

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise Numérica de Vigas Mistas Aço-Concreto pelo  
Método dos Elementos Finitos: Protensão Externa**

**Alvaro Marcelo Moscoso Wayar**

Porto Alegre  
2016

ALVARO MARCELO MOSCOSO WAYAR

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO-  
CONCRETO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS:  
PROTENSÃO EXTERNA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Porto Alegre

2016

#### CIP - Catalogação na Publicação

Moscoso Wayar, Alvaro Marcelo  
Análise Numérica de Vigas Mistas Aço-Concreto pelo  
Método dos Elementos Finitos: Protensão Externa /  
Alvaro Marcelo Moscoso Wayar. -- 2016.  
124 f.

Orientador: Inácio Benvegno Morsch.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-  
RS, 2016.

1. Vigas-Mistas. 2. Protensão. 3. Cabo. 4.  
Elementos Finitos. I. Benvegno Morsch, Inácio ,  
orient. II. Título.

**ALVARO MARCELO MOSCOSO WAYAR**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS AÇO CONCRETO  
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: PROTENSÃO  
EXTERNA**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 18 de março de 2016

Prof. Inácio Benvegnu Morsch  
Dr. PPGEC/UFRGS  
Orientador

Prof. Carlos Torres Formoso  
Ph.D. Uuniversity of Salford  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho**  
DR. EP/USP

**Prof. Herbert Martins Gomes**  
DR. PPGEC/UFRGS

**Prof. Felipe Schaedler de Almeida**  
DR. PPGEC/UFRGS

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo**  
DR. PPGEC/UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais pela motivação e apoio em todo momento antes e durante esses dois anos no Brasil.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela oportunidade de poder realizar e acabar os meus estudos de mestrado com todos os momentos ruins e bons, graças por todos eles.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos.

Agradeço a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS pelos conhecimentos compartilhados nas aulas do primeiro ano do curso. Em especial agradeço ao Professor Inácio Morsch e ao Dr. Jorge P. Tamayo pela importante ajuda e orientação no desenvolvimento dessa dissertação, sem a ajuda deles o término dessa dissertação talvez não teria sido possível.

Em geral a todas aquelas pessoas que fizeram de Porto Alegre uma cidade acolhedora, amigos e amigas, em especial aos colegas do apartamento: Julian, Alejandro e Owen pelas conversas e a boa vontade sempre.

Agradeço minha família Alvaro, Tatiana e Joaquin pelo apoio constante mesmo que tenham estado a mais de 2000 km de distância.

## RESUMO

MOSCOSO, W.A.M. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos: Protensão Externa** 2016. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As vigas mistas de aço e concreto têm sido empregadas cada vez mais como uma solução em problemas de engenharia, o que pode ser verificado em estruturas de pontes e viadutos. Também em estruturas de edifícios onde se procure maior leveza ou vencer maiores vãos, esse tipo de solução é empregada. Efetivamente uma viga mista permite empregar os materiais que a compõe de modo ótimo. Quando se fala em vigas mistas a protensão externa é uma solução que pode ser empregada como reforço estrutural, ou para aumentar a capacidade de carga da estrutura. A mesma também pode ser considerada desde a etapa de projeto com o objetivo de se obter uma estrutura mais leve. Verifica-se uma carência de material de referência quanto ao dimensionamento de vigas mistas submetidas à protensão externa. Nesse contexto, o trabalho proposto busca estudar esse assunto através da implementação de um algoritmo para consideração da protensão externa num código computacional existente. Esse trabalho segue a linha dos trabalhos que têm sido desenvolvidos no CEMACOM associados com esse tema. Basicamente foram implementados dois tipos de elementos para simulação dos cabos de protensão e um elemento de contato para simular o escorregamento entre os cabos de protensão e os desviadores intermediários. Vários exemplos são apresentados e os resultados obtidos comprovam o funcionamento adequado do código implementado.

Palavras-chave: *Vigas-Mistas, Protensão, Cabo, Elementos Finitos.*

## ABSTRACT

MOSCOSO, W.A.M. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos: Protensão Externa** 2016. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Nowadays the composite steel and concrete beams have been increasingly used as a solution in engineering problems; this fact can be verified on bridges and viaducts structures. Also in building structures where the engineers look for greater lightness or gain larger spans, this type of solution is employed. Effectively a composite beam allows you to use the materials that compose in the optimal mode. When a composite beam externally prestressed is used as a structural solution could be for reinforcement, or to increase the load capacity of the structure. The same can also be seen from the design step in order to obtain a lighter structure. There is a lack of reference material in the design of composite beams subjected to external prestressing. In this context, the proposed work aims to study this issue by implementing an algorithm for consideration of external prestressing in an existing computational code. This dissertation follows the line of works that has been developed in the CEMACOM associated with this theme. Basically were implemented two types of elements for simulation of prestressing tendons and a contact element to simulate the slip between the prestressing tendons and intermediate deviators. Several examples are presented and the results demonstrate the proper functioning of the implemented code.

*Key-words: Composite Beams, Prestressing, Cable, Finite Elements.*



## SUMÁRIO

1	Introdução.....	4
1.1	Considerações Gerais.....	4
1.2	Justificativa.....	7
1.3	Objetivo.....	9
1.4	Revisão Bibliográfica.....	10
1.5	Breve Descrição do Conteúdo.....	18
2	Vigas mistas Protendidas.....	20
2.1	Critérios para a modelagem.....	20
2.2	Simulações Numéricas.....	25
2.3	Descrição do Modelo Analítico.....	27
2.3.1	Leis Constitutivas dos Materiais Usados no Modelo Numérico.....	27
2.3.2	Elementos Finitos.....	32
3	Elemento Finito para o Cabo de Protensão.....	37
3.1	Introdução.....	37
3.2	Descrição do Modelo Constitutivo.....	38
3.3	Modelo para Cabo via Elementos Finitos.....	40
3.3.1	Elemento Catenária.....	40
3.3.2	Elemento Treliça.....	45
4	Elemento de Interface.....	49
4.1	Método da Penalidade.....	49
4.2	Características e formulação do Elemento de Interface Implementado.....	51
5	Implementação dos Elementos de Cabo e Interface no código de viga mista existente.....	55
5.1	Processo de Modelagem.....	55
5.1.1	Programa “Viga Mista Protendida” (V.M.P.).....	55
5.2	Forma de Uso do Programa V.M.P.....	60
6	Aplicações para Validação.....	66
6.1	Exemplos de Aplicação Elemento Especial de Catenária.....	66
6.2	Vigas Simplesmente Apoiadas.....	78
6.3	Vigas Mistas Contínuas.....	91
7	Conclusões e Recomendações.....	111
	REFERÊNCIAS.....	113
	Anexo A.....	117
	Anexo B.....	119
	Anexo C.....	123

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Protensão Externa de reforço Ponte Condet (Indonésia) .....	4
Figura 1.2 Esquema de uma Viga Mista protendida .....	4
Figura 1.3 Seção Mista de Referência .....	5
Figura 1.4 Viga de aço sem Protender .....	9
Figura 1.5 Bonners Ferry Bridge (Idaho, Estados Unidos) .....	10
Figura 1.6. East Ho Chung Viaduct (Guangzhou, China) .....	11
Figura 1.7 “Whiple Truss Bridge” (New York, Estados Unidos) .....	13
Figura 1.8 Viaduto sobre Av. Bento Gonçalves (Porto Alegre).....	17
Figura 1.9 Içamento da viga metálica do viaduto na Av. Júlio de Castilhos (Porto Alegre) ...	17
Figura 1.10 Viga protendida Hotel Hilton Morumbi.....	18
Figura 2.1 Distribuição de Tensões para Viga Protendida (Regime Elástico) .....	22
Figura 2.2 Distribuição de Tensões para Viga Protendida (Regime Plástico Simplificado)....	23
Figura 2.3 Superfície de plastificação definida no espaço das Tensões Principais .....	28
Figura 2.4 Representação Unidimensional do diagrama Tensão Deformação para o Concreto .....	29
Figura 2.5 Diagrama de retenção de Tensões no Concreto Fissurado.....	30
Figura 2.6 Diagrama Tensão deformação para o aço a) Trilinear e b) bilinear.....	30
Figura 2.7 Superfície de Escoamento Definida no espaço das Tensões Principais.....	31
Figura 2.8 Ajuste de curvas Experimentais segundo o modelo Exponencial da Eq.2.7 .....	32
Figura 2.9 a) Elemento Tridimensional Sólido Quadrático b) Elemento de Casca Degenerada .....	33
Figura 2.10 Esquema em camadas do elemento finito empregado para o Concreto Armado..	34
Figura 2.11 Elemento Finito de Placa .....	34
Figura 2.12 Conector antes e depois da deformação .....	36
Figura 3.1 Pontes Suspensas, Torres de Alta tensão e Vigas Protendidas .....	37
Figura 3.2 Diagrama Bi linear Uniaxial de Comportamento do Material .....	39
Figura 3.3 Sistema de coordenadas do elemento de catenária .....	40
Figura 3.4 Elemento catenária depois da convergência .....	43
Figura 3.5 Elemento de Treliça .....	46
Figura 4.1 Elemento de interface: Esquema indicativo.....	49
Figura 4.2 Elemento de interface no desviador de uma viga mista.....	52
Figura 4.3 Diminuindo a diferença entre ângulos de saída e entrada.....	52
Figura 4.4 Tensões no elemento de Interface .....	53

Figura 5.1. Fluxograma do Processo de Modelagem .....	55
Figura 5.2. Fluxograma Geral do Programa V.M.P .....	56
Figura 5.3. Fluxograma da Análise de Carga Última .....	57
Figura 5.4. Fluxograma do módulo STIFF .....	58
Figura 5.5. Fluxograma da subrotina Cabo de Protensão .....	59
Figura 5.6. Fluxograma da subrotina Cabo de Protensão .....	59
Figura 5.7. Fluxograma do módulo FINTER .....	60
Figura 5.8. Exportação da malha do GiD .....	61
Figura 5.9. Importação da malha de GiD .....	62
Figura 5.10. Escolha do tipo de elemento de cabo .....	62
Figura 5.11. Desenho dos Elementos de Interface .....	63
Figura 5.12. Geração dos elementos de interface no arquivo (*.dat) .....	63
Figura 5.13. Conversão dos elementos de cabo em elementos de interface.....	64
Figura 5.14. Modificação de coordenadas dos nós finais.....	65
Figura 6.1. Geometria Exemplo 1 .....	67
Figura 6.2. Geometria do Exemplo 2 .....	68
Figura 6.3. Exemplo 3 .....	70
Figura 6.4. Influência do Numero de Elementos.....	71
Figura 6.5 Variação do Deslocamento Central com o Peso Próprio .....	72
Figura 6.6 Geometria do Exemplo 4 .....	72
Figura 6.7 Geometria inicial dos cabos no Exemplo 5.....	74
Figura 6.8 Geometria do Exemplo 6 .....	75
Figura 6.9. Resultado Exemplo 6 $\alpha=60^\circ$ .....	76
Figura 6.10. Geometria do exemplo 7 .....	77
Figura 6.11. Resultados Exemplo 7.....	78
Figura 6.12. Geometria das vigas modeladas. (CHEN e GU, 2005) Adaptado pelo autor .....	78
Figura 6.13 Detalhes da Malha de Elementos Finitos .....	79
Figura 6.14 Esquema Camadas Laje de Concreto. Dimensões [mm] .....	79
Figura 6.15. Tensões $S_{xx}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]. Momento solicitante 162 [kN m].....	82
Figura 6.16. Posição Linha Neutra a partir dos Valores de Deformação. Aproximação Linear .....	82
Figura 6.17. Efeito de Shear Lag região centraln laje - Momento solicitante 162 [kN m] .....	83
Figura 6.18. Viga BS1 sem protensão .....	84
Figura 6.19. Calibração das propriedades de aço apresentadas em (CHEN e GU, 2005).....	85

Figura 6.20. Fase inicial de protensão do elemento – Deslocamentos em cm .....	85
Figura 6.21 Etapa 9 Carga de Escoamento da Viga de Aço – Tensões de von Mises (kN/cm <sup>2</sup> ) .....	86
Figura 6.22. Trincas longitudinais e Concreto em Compressão – Carga Última .....	86
Figura 6.23. Comparação Modelo Numérico E.T, E.FC e Teste Experimental .....	87
Figura 6.24. Incremento de força de protensão em cada cabo durante o processo de carga na viga (Dois cabos).....	87
Figura 6.25. Deflexão central vs. Momento Atuante Viga BS2.....	89
Figura 6.26. Força nos cabos na viga BS2 .....	89
Figura 6.27 Seção Transversal. Dimensões em mm.....	91
Figura 6.28. Vigas Modeladas e esquema de aplicação de cargas. (mm) .....	92
Figura 6.29. Malha de Elementos Finitos Viga CBB1 .....	95
Figura 6.30. Comparação viga sem protensão Viga CCB1 .....	96
Figura 6.31. Esquema de seções equivalentes.....	96
Figura 6.32. Vista em planta das camadas da laje de concreto. Fissuração. Passo de Carga um .....	97
Figura 6.33. Tensões axiais na viga de aço (kN/cm <sup>2</sup> ) .....	97
Figura 6.34. Etapa da falha da viga CCB1- Deslocamentos cm, tensões kN/cm <sup>2</sup> .....	98
Figura 6.35. Seção transversal Viga PCCB1 .....	99
Figura 6.36. Malha de Elementos Finitos – viga PCBB1 .....	99
Figura 6.37. Curvas “Deflexão Máxima vs. Carga Vertical Total” Viga PCCB1 .....	100
Figura 6.38. Incremento das forças axiais no cabo de protensão .....	101
Figura 6.39. Comparação do efeito da protensão na viga .....	102
Figura 6.40. Comparações Viga PCCB2 .....	103
Figura 6.41. Diferença nas tensões do cabo no modelo Viga PCCB2 .....	104
Figura 6.42. Diferença na Força Axial vs. Força Externa .....	105
Figura 6.43. Efeito da protensão nas fissuras (Condição de simetria no extremo esquerdo). 106	
Figura 6.44. Comparação das Vigas PCCB2 e PCCB5.....	107
Figura 6.45. Influência dos elementos de interface no comportamento dos modelos numéricos .....	108
Figura 6.46. Modelo Experimental e Numérico Viga PCCB3 .....	109
Figura 6.47. Comparação entre as vigas PCCB3 e PCCB1.....	109
Figura A.1. Curvas Momento-Deflexão Vigas BS1 e BS2 .....	117
Figura A.2. Curvas Carga Total-Deflexão Máxima Vigas Contínuas PCCB .....	118

Figura B.1. Forças ao longo do cabo de protensão PCCB1 .....	119
Figura B.2. Forças ao longo do cabo de protensão Viga PCCB2.....	120
Figura B.3. Forças ao longo do cabo de protensão Viga PCCB4.....	121
Figura B.4. Forças ao longo do cabo de protensão Viga PCCB5.....	122
Figura C.1 Comprimento da Região de Fissuração para diferentes $P_k$ em todas as vigas CCB modeladas. $nL \rightarrow$ valor obtido aplicando a equação (C.1).....	124

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Quadro Comparativo dos Estágios de Carregamento da Viga Mista Protendida...	21
Tabela 2.2 Quadro dos Carregamentos Atuantes em cada Estágio de Carregamento.....	22
Tabela 2.3 Viga Mista Protendida sem Escoramentos Pré Tacionada.....	24
Tabela 6.1. Dados do Exemplo 1.....	66
Tabela 6.2. Resultados Exemplo 1 .....	67
Tabela 6.3. Dados do Exemplo 2.....	68
Tabela 6.4. Resultados do Exemplo 2 .....	69
Tabela 6.5. Dados do Exemplo 3.....	69
Tabela 6.6. Deslocamentos Verticais Centrais (mm) - elementos Implementados .....	70
Tabela 6.7 Resultados Exemplo 3 – Deslocamentos Ponto Central.....	71
Tabela 6.8. Propriedades da rede de cabos Exemplo 4 .....	73
Tabela 6.9. Resultados do Exemplo 4 .....	73
Tabela 6.10 Propriedades da Rede de Cabos.....	74
Tabela 6.11 Comparação de Resultados Exemplo 5 .....	74
Tabela 6.12 Características da barra do exemplo 6 .....	75
Tabela 6.13 Resultados para diferentes tensões iniciais.....	76
Tabela 6.14. Dados do Exemplo 7.....	77
Tabela 6.15. Dimensões dos Corpos de Prova .....	78
Tabela 6.16. Materiais usados e detalhamento dos componentes das vigas.....	80
Tabela 6.17. Comparação Valores Numéricos e Experimentais Viga BS1 – Teste 1 .....	81
Tabela 6.18. Comparação de Valores Numéricos e Experimentais .....	90
Tabela 6.19. Características das Vigas Modeladas.....	93
Tabela 6.20. Forças de Protensão nos cabos .....	94
Tabela 6.21. Comparação dados Experimentais e Numéricos .....	101
Tabela 6.22. Resultados da viga PCCB2 com e sem elementos de interface.....	104
Tabela 6.23. Efeitos do grau de protensão $\lambda$ .....	106
Tabela 6.24. Comparação dos valores Críticos .....	110
Tabela A.1. Comparação Carga última .....	117
Tabela C.1. Valores obtidos aplicando as eq. (C.1) a (C.3) e cargas aplicadas $P_k$ .....	123



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

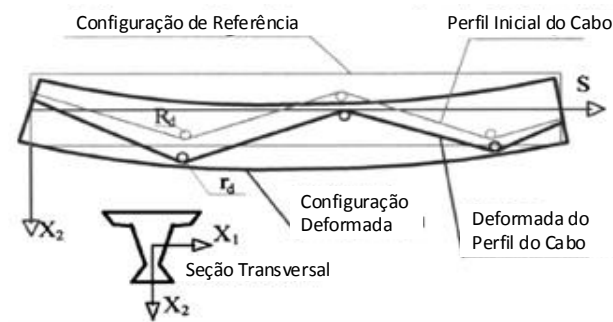
A construção de pontes e viadutos, em Estruturas Mistas de aço e concreto, recebeu grande impulso logo após a Segunda Guerra Mundial, devido à escassez de recursos, pelo que foi necessário buscar maneiras mais eficientes de usar os materiais disponíveis. Dessa forma, a protensão surgiu como uma alternativa para melhorar o aproveitamento estrutural dos materiais de construção, objetivando: aliviar tensões na estrutura, diminuir deslocamentos de serviço e aumentar a capacidade última de carga do elemento (LINHARES, 2015). Existem dois tipos de protensão: externa e interna.



Fonte: (LINHARES, 2015)

Figura 1.1 Protensão Externa de reforço Ponte Condut (Indonésia)

No caso da protensão externa, que é o foco desse trabalho, os dispositivos de protensão são dispostos externamente à estrutura, presos nos extremos pelas ancoragens e, no meio do vão direcionados pelos desviadores (caso existirem), com o propósito de equilibrar os momentos fletores atuantes. A Figura 1.2 ilustra essa aplicação.



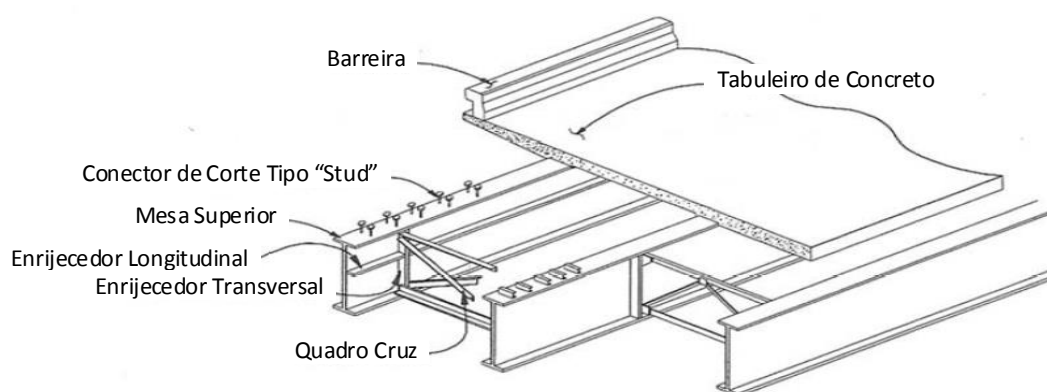
Fonte: (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2007) Adaptado pelo autor

Figura 1.2 Esquema de uma Viga Mista protendida



Nas últimas cinco décadas, o sistema estrutural das vigas mistas com protensão externa mostrou-se como um dos sistemas mais adequados para a construção de pontes. Uma das principais vantagens construtivas da protensão externa é que se os cabos de protensão apresentarem alguma patologia, os mesmos podem ser substituídos facilmente. Essa técnica é muito utilizada na restauração e reparo de estruturas (LINHARES, 2015).

As vigas mistas não protendidas têm três componentes: laje de concreto, viga de aço e conectores de corte. A laje de concreto pode ser pré-fabricada ou concretada in situ, sendo o uso das lajes pré-fabricadas uma alternativa rápida por dispensar fôrmas. A laje de concreto é ligada à viga de aço pelos os conectores de corte. A Figura 1.3 ilustra uma viga mista.



**Fonte: Duan, 1999 apud (LINHARES, 2015). Adaptado pelo autor**

Figura 1.3 Seção Mista de Referência

A união da laje de concreto com a viga de aço gera, por exemplo, na região de momentos positivos, um funcionamento estrutural mais efetivo, pois para um mesmo carregamento a área resistente à compressão é maior, o que gera uma elevação da linha neutra da seção mista se comparada com uma viga de aço. Quando uma viga mista é protendida se busca melhorar a eficiência da laje de concreto em compressão, nesse sentido a melhor posição do cabo de protensão, nos diferentes trechos da viga, vai ser definida pelas condições de contorno e os esforços solicitantes tanto durante a fase de construção, quanto na sua condição de funcionalidade permanente.

Existe a possibilidade do uso de desviadores intermediários para o cabo no vão da viga de aço, o que gera mais pontos de compatibilidade de deslocamentos, além daqueles das ancoragens, o que faz com que o efeito da compressão sobre a laje de concreto; gerado pela

protensão do cabo, seja mais efetivo durante todo o processo de carregamento, especialmente se esse carregamento é variável.

Em toda análise de protensão externa existem dois pontos a serem considerados: o efeito de segunda ordem, devido a não linearidade geométrica, e o escorregamento do cabo nos desviadores (FERREIRA, 2007). Estes efeitos podem ser ou não significativos no estado limite de serviço e no estado limite último, pois a esbeltes da viga, o traçado do cabo e o espaçamento entre os desviadores influenciam o fenômeno.

O efeito de segunda ordem acontece, quando a peça deflete, porque não existe compatibilidade entre o deslocamento do cabo e aquele da viga de aço entre os desviadores e as ancoragens, o que resulta numa variação de excentricidade entre o eixo do cabo e um eixo de referência qualquer da viga de aço (Perlingeiro, 2006 apud (FERREIRA, 2007)).

Quando acontece o deslizamento dos cabos nos desviadores, a força axial no cabo de protensão de um lado do desviador é maior que a força de atrito no desviador mais a força axial do cabo que atua do outro lado do desviador. Normalmente essas forças de atrito são minimizadas mediante a aplicação de técnicas construtivas na instalação desses desviadores, buscando que entre as superfícies em contato exista a menor rugosidade possível ou que a diferença entre o ângulo de entrada e saída do cabo seja a menor possível. Com isto pode-se considerar para fins de dimensionamento do cabo a mesma tensão em todo seu comprimento.

No processo de protensão existem perdas de tensão por vários motivos. Estas perdas são classificadas em dois tipos: imediatas e progressivas. As imediatas, são aquelas que ocorrem durante a operação da protensão e imediatamente após o recuo da ancoragem do cabo. Já as progressivas, ocorrem ao longo do tempo, dependendo do grau de relaxação do cabo, retração e fluência do concreto.

Quando os cabos são estirados e mantidos com comprimento constante sofrem um alívio de tensão ao longo do tempo. Esse alívio de tensão depende do tipo de cordoalhas que compõem o cabo de protensão. As cordoalhas de baixa relaxação apresentam uma perda de tensão consideravelmente menor que as de relaxação normal, já as cordoalhas de baixa relaxação recebem um alongamento com temperatura controlada na fabricação, o que lhes confere menor perda por relaxação. (LINHARES, 2015)

A retração do concreto é um fenômeno que ocorre em função do equilíbrio higrotérmico do concreto com o meio ambiente. Concreto perde parte da água de amassamento nas primeiras idades, gradativamente, até atingir uma umidade relativamente estável. O que produz uma diminuição de volume e um conseqüente encurtamento da peça

que se manifesta ao longo do tempo. A fluência decorrente da protensão não é pura, porém a favor da segurança, considera-se pura já que seus valores são maiores que a não pura. De forma geral a fluência pode-se associar a um elemento linear de concreto como sendo um conjunto, colocado em série, de uma mola associada a um pistão com líquido viscoso. Introduzindo um carregamento, ocorrerá uma deformação imediata, devida à deformação da mola, e uma deformação lenta, devida à movimentação do pistão. As ações que a provocam são permanentes, ou seja, as ações acidentais têm curta duração e não provocam deformação ao longo do tempo. (LINHARES, 2015)

A protensão externa tem grande importância como uma alternativa de reforço estrutural. Nas últimas décadas, tem havido um rápido crescimento do volume e peso dos veículos na malha rodoviária no Brasil. Conseqüentemente, as antigas pontes e viadutos urbanos construídos até a década de 1990 não estão dimensionadas para o tráfego atual, em consequência disso, as estruturas sofrem danos progressivos (LINHARES, 2015). Nesse contexto o desenvolvimento de pesquisas associadas ao tema se justifica. Para isso, é importante o estudo teórico do tema e o uso de ferramentas computacionais que permitam analisar o comportamento deste sistema estrutural de maneira tal que possam ser previstos comportamentos característicos e propostas análises aprofundadas que permitam melhorar os métodos construtivos ou de dimensionamento conhecidos no meio.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

As vigas de seção mista apresentam uma solução estrutural atrativa na construção de obras civis. O seu uso em pontes e prédios permite a redução dos custos de construção e o aumento da efetividade do comportamento estrutural. Como já foi mencionado, as pontes compostas por tabuleiro de concreto e vigas de aço (pontes mistas) apresentam grandes vantagens para as obras viárias da atualidade, isso devido à eficiência observada.

O crescente desenvolvimento global, melhoramento da tecnologia e aumento da população em todos os confins do país e do mundo, faz com que os volumes de produtos a serem transportados para o consumo do homem sejam maiores a cada dia, o que gera a tendência de que o volume de tráfego nas pontes e rodovias aumente de modo significativo, consequência disso é um maior peso dos eixos de carros em geral e caminhões transportadores.

O constante crescimento do parque automotor nas cidades exige, também, que sejam executadas estruturas que melhorem a circulação dos automóveis na cidade evitando o congestionamento do tráfego. A falta de espaço existente nos centros urbanos, ou a geografia das principais capitais, faz com que a tendência para resolver este problema seja a construção de estruturas elevadas (viadutos). Essas novas condições exigem sistemas estruturais capazes de se adaptar às exigências arquitetônicas e aos acidentes geográficos da natureza; nesse contexto a protensão das vigas mistas é uma boa alternativa, que se traduz em uma redução do uso do material, tanto de aço e de concreto. Em palavras simples, a protensão introduz na estrutura tensões internas diretamente opostas àquelas que vão surgir em decorrência dos carregamentos externos. Com isso há um aumento da capacidade resistente da peça, possibilitando a redução do tamanho dos perfis e como consequência, a redução dos custos das construções.

Devido a essas grandes vantagens no uso dos materiais, o assunto vem ganhando espaço no meio técnico nos últimos anos, porém muitos estudantes e profissionais de engenharia no Brasil pouco sabem sobre o funcionamento deste tipo de solução, principalmente, devido à inexistência de normatização brasileira e escassez de estudos nacionais (LINHARES, 2015). Nesse contexto, faz-se necessário desenvolver estudos sobre o comportamento das estruturas mistas protendidas. Portanto, este trabalho apresenta-se como uma contribuição técnica e tenta preencher a falta de conhecimento relacionado a este importante tema no Brasil e América do Sul.

Apesar dos estudos a nível internacional, que se tem sobre o tema, ainda hoje, algumas questões não estão muito bem esclarecidas, entre essas se podem mencionar:

- Métodos de dimensionamento que meçam convenientemente a capacidade última de carregamento.
- Um modelo de elementos finitos que considere e represente os fenômenos locais, tal como a flambagem local, que acontecem na estrutura. (NIE et al. 2011)
- Métodos de dimensionamento que permitam prever os incrementos de tensão no cabo de protensão para os estágios de carregamento no estado limite último da estrutura. (CHEN e GU, 2005)

Nessa linha de pesquisa foram desenvolvidas diferentes investigações com foco nas estruturas mistas. Em duas pesquisas (TAMAYO, 2011) e (DIAS, 2013) realizadas no CEMACOM/PPGEC foi desenvolvido um código computacional que usa os elementos finitos

para a análise deste tipo de estruturas, devido às vantagens e efetividade na análise estrutural que esta técnica dispõe.

Neste trabalho espera-se contribuir ao estudo do tema através da incorporação de um módulo computacional de protensão externa como uma opção a mais neste código desenvolvido.

Na escolha do elemento de cabo, que introduz a protensão no sistema, se quis conhecer qual o efeito de usar um elemento empregado comumente para a modelagem de cabos, elemento catenária, que apresenta grandes curvaturas, comparado com o uso do elemento clássico de treliça, solução empregada na maior parte dos modelos numéricos propostos na literatura. Este elemento de catenária considera o peso próprio de forma exata e descreve uma geometria inicial de forma catenária. Também se inclui um elemento de interface que modela a interação do cabo de protensão e a viga de aço. O objetivo desta proposta é representar a maior quantidade de efeitos que acontecem no processo de protensão e carregamento.

Na Figura 1.4 é apresentada uma viga de aço, na qual o cabo ainda não foi protendido. Pode-se observar a forma que gera o peso próprio (entre desviadores centrais), fato que motivou à comparação do uso do elemento cabo e do elemento treliça, para a modelagem do cabo de protensão.



**Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)**

Figura 1.4 Viga de aço sem Protender

### 1.3 OBJETIVO

Um modelo numérico elasto-plástico em elementos finitos foi desenvolvido e implementado por (TAMAYO, 2011) e (DIAS, 2013) através de um código computacional em linguagem Fortran 90, cuja plataforma de pré e pós-processamento de dados é feita

empregando o software de pré e pós-processamento denominado GiD. Este código é adequado para modelar estruturas de vigas mistas em análises de curta e longa duração.

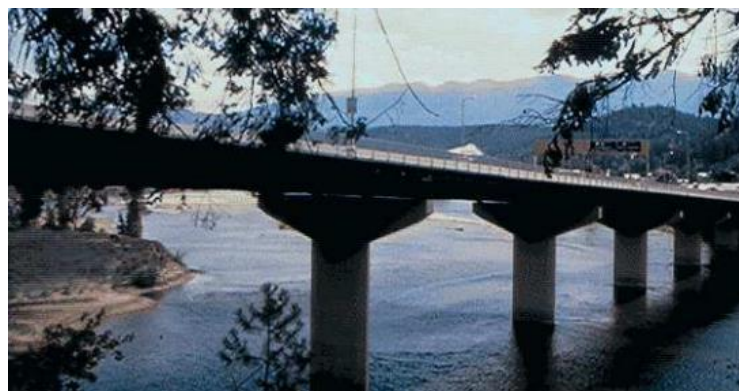
Nesse contexto, continuando o trabalho desenvolvido, tem-se como objetivo principal a inclusão no código de um módulo com os efeitos da protensão externa e a inclusão de um elemento de cabo que induz essa protensão na viga mista. Para conseguir este objetivo é necessário atingir objetivos parciais desde o ponto de vista numérico.

Como objetivos específicos, se têm:

- Validação isolada do elemento de cabo para a protensão da viga. Este elemento poderá ser usado para a modelagem de cabos de grandes ou pequenas deflexões em futuras investigações.
- Análise das tensões nos cabos de protensão, durante todo o processo de carregamento do sistema estrutural.
- Análise do comportamento global da estrutura mista pretendida.
- Análise da diferença entre o comportamento estrutural de vigas mistas sem protensão e com protensão, considerando os efeitos de curta duração.
- Comparação dos resultados obtidos empregando os dois modelos do cabo

#### 1.4 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

A viga mista é uma combinação de materiais (aço e concreto), bastante utilizada para vencer grandes vãos, que reduz o peso próprio da estrutura comparada com o peso de outros sistemas estruturais. A Figura 1.5 mostra um dos exemplos mais citados na literatura sobre este tipo de estrutura, a ponte “Bonner’s Ferry” construída em Idaho nos Estados Unidos.



**Comprimento total: 420 metros. Maior vão entre pilares 50 metros.**

**Fonte: (INGEGNERIA SOLAZZO S.R.L, 2014)**

Figura 1.5 Bonners Ferry Bridge (Idaho, Estados Unidos)

Algumas das vantagens das vigas mistas em relação a outros sistemas estruturais observadas por (LINHARES, 2015) são listadas a seguir:

- Redução das dimensões da seção transversal e como consequência peso próprio menor
- Maior rapidez e facilidade de execução dispensando a necessidade de uso de formas e escoramentos, reduzindo custos com materiais e mão de obra.
- Estruturalmente a ação reduz as deflexões devido ao aumento da rigidez à flexão.

Comparando as vigas mistas protendidas em relação às vigas mistas não protendidas, podem ser observadas, segundo o mesmo (LINHARES, 2015), as seguintes vantagens:

- Comportamento elástico para cargas maiores
- Resistência última incrementada
- Menor deflexão na metade do vão na situação limite de serviço
- Maior resistência para a aparição de fissuras no concreto quando se têm regiões de momentos negativos.
- Melhor comportamento em fadiga e fratura do elemento.
- O deslizamento entre a interface da viga de aço e a laje de concreto é quase nulo, pelo estado de tensões gerado devido à protensão.
- Aumento da rigidez global da peça.
- Com cabos externos na estrutura, as inspeções e a manutenção ficam facilitadas, possibilitando um melhor controle da integridade da ponte. Os cabos podem ser trocados ou “re-protendidos”, se necessário, sem custo significativo.
- A protensão externa aumenta a capacidade de pontes já construídas por isso pode ser utilizada como reforço, aumentando a reserva de resistência às novas cargas aplicadas nestas pontes.



Fonte: <http://www.dreamstime.com/royalty-free-stock-image-viaducts-guangzhou-city-china-image29701156>

Figura 1.6. East Ho Chung Viaduct (Guangzhou, China)

Entre as desvantagens dessa técnica, pode ser citado o fato de que os cabos estão expostos à corrosão devendo ser cobertos por meios que evitem ou diminuam esses efeitos.

A construção com este tipo de estrutura é usada faz muitos anos em pontes e em prédios e nos últimos anos foram empregados em viadutos urbanos, com comprimentos importantes de até setenta metros em Guangzhou China (2001) (Figura 1.6) e em vigas de prédios com comprimento de até trinta e cinco metros em Fuzhou, China (1998).

Na história o aço protendido foi usado pela primeira vez no ano 1837 por Squire Whipple nas treliças de uma ponte conhecida como “Whipple Truss Bridge” (New York, Estados Unidos) (Figura 1.7) com o objetivo de que as vigas que suportavam o tabuleiro sejam mais dúcteis. (Trotsky 1990 apud (NELSEN, 2013)).

Os primeiros estudos teóricos sobre esse assunto datam do ano 1930 e as primeiras publicações datam do ano 1950, as quais estão em russo, mesmas que tornaram-se as primeiras tentativas em propor um modelo analítico para o tratamento das vigas mistas protendidas como sistema estrutural considerando, por exemplo, o cabo como um elemento retilíneo depois da protensão sem considerar nenhum tipo de processo construtivo. (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

Nesse sentido, entre 1959 e 1966 foram publicados estudos interessantes sobre vigas mistas, tal como: Szilard em 1959 apud (NIE *et al.*, 2007), que incluiu os efeitos de retração e de fluência do concreto no comportamento global da viga mista e sugeriu, de forma pioneira, um método de dimensionamento para vigas mistas; Hoadley em 1963 apud (NIE *et al.*, 2007) propôs um modelo que considera o incremento da tensão no cabo de protensão devido aos carregamentos aplicados sobre a viga mista, Strass em 1964 apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) elaborou um estudo experimental sobre vigas de momento positivo e finalmente em 1966 Ragan apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) testou os efeitos da variação da altura da laje no comportamento da estrutura mista.

Quase três décadas depois, Klaiber em 1982 apud (NIE, *et al.*, 2007) e Dunker em 1986 apud (NIE *et al.*, 2007), mediante diversos estudos, confirmaram para os engenheiros da época, a confiança na efetividade da protensão neste tipo de elemento. Ayyub em 1992 apud (NIE, *et al.*, 2007) propôs um método de dimensionamento, baseado no trabalho de Hoadley, que podia ser usado em vigas mistas de um só vão com dois pontos desviadores, aplicando a teoria linear somente, pois era a tendência daquele tempo.





Fonte: <http://www.whipple.org/photos/whipplebridge.html>

Figura 1.7 “Whiple Truss Bridge” (New York, Estados Unidos)

Dall’Asta e Dezi em 1993 apud (DALL’ASTA e DEZI, 1998) propuseram uma formulação com base ao princípio da energia potencial mínima em materiais de comportamento não linear. Posteriormente, em (DALL’ASTA e DEZI, 1998), propuseram uma formulação não linear variacional para a análise das vigas mistas, que representava melhor o fenômeno de incremento de tensões, que acontece no cabo, quando o mesmo se encontra no Estado Limite Último. Contudo em 1999, Nunziata apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) concluiu que a viga mista protendida é mais eficiente que outro tipo de viga quando se trata de vencer vãos livres de dimensões importantes.

Até a década dos noventa, as pesquisas experimentais mostraram que a protensão podia ser utilizada para compensar as tensões devidas ao carregamento atuante, mas quando era aplicada nos elementos de aço, existia a possibilidade de gerar instabilidade local na viga, o que limitava a eficiência da seção mista, dessa forma, tornou-se um tema de pesquisa importante nestes sistemas estruturais.

Em 2001 Safan e Kouhoutková apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) propuseram um estudo experimental, no qual compararam vigas, submetidas a momentos positivos, sem e com protensão externa, confirmando depois de executar os ensaios; um aumento na capacidade resistente da peça, redução da flecha em situação de serviço e melhor controle de fissuração no concreto.

Em (CHEN e GU, 2005) foram efetuados ensaios para o estudo do momento resistente último e das forças incrementais nos cabos de protensão em vigas mistas simplesmente apoiadas. Foi observado que a protensão de vigas mistas efetivamente incrementa a carga última de forma significativa. Do mesmo jeito, a deflexão na metade do vão diminui, mas

somente em situações de serviço. Também se observou que em condições de deformações últimas acontece um incremento de esforços acelerado no cabo de protensão, podendo gerar a ruptura do cabo, caso o mesmo não seja considerado, e por consequência, a falha da viga mista, tendo a possibilidade de ser a variável que controla a falha do sistema estrutural. Essas conclusões são produto de testes de flexão efetuados em duas vigas simplesmente apoiadas. Numa dessas foram feitos dois testes: no 1º os cabos não foram protendidos e no 2º sim, o que mostrou claramente o efeito da protensão no elemento. Na fase última de resistência, a deflexão no ponto central tem praticamente o mesmo caminho seja a viga protendida ou não, mas a carga última resistente é maior, o que mostra maior ductilidade na peça.

Em (DALL'ASTA e ZONA, 2005) se apresenta um modelo de elementos finitos aonde mostram o potencial da sua formulação, proposta em (DALL'ASTA e DEZI, 1998), sobre as estruturas reais comparando os resultados obtidos pelo modelo numérico com aqueles dos experimentos realizados.

Em outros estudos (CHEN e ZHANG, 2006) foi identificado que a presença de cabos de protensão faz com que o deslizamento entre a laje de concreto e a viga de aço, em uma viga mista, diminua consideravelmente, em todas as zonas independentemente do sinal do momento atuante. Também se conseguiu conferir que o efeito da protensão da viga mista faz com que a largura efetiva para o seu dimensionamento aumente de forma geral em torno de 2% em relação com o observado nas vigas mistas sem protender. A influência dos conectores de corte e as fibras protendidas são consideradas na análise. Os efeitos da aparição de fissuras e a fluência do concreto também são discutidos. O objetivo do estudo de (CHEN e ZHANG, 2006) é conhecer a largura efetiva de uma viga mista, agindo como parte de um tabuleiro de uma ponte, de forma tal que o efeito do esforço seja o mesmo que acontece em todo o tabuleiro, pois as fórmulas simples propostas em alguns regulamentos podem estar contra a economia da construção da obra.

Em (DALL'ASTA e ZONA, 2005) se fez um estudo que apresenta um modelo não linear de elementos finitos para a análise de vigas protendidas por cabos externos, que podem deslizar nos desviadores instalados no comprimento da viga. A formulação considera a possibilidade de deformação das conexões de corte. A aproximação proposta pode ser aplicada em programas de análises não linear de elementos finitos sem a necessidade de processos iterativos.

Em (LORENC e KUBICA, 2006) se estudaram os mecanismos de falha e o comportamento das vigas mistas protendidas com cabos externos, sujeitas a momento de

flexão positivo. Seis ensaios experimentais foram feitas com e sem desviadores, e também se testaram vigas mistas sem protender. Foi considerada a influência dos conectores de corte e o deslizamento entre o concreto e o aço na construção de curvas “Força cortante vs. Deslizamento”. Na execução dos experimentos se tentou ter maior controle em:

- A repetição dos resultados para conhecer a tendência geral dos corpos de prova.
- Efeitos que geram as diferentes maneiras de colocar os cabos de protensão na viga.
- Monitorar o deslizamento entre o concreto e o aço em todo o comprimento da viga, não somente nos extremos como é comum nesse tipo de estruturas.

As experiências permitiram concluir que para uma mesma excentricidade a forma dos cabos não influi na capacidade última de carregamento da viga. Além disso, a união entre o concreto e o aço tem muita influência no comportamento ao corte da viga mista. Também concluíram que em vigas mistas protendidas submetidas só a momento positivo, uma maior área no cabo de protensão vai gerar diretamente uma maior capacidade última de carga. Além disso, também se pode afirmar que a quantidade de desviadores instalados na viga vai permitir maior controle sobre a excentricidade do cabo, o que pode gerar maior capacidade de carga, pois os efeitos de 2ª ordem estariam sendo mitigados. Os cabos que tem mudanças de direção (drooped) dão maior ductilidade à viga em comparação com os cabos retos (LORENC e KUBICA, 2006).

Em (XUE, DING e LI, 2008) se observa que os deslocamentos e a tensão do cabo podem variar no tempo em função da fluência do concreto e da relaxação dos cabos. Esse estudo experimental mostra que depois de um ano, a tensão no cabo é aproximadamente 20% menor que a tensão inicial devido à relaxação do material.

Em (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2007), propuseram um método simplificado para a análise de deformações geradas na flexão e analisaram a situação até o colapso, em vigas mistas contínuas. O processo reduzia a análise e foi proposto que o mesmo fosse feito sobre uma seção crítica.

Com o desenvolvimento dos computadores, os modelos numéricos tornaram-se uma ferramenta muito poderosa para a análise de estruturas em geral, desse jeito outras pesquisas foram desenvolvidas. Chen e Jia (2010) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012), Lorenc e Kubica (2004) apud (NELSEN, 2013), Chen e Zhang (2005) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) Belletti e Gasperi (2010) apud (NELSEN, 2013), confirmam a conclusão de Nunziata apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012), apontando que a viga mista é o tipo de viga mais

eficiente para vencer grandes vãos. Esses trabalhos em geral tratam mais detalhadamente as análises da interação do cabo e a viga mista.

Em (NIE *et al.* 2009) foi proposto um método de dimensionamento de vigas mistas contínuas. As formulações propostas permitiam calcular a deflexão máxima da seção de forma simplificada, prever os carregamentos de fissuração, escoamento e colapso com uma boa aproximação, quando comparada com testes experimentais.

Em (NIE *et al.* 2011) foram propostos três métodos de cálculo para os carregamentos característicos (Fissuração, Fluência e Ruptura) de vigas mistas protendidas de dois vãos submetidas a carregamentos simétricos, mas as fórmulas propostas podem ser estendidas para outros casos mais gerais. O comportamento não linear da viga é simulado usando um modelo de elementos finitos, que considera as não linearidades do material e geométrica conseguindo uma boa aproximação do comportamento real deste tipo de estrutura durante todo o processo de carga, até a falha da mesma. O método analítico proposto tem boa aproximação na predição dos valores das cargas mencionadas, o que o qualifica como uma ferramenta válida para o dimensionamento desse tipo de estruturas.

Em geral as pesquisas sobre vigas mistas protendidas buscam caracterizar a influência dos parâmetros como: o traçado do cabo, a força de protensão no cabo, a influência do deslizamento na interface da laje de concreto com a viga de aço, a instabilidade local da alma do componente de aço, em regiões de momento positivo e negativo, e nos últimos anos há uma tendência em propor métodos de dimensionamento para situações gerais de um ou vários vãos. Um ponto normalmente abordado nesses casos é a determinação da largura efetiva da laje de concreto, para o dimensionamento de projeto de uma viga mista protendida com cabos externos. Comumente nas vigas mistas a largura efetiva varia entre um oitavo do comprimento do vão e a metade da distância entre as almas das vigas próximas. Quando estas vigas são protendidas essa largura efetiva não está bem definida. Os efeitos dos conectores de corte tem certa influência no momento de analisar a largura efetiva das vigas (CHEN e ZHANG, 2006).

Em termos do Brasil, a pesquisa sobre vigas mistas apresenta os primeiros registros de alguns estudos sobre protensão em vigas de aço nos trabalhos de Sampaio Júnior (1976) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) e de Gonçalves (1992) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012), que apresentaram procedimentos analíticos para dimensionamento e aplicações em reforço de pontes. Mais recentemente (FERREIRA, 2007) e Rezende (2007) apud (NELSEN e DE

SOUZA, 2012) analisaram numericamente o comportamento estrutural de vigas de aço protendidas externamente com seção transversal tipo I.

Com relação a vigas mistas protendidas, até 2010 o assunto é abordado somente em Cardoso (2010) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012), que propôs uma metodologia para verificação e dimensionamento prático em vigas mistas de aço e concreto protendidas formadas por laje de concreto apoiada em seção de aço tipo I.

A partir de 2011, trabalhos desenvolvidos no CEMACOM/PPGEC (TAMAYO, 2011) e (DIAS, 2013) propuseram um modelo de elementos finitos para a análise de vigas mistas. Em 2015, Linhares observa a pouca investigação feita no campo das vigas mistas com ou sem protensão no Brasil e propõe a aplicação da norma (AASHTO, 2012) no dimensionamento de pontes que usam este sistema estrutural, pois a (ABNT NBR 8800, 2008), se limita a estruturas de prédios. Entre algumas das obras que empregam esta técnica construtiva podem ser mencionadas as seguintes: Em Porto Alegre, os viadutos sobre a Av. Bento Gonçalves e sobre a Av. Júlio de Castilhos (Figura 1.8 e 1.9).



Fonte: (LINHARES, 2015)

Figura 1.8 Viaduto sobre Av. Bento Gonçalves (Porto Alegre)

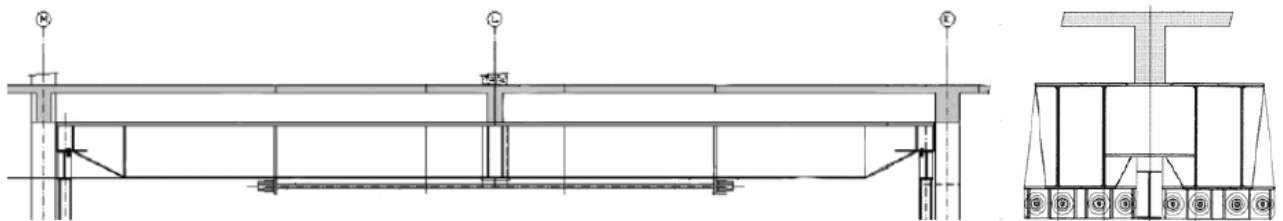


Fonte: (LINHARES, 2015)

Figura 1.9 Içamento da viga metálica do viaduto na Av. Júlio de Castilhos (Porto Alegre)

Os dois exemplos mencionados ilustram o uso atual dessa solução estrutural, que devido a sua praticidade está apresentando um uso crescente, o que gera a necessidade de investigações e publicações que reflitam o comportamento real dessas estruturas, para maior conhecimento dos engenheiros.

Além dos exemplos apresentados dos viadutos na cidade de Porto Alegre, outro exemplo de menor escala sobre o uso de protensão é o Hotel Hilton Morumbi, em São Paulo, onde foi proposta uma solução bem sucedida com viga metálica protendida (Figura 1.10). O que o Hotel precisava era ampliar suas garagens subterrâneas para a implantação de novas salas de convenções; para isso tirou fora um pilar e modificou dessa forma o vão livre entre pilares de 7,5 m para 15 m.



Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

Figura 1.10 Viga protendida Hotel Hilton Morumbi

A tendência no Brasil das investigações e aplicações deste tipo de sistema estrutural busca de um modo generalizado o desenvolvimento de técnicas de projeto para o reforço ou reabilitação estrutural e para a construção de novas estruturas de grande porte. Também se visa o desenvolvimento de ferramentas computacionais, que permitam melhorar o entendimento sobre o funcionamento do sistema estrutural das vigas mistas e definir claramente suas vantagens e limitações em relação com outros sistemas estruturais.

## 1.5 BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO

O trabalho apresentado está dividido em sete capítulos. No primeiro capítulo os objetivos, a justificativa e a revisão bibliográfica geral são apresentados. No capítulo dois, os critérios sugeridos na literatura para a modelagem das vigas mistas protendidas, a tendência das simulações numéricas e a descrição do modelo analítico implementado nesta investigação são discutidos. No capítulo três é definida a formulação dos elementos que foram empregados para modelar o cabo de protensão na representação da viga mista protendida. No capítulo quatro é apresentada a formulação do elemento de interface que é usado para a modelagem da

interação entre os desviadores e o cabo de protensão. No capítulo cinco é descrita a inserção dos elementos de cabo e de interface no código computacional existente e os diagramas de fluxo que envolve as operações desenvolvidas no programa. No capítulo seis se apresenta o pré-processamento dos dados, fazendo foco na inclusão dos elementos de cabo de protensão e interface como parte do modelo da viga mista. Também são apresentados os exemplos de validação finais sobre todo o código desenvolvido. Tanto do cabo isolado quanto de todo o sistema estrutural da viga mista. Finalmente, no capítulo sete são apresentadas as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 VIGAS MISTAS PROTENDIDAS

### 2.1 CRITÉRIOS PARA A MODELAGEM

Segundo o observado na revisão bibliográfica feita, na modelagem das vigas mistas com protensão externa é muito importante considerar as fases do processo construtivo das mesmas. Em termos numéricos é necessário diferenciar os instantes de atuação das cargas externas, pois afetam de forma importante os deslocamentos e o estado de tensões, no estado limite de serviço e no estado limite último (NELSEN e DE SOUZA, 2012). A análise não linear não permite a superposição de esforços, então a consideração dos efeitos de cada etapa da construção são definidos unicamente pelo resíduo de deformação que ficou na última etapa de carregamento (DALL'ASTA e DEZI, 1998).

As possibilidades na fase inicial de construção são as seguintes: viga de aço e a laje de concreto suportada por escoramento ou não, protendidas antes ou depois da concretagem da laje de concreto. O fato da concretagem da laje ser feita em outro local ou in situ, tem bastante influência no comportamento do elemento. Cada uma dessas situações tem que ser analisada usando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), em outras palavras, cada fase de construção tem que alcançar o equilíbrio.

De forma geral, para cada uma das fases de construção ou carregamento, o PTV é expresso como:

$$\delta W = \delta W_{ext} - \delta W_{int} = 0 \quad (2.1)$$

Na equação anterior, o trabalho virtual externo ( $W_{ext}$ ) é definido pelo trabalho das forças externas que agem em cada etapa de carga; a equação 2.2 corresponde à expressão geral do trabalho virtual externo, supondo a atuação de forças pontuais ( $P_i$ ) e distribuídas ( $q$ ), em qualquer fase de carga, cada uma multiplicada pelo deslocamento virtual correspondente ( $\delta\Delta$ ).

$$\delta W_{ext} = \int \delta\Delta \cdot q \, dx + \sum \delta\Delta_i \cdot P_i \quad (2.2)$$

O trabalho virtual interno da estrutura é definido pela integral do produto do campo de tensões ( $\sigma$ ) e deformações virtuais ( $\delta\varepsilon$ ) no sistema estrutural.



$$\delta W_{int} = \int_{vol} \delta \varepsilon \cdot \sigma d_{vol} \quad (2.3)$$

Esse campo de tensões mencionado numa viga mista protendida é definido por: a força de compressão devido à protensão, a flexão provocada pela excentricidade da força de protensão e a flexão resultante da carga externa.

Dependendo do processo construtivo escolhido, as vigas mistas podem ser classificadas quanto ao tipo de protensão em:

- Protendidas antes da concretagem da laje
- Protendidas durante a concretagem da laje
- Protendidas após a cura do concreto.

Quase todos os programas experimentais consultados na pesquisa bibliográfica protendem a viga depois da cura do concreto, mas de qualquer jeito, pode-se apresentar qualquer desses três casos de protensão, em função disto as vigas mistas podem ser classificadas em pré-tracionadas ou pós-tracionadas. Entende-se como pré-tração a aplicação da protensão externa ao perfil de aço antes do lançamento do concreto da laje e, como pós-tração a protensão realizada após a cura do concreto quando já se tem o comportamento misto.

Na Tabela 2.1 apresenta-se um resumo comparativo dos estágios de carregamento de vigas mistas protendidas aplicando-se as técnicas da pré-tensão e pós-tensão. Saadatmanesh (1989) apud (NELSEN e DE SOUZA, 2012) recomenda que em vigas de um vão, a protensão seja feita antes do lançamento do concreto, pois depois da concretagem o esforço de protensão poderia gerar fissuração do concreto na região perto do apoio.

Tabela 2.1 Quadro Comparativo dos Estágios de Carregamento da Viga Mista Protendida

<b>Estágio de Carregamento</b>	<b>Pré-Tracionada</b>	<b>Pós-tracionada</b>
1	Peso Próprio da viga de aço	Peso Próprio da viga de aço
2	Aplicação da protensão	Peso Próprio do concreto da laje
3	Peso Próprio do concreto da laje	Aplicação da protensão
4	Incremento da força de protensão	Carregamento permanente
5	Carregamento permanente	Carregamento de serviço
6	Carregamento de serviço	Incremento da força de protensão
7	Incremento da força de protensão	---

Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

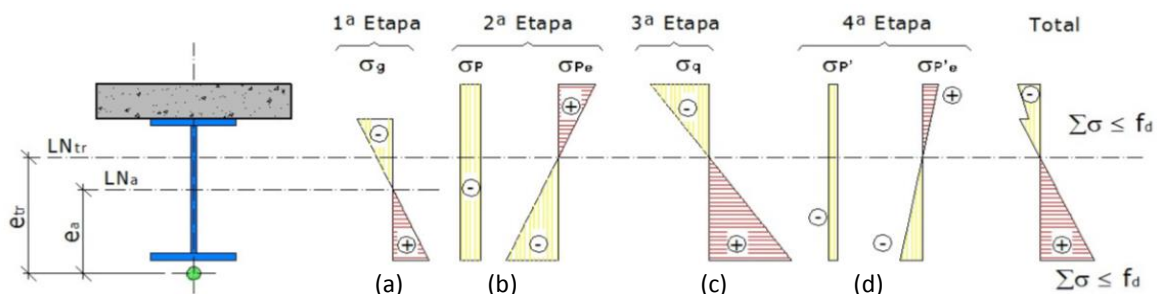
Para a consideração certa de cada uma das forças externas que geram as tensões internas no elemento é importante definir as etapas de carregamento que se deseja analisar. A Tabela 2.2 mostra os carregamentos atuantes sobre uma viga mista em cada uma dessas etapas.

Tabela 2.2 Quadro dos Carregamentos Atuantes em cada Estágio de Carregamento

Etapas de Carregamento		Carregamentos atuantes
1	Execução da viga mista, solicitações resistidas pela viga de aço.	Pesos próprios ( $W_g$ ) do perfil de aço e do concreto da laje que são resistidos pela viga de aço. Figura 2.1 (a)
2	Protensão inicial do cabo após a cura do concreto, solicitações resistidas pela viga mista.	Força de protensão inicial ( $P_0$ ) e Peso próprio total da viga ( $W_{g1}$ ) Figura 2.1 (b)
3	Aplicação dos carregamentos de projeto a viga mista já protendida	Sobrecargas de uso ( $W_q$ ) Figura 2.1 (c)
4	O carregamento devido a sobrecarga de uso provoca na estrutura mista protendida um incremento de força no cabo de protensão	Incremento de força no cabo de protensão ( $\Delta P_0$ ) Figura 2.1 (d)

Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

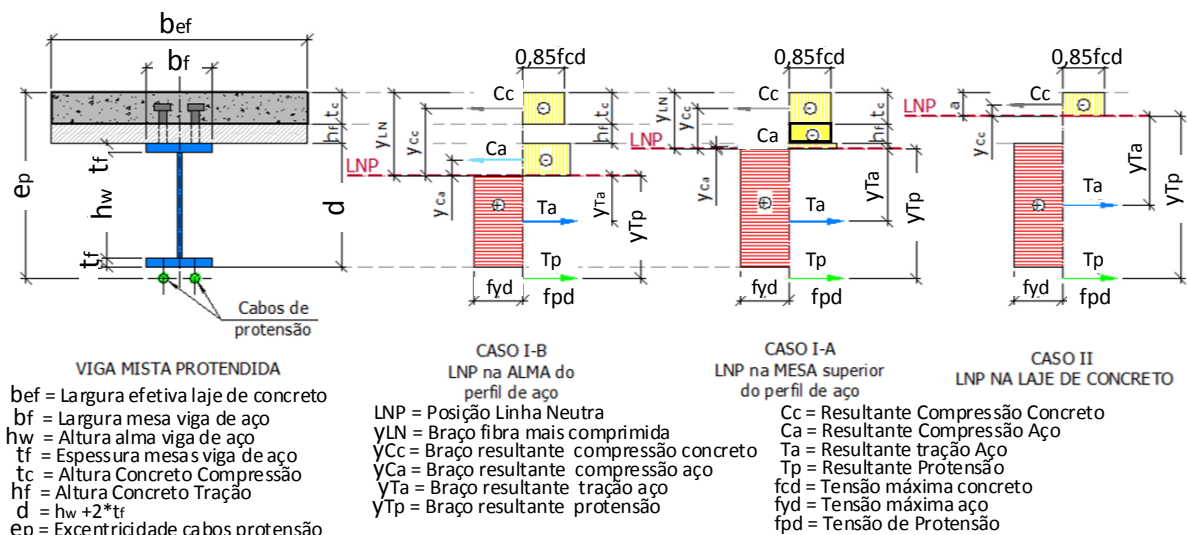
Os estágios do carregamento na viga mista protendida apresentados na Tabela 2.2, geram o estado de tensões esquematizados na figura 2.1 e 2.2, que mostram a evolução das tensões com a evolução do carregamento nos estágios mencionados nos regimes, elástico e elasto-plástico, para a região central de uma viga mista de um vão. Na figura 2.1 são apresentadas as posições da linha neutra quando a seção de aço resiste às solicitações “ $e_a$ ” e quando é aplicada a protensão na viga mista “ $e_{tr}$ ”. No final se tem um estado de tensões resultante das quatro etapas que tem que ser menor que as tensões máximas de dimensionamento, tanto de tração quanto de compressão.



Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

Figura 2.1 Distribuição de Tensões para Viga Protendida (Regime Elástico)

Na figura 2.2 se consideram os três casos de comportamento que podem ser encontrados dependendo das condições de apoio e dos esforços solicitantes: CASO I-B quando a linha neutra da seção está na alma do perfil de aço, logo todo o concreto está em compressão junto com a mesa superior da viga de aço; CASO I-A quando a linha neutra da seção está sobre a mesa superior do perfil de aço, logo somente o concreto trabalha em compressão e toda a seção de aço está tracionada (caso mais eficiente em relação ao aproveitamento dos materiais) e por último o CASO II, quando a linha neutra da seção passa na laje de concreto, o que gera tração em fibras de concreto, que se traduz em fissuração e como consequência essa região não é considerada na análise plástica da seção.



Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012) Adaptado pelo autor

Figura 2.2 Distribuição de Tensões para Viga Protendida (Regime Plástico Simplificado)

A Tabela 2.3 mostra os carregamentos atuantes em cada uma das etapas de verificação junto com as verificações necessárias para as fases de dimensionamento e análise desses sistemas estruturais. Em cada uma das etapas, as verificações a serem feitas devem levar em conta, se estas são referentes ao estado limite último ou ao estado limite de serviço. Na Tabela 2.3 o tempo está representado pela variável  $t$ ,  $E_a$  é o módulo de elasticidade para um período de tempo  $t$  determinado,  $E_c$  é o módulo de elasticidade instantâneo e  $n$  é o coeficiente de elasticidades no tempo.

Tabela 2.3 Viga Mista Protendida sem Escoramentos Pré Tencionada

Etapas de Verificação		Carregamentos atuantes	Verificações Necessárias	
1	Viga do aço e estimativa da força de protensão	(0) Força de protensão (1) Peso próprio do perfil de aço	ELU	Determinar o valor da força de protensão  Momento fletor resistente (0+1) Força cortante resistente (0+1) Flexo-Compressão (0+1) Flambagem locais mesa inferior e alma (0+1)
			ELS	Determinação do deslocamento devido à protensão
2	Viga de aço e concretagem da laje concreto	(2) Peso próprio da laje de concreto	ELU	Momento fletor resistente (0+1+2+3+4) Força cortante resistente (0+1+2+3+4)
		(3) Sobrecarga de construção (quando necessário)		Interação momento fletor + cortante (0+1+2+3+4) Estabilidade local da alma e da mesa (0+1+2+3+4)
		(4) Incremento da força de protensão devido ao peso próprio do concreto da laje	ELS	Deslocamento total da etapa (0+1+2+3+4)
3	Viga mista instante $t=0$ e $n = E_a/E_c$	(5) Carregamento permanente de utilização	ELU	Momento fletor resistente da viga mista com plastificação da seção compacta (0+1+2+4+5+6+7) Força cortante resistente (0+1+2+4+5+6+7) Interação momento fletor + cortante(0+1+2+4+5+6+7)
		(6) Sobrecarga de utilização		Estabilidade local do painel da alma (0+1+2+4+5+6+7) Flambagem local (0+1+2+4+5+6+7) Dimensionamento dos conectores de cisalhamento (5+6)
		(7) Incremento da força de protensão devido aos carregamentos atuantes (5) e (6)	ELS	Compressão no concreto Deslocamento total da etapa (0+1+2+4+5+6+7)
4	Viga mista instante $t = \infty$ e $n = E_a/E_c$	(8) Fluência (9) Retração	ELU	Momento fletor resistente da viga mista com plastificação da seção compacta (0+1+2+4+5+6+7+8+9) Força cortante resistente (0+1+2+4+5+6+7+8+9)
			ELS	Deslocamento total da etapa (0+1+2+8)

Fonte: (NELSEN e DE SOUZA, 2012)

No caso das vigas mistas sem escoramentos pós-protendidas as etapas 1 e 2 são invertidas com a reorganização lógica dos carregamentos atuantes em cada uma dessas fases.

A força máxima da protensão é correspondente com as limitações dos materiais e vai ser definida em cada passo de carregamento. Alguns autores propõem uma variação de protensão inicial e final instantâneas de praticamente uns 15%, isso pode ser gerado por: fluência do concreto, retração do concreto, fricção nos desviadores instalados na alma da viga, acomodação das ancoragens da viga ou por variação brusca na temperatura ambiente (maior a 15 °C).

## 2.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nas pesquisas consultadas sobre simulações numéricas de vigas mistas protendidas existem dois enfoques principais da fase não linear para levar adiante a simulação e efetuar uma análise efetiva:

- **Equilíbrio de forças e compatibilidade de deformações em cada seção da viga mista protendida**, qualificado por Saadatmanesh et al. 1989 apud (LORENC e KUBICA, 2006) como complexo e pouco prático quando se pretende aplicar modelos de elementos finitos para sua análise.
- **Equilíbrio da energia do sistema estrutural via o PTV**, pois a tensão no cabo de protensão controla a capacidade última de resistência do elemento e depende dos deslocamentos globais da estrutura, durante todo o processo de carregamento (DALL'ASTA e ZONA, 2005).

Normalmente nas simulações que seguem o segundo enfoque quando se modela o concreto e o aço, se usam elementos finitos similares aos empregados no código computacional desenvolvido por (TAMAYO, 2011) e para os cabos de protensão, simplesmente, elementos de treliça.

Para efetuar a simulação, há dois problemas principais que devem ser solucionados: o primeiro é escrever as condições de equilíbrio de forma algébrica simples e, o segundo, aplicar um método de análise não linear adequado, que descreva de modo adequado o fenômeno. (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2007)

Para aplicar o PTV, que vai determinar o equilíbrio, as forças internas consideradas são aquelas geradas pelas seguintes solicitações: Momento devido ao carregamento externo e o momento secundário devido à protensão do cabo. Essas duas ações formam o momento que atua sobre a viga. (NIE et al. 2011)

A análise de vigas protendidas por cabos externos envolve muitas dificuldades. Entre essas pode-se citar o desacoplamento dos deslocamentos locais dos cabos e as deformações globais na viga, relacionadas somente nos desviadores e nas ancoragens, durante a sequência de construção do elemento. Isso faz com que o mais aconselhável, para as equações de equilíbrio, é serem enunciadas desde o ponto de vista dos trabalhos virtuais de forma global no elemento, como já foi dito, o que vai significar a consideração de um estado de tensões unificado (DALL'ASTA e DEZI, 1998). Para a simplificação da análise, alguns autores supõem que o problema mantém simetria em relação ao seu eixo vertical da seção transversal, pois normalmente as seções usadas apresentam perfeita simetria com respeito a esse eixo. A instalação de desviadores no vão da viga tem o objetivo de manter a excentricidade do cabo constante durante o processo de deformação da viga, para aproveitar melhor o efeito de compressão que gera o cabo no elemento. (DALL'ASTA e ZONA, 2005)

Nas vigas mistas protendidas, o mecanismo de falha depende de três fatores: geometria do elemento, propriedades dos materiais e da tensão do cabo. No Estado Limite Último, a falha é controlada pela não linearidade do material e em alguns casos também pela não linearidade geométrica. Estudos científicos recentes mostram a relevância dos efeitos geométricos na quantificação do carregamento último, quando existe variação de excentricidade do cabo, em relação ao eixo neutro da viga, e pode-se observar que a consideração desses efeitos no colapso de uma viga mista protendida, gera uma excentricidade extra, cuja magnitude vai depender da altura e do comprimento do elemento, sendo interessante observar que o cabo de protensão pode seguir atuando em fase elástica quando o resto da estrutura já está se comportando de modo plástico. (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2007)

O estudo com mais detalhe do comportamento da viga na fase não linear é o objetivo do desenvolvimento das simulações numéricas realizadas atualmente, pois o comportamento na fase elástica é facilmente entendido e identificado. (LORENC e KUBICA, 2006)

No processo incremental da carga se identificam três pontos críticos e interessantes:

- **Carga de fissuração**, a rigidez na viga é suposta constante até que o concreto fissurar. Como o incremento da força na fase antes da aparição das fissuras, é relativamente pequeno a tensão inicial no cabo pode ser considerada como a tensão de fissuração. (NIE et al. 2011)
- **Carga de escoamento**, a tensão no cabo vai ser a mesma tensão inicial de protensão mais um incremento de tensão que gera um comportamento inicial de escoamento da viga de aço. A relação entre a tensão no cabo e o carregamento externo nesta fase, ainda, é linear.

- **Carga Última**, nessa fase vários autores aceitam a aparição de rótulas plásticas na viga, para simplificar o modelo, outros autores admitem o deslocamento diretamente como o triplo do incremento na fase de carga de escoamento, e continuam com o uso da análise linear.

Os pontos de análise mencionados na evolução dos incrementos de carga são indispensáveis para fazer um dimensionamento correto. (NIE *et al.* 2011)

## 2.3 DESCRIÇÃO DO MODELO ANALÍTICO

### 2.3.1 Leis Constitutivas dos Materiais Usados no Modelo Numérico

#### 2.3.1.1 Lei Constitutiva do Concreto

Para modelar o concreto em compressão utiliza-se a teoria de plasticidade associada que permite uma idealização eficaz do comportamento não linear do concreto. No estabelecimento das relações constitutivas de tipos incrementais, associados ao modelo elasto-plástico com endurecimento linear é preciso conhecer as seguintes leis: (i) lei que estabelece a condição de plastificação; (ii) a lei de plastificação e (iii) a lei de endurecimento (TAMAYO, 2011).

- O critério de Plastificação é associado à definição de duas superfícies que separam os diversos comportamentos do modelo de concreto considerado. Essas superfícies são: (i) superfície de plastificação inicial, que determina o início da deformação plástica; (ii) a superfície de plastificação limite que separa o estado de endurecimento não linear com o estado de comportamento elasto-plástico perfeito (TAMAYO, 2011).

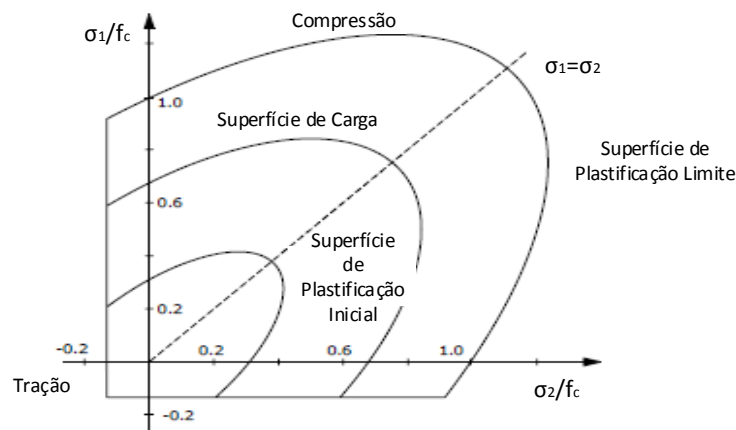
As duas superfícies são definidas em base aos invariantes de tensões  $I_1$  e  $J_2$  (sendo  $I_1$  é o 1º invariante do tensor de tensões e  $J_2$  é o 2º invariante do tensor das tensões desviadoras) sendo expressas pela função da equação 2.4, que corresponde a uma variação do Critério de Drucker Prager.

$$f(I_1, J_2) = 3(3J_2\beta + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_0 \quad (2.4)$$

A função definida, quando associada com o critério de tensão máxima, define o espaço de tensões no concreto. Na equação 2.4,  $\sigma_0$  é a tensão efetiva equivalente considerada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial,  $\alpha=0,355$  e  $\beta=1,355$  são parâmetros do material obtidos a partir de resultados experimentais de (Kupfer, 1969) apud (TAMAYO, 2011). Quando a superfície de plastificação inicial é atingida e a carga incrementada, o processo

elasto-plástico se inicia com a expansão das superfícies em concordância com a lei de endurecimento adotada. Depois de atingida a superfície limite de plastificação, o comportamento é elasto-plástico perfeito até que a condição de fratura do concreto em compressão é verificada, pela condição de ruptura por compressão.

Na figura 2.3 se apresenta o critério modificado de Drucker Prager no espaço das tensões principais ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). O valor médio da resistência à compressão uniaxial do concreto é expresso como  $f_c$ .



Fonte: (TAMAYO, 2011) Adaptado pelo autor

Figura 2.3 Superfície de plastificação definida no espaço das Tensões Principais

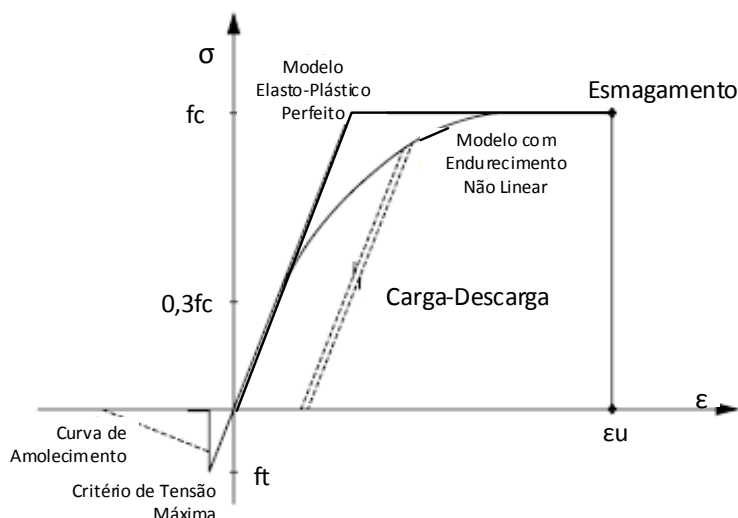
A Lei de plastificação, relaciona os incrementos nas deformações plásticas com as componentes do vetor de tensões que o material está sujeito. Esta relação é definida pela equação 2.5

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

em que  $d\lambda$  é a constante de proporcionalidade que determina a magnitude do incremento de deformação plástica e o gradiente da função de escoamento em relação às componentes da tensão, que define sua direção perpendicular à superfície de plastificação atual.

A Lei de Endurecimento define o movimento da superfície de plastificação conforme a deformação plástica se incrementa. A definição desta lei a partir dos valores de tensão e deformação plástica efetiva, permite extrapolar a partir de um espaço multiaxial, um caso uniaxial. A figura 2.4 apresenta o modelo elasto-plástico perfeito com endurecimento não linear junto com o critério de tensão máxima. Essa representação é possível porque se definiram os valores de tensão e deformação plástica efetivas.





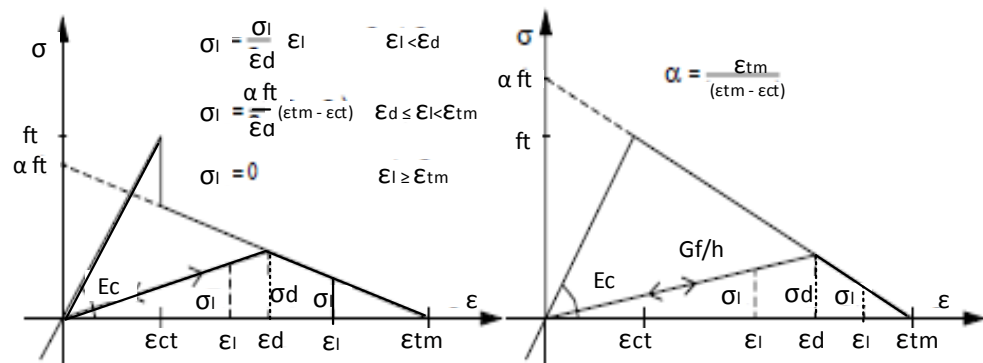
Fonte: (TAMAYO, 2011)

Figura 2.4 Representação Unidimensional do diagrama Tensão Deformação para o Concreto

O Critério de ruptura por compressão no concreto em compressão, para um estado multiaxial de tensões, é considerado simplesmente convertendo o critério de plastificação descrito em termos das tensões diretamente em deformações, de acordo com Figueiras e Povoas (1994) apud (TAMAYO, 2011).

O concreto em tração (Figura 2.5) é idealizado com base no conceito de fissuração distribuída. Basicamente, este tipo de aproximação considera a fissuração distribuída na zona de influência associada ao ponto representativo do material. Neste modelo necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissuração, sem necessidade de modificar a malha de elementos finitos original. Esta idealização é formulada considerando o critério de tensão máxima, que define a superfície de fratura por tração do concreto. Neste modelo é permitida a formação de duas fissuras ortogonais entre si, para cada ponto do material. A aderência, estabelecida entre o concreto e a armadura, é responsável pela capacidade de retenção de tensões normais de tração atribuída ao concreto fissurado (TAMAYO, 2011).

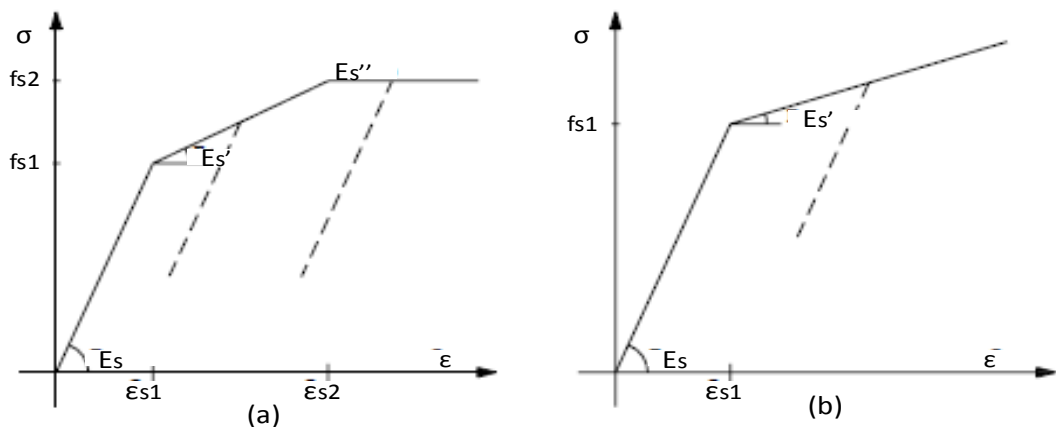
Na figura 2.5,  $f_t$  é a resistência máxima à tração do concreto,  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto,  $\epsilon_{ct}$  é a deformação correspondente a  $f_t$ ,  $\epsilon_{tm}$  é a deformação máxima considerando o grau do mecanismo de aderência entre o concreto e a armadura dependente de um parâmetro  $\alpha$  (0,5-0,7). No gráfico do lado direito,  $\epsilon_{tm}$  é calculado em função da energia de fratura  $G_f$  e da espessura da laje de concreto ( $h$ ).



Fonte: Tamayo, 2011

Figura 2.5 Diagrama de retenção de Tensões no Concreto Fissurado

Nas estruturas de concreto, as barras de aço resistem fundamentalmente às forças axiais. Deste modo, faz-se necessário só considerar modelos uniaxiais para descrever o comportamento do material. No modelo computacional desenvolvido, implementou-se um diagrama tensão-deformação bi-linear ou tri-linear para o aço convencional (Figura 2.6) selecionados conforme vários códigos de projeto. Na Figura 2.6,  $E_s$  é o módulo elástico do aço,  $E'_s$  é a inclinação do 2º tramo da curva e  $E''_s$  é a inclinação no 3º tramo. A descarga pode acontecer, seguindo a inclinação inicial  $E_s$  da curva (OWEN e HINTON, 1980).



Fonte: (TAMAYO, 2011)

Figura 2.6 Diagrama Tensão deformação para o aço a) Trilinear e b) bilinear

### 2.3.1.2 Lei Constitutiva do Aço Estrutural

Para formular a teoria que modela a deformação elasto-plástica do aço, três requerimentos são necessários:

- i) Formulação da relação constitutiva elástica

- ii) Definição do critério de escoamento
- iii) Postulação da relação entre as tensões e as deformações depois do escoamento

Com relação ao critério de escoamento deve-se estabelecer uma superfície de escoamento para definir o fluxo plástico do material. Diferente do concreto, o espaço de tensões do aço estrutural fica definido pela mesma função de escoamento para tensões em tração e compressão. Nesse trabalho empreg-se o critério de von Mises:

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta)^{1/2} = \sigma_0 \quad (2.6)$$

sendo  $I_1$  é o 1º invariante do tensor de tensões e  $J_2$  é o 2º invariante do tensor das tensões desviadoras.

A figura 2.7 ilustra o critério de escoamento no espaço das tensões principais. Quando a superfície de escoamento inicial é atingida e a carga incrementada, o processo elasto-plástico começa com a expansão da superfície segundo um comportamento linear (TAMAYO, 2011). Considerando o aço também como um material com endurecimento isotrópico, a evolução da superfície de escoamento é monitorada extrapolando o caso de tensões multiaxiais ao caso uniaxial.

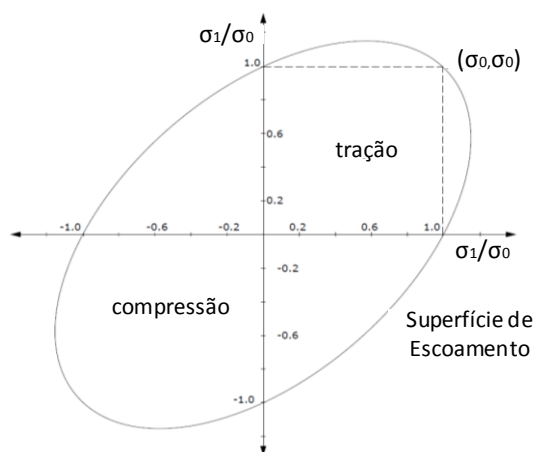


Figura 2.7 Superfície de Escoamento Definida no espaço das Tensões Principais

### 2.3.1.3 Lei Constitutiva dos Conectores

Para modelar os conectores é necessário conhecer a curva força-deslocamento relativo para simular a variação da rigidez do conector com o incremento da força de corte. Esta relação é meramente experimental, mas é possível estabelecer um ajuste de cada uma destas

curvas mediante uma equação exponencial que depende de dois parâmetros  $a$  e  $b$ , conforme a equação 2.7

$$F_{\alpha} = a[1 - e^{-bs_{\alpha}}] \quad (2.7)$$

em que  $F_{\alpha}$  é a força de corte atuante no conector na direção  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$  são constantes que definem o tamanho e a forma da curva e  $s_{\alpha}$  é o deslocamento relativo associado à direção  $\alpha$ .

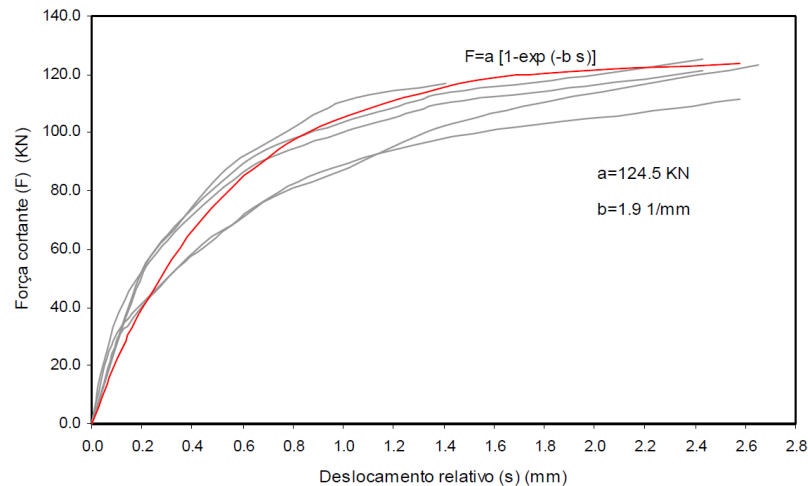


Figura 2.8 Ajuste de curvas Experimentais segundo o modelo Exponencial da Eq.2.7

As leis constitutivas definidas para os materiais que compõem os elementos da viga mista antes de ser incluso o módulo de protensão no programa V.M. foram todas definidas em (TAMAYO, 2011).

## 2.3.2 Elementos Finitos

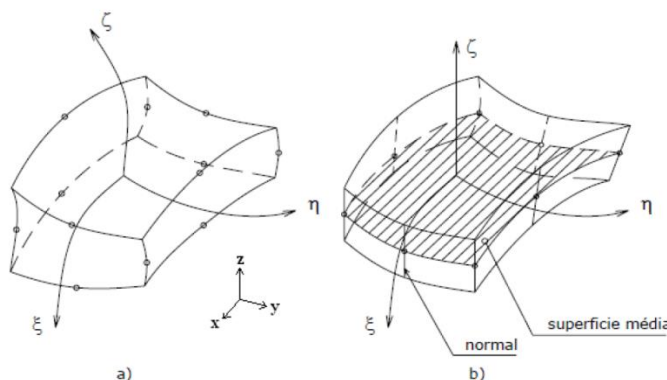
### 2.3.2.1 Elemento empregado para modelar o Concreto Reforçado

Para representar a laje de concreto armado emprega-se um elemento de casca degenerada que resulta de um elemento tridimensional com funções de forma quadráticas. A figura 2.9 ilustra esses elementos. No desenvolvimento desse elemento são consideradas duas hipóteses básicas.

- Camadas grossas retas, normais à superfície, permanecem praticamente retas depois da deformação.
- A energia de deformação correspondente à tensão perpendicular à superfície média do elemento finito não é considerada.

Cada nó do elemento de casca tem 5 graus de liberdade, sendo três deslocamentos e duas rotações. A definição da independência entre deslocamentos e rotações permite a

consideração das componentes transversais de corte. As considerações anteriores são equivalentes a usar a Teoria Geral de Placas de Reissner & Mindlin. Foram definidos diferentes sistemas de coordenadas para implementação desse elemento, o que foi necessário devido ao modelo de camadas usado.



Fonte: (DIAS, 2013)

Figura 2.9 a) Elemento Tridimensional Sólido Quadrático b) Elemento de Casca Degenerada

Basicamente o elemento de casca degenerada empregado para modelar o concreto (Figura 2.9) é um elemento quadrilátero de oito nós, que emprega funções de forma do tipo Serendipity e usa um esquema de integração  $2 \times 2$ . No código desenvolvido o fenômeno de *Shear Locking* (Travamento por Corte) típico neste tipo de elemento foi evitado com a consideração de um fator que acompanha os termos de corte fora do plano e também em parte pela integração reduzida (TAMAYO, 2011). Esse elemento é composto por uma série de camadas que podem ser de diferentes materiais, sendo as propriedades e as tensões funções descontínuas. Em razão disto, uma integração através das camadas é necessária sendo a distribuição das tensões na direção da espessura conhecida em um número adequado de pontos TAMAYO (2011) adotou uma regra de integração retangular simples para os pontos de Gauss nas camadas. A representação da armadura é feita por um modelo distribuído, no qual as camadas possuem as propriedades do aço com uma espessura equivalente à área de armadura da seção transversal. Este modelo é bastante indicado no caso de estruturas de placas ou cascas. Tanto a posição da armadura quanto a sua espessura são consideradas adimensionais. Neste elemento a armadura pode ser definida em sentido transversal ou longitudinal em relação à viga mista conforme figura 2.10.

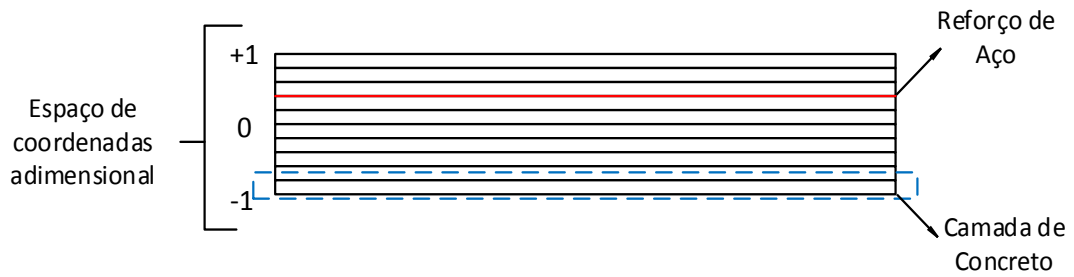


Figura 2.10 Esquema em camadas do elemento finito empregado para o Concreto Armado

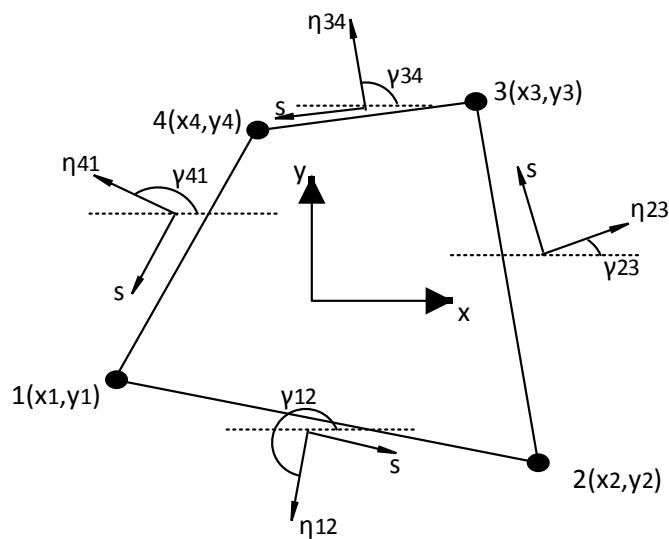
Para a obtenção da matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes do elemento de concreto se usou o PTV enunciado na equação 2.8.

$$\iiint_{r^e} \delta \varepsilon' \sigma' dV = \iiint_{r^e} \delta u^T b dV + \iint_{s^e} \delta u^T t dS + \sum_{i=1}^n \delta u^T q^e \quad (2.8)$$

Nesta equação o primeiro termo representa o trabalho virtual interno em função das tensões e as deformações locais e o segundo termo representa o trabalho virtual externo, das forças de volume, forças superficiais distribuídas e as forças pontuais, agindo sobre o elemento.

### 2.3.2.2 Elemento empregado para modelar Perfil de Aço

O elemento finito para a modelagem da viga de aço seção I é obtido como resultado da combinação do elemento de membrana proposto por Ibrahimbegovic et al. (1990) apud (TAMAYO, 2011) e o elemento de placa proposto por Batoz & Tahar (1982) apud (TAMAYO, 2011).



Fonte: Tamayo, 2011 Adaptado pelo autor

Figura 2.11 Elemento Finito de Placa

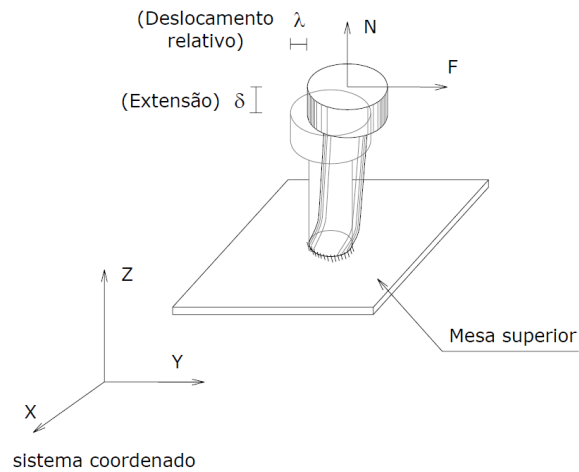
O elemento quadrilátero de placa mostrada na Figura 2.11 é eficiente para a representação da parte de flexão dos elementos de casca. Trata-se do conhecido elemento DKQ desenvolvido por Batoz & Tahar (1982) apud (TAMAYO, 2011) aplicando as hipóteses de Kirchhoff para placas delgadas. Considerando que o plano médio do elemento encontra-se no plano  $xy$ , os graus de liberdade em cada nó do elemento podem ser descritos como o deslocamento transversal  $w$ , na direção normal ao plano  $xy$  e as rotações no plano  $\theta_x$  e  $\theta_y$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente. O elemento de membrana acrescenta o deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  bem como rotação em torno ao eixo  $z$ . Devido ao acoplamento existente entre as deformações de extensão, torção e flexão pertinentes aos materiais laminados se faz necessária a existência da matriz de acoplamento. Uma integração Gauss-Legendre  $3 \times 3$  é utilizada sobre a área do elemento e uma mesma regra de integração com cinco pontos é aplicada ao longo da espessura.

Na análise elástica de placas, os termos das diagonais são zero, logo os campos de flexão e membrana ficam sem acoplamento, então a matriz de rigidez é uma simples superposição das matrizes de rigidez de membrana e flexão. É importante destacar que para a análise não linear do material, os termos fora da diagonal devem ser considerados para garantir a convergência do procedimento não linear de Newton Raphson. Para a obtenção da matriz de rigidez é aplicado o PTV.

É importante destacar que o elemento implementado no código desenvolvido permite analisar perfis metálicos que sejam compactos, pois não é considerada a possibilidade de falha por flambagem local da alma.

### 2.3.2.3 Elemento para modelar os Conectores

Os conectores de corte tipo “stud” são modelados no presente trabalho como elementos tridimensionais de barra, elemento viga-coluna, os quais unem os planos médios da laje de concreto e da mesa superior da viga de aço. O comprimento desta barra, em geral, é aproximado ao valor real do comprimento do conector. A malha de elementos finitos da viga mista no sentido longitudinal é construída em função da distribuição real dos conectores, de forma que a localização destes coincida com os nós dos respectivos elementos principais. A figura 2.12 mostra um conector de corte típico antes e depois da deformação. É considerado que este elemento transfere principalmente a força axial aplicada  $N$  e a força de corte  $F$ , por deformações axiais e de corte, podendo estar solicitado ao cortante nas duas direções ortogonais no plano da sua seção transversal.



Fonte: (TAMAYO, 2011)

Figura 2.12 Conector antes e depois da deformação

O modelo analítico é completado com os elementos do cabo de protensão e o elemento de interface instalado nos desviadores. Como esses elementos foram desenvolvidos nesse trabalho, os mesmos são descritos com maior detalhe, nos próximos dois capítulos.



### 3 ELEMENTO FINITO PARA O CABO DE PROTENSÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Os cabos são elementos muito flexíveis capazes de resistir apenas solicitações normais de tração, praticamente não tem nenhum tipo de resistência à flexão. Em problemas estruturais, são frequentemente utilizados para transmitir cargas de um elemento a outro. Dependendo do sistema estrutural o peso do cabo pode ser ou não considerado. Os métodos para sua análise estão baseados na divisão de equações de equilíbrio e resolução de sistemas não lineares de equações (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981).

Os cabos tem sempre um comportamento geométrico não linear, comportamento que ganha importância em relação ao grau de curvatura do elemento. O modelamento deste tipo de elemento tem uma aplicação muito grande no dimensionamento e na análise das estruturas onde os cabos fazem parte, por exemplo; pontes suspensas, linhas de transmissão ou elementos de protensão de vigas ou colunas (Figura 3.1) As formulações existentes de cabos podem descrever uma forma, sob ação do peso próprio, de parábola ou de catenária.



Figura 3.1 Pontes Suspensas, Torres de Alta tensão e Vigas Protendidas

O elemento mais comum para o modelamento de cabos é o de dois nós, que normalmente tem forma de catenária elástica, podendo ser usado para modelar cabos com

grandes ou pequenas curvaturas. Foi observado que esse elemento tem um melhor comportamento quando existe algum tipo de protensão no cabo.

Devido à natureza não linear do fenômeno, os efeitos da flexibilidade e grandes deformações devem ser considerados para o estabelecimento das equações de equilíbrio. Desse modo o problema pode ser abordado de duas maneiras diferentes:

- Usando funções de interpolação com elementos finitos. A principal desvantagem desse método é a perda de continuidade na concavidade quando são usados muitos elementos.
- Aplicando expressões analíticas exatas que descrevem a forma de equilíbrio exata do cabo assumida, por exemplo, uma catenária elástica. Esta abordagem permite um melhor modelamento do elemento, e tem aplicabilidade em cabos com grandes ou pequenas deflexões. Neste tipo de aproximação, as equações de equilíbrio e a matriz de rigidez devem apresentar maior estabilidade numérica, quando comparadas com as aproximações que usam funções de interpolação. (ANDREU, GIL e ROCA , 2006)

Na pesquisa bibliográfica observou-se que os cabos de protensão são normalmente modelados por elementos de treliça, já que os mesmos apresentam pequena curvatura. Nesse contexto decidiu-se também implementar um elemento de catenária, que admite grandes curvaturas, a fim de verificar a influencia dessa consideração nos exemplos analisados.

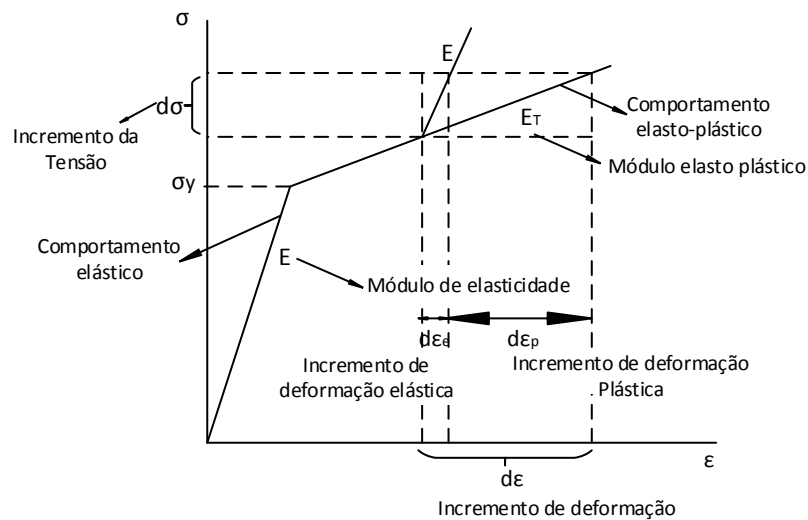
Entre as principais vantagens numéricas do uso do elemento de catenária na modelagem de cabos estão: número de graus de liberdade reduzido, consideração exata dos efeitos não lineares durante todo o processo de equilíbrio, peso próprio do cabo é considerado sem nenhuma aproximação (THAI e KIM, 2011). Entre as desvantagens tem-se: a instabilidade numérica do elemento mesmo derivado de expressões numéricas exatas, provocada pelo grau de não linearidade do problema (COARITA e FLORES, 2015).

No artigo que propôs o elemento catenária não foi considerada a não linearidade do material, a qual foi implementada nesse trabalho. Cabe destacar o objetivo final da implementação do elemento é observar o efeito que teria numa viga mista se é usado como cabo de protensão externa, além de poder ser usado como uma ferramenta útil para futuras investigações.

## 3.2 DESCRIÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

Devido ao processo incremental de tensões nos cabos de protensão, existe a possibilidade de que estes atinjam o escoamento do material na fase de carregamento último,

pois o incremento de tensões nessa fase de carregamento é substancial (Chen & Gu, 2005). É por isso que no modelo constitutivo do material dos dois elementos de cabo (treliça e catenária) considerou-se a não linearidade do material. O comportamento do elemento é uniaxial então a lei de escoamento é um diagrama de deformação uniaxial, conforme vários códigos de projeto. Adatou-se um modelo bilinear, Figura 3.2, para representar a relação  $\sigma$ - $\epsilon$  do cabo de protensão.



**Fonte: (OWEN e HINTON , 1980) Adaptado pelo autor**

Figura 3.2 Diagrama Bi linear Uniaxial de Comportamento do Material

$\sigma_y$ : Tensão de Escoamento

Como pode ser observado na Figura 3.2, a deformação total de um elemento, depois de atingir a deformação de escoamento, tem duas componentes uma plástica e outra elástica. As inclinações em cada um desses setores da curva tensão-deformação são diferentes, o que significa que as rigidezes do elemento são diferentes. Então tem que ser definido um parâmetro de endurecimento  $H'$  conforme equação 3.1.

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon_e} = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (3.1)$$

Lembrando que, a rigidez elástica do cabo é a força axial  $F$  sobre o deslocamento  $\delta$  por deformação que se gera no corpo, pode-se escrever a equação 3.2.

$$K_s = \frac{F}{\delta} \quad (3.2)$$

Logo, pode ser inferido que a rigidez do elemento na fase plástica é definida como:

$$K_{\varepsilon p} = \frac{dF}{d\delta} = \frac{d\sigma A}{(d\varepsilon_e + d\varepsilon_p)L} = \frac{AH'd\varepsilon_p}{\left(\frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon_p\right)L} \quad (3.3)$$

que pode ser reescrita, após algumas operações, como:

$$K_{\varepsilon p} = \frac{AE}{L} \left( 1 - \frac{E}{E + H'} \right) \quad (3.4)$$

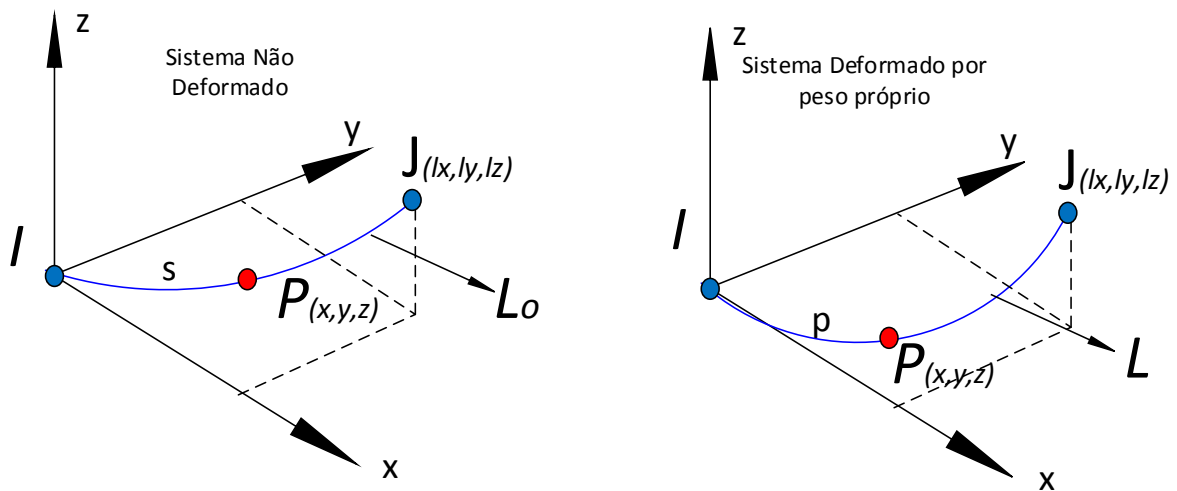
O cálculo do incremento da tensão axial do aço do cabo de protensão é alcançado a partir dos carregamentos externos atuantes. Obtidos os incrementos de tensões, um algoritmo Preditor-Corretor Elasto-plástico é usado para satisfazer a lei constitutiva mostrada na Figura 3.2.

### 3.3 MODELO PARA CABO VIA ELEMENTOS FINITOS

#### 3.3.1 Elemento Catenária

As hipóteses consideradas na formulação do elemento especial de catenária são: a área da seção transversal do elemento é constante antes e depois da deformação axial acontecer, o elemento é perfeitamente flexível e somente resiste quando solicitado em tração, por último, existe conservação de massa depois do processo de deformação pela variação do peso próprio por unidade de comprimento.

A formulação proposta para o elemento é Lagrangiana. Considera um comprimento inicial do elemento  $L_0$  definido entre dois pontos fixos I e J, os quais têm coordenadas cartesianas  $(0,0,0)$  e  $(l_x, l_y, l_z)$  respectivamente conforme ilustrado na figura 3.3.



Fonte: (COARITA e FLORES, 2015) Adaptado pelo autor

Figura 3.3 Sistema de coordenadas do elemento de catenária

Considerando agora um ponto P interno do elemento de cabo, logo depois que o cabo é deformado pelo peso próprio  $wL_o$  (sendo  $w$  o peso linear) a nova posição do ponto P é definida pelas coordenadas cartesianas  $(x,y,z)$  e o lagrangiano  $p$  (trata-se de uma coordenada curvilínea com origem no ponto I e medida sobre o cabo deformado), o qual relaciona um segmento definido entre a origem I e o ponto na geometria deformada, que corresponde ao ponto P na geometria original, segundo Pallares e Rodriguez apud (COARITA e FLORES, 2015). Estabelecidas as coordenadas dos pontos I e P, a busca de equilíbrio é atingida pelo balanço das forças nos extremos e deve cumprir com a condição geométrica da equação 3.5, na qual cada um dos fatores representa o cosseno diretor do elemento catenária deformado em relação ao eixo de referência correspondente.

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = 1 \quad (3.5)$$

As coordenadas  $(x,y,z)$ ,  $s$  e  $p$  nos extremos fixos I e J ficam definidas pela equação 3.6, na qual  $L$  corresponde ao comprimento do elemento de catenária deformado e  $s$  é uma coordenada curvilínea que acompanha a geometria não deformada do cabo conforme ilustrado na figura 3.3.

$$\begin{aligned} x = 0; y = 0; z = 0; p = 0 \text{ em } s = 0 \\ x = l_x; y = l_y; z = l_z; p = L \text{ em } s = L_o \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então o lagrangiano  $p(s)$  e as coordenadas cartesianas estão relacionadas como apresentado na equação 3.7

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_s \frac{dx}{ds} ds = \int_s \frac{dx}{dp} \frac{dp}{ds} ds \\ y(s) &= \int_s \frac{dy}{ds} ds = \int_s \frac{dy}{dp} \frac{dp}{ds} ds \\ z(s) &= \int_s \frac{dz}{ds} ds = \int_s \frac{dz}{dp} \frac{dp}{ds} ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, sendo a relação entre o lagrangiano e a força de protensão axial no cabo  $T$  definida pela equação 3.8

$$T = EA \left( \frac{dp}{ds} - 1 \right) \quad (3.8)$$

Depois de integrar as expressões da equação 3.7 em função de  $s$ , aplicar as condições de contorno da equação 3.6 e a equação 3.8, obtém-se as equações 3.9, 3.10 e 3.11 que

apresentam as projeções do cabo em cada um dos eixos globais em função das forças do nó inicial i.

$$l_x = -\frac{F_1 L_o}{EA} - \frac{F_1}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} + wL_o - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (3.9)$$

$$l_y = -\frac{F_2 L_o}{EA} - \frac{F_2}{w} \left\{ \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} + wL_o - F_3 \right) - \ln \left( \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} - F_3 \right) \right\} \quad (3.10)$$

$$l_z = -\frac{F_3 L_o}{EA} + \frac{wL_o^2}{2EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + (wL_o - F_3)^2} - \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \right\} \quad (3.11)$$

sendo  $E$  o Módulo de Elasticidade do Material,  $A$  a Área da seção Transversal do cabo e  $F_{1,2,3}$  representam as componentes da força do extremo inicial I do elemento catenária (ver figura 3.4). Como as projeções ( $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ ) são expressas pelas forças nos extremos do elemento, essas podem ser expressas em pequenos incrementos aplicando uma aproximação de primeira ordem pode-se dizer que,

$$dl_x = \frac{\partial l_x}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_x}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_x}{\partial F_3} dF_3 \quad (3.12)$$

$$dl_y = \frac{\partial l_y}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_y}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_y}{\partial F_3} dF_3 \quad (3.13)$$

$$dl_z = \frac{\partial l_z}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial l_z}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial l_z}{\partial F_3} dF_3 \quad (3.14)$$

O sistema pode ser expressado em forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

em que  $F$  é a matriz incremental de flexibilidade cujas componentes  $f_{ij}$  são definidas pelas equações 3.16 a 3.21.

$$f_{11} = -\left( \frac{L_o}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{T_j + F_6}{T_i - F_3} \right) + \frac{F_1^2}{w} \left( \frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)} \right) \quad (3.16)$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{F_1 F_2}{w} \left( \frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)} \right) \quad (3.17)$$

$$f_{13} = f_{31} = \frac{F_1}{w} \left( \frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i} \right) \quad (3.18)$$

$$f_{22} = -\left(\frac{L_o}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{T_j + F_6}{T_i - F_3}\right) + \frac{F_2^2}{w} \left(\frac{1}{T_i(T_i - F_3)} + \frac{1}{T_j(T_j - F_6)}\right) \quad (3.19)$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{F_2}{w} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{1}{T_i}\right) \quad (3.20)$$

$$f_{33} = -\frac{L_o}{EA} - \frac{1}{w} \left(\frac{F_6}{T_j} + \frac{F_3}{T_i}\right) \quad (3.21)$$

Nas quais  $T_i$  e  $T_j$  são as resultantes da força no cabo nos nós I e J respectivamente. As forças  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, T_i$  e  $T_j$  têm as relações expressas nas equações 3.22 a 3.26.

$$F_4 = -F_1 \quad (3.22)$$

$$F_5 = -F_2 \quad (3.23)$$

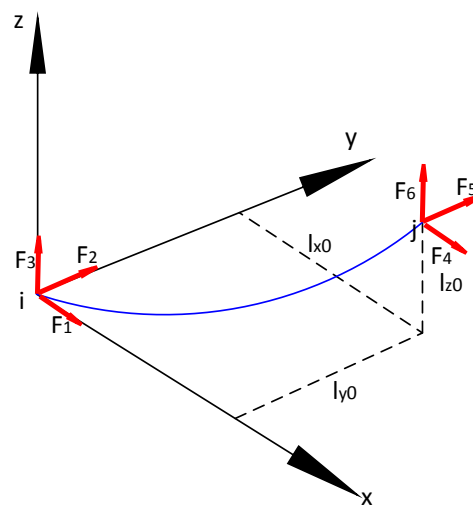
$$F_6 = -F_3 + wL_o \quad (3.24)$$

$$T_i = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \quad (3.25)$$

$$T_j = \sqrt{F_4^2 + F_5^2 + F_6^2} \quad (3.26)$$

Nessas expressões  $F_{4,5,6}$  são as componentes da força no extremo do cabo J (ver figura 3.4),  $T_i$  é a resultante da força de protensão no nó inicial I e  $T_j$  é a resultante da força de protensão no nó final J.

A Figura 3.4 mostra as forças nos extremos de um segmento de cabo depois da convergência.



Fonte: (COARITA e FLORES, 2015)

Figura 3.4 Elemento catenária depois da convergência

A sub-matriz de rigidez  $K_c$  é obtida da inversa da sub-matriz de flexibilidade  $F$  apresentada na equação 3.15. Já a matriz de rigidez tangente  $K_{ct}$  do elemento catenária é representada pela equação 3.27. cabe destacar que o elemento resultante apresenta 6 graus de liberdade

$$K_{ct} = \begin{bmatrix} -K_c & K_c \\ K_c & -K_c \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

O vetor de forças internas é definido por:

$$f_{int} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6\}^T \quad (3.28)$$

Para determinar a matriz de rigidez tangente, primeiro deve-se estimar as forças no nó I ( $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ). Para fazer isso é necessário definir uma estimativa inicial como sugerido em (COARITA e FLORES, 2015):

$$F_1 = -\frac{wl_x}{2\lambda} \quad F_2 = -\frac{wl_y}{2\lambda} \quad F_3 = -\frac{w}{2} \left( -l_z \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L_o \right) \quad (3.29)$$

sendo

$$\lambda = \begin{cases} 10^6 & \text{se } l_x^2 + l_y^2 = 0 \\ 0,2 & \text{se } L_o^2 \leq (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) \\ \sqrt{3 \left( \frac{L_o^2 - l_z^2}{l_x^2 + l_y^2} - 1 \right)} & \text{se } L_o^2 > (l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) \end{cases}$$

No primeiro passo os dados conhecidos são as coordenadas do ponto J ( $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ ) que são usadas diretamente na expressão 3.29. Para o passo seguinte, são calculadas novas coordenadas ( $l_{x0}$ ,  $l_{y0}$ ,  $l_{z0}$ ) conforme equações 3.9 3.10 e 3.11, as quais devem ser comparadas com as coordenadas do nó J ( $l_x$ ,  $l_y$ ,  $l_z$ ). O vetor diferença entre essas coordenadas é determinado por  $\Delta L = \{(l_{x0}-l_x) \ (l_{y0}-l_y) \ (l_{z0}-l_z)\}^T$ , cujo módulo deve ser menor que uma tolerância requerida (da ordem de  $10^{-4}$ ). Quando a tolerância não é atingida, a aproximação das forças do nó I é corrigida usando o vetor diferença  $\Delta L$  como:

$$\begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{bmatrix} = K_c \begin{bmatrix} \Delta l_x \\ \Delta l_y \\ \Delta l_z \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

A matriz de rigidez tangente  $K_c$ , corresponde a matriz da equação 3.15, sendo as forças atualizadas segundo a equação 3.31,



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Apresenta-se a seguir o algoritmo detalhado desse procedimento.

Passo 1- Dados iniciais, das coordenadas dos nós I( $x_i, y_i, z_i$ ) e J( $x_j, y_j, z_j$ ), propriedades físicas (E, A, w,  $L_0$ ) e a tolerância (tol).

Passo 2 – Calculam-se as coordenadas relativas entre os nós I e J:  $l_{x0}=x_j-x_i$ ,  $l_{y0}=y_j-y_i$  e  $l_{z0}=z_j-z_i$ .

Passo 3 – São calculados os valores iniciais das forças no nó I usando a equação 3.29.

Passo 4 – Atualizam-se as coordenadas relativas ( $l_x, l_y, l_z$ ) do nó J usando as equações 3.9, 3.10 e 3.11 com os valores das forças atualizados.

Passo 5 – Cálculo do vetor diferença  $\Delta L = \{(l_{x0}-l_x) (l_{y0}-l_y) (l_{z0}-l_z)\}^T$

Passo 6 – Verificar a tolerância:  $\Delta L < \text{tol}$ . Caso essa condição seja verdadeira, proceder ao cálculo da matriz de rigidez tangente  $K_{ct}$  e do vetor de forças internas  $F_{int}$ . Caso contrario seguir para o próximo passo.

Passo 7 – Calcular o vetor de correção de forças I:  $\Delta F = K_c \Delta L$

Passo 8 – Atualizar as forças para a próxima iteração e voltar para o passo 4.

O processo anteriormente descrito é empregado para definir as forças nos nós do elemento catenária sob ação do peso próprio. Uma vez definida essa geometria, podem ser aplicadas novas cargas no cabo em questão, nesse caso deve-se aplicar o processo de Newton Raphson para solucionar esse novo problema.

### 3.3.2 Elemento Treliça

Segundo o PTV, as equações de equilíbrio que governam o comportamento do elemento podem ser escritas de modo incremental, como expressado na equação (3.32) (YANG e KUO, 1994):

$$\int_V \delta \varepsilon^T E \varepsilon dV + \int_V \delta \eta^T \tau dV + {}^1R = {}^2R \quad (3.32)$$

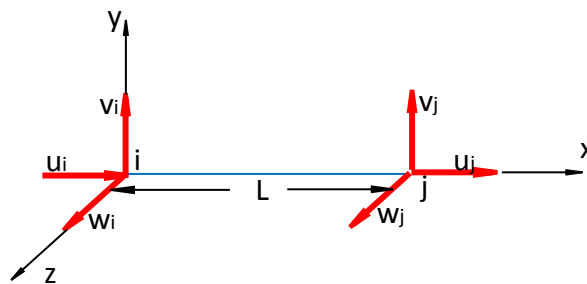
sendo E o módulo de elasticidade do material constitutivo,  $\tau$  o tensor de cauchy inicial,  $\varepsilon$  a deformação de green atualizada,  $\eta$  a componente não linear da deformação,  ${}^1R$  o trabalho virtual das forças externas na configuração anterior e  ${}^2R$  o trabalho virtual das forças externas na configuração posterior.

Quando a deformação do elemento é expressa em seu componente linear ( $\epsilon$ ) e não linear ( $\eta$ ) a equação anterior torna-se,

$$\int_V \delta \epsilon^T E \epsilon dV + \int_V \delta \epsilon^T E \eta dV + \int_V \delta \eta^T E \epsilon dV + \int_V \delta \eta^T E \eta dV + \int_V \delta \eta^T \tau dV + {}^1R = {}^2R \quad (3.33)$$

Para uma treliça espacial (Figura 3.5), o campo de deslocamentos vai estar definido por  $(u,v,w)$  definidos pelos deslocamentos de cada um dos seus dois nós, que estão relacionados pelas funções de interpolação:

$$u = u_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad v = v_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + v_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad w = w_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + w_j \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.34)$$



Fonte: (COARITA e FLORES, 2015)

Figura 3.5 Elemento de Treliça

O equilíbrio do elemento de treliça pode ser expresso como:

$$(k_e + k_g + s_1 + s_2 + s_3)u + {}^1f = {}^2f \quad (3.35)$$

sendo,  $k_e$  a matriz de rigidez elástica,  $k_g$  a matriz de rigidez tangente,  $s_i$  ( $i=1,2,3$ ) são as matrizes de grandes deslocamentos,  $u$  o vetor de deslocamentos,  ${}^1f$  o Vetor de Forças externas configuração anterior e  ${}^2f$  o vetor de forças externas configuração posterior.

As matrizes de rigidez da equação (3.35) são apresentadas nas equações (3.36) até (3.40). A matriz de rigidez elástica do elemento definida no sistema de referencia local é,

$$k_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Quando o comportamento do elemento é plástico o fator  $EA/L$  (coeficiente de rigidez elástico) é substituído pela equação (3.4) (coeficiente de rigidez plástico).

A matriz de rigidez tangente, função de uma força inicial, é definida pela equação (3.37).

$$k_g = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

As equações (3.36) e (3.37) correspondem às matrizes de rigidez do elemento sem levar em consideração os efeitos de grandes deslocamentos.

As matrizes de ordem superior, que consideram os deslocamentos no cálculo da rigidez, são:

$$S_1 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u - \Delta v - \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u - \Delta v - \Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$S_2 = \frac{EA}{2L^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & \Delta v & \Delta w & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$S_3 = \frac{EA}{6L^3} \begin{bmatrix} h & -h \\ -h & h \end{bmatrix} \text{ onde } h = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

em que  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  e  $\Delta w$  são as variações nos deslocamentos  $u, v$  e  $w$ .

Quando é usado o elemento de treliça o procedimento que segue sua implementação é o seguinte:

Passo 1 – A partir dos dados das coordenadas produto da geometria inicial são definidos os comprimentos iniciais  $L_0$  de cada um dos elementos de treliça que compõem a estrutura a ser analisada

Passo 2 – São definidos os vetores de força interna inicial correspondentes a cada elemento definido na configuração inicial do elemento a partir dos dados de entrada do exercício analisado que podem ser o peso próprio  $w$  ou/e a força de protensão inicial  $T_0$  presente no elemento. Desse jeito o vetor de forças internas iniciais da configuração de partida fica:

$$F_{int} = \begin{bmatrix} T_0 c_b \\ T_0 s_a \\ T_0 s_b + wL_o/2 \\ T_0 c_b \\ T_0 s_a \\ T_0 s_b - wL_o/2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

sendo,  $c_b$  e  $s_b$  o cosseno e seno do ângulo do elemento no plano xz,  $s_a$  seno do ângulo que o elemento forma no plano xy.

Passo 3 – Definição da matriz de rigidez inicial do elemento composta pelas matrizes expressas nas equações 3.36 a 3.40 (Todos os valores relacionados com o deslocamento gerado pela solicitação externa são zero).

Passo 4 – Início do processo iterativo incremental de Newton Raphson.

## 4 ELEMENTO DE INTERFACE

Os elementos de interface dividem o espaço entre dois corpos que interagem mecanicamente. A representação do comportamento desses corpos na interface pode ser feita utilizando equações de restrições ou conectando os elementos que interagem através de molas discretas. Alguns pesquisadores consideram que essa interação pode ser modelada através de elementos finitos contínuos, que apresentam planos de ruptura. Também há autores que modelam a interface considerando elementos finitos especiais com dimensões nulas (TAMAYO, 2015). Neste trabalho, emprega-se um elemento de dimensão nula, composto por três molas discretas (Figura 4.1), similar ao proposto em (VECCHIO , GAUVREAU e LIU, 2006). No procedimento aplica-se o método da penalidade, que permite obter um equilíbrio entre eficiência computacional e uma representação adequada dos processos de escorregamento.

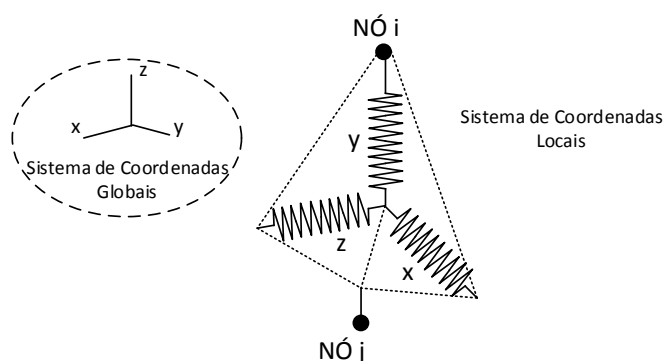


Figura 4.1 Elemento de interface: Esquema indicativo

### 4.1 MÉTODO DA PENALIDADE

O elemento de interface de dimensões nulas é constituído por dois nós com as mesmas coordenadas e utiliza diretamente a ideia de deslocamento relativo conjuntamente com o conceito de tensão - deformação. Quando o método da penalidade é implementado para a solução de um problema de contato entre dois corpos, o resultado vai depender diretamente do valor da penalidade escolhida, com o objetivo de buscar um equilíbrio entre a rapidez do processo computacional e o grau de exatidão que se requer na resposta. Para isso a rigidez do

elemento de contato é escolhida de modo que o problema seja solucionado otimamente (LEE, 1993).

Um problema linear elástico de valor de fronteira com deslocamentos e carregamentos prescritos é equivalente a encontrar um campo de deslocamentos que minimize o potencial de energia do sistema em questão (Equação 4.1)

$$\Pi_k(u) \equiv \frac{1}{2} u^T K u - u^T f \quad (4.1)$$

sendo  $u$  o vetor de deslocamentos  $K$  a matriz de rigidez e  $f$  as forças externas atuantes no sistema estrutural, respectivamente. Quando se trata de descontinuidades locais no campo de deslocamentos, o problema variacional da equação 4.1 deve estar submetido a restrições unilaterais do tipo:

$$g_m^T u_m \geq \gamma_i \quad (4.2)$$

em que o vetor  $g_m$  define os componentes do vetor global de deslocamentos  $u_m$ , que estão em contato entre si e que são submetidas à restrição  $\gamma_i$ . O caso mais simples de correspondência de nós duplos acontece quando  $g$  enlaça dois graus de liberdade com sinal oposto, com o objetivo de calcular a diferença relativa de deslocamento entre esses dois pontos.

A combinação das duas últimas equações produz um sistema altamente não linear. Sendo assim, a aproximação da Penalidade adiciona um termo fictício ao funcional de energia inicial (Equação 4.1) do seguinte modo:

$$\Pi_\varepsilon(u) = \Pi_k(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_m (g_m^T u_m - \gamma_i)^T (g_m^T u_m - \gamma_i) \rightarrow \text{Mínimo} \quad (4.3)$$

A forma quadrática do termo adicional estabelece que a restrição deve ser satisfeita no sentido dos mínimos quadráticos, sendo que o trabalho fictício é definido pela equação 4.4.

$$P_m(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (g_m^T u_m - \gamma_i) \quad (4.4)$$

Esta equação obriga ao cumprimento da restrição inicial  $\gamma_m$  definida no sistema. A violação dos deslocamentos é minimizada para um valor determinado de  $\varepsilon$ , por exemplo a restrição é satisfeita exatamente quando a penalidade tende a infinito o que equivale a ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

A definição da penalidade infinita, mediante um valor finito, regulariza o problema de restrição permitindo portanto, a otimização não restringida dentro de uma faixa ilegítima de interpenetração dos corpos em contato. Desse modo é necessária a definição de rigidezes finitas para a interface. Os parâmetros de penalidade podem ser implementados em elementos especiais de forma similar às relações constitutivas não lineares.

As vantagens do método frente a outras opções, tais como multiplicadores de Lagrange, são:

- 1) Velocidade de convergência ajustável de acordo à violação tolerável de restrição
- 2) Implementação, muito simples em programas existentes
- 3) Não é necessária nenhuma introdução de graus de liberdade adicionais no sistema de equações, por isso, não existe dificuldade nos códigos que apresentam um número padrão de grau de liberdade por nó
- 4) Retenção de um sistema definido positivamente, minimizando a necessidade de realizar trocas nas operações matriciais do programa.

O valor da penalidade precisa ser definido de forma que a interpenetração seja de uma ordem de magnitude menor que a deformação elástica dos corpos em contato, e assim as tensões não são afetadas no meio contínuo. (TAMAYO, 2015)

## 4.2 CARACTERÍSTICAS E FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE INTERFACE IMPLEMENTADO

O elemento de interface, desenvolvido e implementado nesse trabalho, é um elemento linear de dois nós inicialmente coincidentes, cuja matriz de rigidez é similar àquela de uma barra de treliça. Um desses nós é conectado a um elemento da viga de aço e o outro conectado a um elemento do cabo de protensão. O sistema de coordenadas local deste elemento de interface entre a viga e o cabo é rotacionado de  $90^\circ$  em relação ao plano XY global (Figura 4.1). Cada uma das molas ortogonais que compõem o elemento tem somente um grau de liberdade que é o deslocamento no eixo global respectivo, o que significa três graus de liberdade por nó do elemento, os mesmos que o cabo de protensão. Como o sistema de coordenadas local não é o mesmo que o global, transformações padrão são utilizadas para redefinir a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas globais.

As rigidezes das molas são escolhidas segundo os critérios anteriormente expostos (método de Penalidade), no caso das molas correspondentes aos graus de liberdade de deslocamento correspondentes aos eixos locais x e y são adotados coeficientes de penalidade que aproximam rigidezes infinitas obtidas por comparação com os valores da matriz de rigidez global da estrutura (nos problemas estudados tratam-se de valores da ordem de  $10^8$ ). O objetivo é simular uma perfeita aderência nessas duas direções, pois os desviadores instalados geram compatibilidade de deslocamentos, permitindo somente deslocamentos relativos no

sentido longitudinal global que corresponde ao eixo  $z$  local. É importante destacar que nos modelos de elementos finitos implementados por (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2006), (NIE *et al*, 2011), (LORENC e KUBICA, 2006) e (ZONA, RAGNI e DALL'ASTA, 2008) o efeito de atrito nos desviadores não é considerado, gerando-se assim tensão constante em todo o cabo. Na figura 4.2 se apresenta um desenho que apresenta uma viga mista protendida onde se identificam: o desviador no vão da viga e a posição do elemento de interface no plano  $YZ$ .

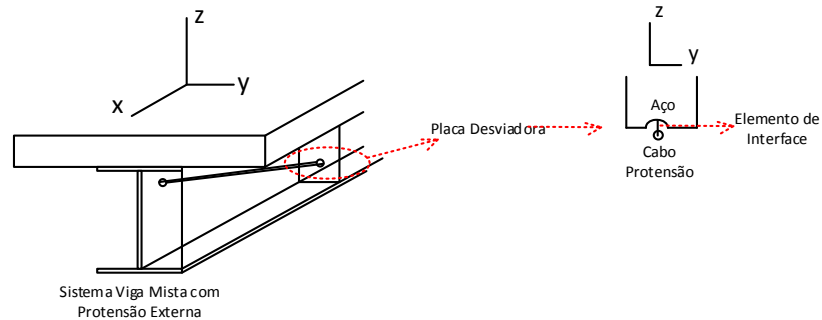


Figura 4.2 Elemento de interface no desviador de uma viga mista

Essa simplificação é válida, pois nos desviadores instalados na maioria das vigas mistas se busca minimizar os efeitos de atrito entre as superfícies do cabo e a viga mediante diferentes técnicas construtivas, principalmente, o uso de óleo e a minimização da diferença entre os ângulos de entrada e saída do cabo nesse ponto para minimizar também as forças de interpenetração de corpos que poderiam ser geradas (Figura 4.3).

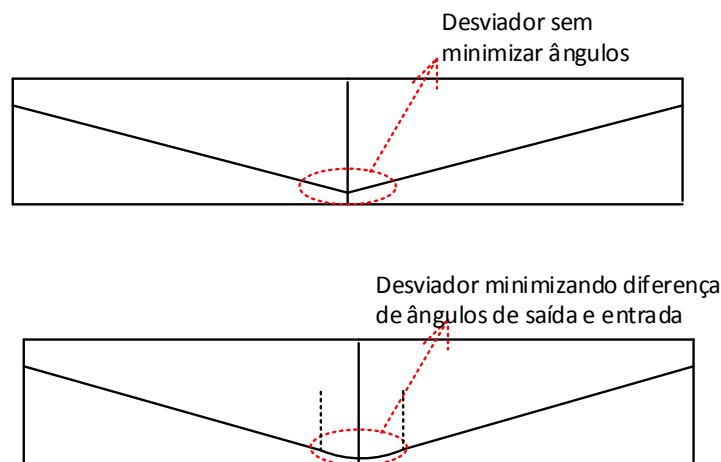


Figura 4.3 Diminuindo a diferença entre ângulos de saída e entrada

A formulação aqui descrita está baseada no apresentado por (TAMAYO, 2015) e no modelo de molas proposto por (VECCHIO, GAUVREAU e LIU, 2006). Um elemento de interface modifica seu estado (aberto, fechado ou escorregando) conforme o nível de



interpenetração, mas no presente trabalho somente se considera a situação em que o elemento está fechado e escorregando devido às características do problema modelado. Como os deslocamentos são desacoplados, as penalidades usadas em cada eixo de escorregamento podem ser diferentes.

As tensões locais atuantes no elemento são a tensão efetiva normal à superfície de contato  $\sigma_n$  e as tensões tangenciais de atrito  $\tau_1$  e  $\tau_2$  no plano XY. Segundo a compatibilidade de deslocamentos suposta nas direções globais Y e Z, não existem movimentos relativos entre a viga e o cabo (Figura 4.4).

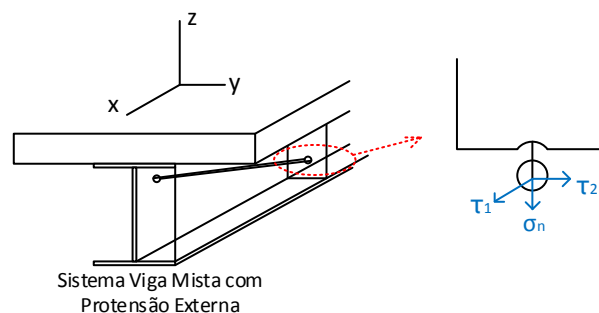


Figura 4.4 Tensões no elemento de Interface

A matriz de rigidez do elemento fica definida da seguinte forma:

$$K_{Local\ do\ elemento} = \begin{bmatrix} K_{\infty} & 0 & 0 \\ 0 & K_{\infty} & 0 \\ 0 & 0 & K_R \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

em que os valores dos coeficientes de rigidez  $K_{\infty}$  não admitem deslocamentos relativos entre o cabo e a viga de aço e  $K_R$  é o coeficiente de rigidez que admite o movimento relativo do cabo em relação à viga mista no eixo X global. Quando não é considerado o atrito entre o cabo e o desviador da viga de aço  $K_R$  é zero, simbolizando a ausência de rigidez do elemento de interface no eixo global X. Esse fato não introduz singularidade na matriz visto que o cabo apresenta coeficiente de rigidez diferente de zero nessa direção. Dado as questões praticas envolvendo o uso de desviadores já comentadas nesse trabalho implementou-se apenas o caso de atrito zero.

As forças internas do elemento de interface são calculadas a partir da multiplicação da matriz de rigidez do elemento pelo vetor de deslocamentos locais. A validação da implementação desse elemento de contato será observada nos exemplos de aplicação da viga mista em conjunto no capítulo seis desta dissertação.

A implementação desse elemento fica resumida nas seguintes linhas:

Passo 1 – Leitura do único dado de entrada para o elemento de interface  $\mu = 0$  ou  $\mu = 1$

Passo 2a – Definição do coeficiente de rigidez  $K_R$

Caso  $\mu=0$ , o coeficiente de rigidez  $K_R = 0$  conforme à equação 4.5

Caso  $\mu=1$ , o coeficiente de rigidez  $K_R = K_\infty$  e a situação é similar a não usar o elemento de interface

Passo 3 – Montagem da matriz de rigidez no sistema global

Passo 4 – Processo iterativo incremental de Newton Raphson

## 5 IMPLEMENTAÇÃO DOS ELEMENTOS DE CABO E INTERFACE NO CÓDIGO DE VIGA MISTA EXISTENTE

### 5.1 PROCESSO DE MODELAGEM

O Pré-Processamento de dados é feito no programa GiD versão 11.0.8, sendo que o passo a passo deste processo está descrito em detalhe por DIAS (2013). Na elaboração desse trabalho se adicionou nesse processo uma nova *Entidade* identificada como CABLE, que segue exatamente o mesmo passo a passo descrito na fonte mencionada.

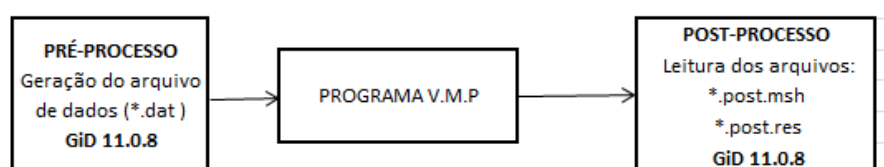


Figura 5.1. Fluxograma do Processo de Modelagem

O processamento de dados é feito no código computacional denominado PROGRAMA V.M.P. desenvolvido em linguagem FORTRAN, nesse processo foram adicionadas diferentes *Modules* e *Subroutines* que permitem a consideração do efeito da protensão nos elementos analisados.

O pós-processamento de dados também é feito usando o programa GiD versão 11.0.8, pois esta ferramenta computacional permite uma boa visualização das variáveis de interesse. Antes do desenvolvimento desta pesquisa, os dados de saída que podiam ser visualizados correspondiam ao concreto e ao aço. Com a elaboração desse trabalho se melhorou a visualização destas variáveis e foi implementada a visualização de tensões e deslocamentos da entidade CABLE.

#### 5.1.1 Programa “Viga Mista Protendida” (V.M.P.)

O Fluxograma Geral que segue o processo de análise feito pelo programa desenvolvido é apresentado na Figura 5.2.

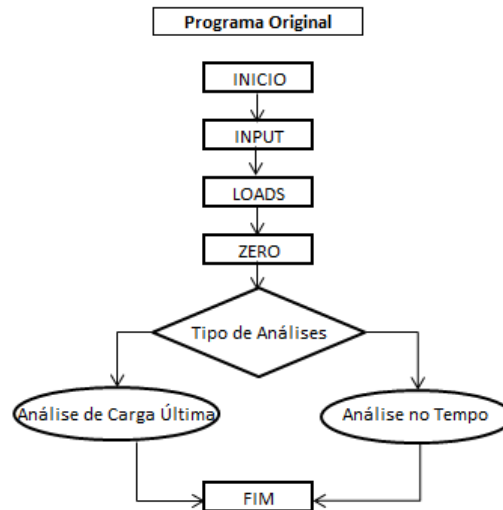


Figura 5.2. Fluxograma Geral do Programa V.M.P

- INPUT: Lê os dados de entrada do problema, como coordenadas, conectividades dos elementos, condições de contorno e propriedades dos materiais.
- LOADS: Lê dados de entrada das cargas aplicadas à estrutura, podendo ser definidos no arquivo de entrada de dados, mais de um instante de carga.
- ZERO: Inicializa os vetores e as matrizes que precisam ser zerados para o início do cálculo numérico.
- Escolha do tipo de análise:
  - Análise de Carga Última; a análise estrutural não leva em consideração a evolução do comportamento dos materiais no tempo. Os resultados obtidos depois do processo são deslocamentos, rotações e esforços dos elementos em geral. Este trabalho desenvolveu-se dentro desse tipo de análises.
  - Análise no tempo; considera o comportamento “Visco Elasto-Plástico dos Materiais” limitado a cargas de serviço.

Cabe destacar que do ponto de vista prático o efeito de cargas de longa duração é considerado com cargas de serviço sendo essas compostas essencialmente por cargas permanentes já que as cargas acidentais ou variáveis apresentam pequeno tempo de aplicação.

### 5.1.1.1 Processo de Análise de Carga Última

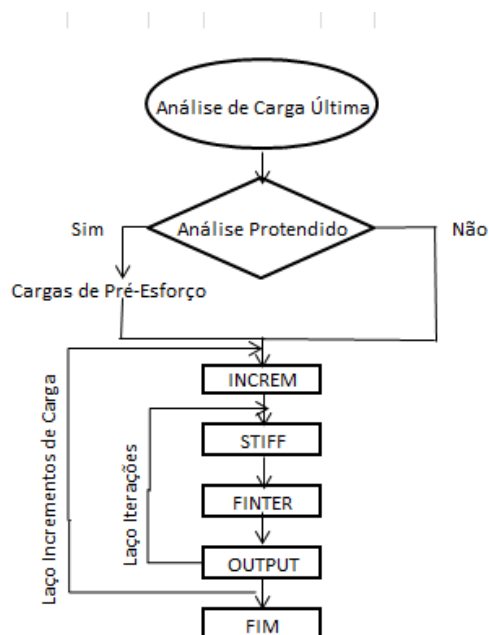


Figura 5.3. Fluxograma da Análise de Carga Última

Originalmente a análise de carga última (Figura 5.3) não considerava a opção de protensão externa. Na versão atual do Programa V.M., versão V.M.P., se incorporou essa opção. O resto do código computacional não foi modificado, mas se acrescentaram sub-rotinas correspondentes ao novo elemento de cabo e o elemento de interface nos módulos STIFF e FINTER. No módulo OUTPUT se adicionaram duas sub-rotinas que permitem visualizar os deslocamentos e as forças axiais no cabo desde o pós-processo do programa GiD versão 11.0.8, além disso se criou um arquivo *rescable.dat* que registra o histórico de tensões do cabo.

Os módulos modificados, para acrescentar a análise de estruturas com protensão externa foram o módulo STIFF e o módulo FINTER. Na sequência se apresentam os fluxogramas correspondentes a cada um desses e os correspondentes aos elementos incorporados: Elemento de cabo de protensão (Elemento Treliça e Catenária) e o elemento de interface (Figura 5.4).

No módulo STIFF é realizada a montagem da matriz de rigidez global do problema. De modo resumido, o funcionamento do módulo segue os passos abaixo:

- a) Define-se o esquema de Newton Raphson (completo, modificado primeira iteração, modificado segunda iteração ou tensão inicial) a ser utilizado durante o processo

incremental, através de uma variável que o usuário fornece no arquivo de entrada de dados (\*.dat). Esse dado fornecido é usado pelo subrotina ALGOR que é a que escolhe o esquema de Newton Raphson.

- b) São montadas cada uma das matrizes locais dos elementos que compõem a estrutura analisada. Essas matrizes são armazenadas nos graus de liberdade correspondentes da matriz de rigidez global em formato de “banda simétrica”. Dependendo do algoritmo de solução escolhido essa montagem é feita em todas as iterações ou não.
- c) Aplicadas as condições de contorno, o sistema de equações é resolvido mediante um esquema de “Gauss Simples”. Quando são inclusos os elementos de interface na análise o rendimento deste “Solver” diminui já que a resolução do problema demora mais tempo do que demoraria sem considerar o elemento de contato, dependendo das iterações que sejam precisas para a convergência do passo de carga.
- d) Os resultados obtidos são usados na subrotina FINTER, que faz a montagem do vetor global das forças e verifica se o equilíbrio foi atingido em cada incremento.

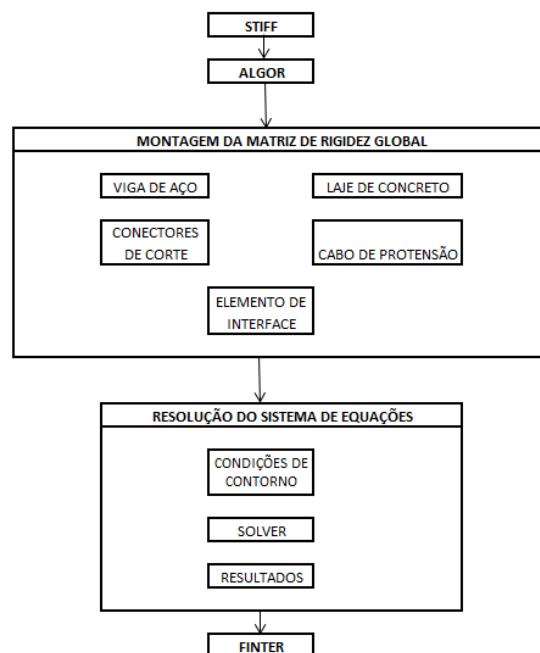


Figura 5.4. Fluxograma do módulo STIFF

A Figura 5.5 apresenta o fluxograma correspondente à sub-rotina de implementação do elemento de cabo. O processo descrito no fluxograma corresponde à construção da matriz de rigidez do elemento de cabo que é o mesmo independentemente do elemento usado. As rotinas correspondentes estão apresentadas no código desenvolvido em Fortran 90.

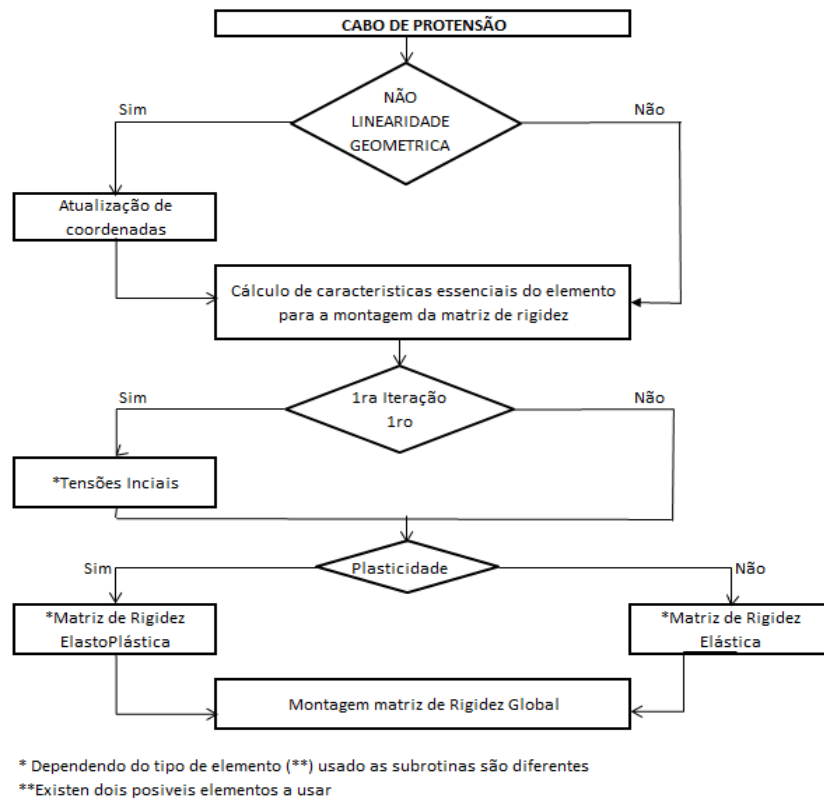


Figura 5.5. Fluxograma da subrotina Cabo de Protensão

A montagem da matriz de rigidez do elemento de interface está descrita na figura 5.6. Nesta figura a variável  $\mu$  corresponde ao coeficiente de atrito considerado na análise,  $F_n$  a força normal que atua sobre o elemento de contato,  $F_h$  a força horizontal proporcional e  $F_s$  a força limite de escorregamento que define a existência ou não de deslocamento relativo  $u$ . Os coeficientes de rigidez  $K_R$  e  $K_\infty$  já foram definidos no item 4.2.

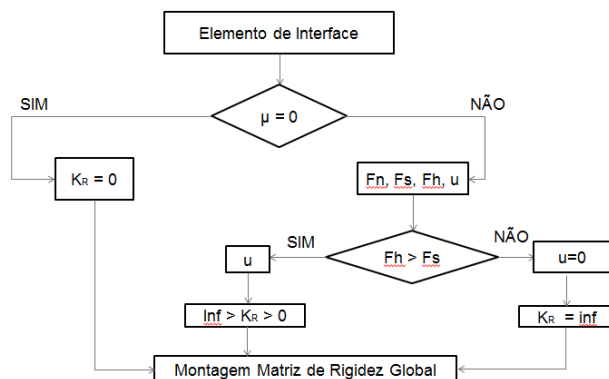


Figura 5.6. Fluxograma da subrotina Cabo de Protensão

O Valor usual para  $\text{inf}$  da ordem de  $10^8$  que corresponde ao coeficiente de rigidez maior da matriz de rigidez global do sistema.

No módulo FINTER (Figura 5.7) se faz a construção do vetor de forças internas num processo elemento a elemento também se verifica o equilíbrio de forças internas e externas globais que vai definir a convergência do sistema quando esse resultado seja menor que uma tolerância predeterminada (trata-se de um dado de entrada cujo valor usual nos problemas analisados variou entre  $10^{-2}$  e  $10^{-3}$ ).

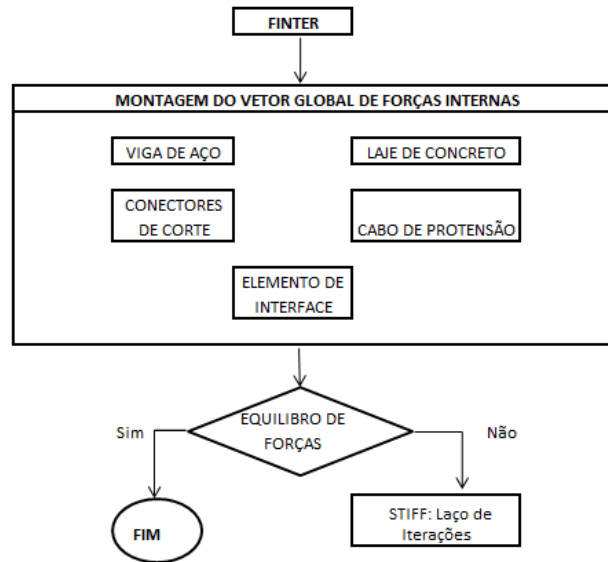


Figura 5.7. Fluxograma do módulo FINTER

## 5.2 FORMA DE USO DO PROGRAMA V.M.P

Na fase de pré-processamento do programa V.M.P. da mesma forma que as malhas da laje de concreto, viga de aço e conectores; os cabos de protensão tem que ser gerados num arquivo independente (\*.gid) (DIAS, 2013).

Os cabos, independentemente do elemento que vai ser usado no modelo, são desenhados como elementos de linha nas posições desejadas e uma vez gerada a malha de elementos é exportada como malha de GiD (\*.msh). É importante que todas as normais dos elementos linha tenham o mesmo sentido. Na figura 5.8 se mostra o processo de exportação de malhas. Cabe destacar que para manter todas as normais dos elementos linha no mesmo sentido recomenda-se que o processo de geração das linhas também seja feito num mesmo sentido.



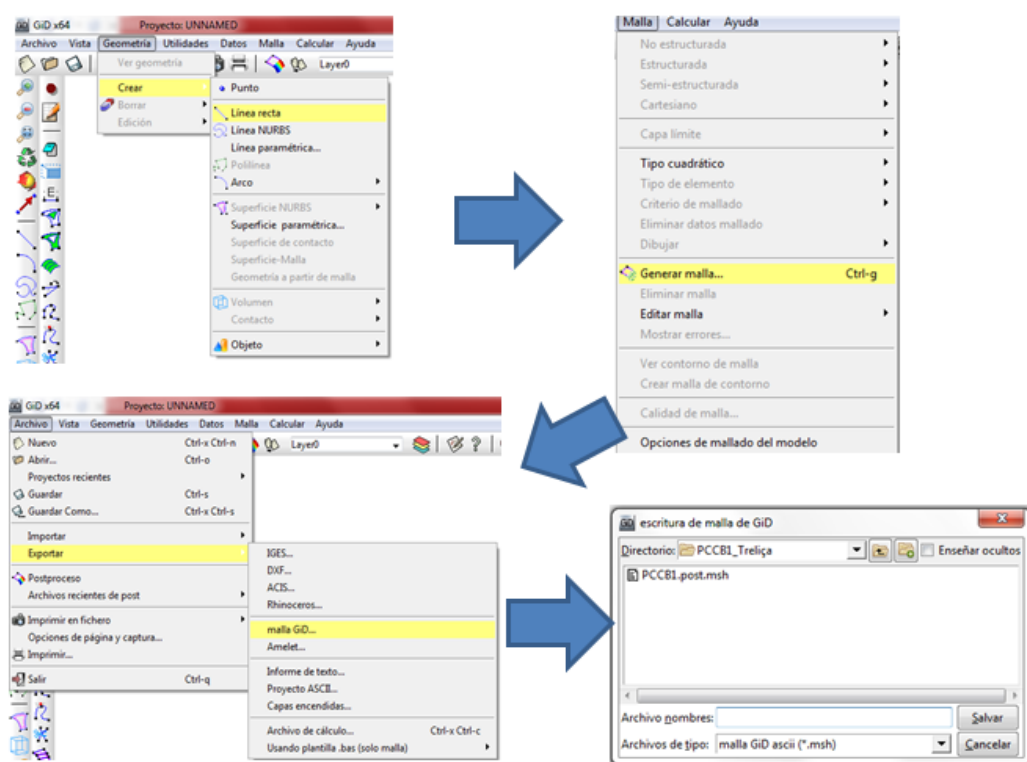


Figura 5.8. Exportação da malha do GiD

Já no arquivo em que se acoplam as malhas dos quatro tipos de elementos que formam a viga mista protendida, deve ser inicializado o procedimento de importação de malhas descrito em DIAS (2013). Sendo importante que nesse processo as malhas sejam importadas na seguinte ordem: Viga de Aço (STEEL), Laje de Concreto (CONCRETE), Conectores (CONNECTOR) e Cabo de Protensão (CABLE), já que o *Problem Type* gerado considera esta ordem de importação de malhas. Na figura 5.9 se esquematiza o processo de importação das malhas com capturas da tela do GiD versão 11.0.8.

Os nomes das camadas *layers* criadas tem que ser os mesmos que as indicadas por DIAS (2013) e aquela correspondente ao cabo de protensão tem que ser nomeada como CABLE. Antes de iniciar a fase de aplicação das condições de contorno, cargas e tipos de material tem que ser atribuído o *Problem Type* customizado pelo autor, denominado como *VMmia.gid*, logo depois o procedimento é o mesmo descrito em (DIAS, 2013). Quando os materiais e as cargas são atribuídos a cada elemento é importante que a camada *layer* ativa seja aquela correspondente ao elemento sobre o que se está aplicando a condição respectiva.

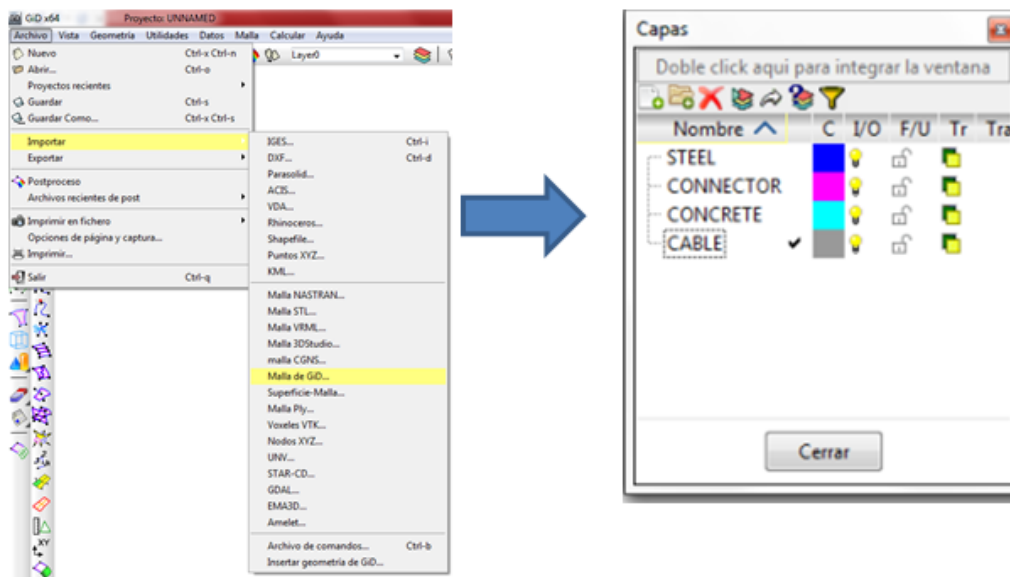


Figura 5.9. Importação da malha de GiD

Entre os dados que são solicitados como dados iniciais do material, que vão ser atribuídos ao elemento de cabo está a tensão inicial efetiva que o cabo apresenta depois que os macacos de protensão são retirados e os extremos do cabo ficam presos nas ancoragens. Os efeitos de protensão devem ser aplicados como cargas externas, sobre a viga de aço nos pontos de compatibilidade de deslocamentos entre a viga e o cabo. É importante destacar que o GiD permite a aplicação de carregamentos em instantes diferentes fato que permitiu a possibilidade de simular o processo de protensão da peça e o processo incremental de carga por separado.

A escolha do tipo de elemento com que se pretende fazer a simulação do cabo de protensão deve ser feita diretamente no código de Fortran no arquivo *gbgeral.f90* (Figura 5.10).

```

integer(2),parameter      :: ndofo=3           !number of d.o.f per node
integer(2),parameter      :: nnodo=2          !number of nodes per contact element
integer(2)                 :: nevao           !number of d.o.f per element
integer(2)                 :: neleo           !number of contact elements
!signature
character(6),allocatable:: kefsc(:)          !element freedom signature concrete
character(6),allocatable:: kefss(:)          !element freedom signature steel
character(6),allocatable:: kefsx(:)          !element freedom signature conector
character(6),allocatable:: kefsa(:)          !element freedom signature cable
character(6),allocatable:: kefso(:)          !element freedom signature connector

integer(2),parameter      :: Geometrica=0    !1=NLG e NLF 0=NLF %No cabo
integer(2),parameter      :: TipoEle=0       !0=Treliza 1=Flores
!convergence
integer(2),parameter      :: criterio=1      !1=forces, 2=displacement

```

Figura 5.10. Escolha do tipo de elemento de cabo

Para a criação dos elementos de interface, nos pontos onde os elementos de cabo compartilham as coordenadas com os elementos da viga de aço (desviadores), devem ser gerados elementos extras de linha, na mesma layer CABLE no eixo Z para gerar um nó a mais, pois o GiD não tem a opção de gerar um elemento de interface pontual (Figura 5.11).

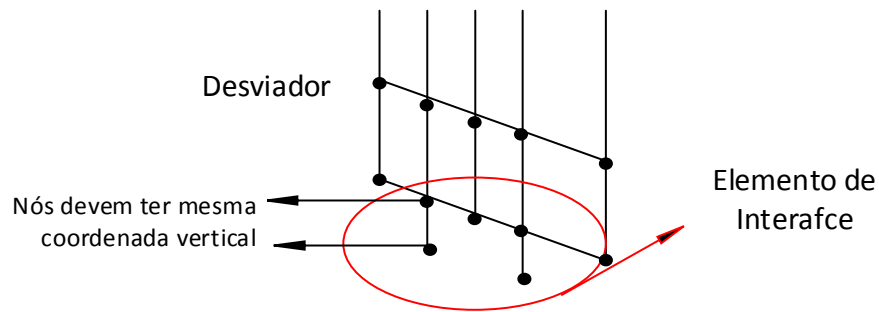


Figura 5.11. Desenho dos Elementos de Interface

Uma vez que o arquivo de dados (\*.dat) é criado, os elementos de interface devem ser acrescentados ao arquivo manualmente conforme o processo abaixo:

- No arquivo de dados, na linha correspondente aos dados gerais do problema, devem ser adicionados os elementos de interface, acrescentado um tipo de material a mais. (Figura 5.12)

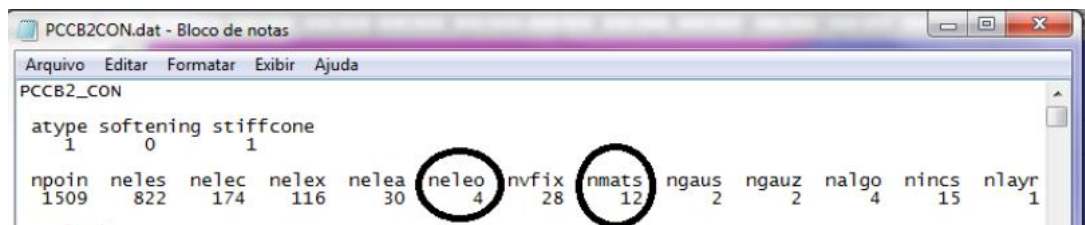


Figura 5.12. Geração dos elementos de interface no arquivo (\*.dat)

A quantidade de elementos de interface gerados têm que ser descontados dos elementos de cabo que originalmente se tinha no modelo já que esses elementos extras de cabo desenhados tinham só o objetivo de criar um nó a mais e são em realidade elementos de interface (Figura 5.11).

- No mesmo arquivo, algumas linhas mais abaixo, (Figura 5.12) é necessário apagar os elementos de cabo que correspondem aos elementos de interface segundo o exposto no item *a* e renumerar a lista dos elementos de cabo caso seja necessário (a forma de

criação dos elementos linha no arquivo que contém a informação geométrica do elemento vai ser o que determine se a renumeração vai ser necessária ou não).

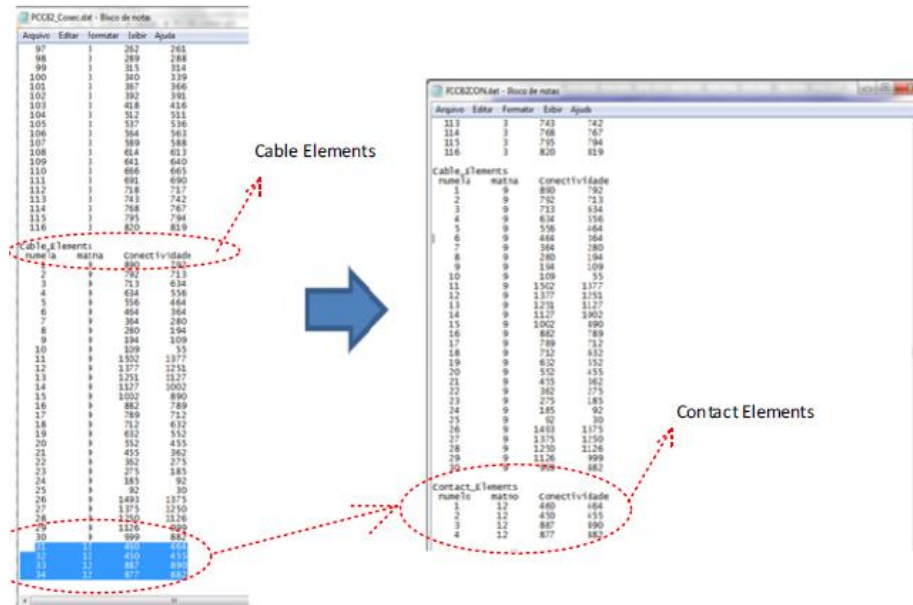


Figura 5.13. Conversão dos elementos de cabo em elementos de interface

- c) Na lista de materiais, na posição correspondente ao elemento de interface, o primeiro valor é a única informação que precisa ser dada, que é o coeficiente de atrito respectivo, sendo que o valor 1 simboliza a compatibilidade de deslocamentos em todas as direções, 0 simboliza compatibilidade de deslocamentos na direção Y e Z com deslocamento relativo em X para o cabo, neste caso o eixo X corresponde ao eixo longitudinal da malha da viga mista.

Os elementos de interface tem que ter como nó inicial aquele que compartilham com a viga de aço e como nó final aquele que corresponde ao cabo de protensão, desse jeito as conectividades dos elementos de cabo onde se têm elementos de interface tem que ser mudadas.

- d) Como os elementos de interface não são gerados automaticamente no GiD e inicialmente foram inseridos no arquivo de entrada de dados como elementos de cabo, as coordenadas em Z dos nós finais dos elementos de interface devem ser substituídas pelas coordenadas em Z dos nós iniciais na lista de coordenadas do mesmo arquivo de ingresso de dados (\*.dat). (Figura 5.13)

Node	X	Y	Z
636	-199.5000000000	-13.7500000000	19.5000000000
637	-199.5000000000	-5.0000000000	16.0000000000
638	-199.5000000000	-5.0000000000	13.1000000000
639	-199.5000000000	-2.5000000000	19.5000000000
640	-199.5000000000	-2.5000000000	16.0000000000
641	-199.5000000000	0.0000000000	19.5000000000
642	-199.5000000000	0.0000000000	16.0000000000
643	-199.5000000000	-5.0000000000	3.8000000000
644	-199.5000000000	2.5000000000	19.5000000000
645	-199.5000000000	2.5000000000	16.0000000000
646	-199.5000000000	-5.0000000000	0.0000000000
647	-203.5000000000	23.0000000000	19.5000000000
648	-199.5000000000	5.0000000000	16.0000000000
649	-199.5000000000	5.0000000000	13.1000000000
650	-199.5000000000	0.0000000000	0.0000000000
651	-199.5000000000	5.0000000000	3.8000000000
652	-199.5000000000	5.0000000000	0.0000000000
653	-199.5000000000	13.7500000000	19.5000000000
654	-195.5000000000	-25.0000000000	19.5000000000
655	-195.5000000000	-2.5000000000	19.5000000000
656	-195.5000000000	2.5000000000	19.5000000000
657	-199.5000000000	25.0000000000	19.5000000000
658	-194.7000000000	-2.5000000000	3.8000000000
659	-194.7000000000	2.5000000000	3.8000000000
660	-191.5000000000	-25.0000000000	19.5000000000
661	-191.5000000000	-13.7500000000	19.5000000000
662	-191.5000000000	-5.0000000000	16.0000000000
663	-191.5000000000	-5.0000000000	13.1000000000
664	-191.5000000000	-2.5000000000	19.5000000000
665	-191.5000000000	-2.5000000000	16.0000000000
666	-191.5000000000	0.0000000000	19.5000000000
667	-191.5000000000	0.0000000000	16.0000000000
668	-191.5000000000	-5.0000000000	3.8000000000
669	-191.5000000000	2.5000000000	19.5000000000
670	-191.5000000000	2.5000000000	16.0000000000
671	-191.5000000000	-5.0000000000	0.0000000000
672	-195.5000000000	25.0000000000	19.5000000000
673	-191.5000000000	5.0000000000	16.0000000000
674	-191.5000000000	5.0000000000	13.1000000000

Figura 5.14. Modificação de coordenadas dos nós finais

Caso a implementação dos elementos tenha sido feita com sucesso, a convergência de iterações na fase de protensão vai ser alcançada sem problemas e quando se visualizem as tensões no cabo para qualquer fase de carga estas serão as mesmas em todo o cabo.

- e) Na listagem dos tipos de materiais usados no modelo aquele que corresponde ao elemento de interface define o coeficiente de atrito usado, valor que pode variar entre zero e um, mas que todos os autores consultados definem como zero.

## 6 APLICAÇÕES PARA VALIDAÇÃO

Com o objetivo de mostrar a potencialidade do algoritmo desenvolvido e validar o funcionamento das implementações realizadas durante a elaboração desse trabalho, se pretende analisar: Exemplos numéricos propostos por outros autores no caso do elemento de cabo e experiências de laboratório propostas na literatura no caso das vigas mistas protendidas

### 6.1 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO ELEMENTO ESPECIAL DE CATENÁRIA

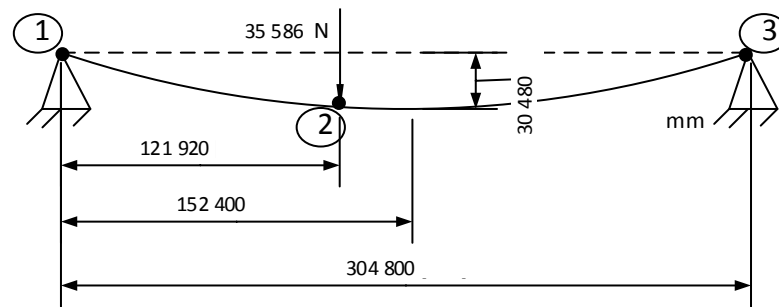
O elemento foi validado comparando os resultados obtidos por outros autores usando elementos de formulações diferentes e o elemento clássico de treliça.

#### Exemplo 1

Um cabo isolado, composto por dois elementos de forma catenária cujas características estão definidas na Tabela 6.1, é alterado da sua posição de equilíbrio inicial por uma força de 35,586 kN segundo o esquema apresentado na Figura 6.1.

Tabela 6.1. Dados do Exemplo 1

Dados do Problema			
Peso Linear	46,120	N/m	
Área Transversal	548,4	mm <sup>2</sup>	
Módulo de Elasticidade	131000	N/mm <sup>2</sup>	
Tamanho Elemento 1-2	125 850	mm	
Tamanho Elemento 2-3	186 860	mm	
Carga ponto 2	-35,586	kN	
Pontos	x [mm]	y [mm]	z [mm]
1	0,0	0,0	0,0
2	121. 920,0	0,0	-29.280,0
3	304. 800,0	0,0	0,0



Fonte: (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981) Adaptado pelo autor

Figura 6.1. Geometria Exemplo 1

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.2. Em todos os casos o método de resolução do sistema não linear é o Newton Raphson Modificado, porque os elementos CBL1 implementado em (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981) e AGR implementado em (ANDREU, GIL e ROCA , 2006) têm problemas de estabilidade quando é usado o Newton Raphson Completo.

Tabela 6.2. Resultados Exemplo 1

Valores Convergidos				
Deslocamento nó 2 [mm]	Elementos Implementados		Elementos de comparação	
	Elemento Coarita	Elemento Treliça	CBL1 (Referência)	AGR
Vertical (z)	-5.643,3	-5.379,6	-5.645,0	-5.711,9
Horizontal (x)	-861,3	-828,7	-862,9	-718,6
Elementos	2	10	2	2
Incrementos Carga	10.000	10.000	---	10.000

Embora todos os resultados obtidos sejam aceitáveis, foram necessários, 10 elementos de treliça para se obter um resultado que é o que mais se afasta (erro relativo de 3,8%) do valor médio (5.595 mm) para o deslocamento vertical z.

O processo de cálculo que segue o elemento de catenária implementado nesse trabalho busca no inicio equilibrar as forças dos extremos do elemento com o seu peso próprio do elemento, respeitando as coordenadas definidas no problema. A sua formulação permite afirmar que a forma do segmento entre os dois nós dos extremos é uma *catenária*. Dessa forma, quando comparada com uma treliça pode ser observado que a atribuição das forças nos

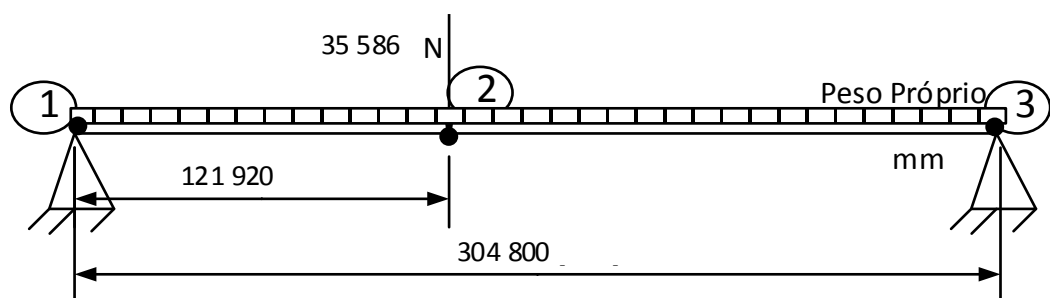
nós do elemento e a forma mesma do elemento se aproximam mais com o comportamento real de um cabo. Cabe destacar que uma treliça entre os seus dois nós tem forma de uma linha reta e a divisão do peso próprio é feita assumindo a metade para cada nó de extremo na treliça.

### Exemplo 2

Um cabo com as mesmas características do Exemplo 1 é submetido a uma força inicial de tração “ $T_0$ ” (Tabela 6.3). Além da força inicial outra diferença é a posição inicial da análise, que neste caso uma linha reta (Figura 6.2).

Tabela 6.3. Dados do Exemplo 2

Dados do Problema			
Peso Linear	46,12	N/m	
Área Transversal	548,4	cm <sup>2</sup>	
Módulo de Elasticidade	131 000	N/ mm <sup>2</sup>	
Carga ponto 2	-35,586	kN	
Força Inicial	718,40	kN	
Comprimento Inicial elemento	301.752,0	mm	
Comprimento Final elemento	304.800,0	mm	
Pontos	x [mm]	y [mm]	z [mm]
P1	0,0	0,0	0,0
P2	121 920,0	0,0	0,0
P3	304 800,0	0,0	0,0



Fonte: (COARITA e FLORES, 2015) Adaptado pelo autor

Figura 6.2. Geometria do Exemplo 2

Os resultados encontrados são apresentados na Tabela 6.4. Nota-se que a força inicial no cabo melhorou o grau de convergência dos elementos, foram necessárias somente 100 incrementos de carga para que se alcance a convergência total.



Tabela 6.4. Resultados do Exemplo 2

<b>Deslocamentos para 100 incrementos de carga</b>				
Deslocamento [mm]	Elementos Implementados		Elementos de Comparação	
	Coarita	Treliça	CBL1 (Referência)	AGR
Vertical	-3 622,7	-3 365,3	-3740,9	-3620,3
Horizontal	-16,5	-17,6	-12,7	-17,2
Elementos	2	10	2	2

Cabe destacar que embora não tenha sido esse autor que propôs o elemento catenária, a implementação do mesmo esta muito bem explicada no artigo (COARITA e FLORES, 2015).

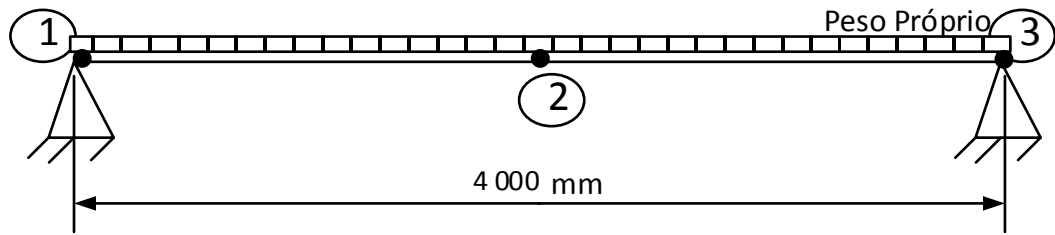
### Exemplo 3

O exemplo três (Figura 6.3) apresenta um cabo submetido à ação do peso próprio, as dimensões dele são muito menores àquelas dos cabos dos exemplos um e dois. Os dados do exemplo são apresentados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5. Dados do Exemplo 3

Dados do Problema			
	Peso Linear ( $w_1$ )	49,03	N/m
	Peso Linear ( $w_2$ )	196,10	N/m
	Peso Linear ( $w_3$ )	490,33	N/m
	Área Transversal	1,00	m <sup>2</sup>
	Módulo de Elasticidade	980,6	N/ m <sup>2</sup>
	Comprimento Elem <sub>1-2</sub>	1,98	m
	Comprimento Elem <sub>2-3</sub>	1,98	m
	Força Inicial no cabo ( $T_0$ )	9,81	N
	Comprimento total	3,96	m
	Comprimento depois $T_0$	4,00	m
	X [m]	Y[m]	Z[m]
P1	0,00	0,00	0,00
P2	2,00	0,00	0,00
P3	4,00	0,00	0,00

Dessa vez, o cabo foi modelado somente com os elementos implementados no código; o elemento de treliça e o elemento catenária, os quais admitem um esquema de Newton Raphson completo na solução. Foram usados três pesos lineares (N/m) diferentes nas modelagens para conhecer o efeito dessa variável.



Fonte: (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981) Adaptado pelo autor

Figura 6.3. Exemplo 3

Os resultados obtidos para o peso  $w_1$  usando o elemento de catenária e o elemento de treliça, com diferentes quantidades de elementos, são comparados na Tabela 6.6, na qual também se apresenta o valor de referência de (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981).

Tabela 6.6. Deslocamentos Verticais Centrais (mm) - elementos Implementados

$w_1 = 49,03$ [N/m]	Número de Elementos do Modelo					
	2	5	10	20	40	60
Coarita (FC)	-838,7	-838,9	-843,3	-848,3	-853,7	-----
Treliça	-1 017,1	-971,3	-885,3	-846,6	-826,3	-837,9
Referência Catenária	-855,6	-855,6	-855,6	-855,6	-855,6	-855,6

Com relação ao elemento catenária nota-se que mesmo com dois elementos tem-se um erro relativo de 1,97% em relação ao valor de referência. Além disso, observa-se um comportamento convergente já que a medida que o número de elementos aumenta há uma redução do erro relativo, chegando a 0,22% para 40 elementos. Por outro lado com elemento de treliça são necessários 10 elementos para ter-se um erro relativo da ordem de 3,47%. No entanto observa-se que não há um comportamento convergente a medida que o número de elementos é aumentado. Efetivamente para 20 elementos tem-se um erro de 1,05%, para 40 elementos tem-se um erro de 3,42% e para 60 elementos um erro de 2,06%.

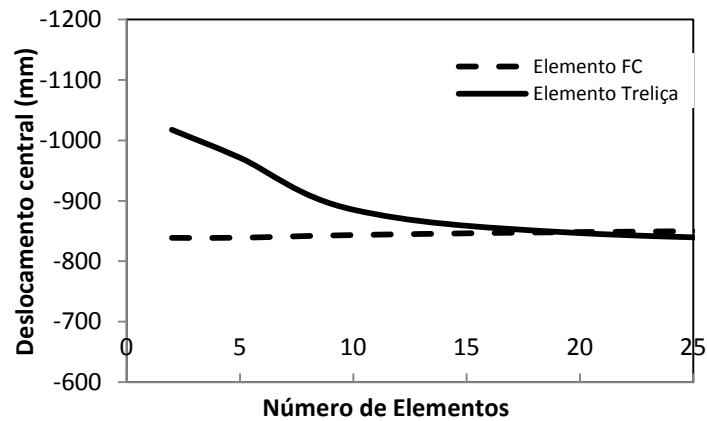


Figura 6.4. Influência do Numero de Elementos

A tabela 6.7 apresenta os resultados do deslocamento no ponto central para diferentes pesos próprios. Como se pode observar na Figura 6.5, esses deslocamentos vão aumentando quando o peso próprio se incrementa, dessa forma, se pode comprovar que o elemento está funcionando corretamente. Normalmente observa-se que a quantidade de elementos não influi na resposta. Os resultados correspondem ao elemento especial de catenária que foi implementado no código.

Tabela 6.7 Resultados Exemplo 3 – Deslocamentos Ponto Central

Elementos		2	5	10
$w_p$ [N/m]	Parâmetro Carga	$d_z$ [mm]	$d_z$ [mm]	$d_z$ [mm]
$w_1 = 49,03$	$w_1 / w_1 = 1$	-845,5	-855,1	-864,9
$w_2 = 196,10$	$w_2 / w_1 = 4$	-1 528,8	-1 540,4	-1 554,4
$w_3 = 490,33$	$w_3 / w_1 = 10$	-2 395,9	-2 412,1	-2 432,5

O comprimento inicial do cabo é de 3.960 mm, depois da força inicial ficou em 4.000 mm e com a ação dos diferentes pesos próprios lineares obteve-se os seguintes comprimentos: 4.342,8 mm para o peso  $w_1$ , 5.034,8 mm para o peso  $w_2$  e 6.242,0 mm para o peso  $w_3$ .

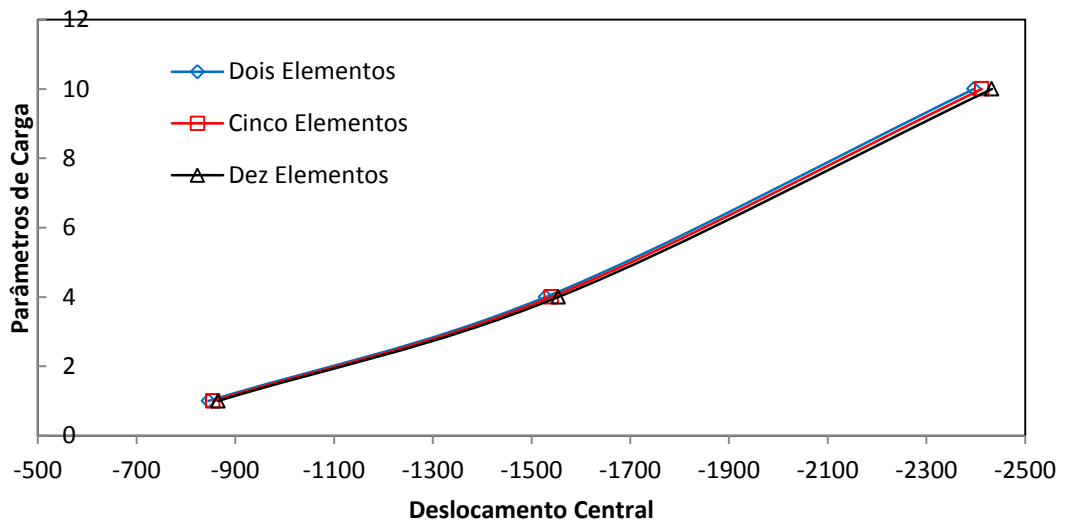


Figura 6.5 Variação do Deslocamento Central com o Peso Próprio

#### Exemplo 4

Na figura 6.6 é ilustrada uma rede de cabos cujas dimensões no plano XY estão apresentadas no lado esquerdo da figura e a configuração inicial é mostrada no lado direito dessa figura. As cargas que atuam sobre essa rede estão colocadas no eixo Z em cada um dos pontos de interseção. O valor total da carga, as forças iniciais aplicadas e outras características importantes dos cabos que compõem a rede estão indicados na Tabela 6.8.

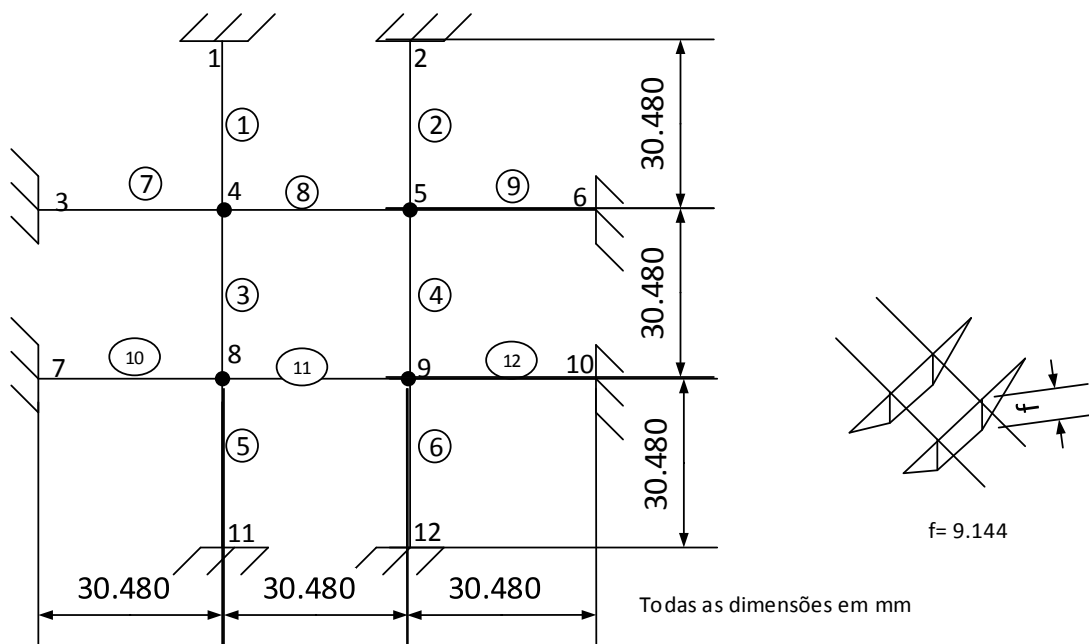


Figura 6.6 Geometria do Exemplo 4

Tabela 6.8. Propriedades da rede de cabos Exemplo 4

Dados do Problema		
Peso Linear	1,459	N/m
Área Transversal	146,450	mm <sup>2</sup>
Módulo de Elasticidade	82 737,080	N/mm <sup>2</sup>
Força no eixo z	-35,59	kN
Elemento 3, 4, 8, 11		
Comprimento deformado*	30 491	mm
Força inicial (T <sub>0</sub> )	24,28	kN
Elemento 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12		
Comprimento deformado*	31 760	mm
Força inicial (T <sub>0</sub> )	23,69	kN

Na tabela 6.8 o item comprimento deformado corresponde ao comprimento do cabo após a atuação da força inicial T<sub>0</sub>.

Os resultados obtidos empregando os elementos implementados nesse trabalho são comparados com os valores usados como referência (JAYARAMAN e KNUDSON, 1981) na tabela 6.9.

Tabela 6.9. Resultados do Exemplo 4

Nó 4	d <sub>x</sub> [mm]	d <sub>y</sub> [mm]	d <sub>z</sub> [mm]
Elemento FC	-40,48	-40,48	-446,40
Treliça	-42,01	-42,01	-447,47
Referência	-39,62	-40,20	-446,32

Nesse exemplo cada um dos elementos da rede foi modelado com só um elemento finito, já seja de treliça ou catenária. Os resultados obtidos pelo elemento catenária foram excelentes. O maior erro relativo apresentado foi de 2,17% no deslocamento d<sub>x</sub>. O elemento treliça também apresentou bons resultados sendo que o maior erro relativo (6%) está associado ao deslocamento d<sub>x</sub>.

### Exemplo 5

A figura 6.7 mostra outra rede de cabos analisada. As propriedades correspondentes a esta rede de cabos estão apresentadas na Tabela 6.10. Para modelar esse problema foi empregado o elemento catenária tendo sido considerado um elemento para cada tramo do cabo. A força F<sub>z</sub> de 157 N, indicada na tabela 6.10, foi aplicada em todos os nós conforme a figura 6.7.

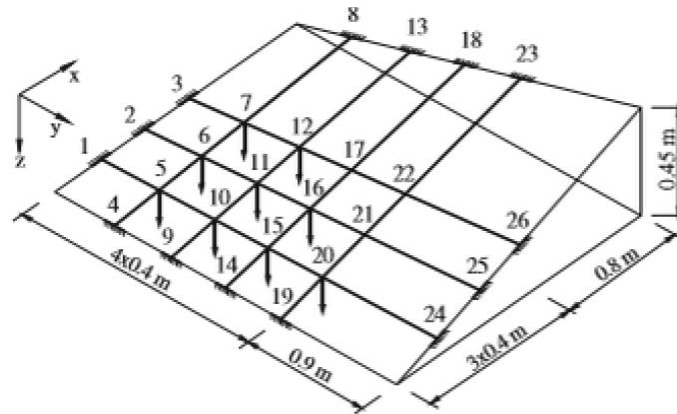


Figura 6.7 Geometria inicial dos cabos no Exemplo 5

Tabela 6.10 Propriedades da Rede de Cabos

Dados do Problema		
Peso Linear	0,0001	N/m
Área Transversal	0,785	mm <sup>2</sup>
Módulo de Elasticidade	128,3	kN/mm <sup>2</sup>
Força no eixo z	-157	N
Força Inicial	200	N

Os resultados obtidos com o elemento de catenária implementado nesse trabalho são muito similares aos valores esperados que estão apresentados em (THAI e KIM, 2011) e na Tabela 6.11.

Tabela 6.11 Comparação de Resultados Exemplo 5

Nó	Elemento FC [mm]	Referência [mm]	Erro
6	-26,10	-25,70	1,6%
7	-23,60	-23,37	1,0%
10	-26,60	-25,91	2,7%
11	-34,30	-34,16	0,4%
12	-30,00	-29,60	1,4%
15	-25,90	-25,86	0,2%
16	-31,90	-31,43	1,5%
17	-21,70	-21,56	0,6%
20	-21,70	-21,57	0,6%
21	-20,10	-20,14	0,2%
22	-14,60	-14,55	0,3%

### Exemplo 6

Para validar a incorporação do efeito da não linearidade do material nos elementos de treliça e catenária; primeiro vai se resolver um exemplo simples, que consiste numa barra engastada livre, com propriedades apresentadas na Tabela 6.12, sendo que essa barra é modelada por dois elementos de treliça (Figura 6.8).

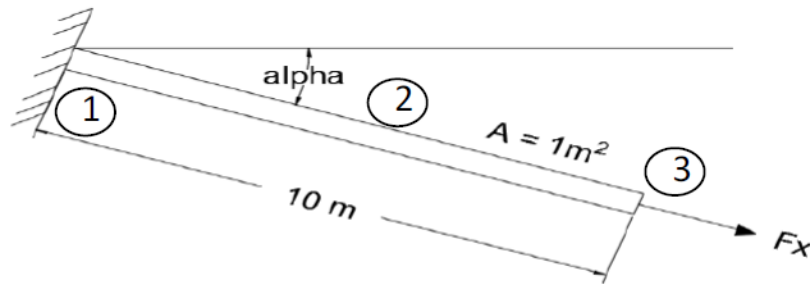


Figura 6.8 Geometria do Exemplo 6

Esse exemplo foi escolhido com o objetivo de comparar de forma rápida, o valor encontrado pelo código implementado e o valor teórico obtido depois da resolução das equações correspondentes à lei de plasticidade uniaxial apresentada em (OWEN e HINTON , 1980).

Tabela 6.12 Características da barra do exemplo 6

Dados do Problema		
$\sigma_y =$	10	$\text{N/m}^2$
$A =$	1	$\text{m}^2$
$E =$	1 000	$\text{N/m}^2$
$L_{01-2} =$	5	m
$L_{02-3} =$	5	m
$F_x =$	20	N
$H =$	100	

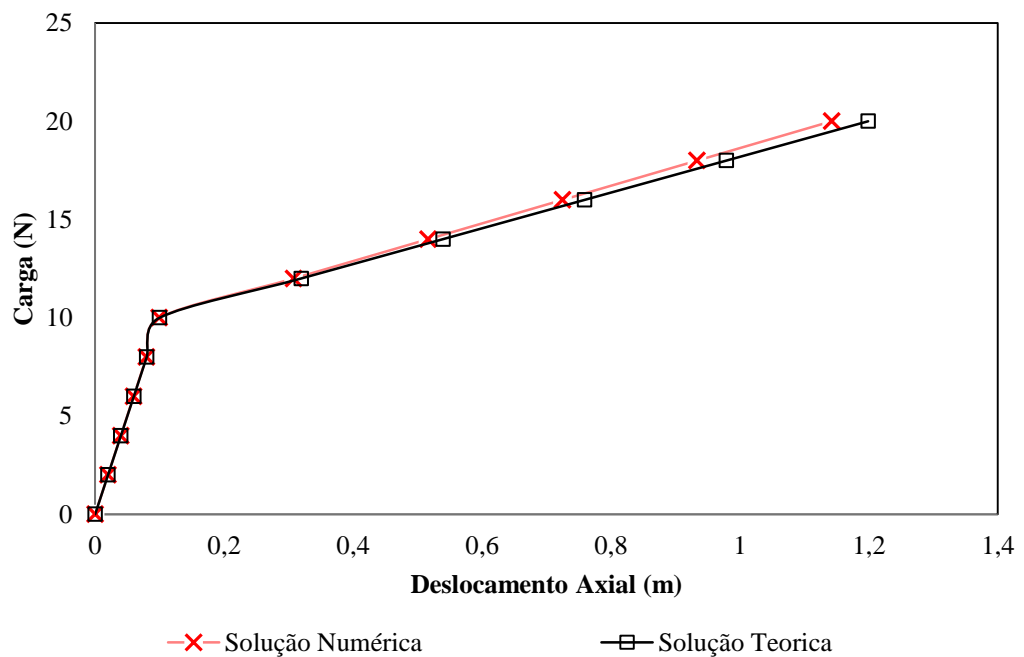
\*H= Fator de Endurecimento

Depois de resolver o exemplo para vários ângulos  $\alpha$  se observou que o grau de aproximação com o valor teórico depende da força inicial necessária para o início da análise. Quanto menor for esta, melhor é a aproximação. Quando o valor do ângulo  $\alpha$  é zero, não é necessária a inclusão da força inicial, mas para outros  $\alpha$  a singularidade da matriz numérica somente é evitada com a inclusão de uma força inicial. A Figura 6.9 ilustra o comportamento da “Carga Axial vs. Deslocamento Axial” da barra da Figura 6.14, para  $\alpha=60^\circ$ . O resultado teórico de deslocamento axial é 1,20 m e o valor obtido pelo código numérico para diferentes valores de tensões iniciais ( $T_0$ ) são apresentados na Tabela 6.13.

Tabela 6.13 Resultados para diferentes tensões iniciais

$u_{\text{axial}}$ m	$T_0$ [N]	$\varepsilon$ %
1,142	5	4,8
1,165	3	2,9
1,188	1	1,0
1,199	0,1	0,08

Para valores menores de tensão inicial, a aproximação com a resposta teórica melhora, mas valores próximos de zero não impedem a singularidade da matriz, quando a barra está definida no espaço tridimensional.

Figura 6.9. Resultado Exemplo 6  $\alpha=60^\circ$ 

### Exemplo 7

O último exemplo associado apenas com cabos corresponde a estrutura ilustrada na Figura 6.10. Esse exemplo combina a não linearidade geométrica com a não linearidade do material. O mesmo foi resolvido empregando o elemento de treliça elasto-plástico e o elemento de catenária com a lei de não linearidade do material incorporada, na sua formulação.



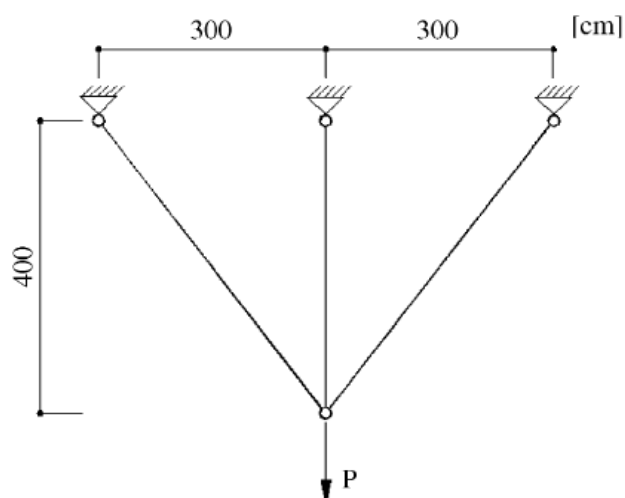


Figura 6.10. Geometria do exemplo 7

As características dos elementos empregados estão apresentadas na tabela 6.14. Em (GRECCO *et al.*, 2006) esse exemplo foi modelado com três elementos de treliça obtendo como resultado de deslocamento  $d_z = 5,84$  cm para uma carga de 25 kN. O mesmo resultado foi obtido para o elemento de treliça implementado neste trabalho. Já o elemento catenária apresentou um deslocamento 4,70 cm para a mesma carga.

Tabela 6.14. Dados do Exemplo 7

Dados do Problema		
$\sigma_v =$	10	N/m <sup>2</sup>
A =	1	m <sup>2</sup>
E =	1 000	N/m <sup>2</sup>
P =	25	N
H =	10	

\*H= Fator de Endurecimento

O comportamento do elemento de catenária é mais rígido, pois sua formulação faz o elemento plastifique para cargas maiores que a treliça, mantendo a tendência mostrada nos Exemplos de validação do elemento de cabo quando a não linearidade do material não é considerada. Na figura 6.11 são mostrados os resultados obtidos com os dois elementos desenvolvidos.

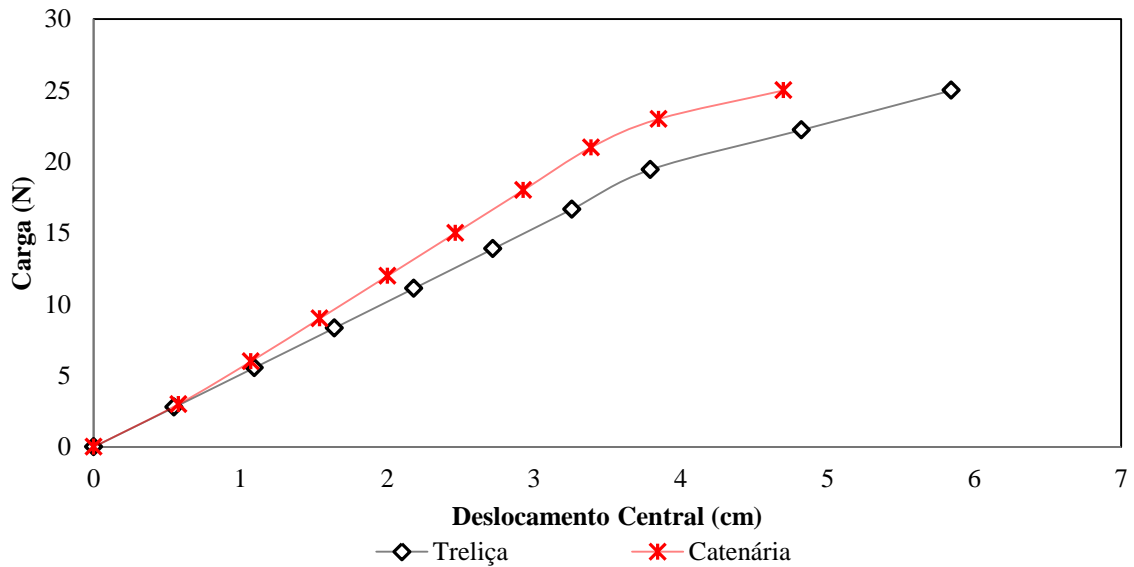


Figura 6.11. Resultados Exemplo 7

## 6.2 VIGAS SIMPLEMENTE APOIADAS

As vigas mistas BS1 e BS2 foram testadas por (CHEN e GU, 2005). As duas vigas têm a mesma geometria ilustrada na Figura 6.12. O comprimento total das vigas é igual a 5,15 m e a distância livre entre apoios 5 m. As dimensões da seção transversal estão indicadas na Tabela 6.15.

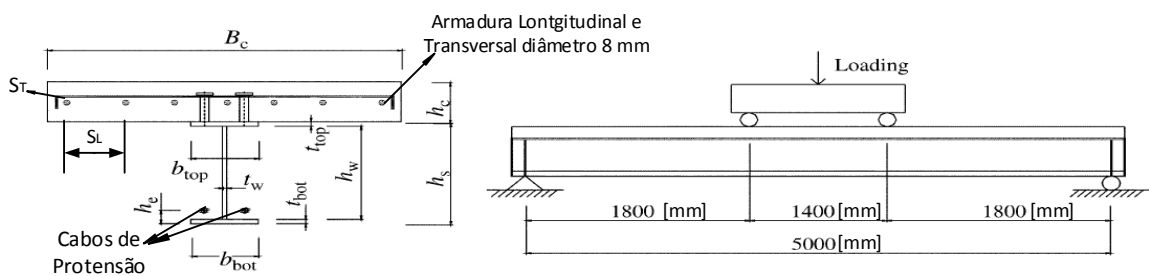


Figura 6.12. Geometria das vigas modeladas. (CHEN e GU, 2005) Adaptado pelo autor

Tabela 6.15. Dimensões dos Corpos de Prova

	$B_c$	$h_c$	$b_{top}$	$t_{top}$	$h_w$	$t_w$	$b_{bot}$	$t_{bot}$	$h_e$	$S_L$	$S_T$
Dimensões Nominais [mm]	1100	90	120	10	250	6	120	10	30	155	200

Para modelar a viga mista foram empregados 286 elementos na viga de aço, 56 elementos para representar os conectores de corte (dois por linha) e 105 na laje de concreto

armado. A Figura 6.13 mostra detalhes da malha. Para poder definir nas ancoragens os pontos de conexão entre o cabo e viga foram empregados duas divisões de tamanhos de elementos. Os elementos finitos da laje de concreto foram divididos em 10 camadas de concreto reforçadas por duas camadas de armadura. Cada cabo de protensão foi modelado com 20 elementos. A carga externa foi aplicada sobre toda a largura da laje de concreto nos pontos sinalados no esquema da Figura 6.13. Nota-se que na malha de elementos finitos empregada há elementos com elevada distorção do tipo razão de aspecto. Tal fato não compromete os resultados já que os elementos implementados, para representar o concreto armado e o perfil de aço, admitem razões de aspecto elevadas.

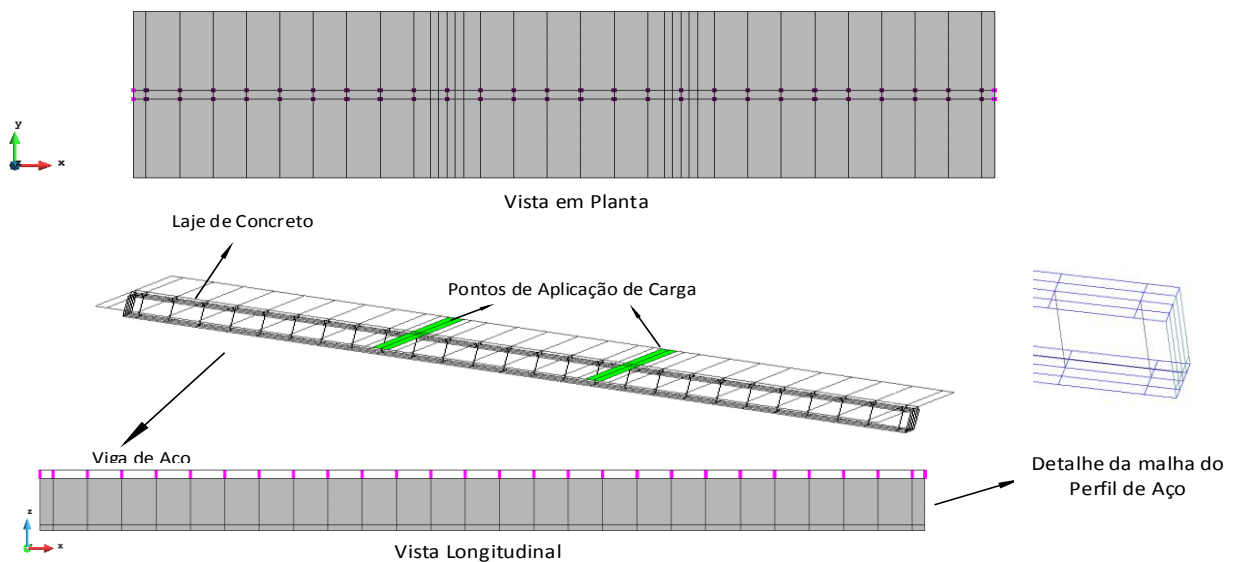


Figura 6.13 Detalhes da Malha de Elementos Finitos

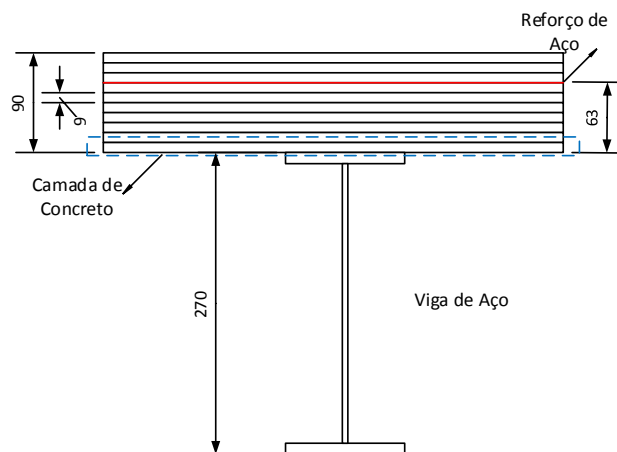


Figura 6.14 Esquema Camadas Laje de Concreto. Dimensões [mm]

As características dos materiais usados na construção das vigas ensaiadas, assim como maiores detalhes sobre os conectores de corte, a armadura de reforço e os cabos de protensão estão apresentados na Tabela 6.16.

Tabela 6.16. Materiais usados e detalhamento dos componentes das vigas

Material	Propriedades	BS1 e BS2
Aço Estrutural	Tensão de Escoamento	$\sigma_y$ 367,1 MPa
	Tensão Última	$\sigma_u$ 543,1 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$ 200.000 MPa
	Poisson	$\nu$ 0,3
	Deformação Última (alma)	$\epsilon_u$ 0,24
	Deformação Última (mesa)	$\epsilon_u$ 0,28
Aço de Reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y$ 327,7 MPa
	Tensão Última	$\sigma_u$ 492,6 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$ 200.000 MPa
	Poisson	$\nu$ 0,3
	Deformação Última	$\epsilon_u$ 0,25
Concreto	Resistência à Compressão	$f_c$ 30 MPa
	Resistência à Tração	$f_t$ 3 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E$ 32.920 MPa
	Poisson	$\nu$ 0,15
	Deformação Última	$\epsilon_u$ 0,0045
Conector	Espaçamento	$s$ 200 mm
	Diâmetro x Altura	$d \times h$ 16 x 65 mm
	Número de Linhas	$n$ 2
	Poisson	$\nu$ 0,3
	Constante 1	$a$ 75 kN
	Constante 2	$B$ 6 $\text{mm}^{-1}$
Cabo	Tensão de Escoamento	$\sigma_y$ 1.680 MPa
	Tensão Última	$\sigma_u$ 1.860 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$ 200.000 MPa
	Área Transversal	$A_t$ 137,4 $\text{mm}^2$
	Peso Linear	$w$ 10,57 N/m
	Deformação Última	$\epsilon_u$ 0,25

Nas simulações das vigas BS1 e BS2, em todos os casos, os carregamentos são aplicados em duas fases diferentes. Primeiro é simulada a protensão da estrutura que gera a correspondente contra flecha e finalmente o carregamento vertical é aplicado de forma incremental até alcançar a falha do elemento. No programa experimental foram executados três testes: Dois sobre a viga BS1; num primeiro teste a viga foi ensaiada sem força de protensão no cabo e num segundo teste o cabo estava sendo solicitado por uma força de 107,6

kN. O teste executado sobre a viga BS2 também apresenta força de protensão no cabo, mas dessa vez 112,6 kN, sendo essa a única diferença entre as vigas BS1 e BS2.

### Viga BS1

O primeiro teste experimental no elemento BS1 foi desenvolvido sem força de protensão no cabo. O comportamento foi inicialmente elástico linear. No modelo numérico, a carga foi aplicada de forma incremental em parcelas de 10% tanto na carga como na descarga. Na Tabela 6.17 se apresentam os valores de momento e deslocamento na metade do vão reportados no programa experimental e obtidos pelo modelo numérico implementado.

Tabela 6.17. Comparação Valores Numéricos e Experimentais Viga BS1 – Teste 1

	Teste Experimental		Modelo Numérico		Erro	
	M (kNm)	d <sub>z</sub> mm	M kNm	d <sub>z</sub> mm	M %	d <sub>z</sub> %
Escoamento da Viga de Aço	159	17,0	162	17,3	1,89	1,76
Fim do Processo Incremental	199	24,5	198	24,6	0,50	0,4
Fim do Teste	0	7,2	0	4,0	----	44,0

Nota-se que o modelo numérico consegue avaliar com um erro de 1,89% o momento do início do escoamento da viga de aço. Além disso, o código computacional foi capaz de acompanhar o processo do experimento até o valor do momento em que esse teste foi parado e iniciado o processo de descarga. Por outro lado, na avaliação da flecha residual após o processo de descarga tem-se um erro de 44%, o qual se deve em parte ao fato do processo de descarga, no modelo numérico, ter sido iniciado no instante em que se tinha um momento de 198 kNm na metade do vão, enquanto que o momento correspondente ao início do processo de descarga no experimento é de 199 kNm. Os campos de tensões na viga de aço e na laje de concreto, correspondentes ao momento de escoamento (162 kNm) da mesa inferior da viga de aço são apresentados na Figura 6.15.

A posição da linha neutra e a distribuição de tensões correspondente ao passo de carga que gera o escoamento na viga de aço ( $M_y=162$  kNm), estão apresentadas na Figura 6.16. Na mesma figura apresenta-se a posição da linha neutra, calculada analiticamente, considerando a interação total entre a laje de concreto e a viga de aço.

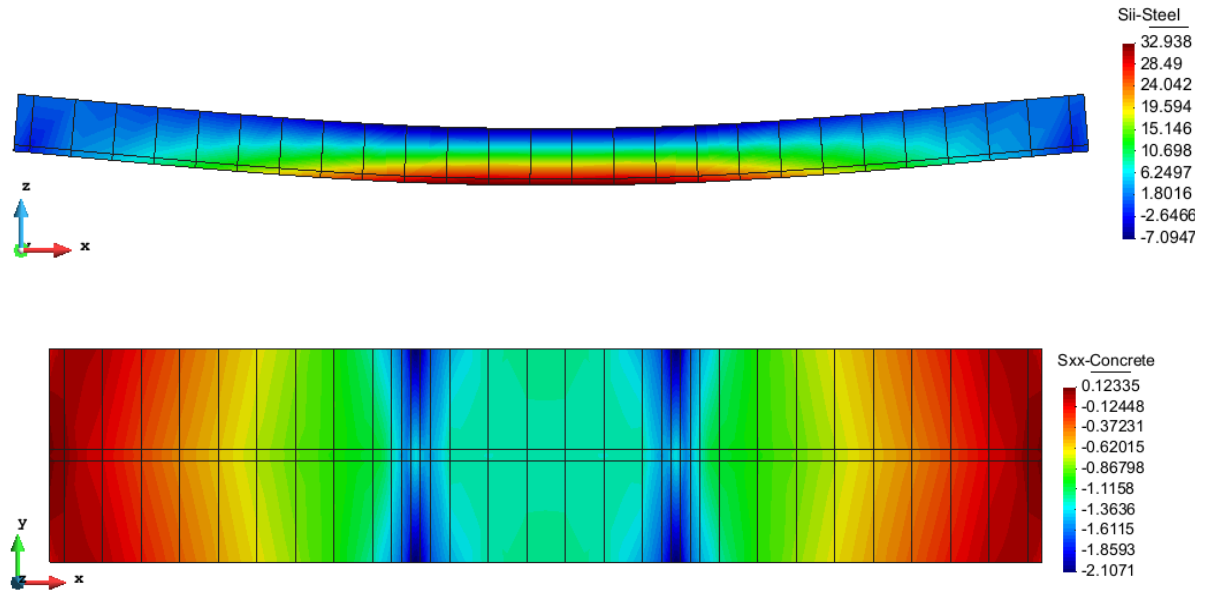


Figura 6.15. Tensões  $S_{xx}$  [kN/cm<sup>2</sup>]. Momento solicitante 162 [kN m]

As deformações da fibra inferior do concreto e a mesa superior da viga de aço são a mesmas, quando se considera interação total entre essas, mas como a conexão desses elementos é feita através dos conectores de corte, isso não é totalmente correto, pois devido ao deslocamento relativo entre a laje e a viga, a deformação dessas fibras é diferente. Considerar uma interação total entre a laje de concreto e a viga de aço tende a exagerar a área de compressão do concreto, portanto a tensão de compressão devida ao momento solicitante.

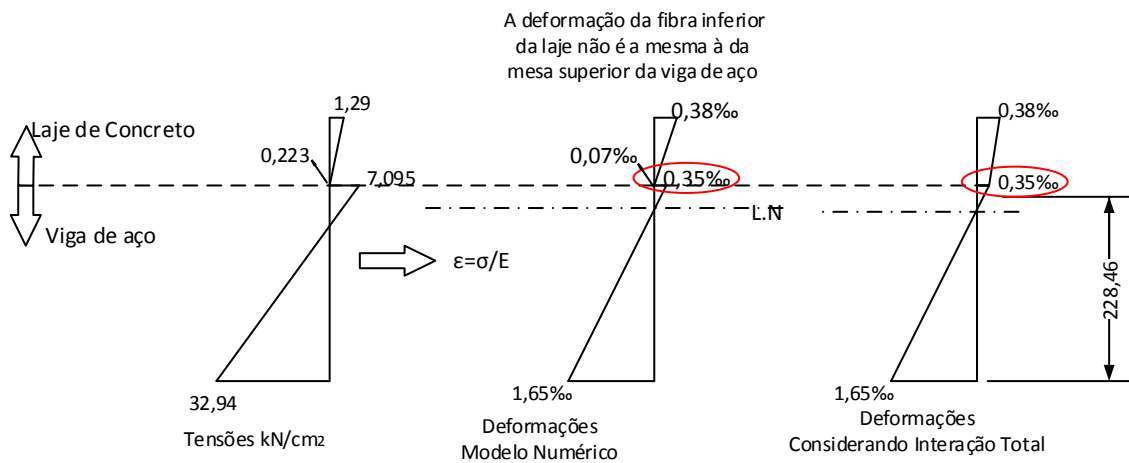
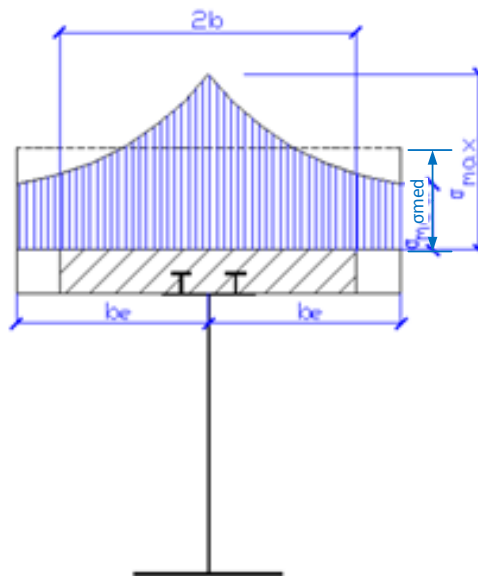


Figura 6.16. Posição Linha Neutra a partir dos Valores de Deformação. Aproximação Linear

Na fase de carga correspondente ao escoamento da viga de aço ( $M_y=162$  kNm) o percentual do momento ativo absorvido pelo concreto é 43,76% e pela viga de aço é 55,74%.

Estes valores foram calculados depois de analisar as leis de comportamento dos materiais e as deformações dos mesmos ilustrados na Figura 6.16.

A partir da Figura 6.15 pode-se inferir que a associação entre a viga de aço e a laje de concreto, por meio de conectores de cisalhamento, ocasiona uma transmissão de tensões concentradas de corte ao longo da conexão, sendo esta responsável pelo aumento de tensões nessa região. Estas tensões diminuem gradativamente para ambos os lados conforme se pode observar na Figura 6.17; este fenômeno é denominado comumente na literatura por efeito de “shear lag” (GUTIERREZ KLINSKY, 1999). Através da Figura 6.15 observa-se que o valor de pico da tensão  $\sigma_{xx}$  da seção central da laje vale  $-1,248 \text{ kN/cm}^2$  e o menor valor dessa tensão, na mesma seção, vale  $-1,201 \text{ kN/cm}^2$ , sendo a diferença entre esses valores 4%.



Fonte: (GUTIERREZ KLINSKY, 1999)

Figura 6.17. Efeito de Shear Lag região centraln laje - Momento solicitante 162 [kN m]

As curvas de “Deflexão Central vs. Momento Atuante”, da experiência e do modelo numérico, podem ser observadas na Figura 6.18.

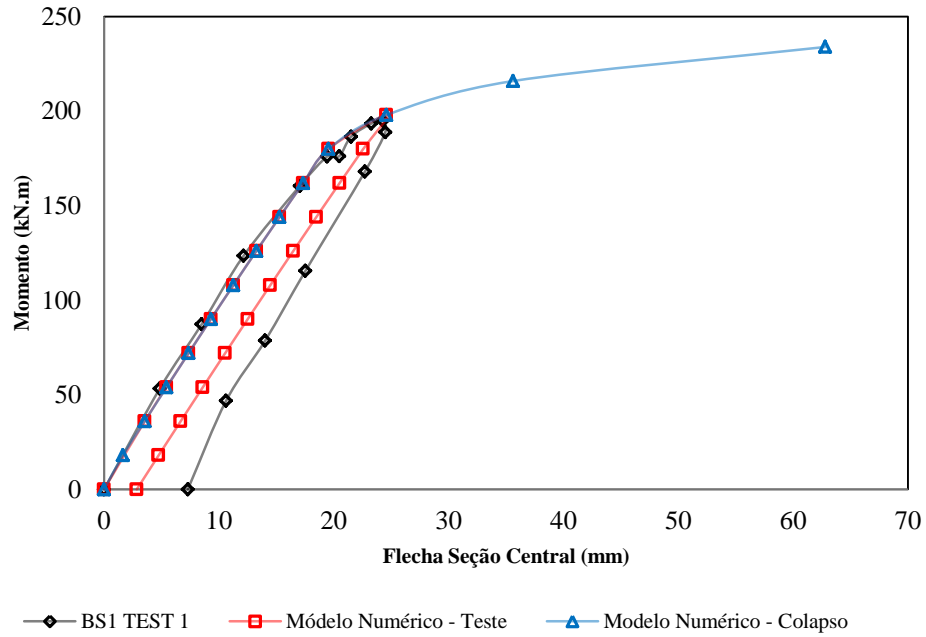


Figura 6.18. Viga BS1 sem protensão

O modelo numérico reproduz o comportamento da viga durante o ensaio de com uma aproximação muito boa no processo incremental de carga. Isto foi possível já que em (CHEN e GU, 2005) são apresentados todos os dados correspondentes às características dos materiais. No caso da viga de aço os dados apresentados na Tabela 6.16 sobre a tensão de escoamento e a tensão última são a média dos valores, máximo e mínimo, de um teste de tração feito sobre corpos de prova do aço usado na construção da viga, sendo esse teste descrito na referência mencionada. Na Figura 6.19 se apresentam as curvas que correspondem a esses valores (máximo mínimo e intermediário). O melhor ajuste das curvas experimental e numérica é obtido com o valor apresentado na Tabela 6.16 (curva com estrelas).



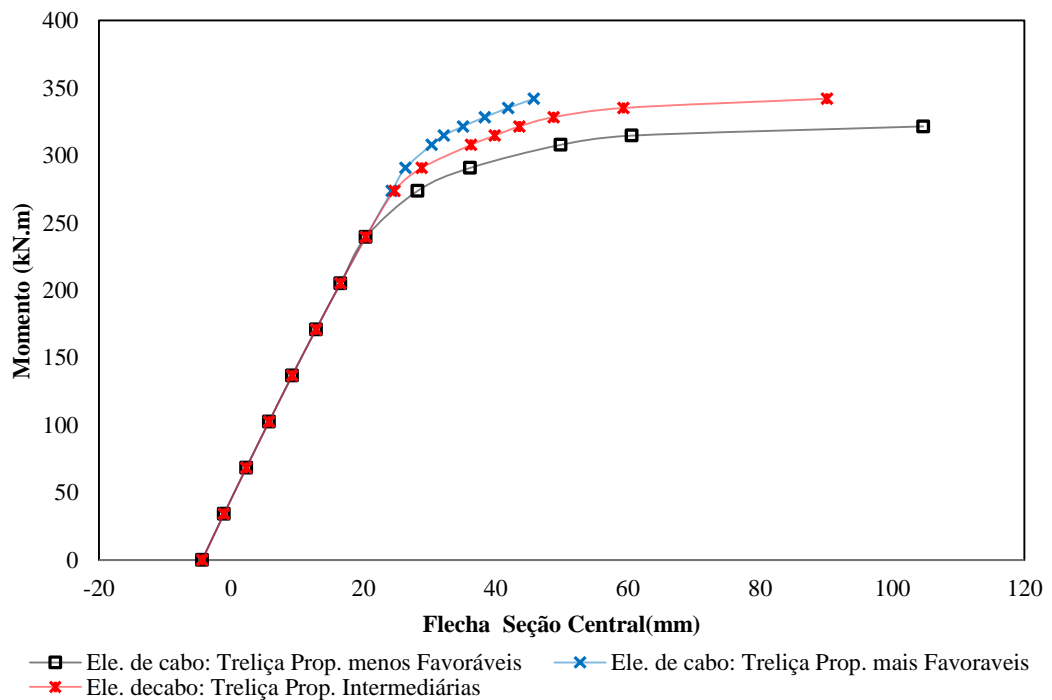


Figura 6.19. Calibração das propriedades de aço apresentadas em (CHEN e GU, 2005)

Uma vez definidas as propriedades correspondentes de todos os materiais (Tabela 6.16), se procedeu com modelamento das vigas protendidas BS1 teste 2 e BS2 teste 1, cujas características geométricas são as mesmas que as apresentadas na Figura 6.12.

No teste 2 da viga BS1 a protensão do elemento foi aplicada antes de aplicar o carregamento externo. A força axial efetiva inicial em cada cabo foi de 107,6 kN fazendo um total de 215,2 kN agindo na viga porque como pode ser observado na Figura 6.12 a viga tem dois cabos de protensão. A contra flecha medida, logo depois de aplicada a protensão foi 4,6 mm (Figura 6.20), obtida com o elemento de treliça como cabo de protensão. O cabo e a viga somente apresentam compatibilidade de deslocamentos nos extremos da viga, permitindo a rotação do elemento de cabo.

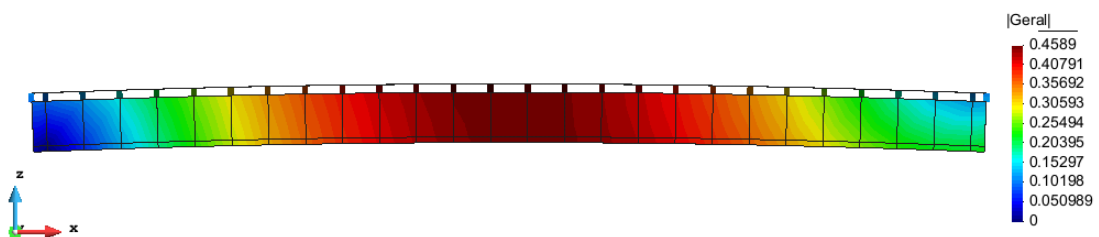


Figura 6.20. Fase inicial de protensão do elemento – Deslocamentos em cm

Quando a carga vertical foi aplicada gradualmente na viga, a deflexão incrementou-se proporcionalmente com o carregamento, antes do escoamento na mesa inferior da viga de aço acontecer, no momento em que a deflexão central era 19,1 mm. (Figura 6.21)

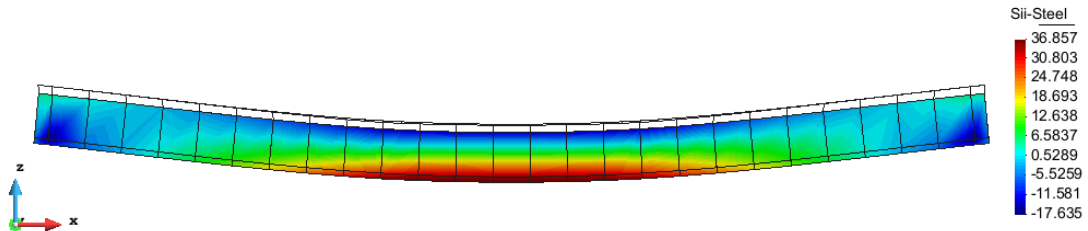


Figura 6.21 Etapa 9 Carga de Escoamento da Viga de Aço – Tensões de von Mises ( $\text{kN/cm}^2$ )

Com uma carga de 363 kN, equivalente a 327 kNm no meio do vão, trincas longitudinais foram observadas na laje de concreto. O momento máximo atingido no teste experimental foi de 335 kNm, e a flecha foi 80,8 mm aproximadamente  $L/62$ . As forças de protensão nos cabos se incrementaram linearmente antes da viga atingir o escoamento, depois disso um incremento não linear foi observado na força de tração do cabo até atingir uma força máxima de 193,9 kN (em cada cabo) aproximadamente 80% maior que a inicial, correspondente ao 76% da força de ruptura do cabo que é 255,56 kN.

Nesse modelo comparam-se os efeitos do uso de 20 elementos catenária e 20 elementos de treliça em cada cabo. A aparição de trincas para os dois modelos aconteceu quando a carga foi 365 kN, que corresponde a um momento de 329 kNm (Figura 6.22).

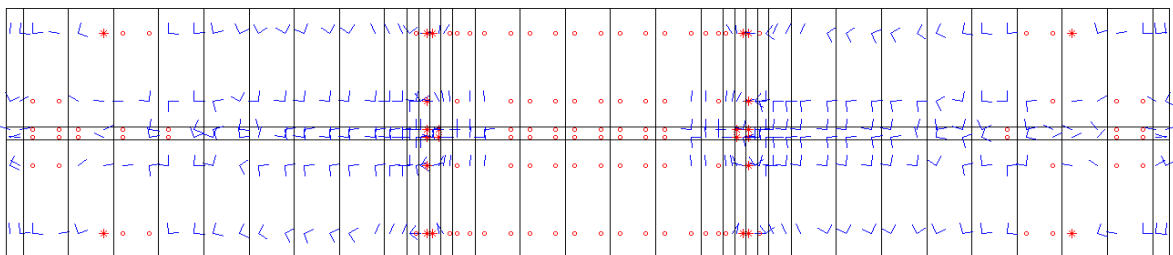


Figura 6.22. Trincas longitudinais e Concreto em Compressão – Carga Última

Na Figura 6.22 se observa o concreto em compressão (bolinhas) e a aparição das trincas longitudinais na camada superior da laje.

Os modelos numéricos apresentaram o colapso, quando o momento atuante foi de 342 kNm. Em todos os casos a falha foi atingida pelo esmagamento do concreto. Na Figura 6.23 são apresentadas as curvas “Deflexão Central vs. Momento Atuante” dos modelos da viga mista com o cabo modelado por treliças (E.T) e por catenárias (E.FC).

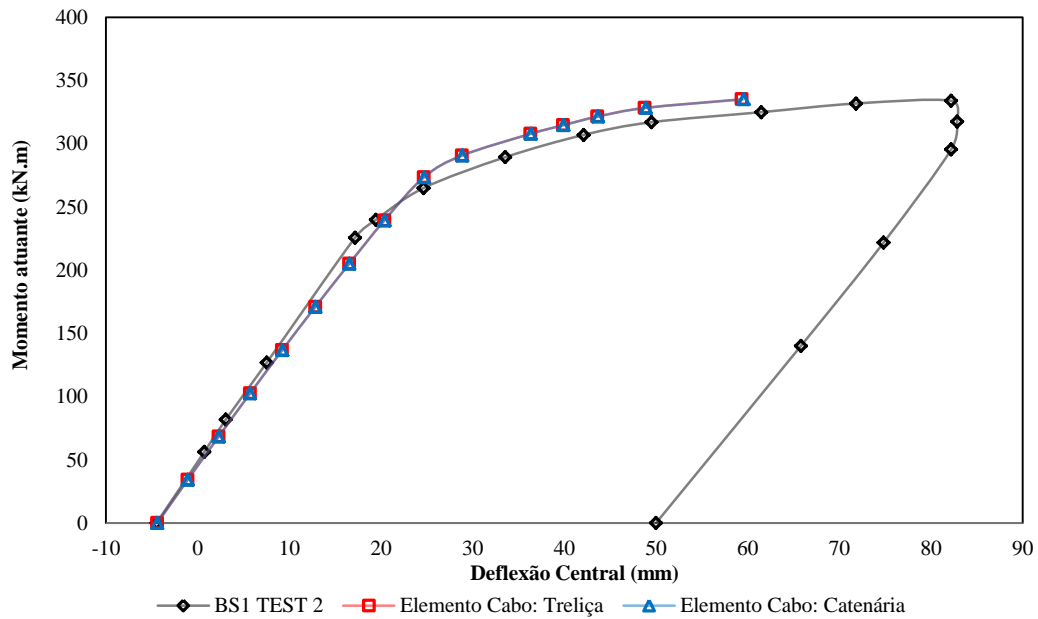


Figura 6.23. Comparação Modelo Numérico E.T, E.FC e Teste Experimental

As diferenças geradas nos deslocamentos dos pontos centrais das vigas, pelo uso do elemento E.T ou E.FC são menores a décimos de milímetro mostrando a pouca variação que o uso de um ou de outro elemento gera no modelo devido às configurações retas do cabo entre desviadores e a elevada força de protensão presente.

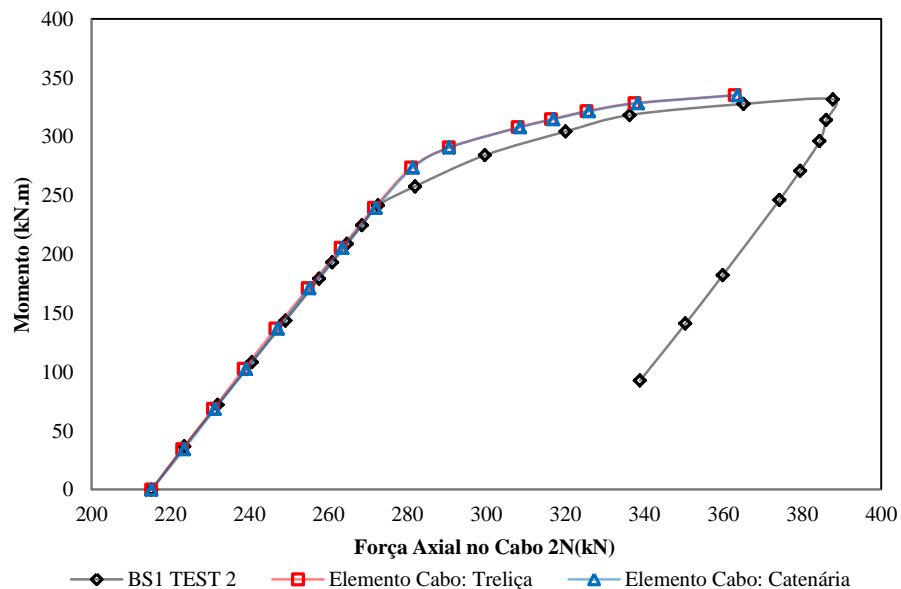


Figura 6.24. Incremento de força de protensão em cada cabo durante o processo de carga na viga (Dois cabos)

As forças axiais iniciais nos cabos de protensão são de 107,6 kN no início do teste experimental e dos modelos. O incremento das forças axiais nos cabos do teste e dos dois modelos numéricos é apresentado na Figura 6.24. Nos dois modelos numéricos os resultados da força, que estão graficados, foram medidos na metade do vão do cabo.

Na comparação do incremento de forças no cabo de protensão se pode observar que as curvas dos modelos e a experimental são muito similares (Figura 6.24), apresentando uma diferença leve após o escoamento da mesa inferior da viga de aço. A partir da forma da curva apresentada na Figura 6.24 pode-se observar que o comportamento das forças nos cabos guarda relação e é controlada pela deformação global da estrutura tal como foi comentado por (DALL'ASTA e ZONA, 2005). O incremento final da força axial no cabo, segundo (CHEN e GU, 2005), foi de 80% e o incremento final nos modelos numéricos foi de 69% correspondente a um passo de carga antes do colapso numérico, isso devido a que os valores da tensão no cabo, depois da ruptura do concreto, não puderam ser obtidos em nenhum dos modelos desenvolvidos.

### **Viga BS2**

No ensaio experimental da viga BS2, reportado em (CHEN e GU, 2005), a força de protensão inicial foi de 112,6 kN, um pouco maior que aquela presente na viga BS1, produzindo uma contra flecha inicial de 5,7 mm na metade do vão. O escoamento da mesa inferior da viga de aço aconteceu quando o momento no meio do vão era 248,6 kNm, com uma força em cada cabo de 148,7 kN, a deflexão central foi igual a 19,9 mm. No instante que as trincas longitudinais apareceram no topo da laje de concreto, o momento foi de 351,4 kNm, mas a falha não tinha acontecido ainda. O colapso da viga aconteceu para um momento de 357,2 kNm, com uma deflexão de 82,1 mm aproximadamente 1/57 do vão livre do elemento. A força última em cada um dos cabos de protensão era 218,5 kN, ou seja, 94% maior que a força inicial. Na simulação numérica o momento de falha é igual a 357 kNm com uma flecha de 56,0 mm no caso de (E.FC) e 55,8 mm (E.T) (Figura 6.25). O momento de falha nas simulações está definido pela impossibilidade da convergência do equilíbrio entre as forças internas e externas que atuam no processo.

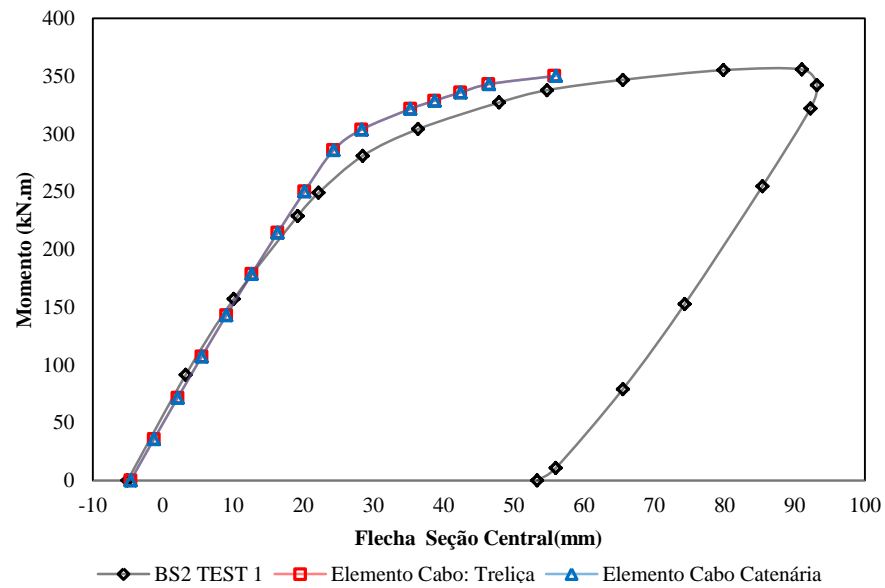


Figura 6.25. Deflexão central vs. Momento Atuante Viga BS2

Segundo os dados apresentados na Tabela 6.16, a tensão de ruptura dos cabos é 1.860 MPa, correspondente a uma força de protensão de 255,6 kN em cada cabo. No modelo numérico a força axial final no cabo é 184 kN 64% maior que a força inicial correspondente a 72% da força equivalente à tensão de ruptura do cabo. No caso do teste experimental a força axial no cabo atingiu 94% de incremento em relação à força de protensão inicial em cada cabo, quase 88% da força de ruptura do cabo de protensão (Figura 6.26).

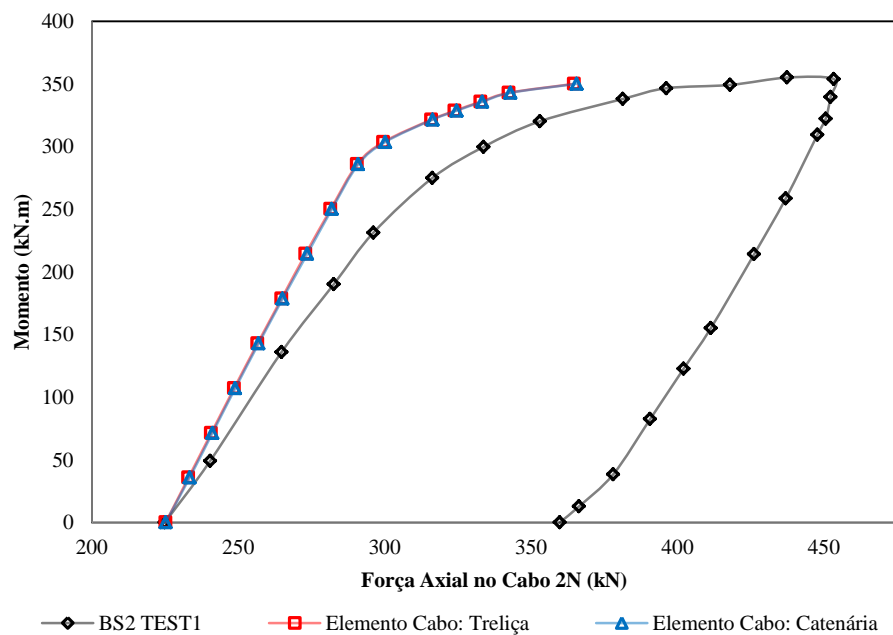


Figura 6.26. Força nos cabos na viga BS2

Os efeitos que são gerados pela não consideração da não linearidade geométrica são mais apreciáveis neste segundo modelo. A comparação dos valores críticos é resumida na Tabela 6.18. Nesta tabela são expressos os seguintes valores: Força de protensão inicial nos cabos da viga mista ( $2N_0$ ); momento de escoamento mesa inferior da viga de aço ( $M_y$ ), incremento na força de protensão nos dois cabos nessa fase de carga ( $\Delta N_y$ ) e a deflexão da viga ( $\delta_y$ ); momento de falha ( $M_u$ ), incremento na força de protensão ( $\Delta N_u$ ) e deflexão correspondentes a esse passo de carga ( $\delta_u$ ).

Os modelos numéricos propostos tem boa correlação quando o comportamento da viga é elástico. No modelo da viga BS1, quando se alcança o escoamento na mesa inferior da viga de aço, os momentos diferem aproximadamente de 2%, o incremento na protensão do cabo 6% e a flecha de 7% em relação com os valores registrados nos experimentos. No colapso da seção, o momento tem uma diferença de 3%, o incremento de tensão no cabo um 15% e a flecha quase 35%.

Tabela 6.18. Comparação de Valores Numéricos e Experimentais

VIGA	ORIGEM	$2N_0$ [kN]	$M_y$ [kN m]	$\Delta N_y$ [kN]	$\delta_y$ [mm]	$M_u$ [kN m]	$\Delta N_u$ [kN]	$\delta_u$ [mm]
BS1	TEST 1	---	160,0	---	17,3	---	---	---
	NUMERICO	---	160,0	---	17,0	---	---	---
BS1	TEST 2	215,2	255,3	59,2	19,1	335,0	172,6	80,8
	NUM. TRE	215,2	250,0	56,4	20,4	342,0	148,4	59,4
	NUM. FLO	215,2	250,0	56,8	20,4	342,0	148,4	59,6
BS2	TEST1	225,2	248,6	72,2	19,9	356,0	212,5	82,1
	NUM. TRE	225,2	261,2	56,4	16,4	357,0	140,4	55,8
	NUM. FLO	225,2	261,2	56,8	16,4	357,0	140,4	55,8

Os erros do modelo da viga BS2 em relação aos valores da experiência tem a mesma ordem de magnitude. Os valores da Tabela 6.18 permitem concluir que na predição dos valores de escoamento o modelo numérico é confiável para fins de dimensionamento sob carga de serviço. Na situação de carga última a predição do momento último é confiável para fazer o dimensionamento, desde que a falha não esteja associada com a falha dos cabos de protensão já que o incremento de tensão nos cabos não corresponde com os dados experimentais. A flecha sobre carga última também não é corretamente associada, mas trata-se de uma informação de importância secundária e difícil avaliação.

No anexo A apresenta-se uma comparação entre a previsão de momento último, obtida pelo código computacional e o valor calculado por expressão analítica obtida do trabalho de (CHEN e GU, 2005).

### 6.3 VIGAS MISTAS CONTINUAS

Em (Liu, 2003) apud (NIE *et al.* 2009), sete vigas mistas contínuas de dois vãos foram ensaiadas: uma sem protensão (CBB1) e seis protendidas (PCCB1-PCCB6). As dimensões da seção transversal das vigas estão apresentadas na Figura 6.27.

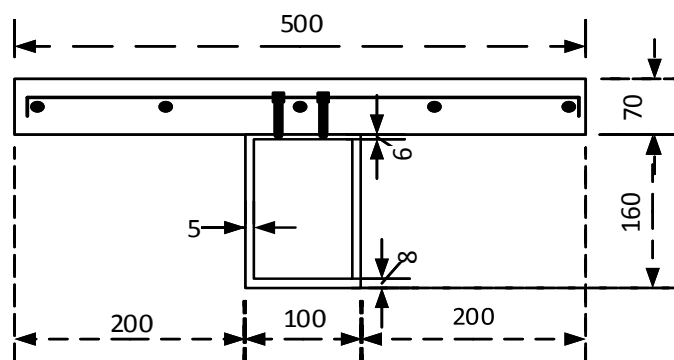
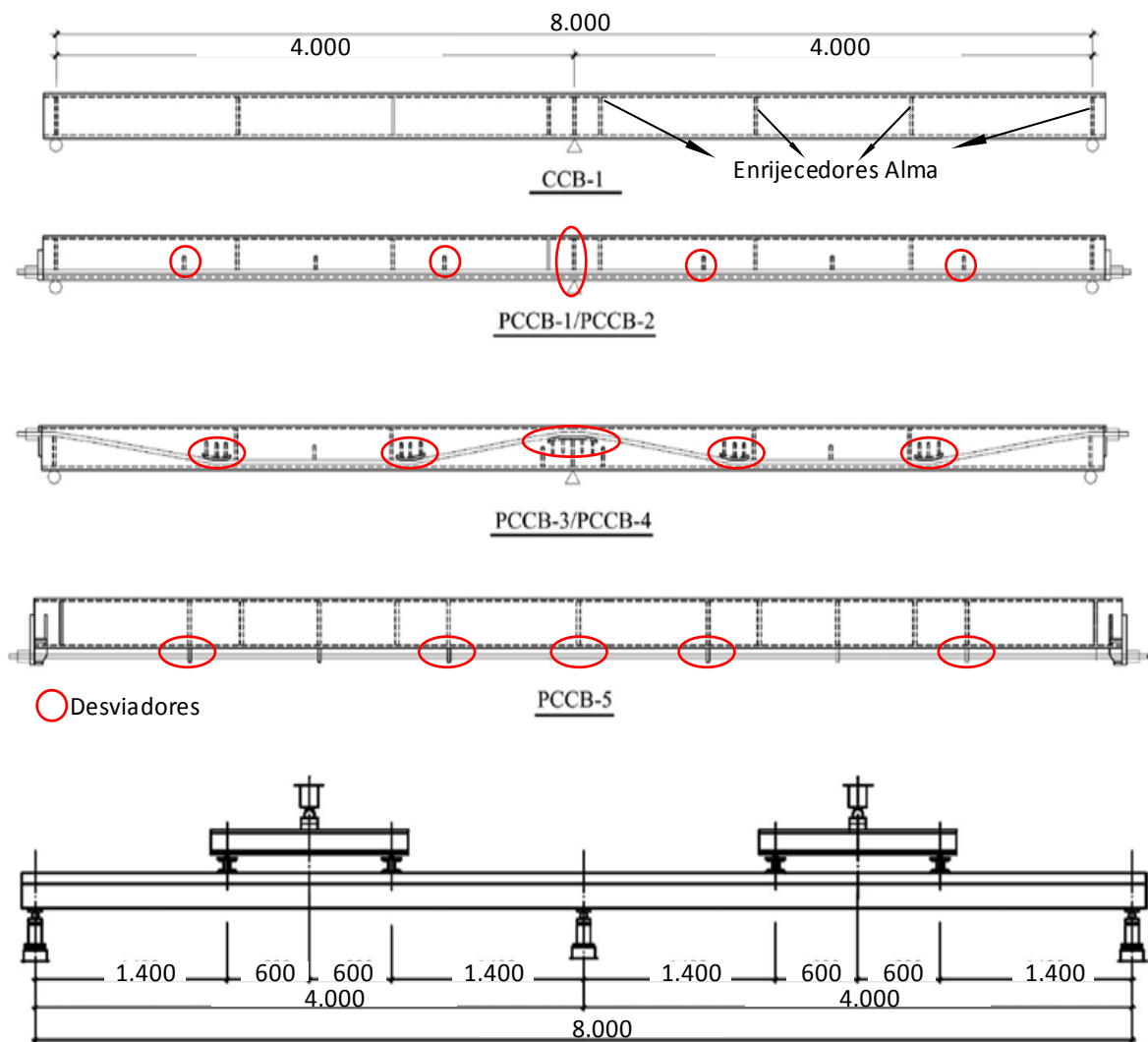


Figura 6.27 Seção Transversal. Dimensões em mm

Para conhecer a potencialidade do código computacional desenvolvido, foram modeladas quatro vigas protendidas das ensaiadas em (Li, 2003) apud (NIE *et al.* 2009) PCCB1, PCCB2, PCCB3 e PCCB5; porque a comparação dessas vigas permite ilustrar os efeitos que gera a variação das seguintes características do cabo de protensão:

- Forma definida pelos desviadores no vão da viga mista
- Posição dos pontos de compatibilidade de deformações
- Quantidade de cabos



Fonte: (NIE *et al.* 2011) Adaptado pelo autor

Figura 6.28. Vigas Modeladas e esquema de aplicação de cargas. (mm)

A geometria de cada uma das vigas modeladas são apresentadas na Figura 6.28 junto ao esquema de aplicação de cargas. Em todas as vigas consideradas os vínculos de extremo são do tipo apoios simples e vínculo central é um apoio duplo. Em relação à posição do aço de reforço na laje de concreto não existem dados na referência consultada, pelo que é suposto que a mesma está soldada na ponta dos conectores a 45 mm da borda inferior da laje de concreto, nesse sentido a Figura 6.27 da somente uma ideia dessa posição, da mesma forma a separação da armadura longitudinal que se observa não necessariamente corresponde com aquela do ensaio desde que o único dado disponível era as quantias dos reforços nas duas direções 1,62% no sentido longitudinal e 0,67% no sentido transversal.



Tabela 6.19. Características das Vigas Modeladas

Material	Propriedades	CCB1 e PCCB1-5	
Aço Estrutural	Tensão de Escoamento	Almas $\sigma_y$	287,7 MPa
		Mesa Superior $\sigma_y$	249,3 MPa
		Mesa Inferior $\sigma_y$	272,3 MPa
	Tensão Última	Almas $\sigma_u$	443,3 MPa
		Mesa Superior $\sigma_u$	428,3 MPa
		Mesa Inferior $\sigma_u$	489,4 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$	200.000 MPa
	Poisson	$\nu$	0,3
	Deformação Última (alma)	$\epsilon_u$	0,24
Deformação Última (mesas)	$\epsilon_u$	0,28	
Aço de Reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y$	300 MPa
	Tensão Última	$\sigma_u$	400 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$	200.000 MPa
	Poisson	$\nu$	0,3
	Deformação Última	$\epsilon_u$	0,25
Concreto	Resistência à Compressão	$f_c$	31,4 MPa
	Resistência à Tração	$f_t$	2,6 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E$	43.339 MPa
	Poisson	$\nu$	0,2
	Deformação Última	$\epsilon_u$	0,0045
Conector	Espaçamento 1	$s_1$	60 mm
	Espaçamento 2	$s_2$	80 mm
	Número total	$n_{conec}$	116
	Diâmetro x Altura	$d \times h$	8 x 45 mm
	Número de Linhas	$n$	2
	Poisson	$\nu$	0,3
	Constante 1	$a$	18 kN
	Constante 2	$b$	5 $\text{mm}^{-1}$
Cabo	Tensão de Escoamento	$\sigma_y$	1.680 MPa
	Tensão Última	$\sigma_u$	1.860 MPa
	Módulo de Elasticidade	$E_s$	200.000 MPa
	Área Transversal	$A_t$	139,0 $\text{mm}^2$
	Peso Linear	$w$	10,57 N/m
	Deformação Última	$\epsilon_u$	0,25

Em todos os casos, os cabos das vigas PCCB estão aprisionados nas ancoragens dos extremos e direcionados por dois desviadores na região do momento positivo e um desviador sobre o apoio intermediário. Nesses pontos, a viga e o cabo têm compatibilidade de deformação, durante todo o processo incremental de carga. As cargas foram aplicadas sobre toda a largura da laje de concreto segundo o esquema da Figura 6.28.

As características dos materiais usados em cada uma destas vigas estão detalhadas na Tabela 6.19, não qual também podem ser encontradas as características dos conectores e do cabo de protensão. Todos os dados, exceto os referentes ao cabo de protensão e desviadores do cabo no vão da viga foram fornecidos. Para maiores detalhes sobre a resistência do concreto em tração e em compressão é recomendado consultar (NIE et.al. 2009).

Nas simulações realizadas, em todos os casos exceto para a viga CCB1, a análise é feita em duas etapas:

-Na 1ª etapa, são aplicadas as cargas de protensão, que resultam do processo de estiramento e fixação dos extremos do cabo nas ancoragens. Nesta etapa a tensão efetiva no cabo é aquele valor de tensão fornecido em (NIE et al. 2009). Na Tabela 6.20 são apresentadas as forças de protensão efetivas presentes nos cabos das vigas modeladas e a quantidade de cabos em cada viga. A forma longitudinal dos cabos está apresentada na Figura 6.28 a posição na seção transversal das vigas vai ser apresentada mais abaixo quando se tratem os modelos correspondentes.

Tabela 6.20. Forças de Protensão nos cabos

Vigas	CCB1	PCCB1	PCCB2	PCCB3	PCCB4	PCCB5
$F_p$ na viga [kN]	0,00	130,62	257,68	133,75	246,44	256,01
# de cabos	0	1	2	1	2	2
$F_p$ num cabo [kN]	0,00	130,62	128,84	133,75	123,22	128,01

- Na 2ª etapa, depois de aplicar as cargas correspondentes à protensão da viga, as cargas verticais são aplicadas de forma incremental até alcançar o colapso da viga mista.

Em todas as simulações numéricas feitas foi modelada somente a metade da viga pela condição de simetria existente no apoio central. Nas aplicações anteriores (caso das vigas BS1 e BS2) foi observado que quando o cabo de protensão é modelado com o elemento de treliça ou o elemento catenária os resultados são muito similares. A superioridade do elemento de catenária em relação com o elemento de treliça, observada nos exemplos de cabo isolado, nos exemplos BS1 e BS2 não foi perceptível devido à configuração reta dos cabos entre ancoragens, ao baixo grau de curvatura dos cabos, à inexistência de cargas normais ao cabo e ao baixo peso próprio do cabo. Devido a que as características gerais do cabo nos exemplos PCCB continuam sendo as mesmas vai ser suposto um comportamento similar com as BS por

isso agora vai ser usado somente o elemento treliça em três das quatro simulações, pois é usado na maioria dos modelos de vigas mistas protendidas propostos na literatura.

Os modelos PCCB apresentam desviadores intermediários então a influência dos elementos de interface desenvolvidos vai ser estudada nestas aplicações. Do mesmo jeito que com as vigas BS, os valores obtidos nas simulações das vigas PCCB vão ser comparados com os valores experimentais, para mostrar a correlação que existe entre valores simulados e os valores medidos nos testes desenvolvidos.

O modelo numérico da viga CCB1 apresenta (Figura 6.29): 570 elementos na viga de aço, 228 elementos na laje de concreto e 116 conectores acomodados em duas linhas segundo o esquema da Figura 6.27. Então longitudinalmente a viga apresenta 114 elemento cujo tamanho respeita a separação entre conectores segundo os dados da Tabela 6.19.

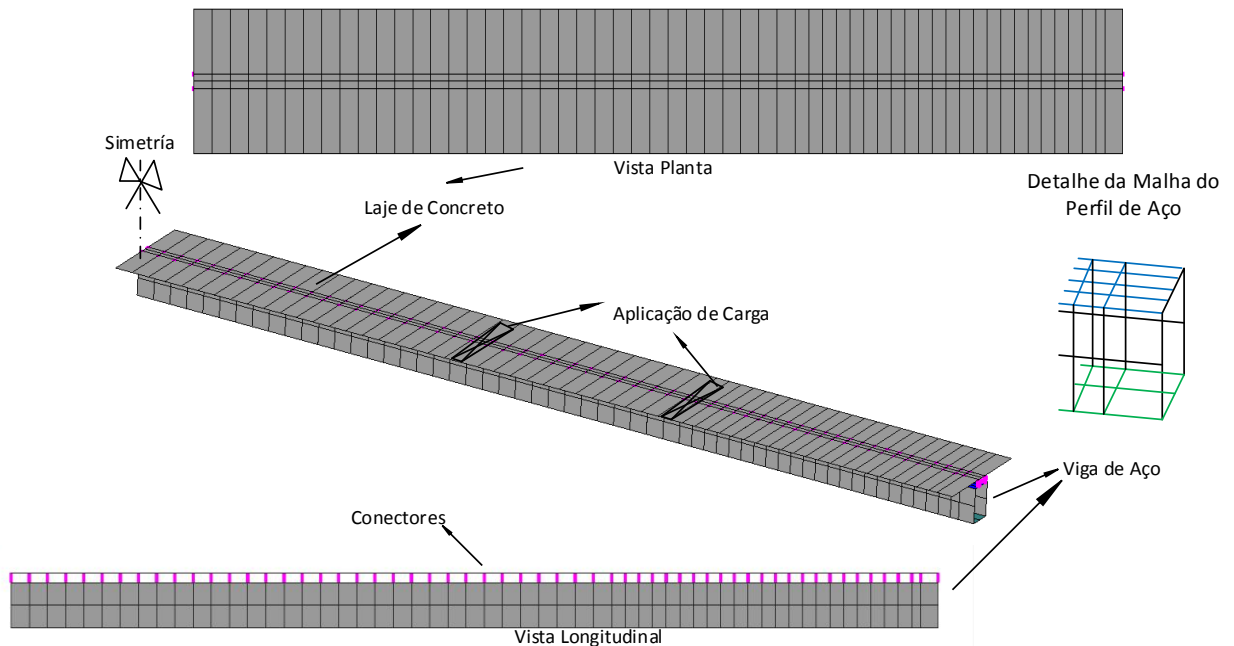


Figura 6.29. Malha de Elementos Finitos Viga CCB1

As curvas da Figura 6.30 mostram a correlação entre o modelo numérico e o teste experimental executado sobre a viga sem protensão CCB1. Quando a carga é incremental, o processo de descarga não pode ser modelado, pois os elementos de concreto tinham atingido a ruptura das fibras mais comprimidas. A curva experimental e a curva numérica, no processo incremental de carga, têm claramente definidas três etapas que caracterizam o comportamento do elemento:

- Etapa 1: Elástica, tipifica o comportamento do elemento até um carregamento de 140 kN aproximadamente. Como pode ser observado até o primeiro incremento de carga de 18,86 kN a curva mostra uma inclinação um pouco maior que no resto da etapa, o que mostra concordância com os dados da experiência, onde sinalam que a carga de fissuração foi de 13 kN.

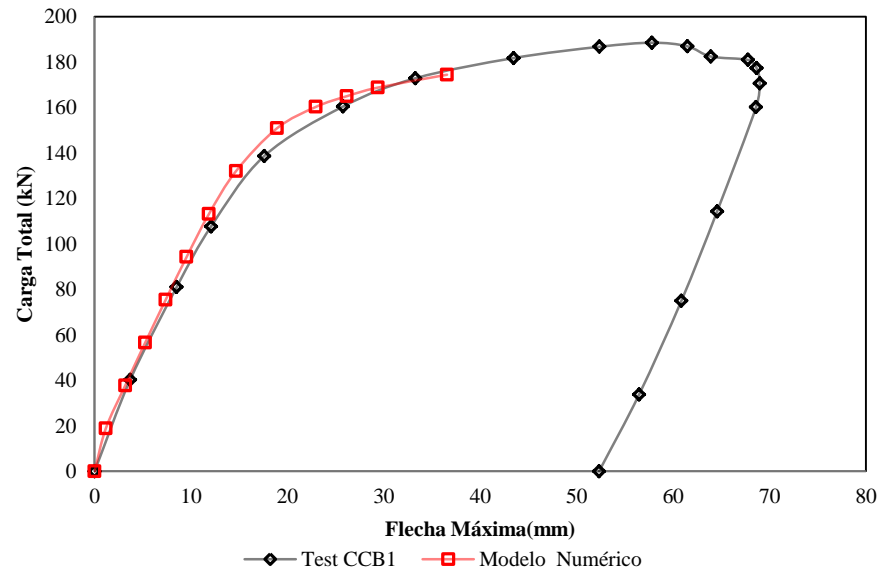
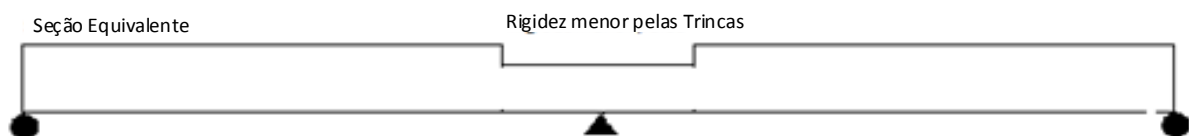


Figura 6.30. Comparação viga sem protensão Viga CCB1

O aparecimento de trincas no modelo acontece logo depois de convergido o 1º incremento, na Figura 6.32 é apresentado o estado de fissuração de algumas camadas da laje de concreto. Entre a camada seis e sete de concreto estão posicionadas as duas camadas de aço de reforço. Pode ser observado que na camada seis não existem trincas nesta 1ª fase de carregamento. A teoria do comportamento do concreto armado em flexão prediz este fenômeno (JIMENEZ MONTOYA, MESEGUER e CABRE, 2000) que justifica o método de dimensionamento de rigidezes equivalentes proposto por (NIE *et al.* 2009) para vigas mistas contínuas. (Figura 6.31)



Fonte: (NIE *et al.* 2009)

Figura 6.31. Esquema de seções equivalentes

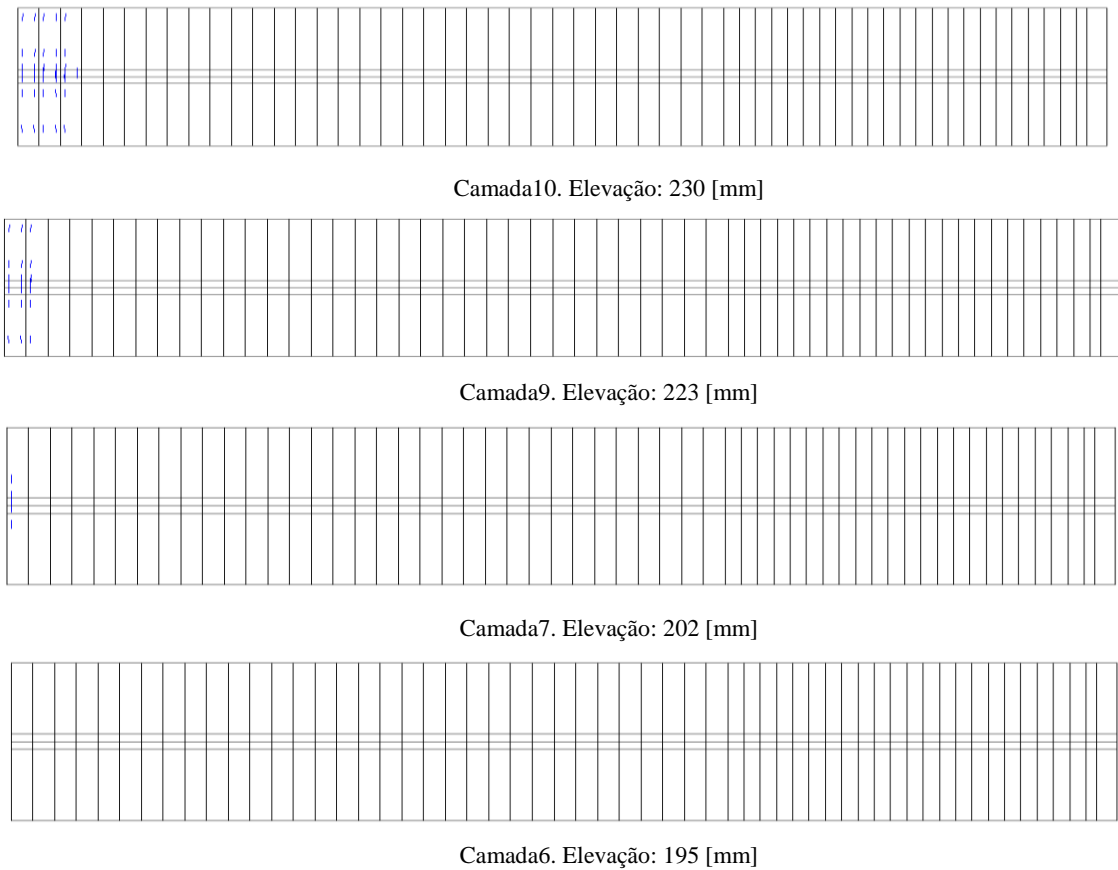


Figura 6.32. Vista em planta das camadas da laje de concreto. Fissuração. Passo de Carga um

- Etapa 2: Escoamento, começa o comportamento plástico dos materiais, propriamente as tensões de tração na mesa superior da viga de aço, perto do apoio interno atingem a tensão de escoamento, depois da carga atingir aproximadamente 140 kN (oitavo ponto da Figura 6.30). A distribuição de tensões correspondente a esta etapa de carga é apresentada na Figura 6.33.

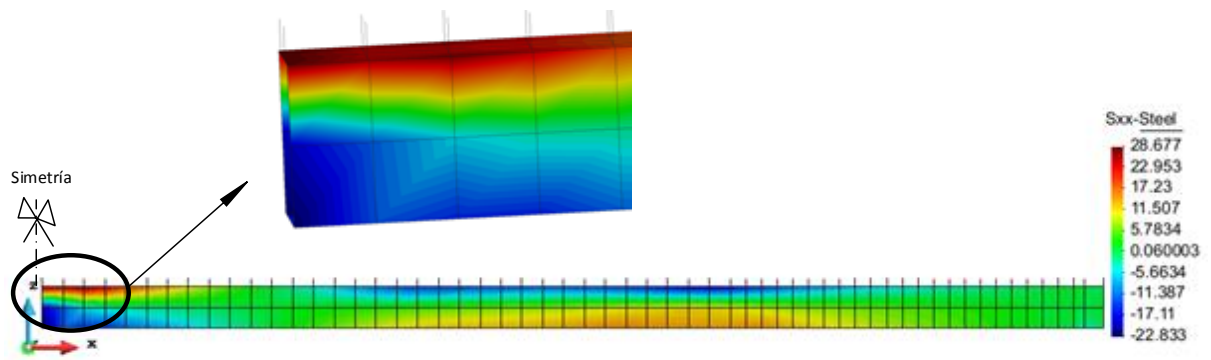


Figura 6.33. Tensões axiais na viga de aço (kN/cm<sup>2</sup>)

O valor máximo de tensão é 286,7 MPa que é maior que  $\sigma_y$  da mesa superior. A deflexão da viga medida nos pontos de maior flecha foi 14,7 mm. No trabalho de (NIE *et al.* 2009) está registrado que a flecha produzida pelo carregamento, que gera o escoamento é de 11,5 mm.

- Etapa 3: Plastificação total, nesta etapa as inclinações das curvas são praticamente nulas. A mesma começa quando a carga atinge um valor de 160 kN, no caso da curva experimental se prolonga até um valor de carga igual a 188,6 kN e no caso da curva numérica até 175 kN as flechas do carregamento último são respectivamente; 58,8 mm e 36,6 mm. A carga que gera a falha no modelo numérico corresponde a 95% da carga última, que gerou a falha no teste experimental. A falta de dados sobre as características dos materiais e a natureza da lei de comportamento adotada para os materiais podem, ente outras variáveis, gerar essa diferença de 5% para atingir o carregamento máximo do teste.

Na Figura 6.34 se apresentam a deformada final da viga modelada, as tensões da laje de concreto no plano perpendicular à aplicação da carga e o estado de fissuração da camada superior da mesma. O esquema de fissuração corresponde ao mostrado em (NIE, *et al.* 2009). Os pontos com estrela (\*) definem os pontos onde acontece o esmagamento do concreto.

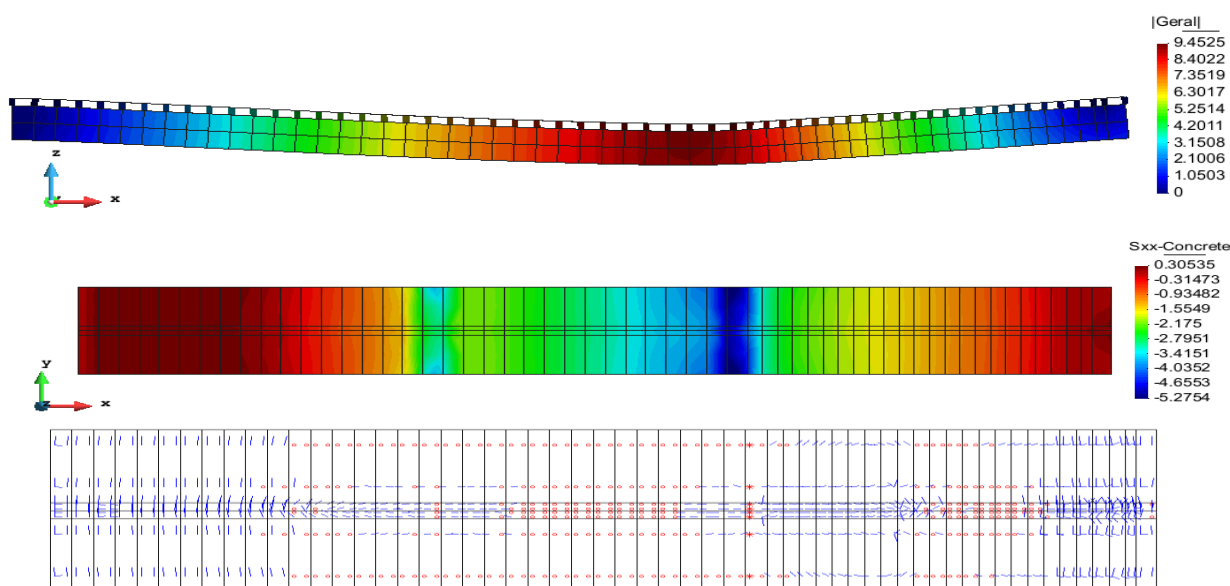


Figura 6.34. Etapa da falha da viga CCB1- Deslocamentos cm, tensões kN/cm<sup>2</sup>

Na continuação é apresentada uma viga mista continua de dois vãos, PCCB1, com as mesmas características geométricas e físicas que a viga CCB1. Neste caso a viga é protendida por um cabo horizontal colocado a 38 mm da mesa inferior do perfil e bem no centro da seção

(Figura 6.35). A diferença qualitativa desse cabo com respeito aquele, das vigas BS1 e BS2 é que é direcionado por desviadores no vão da viga (Figura 6.28).

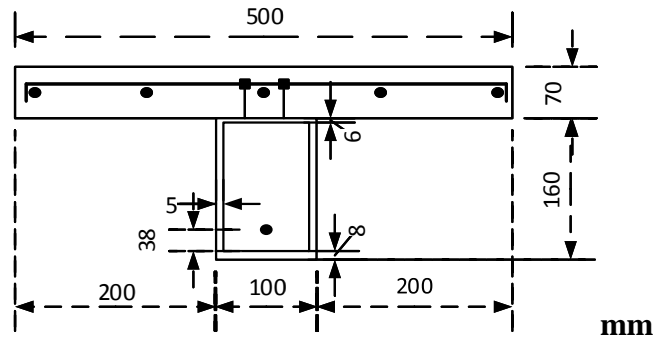


Figura 6.35. Seção transversal Viga PCCB1

A viga PCCB1 (Figura 6.36) foi modelada com: 700 elementos na viga de aço, 174 elementos na laje de concreto; 116 conectores com a mesma disposição que a viga CCB1 e 15 elementos no cabo de protensão. As demais características da viga mista já foram apresentadas na Tabela 6.19.

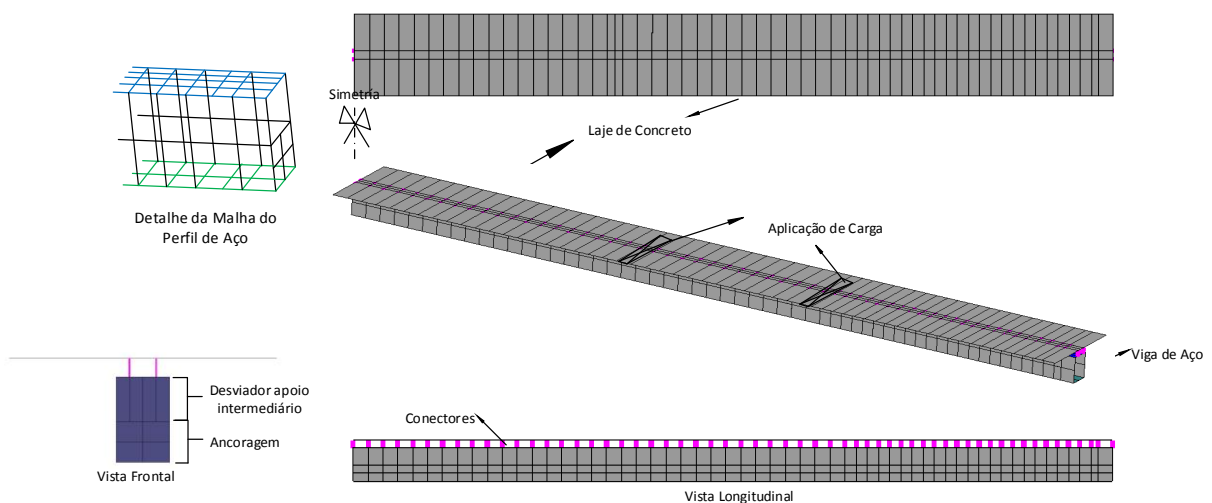


Figura 6.36. Malha de Elementos Finitos – viga PCBB1

As curvas “Deflexão Máxima vs. Carga Vertical Total” do teste e do modelo estão apresentadas na Figura 6.37. Dessa vez se apresentam três curvas numéricas. Na 1ª o cabo é considerado perfeitamente aderido à viga metálica nos pontos dos desviadores, na 2ª e na 3ª é empregado um elemento linear de interface junto com o elemento treliça para simular o movimento independente do cabo no eixo longitudinal em relação aos desviadores da viga.

Neste modelo e nos outros foi considerado um coeficiente de atrito  $\mu = 0$ , pois é o valor considerado pela maioria dos autores consultados.

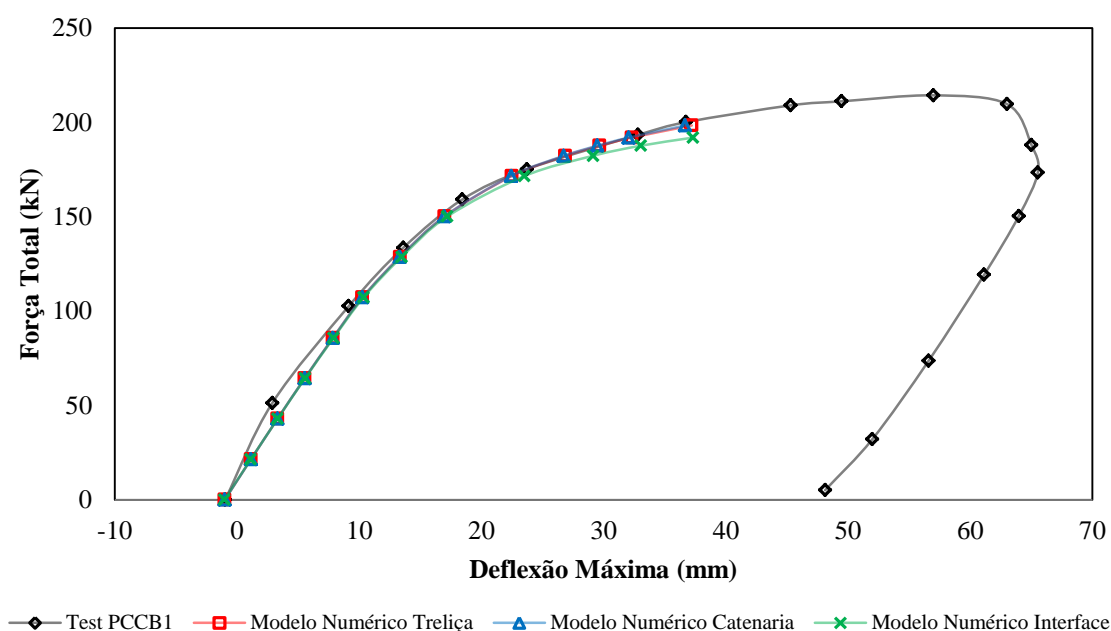


Figura 6.37. Curvas “Deflexão Máxima vs. Carga Vertical Total” Viga PCCB1

As curvas numéricas tem uma correlação boa com a curva experimental nas fases iniciais do processo incremental de carga. É possível identificar as mesmas fases que no processo incremental da viga CCB1.

Na Figura 6.37 as curvas correspondentes aos modelos numéricos de treliça e catenária correspondem aos modelos com compatibilidade de deslocamentos perfeita. As duas se sobrepõem completamente durante todo o processo incremental de carga, já o modelo de treliça com os elementos de interface incorporados, gera uma leve perda de rigidez do elemento, já que a rigidez axial do cabo não contribui mais para a viga metálica. Este fenômeno da perda de rigidez é apontado em (DIEP, TANABE e UMEHARA, 2001). Devido à existência de desviadores no vão da viga, o efeito da não consideração da não linearidade é mínimo segundo o critério exposto em (DALL'ASTA, RAGNI e ZONA, 2007)

O incremento da força axial no cabo de protensão pode ser observado na Figura 6.38. Nota-se que o modelo numérico apresenta uma boa correlação com os resultados experimentais.

A curva da medição de *Forças no Cabo* começa no ponto (0,0) quando não existe carregamento vertical no elemento nem força axial no cabo. Posteriormente é feita a protensão do cabo (0, 143.8) depois das perdas imediatas pela acomodação do cabo nas



ancoragens a força axial efetiva inicial fica em (0, 131.0), em realidade os resultados experimentais e numéricos são comparados desde esse ponto porque este é o ponto de início no modelo numérico.

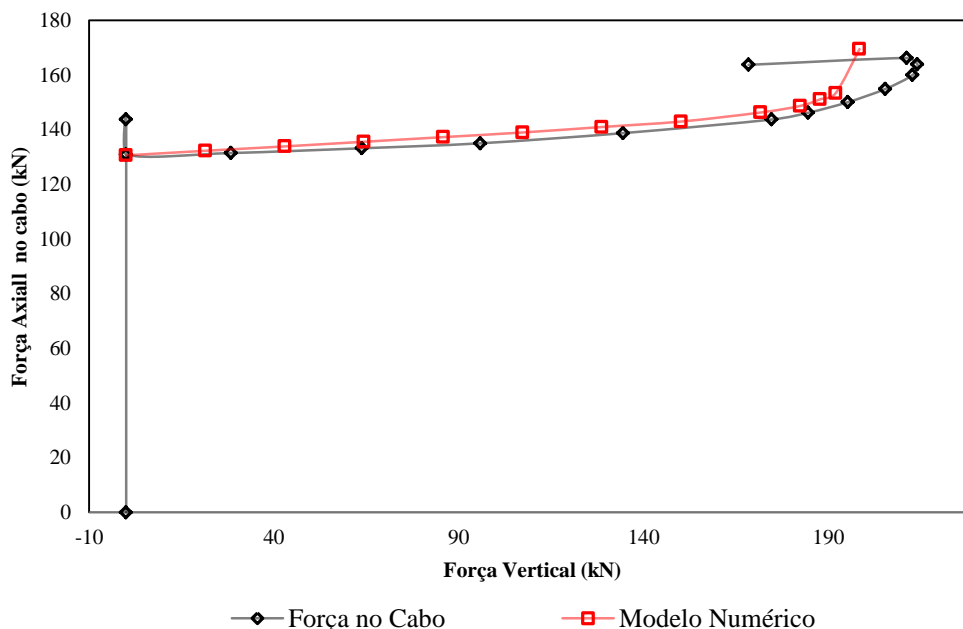


Figura 6.38. Incremento das forças axiais no cabo de protensão

Na viga PCCB1 pode-se observar que o carregamento que gera a aparição das trincas é muito maior que na viga sem protender, o que é um dos benefícios da protensão neste tipo de estrutura (NIE *et al.* 2009). A comparação dos valores experimentais e numéricos é apresentada na Tabela 6.21.

Tabela 6.21. Comparação dados Experimentais e Numéricos

	Ensaio Experimental		Modelo Numérico		Erro	
	Carga	Flecha	Carga	Flecha	Carga	Flecha
Escoamento V. Aço	102,3	9,1	107,25	10,3	4,79	13,18
Ruptura do concreto	214,0	56,4	198,41	37,2	6,5	33

Na Figura 6.39 se apresentam as curvas numéricas “Deflexão vs. Força Vertical” das vigas CCB1 e PCCB1, onde se pode observar o aumento na rigidez da peça e da capacidade última de carga gerada pela protensão do elemento. A capacidade última de carga é incrementada de 174,45 kN a 198,41 kN e o incremento da rigidez pode ser observada pegando como o exemplo em ambas curvas o ponto correspondente a 174,45 kN de força

vertical, na curva CCB1 a rigidez nesse ponto é 4,77 kN/mm e na curva PCCB-1 é 7,76 kN/mm.

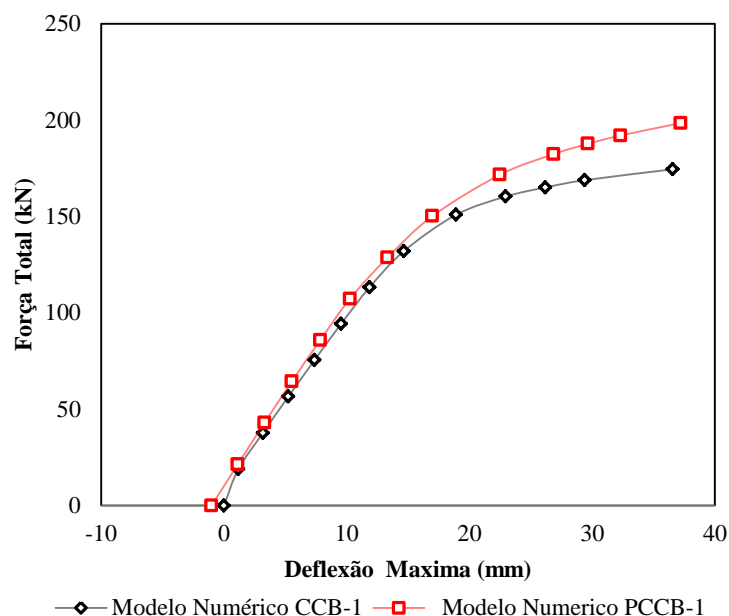
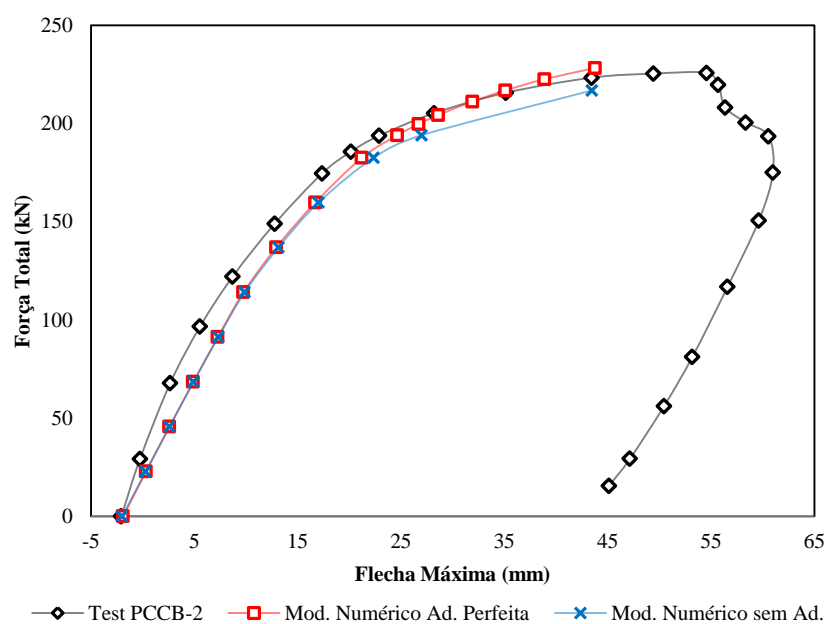


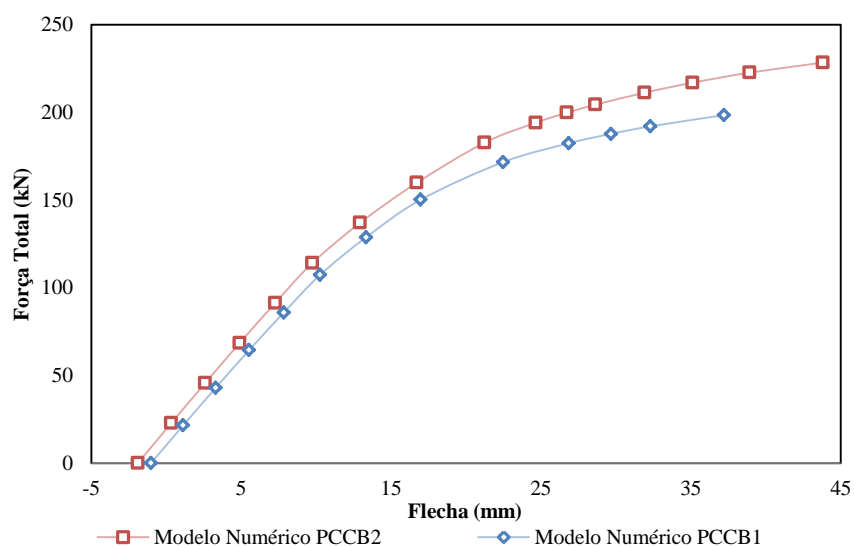
Figura 6.39. Comparação do efeito da protensão na viga

Para comparar o efeito do aumento da área transversal dos cabos, a viga PCCB2 também foi modelada. Nesta oportunidade a viga de aço foi modelada com 822 elementos, a laje de concreto tem 174 elementos, os conectores são em total 116 e os elementos para cada cabo de protensão são 15. A única diferença entre a viga PCCB1 e a viga PCCB2 é que esta última tem o dobro de área transversal no cabo de protensão, o que significa que são dois os cabos de protensão colocados à mesma distância da mesa inferior da seção. Logo a protensão final na viga também é o dobro. A malha de elementos finitos apresenta mais elementos na viga de aço, por esse motivo, já que as divisões na mesa inferior, nos desviadores e nas ancoragens são maiores, pois é necessário criar os pontos de conexão entre os cabos e a viga.

A correlação entre a curva experimental e a curva numérica é ótima. Na Figura 6.40 se apresenta esta correlação e embaixo são comparadas as curvas “Carga Total vs. Deflexão” dos modelos das vigas PCCB1 e PCCB2. A capacidade resistente é melhorada, mas o efeito do melhoramento global da rigidez é insignificante. As curvas dos testes mostram a mesma disposição (NIE *et al.* 2009).



(a)



(b)

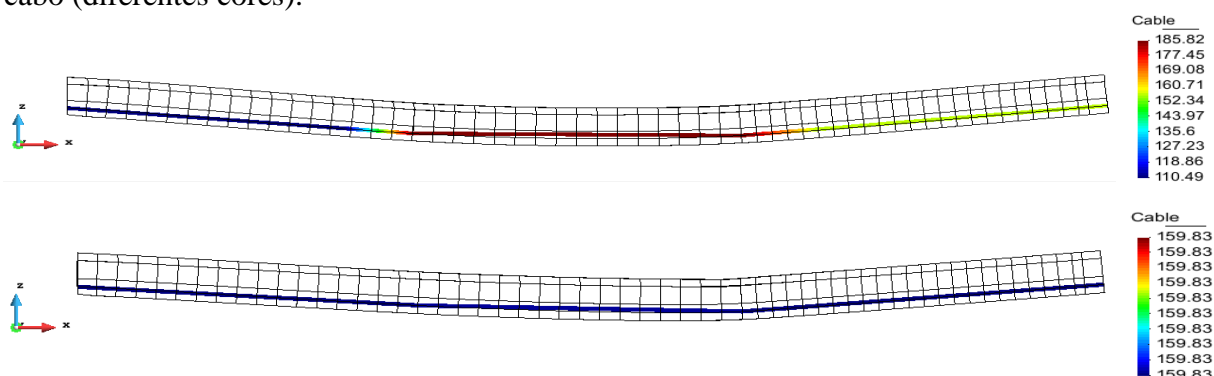
Figura 6.40. Comparações Viga PCCB2

Na Figura 6.40 (a) se mostram as curvas correspondentes ao modelo numérico com e sem elementos de interface. A curva considerando estes elementos tem uma rigidez menor não perceptível na figura. Por isso os resultados ponto a ponto são apresentados na Tabela 6.22. Os resultados de deslocamento da 1ª linha correspondem a fase da protensão da viga no instante quando a força vertical incremental é zero. Então a rigidez nesse ponto vai ser considerada igual àquela do 2º ponto incremental assumindo que o comportamento da viga mista nesse estágio de carga é basicamente elástico.

Tabela 6.22. Resultados da viga PCCB2 com e sem elementos de interface

	Modelo Numérico – Resultados Ponto a Ponto			
	Sem Interface	Com Interface	Sem Interface	Com Interface
Força Total [kN]	Deslocamento [mm]		Rigidez [kN/mm]	
0,0	-1,89	-1,98	10,24	10,06
22,8	0,34	0,29	10,24	10,06
45,7	2,61	2,59	10,16	9,99
68,5	4,91	4,93	10,08	9,91
91,3	7,27	7,34	9,97	9,80
114,2	9,76	9,88	9,80	9,62
137,0	12,94	13,16	9,24	9,05
159,8	16,72	17,02	8,59	8,41
182,6	21,23	22,37	7,90	7,50
194,1	24,65	27,01	7,31	6,69
216,9	35,11	43,50	5,86	4,77
228,3	43,80	----	5,00	----

O efeito principal do uso dos elementos de interface pode ser percebido quando se observam as tensões no cabo de protensão. A diferença é óbvia, pois o modelo que considera aderência perfeita não respeita, o que a teoria diz sobre a tensão ser constante em todo o cabo no caso do atrito zero. A Figura 6.41 mostra as tensões no cabo dos modelos PCCB2 (postprocesso GiD) e pode ser observado o fenômeno descrito. O primeiro esquema corresponde ao modelo numérico com os elementos de interface implementados, mostra o cabo com uma mesma força axial (cor amarela) e o segundo esquema corresponde ao modelo numérico sem os elementos de interface implementados, apresenta diferentes forças axiais no cabo (diferentes cores).



**Condição de simetria à esquerda da folha**

Figura 6.41. Diferença nas tensões do cabo no modelo Viga PCCB2

Os valores correspondentes ao tramo mais próximo do apoio externo, ou seja, aquele setor entre a ancoragem e o desviador externo (Figura 6.41 lado direito), apresentam tensões similares nos dois modelos, mas a perfeita aderência considerada no modelo sem elemento de interface gera uma variação que não tem relação com o comportamento real do cabo, como já foi mencionado.

A Figura 6.42 mostra a evolução de tensões no cabo com e sem elementos de interface.

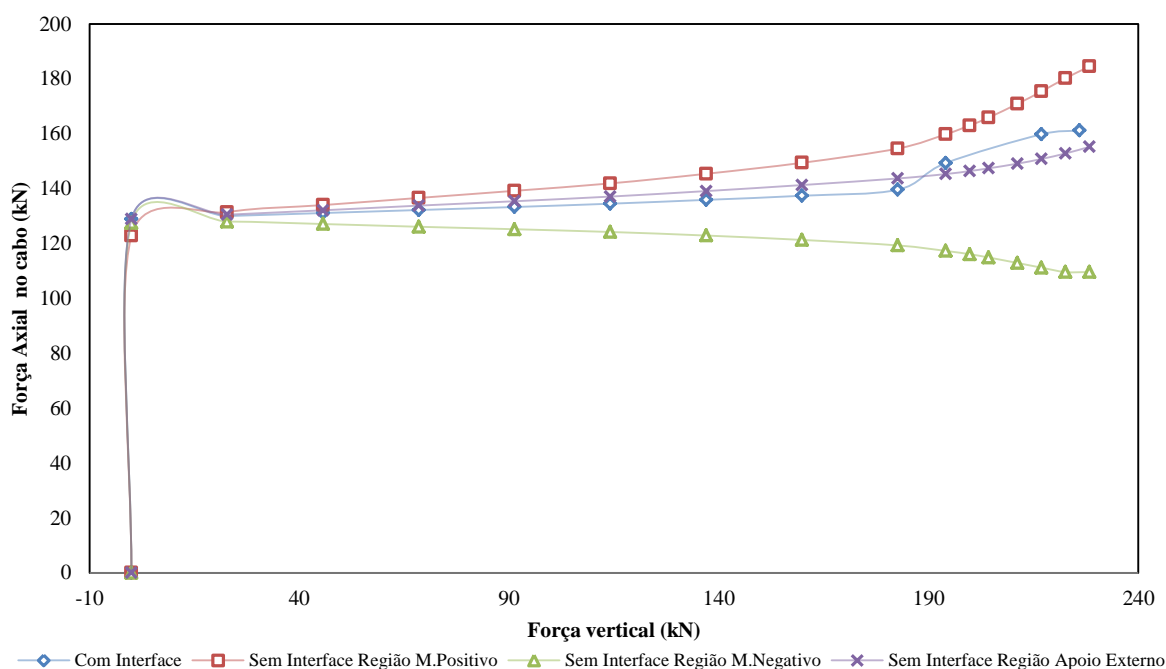
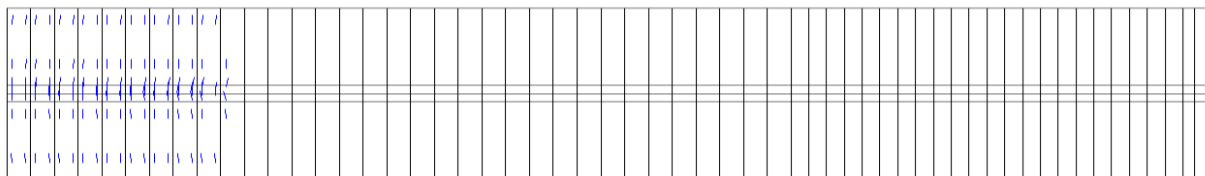


Figura 6.42. Diferença na Força Axial vs. Força Externa

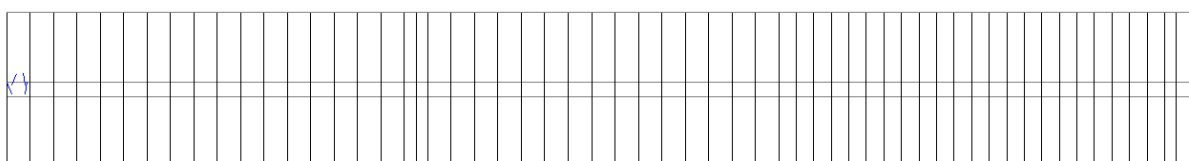
Segundo (NIE *et al.* 2009) é comum que nas vigas mistas, sem protender, as trincas apareçam numa distancia “n” de até 15% do vão livre entre apoios, dependendo de muitos fatores, entre todos, o principal é o grau de protensão que se aplica na viga. Este grau é definido em (NIE *et al.* 2009) como a razão do momento gerado pela força de protensão (momento de compressão) sobre o apoio central e o momento negativo gerado pelo carregamento vertical depois de considerar a redistribuição de esforços, podendo variar, entre um e zero. Quando  $\lambda=1$  quer dizer que o momento negativo foi completamente neutralizado e  $\lambda=0$  que não existe força de compressão. Na Tabela 6.23 é feita uma comparação do efeito do grau de protensão na aparição de trincas na laje de concreto, nas três vigas até agora apresentadas, para um carregamento vertical externo de aproximadamente 40 kN

correspondente ao terceiro incremento de carga nos tres modelos (terceiro ponto na curva “Força Total vs. Deflexão” respectiva).

CCB-1



PCCB-1



PCCB-2

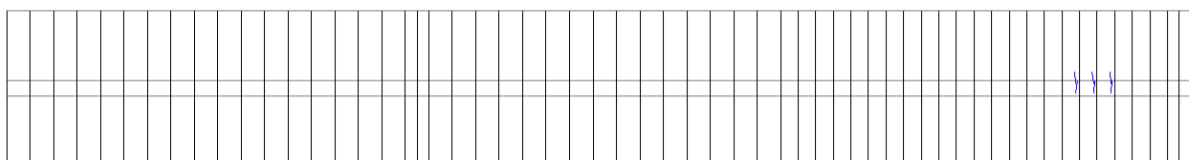


Figura 6.43. Efeito da protensão nas fissuras (Condição de simetria no extremo esquerdo)

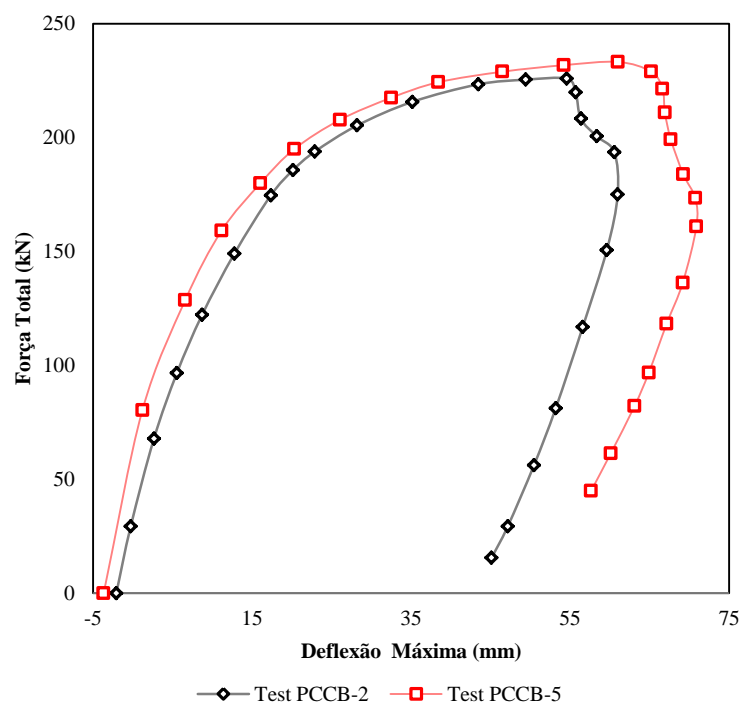
Tabela 6.23. Efeitos do grau de protensão  $\lambda$

Viga	Momento Carga Protensão $M_p$ [kNm]	Momento Carga Vertical $M_{ke}$ [kNm]	$\lambda = M_p/M_{ke}$	n
CCB-1	0,00	26,40	0,000	0,18
PCCB-1	5,81	30,03	0,242	0,02
PCCB-2	11,47	31,96	0,448	0,00

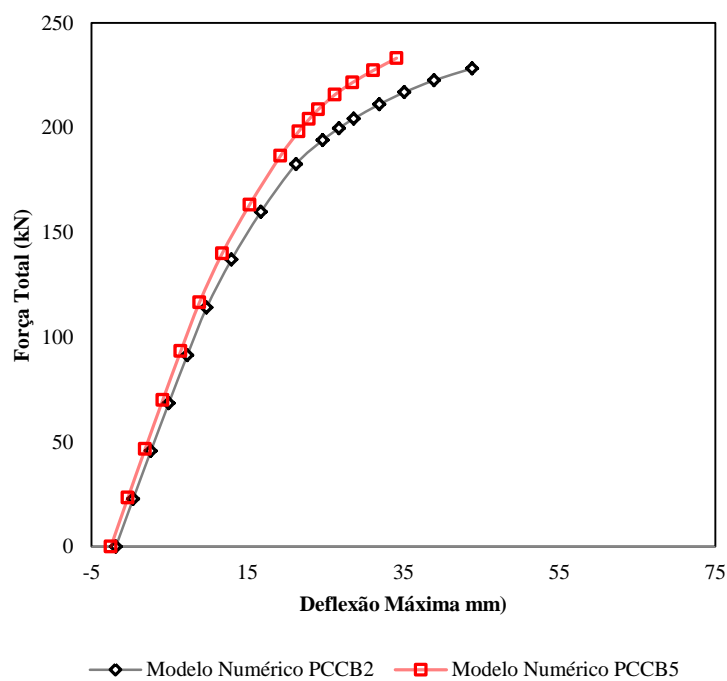
Na Tabela 6.23,  $M_k = 0,8M_{ke}$ , o valor “n” é a porcentagem do comprimento livre da laje de concreto, na qual aparecem trincas que reduzem a rigidez da peça no trecho próximo ao apoio central. A Figura 6.43 ilustra a Tabela 6.23. Cada uma das parcelas que se percebem tem um comprimento de 80 mm e o vão representado é de 4.150 mm. O apoio está a 4.000 mm do eixo de simetria.

Nota-se claramente a vantagem de protender as vigas mistas em carregamentos de serviço enunciada em (NIE et al. 2009): Evitar a aparição de trincas em setores onde prevalece a tração e prolongar o comportamento elástico dos materiais. Quando se analisa as cargas últimas, as vantagens da protensão são basicamente uma maior rigidez e maior capacidade resistente, o que significa um melhor aproveitamento de materiais.

Para fins de validação do programa desenvolvido, os resultados mostram um bom desempenho na análise de vigas contínuas e validam os procedimentos numéricos usados na programação do código.



(a)



(b)

Figura 6.44. Comparação das Vigas PCCB2 e PCCB5

O efeito da excentricidade do cabo com relação ao eixo neutro, nos pontos de compatibilidade de deslocamentos, pode ser observado na Figura 6.44. Em (a) se comparam acima as curvas experimentais das vigas PCCB2 e PCCB5 e em (b) as curvas dos modelos numéricos correspondentes. A viga PCCB5 foi modelada com 716 elementos na viga de aço, 174 elementos na laje de concreto, 116 conectores e 15 elementos em cada cabo de protensão, a forma do cabo é a mesma que aparece na Figura 6.28. A variação da quantidade de elementos nos que se dividiu a viga de aço depende da posição dos desviadores o dos cabos com a intenção de poder gerar pontos de conexão nos locais certos.

A contra flecha gerada pelos cabos na viga PCCB5 é maior devido a maior excentricidade inicial em relação à viga PCCB2. A rigidez e a capacidade resistente das duas vigas são basicamente as mesmas, mas na fase de carregamento final a excentricidade dos cabos da viga PCCB5 permite alcançar uma carga última pouco maior que a viga PCCB2.

O efeito dos elementos de interface (DIEP, TANABE e UMEHARA, 2001) na viga PCCB5 é mais evidente. (Figura 6.45)

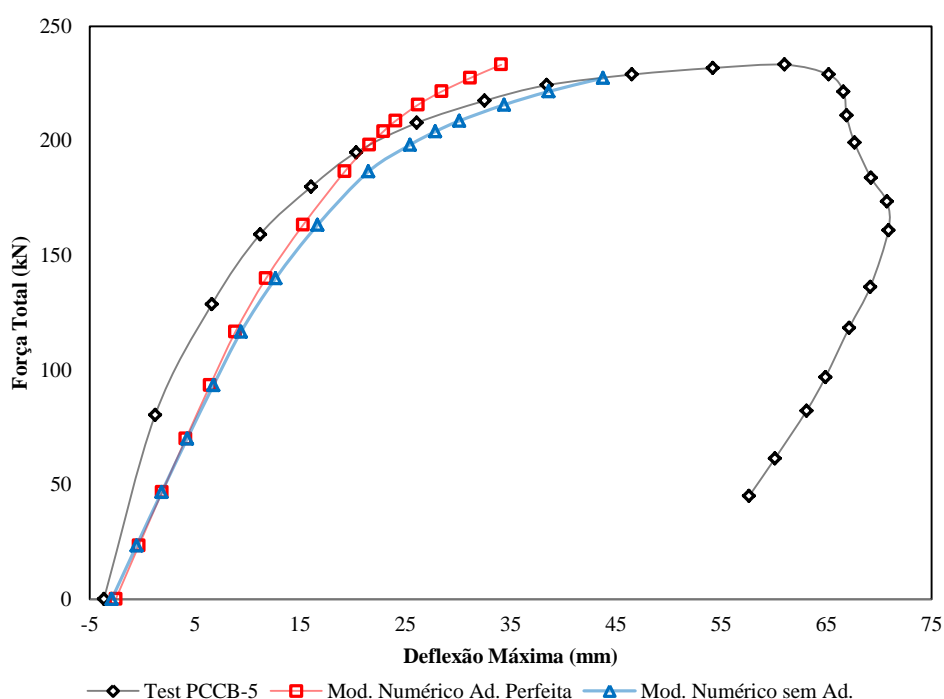


Figura 6.45. Influência dos elementos de interface no comportamento dos modelos numéricos

Outro efeito estudado é a trajetória do cabo. Para isso foi necessário comparar o comportamento das vigas PCCB1 e PCCB3, que apresentam as mesmas características de área de seção transversal do cabo e força de protensão. A comparação da correlação existente entre as curvas “Força Total vs. Deflexão”, numérica e experimental para a viga PCCB-3 é



apresentada na Figura 6.46. A carga última suportada no experimento da viga é 222,5 kN e a deflexão correspondente é 63,6 mm. No modelo numérico, a carga última é 200 kN (90% da carga experimental) e 43,8 mm de deflexão. Os valores dos modelos com elementos de interface e sem elementos de interface são muito similares.

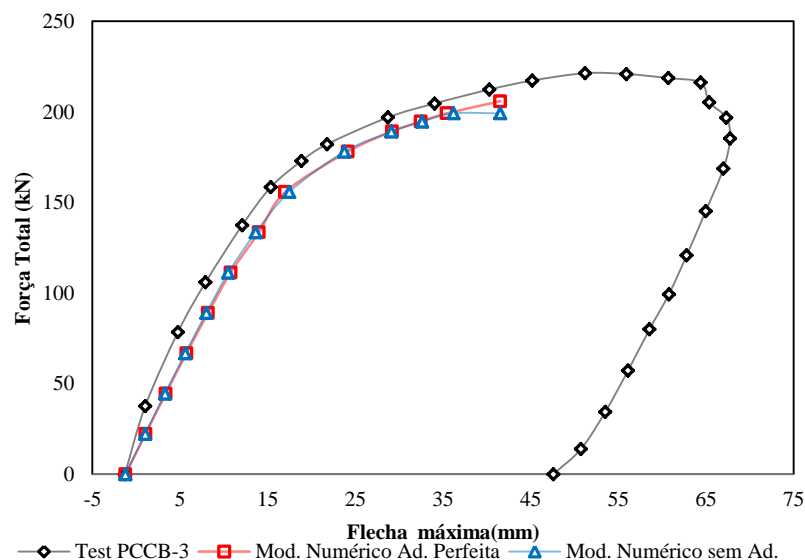


Figura 6.46. Modelo Experimental e Numérico Viga PCCB3

Na Figura 6.47 são comparadas as curvas dos modelos numéricos das vigas PCCB1 e PCCB3. A influência da trajetória do cabo se traduz num leve aumento de rigidez e de capacidade última da peça.

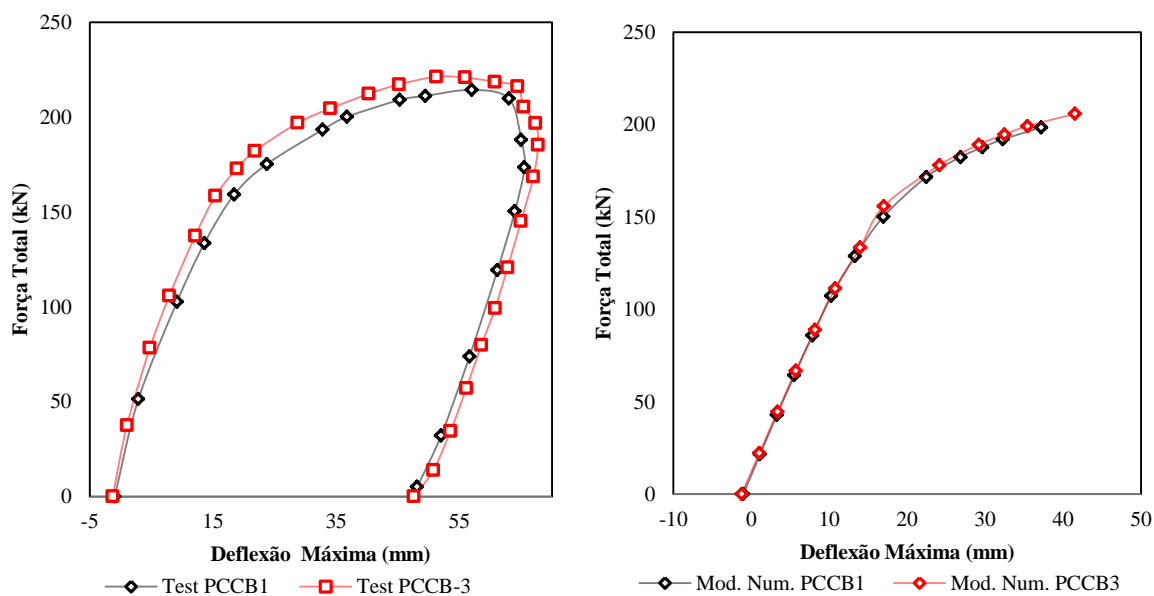


Figura 6.47. Comparação entre as vigas PCCB3 e PCCB1

No total foram realizados cinco exemplos. A Tabela 6.24 faz a comparação dos valores da carga última de falha, deflexão após o escoamento e deflexão última da falha.

Tabela 6.24. Comparação dos valores Críticos

Viga	Origem	Carga Última [kN]	Erro [%]	$d_y$ [mm]	Erro [%]	$d_u$ [mm]	Erro [%]	Coef. de ductilidade $d_u/d_y$
CCB-1	Teste	188,6	5,0%	11,5	17,0%	58,8	37,8%	5,1
	Numérico	179,2		9,5		36,6		3,8
PCCB-1	Teste	214,5	5,0%	6,5	17,7%	56,4	34,0%	8,7
	Numérico	203,8		7,9		37,2		4,7
PCCB-2	Teste	228,3	0,0%	5,9	16,9%	52,7	16,9%	9,0
	Numérico	228,3		4,9		43,8		8,9
PCCB-3	Teste	222,5	7,5%	8,1	1,2%	53,2	22,0%	6,5
	Numérico	205,8		8,2		41,5		5,1
PCCB-5	Teste	233,2	0,0%	5,6	12,5%	60,3	27,4%	10,8
	Numérico	233,2		6,4		43,8		6,8

O erro na predição de carga última de falha é baixo, a flecha devida ao carregamento final no modelo é sempre inferior ao medido no teste experimental o que significa que o modelo numérico apresenta maior rigidez que a estrutura real. Em termos de engenharia os resultados obtidos são bons e demonstram utilidade do código implementado.

No anexo A apresenta-se uma comparação entre a previsão de momento último, obtida pelo código computacional e o valor calculado por expressão analítica obtida do trabalho de (CHEN e GU, 2005). No anexo B apresenta-se resultados completos relacionados com o elemento de cabo e o uso do elemento de interface.

No Anexo C são calculados os valores teóricos do comprimento das fissuras perto do apoio central usando a fórmula proposta em (NIE *et al.*, 2009) e comparados com os valores obtidos pelo código computacional.

## 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Foi desenvolvida uma investigação sobre a modelagem numérica de vigas mistas protendidas de aço e concreto. O principal objetivo foi acrescentar o módulo de protensão externa ao código computacional V.M.P. Os resultados obtidos nos exemplos de validação têm uma boa correlação com os dados dos dois programas experimentais simulados. Nos modelos não foi considerada a não linearidade geométrica. Devido às dimensões das vigas mistas modeladas, este fato gerou pouca divergência entre os valores numéricos e experimentais obtidos. É importante que se inclua a consideração dos efeitos não lineares geométricos no programa V.M.P. e se faça um estudo para conhecer a influência sobre os resultados obtidos nesta investigação.

O modelo 3D de elementos finitos proposto permite simular de maneira adequada a protensão de elementos de viga mista. O uso dos elementos gerados no desenvolvimento desta investigação: o elemento de interface, o elemento de cabo forma catenária e o elemento de treliça, geraram os efeitos esperados, quando adicionados ao modelo, de viga mista, desenvolvido por (TAMAYO, 2011).

A consideração do elemento de interface como dispositivo que admite deslocamentos relativos entre a viga de aço e o cabo de protensão nos desviadores durante o processo de carga não muda significativamente as respostas globais do sistema estrutural, mas se estabelece de forma contundente nas respostas locais do cabo de protensão em relação a sua força axial gerando diferenças consideráveis dependendo do nível de atrito considerado.

Depois do observado nos exemplos de validação, o incremento de tensões no cabo é linear nos primeiros estágios de carregamento e quando a peça esta ingressando na fase de escoamento este incremento começa a ser não linear. É importante considerar o efeito de incremento de tensões no cabo, quando a peça vai ser dimensionada, pois este incremento pode gerar a falha do cabo de protensão dependendo das características da área transversal do elemento mencionado. Entanto a resposta global seja de interesse não adianta simular o deslocamento relativo entre a viga de aço e os cabos de protensão, pois o uso do elemento de interface incrementa substancialmente o numero de iterações no algoritmo não-linear e por consequência o tempo de cálculo aumenta ao dobro ou triplo do tempo que demoraria sem elementos de interface.

Definitivamente a protensão externa de uma viga mista gera no elemento maior capacidade de carga, maior rigidez e maior ductilidade. A influência da quantidade de área, a forma do cabo no vão e a excentricidade dos cabos em relação ao eixo longitudinal da viga pode ser observada nos exemplos de validação da seção 6.2 e 6.3 sendo que para uma mesma configuração de cabo, uma maior área de protensão significa um incremento importante de capacidade última e rigidez. Para uma mesma área de protensão e diferentes configurações do cabo no vão da viga, tem-se um incremento moderado de capacidade última e rigidez. Por último, o efeito de diferentes excentricidades para uma mesma área transversal e uma mesma configuração gera um incremento também moderado de capacidade última e rigidez.

A implementação, de um elemento de cabo com forma catenária como aquele proposto em (COARITA e FLORES, 2015), como elemento de protensão num sistema estrutural de viga mista não gera diferenças nos resultados quando comparado com o elemento treliça. No entanto é de se esperar que o número de elementos necessários possa ser reduzido.

Nos exemplos de validação correspondentes às vigas mistas o elemento de catenária não pode mostrar a sua superioridade em relação à treliça, mostrada nos exemplos de validação do cabo isolado, pelo fato da configuração reta do cabo entre desviadores e a não consideração da não linearidade geométrica. Se a fase de estiramento do cabo fosse modelada é provável que a catenária se ajuste melhor ao processo podendo-se assim apreciar a superioridade que segundo o observado a catenária tem.

Pela potencialidade mostrada, o elemento de catenária no caso de cabos de grande curvatura poderia ser utilizado em futuras análises para tratar pontes com tirantes.

## REFERÊNCIAS

- AASHTO. **AASHTO LRFD Bridge design Specifications**. Washington DC: American Association of State Highway and Transportation Officials, 2012.
- ABNT NBR 8800. **Projeto de Estruturas de Aço e de estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios**. Segunda. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.
- ANDREU, A.; GIL, L.; ROCA, P. A New Deformable Catenary Element for the Analysis of Cable Net Structures. **Computers & Structures**, 84, 2006.
- ARIYAWARDENA, N.; GHALI, A. Prestressing with Unbounded Internal or External Tendons Analysis and Computer Model. **Journal of Structural Engineering**, 128, n. 12, 2002.
- CHEN, S.; GU, P. Load Carrying Capacity of Composite Beams Prestressed with External Tendons Under Positive Moment. **Journal of Constructional Steel Research**, Shanghai, China, 2005. 515-530.
- CHEN, S.; ZHANG, Z. Effective width of a concrete slab in steel-concrete Composite Beams Prestressed with External Tendons. **journal of Constructional Steel Research**, Shanghai, China, 2006. 493-500.
- COARITA, E.; FLORES, L. Nonlinear Analysis of Structures Cable - Truss. **International Journal of Engineering and Technology**, Puno, Peru, Junho 2015. 160-169.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 2: Advanced Topics**. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd, 1997. ISBN ISBN 0 471 95649 X.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures Volume 1: Essentials**. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd, 1991. ISBN ISBN 0 471 92956 5.
- CRISTO, H. P. **Programação em Linguagem FORTRAN**. Belo Horizonte: [s.n.], 2003.
- DALL'ASTA, A.; DEZI, L. Nonlinear Behavior of Externally Prestressed Composite Beams: Analytical Model. **Journal of Structural Engineering**, Ancona, Italia, Maio 1998. 588-597.
- DALL'ASTA, A.; RAGNI, L.; ZONA, A. Steel-Concrete Composite Beams Prestressed by External Tendons: Effects of Material and Geometric Nonlinearities. **Advanced Steel Construction**, Ancona, v. 2, p. 53-70, 2006.

- DALL'ASTA, A.; RAGNI, L.; ZONA, A. Analytical Model for Geometric and Material Nonlinear Analysis of Externally Prestressed Beams. **Journal of Engineering Mechanics**, Ascoli Piceno, Italia, Janeiro 2007. 117-121.
- DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Finite Element model for Externally Prestressed Composite Beams with Deformable Connection. **Journal of Structural Engineering**, Ascoli Piceno, Italia, Maio 2005. 706-714.
- DIAS, M. M. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos: Efeitos de Longa Duração**. Porto Alegre: Tese de Mestrado Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pos-Graduação em Engenharia Civil, 2013.
- DIEP, B. K.; TANABE, T.-A.; UMEHARA, H. Study on Behavior of Externally Prestressed Concrete Beams Using the Deformation Compatibility of Cable. **Journal of Structural Concrete JSCE**, Nagoya, Japão, Maio 2001. 159-168.
- FERREIRA, A. C. **Vigas Metálicas Protendidas: Análise Estática, Modal e Ruptura do Cabo de Protensão e Aplicativo Computacional para Projetos**. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.
- GRECCO, M. et al. Nonlinear Positional Formulation for Space Truss Analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Uberlândia, 2006. 1079-1086.
- GUTIERREZ KLINSKY, G. E. R. **Uma Contribuição ao Estudo das Pontes em Vigas Mistas**. São Carlos: Dissertação de mestrado Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, 1999.
- JAYARAMAN, H. B.; KNUDSON, W. C. A curved Element for the Analysis of Cable Structures. **Computers & Structures**, Roorkee U.P., India, Janeiro 1981. 325-333.
- JIMENEZ MONTOYA, P.; MESEGUER, A. G.; CABRE, F. M. **Hormigon Armado**. Barcelona: Gustavo Gili, 2000.
- JOSHUVA, et al. Finite Element Analysis of Reinforced and Pre-tensioned Concrete Beams. **International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering**, 4, n. 10, 2014.
- LEE, S. H. Rudimentary considerations for Adaptive GAP/Friction Element Based on the Penalty Method. **Computers & Structures**, Los Angeles, U.S, 1993. 1043-1056.
- LINHARES, B. T. **Análise de Pontes em Estruturas mistas Aço-Concreto de Seção Caixa com Protensão Externa**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). ed. Porto Alegre: Departamento de Engenharia Civil UFRGS, 2015.

- LORENC, W.; KUBICA, E. Behavior of Composite Beams Prestressed with External Tendons: Experimental Study. **Journal of Constructional Steel Research**, Wroclaw, Polonia, 3 Janeiro 2006. 1353-1366.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**. Segunda. ed. Phoenix U.S: John Wiley & Sons, 2000.
- NELSEN , A. C. H.; DE SOUZA,. Vigas Mistas de Aço e Concreto com Protensão Externa: Conceitos e Aplicações. **Congresso LatinoAmericano da Construção Metálica**, São Carlos, 2012.
- NELSEN, A. C. H. **Comportamento Estrutural de Vigas Mistas de Aço e Concreto com Protensão Externa**. Dissertação de Mestrado. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2013. ISBN N424ce.
- NIE, J. et al. Deformation Analysis of Prestressed Continuous Steel-Concrete Composite Beams. **Journal of Structural Engineering**, Beijing, China, Novembro 2009. 1377-1389.
- NIE, J. et al. Analytical and Numerical Modeling of Prestressed Continuous Steel-Concrete Composite Beams. **Journal of Structural Engineering**, Beijing, China, Dezembro 2011. 1405-1418.
- NIE, J. G. et al. Experimental and analytical Study of Prestressed Steel-Concrete Composite Bemas Considering Slip Effect. **Journal of Structural Engineering**, Beijing, China, Abril 2007. 530-540.
- OWEN , D. R. J.; HINTON , E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. West Cross Lane, U.K: Pineridge Press Limited, 1980. ISBN ISBN 0-906674-05-2.
- PODOLNY, W. The Cause of Cracking in Post-Tensioned Concrete Box Girder Bridges and Retrofit Procedures. **Journal of the Prestressed Concrete Institute**, 30, n. 2, 1985.
- SMITH , I. M.; GRIFFITHS, ; MARGETTS , L. **Programming the Finite Element Method**. West Sussex, U.K.: John Wiley & Sons Ltd, 2014. ISBN ISBN 978-1-119-97334-8.
- TAMAYO, J. L. P. **Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Tese de doutorado Universidade Federal Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia Programa de Posgraduação em Engenharia Civil, 2011.
- TAMAYO, J. L. P. **Simulação Numérica da Interação Solo-Estaca pelo Método dos Elementos Finitos**. Porto Alegre: Tese de doutorado Universidade Federal Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia Programa de Posgraduação em Engenharia Civil, 2015.
- THAI, H.-T.; KIM, S.-E. Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Cable Structures. **Finite Elements in analysis and Design** , Seoul, Korea, Março 2011. 237-246.

VECCHIO , F. J.; GAUVREAU , P.; LIU, K. Modeling of Unbonded Post-Tensioned Concrete Beams Critical in Shear. **ACI Structural Journal**, 103, n. 1, 2006.

XUE, W.; DING, M.; LI, J. long-Term Behavior of Prestressed Composite Beams at Service Loads for One Year. **Journal of Structural Engineering**, Shanghai, China, Junho 2008. 930-937.

YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. **Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Taiwan: Prentice Hall, 1994.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Finite Element Formulation for Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beams Prestressed with External Slipping Tendons. **Finite Elements in Analysis and Design**, Ascoli Piceno, Italy, Junho 2008. 910-919.



## ANEXO A

As Figuras A.1 e A.2 apresentam uma comparação entre a previsão de momento último, obtida pelo código computacional e o valor calculado por expressão analítica obtida do trabalho de (CHEN e GU, 2005).

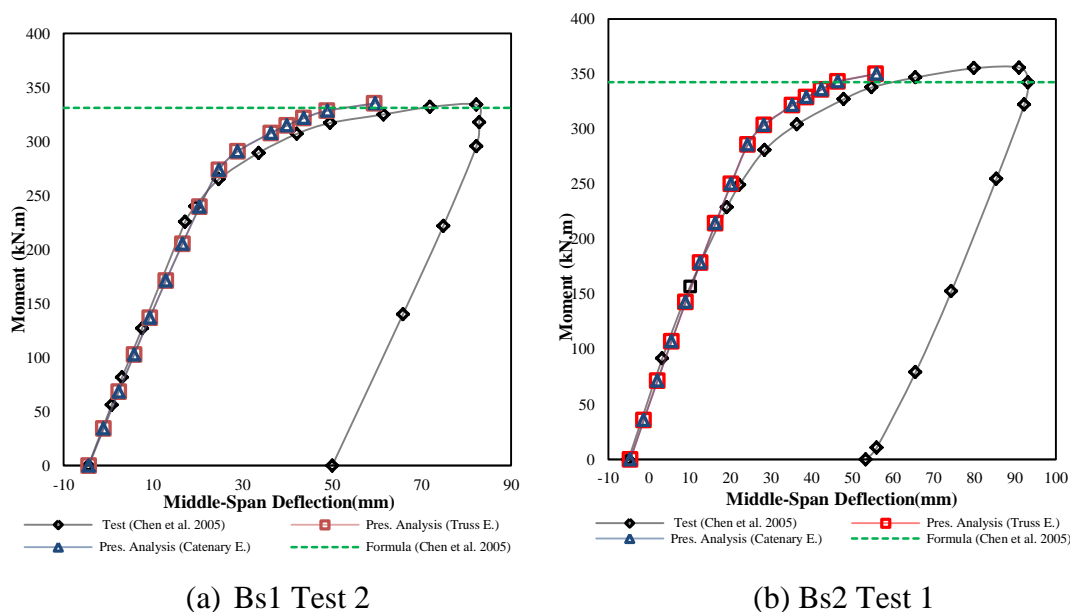


Figura A.1. Curvas Momento-Deflexão Vigas BS1 e BS2

A tabela A.1 compara o valor da carga última obtido pelo modelo numérico com o valor obtido pela formula de (Chen e Gu, 2005) e também com o valor obtido pelo ensaio experimental. Para cada um desses casos é calculado o erro associado, o qual se verifica ser o máximo 10%.

Tabela A.1. Comparação Carga última

Viga	Formula (Chen e Gu, 2005)	Modelo Numérico	Erro	Ensaio Experimental	Erro
BS1	183,9	186,11	1%	190	3%
BS2	190,3	194,44	2%	197,62	4%
PCCB1	192,8	174,45	10%	188,53	2%
PCCB2	218,4	228,5	5%	225,85	3%
PCCB3	204	205,81	1%	221,29	8%
PCCB4	225,4	232,37	3%	234,64	4%
PCCB5	244,4	233,2	-5%	233,2	5%

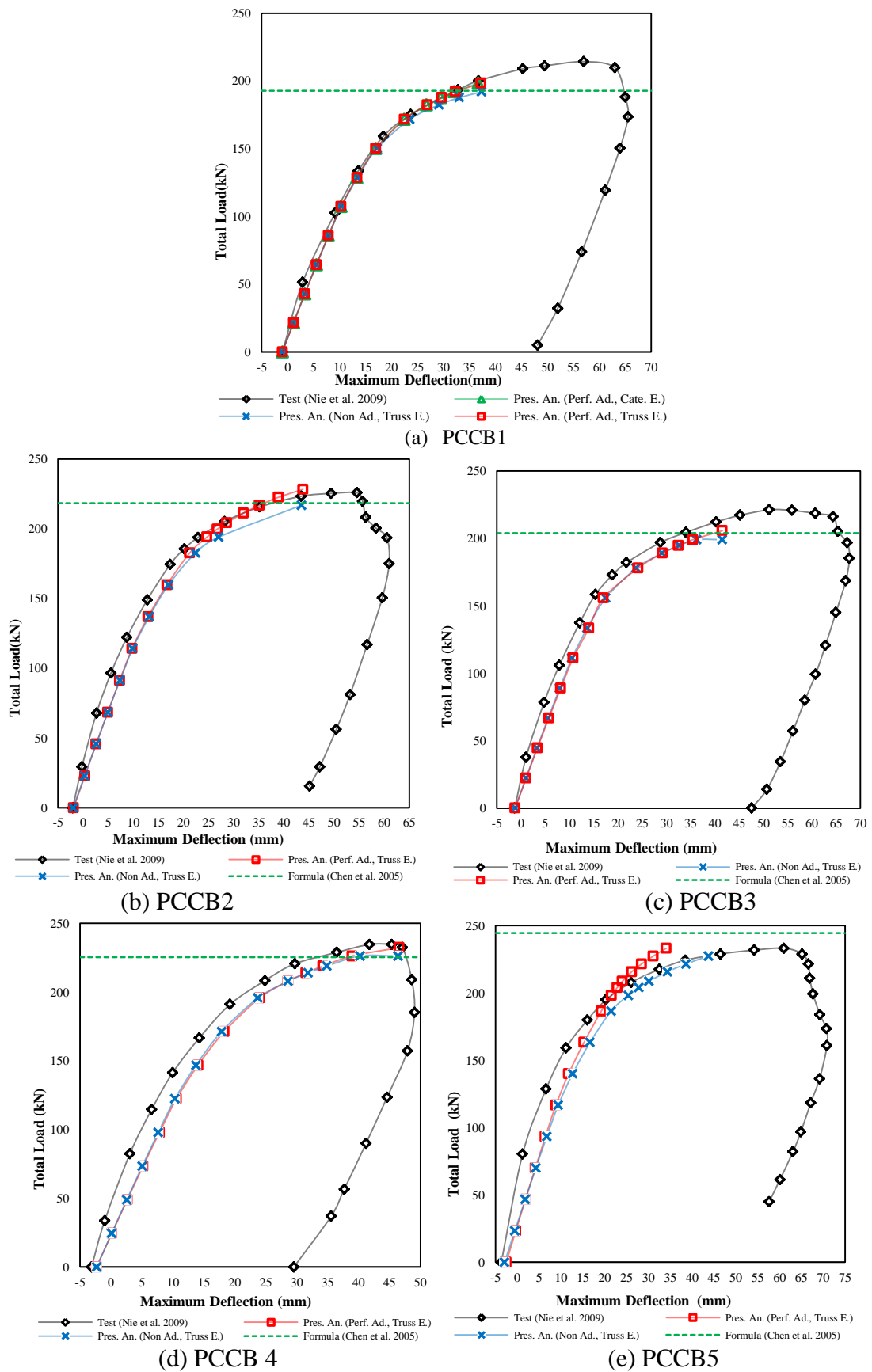


Figura A.2. Curvas Carga Total-Deflexão Máxima Vigas Contínuas PCCB

## ANEXO B

A Figura B.1 apresenta a distribuição de forças ao longo do cabo de protensão para duas situações correspondentes a viga PCCB1: a) adota-se aderência completa entre o cabo e a viga, o que corresponde a um coeficiente de atrito igual a um entre o cabo e os desviadores, b) adota-se coeficiente de atrito zero entre o cabo e os desviadores, o que corresponde a um movimento de deslizamento livre do cabo.

\*Em todos os casos as Vigas apresentam a condição de simetria à esquerda da folha.

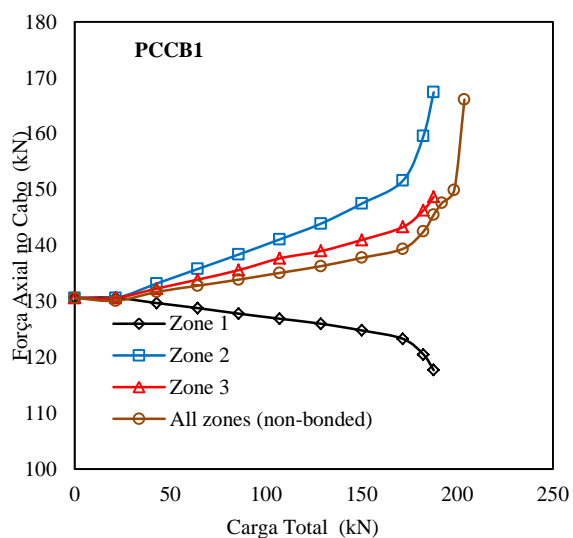
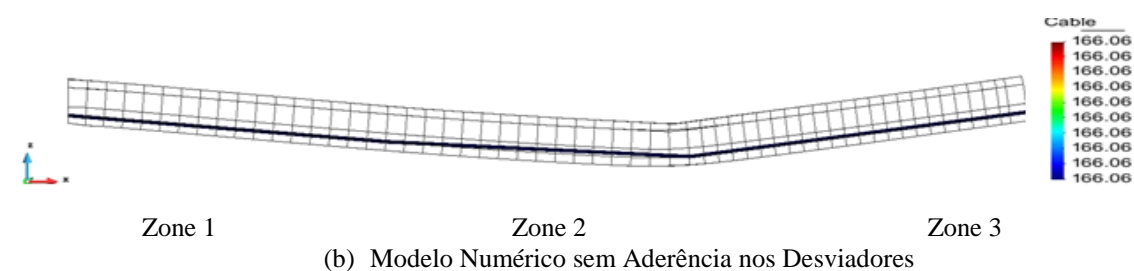
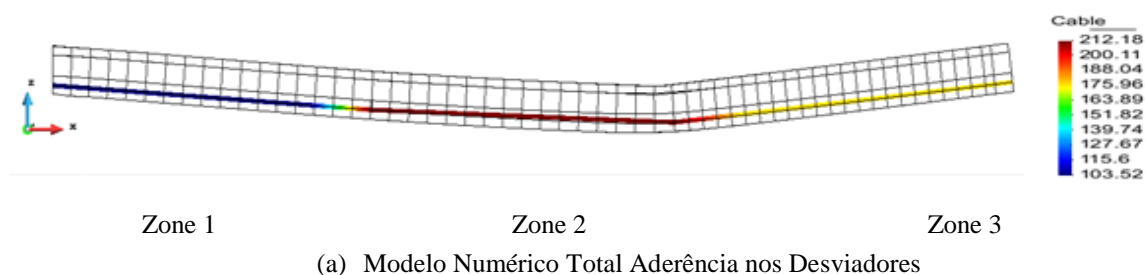
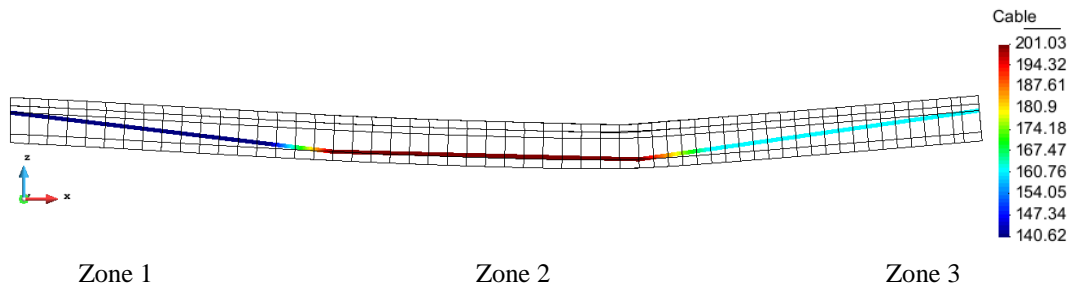
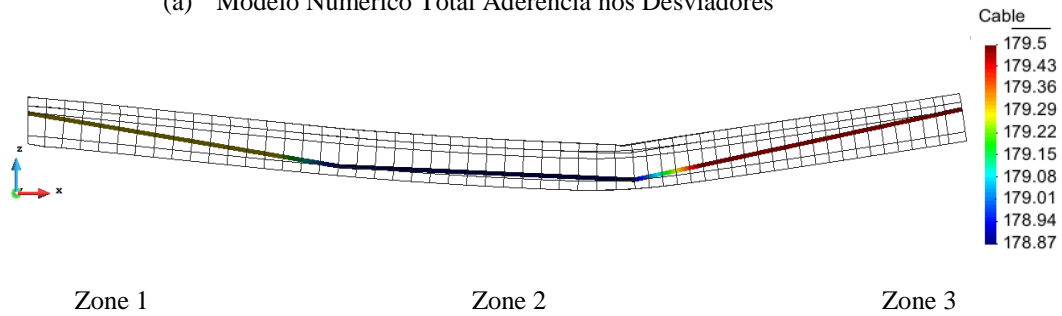


Figura B.1. Forças ao longo do cabo de protensão PCCB1

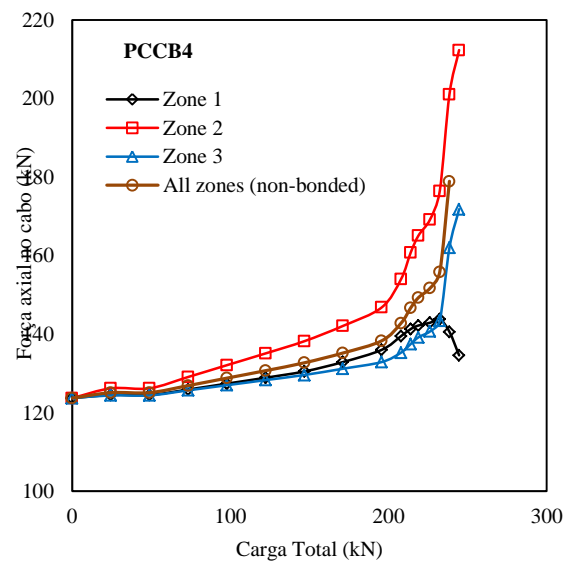




(a) Modelo Numérico Total Aderência nos Desviadores



(b) Modelo Numérico sem Aderência nos Desviadores



(c) Carga Total vs. Força Axial no cabo

Figura B.3. Forças ao longo do cabo de protensão Viga PCCB4



## ANEXO C

Usando a fórmula proposta por Nie et al. 2009, é possível obter o comprimento da região de fissuração perto do apoio interior da viga contínua, usando a equação C.1, na qual  $\lambda$  é o fator que controla o comprimento das fissuras sendo definido pela eq. (C.2), sendo  $M_k$  o momento no suporte interior devido à carga de serviço  $P_k$  (sem considerar o efeito da protensão),  $M_{ek}$  o momento devido a  $P_k$  (sem considerar a redistribuição de momentos),  $M_0$  o momento necessário para eliminar o esforço de compressão no apoio interior, que é função do módulo resistente da seção mista transformada ( $W$ ) e  $\sigma_{pc}$  o esforço inicial de compressão no topo da laje de concreto no apoio interior, calculado pela eq. (C.3)

$$n = \frac{3(\lambda-1)}{14\lambda-20} \quad (C.1)$$

$$\lambda = M_0/M_k \quad \text{com} \quad M_0 = \sigma_{pc}W \quad \text{e} \quad M_k = 0,85M_{ek} \quad (C.2)$$

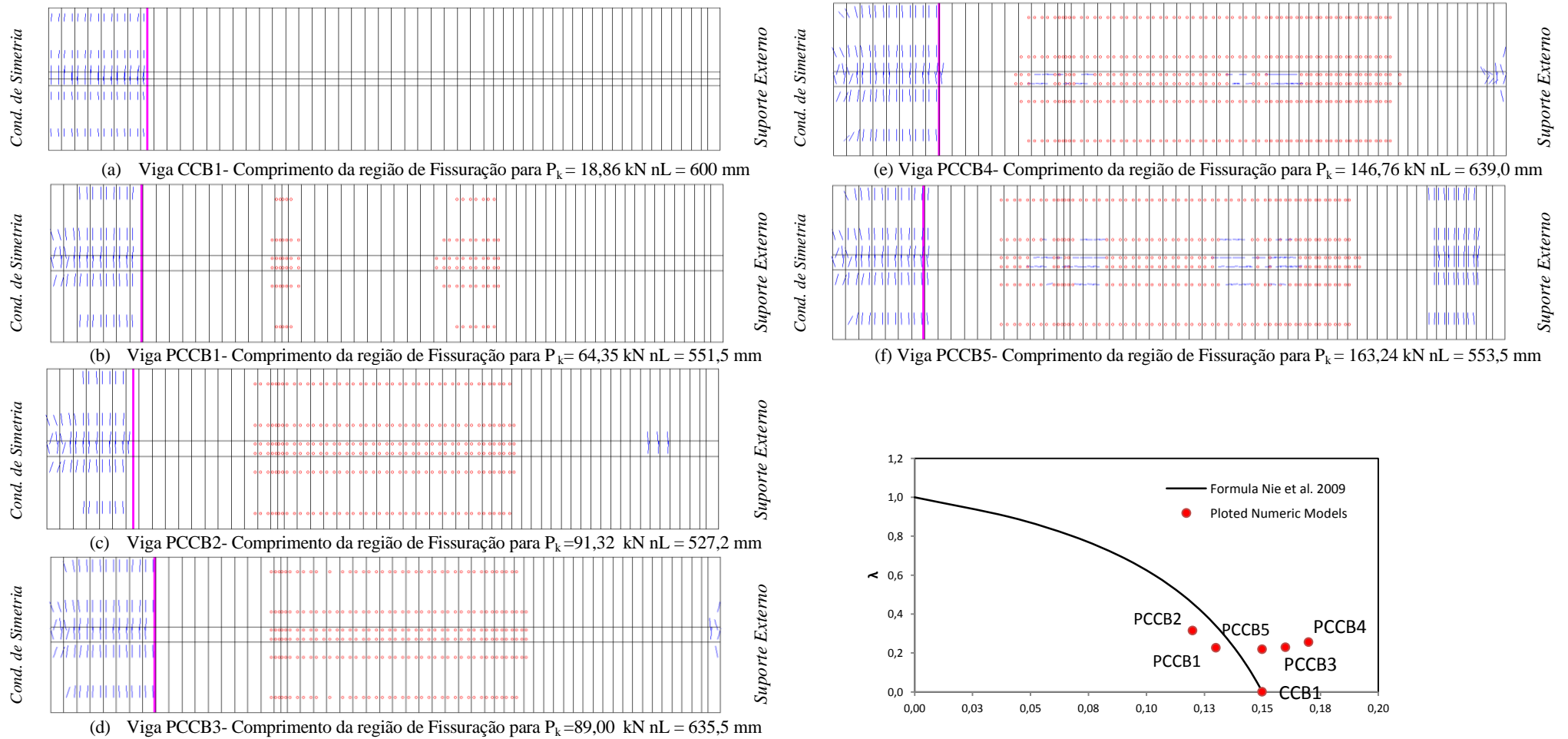
$$\sigma_{pc} = \frac{T_0 e_0}{2W} + \frac{3m(1-m)T_0 \theta L}{2W} + \frac{T_0}{A} \quad (C.3)$$

em que  $T_0$  é a força de protensão inicial no cabo,  $e_0$  a excentricidade na ancoragem,  $m$  a posição da carga em relação ao apoio interno,  $\theta$  ângulo do cabo no ponto de aplicação de carga,  $L$  o comprimento do vão e  $A$  a área da seção transversal da seção transformada. Para obter a seção transformada foi empregado o módulo de elasticidade do concreto armado correspondente a 28 dias.

Na tabela C.1 são apresentados os valores teóricos obtidos aplicando as equações (C.1) a (C.3) e os dados de carga correspondentes às vigas analisadas. Na Figura C.1 são comparados os comprimentos da região de fissuração obtidos pelo código computacional e a expressão proposta por Nie et al. (2009).

Tabela C.1. Valores obtidos aplicando as eq. (C.1) a (C.3) e cargas aplicadas  $P_k$

Viga	$M_0$ kNm	$P_{ek}$ kN	$M_{ek}$ kNm	$M_k$ kNm	$\lambda$	$n$
CCB-1	0,00	18,86	25,15	21,37	0,000	0,150
PCCB-1	16,53	64,35	85,80	72,93	0,227	0,138
PCCB-2	32,61	91,32	121,76	103,50	0,315	0,132
PCCB-3	23,054	89,00	118,67	100,87	0,229	0,159
PCCB-4	42,479	146,76	195,68	166,33	0,255	0,160
PCCB-5	40,463	163,24	217,65	185,01	0,219	0,138



\*Cada um dos retângulos verticais mede 80 mm no sentido horizontal e a linha roxa mostra nL

(g) Comparação dos valores obtidos pela Formula proposta por Nie et al. 2009 e os valores obtidos pelo modelo numérico sem considerar o incremento na força de protensão no cabo

Figura C.1 Comprimento da Região de Fissuração para diferentes  $P_k$  em todas as vigas CCB modeladas.  $nL \rightarrow$  valor obtido aplicando a equação (C.1)