução está definida, esta função é zero; ele será bem estudado no capítulo 3) visto a sua importância tanto na Matemática quanto na Física. Porém,utilizamos para a sua solução o método da separação de variáveis, que é adequado para a fronteira extremamente bem comportada estudada nesses casos. Mesmo no estudo inicial de Teoria Eletromagnética ou Termodinâmica, áreas onde a Equação Diferencial Parcial é *habitué*, sempre são citados os casos mais simples, afinal, se trata apenas de um primeiro contato.

No caso mais geral, entretanto, a resolução depende da definição de derivada fraca, o que trataremos na primeira parte do nosso trabalho, que será um tanto quanto árida, dado que será uma coleção de definições, mas nescessária para o desenvolvimento da dissertação. Iniciaremo, então, definindo o Espaço de Sobolev, espaço esse onde habitam as funções cuja derivada em questão é a fraca. Também trataremos de algumas de suas características, bem como das Desigualdades de Sobolev, de suma importância para a resolução do Problema de Dirichlet.

Este, por sua vez, começará a ser estudado na segunda parte de nosso trabalho, onde começaremos a procurar algumas condições para a existência e unicidade de solução para referido Problema, através de sua formulação fraca. Estudaremos, também, a caracterização dos autovalores e autofunções do funcional associado ao Problema. Fechando essa parte, estudaremos o Princípio do Máximo bem como uma de suas consequências interessantes.

Finalmente, baseado no que foi desenvolvido até então, acharemos condições para nossa EDP ter solução única, e usaremos essas condições para mostrar essas condições podem ser aplicadas no caso da minimização de área, tão comum na Geometria, quando a nossa função tem sua primeira derivada controlada.

2 Espaços de Sobolev

Definição 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então:*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mensuravel e } \int_V |f(x)|dx < \infty, \forall V \subset\subset \Omega\}$$

Também sabemos que uma função nem sempre tem derivada (no sentido tradicional), mas, se formos mais maleáveis nessa questão, facilitaremos muito a nossa vida, pois poderemos achar soluções para EDP que não se encaixariam em uma solução clássica. Definimos, assim, a derivada fraca.

Definição 2.2. *Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos $D^\alpha u$ como um funcional linear em C_0^∞ dado por:*

$$D^\alpha u(\varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi(x)),$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \quad e \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}$$

Note que não há problema para a existência de $D^\alpha \varphi$, pois $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Esta definição é motivada pelo fato de que se $u \in C_0^\infty$, então, pelo Teorema da Divergência, temos

$$D^\alpha u(\varphi(x)) = \int_\Omega D^{al} u(x)\varphi(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

Com essa idéia de Derivada, podemos agora definir o Espaço de Sobolev.

Definição 2.3. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f \in L^p$.*

Dizemos que $f \in W^{k,p}$ se, $\forall\ |\alpha| \leqslant k$ existe $g \in L^p$ tal que:

$$f(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} g(\varphi(x)) \quad , \forall \varphi \in C_0^\infty$$

Outra definição para o espaço de Sobolev seria:

$$W^{k,p} = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) | f \in L^p \text{ e } \ D^\alpha f \in L^p\ \forall |\alpha| \leqslant k\}$$

Nesse momento cabe a pergunta: Por que "Espaço de Sobolev"? Seria mesmo um espaço? Mostremos, então, que Sobolev não estava enganado.

Proposição 2.1. *Seja Ω conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.*

(i) $W^{k,p}(\Omega)$ é espaço vetorial

(ii) A aplicação$\| \ \|_{W^{k,p}} = \| \ \|_{k,p} : W^{k,p} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|f\|_{k,p} = (\sum_{\|\alpha\| \leqslant k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p})^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma

(iii) Esse espaço, com essa norma, é de Banach.

Os ítens (i) e (ii) são de demonstração simples, então iremos demonstrar o item (iii):

Demonstração: Seja (u_n) uma seqüência de Cauchy em $W^{k,p}(\Omega)$. Então, para cada $|\alpha| \leqslant k$, temos que $(D^\alpha u_n)$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Dado que L^p é completo, existem funções $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u_n \to u_\alpha \quad em \ L^p(\Omega)$$

para cada $|\alpha| \leqslant k$. Em particular,

$$u_n \to u_{(0,\ldots,0)} =: u \quad em \ L^p(\Omega)$$

Cabe a pergunta: $D^\alpha u = u_\alpha$? Para responder, fixemos $\varphi \in C_0^\infty$. Então

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = \lim \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_\alpha \varphi \, dx$$

Então a resposta é afirmativa. Logo $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ em $L^p(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leqslant k$, temos que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

É interessante notar que, dada uma função pertencente a um Espaço de Sobolev, suas derivadas também pertencerão a Espaços de Sobolev. Então:

Proposição 2.2. *(i) Se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, então*

$$D^\alpha \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega), \quad tal \quad que \quad |\alpha| \leqslant k$$

Além disso,

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\beta(D^\alpha f) = D^\alpha(D^\beta f), \quad para \quad |\alpha| + |\beta| \leqslant k$$

(ii) $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\alpha f D^{\alpha-\beta} g$

Uma propriedade deveras interessante das funções de Sobolev é que elas podem ser aproximadas por funções C_0^∞. Vamos introduzir, pois, as funções suavisadoras, para iniciar a construção de uma família que se encaixa no que queremos.

Definição 2.4 (Funções Suavizadoras)**.** *Seja $\eta(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\eta(x) = \begin{cases} c e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & se |x| < 1 \\ 0 & se |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

onde $c > 0$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

Observe que:

(i) $\eta \geqslant 0$ e $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) O suporte de η é $B_1(0)$;

(iii) η é infinitamente diferenciável.

Como queremos funções que se aproximam de nossa função de Sobolev, nada mais interessante que achar uma sequência que o faça. Definimos, assim, um conjunto de funções que podem ser facilmente tranformadas em tal ente.

Definição 2.5. *Defino* $\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *por*

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Seguindo a nossa senda em busca da função C_0^∞ adequada, seguimos definindo:

Definição 2.6 (Convolução)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *localmente integrável. Defina*

$$f * \eta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)dy$$

chamada de convolução entre f *e* η_ε

Definição 2.7. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, definimos*

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \ \mid \ dist(x, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon\}$$

Com esse ferramental, chegamos agora a um conjunto de funções que começam a ficar com a aparência da adequada. Esse conjunto possui uma série de propriedades tão interessantes que serão listadas, mas não demonstradas:

Proposição 2.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$*. Então*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$*;*

(ii) $f_\varepsilon \to f$ *q.t.p, quando* $\varepsilon \to 0$*;*

(iii) Se f *é contínua, então* $f_\varepsilon \to f$ *uniformemente em compactos de* Ω*;*

(iv) Se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*, então* $f_\varepsilon \to f$ *em* $L^p(V)$ *para qualquer* $V \subset \Omega$ *compacto.*

Como consequência, temos o seguinte teorema de aproximação local:

Teorema 2.1. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *onde* $k \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leqslant p < \infty$*. Então:*

(i) $u_\varepsilon = u * \eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon), \forall\varepsilon > 0$

(ii) $u_\varepsilon \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ *e* $\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)} \to 0$ *quando* $\varepsilon \to 0$*, para qualquer* $V \subset \Omega$ *compacto.*

Pois bem, basta verificar se existe uma sequência de tais funções que convergem $\forall u \in W^{k,p}$ que teremos chegado ao desfecho de nossa busca, achando um resultado de aproximação global.

Teorema 2.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Dado* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*, existe* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \bigcap W^{k,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\|u - u_m\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$

Demonstração: Seja $\Omega_n = \{x \in \Omega | dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}$. Seja $V_n = \Omega_{n+3} \backslash \overline{\Omega_{n+1}}$ onde $V_0 = \Omega_3$. Logo V_n é aberto para $n = 1, 2, ...$ e $\Omega = \bigcup^{\infty} V_n$.

Seja $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma partição da unidade associada à coleção $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, isto é:

(i) $\varphi_n \in C_0^{\infty}(V_n)$

(ii) $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$

(iii) $\displaystyle\sum_0^{\infty} \varphi_n = 1$

Note que $\varphi \cdot u \in W^{k,p}(\Omega)$ $\forall$ $n \in \{1, 2, ...\}$ já que $\varphi_n \in C_0^{\infty}(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Além disso, $\sup(\varphi_n \cdot u) \subset V_n, n \in \{1, 2, ...\}$.

Pelo Teorema zeta da aproximação, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que:

$$\|\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u) - \varphi_n \cdot u\|_{W^{k,p}(U_n)} < \frac{\delta}{2^n}$$

onde $U_n = \Omega_{n+4} \backslash \overline{\Omega}_n$, já que $\overline{U}_n$ é um compacto em Ω.

Note que se ε_i é pequeno, então $\sup(\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u)) \subset U_n$.

De fato, tomando

$$\varepsilon_i < \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4},$$

temos, para $x \in U_n^c$, que

$$dist(x, \partial\Omega) \leqslant \frac{1}{n+4} \quad ou \quad dist(x, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow dist(x, V_n) \geqslant \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} > \varepsilon_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y)(\varphi \cdot u)(y)\, dy \ = \ 0.$$

Logo

$$\|\eta_{\varepsilon_i} * \varphi_n \cdot u - \varphi_n \cdot u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|\eta_{\varepsilon_i} * \varphi_n \cdot u - \varphi_n \cdot u\|_{W^{k,p}(U_n)} \leqslant \frac{\delta}{2^n}$$

Seja $u_m = \displaystyle\sum_0^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u)$.

Afirmação : $u_m \in C^{\infty}(\Omega)$.

Demonstração da Afirmação : Dado $x \in \Omega$, seja n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < dist(x, \partial\Omega)$. Logo $\frac{1}{n} < dist(x, \partial\Omega)$, $\forall$ $n > n_0$. Isso implica que $x \notin U_n$ para $n \geqslant n_0$. Portanto $\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u) = 0$ pois $x \notin \sup(\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u)$ para $n \geqslant n_0$.

Logo $u_m = \displaystyle\sum_0^{n_0} \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u)(x)$.

De fato, essa igualdade continua verdadeira em uma vizinhança de x.

Logo u_m é C^{∞} em x, já que é uma soma finita de funções C^{∞} em uma vizinhança de x.

Afirmação 2 : $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant 2\delta$.

Demonstração da Afirmação 2 :

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \| \sum_0^\infty \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u)(x) - u \cdot \sum_0^\infty \varphi_n \|_{W^{k,p}(\Omega)} =$$

$$= \| \sum_0^\infty [\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u) - \varphi_n \cdot u] \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant \sum_0^\infty \|\eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_n \cdot u) - \varphi_n \cdot u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant \sum_0^\infty \frac{\delta}{2^n} = \delta \cdot 2$$

Logo $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant 2\delta$, e portanto, $u_m - u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Como $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u_m = (u_m - u) + u \in W^{k,p}(\Omega)$, já que $W^{k,p}(\Omega)$ é espaço vetorial.

Deste resultado tiramos mais uma definição.

Definição 2.8. $W_0^{k,p}(\Omega) =$ *Fecho de* C_0^∞ *na norma* $\| \ \|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Observação 1. $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Uma pergunta que surge é se existe alguma relação entre as normas dos diferentes espaços de funções, seja $L^p, W^{k,p}, W_0^{k,p}$... Vamos ver que é possível achar uma relação entre várias delas, e que essa relação será usada mais adiante, quando formos estudar a resolução de Problemas envolvendo EDPs.

Então introduzimos as

Desigualdades de Sobolev:

Começaremos com uma motivação:

Seja $f \in C_0^1(\mathbb{R})$. Seja y tal que $f(y) = 0$, onde $y \notin supp(f)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\ dt \Rightarrow f(x) = \int_y^x f'(t)\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \left| \int_y^x f'(t)\ dt \right| \leqslant \int_y^x |f'(t)|\ dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\ dt, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Logo

$$sup|f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\ dt \Rightarrow \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_{L^1}, \quad \forall\ f \in C_0^1(\mathbb{R})$$

Como podemos generalizar esta desigualdade para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$?

Vamos tentar obter uma estimativa da forma

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para p e q são adequados. Note que quando $p = 1$ e $q = \infty$, já foi feito para n=1.

Qual a relação entre $n,\ p$ e q?

Suponhamos que a desigualdade seja válida para algum p e q.

Considere $f_\lambda \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Como a desigualdade vale em $C_0^1(\mathbb{R}^n)$, vale, em particular, para f_λ. Ou seja,

$$\|f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\nabla f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(\lambda x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Para não carregar a notação, chamamos $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$ e $L^q(\mathbb{R}^n) = L^q$. Fazendo $y = \lambda x$ na primeira integral, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q \frac{1}{\lambda^n} \, dy\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|f\|_{L^q}$$

Fazendo $y = \lambda x$ na segunda integral, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\lambda \nabla_y f(y)|^p \frac{1}{\lambda^n} \, dy\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_y f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla f\|_{L^p}$$

Portanto,

$$\lambda^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q} = \|f_\lambda\| \leqslant c\|\nabla f_\lambda\|_{L^p} = c\ \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla f\|_{L^p} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q} \leqslant c\ \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla f\|_{L^p} \qquad \forall \lambda > 0$$

Tomando $f \neq 0$, $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, temos que $a = \|f\|_{L^q} > 0$ e $b = c\|\nabla f\|_{L^p} > 0$.

Então

$$\lambda^{-\frac{n}{q}}\ a \leqslant \lambda^{1-\frac{n}{p}}\ b \Rightarrow a \leqslant \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\ b \qquad \forall \lambda > 0$$

Note que se

(i) $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$, então

$$a \leqslant \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\ b = 0 \Rightarrow a = 0,$$

o que é um absurdo.

(ii) $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} < 0$, então

$$a \leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\ b = 0 \Rightarrow a = 0$$

o que também é um absurdo.

Então $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$ para não haver contradição. Mas então

$$1 = \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

Desigualdade de Hölder:

Sejam $f_1, ..., f_k$ mensuráveis em Ω. Então

$$\int_\Omega |f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_k| \, dx \leqslant \left(\int_\Omega |f_1|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot ... \cdot \left(\int_\Omega |f_k|^{p_k} dx\right)^{\frac{1}{p_k}}$$

onde $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_k} = 1$

Teorema 2.3 (Gagliardo - Nirenberg - Sobolev)**.** *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* p *tal que* $1 \leqslant p < n$*. Existe uma constante* $c = c(n{,}p)$ *tal que* $\|f\|_{L^q} \leqslant c\|\nabla f\|_{L^p}, \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ *onde*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$$

ou seja,

$$q = \frac{np}{n-p}$$

Demonstração : 1º caso: $p = 1$ e $n > 1$

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)| dx)$$

Como $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\exists$ Q cubo tal que $supp(f) \subseteq Q$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$f(x_1, x_2, ...x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ...x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) =$$

$$= \int_{y_i}^{z_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, s, ...x_{i+1}, ..., x_n) ds$$

Tomando $(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ fora de Q, temos

$$f(x_1, x_2, ...x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ...x_n) = \int_{y_i}^{z_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, s, ...x_{i+1}, ..., x_n) ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_1, x_2, ...x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ...x_n)| \leqslant \int_{y_i}^{z_i} |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, s, ...x_{i+1}, ..., x_n)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, s, ...x_{i+1}, ..., x_n)| ds$$

Multiplicando as n desigualdades, temos

$$|f(x)|^n \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, ..., x_n)| ds \cdot ... \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., s)| ds$$

Elevando a $\frac{1}{n-1}$

$$|f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, ..., x_n)| ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., s)| ds\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando em x_1, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \, dx_1 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, ..., x_n)| ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., s)| ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \, dx_1$$

Tomando $k = n-1, \; p_1 = n-1, ..., \; p_{n-1} = n-1$ temos:

$$\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-1} = 1$$

Assim, podemos aplicar a Desigualdade de Hölder:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(s,...,x_n)|ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,s)|ds\right)^{\frac{1}{n-1}}\ dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}|ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_2}|ds\ dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_n}|ds\ dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando em relação a x_2, temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1\ dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}|ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_2}|ds\ dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ...\right.$$

$$\left. ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_n}|ds\ dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2$$

Aplicando novamente a Desigualdade de Hölder, chegamos à:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1\ dx_2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}|ds\ dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_2}|ds\ dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ...$$

$$... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_3}|ds\ dx_1\ dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_n}|\ ds\ dx_1\ dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

E assim, integrando em relação a x_3, ..., x_n, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1\ ...\ dx_n \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_1}|\ ds\ ...\ dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ...$$

$$... \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial f}{\partial x_n}|\ dx_1\ ...\ ds\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\ dx\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot ... \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\ dx\right)^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\ dx\right)^{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\ dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} \leqslant \|\nabla f\|_{L^1}$$

2ºcaso: $\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} \leqslant c\|\nabla f\|_{L^p}$

Idéia: Aplicar a desigualdade do 1º caso em $|f|^r$ para $r > 1$.

Sendo $p > 1$,tomamos

$$r = (\frac{np}{n-p})(\frac{n-1}{n}) = (\frac{(n-1)p}{n-p}) = p\ \ (\frac{n-1}{n-p}) > p > 1$$

Afirmação: Se $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e $r > 1$, então $|f|^r \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$

Demonstração da Afirmação:

$$\||f|^r\|_{L^{\frac{n}{n-1}}} = (\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^r)^{\frac{n}{n-1}} dx)^{\frac{n-1}{n}}$$

Como

$$\frac{n-1}{n} = (\frac{n-p}{np}) \ r$$

temos:

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{np}{n-p}} dx)^{\frac{n-p}{np}\cdot r} = \|f\|^r_{L^{\frac{np}{n-r}}}$$

Pois bem, usando a afirmação, o 1º caso e a Desigualdade de Hölder, temos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{rn}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |f|^r| dx = r \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r-1} ||\nabla f| \ dx \leqslant$$

$$\leqslant r \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(r-1) \ \frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Substituindo r por $\frac{p(n-1)}{n-p}$, temos

$$r\frac{rn}{n-1} = (r-1) \ \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p}$$

Usando uma desigualdade anterior, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n-p}{np}} \leqslant c \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Corolário 2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < n$. Então $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$.*

Além disso, $\exists c = c(n,p) > 0$ tal que:

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}} < c\|\nabla f\|_{L^p}, \forall f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

O próximo teorema será enunciado a título de curiosidade:

Teorema 2.4. $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é óbvio, o interesse se resume a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \supset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Heuristicamente, para toda função $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ temos que $f(x) \to 0$, bem como suas derivadas, quando cada $x_n \to \infty$. Então temos que $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \supset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Teorema 2.5 (Teorema da Extensão)**.** *Seja Ω limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^1. Dado um V conjunto tal que $\bar{\Omega} \subset V$, existe uma aplicação linear $E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e existe $c = c(n, p, \Omega, V) > 0$ tais que:*

(i) $E(u(x)) = u(x)\ \forall x \in \Omega$

(ii) $supp(E(u(x))) \subset V$

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Teorema 2.6. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ é de classe C^1, $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < n$. Então: $\exists c = c(n, p, \Omega) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Notação: Dado $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < n$, denotamos $p^* = \frac{np}{n-p}$

Corolário 2.2. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^1 , $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p < n$. Dado $1 \leqslant q \leqslant p^*$, $\exists c = c(n, p, \Omega, q) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Teorema 2.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < n$. Então $\exists c(n, p, \Omega) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^q} \leqslant c\|Du\|_{L^p}$$

$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *e* $1 \leqslant q \leqslant p^*$

Teorema 2.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Seja $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p$ tais que $n > kp$. Então $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, onde $q \leqslant \frac{np}{n-kp}$. Além disso, $\exists c = c(n, p, \Omega, k) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

$\forall u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Agora, gostaríamos da atenção do ilustre leitor, pois iremos enunciar um teorema de grande importância para o nosso trabalho. Infelizmente não iremos demonstrá-lo, deixando isso a cargo de autores de maior quilate. A nossa referência [3] contém tal demonstração.

Teorema 2.9 (Teorema de Relhich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que $\partial\Omega$ é de classe C^1. Se $p < n$, então a aplicação identidade:*

$$I : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$

é compacta para $1 \leqslant q < p^*$.

De fato, se $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ é uma sequência limitada (em $W^{1,p}(\Omega)$) então existe uma subsequência (u_{n_k})tal que $u_{n_k} \to u$ em L^q,$\forall q < p^*$.

Porém, para salvar a nossa honra, vamos não só enunciar como também demonstraremos a não menos importante Desigualdade de Poincaré.

Teorema 2.10 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado tal que $\partial\Omega$ é C^1. dado $1 \leqslant p < n$, $\exists c = c(n, p, \Omega) > 0$ tais que:*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p} \leqslant c\|Du\|_{L^p},$$

onde

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

Demonstração: Vamos provar por contradição.

Suponha que seja falso. Logo para $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que:

$$\|u - (u_n)_\Omega\|_{L^p} > n\|Du_n\|_{L^p}$$

Seja

$$v_n = \frac{u_n - (u_n)_\Omega}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p}}$$

Logo:

$$Dv_n = \frac{Du_n}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|}$$

Portanto:

$$\|Dv_n\|_{L^p} = \frac{\|Du_n\|_{L^p}}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|} < \frac{1}{n}$$

Então temos:

$$\|Dv_n\|_{L^p} < \frac{1}{n} \quad e \quad \|v_n\|_{L^p} = \frac{\|u_n - (u_n)_\Omega\|}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|} = 1$$

Note que $Dv_n \to 0$ em L^p.

Portanto, $\|v_n\|_{W_{1,p}} \leqslant c, \forall\ n$. Mas então $\exists\ (v_{n_k})$ subsequência tal que $v_{n_k} \to v$ em L^q, $\forall\ q < p^*$. Em Particular isso vale para $q = p < p^* = p.\frac{n}{n-p} > 1$.

Assim, denotando $w_k = v_{n_k}$, temos:

(i) $w_k \to v$ em L^p

(ii) $\|w_k\|_{L^p} = 1$

(iii) $Dw_k \to 0$ em L^p

Afirmação: $Dv = 0$ no sentido das distribuições.

Demonstração da Afirmação : Seja $\varphi \in C_0^\infty$. Logo:

$$\frac{\partial v(\varphi)}{\partial x_i} = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\lim \int_\Omega w_k(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dx = \lim \int_\Omega \frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x)\ \varphi(x)\ dx = 0$$

Obs.: A última igualdade é mostrada através da desigualdade de Hölder.

Logo

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi) = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

ou seja,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$$

Assim, $Dv \in L^p$ e $Dv = 0$.

Observe que se $v \in W^{1,p}(\Omega)$ é tal que $Dv = 0$ (q.t.p.) e Ω é conexo, então $v = c$ constante.

Portanto, $w_k \to v = c$ em L^p.

Assim,

$$\|w_k\|_{L^p} \to \|v\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |c|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = c|\Omega|^{\frac{1}{p}} > 0$$

Observando que

$$(u_{n_k})_\Omega = \frac{\int_\Omega u_{n_k} dx}{|\Omega|} \quad e \quad \int_\Omega 1 \; dx = |\Omega|$$

podemos desenvolver

$$\int_\Omega w_k dx = \int_\Omega v_{n_k} dx = \int_\Omega \frac{u_{n_k} - (u_n)_\Omega}{\|u_{n_k} - (u_{n_k})_\Omega\|} dx =$$

$$= \frac{1}{\|u_{n_k} - (u_{n_k})_\Omega\|} \left[\int_\Omega u_{n_k} dx - (u_{n_k})_\Omega \int_\Omega 1 \; dx \right] = 0$$

Como $w_k \to v$ em L^p, então $\int_\Omega w_k dx \to \int_\Omega v \; dx$.

Logo

$$\int_\Omega v \; dx = 0$$

Isso contradiz

$$\int_\Omega v \; dx = \int_\Omega c \; dx = c|\Omega| \quad onde \; c > 0.$$

3 Problema de Dirichlet

Após esse período de definições básicas do espaço de Sobolev, iremos passar para o Problema de Dirichlet. Iremos, é claro, começar com um caso simples, para então passar para algo mais complicado, mas que não passa de uma generalização do primeiro.

3.1 Um caso simples

Usaremos a partir de agora, a notação clássica para o Espaço de Sobolev: $H_0^1 = W_0^{1,2}$

Considere o Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\triangle u = f & em \;\; \Omega \\ u = g & em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

onde f é dado.

Podemos separar esse problema em dois:

$$\begin{cases} -\triangle u_1 = f & em \;\; \Omega \\ u_1 = 0 & em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -\triangle u_2 = 0 & em \;\; \Omega \\ u_2 = g & em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

Como estamos trabalhando um caso simples,vamos nos ater ao problema (1).

Agora, usando a primeira parte de nosso trabalho, vamos expandir o conceito de derivada fraca para o conceito de solução fraca:

Definição 3.1. *Dizemos que uma função $u \in H_0^1$ é uma solução fraca do problema (1) se*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Proposição 3.1. *Se $u \in C^2(\Omega)$ é solução clássica de (1), então, pelo Teorema da Divergência,*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Uma coisa deveras interessante, que resulta da definição de derivada fraca é:

Proposição 3.2. *H^1 é espaço de Hilbert com o produto interno*

$$< u, v >_1 = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

Podemos definir, também, um produto interno que torna H_0^1 em um Espaço de Hilbert.

Proposição 3.3. *H_0^1 é espaço de Hilbert em relação ao produto interno*

$$< u, v > = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$$

Esta é a definição que usaremos doravante. Note que o problema original pode ser reformulado:

$$< u, \varphi > = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Observe que que se $f \in L^2(\Omega)$, então f define um funcional linear limitado l_f em L^2 da seguinte forma:

$$l_f(\varphi) = \int \Omega f(x)\varphi(x)dx$$

Podemos, ainda, reescrever o problema por

$$< u, \varphi > = l_f(\varphi)$$

Assim, resolver o problema de Dirichlet (1) em um domímio limitado, é equivalente a:

Dado $l_f \in (H_0^1)'$, achar $u \in H_0^1$ tal que $< u, \varphi > = l_f(\varphi), \forall\varphi \in H_0^1$

A existência de tal u é garantida pelo Teorema de Riesz, bem como sua unicidade.

3.2 Formulação Fraca do Problema de Dirichlet

Passada a fase do caso simples, onde todos brincam e se divertem, vamos começar a complicar um pouco. Considere o problema de Dirichlet:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{ij}(x), b_i(x), c(x)$ funções limitadas e mensuráveis.

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)\ u(x) = f(x) \quad em \ \ \Omega \\ \\ u(x) = 0 \quad em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

Multiplicando a equação por $\varphi \in H_0^1$, e integrando, temos

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x))\ \varphi(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ \varphi(x)\ dx +$$

$$+ \int_\Omega c(x)\ u(x)\ \varphi(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ \varphi(x)$$

Usando integração por partes, chegamos a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \varphi(x)\ dx +$$

$$+ \int_\Omega c(x)\ u(x)\ \varphi(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\ \varphi(x) \tag{4}$$

Definindo o lado esquerdo de (4) como $B(u, \varphi)$, podemos generalizar a definição de solução fraca do caso simples.

Definição 3.2. *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (4) se:*

$$B(u,\varphi) = \int_\Omega f(x)\ \varphi(x)\ dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Observação 2. *Note que $B(u, \varphi)$ é bilinear.*

Uma ferramenta importante para a resolução deste problema é o Teorema de Lax-Milgram, porém, antes de o enurciarmos, mais 2 definições:

Definição 3.3. *B é limitada, i.e.,$\exists c < 0$ tal que $|B(u, v)| \leqslant c\|u\|\|v\|$, $\forall u, v \in H$.*

Definição 3.4. *B é coerciva , i.e.,$\exists D > 0$ tal que $D\|u\|^2 \leqslant |B(u, u)|$.*

Agora, o teorema:

Teorema 3.1 (Lax-Milgram)**.** *Sejam H espaço de Hilbert e $B : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear que é limitada e coerciva, então, $\forall\ l \in H'$, $\exists u \in H$ tal que $B(\varphi, u) =\ l(\varphi)$, $\forall \varphi \in H$.*

Ora, como podemos ver, basta B obedecer as condições do teorema de Lax-Milgram que teremos a unicidade da solução do Problema de Dirichlet! Verifiquemos, então.

B é limitada:

$$|B(u,v)| = |\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ v(x)\ dx +$$

$$+ \int_\Omega c(x)\ u(x)\ v(x)\ dx| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)|\ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ v(x)|\ dx +$$

$$+ \int_\Omega |c(x)\ u(x)\ v(x)|\ dx \tag{5}$$

Como $a_{i,j}(x)$, $b_i(x)$ e $c(x)$ são limitados, existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_{i,j}(x)|$,$|b_i(x)|$,$|c(x)|$ são menores que M. Então:

$$(5) \leqslant M \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)|dx\ +\ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ v(x)|\ dx + \int_\Omega |u(x)\ v(x)|\ dx \right] \tag{6}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, chegamos a:

$$(6) \leqslant M \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}\ + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}\ +\ \left(\int_\Omega u^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leqslant$$

$$\leqslant M \left[\sum_{i,j=1}^{n} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}\ +\ \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}\ +\ \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \right]\ =$$

$$= M \left[n^2 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}\ +\ n\|u\|_{H_0^1}\|\ \|v\|_{L^2}\ +\ \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \right] \tag{7}$$

Aplicando a Desigualdade de Poincaré em (7), temos:

$$(7) \leqslant M \left[n^2 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}\ +\ n\|u\|_{H_0^1} c\|v\|_{H_0^1}\ +\ c^2\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \right]\ =$$

$$=\ C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$$

O que implica que B é limitada.

E a coercividade, ocorre sempre? A resposta para essa pergunta é: não. Mas, para não termos trabalhado em vão, podemos estabelecer algumas condições sobre B para que ocorra.

Condiçoes para a coercividade de B:

Primeiro, faremos um estimativa por baixo:

Seja

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right)\ +\ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ +\ c(x)u(x)$$

Assim, o problema original pode ser escrito:

$$\begin{cases} L(u)\ =\ f(x)\ \ em\ \Omega \\ u(x)\ =\ 0\ \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

Definição 3.5. *Dizemos que L é uniformemente elíptico se:* $\exists \lambda > 0$ *tal que* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \ \geqslant \ \lambda \|y\|^2$ *onde* $y \ = \ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $x \in \Omega$

Observação 3.

$$Seja \ A(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij}(x))$$

Note que $< A(x)y, y > \ = \ \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j$. Assim, podemos reescrever a igualdade da definição como por:

$$< A(x)y, y > \ \geqslant \ \lambda \|y\|^2$$

Neste caso, dizemos que $A(x) = (a_{ij}(x)) \geqslant \lambda$.

Como conseqüência, A é uma matriz positiva definida. Em outras palavras, dizer que L é uniformemente elíptico é dizer que $\exists \lambda > 0$ tal que $A(x) = (a_{ij}(x)) \geqslant \lambda$.

Seja $B : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$B(u,v) \ = \ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \ dx \ +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) \ dx \ + \ \int_\Omega c(x) u(x) v(x) \ dx$$

Dizemos que $u \in H_0^1$ é solução fraca de (8) se

$$B(u,v) \ = < f, v > , \forall v \in H_0^1$$

onde $< f, v > = \ \int_\Omega f(x) \ v(x) \ dx$

Muito bem, pegaremos L uniformemente elípica, já que daí não apresenta problema. E como vamos fazer isso, por que não aproveitamos e impomos alguma condições para $b_i(x)$ e $c(x)$?

Teorema 3.2. *Suponhamos que* $b_i(x) \ = \ 0, \forall i$ *e* $c(x) \ \geqslant \ 0$.*Além disso,* a_{ij} *e* $c(x)$ *são limitados e o operador definido por eles é uniformemente elíptico. Então*

$$L(u) \ = \ \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \ + \ c(x) u(x) \ = \ f(x) \ em \ \Omega \\ \qquad u(x) \ = \ 0 \qquad em \ \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução fraca.

Demonstração: Já vimos que B associado a L é limitado, então basta provar que é coercivo

Afirmo que: $\exists \ c \ > \ 0$ tal que $B(u,u) \ \geqslant \ c\|u\|^2, \forall \ u \in H_0^1$.

Como L é elíptico,$\exists \ \lambda \ > \ 0$ tal que

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \ \geqslant \ \lambda \|\xi\|^2, \forall \ \xi \in \mathbb{R}^n$$

Assim, tomando $\xi = Du(x) = \nabla u(x) = (u_{x_1}(x), ..., u_{x_n}(x))$, temos:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \geqslant \lambda|\nabla u|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ dx \geqslant \int_\Omega \lambda|\nabla u|^2\ dx = \lambda\|u\|^2_{H^1_0}$$

Além disso, como $c(x) > 0$, temos:

$$B(u,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ dx + \int_\Omega c(x)u^2(x)\ dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ dx \geqslant \lambda\|u\|^2_{H^1_0}$$

Logo $B(u,u) \geqslant \lambda\|u\|^2_{H^1_0}$, o que faz com que B seja coerciva.

Então, por Lax-Milgram, $\exists\ u \in H^1_0$ tal que $B(u,v) = < f, v >, \forall\ v \in H^1_0$

Observação 4. *Para aplicar Lax-Milgram, basta que o funcional do lado direito esteja no dual de H^1_0, i.e.,*

$$l \in (H^1_0)' \Rightarrow \exists\ u \in H^1_0 \textit{ tal que } B(u,v) = l(v), \forall\ v \in H^1_0. \tag{9}$$

Chegamos, assim, a B tal que obedece as condições do teorema de Lax-Milgram. Porém, no nosso problema original isso não ocorre, mas podemos achar outra propriedade sobre B, que acarretará consequências bem interessantes.

Teorema 3.3. *Seja $L : H^1_0 \to \mathbb{R}$ definido por:*

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)$$

Seja L operador uniformemente elíptico com coeficientes limitados. Então existem α e $\beta > 0$ tais que:

$$\beta\|u\|^2_{H^1_0} \leqslant B(u,u) + \alpha\|u\|^2_{L^2}$$

Demonstração:

$$B(u,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\ dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ u(x)\ dx +$$

$$+ \int_\Omega c(x)\ u(x)\ dx \geqslant \int_\Omega \lambda|\nabla u(x)|^2\ dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ u(x)\ dx +$$

$$+ \int_\Omega c(x)\ u(x)\ dx \Rightarrow \lambda\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \leqslant$$

$$\leqslant B(u,u) - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ u(x)\ dx - \int_\Omega c(x)\ u^2(x)\ dx \tag{10}$$

Fazendo as estimativas:

$$\left|\int_\Omega c(x)\ u^2(x)\ dx\right| \leqslant \int_\Omega |c(x)|\ u^2(x)\ dx \leqslant \int_\Omega K_1\ u^2(x)\ dx\ =\ K_1\|u\|^2_{L^2} \tag{11}$$

onde $K_1 \in \mathbb{R}$

$$\left|\sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ u(x)\ dx\right| \leqslant\ \sum_{i=1}^n \int_\Omega |b_i(x)||\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)||u(x)|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant\ \sum_{i=1}^n \int_\Omega K_2|\nabla u|\ |u|\ dx \leqslant\ K_2 n \int_\Omega |\nabla u|\ |u(x)|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant\ K_2 n \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\ =\ K_3\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{L^2} \tag{12}$$

Usando as estimativas (11) e (12) na desigualdade (10), obtemos:

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \leqslant B(u,u)\ +\ K_1\|u\|^2_{L^2}\ +\ K_3\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\|u\|^2_{H_0^1} \leqslant B(u,u)\ +\ K_2\|u\|^2_{L^2}\ +\ K_3\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{L^2}$$

Aplicando a Desigualdade de Young:

$$K_3\|u\|_{H_0^1}\|u\|_{L^2} \leqslant K_3\left(\frac{\|u\|^2_{L^2}}{4\varepsilon}\ +\ \varepsilon\|u\|^2_{H_0^1}\right) \qquad ,para\ \varepsilon > 0$$

Logo:

$$\lambda\|u\|^2_{H_0^1} \leqslant B(u,u)\ +\ K_2\|u\|^2_{L^2}\ +\ \frac{K_3\|u\|^2_{L^2}}{4\varepsilon}\ +\ K_3\varepsilon\|u\|^2_{H_0^1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - K_3\varepsilon)\|u\|^2_{H_0^1} \leqslant B(u,u)\ +\ \left(\frac{K_3}{4\varepsilon}\ +\ K_2\right)\|u\|^2_{L^2}$$

Tomando $\varepsilon\ =\ \frac{\lambda}{2K_3}$, temos

$$\lambda\ -\ K_3\varepsilon\ =\ \lambda - K_3\ \frac{\lambda}{2K_3}\ =\ \frac{\lambda}{2}$$

Defino

$$\frac{\lambda}{2}\ =\ \beta\ \ e\ \ \left(\frac{K_3}{4\varepsilon}\ +\ K_2\right)\ =\ \alpha$$

Então

$$\beta\|u\|^2_{H_0^2} \leqslant B(u,u)\ +\ \alpha\|u\|^2_{L^2}$$

Como B não é exatamente o que desejamos, vamos trabalhar com um outro funcional que está intimamente associado a ele, mas que obedece as condições que queremos.

Corolário 3.1. *Seja $L_\alpha\ =\ L\ +\ \alpha I$ e seja B_α a forma bilinear associada a L_α,i.e.,*

$$B_\alpha(u,v)\ =\ B(u,v)\ +\ \int_\Omega \alpha u(x)\ v(x)\ dx$$

onde B(u,u) é como definida acima. Então $B_\alpha(u,u)$ é coerciva e limitada.

Demonstração: (i) B_α é claramente coerciva, pelo Teorema anterior:

$$B_\alpha(u,u) \;=\; B(u,u) \;+\; \alpha \int_\Omega u^2(x)\; dx \geqslant \beta \|u\|^2_{H_0^1}$$

(ii)$B_\alpha(u,u)$ é limitada:

Usando que B é limitada e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, temos:

$$|B_\alpha(u,u)| \;= |B(u,u) \;+\; \alpha \int_\Omega u(x)\; v(x)\; dx| \leqslant |B(u,u)| \;+\; \alpha \int_\Omega u(x)\; v(x)\; dx \leqslant$$

$$\leqslant c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \;+\; \alpha\|u\|_{L\ 2}\|v\|_{L^2} \leqslant c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \;+\; \alpha c\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.

Portanto, podemos aplicar Lax-Migram para garantir que:

$$\begin{cases} L(u(x)) \;+\; \alpha u(x) \;=\; f(x)\ em\ \Omega \\ u(x) \;=\; 0\ em\ \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução para toda $f \in (H_0^1)'$.

Teorema 3.4. *Seja L com as hipóteses do teorema anterior.Então ou*

$$\begin{cases} L(u(x)) = f(x)\ em\ \Omega \\ \quad u(x) = 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

tem solucão para toda $f \in L^2(\Omega)$ ou $\exists u \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} L(u(x)) = f(x)\ em\ \Omega \\ \quad u(x) = 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Demonstração: Vimos que $\exists\ \alpha > 0$ tal que

$$\begin{cases} L(u(x)) \;+\; \alpha u(x) \;=\; f(x)\ em\ \Omega \\ u(x) \;=\; 0\ em\ \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução $\forall f \in (H_0^1)'$. Além disso a soluçao é única.

Logo $(L \;+\; \alpha I) : H_0^1 \to (H_0^1)'$ é uma bijeção. Então existe $(L \;+\; \alpha I)^{-1} : (H_0^1)' \to H_0^1$

Em particular, $(L \;+\; \alpha I)^{-1}|_{L^2} : L^2 \to L^2$

Note que o problema

$$\begin{cases} L(u(x)) \;=\; f(x)\ em\ \Omega \\ u(x) \;=\; 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

tem solução se, e somente se,

$$\begin{cases} L(u(x)) \;+\; \alpha u(x) \;=\; f(x) \;+\; \alpha u(x)\ em\ \Omega \\ u(x) \;=\; 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{16}$$

O Problema (16) tem solução se, e somente se,

$$\begin{cases} u(x) \;=\; (L \;+\; \alpha I)^{-1}(f \;+\alpha u)(x)\ em\ \Omega \\ u(x) \;=\; 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{17}$$

Note que:

$$u = L_\alpha^{-1}(f + \alpha u) = L_\alpha^{-1} f + L_\alpha^{-1}(\alpha u) \Rightarrow u - \alpha L_\alpha^{-1}(u) = L_\alpha^{-1}(f)$$

Denotando $K(u) = \alpha L_\alpha^{-1}$, isso equivale à $u - K(u) = L_\alpha^{-1}$

Então, o problema (15) tem solução se, e somente se,

$$\begin{cases} u(x) - K(u(x)) = L_\alpha^{-1}(x) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

tem solução.

Afirmação : $K = \alpha L_\alpha^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto.

Demonstração da Afirmação :

Seja $(u_n) \subset L^2$. Defina $w_n = K(u_n)$.

Note que:

$$\frac{1}{\alpha} w_n = L_\alpha^{-1}(u_n) \Leftrightarrow \frac{L_\alpha(w_n)}{\alpha} = u_n \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} B_\alpha(w_n, \varphi) = < u_n, \varphi >_{L^2}, \ \forall \varphi \in H_0^1$$

Tomando $\varphi = w_n$, e usando a Desigualdade de Poincaré, temos:

$$\beta \|w_n\|_{H_0^1}^2 \leqslant B_\alpha(w_n, w_n) = \alpha < u_n, w_n >_{L^2} \leqslant \alpha \|u_n\|_{L^2} \|w_n\|_{L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \|w_n\|_{H_0^1}^2 \leqslant \alpha \|u_n\|_{L^2} \|w_n\|_{L^2} \leqslant \alpha \|u_n\|_{L^2} \cdot c \|w_n\|_{H_0^1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \|w_n\|_{H_0^1} \leqslant C \|u_n\|_{L^2}$$

Onde $C, c \in \mathbb{R}$ Como u_n é limitada , então $\exists \ M > 0$ tal que $\|u_n\|_{L\ 2} \leqslant M$. Logo:

$$\beta \|w_n\|_{H_0^1} \leqslant C \cdot M$$

Então (w_n) é limitada em H_0^1, e portanto, por Reilich - Kondrachov, $\exists \ (w_{n_k})$ subsequência convergente em L^2. Logo K é compacto.

Assim, (15) tem solução se, e somente se,

$$\begin{cases} u(x) - K(u(x)) = L_\alpha^{-1}(f(x)) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{19}$$

tem solução e K é compacto.

Sim, mas o leitor deve estar se perguntando o por quê de estarmos insistindo no ponto de que K é compacto. É para podermor usar a

Alternativa de Fredholm: Seja $K : H \to H$ um operador linear compacto. Então:

(i) $N(I - K)$ tem dimensão finita.

(ii) $Im(I - K)$ é fechada.

(iii) $Im(I - K) = [N(I - K)]\perp$

(iv) $N(I - K) = \{0\} \Leftrightarrow Im(I - K) = H$

(v) $dim \ N(I - K) = dim \ N(I - K^*)$

E em que usaremos isto?

Suponhamos que $\exists\ f \in L^2(\Omega)$ tal que o problema (15) não tem solução. Logo (19) também não tem solução. Assim, $L_\alpha^{-1}(f) \notin Im(I - K)$, o que implica em) $Im(I - K) \subsetneq L^2$

Então, pela Alternativa de Fredholm, item (d), $N(I-K) \neq \{0\}$

Então, $\exists\ v \neq 0$ tal que $v \in N(I-K)$, i.e., $v - K(v) = 0$, que implica em:

$$\begin{cases} L(v(x)) = 0 \ em\ \Omega \\ v(x) = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{20}$$

com $v \neq 0$

Assim, provamos que , se para alguma $f \in L^2$ o problema (15) não tem solução, então $\exists\ v \neq 0$ que é solução de (20).

Reciprocamente, se este problema não tem solução, então $\exists\ f \in L^2$ tal que (15) não tem solução. Neste caso, cabe saber para quais f o problema não tem solução.

Observação 5. *Caso o problema (20) tenha solução não-trivial, então $N(I - K) \supsetneq \{0\}$, e daí dim $N(I-K) \geqslant 1$. Note que a dimensão de $N(I-K) < \infty$ (Item (a) da Alternativa se Fredholm) e dim $N(I-K) =$ dim $N(I-K^*)$ (item e). E pelo item(c), temos $Im(I-K) = [N(I-K)]^\perp$.*

Assim,$(I-K)(u(x)) = g(x)$ só não terá solução para g contido em um subespaço de dimensão finita..Portanto, existe um espaço de dimensão finita $E \subset L^2$, tal que se $f \in E^\perp$, então (15) tem solução.

Nesse momento podemos estabelecer um paralelo com os espaços de dimensão finita, quanto ao aspecto autovalor e autovetor. Então

Definição 3.6. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de L se se $\exists\ u \neq 0$ tal que*

$$\begin{cases} L(u(x)) = \lambda u(x) \ em\ \Omega \\ u(x) = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

Note que $u(x)$ faz as vezes de autovetor.

Vejamos uma propriedade dos conjunto dos autovalores, através de um teorema.

Teorema 3.5. *Existe um $\Sigma \subset \mathbb{R}$ enumerável tal que o problema*

$$\begin{cases} L(u(x)) = \lambda u(x) + f(x) \ em\ \Omega \\ u(x) = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{22}$$

tem solução $\forall f \in L^2 \Leftrightarrow \lambda \notin \Sigma$

Além disso, se Σ é infinito, então $\Sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ é uma seqüencia não-decrescente indo para o infinito.

Demonstração: Seja $L_\lambda(u(x)) = L(u(x)) - \lambda u(x)$.Logo (22) equivale ao problema

$$\begin{cases} L_\lambda(u(x)) = f(x) \ em\ \Omega \\ u(x) = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases}$$

Como foi visto, esse problema tem solução para qualquer $f \in L^2$ se , e somente se,

$$\begin{cases} L_\lambda(u(x)) \ = \ 0 \ em \ \Omega \\ u(x) \ = \ 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases}$$

só tem solução trivial. Ou seja,

$$\begin{cases} L(u(x)) \ = \ \lambda(x) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases}$$

só tem solução trivial. Isto é, λ não é autovalor.

Chamamos o conjunto dos autovalores reais de Σ, então $\lambda \notin \Sigma$.

Afirmação: Σ é enumerável.

Demonstração da Afirmação: Seja $\lambda \in \Sigma$. Logo $\exists \ u \neq 0 \in H_0^1$ tal que

$$\begin{cases} L(u(x)) = \lambda u(x) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{23}$$

Seja α tal que $\exists (L + \alpha I)^{-1}$ limitada. Note que

$$\begin{cases} L(u(x)) + \alpha u(x) = \lambda u(x) + \alpha u(x) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} u(x) = L_\alpha^{-1}((\lambda + \alpha)u(x)) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{25}$$

que ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} u(x) = (\lambda + \alpha)L_\alpha^{-1}(u(x)) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{26}$$

Chamando $K = L_\alpha^{-1}$, isto equivale a

$$\begin{cases} K(u(x)) = \frac{1}{\lambda+\alpha} \ u(x) \ em \ \Omega \\ u(x) = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{27}$$

Com isto, $\lambda \in \Sigma \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda+\alpha}$ é autovalor de K.

Da Análise Funcional temos que se K é compacto, então os autovalores de K são enumeráveis , ou seja, tem que ocorrer um dos casos:

(i) $\sigma_p(K) = \{\mu_1, \mu_2, ...\}$ onde $\mu_n \to 0$, logo:

$$\frac{1}{\lambda + \alpha} = \mu_n \ para \ algum \ n \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_n} = \lambda + \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_n} - \alpha = \lambda$$

(ii) $\sigma_p(K) = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n\}$

(iii) $\sigma_p(K) = \{0\}$

Portanto, σ é enumerável, então a quantidade de λ tem que ser enumerável, pois $(\frac{1}{\lambda+\alpha}) = \mu_n$. Se σ é infinito, então

$$\sigma_p(K) = \{\mu_1, \mu_2 < ...\} \ com \ \mu_n \to 0$$

Assim,

$$|\lambda \ + \ \alpha| = \frac{1}{\mu_n} \to +\infty$$

Além disso, como $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\lambda_n + \alpha} \in \mathbb{R}$. E também, $\lambda + \alpha > 0$, pois:

$$< L_\alpha(u), u >= B_\alpha(u,u) =< (\lambda + \alpha)u, u >= (\lambda \ + \ \alpha \|u\|^2_{L^2} \Rightarrow \lambda + \alpha = \frac{B_\alpha(u,u)}{\|u\|^2_{L^2}}$$

Logo $\mu_n = \frac{1}{\lambda + \alpha} > 0$, e portanto, $\lambda = \frac{1}{\mu_n} - \alpha \to +\infty$

Observação 6. *Se $a_{ij} = a_{ji}$, então os autovaloores de L formam um conjunto infinito enumerável $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ tal que $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$*

Demonstração: Basta notar que K (da afirmação) é autoadjunto, infinito e L^2 tem dimensão infinita.

3.3 Caracterização das Autofunções e Autovalores de L

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}$ e $\lambda_1 < ... < \lambda_n < ...$ os autovalores de

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + c(x)u$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$ e L é uniformemente elíptica e os coeficientes são limitados. Seja λ_1 o menor autovalor de Lu. Podemos mostrar quem é esse menor autovalor, e o melhor, a partir dele conseguiremos achar todos os outros.

Teorema 3.6. *Seja*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + cu(x)$$

um operador uniformemte elíptico com coeficientes $a_{ij} = a_{ij}(x)$ e $c = c(x)$ funções limitados, onde os a_{ij} são simétricos.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado.

Então o primeiro autovalor de L é dado por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H^1_0} \frac{B(u,u)}{\|u\|^2_{L^2}},$$

onde B é a forma bilinear associada a L, $u_1 \neq 0$ e $u_1 \in H^1_0$ tais que

$$\lambda_1 = \frac{B(u_1,u_1)}{||u_1||^2_{L^2}}.$$

Demonstração:

Afirmação 1 : B(u,u) é limitado inferiormente, isso é, possui ínfimo.

Demonstração da Afirmação 1 :

Como L é uniformente elíptico, existe um $\gamma > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tome $\xi = \nabla u, u \in H_0^1$.

Então teremos

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \geq \gamma|\nabla u|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \geq \gamma|\nabla u|^2$$

Integrando ambos os lados

$$B(u,u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 dx \geq \gamma \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \gamma||\nabla u||_{L^2}^2 \Rightarrow$$

$$B(u,u) \geq \gamma\|\nabla u\|_{L^2}^2 \Rightarrow$$

Pela desigualdade de Poincaré

$$B(u,u) \geq \gamma D\|u\|_{L^2}^2 = C\|u\|_{L^2}^2$$

$$C \leq \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2}^2}, \ \forall u \in H_0^1$$

Logo existe ínfimo, provando a Afirmação 1.

Afirmação 2 :

$$I = \inf_{u \in H_0^1} \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \lambda_1,$$

onde λ_1 é o menor autovalor de L em H_0^1.

Demonstração da Afirmação 2 : Seja u_1 o autovetor associado ao autovalor λ_1. Ou seja,

$$\begin{cases} -Lu_1 = \lambda_1 u_1 & em \ \ \Omega \\ u_1 = 0 & em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Então $\forall \varphi \in H_0^1$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + cu_1\varphi dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1\varphi dx$$

Tome $\varphi = u_1$

$$B(u_1, u_1) = \lambda_1 \|u_1\|_{L^2}^2$$

Logo

$$I = \inf_{u \in H_0^1} \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2}^2} \leq \frac{B(u_1,u_1)}{\|u_1\|_{L^2}^2} = \lambda_1$$

Portando $I \leq \lambda_1$, provando a Afirmação 2.

Afirmação 3 : Existe um $\bar{u} \in H_0^1$ tal que

$$I = \frac{B(\bar{u},\bar{u})}{\|\bar{u}\|_{L^2}^2}$$

Demonstração da Afirmação 3 : Como

$$I = \inf_{u \in H_0^1} \frac{B(u,u)}{\|u\|_{L^2}^2}$$

então existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_0^1$ tal que:

$$\frac{B(u_n,u_n)}{\|u_n\|_{L^2}^2} \to I.$$

Seja

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}$$

Como

$$\|v_n\|_{L^2} = \|\frac{u_n}{\|v_n\|_{L^2}}\|_{L^2} = \frac{\|v_n\|_{L^2}}{\|v_n\|_{L^2}} = 1,$$

a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Além disso, a sequência $(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ também é limitada, pois:

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2}}) = \frac{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}}{||u_n||_{L^2}} \Rightarrow$$

$$\|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\|_{L^2} = \frac{\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\|_{L^2}}{\|u_n\|_{L^2}} \leq \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2}}{\|u_n\|_{L^2}}$$

Portanto

$$\|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2}^2}{\|u_n\|_{L^2}^2} \leq \frac{B(u_n,u_n)}{\gamma\|u_n\|_{L^2}^2} \to \frac{I}{\gamma}$$

Observação 7. *A segunda desigualdade vem do fato de L ser uniformemente elíptico. Logo* $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$ *também é limitada.*

Ou seja, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências limitadas.*

Como $\frac{\partial v_n}{\partial x_i}$ e $v_n \in H_0^1 \subset W^{1,2} \subset L^2$ então $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $W^{1,2}$.

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov existe uma subsequência $(v_n)_k \to \bar{u} \in L^2$. Observamos também que como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada no espaço de Hilbert H_0^1, existe uma subsequência fracamente convergente em H_0^1. Ou seja:

$$v_{n_{k_l}} \rightharpoonup v \in H_0^1.$$

Resumindo e renomeando, temos:

$$v_l \to \bar{u} \in L^2$$
$$v_l \rightharpoonup v \in H_0^1$$

Como

$$v_l \to \bar{u} \in L^2 \Rightarrow v_l \rightharpoonup \bar{u} \in L^2$$
$$v \in H_0^1 \subset L^2 \Rightarrow v_l \rightharpoonup v \in L^2.$$

Pela unicidade do limite $\bar{u} = v$ em L^2 .

Então:

$$v_l \to \bar{u} \in L^2 \quad (1)$$
$$v_l \rightharpoonup \bar{u} \in H_0^1 \quad (2)$$

De (1),

$$v_l \to \bar{u} \in L^2 \Rightarrow \|v_l\|_{L^2} \to \|\bar{u}\| \in L^2 \Rightarrow \|\bar{u}\|_{L^2} = 1$$

Seja $<,>_1$: $H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$< u, v >_1 = B(u, v).$$

Defina $\|u\|_1 = \sqrt{< u, u >_1}$

Vamos supor que $\|.\|_1$ é de fato uma norma e suponhamos ainda que as normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_{H_0^1}$ sejam equivalentes (será provado posteriormente).

Por (2) $v_l \in H_0^1$ que é espaço de Hilbert. Sabemos da teoria clássica que nesse caso

$$v_l \rightharpoonup \bar{u} \Rightarrow \|\bar{u}\|_1 \leq \liminf \|v_l\|_1,$$

considerando o espaço normado $(H_0^1, \|.\|_1)$.

Portanto

$$\|\bar{u}\|_1 \leq \liminf \|\frac{u_l}{\|u_l\|_{L^2}}\|_1 = \liminf \frac{\|u_l\|_1}{\|u_l\|_{L^2}}$$

Como

$$\liminf \frac{\|u_l\|_1}{\|u_l\|_{L^2}} = \liminf \frac{\sqrt{B(u_l, u_l)}}{\|u_l\|_{L^2}}$$

Então

$$\|\bar{u}\|_1 \leq \liminf \frac{\sqrt{B(u,u)}}{\|u_l\|_{L^2}} = \liminf \sqrt{\frac{B(u_l,u_l)}{\|u_l\|^2_{L^2}}} = \sqrt{I}$$

Logo

$$\|\bar{u}\|_1^2 \leq I \Rightarrow B(\bar{u},\bar{u}) \leq I$$

Note que como $\|\bar{u}\|^2_{L^2} = 1$, então:

$$\frac{B(\bar{u},\bar{u})}{\|\bar{u}\|^2_{L^2}} \leq I = \inf_{u \in H_0^1} \frac{B(u,u)}{\|u\|^2_{L^2}}$$

Portanto temos que

$$\frac{B(\bar{u},\bar{u})}{\|\bar{u}\|^2_{L^2}} = I$$

provando a Afirmação 3.

Para concluir a demostração basta verificar a equivalência das normas $\|.\|_1$ e $\|.\|_{H_0^1}$. Ou seja, vamos mostrar que existem constantes A e C tais que

$$C\|u\|_{H_0^1} \leq \|u\|_1 \leq A\|u\|_{H_0^1} \quad \forall u \in H_0^1.$$

Note que:

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 \; dx, \quad c > 0$$

$$\|u\|_1^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}||\frac{\partial u}{\partial x_i}||\frac{\partial u}{\partial x_j}| + |cu^2| \; dx, \quad c > 0$$

$$\|u\|_1^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n M|\nabla u||\nabla u| + cu^2 \; dx, \quad |a_{ij}| < M$$

$$\|u\|_1^2 \leq n^2 M \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + c\int_\Omega u^2 dx$$

$$\|u\|_1^2 \leq n^2 M\|u\|^2_{H_0^1} + c\|u\|_{L^2} \leq n^2 M\|u\|^2_{H_0^1} + cD||u||^2_{H_0^1}$$

$$\|u\|_1^2 \leq (n^2 M + cD)\|u\|^2_{H_0^1}$$

$$\|u\|_1^2 \leq A\|u\|^2_{H_0^1}$$

onde $A = (n^2M + cD)$ é constante.

Por outro lado, como L é uniformemente elíptico, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n).$$

Tomando $\xi = \nabla u$

$$\gamma|\nabla u|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2$$

Integrando

$$\gamma\int_\Omega \nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + cu^2 dx \Rightarrow$$

$$\gamma\|u\|^2_{H^1_0} \leq \|u\|^2_1 \Rightarrow \sqrt{\gamma}\|u\|_{H^1_0} \leq \|u\|_1$$

Logo

$$C\|u\|_{H^1_0} \leq \|u\|_1,\ onde\ C = \sqrt{\gamma}.$$

Ou seja,

$$C\|u\|_{H^1_0} \leq \|u\|_1 \leq A\|u\ |_{H^1_0}.$$

3.4 Princípio do Máximo

O Princípio do Máximo se divide em dois casos: o Fraco e o Forte. Demonstraremos primeiro o Fraco, para então usá-lo na demonstração do Forte.

Teorema 3.7 (Princípio Fraco do Máximo). *Seja Ω um aberto limitado e $u \in \overline{C^2(\Omega)} \bigcap C(\overline{\Omega})$ tal que*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} \leqslant 0$$

onde $a_{ij}(x), b_i(x)$ são funções contínuas em $\overline{\Omega}$ e L é uniformemente elíptico e $a_{ij} = a_{ji}$. Então

$$\max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u$$

Demonstração: Vamos supor que $\max_{\partial\Omega} u < \max_{\overline{\Omega}} u$. Logo, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$

Como $A(x_0) = (a_{ij}(x_0))$ é uma matriz simétrica, então A é diagonalizável e $\exists O$ matriz ortogonal tal que $OAO^{\perp} = D = \begin{pmatrix} o_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & o_{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & o_n \end{pmatrix}$

Como L é uniformemente elíptica e A é positiva definida, portanto os autovalores de A são positivos.Como A e D são semelhantes, os seus autovalores são iguais e daí, $o_i > 0$ para todo i.

Seja $y = x_0 + O.(x - x_0)$ Portanto, $y - x_0 = O.(x - x_0)$. Como O é ortogonal,$OO^{\perp} = I$, portanto:

$$O^{\perp}(y - x_0) = O^{\perp}O(x - x_0) \Rightarrow O^{\perp}(y - x_0) = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + O^{\perp}(y - x_0)$$

Assim, pela Regra da Cadeia:

$$u_{x_i} = \sum_{l=1}^{n} u_{x_l}(y_l)_{x_i} \qquad u(x) = u(y(x))$$

Note que se denominarmos $O = (o_{ij})$, temos:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_0 + O.(x - x_0) = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_{11} & \dots & o_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{n1} & \dots & o_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0^1 \\ x_2 - x_0^2 \\ \vdots \\ x_n - x_0^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_l = x_0^l + \sum_{k=1}^{n} o_{lk} \cdot (x_k - x_0^k) \Rightarrow (y_l)_{x_i} = 0 + o_{li} \Rightarrow u_{x_i} = \sum_{l=1}^{n} u_{y_l} \cdot o_{li}$$

Temos, também:

$$u_{x_ix_j} = (u_{x_i})_{x_j} = \sum_{k=1}^{n}(u_{x_i})_{y_k} \cdot o_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n} u_{y_l}o_{li})_{y_k}o_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{y_ly_j} \cdot o_{li} \cdot o_{kj}$$

Logo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sum_{l,k=1}^{n} u_{y_iy_j}o_{li}o_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k,l=1}^{n} u_{y_ly_k}a_{ij}o_{li}o_{kj} =$$

$$= \sum_{k,j}^{n} u_{y_ly_k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}o_{li}o_{kj} = \sum_{l,k=1}^{n} u_{y_ly_k}d_{lk} = \sum_{l=1}^{n} u_{y_ly_l} \cdot d_l$$

pois $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}o_{li}o_{kj} \;=\; d_{l_k}$.

Demonstração do caso geral:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} \leqslant 0$$

Seja $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$ onde λ é escolhido de forma adequada e x_1 é a 1º coordenada de x.

Afirmação: $Lu_\varepsilon < 0$ para $\varepsilon > 0$ e λ adequado.

Observação: $Lu_\varepsilon = L(u + \varepsilon e^{\lambda x_1}) = Lu + \varepsilon L e^{\lambda x_1}$ .Ora, como $Lu \leqslant 0$, então

$$Lu + \varepsilon L e^{\lambda x_1} \leqslant \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) = \varepsilon[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(e^{\lambda x_1})_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(e^{\lambda x_i})_{x_i}] =$$

$$= -\varepsilon[a_{11}(x)\lambda^2 e^{\lambda x_1} + b_1(x)\lambda e^{\lambda x_1}] = \varepsilon\lambda[a_{11}\lambda e^{\lambda x_1} - b_1(x)e^{\lambda x_1}] = -\varepsilon\lambda e^{\lambda x_1}[a_{11}(x)\lambda - b_1(x)]$$

Pois bem,$-\varepsilon\lambda e^{\lambda x_1}$ é negativo, e queremos que essa expressão seja negativa, então queremos que $a_{11}(x)\lambda - b_1(x) > 0$.

como $a_{11}(x) > \epsilon \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right) \geqslant \lambda|\xi|^2$, basta tomar $\xi = (1, 0, ..., 0) = e_1$.

Logo

$$Lu_\varepsilon \leqslant -\varepsilon\lambda e^{\lambda x_1}[a_{11}\lambda - b_1(x)] < 0 \qquad se\ \lambda > \sup \frac{b_i(x)}{a_{11}}$$

Completando a afirmação.

Logo $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon = \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos:

$$\max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u$$

Teorema 3.8 (Princípio Forte do Máximo)**.**

Seja Ω aberto, limitado e conexo; seja $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ tal que:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + c(x)u \leqslant 0$$

1º)Suponhamos que $c(x) = 0$. Se $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então $u(x) = u(x_0), \forall x \in \Omega$

2°) Suponhamos $c(x) \geqslant 0$. Se $\exists\ x_0 \in \Omega$ tal que $0 \leqslant u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então $u(x) = u(x_0) \forall x \in \Omega$

Lema 1 (Lema de Hopf)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ tal que:*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u \leqslant 0$$

1°)Suponhamos que $c(x) = 0$, $\exists\ x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x) < u(x_0)$, para $x \in \Omega$. Se x_0 satisfizer a condição de Bola Interior, i.e.,$\exists\ B_r(x') \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B_r(x')$, então $\frac{\partial u(x_0)}{\partial n} > 0$

2°) Caso $c(x) \geqslant 0$ e $u(x_0) > 0$ e $u(x_0) > u(x)$, $\forall\ x \in \Omega$ com $x_0 \in \partial\Omega$ (com a condição de Bola Interior), então $\frac{\partial u(x_0)}{\partial n} > 0$

Demonstração do Lema: 1° caso) Suponhamos, s.p.g., que $x' = 0$. Seja $v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$ em $B_r(0)$, onde λ será construído posteriormente.

Note que:

$$Lv = L(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}) = L(e^{-\lambda|x|^2}) - L(e^{-\lambda r^2}) =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(e^{-\lambda|x|^2})_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(e^{-\lambda|x|^2})_{x_i} =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)[4x_i x_j \lambda^2 e^{-\lambda|x|^2} - 2\lambda x_i \delta_{ij} e^{-\lambda|x|^2}] - \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda 2 x_i e^{-\lambda|x|^2} =$$

$$= e^{-\lambda|x|^2}[-4\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) x_i x_j + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ii}(x) - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i b_i(x)]$$

Como L é uniformemente elíptica, temos que, para algum o, isso é menor ou igual a:

$$e^{-\lambda|x|^2}[-4\lambda^2 o|x|^2 + 2\lambda(\sum_{i=1}^{n} |x_i||a_{ii}| + x_i||b_i(x))$$

Considerando que $|a_{ij}|$ e $|b_i|$ são limitados, ou seja, $\exists M$ tal que $|a_{ij}|, |b_i| < M$ e x_i é limitado em $B_r(0)$, essa equação é menor ou igual a:

$$e^{-\lambda|x|^2}[-4\ o\ \lambda^2|x|^2 + 2M|\lambda|] = e^{-\lambda|x|^2}[-4\ o\ \lambda^2|x|^2 + c\lambda] \quad (\lambda > 0)$$

No anel $A = \{x \in \Omega \mid \frac{r}{2} < d(x,0) < r\}$, vale que isso é menor ou igual a

$$e^{-\lambda|x|^2}[-4\ o\lambda^2\ \frac{r^2}{4} + c\lambda] = e^{-\lambda|x|^2}[-o\ r^2\lambda^2 + c\lambda] < 0$$

para λ suficientemente grande.

Assim, para λ suficientemente grande, $Lv < 0$ em A.

Observação: Como $u(x_0) > u(x), \forall x \in \Omega$, então

$$u(x_0) > \max_{x \in B_{\frac{r}{2}}(0)} u(x) = u(x_1)$$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$u(x_0) = u(x) + \varepsilon v(x), \forall x \in B_{\frac{r}{2}}(0)$$

Em $\partial B_r(0)$,

$$v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2} = e^{-\lambda r^2} - e^{-\lambda r^2} = 0$$

Logo $u(x) + \varepsilon v(x) = u(x)$ em $\partial B_r(0)$.

Como $u(x) < u(x_0)$ para $x \in \Omega$, então $u(x) \leqslant u(x_0)$ para $x \in \overline{\Omega}$. Assim, $u(x_0) \geqslant u(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$ para $x \in \partial B_r(0)$.

Resumindo o que vimos até agora:

(i) $L(u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)) < 0$

(ii) $u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0) \leqslant 0$ em $\partial B_r(0)$

(iii) $u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0) < 0$ em $\partial B_{\frac{r}{2}}(0)$

Renomeando $w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$, temos, pelo Princípio Fraco do Máximo:

$$\max_A w \leqslant \max_{\partial A} w \leqslant 0$$

Mas então

$$w(x) \leqslant 0 \Rightarrow u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow u(x_0) \geqslant u(x) + \varepsilon v(x)\ em\ A$$

Tomando $x = \gamma x_0$, $\gamma < 1$, temos:

$$u(x_0) \geqslant u(\gamma x_0) + \varepsilon v(\gamma x_0)$$

Como $\gamma < 1$, podemos fazer:

$$\frac{u(x_0) - u(\gamma x_0)}{1-\gamma} \geqslant \frac{\varepsilon v(\gamma x_0)}{1-\gamma} = \frac{\varepsilon v(\gamma x_0) - v(x_0)}{1-\gamma}$$

Fazendo $\gamma \to 1$,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geqslant -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) = \nabla v(x_0) \cdot n = \frac{\partial(e^{-\lambda s^2} - e^{-\lambda r^2})}{\partial s} = -2\lambda s e^{-\lambda s^2} < 0 \qquad onde\ |s| = r$$

2º caso) Está demonstrado em [3], sendo a demonstração bem parecida com a do 1º caso.

Demonstração do Teorema:

Seja $M = \max_{\Omega} u$. Suponhamos que $\exists\, x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$. Seja $A = \{x \in \overline{\Omega} \mid u(x) = M\}$. Logo $x_0 \in A$. Suponhamos que $A \neq \Omega$, i.e., $B = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\} \neq \emptyset$. Afirmo: $\exists\, x_1 \in B$ tal que $d(x_1, A) < d(x_1, \partial\Omega)$

Seja $R = d(x_1, A)$. Logo $B_R(x_1) \subset B$ e $\partial B_R(x_1) \bigcap A \neq \emptyset$. Seja $y_0 \in \partial B_R(x_1) \bigcap A$.Temos que $u(y_0) = M$, pois $y_0 \in A$ e $u(x) < M, \forall\, x \in B_R(x_1)$. Considerando o domínio como sendo $B_R(x_1)$, pelo Lema de Hopf, $\frac{\partial u}{\partial n}(y_0) > 0$ (n é normal a $\partial B_R(x_1)$)

Isso contradiz que y_0 é ponto de máximo local de u no interior de Ω

$$\nabla u(y_0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(y_0) = 0)$$

Proposição 3.4. *Seja Ω um aberto limitado conexo e $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))_{x_j}$ um operador uniformemente elíptico, onde $a_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega})$ e $a_{ij} = a_{ji}$. Seja λ_1 o menor autovalor associado a L. Então o espaço de autovetores associados a λ_1 tem dimensão 1 e qualquer autofunção associada a λ_1 não muda de sinal.*

Demonstração: 1) Vamos mostrar que u não muda de sinal.

Seja u autofunção associada a λ_1.

Afirmação: Ou $u > 0$ ou $u < 0$.

Suponhamos que

$$A = \{x \in \Omega | u(x) > 0\} \neq \emptyset$$
$$B = \{x \in \Omega | u(x) < 0\} \neq \emptyset$$

Seja $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$. Então $u = u_+ - u_-$. Pela Teoria sobre Espaços de Sobolev, $u_+, u_- \in H_0^1(\Omega)$ e:

$$Du_+ = \begin{cases} Du \ q.s. \ em \ A \\ 0 \ q.s. \ em \ B \end{cases}$$
$$Du_- = \begin{cases} 0 \ q.s. \ em \ A \\ -Du \ q.s. \ em \ B \end{cases}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 tal que $|f'(x)| \leqslant M$ e $u \in H^1(\Omega)$.

Afirmação: $f \circ u \in H^1(\Omega)$ e $D(f \circ u) = f'(u) \cdot Du$ no sentido fraco. Poupamos o leitor da demonstração da Afirmação.

Observação: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(t) = \begin{cases} t \ se \ t \geqslant 0 \\ 0 \ se \ t < 0 \end{cases}$$

Assim $g(u) = u_+$.

Seja $g_\varepsilon(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g_\varepsilon(t) = \frac{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}+t}{2}$$

Temos que $g_\varepsilon \in C^1$ e

$$g'_\varepsilon(t) = \frac{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}+1}{2} = \frac{t+\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}{2\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} \leqslant \frac{2\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}{2\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} = 1$$

Isso implica que $g_\varepsilon(u) \in H^1(\Omega)$ e $Dg_\varepsilon(u) = g'_\varepsilon(u) \cdot Du$.

Assim,

$$\partial_{x_i}(g \circ u)(\varphi) = -(g \circ u)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\int_\Omega g'(u)\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega g_\varepsilon\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx \tag{28}$$

Como $g_\varepsilon(u) \in H^1$, então:

$$(28) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \frac{\partial(g_\varepsilon(u))}{\partial x_i} \cdot \varphi\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega g'_\varepsilon(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \varphi\ dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\ dx$$

Note que na última igualdade usamos que $g_\varepsilon \to 1$ quando $\varepsilon \to 0$.

Denotando $B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\ dx$ temos:

$$B(u,u) = B(u_+ - u_-, u_+ - u_-) = B(u_+,u_+) - 2B(u_+,u_-) + B(u_-,u_-)$$

Note que:

$$B(u_+,u_-) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_-}{\partial x_j}\ dx = \int_A \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_-}{\partial x_j}\ dx + \int_B \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_-}{\partial x_j}\ dx$$

Note que

$$\int_A \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_-}{\partial x_j}\ dx = \int_B \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_+}{\partial x_i} \frac{\partial u_-}{\partial x_j}\ dx = 0\ q.s.$$

e

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1} \frac{B(v,v)}{\|v\|_{L^2}^2} \Rightarrow \frac{B(v,v)}{\|v\|_{L^2}^2} \geqslant \lambda_1 \Rightarrow B(v,v) \geqslant \lambda_1 \|v\|_{L^2}^2 \quad , \quad \forall v \in H_0^1$$

Então

$$B(u,u) = B(u_+,u_+) + B(u_-,u_-) \geqslant \lambda_1(\|u_+\|_{L^2}^2 + \|u_-\|_{L^2}^2) = \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2 = B(u,u)$$

Logo:

$$B(u_+,u_+) + B(u_-,u_-) = \lambda_1 \|u_+\|_{L^2}^2 + \lambda_1 \|u_-\|_{L^2}^2$$

Como $B(u_+,u_+) \geqslant \lambda_1 \|u_+\|_{L^2}^2$ e $B(u_-,u_-) \geqslant \|u_-\|_{L^2}^2$, então:

$$B(u_+,u_+) = \lambda_1 \|u_+\|_{L^2}^2$$

$$B(u_-,u_-) = \|u_-\|_{L^2}^2$$

o que implica em:

$$\lambda_1 = \frac{B(u_+, u_+)}{\|u_+\|^2_{L^2}} = \frac{B(u_-, u_-)}{\|u_-\|^2_{L^2}}$$

Mas então u_+ e u_- são autovalores, isto é:

$$Lu_+ = \lambda_1 u_+ \quad e \quad Lu_- = \lambda_1 u_-$$

Pela Teoria da Regularidade, u, u_+ e $u_- \in C^1(\Omega)$, pois são autofunções.

Como $Lu_+ = \lambda_1 u_+ \geqslant 0$, logo, pelo Princípio Forte do Máximo (Mínimo), não existe mínimo interior ($= 0$) a não ser que $u_+ = 0$, o que não ocorre, pois $A \neq \emptyset$. Além disso, $B \neq \emptyset$, isto é, $\exists\, x_0 \in B$, e portanto $u_+(x_0) = 0$. Absurdo. Assim, ou A ou $B = \emptyset$.

De fato, se $u(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \Omega$, então, pelo Princípio do Máximo, não existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Portanto, ou $u > 0$, ou $u < 0$ em Ω.

2) Vamos mostrar que, dado $V = \{u \in H^1_0 \mid Lu = \lambda_1 u\}$, então dim V=1.

Suponhamos que $dimV \neq 1$. Então $\exists\, v, w \in V$ tal que v e w são LI.

Como v e w são LI, então $\frac{v}{w}$ não é constante. Logo, $\exists\, x_1$ e x_2 tais que:

$$\frac{v(x_1)}{w(x_1)} \neq \frac{v(x_2)}{w(x_2)}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade,

$$\frac{v(x_1)}{w(x_1)} > \frac{v(x_2)}{w(x_2)}$$

Seja c constante tal que:

$$\frac{v(x_1)}{w(x_1)} > c > \frac{v(x_2)}{w(x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x_1) > cw(x_1) \quad e \quad cw(x_2) > v(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x_1) - cw(x_1) > 0 \quad e \quad v(x_2) - cw(x_2) < 0$$

Defino $v - cw = u$.

Como u é autofunção de λ_1, pois é gerada por duas autofunções, e $u(x_1) > 0$ e $u(x_2) < 0$, surge o absurdo, já que, ou $u(x) > 0$ ou $u(x) < 0$, $\forall x \in \Omega$.

4 Cálculo de Variações

4.1 Um Exemplo:

Com toda a ferramenta desenvolvida até agora, podemos começar a procurar problemas e verificar quando eles têm solução. Começaremos com um exemplo simples. Considere o Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\triangle u = u|u|^{\gamma-1} \quad em\ \Omega,\ 0<\gamma<1 \\ u=0 \quad em\ \ \partial\,\Omega \end{cases} \tag{29}$$

Para resolver o problema, considere o funcional $J : H_0^1 \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\ -\ \int_\Omega \frac{|u|^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ dx$$

Afirmação 1: Se u_0 é o mínimo de J em H_0^1, então u_0 é solução de (29). Mais geralmente, isto é válido se u_0 é ponto crítico de J.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e $\varphi \in H_0^1$. Como u_0 é ponto de mínimo, então $J(u_0+\varepsilon\varphi)-J(u_0) \geqslant 0$, o que implica em:

$$\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_0+\varepsilon\varphi)|^2\ dx\ -\ \int_\Omega \frac{|u_0+\varepsilon\varphi|^{\gamma-1}}{\gamma-1}\ dx\right)\ -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\ dx\ -\ \int_\Omega \frac{|u_0|^{\gamma-1}}{\gamma-1}\ dx\right) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{1}{2}\ [2\varepsilon < \nabla u_0, \nabla\varphi > \ + \varepsilon^2|\nabla\varphi|^2]\ dx\ -\ \int_\Omega \frac{|u_0+\varepsilon\varphi|^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ +\ \frac{|u_0|^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ dx \geqslant 0$$

Fazendo $f(t) = \frac{|t|^{\gamma+1}}{\gamma+1}$, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário:

$$f(u_0+\varepsilon\varphi) = f(u_0) + f'(u_0+\varepsilon\varphi)\cdot\xi\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|u_0+\varepsilon\varphi|^{\gamma+1}}{\gamma+1} = \frac{|u_0|^{\gamma+1}}{\gamma+1} + (u_0+\xi\varphi)|u_0+\xi\varphi|^{\gamma-1}.\varepsilon\varphi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{1}{2}\ [2\varepsilon < \nabla u_0, \nabla\varphi > +\varepsilon^2|\nabla\varphi|^2]\ dx\ -\ \int_\Omega (u_0+\xi\varphi)|u_0+\xi\varphi|^{\gamma-1}\cdot\varepsilon\varphi\ dx \geqslant 0$$

Dividimos tudo por ε, que é maior do que 0, chegando a:

$$\int_\Omega < \nabla u_0, \nabla\varphi > +\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\varphi|^2\ dx\ -\ \int_\Omega (u_0+\xi\varphi)|u_0+\xi\varphi|^{\gamma-1}\cdot\varphi\ dx \geqslant 0$$

Lembrando o Teorema da Convergência Dominada:

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Seja (f_n) uma seqüência de funções de L^p. Suponhamos que:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.s. em Ω

(ii) Existe uma função $g(x) \in L^p$ tal que, para cada n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ q.s. em Ω.

Então $f \in L^p(\Omega)$ e $|f_n - f| \to 0$.

Continuando,

$$\frac{J(u_0 + \varepsilon\varphi) - J(u_0)}{\varepsilon} \to 0 \quad quando\ \varepsilon \to 0$$

1) Note que $\xi_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, pois $0 < \xi_\varepsilon < \varepsilon$. Logo:

$$(u_0 + \xi\varphi)|u_0 + \xi\varphi|^{\gamma-1} \to u_0|u_0|^{\gamma-1}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Em particular, tomando $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, temos que

$$(u_0 + \xi_n\varphi)|u_0 + \xi_n\varphi|^{\gamma-1} \to u_0|u_0|^{\gamma-1}$$

onde ξ_n está associado a $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.

$$2)\ |(u_0 + \xi_n\varphi)|u_0 + \xi_n\varphi|^{\gamma-1}| = |u_0 + \xi_n\varphi|^{\gamma} \leqslant (|u_0| + |\xi_n||\varphi|)^{\gamma}|\varphi| \leqslant$$

$$\leqslant (|u_0| + |\varphi|)^{\gamma}|\varphi|$$

que é integrável, pois $(|u_0| + |\varphi|)^{\gamma}$ e $|\varphi|$ são integráveis.

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos:

$$\int_\Omega (u_0 + \xi_n\varphi)|u_0 + \xi_n\varphi|^{\gamma-1}\varphi\ dx \to \int_\Omega u_0|u_0|^{\gamma-1}\ dx$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Logo:

$$\int_\Omega < \nabla u_0, \nabla\varphi > \ dx \ - \int_\Omega u_0|u_0|^{\gamma-1}\varphi\ dx \geqslant 0$$

Repetindo o processo com $\varepsilon > 0$, temos que:

$$\int_\Omega < \nabla u_0, \nabla\varphi > \ dx \ - \int_\Omega u_0|u_0|^{\gamma-1}\varphi\ dx \leqslant 0$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi\ dx \ - \int_\Omega u_0|u_0|^{\gamma-1}\varphi\ dx = 0$$

que é a formulação fraca de

$$\begin{cases} -\triangle u = u|u|^{\gamma-1} \quad em\ \Omega,\ 0 < \gamma < 1 \\ u = 0 \quad em\ \ \partial\,\Omega \end{cases} \tag{30}$$

Note que achamos um funcional $J(u)$ tal que a equação

$$J'(u) \cdot \varphi = 0$$

é a equação da formulação fraca de (29). Assim, provamos que o mínimo de J(u) é a solução de (29).

<u>Afirmação 2</u>: $J(u)$ possui um mínimo $u \neq 0$.

Demonstração da Afirmação:

1ª etapa) J é limitado inferiormente:

Lembremos que

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \; - \; \int_\Omega \frac{|u|^{\gamma+1}}{\gamma+1} \, dx$$

Vamos analisar cada uma das parcelas da soma separadamente.

Pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\int_\Omega |u|^{\gamma+1} \, dx \leqslant \left(\int_\Omega (|u|^{\gamma+1})^{\frac{2}{\gamma+1}} \, dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\int_\Omega 1^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{\frac{2}{\gamma+1}} = 1.$

Mas isso implica em:

$$\int_\Omega |u|^{\gamma+1} \, dx \leqslant \left(\int_\Omega (|u|^2 \, dx\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot |\Omega|^{\frac{1}{q}} \; = \; c\|u\|_{L^2}^{\gamma+1}$$

Note que $c = |\Omega|^{\frac{1}{q}}$ constante.

Usando a Desigualdade de Poincaré, temos:

$$c\|u\|_{L^2}^{\gamma+1} \leqslant c(k\|u\|_{H_0^1})^{\gamma+1} \; = \; D\|u\|_{H_0^1}^{\gamma+1}$$

onde D e k são constantes.

Logo

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \; - \; \int_\Omega \frac{|u|^{\gamma-1}}{\gamma-1} \, dx \geqslant \frac{1}{2} \, \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{\gamma+1} \, D\|u\|_{H_0^1}^{\gamma+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(u) \geqslant \frac{1}{2} \, \|u\|_{H_0^1}^2 - \; E\|u\|_{H_0^1}^{\gamma+1} \tag{31}$$

Fazendo $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - Et^{\gamma+1}$ para $t \geqslant 0$, vemos que g é limitada inferiormente, o que implica que $\exists \; c$ tal que

$$g(t) \geqslant c, \; \forall \; t \geqslant 0 \Rightarrow J(u) \geqslant c$$

Assim, J também possui um ínfimo.

2ª etapa) Seja $I = \inf_{u \in H_0^1} J(u)$. $I < 0$.

Seja $u \neq 0, \; u \in H_0^1$. Note que:

$$J(tu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tu)|^2 \, dx \; - \; \int_\Omega \frac{|tu|^{\gamma+1}}{\gamma+1} \, dx =$$

$$= \; t^2 \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} \, dx \; - \; |t|^{\gamma+1} \int_\Omega \frac{|u|^{\gamma+1}}{\gamma+1} \, dx \; = \; t^2 A - |t|^{\gamma+1} B$$

Para t pequeno, temos

$$t^2 A \; - \; |t|^{\gamma+1} B < 0$$

pois $\gamma < 1$. Logo $J(tu) < 0$ quando t é suficientemente pequeno. Portanto $I \leqslant J(t_0 u) < 0$.

3ª etapa) $\exists\ u_0$ tal que $J(u_0) = I$.

Seja $u_n \in H_0^1$ tal que $J(u_n) \to I$. Assim, usando (31), temos:

$$\frac{1}{2}\ \|u_n\|^2_{H_0^1} -\ E\|u_n\|^{\gamma+1}_{H_0^1} \leqslant J(u_n) \to I$$

Logo $\frac{1}{2}\ \|u_n\|^2_{H_0^1} -\ E\|u_n\|^{\gamma+1}_{H_0^1}$ fica limitada superiormente. Portanto,$\|u_n\|_{H_0^1}$ fica limitado, pois se $\|u_{n_k}\|_{H_0^1} \to +\infty$, então $\frac{1}{2}\ \|u_{n_k}\|^2_{H_0^1} -\ E\|u_{n_k}\|^{\gamma+1}_{H_0^1} \to +\infty$.

Pela Análise Funcional e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $\exists\ (u_{n_k})$ subsequência tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ em H_0^1 e $u_{n_k} \to v$ em L^2. Já vimos que $v = u_0$ quase sempre.

Vamos renomear $u_{n_k} = u_k$.

4ª etapa) $\liminf J(u_k) \geqslant J(u_0)$

Como $u_k \to u_0$ em L^2, então:

$$\left| \int_\Omega \frac{|u_0|^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ dx\ -\ \int_\Omega \frac{|u_k|^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ dx \right| \leqslant \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega ||u_0|^{\gamma+1} - |u_k|^{\gamma+1}|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |u_0 - u_k|^{\gamma+1}\ dx \leqslant \frac{1}{\gamma+1} \left(\int_\Omega |u_0 - u_k|^2\ dx \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \cdot \left(\int_\Omega 1^q\ dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Note que $\int_\Omega |u_0 - u_k|^2\ dx \to 0$ pois $u_k \to u_0$.

Como $u_k \rightharpoonup u_0$ em H_0^1, temos:

$$\liminf \|u_k\|_{H_0^1} \geqslant \|u_0\|_{H_0^1} \Rightarrow \liminf \frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H_0^1} \geqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H_0^1} \Rightarrow \liminf \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx \geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0| dx$$

Como

$$\lim\ \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |u_k|^{\gamma+1} dx\ =\ \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |u_0|^{\gamma+1} dx$$

então

$$\liminf \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx\ -\ \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |u_k|^{\gamma+1} dx\ =\ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_0| dx\ -\ \frac{1}{\gamma+1} \int_\Omega |u_0|^{\gamma+1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf J(u_k) \geqslant J(u_0) \Rightarrow I \geqslant J(u_0)$$

E como $J(u_0) \geqslant I$, então $J(u_0) = I$.

Conclusão: O problema (29) possui uma solução fraca não trivial.

Definição 4.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Considere $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e o funcional $J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\ dx$. L é chamado de lagrangiano.*

Mediante certas hipóteses sobre L, podemos mostrar que os pontos críticos de J em $W_0^{1,p}(\Omega)$ são soluções fracas de:

$$\begin{cases} -\sum_1^n D_{p_i} L(\nabla u, u, x) + D_t L(\nabla u, u, x) = 0\ em\ \Omega \\ u = 0\ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{32}$$

Em particular, se u_0 for um ponto de mínimo de J, então u_0 é solução fraca de (32). Surgem, assim, alguma questôes:

1º questão) Achar uma condição sobre L que garanta a existência de mínimo.

Antes de propormos a 2ª questão, vamos a uma definição:

Definição 4.2. *Suponhamos que L satisfaça a seguinte condição:*

$\exists\ \alpha, \beta > 0$ *tal que* $L(p,t,x) \geqslant \alpha|p|^q - \beta$, *onde* $1 < q < \infty$.

Logo:

$$J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\ dx \geqslant \int_\Omega \alpha|\nabla u|^q - \beta\ dx = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^q\ dx - \beta \int_\Omega dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J(u) \geqslant \alpha\|\nabla u\|^q_{L^q} - \beta|\Omega| \tag{33}$$

Claramente, J é limitado inferiormente por $-\beta|\Omega|$.

A desigualdade (33) é chamada condição de coercividade.

Note que condição de coercividade não é o mesmo que dizer que uma função é coerciva.

2ª questão) Se u é mínimo de J, mas não é nescessariamente suave, u satisfaz a equação (33), $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$?

Definição 4.3. *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente em $a \in I$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon$.*

Proposição 4.1. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente em $a \in I$ e $x_n \to a$ ($x_n \in I$), então $\liminf f(x_n) \geqslant f(a)$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \partial > 0$ tal que $|x - a| < \partial \Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon$. Como $x_n \to a$, $\exists n_0$ tal que $|x_n - a| < \partial$ se $n \geqslant n_0$. Logo $f(x) > f(a) - \varepsilon$, $\forall n \geqslant n_0$. E isso implica que $\liminf f(x_n) \geqslant f(a) - \varepsilon$. Como ε é arbitrário, $\liminf f(x_n) \geqslant f(a)$.

Definição 4.4. *Dizemos que $J : W^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é fracamente semi-contínua inferiormente em $u_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ se para uma sequência (u_l) em $W^{1,q}(\Omega)$ valer:*

$$u_l \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf J(u_l) \geqslant J(u_0)$$

Teorema 4.2. *Seja $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação suave, limitada inferiormente e tal que $p \to L(p,t,x)$ é convexa para t e x fixos. Então J é fracamente semi-contínuo inferiormente.*

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e suponhamos que $u_l \rightharpoonup u$.

Logo, pelo Teorema da Limitação Uniforme, $\sup \|u_l\|_{W_0^{1,q}} < \infty$. Então, por Rellich-Kondrachov, existe subsequência (u_{l_k}) tal que $u_{l_k} \to v$ em L^q. Como foi visto, $v = u$.

Seja $I = \liminf J(u_k)$. Suponhamos que $J(u_k) \to I$. $J(u) \leqslant I$?

Renomeando $u_{l_k} = u_k$, temos $u_k \to u$ em L^q. Então, pela Teoria da Medida, $\exists\ (u_{k_j})$ subsequência tal que $u_{k_j} \to u$ quase sempre em Ω.

Renomeando $u_{k_j} = u_j$, temos:

$$\begin{gathered} u_j \to u\ q.s. \\ u_j \to u \text{ em } L^q \\ u_j \rightharpoonup \text{ em } W^{1,q} \\ J(u_j) \to I \end{gathered}$$

Definição 4.5. *Dizemos que f_n converge quase uniformemente a f se, dado $\varepsilon > 0$, existe conjunto A e $\exists n_0$ tal que $m(A) < \varepsilon$ e $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $x \notin A$ e $n \geqslant n_0$.*

Podemos supor, sem perda de generalidade, que, para $\varepsilon < \varepsilon_0$, temos $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_0}$.

Pelo Teorema de Egoroff, como $u_j \to u$ q.s., então u_j converge a u quase uniformemente, isto é, dado $\varepsilon_0 > 0, \exists\ A_{\varepsilon_0}$ tal que $m(A_{\varepsilon_0}) < \varepsilon_0$ e $|u_j(x) - u(x)| < \varepsilon_0$ para $x \notin A_{\varepsilon_0}$. Podemos supor que $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_0}$ para $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Seja $E_\varepsilon = \Omega \backslash A_\varepsilon$. Defina $F_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |u(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ *e* $|D(u(x))| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\}$.

Note que: $|\Omega \backslash E_\varepsilon| \to 0$ *e* $|\Omega \backslash F_\varepsilon| \to 0$.

Seja $G_\varepsilon = E_\varepsilon \bigcap F_\varepsilon$ Note que $|\Omega \backslash G_\varepsilon| \to 0$.

Como L é limitado inferiormente, $L \geqslant c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, ou seja, $L - c \geqslant 0$. Renomeamos $L - c = L^*$.

Como L é convexo, L^* é convexo. Vamos trabalhar com L^*, renomeando por L. Portanto, $L \geqslant 0$.

Logo:

$$J(u_j) = \int_\Omega L(\nabla u_j, u_j, x)\ dx \geqslant \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_j, u_j, x)\ dx$$

Lembremos que se $f : A \to \mathbb{R}$ é convexa e diferenciável em $x_0 \in A$, então, tomando $f(x_0) + f'(x_0) \cdot h = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, temos:

$$f \textit{ convexa} \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \textit{ tal que, ou } (x, x_0) \subset A, \textit{ ou } (x_0, x) \subset A$$

Pois então, como L é convexa em p, então:

$$L(\nabla u_j, u_j, x) \geqslant L(\nabla u_0, u_j u, x) + D_p L(\nabla u_0, u_j, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)$$

O que implica em

$$J(u_j) \geqslant \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_j, u_j, x)\ dx \geqslant \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx + \int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_j, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx$$

Como $u_j \to u_0$ uniformemente em G_ε e $D_p L$ é contínua, então $D_p L(\nabla u_0, u_j, x) \to D_p L(\nabla u_0, u_0, x)$ uniformemente em G_ε.

Logo

$$\int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_j, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx =$$

$$= \int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_j, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx - \int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx +$$

$$+ \int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx =$$

$$= \int_{G_\varepsilon} (D_p L(\nabla u_0, u_j, x) - D_p L(\nabla u_0, u_0, x))(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx + \int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx$$

Note que $D_p L(\nabla u_0, u_j, x) - D_p L(\nabla u_0, u_0, x) \to 0$ uniformemente, $(\nabla u_j - \nabla u_0)$ é limitada. Além disso, $\int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx$ é um funcional linear limitado em $W^{1,q}(\Omega)$, logo vai para 0, pois $u_j \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,q}(\Omega)$. Então:

$$\int_{G_\varepsilon} D_p L(\nabla u_0, u_j, x)(\nabla u_j - \nabla u_0)\ dx \to 0$$

Temos, então:

$$\int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx \to \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx$$

pois $u_j \to u_0$ uniformemente, L é contínua e ∇u_0 é limitada.

Portanto, fazendo $j \to \infty$, temos que

$$\liminf J(u_j) \geqslant \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx$$

e como $I = \liminf J(u_j)$, então:

$$I \geqslant \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx$$

Quando $\varepsilon \to 0$, $\int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_0, u_j, x)\ dx \to \int_\Omega L(\nabla u_0, u_0, x)\ dx$, visto que $L \geqslant 0$. Mas então

$$I \geqslant \int_\Omega L(\nabla u_0, u_0, x)\ dx = J(u_0)$$

Teorema 4.3. *Suponha que L satifaz a desigualdade de coercividade e é convexa na variável p. então*

$$J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\ dx$$

possui um mínimo em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Seja $I = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u)$

1º caso) $I = +\infty$

Neste caso, $J(u) = I,\ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ou seja qualquer $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é mínimo de J.

2º caso) $I < +\infty$

Já vimos que a desigualdade de coercividade para L implica na condição de coercividade $J(u) \geqslant \alpha\|\nabla u\|_{L^q}^q - \beta|\Omega|$. Logo $J(u) \geqslant -\beta|\Omega|$, $\forall u \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Portanto $I > -\infty$ $(I \in \mathbb{R})$.

Seja (u_n) sequência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $J(u_n) \to I$. Como $J(u_n)$ é convergente, é também limitada. Ou seja, $\exists D > 0$ tal que $J(u_n) \leqslant D,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pela condição de coercividade ,

$$D \geqslant J(u_n) \geqslant \alpha\|\nabla u\|_{L^q}^q - \beta|\Omega| \Rightarrow \|\nabla u\|_{L^q}^q \geqslant \frac{D + \beta|\Omega|}{\alpha}$$

ou seja, ∇u_n é limitada em L^q.

Pela Desigualdade de Poincaré, $\|u\|_{L^q}$ é limitada. Logo u_n é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $\exists (u_{n_k})$ subsequência convergente em L^q: $u_{n_k} \to v \in L^q$.

<u>Afirmação</u>: $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo:

<u>Demonstração da Afirmação</u>: L^q é reflexivo $\Rightarrow L^q \times \ldots \times L^q$ é reflexivo.

Seja $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \times \ldots \times L^q(\Omega)$ dada por:

$$\Phi(w) = (w, \frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n})$$

Considere a norma em $L^q(\Omega) \times \ldots \times L^q(\Omega)$ dada por:

$$\|w_1, \ldots, w_{n+1}\| = (\|w_1\|_{L^q}^q + \ldots + \|w_{n+1}\|_{L^q}^q)^{\frac{1}{n}}$$

Logo

$$\|\Phi(w)\| = (\|w_1\|_{L^q}^q + \|\frac{\partial w}{\partial x_1}\|_{L^q}^q + \ldots + \|\frac{\partial w}{\partial x_n}\|_{L^q}^q)^{\frac{1}{q}} = \|w\|_{W^{1,p}}$$

Então Φ é imersão isométrica.

Assim $\Phi(W^{1,p})$ é fechado em $L^q \times \ldots \times L^q$, pois $W^{1,p}$ é completo.

Logo $\Phi(W^{1,p})$ é um subespaço fechado de um reflexivo e , portanto, reflexivo.

E como Φ é uma transformação linear isométrica, então $W^{1,p}$ é reflexivo.

Note que $W_0^{1,p}$ é reflexivo pois é fechado em $W^{1,p}$.

Continuando, então, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, temos que (u_{n_k}) possui uma subsequência fracamente convergente, isto é, $\exists (u_{n_{k_l}})$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{n_{k_l}} \rightharpoonup u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como já vimos, $u = v$ quase sempre. Assim, renomeando $u_l = u_{n_{k_l}}$, temos $u_l \to u$ em L^q e $u_l \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como L é limitado inferiormente, suave, convexo em p, pelo Teorema 4.2, J é fracamente semicontínua inferiormente.

Logo $\liminf J(u_l) \geqslant J(u)$ já que $u_l \rightharpoonup u$.

Então $I \geqslant J(u)$, o que implica que u é ponto de mínimo de J.

Teorema 4.4. *Seja $L(p,t,x)$ um lagrangiano que satisfaz as seguintes condições de crescimento:*

(i) $|L(p,t,x)| \leqslant c(|p|^q + |t|^q + 1)$

(ii) $|D_pL(p,t,x)| \leqslant c(|p|^{q-1} + |t|^{q-1} + 1)$

(iii) $|D_tL(p,t,x)| \leqslant c(|p|^{q-1} + |t|^{q-1} + 1)$

onde $c > 0$ é uma constante que não depende de p,t,x.

Se $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um mínimo do funcional

$$J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\ dx$$

Então u_0 satisfaz:

$$\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi\ dx = 0 \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad (34)$$

Demonstração: Note que já havíamos mostrado (34) no caso em que u_0 é um minimizador suave e $\varphi \in C_0^\infty$.

Veremos agora que com as condições de crescimento sobre L é possível estender o resultado para $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Seja $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo $\exists \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Provamos que se u_0 é suave, para $\varphi_n \in C_0^\infty$, vale:

$$\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi_n \ dx + \int_\Omega D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi_n \ dx = 0$$

.

Afirmação 1: $\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi_n \ dx \to \int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi \ dx$

Demonstração da Afirmação 1:

$$\left| \int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi_n \ dx - \int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi \ dx \right| \leqslant$$

$$\int_\Omega |D_pL(\nabla u_0, u_0, x)| \cdot |\nabla\varphi - \nabla\varphi_n| \ dx \tag{35}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos que :

$$(35) \leqslant \left(\int_\Omega |D_pL(\nabla u_0, u_0, x)|^{\frac{q}{q-1}} \ dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi - \nabla\varphi_n|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega c(|\nabla u_0|^{q-1} + |u_0|^{q-1} + 1)^{\frac{q}{q-1}} \ dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |\nabla\varphi - \nabla\varphi_n|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{36}$$

Observando que $\left(\int_\Omega |\nabla\varphi - \nabla\varphi_n|^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}} \to 0$ temos:

$$(36) \leqslant \int_\Omega c[(|\nabla u_0|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} + (|u_0|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} + 1^{\frac{q}{q-1}}]^{\frac{q-1}{q}} \ dx \left(\int_\Omega |\nabla\varphi - \nabla\varphi_n|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} \to 0$$

pois $\int_\Omega c[(|\nabla u_0|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} + (|u_0|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} + 1^{\frac{q}{q-1}}]^{\frac{q-1}{q}} \ dx < +\infty$

Para D_t a demonstração é idêntica, então:

$$\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi \ dx + \int_\Omega D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi \ dx = 0$$

Agora iremos mostrar para $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ não necessariamente suave.

Dada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, defina $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$I(\varepsilon) = \frac{J(u_0 + \varepsilon\varphi) - J(u_0)}{\varepsilon} = \frac{\int_\Omega L(\nabla(u_0 + \varepsilon\varphi), u_0 + \varepsilon\varphi, x) - L(\nabla u_0, u_0, x) \ dx}{\varepsilon}$$

Renomeando:

$$L_\varepsilon = \frac{L(\nabla(u_0 + \varepsilon\varphi), u_0 + \varepsilon\varphi, x) - L(\nabla u_0, u_0, x)}{\varepsilon}$$

Como $u_0, \nabla u_0, \varphi, \nabla\varphi \in L^q(\Omega)$, então estão definidas quase sempre, isto é, $\exists A \subset \Omega$ tal que $m(\Omega \backslash A) = 0$ e $u_0(x),\ \varphi(x) \in \mathbb{R}$ e $\nabla u_0,\ \nabla\varphi \in \mathbb{R}^n$ para $x \in A$.

Seja $x_0 \in A$. Como L é suave e $u_0(x_0), \nabla u_0(x_0), \varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0)$ estão fixos, então L_ε é suave em $\varepsilon \neq 0$, e, quando $\varepsilon \to 0$,

$$L_\varepsilon(x_0) \to D_pL(\nabla u_0, u_0, x_0) \cdot \nabla\varphi(x_0) + D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi(x_0)$$

Assim, $L_\varepsilon \to D_pL + D_tL$ quase sempre, quando $\varepsilon \to 0$.

Note que, para $x_0 \in A$, vale:

$$|L(\nabla u_0(x_0)+\varepsilon\nabla\varphi(x_0),u_0(x_0)+\varepsilon\varphi(x_0),x_0)-L(\nabla u_0(x_0),u_0(x_0),x_0)|=$$

$$\left|\int_0^\varepsilon \frac{d}{ds}\, L(\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0),u_0(x_0)+s\varphi(x_0),x_0)\ ds\right| \leqslant$$

$$\int_0^\varepsilon |D_pL(\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0),u_0(x_0)+s\varphi(x_0),x_0)|\cdot|\nabla\varphi(x_0)|+|D_tL(\nabla u_0,u_0,x)||\cdot\varphi(x_0)|\ ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\varepsilon c(|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^{q-1}+|u_0(x_0)+s\varphi(x_0)|^{q-1}+1)\cdot|\nabla\varphi(x_0)|+$$
$$+\,c(|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^{q-1}+|u_0(x_0)+s\varphi(x_0)|^{q-1}+1)\cdot|\varphi(x_0)|\ ds \qquad (37)$$

Pela Desigualdade de Young:

$$(37)\leqslant c\int_0^\varepsilon \left(\frac{|\nabla\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^q\right)+$$
$$+\left(\frac{|\nabla\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}|u_0(x_0)+s\varphi(x_0)|^q\right)+\left(\frac{|\nabla\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}\cdot 1\right)+$$
$$+\left(\frac{|\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^q\right)+\left(\frac{|\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}|u_0(x_0)+s\varphi(x_0)|^q\right)+$$
$$+\left(\frac{|\varphi(x_0)|^q}{q}+\frac{q-1}{q}\cdot 1\right)\ ds=$$
$$=c\int_0^\varepsilon\left(\frac{3}{q}|\nabla\varphi(x_0)|^q+\frac{3}{q}|\varphi(x_0)|^q+\frac{2(q-1)}{q}+\right.$$
$$\left.+\frac{2(q-1)}{q}|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^q+\frac{2(q-1)}{q}|u_0(x_0)+s\varphi(x_0)|^q\right)\ ds \qquad (38)$$

Note que, sendo $s\leqslant\varepsilon\leqslant 1$,

$$|\nabla u_0(x_0)+s\nabla\varphi(x_0)|^q\leqslant(|\nabla u_0(x_0)|+|s||\nabla\varphi(x_0)|)^q\leqslant c|\nabla u_0(x_0)|^q+|s|^q|\nabla\varphi(x_0)|)^q\leqslant$$
$$\leqslant c|\nabla u_0(x_0)|^q+|\varepsilon|^q|\nabla\varphi(x_0)|^q\leqslant c(|\nabla u_0(x_0)|^q+|\nabla\varphi(x_0)|)^q$$

Então

$$(38)\leqslant c\int_0^\varepsilon A|\nabla\varphi(x_0)|^q+B|\varphi(x_0)|^q+C|\nabla u_0(x_0)|^q+D|u_0(x_0)|^q+E\ ds\leqslant$$
$$\leqslant K\int_0^\varepsilon |\nabla\varphi(x_0)|^q+|\varphi(x_0)|^q+|\nabla u_0(x_0)|^q+|u_0(x_0)|^q+1\ ds=$$
$$=\varepsilon K(|\nabla\varphi(x_0)|^q+|\varphi(x_0)|^q+|\nabla u_0(x_0)|^q+|u_0(x_0)|^q+1)$$

Logo

$$L_\varepsilon(x_0)\leqslant\frac{\varepsilon K(|\nabla\varphi(x_0)|^q+|\varphi(x_0)|^q+|\nabla u_0(x_0)|^q+|u_0(x_0)|^q+1)}{\varepsilon}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_\varepsilon(x_0)\leqslant K(|\nabla\varphi(x_0)|^q+|\varphi(x_0)|^q+|\nabla u_0(x_0)|^q+|u_0(x_0)|^q+1)$$

Chamando $g(x)=K(|\nabla\varphi(x)|^q+|\varphi(x)|^q+|\nabla u_0(x)|^q+|u_0(x)|^q+1)$, temos que $g(x)\in L^1$ e $L_\varepsilon(x)\leqslant g(x)$ para $x\in A$.

Assim, como $L_\varepsilon(x) \to D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi(x) \ + \ D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi(x)$ quase sempre, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_\Omega L_\varepsilon(x)\ dx \to \int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi\ dx$$

Como $I(\varepsilon) \geqslant 0$ para $\varepsilon \geqslant 0$, temos que o limite é $\geqslant 0$. E como $I(\varepsilon) \leqslant$ para $\varepsilon \leqslant 0$, temos que o limite é $\leqslant 0$. Então o limite é igual a zero.

Unicidade: Seja u_0 solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_1^n D_{p_i}L(\nabla u, u, x) + D_tL(\nabla u, u, x) = 0 \ em\ \Omega \\ u = 0 \ em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{39}$$

Logo u_0 satifaz :

$$\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega D_tL(\nabla u_0, u_0, x) \cdot \varphi\ dx = 0 \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Como L é convexa, vale:

$$L(q, s, x) \geqslant L(p, t, x) + D_pL(p, t, x)(q - p) + D_tL(p, t, x)(s - t)$$

Seja $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade acima para $t = u_0,\ s = w,\ p = \nabla u_0$, e $q = \nabla w$, temos:

$$L(\nabla w, w, x) \geqslant L(\nabla u_0, u_0, x) + D_pL(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla w - \nabla u_0) + D_tL(\nabla u_0, u_0, x)(w - u_0)$$

Integrando, temos:

$$\int_\Omega L(\nabla w, w, x)\ dx \geqslant \int_\Omega L(\nabla u_0, u_0, x)\ dx + \int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla(w - u_0)) +$$
$$+ D_tL(\nabla u_0, u_0, x)(w - u_0)\ dx$$

Como
$$\int_\Omega D_pL(\nabla u_0, u_0, x)(\nabla(w - u_0)) + D_tL(\nabla u_0, u_0, x)(w - u_0)\ dx = 0$$
, pois u_0 é solução fraca, então:

$$\int_\Omega L(\nabla w, w, x)\ dx \geqslant \int_\Omega L(\nabla u_0, u_0, x)\ dx \Rightarrow J(w) \geqslant J(u_0)$$

Teorema 4.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ conexo, e L um lagrangiano tal que:*

(i) L=L(p,x)

(ii) $\displaystyle\sum_{i,j=0}^n D_{p_ip_j}L(p, x)\ \xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2$, *para algum $\theta > 0$ que independe de x e ξ.*

Então só existe um mínimo para o funcional $J(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\ dx$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Sejam u_1 e u_2 mínimos de J em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Seja $v = \frac{u_1+u_2}{2}$.

<u>Afirmação:</u> Se $u_1 \neq u_2$, então $J(v) < J(u_1) = J(u_2)$.

<u>Demonstração da Afirmação:</u> Pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$L(p+h,x) = L(p,x) + L'(p,x) \cdot h + \frac{L''(p+\xi h,x)\cdot h^2}{2}$$

para $p, h \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \xi < 1$ e x fixo.

Pela condição (ii),

$$\frac{L''(p+\xi h,x)\cdot h^2}{2} = L''(p+\xi h,x)\cdot(h,h)2 = \frac{< h, HL(p+\xi h,x)\cdot h >}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} D_{p_ip_j}L(p+\xi h,x)\cdot h_ih_j \geqslant \frac{\theta|h|^2}{2}$$

Logo:

$$L(p+h,x) \geqslant L(p,x) + L'(p,x)\cdot h + \frac{\theta|h|^2}{2}$$

O que implica que a função L é estritamente convexa.

Aplicando essa desigualdade para $p = \nabla v$ e $h = \nabla u_1 - \nabla v$, temos:

$$L(\nabla u_1,x) \geqslant L(\nabla v,x) + D_pL(\nabla v,x)\cdot(\nabla u_1 - \nabla v) + \frac{1}{2}\,\theta|\nabla u_1 - \nabla v|^2$$

Analogamente:

$$L(\nabla u_2,x) \geqslant L(\nabla v,x) + D_pL(\nabla v,x)\cdot(\nabla u_2 - \nabla v) + \frac{1}{2}\,\theta|\nabla u_2 - \nabla v|^2$$

Note que, como: $(\nabla u_1 - \nabla v)$ e $(\nabla u_2 - \nabla v)$ são simétricos, se somados fica igual a zero. Portanto:

$$L(\nabla u_1,x) + L(\nabla u_2,x) \geqslant 2L(\nabla v,x) + \theta\left|\frac{\nabla u_1 - \nabla u_2}{2}\right|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \frac{L(\nabla u_1,x)+L(\nabla u_2,x)}{2}\,dx \geqslant \int_\Omega L(\nabla v,x) + \frac{\theta}{2}\left|\frac{\nabla u_1 - \nabla u_2}{2}\right|^2\,dx \Rightarrow$$
$$\frac{J(u_1)+J(u_2)}{2} \geqslant J(v) + \frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\,dx$$

Como $J(u_1) = J(u_2) =$ mínimo = m, então:

$$J(v) \leqslant m - \frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\,dx$$

Então $J(v) < J(u_1) = J(u_2)$, concluindo a Afirmação. Mas como m é mínimo, $J(v)$ não pode ser menor que m, logo:

$$\frac{\theta}{8}\int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\,dx = 0$$

Como Ω é conexo, $u_1 - u_2 = k$ constante. Como u_1 e u_2 valem 0 na fronteira, temos que $u_1 - u_2 = 0$ o que implica em $u_1 = u_2$.

4.2 Minimização de Superfície:

Agora chegamos ao desfecho do nosso trabalho, quando apresentamos um problema que se encaixa em tudo que foi desenvolvido até aqui.

Seja C um a curva fechada tal que $C \in \mathbb{R}^2$. Seja $f : C \to \mathbb{R}^3$.Seja Ω a área no interior da curva.

Problema: Achar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $u = f$ em C.

(b) $graf(u)$ tem área mínima.

A questão é: Essa superfície é única?

Lembremos que a área de $graf(u)$ é dada por:

$$S(u) = \int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}\ dx \tag{40}$$

Desejamos minimizar (40), onde $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u = f$ em $\partial\Omega$.

Afirmação: Se u_1 e u_2 são soluções do Problema (40) tal que ∇u_1 e ∇u_2 são limitadas, então $u_1 = u_2$.

Demonstração da Afirmação : $L(p) = (1 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$ é o lagrangiano associado ao funcional área S.

$L = L(p)$, ou seja, a condição (i) do Teorema 4.5 está satisfeita.

$\sum_{i,j=1}^{n} D_{p_i p_j} L(p) \cdot \xi_i \xi_j \geqslant \theta |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, onde θ não depende de p e ξ ?

Infelizmente, isto não é verdadeiro para todo p.

$$D_{p_j} L(p) = D_{p_j}(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}}\ 2p_j = \frac{p_j}{(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$D_{p_i p_j} L(p) = D_{p_i}\left(\frac{p_j}{(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{\delta_{ij}(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} - p_j\ \frac{p_i}{(1+|p|^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 + |p|^2} = \frac{\delta_{ij}(1 + |p|^2) - p_i p_j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} D_{p_i p_j} L(p) \cdot \xi_i \xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta_{ij}(1 + |p|^2) - p_i p_j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta_{ij}(1 + |p|^2)}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j\ -\ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_i p_j}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j \end{aligned} \tag{41}$$

Note que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta_{ij}(1 + |p|^2)}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 + |p|^2)}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \xi_i^2\ =\ \frac{(1 + |p|^2)}{(1 + |p|^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\ =\ \frac{1}{(1 + |p|^2)^{\frac{1}{2}} |\xi|^2}$$

Note, também, que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_i p_j}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j = \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i,j=1}^{n} p_i \xi_i p_j \xi_j = \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \sum_{j=1}^{n} p_j \xi_j =$$

$$\frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \xi_i \right)^2 \leqslant \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_i p_j}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}}\ \xi_i \xi_j \leqslant |\xi|^2 \cdot |p|^2 \cdot \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Assim,

$$(41) \geqslant \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{|\xi|^2 |p|^2}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\xi|^2}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot |\xi|^2$$

No entanto, como estamos supondo que ∇u_1 e ∇u_2 são limitados, então para $p = \nabla u_1$ e $p = \nabla u_2$, temos que:

$$\frac{1}{(1+|p|^2)^{\frac{3}{2}}} \geqslant \theta > 0$$

Logo a condição (ii) do Teorema 4.5 é satifeita para $p = \nabla u_1$ e ∇u_2. Então, com as condições satifeitas, temos que $u_1 = u_2$.

Referências

[1] Brézis, Haïm, *Análisis Funcional: Teoría e Aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984

[2] Carmo, Manfredo Perdigão, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[3] Evans, Lawrence C., *Partial Differencial Equations*, American Mathematical Society, 1998

[4] Lima, Elon Lages, *Álgebra Linear*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.