

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**GUSTAVO RODRIGUES GONÇALVES DA SILVA**

**ESPECIFICAÇÃO DO MODELO DE  
REFERÊNCIA EM PROJETO DE  
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS  
DISCRETOS**

Porto Alegre  
2016

**GUSTAVO RODRIGUES GONÇALVES DA SILVA**

**ESPECIFICAÇÃO DO MODELO DE  
REFERÊNCIA EM PROJETO DE  
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS  
DISCRETOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

**CO-ORIENTADOR:** Profa. Dra. Lucíola Campestrini

Porto Alegre  
2016

**GUSTAVO RODRIGUES GONÇALVES DA SILVA**

**ESPECIFICAÇÃO DO MODELO DE  
REFERÊNCIA EM PROJETO DE  
CONTROLADORES MULTIVARIÁVEIS  
DISCRETOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Rafael Bolognese Fernandes, UFRGS  
Doutor pela Technische Universität Dortmund – Dortmund, Alemanha

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Luis Fernando Alves Pereira

Porto Alegre, fevereiro de 2016.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos professores Alexandre Bazanella e Lucíola Campestrini, por confiarem em mim e no meu trabalho.

Aos colegas que, em sua maioria, não tem a menor ideia com o que trabalho, mas sempre presentes na hora do café: Marcos, Maurício, Charles e Felipe.

Ao Emerson, por finalmente ter feito uma interface de fácil uso para realizar os experimentos na planta de nível.

E ao PPGEE e ao CNPq pelo ensino de qualidade e pela concessão de bolsa.

## RESUMO

A escolha do modelo de referência é a principal tarefa a ser executada pelo projetista em um projeto de controle por modelo de referência. Uma má escolha do modelo de referência pode resultar em um desempenho de malha fechada que tem pouca semelhança com o especificado e a malha fechada pode até ser instável. Neste trabalho, esse problema será discutido no controle de plantas multivariáveis. O resultado experimental em uma planta de controle de nível de três tanques mostra uma aparentemente correta, ainda que ingênua, escolha do modelo de referência levando a um desempenho muito pobre em malha fechada. O problema é, então, analisado, expondo a ingenuidade do exemplo. Começa-se por reconhecer as restrições fundamentais impostas pelo sistema e, em seguida, deriva-se diretrizes gerais que respeitam essas restrições, para uma escolha eficaz do modelo de referência em sistemas multivariáveis. Também é proporcionada uma nova formulação para calcular o grau relativo mínimo de cada elemento do modelo de referência sem a necessidade de um modelo completo da planta. A aplicação destas orientações em simulações e na planta de três tanques ilustra sua eficácia.

**Palavras-chave:** Controle por Modelo de Referência, sistemas multivariáveis, restrições, projeto.

## **ABSTRACT**

The choice of the reference model is the main task to be performed by the designer in a model reference control design. A poor choice of the reference model may result in a closed-loop performance that bears no resemblance to the specifications and the closed-loop may even be unstable. In this work we discuss this issue in the control of multivariable plants. Experimental results in a three tank level control plant show a seemingly correct, yet naive, choice of reference model leading to very poor closed-loop performance. The problem is then analyzed, exposing the naivete of the design example. We start by recognizing the fundamental constraints imposed by the system and then deriving general guidelines respecting these constraints for the effective choice of the reference model in multivariable systems. We also provide a novel formulation to compute the minimal relative degree of each element of the reference model without needing a complete model of the plant. The application of these guidelines to simulations and the three tank plant illustrates their effectiveness.

**Keywords: Model Reference Control, multivariable systems, constraints, design.**

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada. . . . .	16
Figura 2:	Resposta ao salto do sistema (9). . . . .	19
Figura 3:	Planta de três tanques com controle de nível. . . . .	33
Figura 4:	Resposta em malha aberta da planta piloto para entradas com sinais PRBS. . . . .	34
Figura 5:	Resposta em malha fechada da planta piloto com o controlador (42) comparada com a resposta do modelo de referência (41). . . . .	35
Figura 6:	Resposta ao salto do sistema (57). . . . .	42
Figura 7:	Exemplo de critérios de controlabilidade para o sistema (73). . . . .	48
Figura 8:	Resposta em malha fechada do sistema (98) com o controlador (101). . . . .	61
Figura 9:	Resposta em malha fechada do sistema (98) com o controlador (102). . . . .	62
Figura 10:	Resposta em malha fechada do sistema (103) com o controlador (107). . . . .	64
Figura 11:	Resposta em malha fechada do sistema (103) com o controlador (108). . . . .	64
Figura 12:	Resposta em malha fechada do sistema (109) com o controlador (113). . . . .	66
Figura 13:	Resposta em malha fechada do sistema (109) com o controlador (114). . . . .	67
Figura 14:	Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (119). . . . .	69
Figura 15:	Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (120). . . . .	69
Figura 16:	Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (121). . . . .	70
Figura 17:	Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (123). . . . .	71
Figura 18:	Resposta de malha fechada da planta piloto com o controlador (125) comparada com a resposta do modelo de referência (41). . . . .	72
Figura 19:	Resposta em malha fechada da planta piloto com o controlador (128) comparada com a resposta do modelo de referência (127). . . . .	74

## LISTA DE ABREVIATURAS

CbT	<i>Correlation-based Tuning</i>
CID	Controlabilidade integral descentralizada
DD	<i>Data-Driven</i>
FNM	fase não-mínima
IFT	<i>Iterative Feedback Tuning</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
MR	Modelo de Referência
OCI	<i>Optimal Controller Identification</i>
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PRBS	<i>Pseudo Random Binary Sequence</i>
RGA	<i>Relative Gain Array</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$x(t)$	vetor de sinal no tempo discreto
$q$	operador de avanço
$A(q)$	matriz A com elementos dependentes de $q$
$a_{ij}(q)$	elementos da matriz A
$A(q)^T$	transposto de A
$A(q)^H$	transposto conjugado de A
$\mathbb{R}^d$	espaço euclidiano de ordem $d$
$P$	vetor de parâmetros do controlador
$\bar{E}(\cdot)$	valor esperado estimado
$I$	matriz identidade de dimensões apropriadas
$J(\cdot)$	função custo
$kp_{ij}$	vetor de ganhos proporcionais do controlador
$ki_{ij}$	vetor de ganhos integrais do controlador
$kd_{ij}$	vetor de ganhos derivativos do controlador
$T_s$	período de amostragem
$y_{z_i}, u_{z_i}$	direções de saída e de entrada do zero multivariável
$y_{p_i}, u_{p_i}$	direções de saída e de entrada do polo
$\Lambda$	RGA
$\otimes$	multiplicação elemento por elemento (produto Hadamard ou Schur)
$\mu$	valor singular estruturado
$\Gamma$	matriz de grau relativo
$\theta$	atraso em tempo contínuo $e^{-\theta s}$
$\omega_c$	frequência de corte da malha fechada
$t_s$	tempo de acomodação
$M_0$	máximo sobrepasso

$\xi$	fator de amortecimento
$\omega_n$	frequência natural
$n_s$	amostras no tempo de acomodação
$\text{Re}\{a\}$	parte real do número complexo $a$

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES PRELIMINARES</b>	15
<b>2.1</b>	<b>Sistemas MIMO</b>	15
2.1.1	Polos e zeros em matriz de funções de transferência	16
<b>2.2</b>	<b>Controle por modelo de referência</b>	21
<b>2.3</b>	<b>Controle baseado em dados</b>	22
2.3.1	Estrutura do controlador	23
2.3.2	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i> – VRFT	24
<b>2.4</b>	<b>Controle descentralizado</b>	25
2.4.1	RGA: Relative Gain Array	26
2.4.2	Notação e fatoração da função de sensibilidade	28
2.4.3	Integridade de sistemas de controle descentralizado	29
<b>2.5</b>	<b>Algumas definições em álgebra (super) tropical</b>	30
<b>2.6</b>	<b>Exemplo motivacional do trabalho</b>	33
<b>3</b>	<b>LIMITAÇÕES IMPOSTAS PELO SISTEMA E ATRIBUIÇÃO DE DESEMPENHO</b>	36
<b>3.1</b>	<b>Limitações rígidas</b>	37
3.1.1	Causalidade do controlador ideal	37
3.1.2	Estabilidade interna na presença de zeros de transmissão de fase não-mínima	41
3.1.3	Estabilidade interna na presença de polos instáveis	44
<b>3.2</b>	<b>Limitações de desempenho</b>	45
3.2.1	Limitações devido aos atrasos	45
3.2.2	Limitações devido aos zeros de transmissão de fase não-mínima	46
3.2.3	Limitações devido aos polos instáveis	47
3.2.4	Considerações preliminares	47
<b>3.3</b>	<b>Atribuição de desempenho</b>	48
<b>3.4</b>	<b>Considerações finais</b>	50
<b>4</b>	<b>ESCOLHA DO MODELO DE REFERÊNCIA</b>	52
<b>4.1</b>	<b>Modelo de referência diagonal</b>	52
4.1.1	Desacoplamento	52
4.1.2	Escolha dos elementos	53
<b>4.2</b>	<b>Modelo de referência bloco-triangular: caso especial</b>	54
<b>4.3</b>	<b>Modelo de referência cheio</b>	56
<b>4.4</b>	<b>Considerações finais</b>	58

<b>5</b>	<b>RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E EXPERIMENTAIS</b>	<b>59</b>
5.1	Sistema simples	59
5.2	Sistema com polo instável	62
5.3	Sistema com atrasos	65
5.4	Sistema com zero de transmissão de fase não-mínima	67
5.5	Planta de nível	70
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>76</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Projetar um controlador para um sistema ou planta implica determinar uma função matemática ou parâmetros pertinentes de estruturas pré-fixadas visando interferir no comportamento desse sistema a fim de obter uma resposta desejada específica ou que não viole algumas restrições. Controladores com menor grau de complexidade são suficientes para obter o comportamento desejado em sistemas mais simples. Nesse grupo encontram-se os controladores proporcional-integral-derivativo (PID), os quais são ajustados através de apenas três parâmetros. Esses controladores representam cerca de 90% das malhas de controle industriais em todo o mundo (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006). Eles possuem estrutura fixa e isso torna, muitas vezes, o projeto do controlador simples e eficiente. As fórmulas de Ziegler-Nichols (ZIEGLER; NICHOLS, 1942) para sintonia de controladores PID contribuíram para sua popularidade. Porém, devido a um aumento na rigidez da qualidade dos produtos, a utilização dessas fórmulas leva a desempenhos muitas vezes insatisfatórios (CAMPESTRINI, 2010).

Técnicas de controle baseadas em modelo surgiram a fim de atingir requisitos mais rígidos para sistemas mais complexos. Nessa abordagem é necessário primeiramente obter um modelo do sistema e, só então, projetar o controlador baseado nos requisitos de desempenho. O modelo, por sua vez, pode ser obtido por modelagem fenomenológica ou através de identificação baseada em dados do processo. Se o objetivo do modelo é servir de base para o projeto do controlador, então o experimento de identificação deve ser tal que o projeto do controlador seja o menos deteriorado possível em função dos erros de modelagem, ou seja, o desempenho obtido quando o controlador é aplicado ao sistema real é mais importante que o desempenho de predição do modelo em relação ao processo real (GEVERS, 2005). Tendo o modelo em mãos, o projetista pode então ajustar os ganhos do controlador através de algum método para atender os requisitos de desempenho. Quando esses requisitos de desempenho são dados em termos de uma função (ou matriz) de transferência, o problema de ajuste do controlador é considerado como controle por Modelo de Referência (MR).

Modelo de referência é um paradigma clássico de projeto de controle, o qual é particularmente bem adequado para projeto de controle adaptativo e para projeto baseado em dados (*Data-Driven (DD) control*). No contexto de controle baseado em dados, bem como no de controle adaptativo direto, não se tem um modelo do processo e não se espera obter um. Em vez disso, dados de entrada e saída da planta são diretamente mapeados em parâmetros do controlador que, idealmente, produzem o desempenho especificado. A especificação do desempenho é feita informando qual é a função (ou matriz de funções, no caso multivariável) de transferência desejada em malha fechada. A tarefa do usuário consiste essencialmente em escolher essa função (ou matriz) de transferência, a qual é chamada de *modelo de referência*.

Um sistema de controle adaptativo pode ser visto como uma implementação do projeto acima e do procedimento de ajuste do controlador em tempo real. A maneira como a informação é processada para atingir o desempenho desejado caracteriza várias técnicas de adaptação. A característica principal dessas técnicas é a habilidade de extrair informação significativa dos dados a fim de ajustar o controlador e apresentar um mecanismo de ajuste de parâmetros, seja do modelo da planta, seja do controlador (LANDAU et al., 2011). No entanto, esses mecanismos inserem não-linearidades na malha fechada.

Na literatura convencional de controle adaptativo, existem duas categorias distintas: controle adaptativo direto ou indireto. No controle adaptativo direto, os parâmetros do controlador são ajustados para reduzir diretamente alguma norma do erro de saída (entre a planta e o modelo de referência). Por outro lado, no controle adaptativo indireto, os parâmetros da planta são estimados e o controlador é escolhido assumindo que os parâmetros estimados representam os valores verdadeiros dos parâmetros da planta (CHEN; TENG, 1995).

Por outro lado, controle baseado em dados difere de controle adaptativo pelo fato de que o ajuste dos parâmetros é baseado em uma grande batelada de dados, ao invés de um único, ou poucos, dado(s) de entrada-saída. Desse modo, não-linearidades introduzidas pelos mecanismos de adaptação são evitadas. Conforme apresentado na literatura (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011), os métodos de controle baseados em dados podem ser vistos como métodos de identificação do controlador, já que os mesmos são baseados em um conjunto de dados, em uma classe de modelos candidatos (neste caso, a classe de controladores) e em algum método que relacione os dois. Esses são exatamente os mesmos elementos envolvidos em identificação de sistemas.

Como pode ser visto, controle por modelo de referência tem sido uma grande área de pesquisa na teoria de controle e aplicações de sucesso têm sido desenvolvidas nos últimos vinte anos. Entretanto, a maioria das aplicações industriais cotidianas não parecem ter assimilado essa evolução, pois existem alguns problemas que ainda impedem esses métodos de serem utilizados com segurança em aplicações industriais. Além disso, muitos desses trabalhos tratam apenas o caso da escolha de um modelo de referência diagonal e, não raramente, com os mesmos elementos para o caso de sistemas multivariáveis.

A tarefa de escolher o modelo de referência pode parecer simples e é, na maioria das vezes, tratada assim na literatura. Contudo, esta tarefa não é sem riscos. A fim de especificar um modelo de referência significativo, restrições básicas devem ser levadas em conta – mais notavelmente, cancelamentos de polos e zeros instáveis devem ser evitados e atrasos de tempo na malha devem ser respeitados.

Restrições deste tipo aparecem, embora nem sempre de forma explícita, no rico campo da teoria de controle adaptativo direto – ver, por exemplo, (GOODWIN; SIN, 2009). No entanto, elas aparecem como um meio para a definição da estrutura do controlador de modo que o problema tem uma solução para uma dada classe de processos.

Neste trabalho, é feito o caminho contrário: a estrutura do controlador é dada e escolhe-se o modelo de referência de modo que o controlador ideal esteja na classe do controlador utilizado, ou pelo menos próximo em frequência desta. Isso significa que o usuário precisa escolher a classe de controladores e o modelo de referência para corresponder a esta condição, ao menos de forma aproximada. Corresponder à condição requer o conhecimento da classe do processo (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011; ECKHARD et al., 2009). Ou seja, o modelo de referência deve ser tal que a estrutura do controlador possa fornecer uma função (matriz) de transferência de malha fechada que seja próxima da especificada, caso contrário, o projeto pode falhar completamente.

Se isso não for considerado, então métodos baseados em dados ainda não são seguros para serem utilizados em aplicações industriais.

Uma metodologia para a escolha do modelo de referência para o caso *Single-Input Single-Output* (SISO) foi abordada em (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014), onde os autores propõem basear a escolha do modelo em um passo intermediário de identificação do sistema, utilizando os mesmos dados coletados para a identificação do controlador e algumas relações de desempenho em malha fechada. O modelo do sistema é fixo, visando identificar apenas algumas características proeminentes do processo e não o sistema completo. Dadas as características identificadas, três tipos de modelos de referência são sugeridos e propõe-se quando escolher cada um deles. Sendo assim, pode-se criar um algoritmo que escolhe automaticamente o modelo de referência, dados alguns critérios de desempenho. Os critérios de desempenho utilizados foram os mais comumente encontrados na literatura: tempo de acomodação, máximo sobrepasso e erro nulo em regime permanente para referências constantes.

Neste trabalho, uma metodologia semelhante será abordada para o caso multivariável. O problema principal é como escolher o modelo de referência. Para tanto, deve-se estabelecer os limites de desempenho impostos pelo sistema e pela estrutura de controle utilizada (descentralizada ou cheia). Também deve-se entender quais os modelos são desejáveis para o caso *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO) e, por fim, quais modelos são alcançáveis com a estrutura de controle escolhida.

Primeiramente, deve-se determinar o mínimo de conhecimento necessário sobre o processo para que se possa, pelo menos, garantir estabilidade em malha fechada e controladores ideais causais a serem identificados. Essas informações, junto com os mesmos critérios de desempenho citados anteriormente serão, então, utilizados na escolha do modelo de referência: nesse caso, definindo os elementos da diagonal da matriz. Os níveis de desacoplamento/perturbação serão definidos pelos elementos fora da diagonal. Muitas vezes, o controlador ideal para o caso multivariável é de ordem elevada, então escolhas moderadas de desempenho são recomendadas de forma que o controlador ideal seja pelo menos próximo em frequência da estrutura identificada. Além disso, alguns cancelamentos de polos e zeros podem acontecer de forma a reduzir a ordem do controlador ideal e nesse caso será dado enfoque para controladores PID. A ideia principal é escolher o modelo de referência de forma a tentar encaixar o controlador ideal na classe de controladores PID, utilizando o mínimo de conhecimento possível sobre a planta.

O trabalho é organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 é introduzida a formulação do problema de controle por Modelo de Referência, e alguns conceitos e definições de sistemas lineares são expostos para orientar a leitura do restante do trabalho. As limitações de projeto impostas pelo sistema, e por consequência o mínimo de conhecimento necessário sobre o processo, são tratadas no Capítulo 3. No Capítulo 4 são propostas metodologias para a escolha do modelo de referência em função de características do sistema e do que se deseja para a malha fechada. Resultados (simulação e experimento) utilizando a metodologia proposta são apresentados no Capítulo 5 e a conclusão do trabalho é feita no Capítulo 6.

## 2 DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Inicialmente será apresentada a malha de controle abordada neste trabalho e a notação utilizada. Em seguida, são dadas as definições de polos, zeros e suas direções para sistemas MIMO descritos em forma de matriz de funções de transferência, que também podem ser utilizadas em sistemas SISO, pois são o caso particular de uma matriz de dimensão  $1 \times 1$ .

Em seguida, na Seção 2.2, o problema de controle por Modelo de Referência é definido. Nesse ponto torna-se mais claro porque a escolha do modelo de referência é uma etapa importante para que métodos de controle por MR possam ser aplicados com segurança em processos industriais. Na Seção 2.3 é introduzido, então, o problema de controle baseado em dados, que é uma das maneiras de resolver o problema de controle por MR e será utilizada no Capítulo 5.

Na Seção 2.4, uma breve introdução a controle descentralizado é feita. As condições necessárias para se obter integridade em malha fechada e algumas ferramentas para análise de desempenho são definidas. Isso será utilizado na definição do modelo de referência para o projeto com essa estrutura de controle.

Termina-se este capítulo com um exemplo prático a fim de motivar o restante do trabalho.

### 2.1 Sistemas MIMO

Considere um processo MIMO em tempo discreto, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned} y(t) &= G_0(q)u(t) + v(t) \\ &= G_0(q)u(t) + H_0(q)w(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $q$  é o operador de avanço, tal que  $qx(t) = x(t + 1)$ ,  $G_0(q)$  é a matriz de funções de transferência (ou simplesmente matriz de transferência) do processo,  $u(t)$  é o vetor de entradas de controle,  $H_0(q)$  é o modelo do ruído e  $w(t)$  é um vetor de ruído branco com média zero e covariância  $\sigma_{w_i}^2$ . Ambas matrizes,  $G_0(q)$  e  $H_0(q)$ , têm todos os elementos racionais e causais e, para o escopo deste trabalho, serão consideradas quadradas de dimensão  $m \times m$ .

A tarefa é ajustar um vetor de parâmetros  $P \in \mathbb{R}^p$  de uma matriz de controladores lineares e invariantes no tempo  $C(q,P)$  (o leitor é encorajado a ler  $P$  como *rho*, como maiúscula de  $\rho$ ), a fim de alcançar uma resposta desejada em malha fechada. Assume-se que esse controlador pertence a uma classe de controladores  $\mathcal{C}$  especificada pelo usuário tal que a função de laço

$$L(q) = G_0(q)C(q,P) \quad (2)$$

tem grau relativo positivo em todos os elementos para todo  $C(q,P) \in \mathcal{C}$ . A ação de controle  $u(t)$  pode ser escrita como

$$u(t) = C(q,P)(r(t) - y(t)), \quad (3)$$

onde  $r(t)$  é o vetor do sinal de referência, o qual se assume quasi-estacionário e não-correlacionado com o ruído, ou seja  $\bar{E}[r(t)w(s)^T] = [0] \forall t, s$ , e

$$\bar{E}[f(t)] \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[f(t)]$$

com  $E[\cdot]$  denotando esperança (LJUNG, 1999). O sistema (1)-(3) em malha fechada torna-se

$$y(t,P) = T(q,P)r(t) + S(q,P)v(t) \quad (4)$$

$$S(q,P) = [I + G_0(q)C(q,P)]^{-1} \quad (5)$$

$$T(q,P) = [I + G_0(q)C(q,P)]^{-1}G_0(q)C(q,P) = S(q,P)G_0(q)C(q,P) \quad (6)$$

$$I = T(q,P) + S(q,P) \quad (7)$$

onde a dependência no vetor de parâmetros do controlador  $P$  foi então explicitada no sinal  $y(t,P)$ . A função  $S(q,P)$  é denominada função de sensibilidade e  $T(q,P)$  é denominada função de sensibilidade complementar ou função de malha-fechada. O sistema em malha fechada é representado na Figura 1.

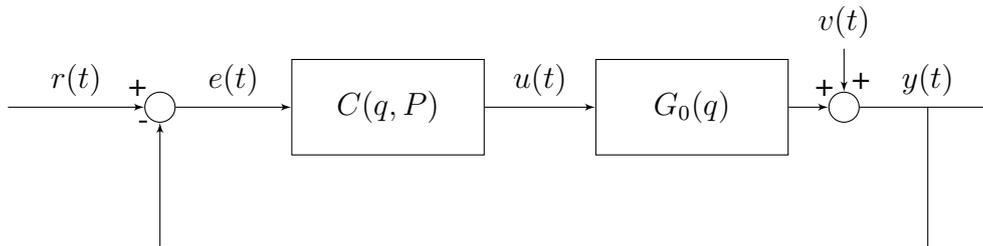


Figura 1: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

### 2.1.1 Polos e zeros em matriz de funções de transferência

Nesta seção serão introduzidas as definições de polos e zeros de um sistema linear invariante no tempo representados em matriz de funções de transferência e suas respectivas direções. As definições aplicam-se tanto a sistemas SISO quanto MIMO, pois um sistema SISO pode ser visto como uma matriz de função de transferência de dimensão  $1 \times 1$ . Além disso, a interpretação física das definições de polos e zeros são mais intuitivas para sistemas SISO. Sempre que possível, particularidades referente a sistemas quadrados serão apresentadas.

Essas definições serão essencialmente úteis para a especificação do modelo de referência quando houverem elementos de fase não-mínima no sistema (polos e zeros fora do círculo unitário).

#### 2.1.1.1 Polos

O seguinte teorema permite obter os polos diretamente da matriz de função de transferência  $G_0(q)$ . Apresenta também a vantagem de gerar somente os polos correspondentes à realização mínima do sistema.

**Teorema 2.1.** (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976) *O polinômio de polos  $\phi(q)$  correspondente a uma realização mínima com matriz de transferência  $G_0(q)$  é o mínimo denominador comum dos menores não-identicamente nulos de todas as ordens de  $G_0(q)$ .*

Pelo procedimento definido pelo Teorema, os fatores comuns no numerador e no denominador de cada menor são cancelados. Dessa forma, apenas os modos observáveis e controláveis irão aparecer no polinômio  $\phi(q)$ . Os polos de um sistema podem ser interpretados como as frequências (discretas) que aparecem no sinal de saída mesmo quando estas não estão presentes no sinal de entrada, ou seja, são frequências geradas pelo próprio sistema.

**Exemplo 2.1.** *Considere o sistema  $2 \times 3$ , com duas saídas e três entradas,*

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(q-0,9)} & 0 & \frac{(q-1,2)}{(q-0,9)(q-0,8)} \\ \frac{-1}{(q-1,2)} & \frac{1}{(q-0,8)} & \frac{1}{(q-0,8)} \end{bmatrix}.$$

*O posto do sistema é igual a 2, pois a terceira coluna pode obtida pela soma da primeira coluna multiplicada por  $\frac{q-1,2}{q-0,8}$  e da segunda coluna multiplicada por 2. Os menores de ordem 1 dos cinco elementos diferentes de zero são:*

$$\frac{1}{q-0,9}, \frac{q-1,2}{(q-0,9)(q-0,8)}, \frac{-1}{q-1,2}, \frac{1}{q-0,8}, \frac{1}{q-0,8}.$$

*Os menores de ordem 2 correspondentes à eliminação de cada coluna são:*

$$\frac{-(q-1,2)}{(q-0,9)(q-0,8)^2}, \frac{2}{(q-0,9)(q-0,8)}, \frac{1}{(q-0,9)(q-0,8)}.$$

*Considerando todos os menores, o mínimo denominador comum é*

$$\phi(q) = (q-1,2)(q-0,9)(q-0,8)^2$$

*O sistema possui então quatro polos: um em  $q = 1,2$ , um em  $q = 0,9$  e dois em  $q = 0,8$ .*

Pelo exemplo acima, nota-se que os polos de sistemas MIMO são essencialmente os polos dos elementos. Entretanto, não é possível determinar a multiplicidade dos polos considerando apenas os elementos da matriz.

**Teorema 2.2.** (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005) *Estabilidade Interna: O sistema realimentado da Figura 1 é internamente estável se, e somente se, as quatro matrizes de transferência*

$$\begin{bmatrix} (I + C(q)G_0(q))^{-1} & C(q)(I + G_0(q)C(q))^{-1} \\ G_0(q)(I + C(q)G_0(q))^{-1} & (I + G_0(q)C(q))^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

*são estáveis.*

### 2.1.1.2 Zeros e zeros de transmissão

Os zeros de um sistema surgem quando efeitos internos ao sistema competem de modo que a saída é nula mesmo quando as entradas (e os estados) não são eles mesmos identicamente zero. Para um sistema SISO os zeros  $z_i$  são soluções de  $G_0(z_i) = 0$ . Em geral, pode-se argumentar que zeros são os valores de  $q$  para os quais  $G_0(q)$  diminui o posto (de posto 1 para posto 0 para um sistema SISO). A fim de evitar futura confusão, será utilizado o termo *zero* para os zeros que aparecem no elemento da matriz, e o termo *zero de transmissão* ou *zero multivariável* para os zeros definidos no Teorema 2.3.

O seguinte teorema permite obter os zeros de transmissão diretamente da matriz de função de transferência  $G_0(q)$ . Os zeros de transmissão no infinito não são considerados.

**Teorema 2.3.** (MACFARLANE; KARCANIAS, 1976) *O polinômio de zeros de transmissão  $\psi(q)$  correspondente a uma realização mínima do sistema é o maior divisor comum de todos os numeradores de todos os menores de ordem  $m$  de  $G_0(q)$ , onde  $m$  é o posto normal de  $G_0(q)$ , desde que esses menores tenham sido ajustados de maneira a ter o polinômio  $\phi(q)$  como seu denominador.*

O posto normal de  $G_0(q)$  é definido como o posto de  $G_0(q)$  em todos os valores de  $q$  exceto em um número finito de singularidades (que são os zeros). No caso de sistemas SISO, zeros e zeros de transmissão são iguais. Os zeros de transmissão de um sistema podem ser interpretados como as frequências (discretas) que, quando presentes no sinal de entrada, são bloqueadas no sinal de saída. Zeros de transmissão cujo módulo é maior que 1 são chamados de zero de fase não-mínima (FNM). Ressalta-se, porém, que somente os zeros de transmissão de FNM no semi-plano direito contribuem para resposta inversa no sistema.

**Exemplo 2.2.** *Considere o sistema  $2 \times 2$ , com duas saídas e duas entradas, amostrado a  $T_s = 1$  s,*

$$G_0(q) = \frac{1}{(q-0,9)} \begin{bmatrix} q-0,7 & 0,6(q-\frac{13}{15}) \\ 1 & q-0,8 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

cuja resposta a uma sequência de saltos é apresentada na Figura 2.

*O posto normal de  $G_0(q)$  é 2 e o menor de ordem 2 é o determinante  $\det(G_0(q)) = \frac{(q-0,7)(q-0,8)-0,6q+0,52}{(q-0,9)^2} = \frac{(q-1,2)(q-0,9)}{(q-0,9)^2} = \frac{q-1,2}{q-0,9}$ .*

*Do Teorema 2.1, o polinômio de polos é  $\phi(q) = q - 0,9$  e então o polinômio de zeros de transmissão é  $\psi(q) = q - 1,2$ . Portanto,  $G_0(q)$  tem um zero de transmissão de fase não-mínima em  $q = 1,2$ .*

Esse exemplo ilustra que, em geral, zeros multivariáveis não tem relação direta com os zeros dos elementos da matriz de transferência, ao contrário dos polos. Note que o efeito do zero de transmissão de FNM não é perceptível na Figura 2.

Se  $G_0(q)$  é uma matriz quadrada, a seguinte equação é, geralmente, válida:

$$\bar{G}_0(q) \triangleq \frac{\psi(q)}{\phi(q)} = \det(G_0(q)). \quad (10)$$

Existem casos particulares em que o cancelamento de polos e zeros em (10) não indicam *necessariamente* os polos e os zeros de transmissão do sistema, como em sistemas triangulares (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

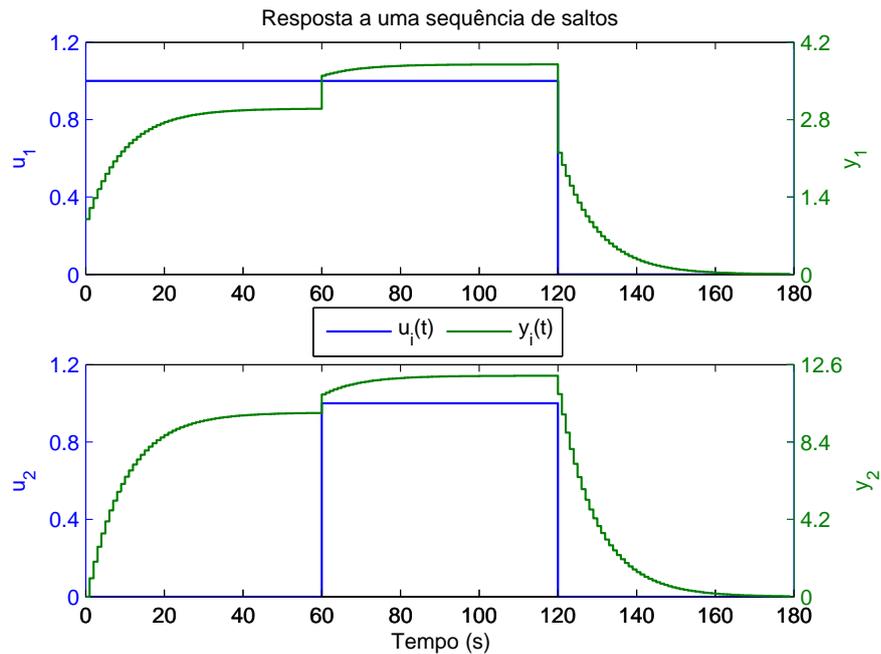


Figura 2: Resposta ao salto do sistema (9).

### 2.1.1.3 Direções de zeros e polos

Em sistemas multivariáveis, polos e zeros multivariáveis possuem direções associadas a eles. Essas direções fornecem uma indicação de quanto um modo é excitado pelas entradas e como se manifestam nas saídas.

**Teorema 2.4.** (HAVRE; SKOGESTAD, 1996) (DIREÇÕES DO ZERO) *Se  $G_0(q)$  possui um zero de transmissão para  $q = z_i \in \mathbb{C}$ , então existem vetores não-nulos, denominados direção de entrada do zero  $u_{z_i} \in \mathbb{C}^m$  e direção de saída do zero  $y_{z_i} \in \mathbb{C}^l$ , tais que  $u_{z_i}^H u_{z_i} = 1$ ,  $y_{z_i}^H y_{z_i} = 1$ , e*

$$G_0(z_i)u_{z_i} = 0 \quad e \quad (11)$$

$$y_{z_i}^H G_0(z_i) = 0. \quad (12)$$

Do ponto de vista prático, a direção de saída do zero  $y_{z_i}$  é normalmente de maior interesse, pois  $y_{z_i}$  fornece informação sobre qual saída (ou combinação de saídas) pode ser difícil de controlar, principalmente quando o zero está próximo de 1.

**Teorema 2.5.** (HAVRE; SKOGESTAD, 1996) (DIREÇÕES DO POLO) *Se  $G_0(q)$  possui um polo para  $q = p_i \in \mathbb{C}$ , então existem vetores não-nulos, denominados direção de entrada do polo  $u_{p_i} \in \mathbb{C}^m$  e direção de saída do polo  $y_{p_i} \in \mathbb{C}^l$ , tais que  $u_{p_i}^H u_{p_i} = 1$ ,  $y_{p_i}^H y_{p_i} = 1$ , e*

$$G_0(p_i)u_{p_i} = \infty \quad e \quad (13)$$

$$y_{p_i}^H G_0(p_i) = \infty. \quad (14)$$

Pode-se obter  $u_{z_i}$  e  $y_{z_i}$  a partir da Decomposição em Valor Singular (SVD) de  $G_0(z_i) = U\Sigma V^H$ . Tem-se que  $u_{z_i}$  é a *última* coluna de  $V$  (correspondente ao valor singular zero) e  $y_{z_i}$  é a *última* coluna de  $U$ . Para as direções do polo, como o ganho é infinito, então não se deve avaliar  $G_0(p_i)$ . Nesse caso, considera-se  $G_0(p_i + \epsilon)$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dessa forma,  $u_{p_i}$  é a *primeira* coluna de  $V$  (correspondente ao valor singular “infinito”) e  $y_{p_i}$  é a *primeira* coluna de  $U$  (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Além disso, se a inversa de  $G_0(p_i)$  existe, então pode-se computar a direção dos polos como a direção dos zeros em  $G_0^{-1}(p_i)y_{p_i} = 0$ .

**Exemplo 2.3.** *Considere o sistema do Exemplo 2.2, o qual tem um zero multivariável em  $z_i = 1,2$  e um polo em  $p_i = 0,9$ . As direções de entrada e saída desses elementos são determinados utilizando a SVD. Para o caso do zero de transmissão, tem-se:*

$$G_0(z_i) = G_0(1,2) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 30 & 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -0,45 & -0,89 \\ -0,89 & 0,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36,12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,93 & -0,37 \\ -0,37 & 0,93 \end{bmatrix}^H$$

As direções de entrada e saída do zero estão associadas com o valor singular nulo, então tem-se  $u_{z_i} = \begin{bmatrix} -0,37 \\ 0,93 \end{bmatrix}$  e  $y_{z_i} = \begin{bmatrix} -0,89 \\ 0,45 \end{bmatrix}$ . Nota-se a partir de  $y_{z_i}$  que o zero  $q = 1,2$  tem uma componente mais elevada na primeira saída. A seguir, para determinar a direção do polo, considere:

$$G_0(p_i + \epsilon) = G_0(0,9 + \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \begin{bmatrix} 0,2 + \epsilon & 0,6(\frac{1}{30} + \epsilon) \\ 1 & 0,1 + \epsilon \end{bmatrix}$$

A SVD quando  $\epsilon \rightarrow 0$  torna-se

$$G_0(0,9 + \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \begin{bmatrix} -0,20 & -0,98 \\ -0,98 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,99 & 0,1 \\ -0,1 & -0,99 \end{bmatrix}^H$$

As direções de entrada e saída do polo estão associadas com o maior valor singular  $1,02/\epsilon^2$ , então tem-se  $u_{p_i} = \begin{bmatrix} -0,99 \\ -0,1 \end{bmatrix}$  e  $y_{p_i} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ -0,98 \end{bmatrix}$ . Nota-se a partir de  $y_{p_i}$  que o polo  $q = 0,9$  tem uma componente mais elevada na segunda saída.

Quando a direção de saída do zero vale 0 em um ou mais elementos de  $y_{z_i}$ , diz-se que o zero está afixado nas demais direções (*pinned zero*). Pode ocorrer, inclusive, estar afixado em uma única direção mesmo em um sistema multivariável.

É importante notar que o procedimento demonstrado aplica-se quando os polos e zeros multivariáveis são distintos, caso contrário haverá mais de um valor singular igual a zero ou a infinito e não se pode afirmar que os vetores escolhidos são os corretos. Para o caso de polos e zeros com multiplicidade maior que 1, pode-se resolver um problema de autovalores generalizado utilizando a representação em espaço de estados do sistema (HAVRE, 1998). No entanto, direções de polos e zeros serão de fato um problema maior na escolha do modelo de referência somente quando os respectivos polos e zeros de transmissão estiverem fora do círculo unitário. Nesse caso, a maioria dos sistemas reais se comporta de forma a não haver dois modos iguais e somente a direção de saída será de interesse no quesito estabilidade, conforme será visto no Capítulo 3.

## 2.2 Controle por modelo de referência

A ideia por trás do controle por MR, é que o desempenho de malha fechada é especificado através de uma matriz de transferência em malha fechada “desejada”  $T_d(q)$ , a qual é conhecida como *modelo de referência*, e que descreve a relação entre o sinal de referência e a saída desejada em malha fechada  $y_d(t)$ :

$$y_d(t) = T_d(q)r(t).$$

Os parâmetros do controlador podem ser ajustados resolvendo o problema de otimização por modelo de referência

$$\begin{cases} \min_P J^{MR}(P) & (15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} J^{MR}(P) \triangleq \bar{E} \|(T(q,P) - T_d(q))r(t)\|_2^2. & (16) \end{cases}$$

O *controlador ótimo* é definido como  $C(q, P^{MR})$  com

$$P^{MR} = \arg \min_P J^{MR}(P).$$

O controlador ideal  $C_d(q)$  é aquele que faz o sistema em malha fechada comportar-se exatamente como o modelo de referência escolhido. Nesse caso, tem-se que

$$T_d(q) = [I + G_0(q)C_d(q)]^{-1}G_0(q)C_d(q) \quad (17)$$

e, isolando-se  $C_d(q)$  em (17), o *controlador ideal* é então dado por

$$C_d(q) = G_0(q)^{-1}L_d(q) \quad (18)$$

$$L_d(q) \triangleq T_d(q)[I - T_d(q)]^{-1} \quad (19)$$

Idealmente, deseja-se encontrar  $P^{MR}$  tal que  $C(q, P^{MR}) = C_d(q)$ , e grande parte da teoria desenvolvida nos métodos de controle por MR parte dessa premissa, ou seja, que  $C_d(q) \in \mathcal{C}$ .

Se  $G_0(q)$  é conhecida e o controlador não tiver restrições quanto à sua estrutura, aplica-se (18) para obter o controlador ideal. Porém, os sistemas reais usualmente se comportam de forma a violar essas premissas. Primeiramente, na maioria dos casos,  $G_0(q)$  não é conhecida e deve ser obtida através de modelagem matemática e/ou estimada por meio de algum método de identificação. Como nos sistemas reais normalmente há presença de ruído, a estimativa do modelo do processo terá certas variações e, nesse caso, o controlador obtido através de (18) não necessariamente fará o sistema em malha fechada comportar-se exatamente como o modelo de referência previamente escolhido. Por fim, raramente a estrutura dos controladores usados é suficientemente flexível para garantir que (18) possa ser utilizada; a estrutura do controlador é geralmente fixa e apenas os ganhos do controlador podem ser ajustados.

Neste caso, o melhor controlador deve ser encontrado minimizando o critério (15), o que pode ser feito considerando um projeto de controle ótimo (GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 1984), controle adaptativo (LANDAU et al., 2011) ou controle baseado em dados (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011).

Quando a estrutura do controlador  $\mathcal{C}$  é tal que possa representar o controlador ideal  $C_d(q)$  exatamente para algum valor de parâmetros, i.e., diz-se que *o controlador ideal pertence à classe de controladores*.

*Hipótese 1:*  $C_d(q) \in \mathcal{C}$ : Existe um vetor de parâmetros  $P_0$  tal que  $C(q, P_0) = C_d(q)$ .

Em geral, esse não é o caso porque a estrutura de controle escolhida é restritiva no que diz respeito à escolha do modelo de referência. Ou seja, a capacidade da classe do controlador representar exatamente o controlador ideal depende da escolha do modelo de referência.

A escolha mais simples e direta para o modelo de referência MIMO é definir todos os elementos não diagonais iguais a zero e, em seguida, selecionar modelos de referência SISO para cada saída, como pode ser encontrado na maioria das referências relacionadas, como (NAKAMOTO, 2004; JANSSON; HJALMARSSON, 2004; FORMENTIN; SAVARES; DEL RE, 2012; ROJAS; MORILLA; VILANOVA, 2012).

Ao fazê-lo, o usuário especifica um sistema de malha fechada completamente desacoplado, com as respostas desejadas para alterações de referência em cada saída. Além disso, esses modelos de referência SISO são geralmente escolhidos como funções de transferência de primeira ordem, que representam respostas com o tempo de acomodação desejado e sem sobrepasso (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011). Esta escolha simples para o modelo de referência, porém, não é necessariamente a melhor, e pode na verdade resultar em um desempenho muito pobre quando a classe do controlador é demasiada restritiva; o projeto experimental abordado no Exemplo 2.6 ilustra este problema.

### 2.3 Controle baseado em dados

Entre os métodos de controle baseados em dados que surgiram nas últimas décadas, existem os iterativos, que utilizam vários experimentos de forma que o controlador ótimo é obtido após uma sequência de controladores que operam na planta real. Esses métodos podem ser considerados mais seguros, porque não mudam os parâmetros do controlador drasticamente, porém são custosos do ponto de vista de produção (necessário fazer vários testes com a planta em operação, pode gerar perdas do produto final). Existem também os métodos diretos, baseados em apenas um experimento. Ambos métodos, diretos e indiretos, usam uma estrutura do controlador escolhida *a priori* e a sintonia do controlador é baseada diretamente nos dados de entrada e saída coletados da planta sem o uso direto de um modelo completo do sistema. A maioria dos métodos apresenta tanto uma versão para o caso *Single-Input Single-Output* (SISO) quanto uma extensão para o caso *Multiple-Input Multiple-Output* (MIMO).

Entre os métodos iterativos, destacam-se o *Iterative Feedback Tuning* (IFT), proposto para o caso SISO em (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1994; HJALMARSSON et al., 1998) e para o caso MIMO em (DE BRUYNE, 1997; HJALMARSSON; BIRKELAND, 1998). Também inicialmente iterativo, o *Correlation-based Tuning* (CbT) foi proposto para o caso SISO em (KARIMI; MISKOVIC; BONVIN, 2004) e uma extensão para o caso MIMO é encontrada em (MIŠKOVIĆ et al., 2007). Uma versão não-iterativa do CbT-SISO é apresentada em (KARIMI; HEUSDEN; BONVIN, 2007). Já em (YUBAI; USAMI; HIRAI, 2009) essa versão é proposta para lidar com sistemas multivariáveis. Um grande problema encontrado no caso multivariável desses trabalhos é a necessidade de fazer tantos experimentos quanto o número de parâmetros a ser identificado ou, dada uma reparametrização, o número de experimentos extras é igual ao produto do número de entradas pelo número de saídas, para o caso com ruído.

Recentemente um novo método direto foi proposto para o caso SISO, o *Optimal Controller Identification* (OCI) (CAMPESTRINI, 2010; CAMPESTRINI et al., 2012). Iden-

tificação por erro de predição do controlador propriamente dito foi proposto em (GUARDABASSI; SAVARESI, 2000). No OCI, o modelo entrada-saída do sistema é substituído desde o início por uma descrição equivalente envolvendo apenas parâmetros que são funções dos parâmetros do controlador ótimo por MR. Além disso, diferente da maioria dos outros métodos, a estrutura do controlador *não é limitada a ser linear nos parâmetros*. Esse método ainda carece de uma formulação para o caso multivariável.

O método mais amplamente conhecido e utilizado é o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT), proposto para o caso SISO em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), embora suas origens remontem a (GUARDABASSI; SAVARESI, 2000). A ideia principal é que o controlador por MR ótimo pode ser estimado simplesmente como a solução de um problema de mínimos quadrados para dados livres de ruído. Plantas instáveis ou com zeros de fase não-mínima também causam sérios problemas na aplicação do VRFT. Em (CAMPESTRINI, 2010) um critério flexível para a aplicação do método VRFT em plantas com zero de fase não-mínima é proposto. A autora propõe um método para estimar o zero de fase não-mínima da planta utilizando os dados coletados.

A primeira extensão do VRFT para o caso MIMO foi publicada em (NAKAMOTO, 2004) e um melhor entendimento do método é apresentado em (FORMENTIN; SAVARESI, 2011). As extensões propostas permitem obter o controlador ideal quando algumas restrições são satisfeitas, incluindo a de igual performance em malha fechada para todas as variáveis envolvidas e um modelo de referência diagonal. Isso pode não ser um problema quando o conjunto de variáveis a ser controlado é do mesmo tipo, mas o método não trará bons resultados caso contrário. Em (CAMPESTRINI et al., 2016), uma extensão sem a restrição apontada anteriormente é proposta.

Uma descrição do método VRFT-MIMO bem como a parametrização do controlador utilizado na prática será visto a seguir.

### 2.3.1 Estrutura do controlador

Métodos de controle baseados em dados podem ser usados para estimar uma grande variedade de controladores. Como controladores PI e PID são lineares nos parâmetros e por essa razão podem ser sintonizados utilizando diferentes métodos baseados em dados, será dada atenção especial a esses controladores, pois também serão utilizados na parte experimental (veja Capítulo 5). Além disso, a ação integral dos controladores PI/PID leva a erro nulo em regime permanente, o que usualmente é uma especificação quando se projeta um controlador para seguimento de referência constante.

Seja o controlador definido como

$$C(q, P) = \begin{bmatrix} c_{11}(q, \rho_{11}) & c_{12}(q, \rho_{12}) & \dots & c_{1m}(q, \rho_{1m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(q, \rho_{m1}) & c_{m2}(q, \rho_{m2}) & \dots & c_{mm}(q, \rho_{mm}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde  $P = [\rho_{11}^T \ \rho_{12}^T \ \dots \ \rho_{m1}^T \ \dots \ \rho_{mm}^T]^T$ . Assumindo que cada subcontrolador seja linear nos parâmetros, pode-se escrever:

$$c_{ij}(q, \rho_{ij}) = \rho_{ij}^T \bar{c}_{ij}(q), \quad \rho_{ij} \in \mathbb{R}^l,$$

onde  $\bar{c}_{ij}(q)$  é um vetor de dimensão  $l$  de funções de transferência causais.

O controlador PID com polo derivativo fixo pode então ser escrito como

$$c_{ij}(q, \rho_{ij}) = [kp_{ij} \ ki_{ij} \ kd_{ij}] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{T_s q}{q-1} \\ \frac{q-1}{T_s q} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

onde  $kp$ ,  $ki$ ,  $kd$  são os ganhos proporcionais, integradores e derivativos respectivamente, e  $T_s$  o período de amostragem. Com a escolha de  $\bar{c}_{ij}(q)$  feita em (21),  $P$  é o vetor contendo exatamente os ganhos em tempo contínuo do controlador PID que o operador deseja encontrar (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014).

### 2.3.2 Virtual Reference Feedback Tuning – VRFT

Nesta Subseção, será introduzida de forma breve a formulação para o VRFT multi-variável e como é feito o cálculo dos parâmetros, conforme apresentados em (CAMPESTRINI et al., 2016). Esse será o método utilizado nos testes apresentados no Capítulo 5.

O método VRFT é um método direto, ou seja, com apenas uma batelada de dados (ou duas, se for utilizada variável instrumental), o método busca pelo controlador que faz o sistema em malha fechada o mais próximo possível do modelo de referência. Ele foi primeiramente formulado para o caso sem ruído e os parâmetros do controlador podem ser encontrados por mínimos quadrados.

Considere o caso livre de ruídos, ou seja  $w(t) = 0$  em (1), e que o sistema tenha o mesmo número  $m$  de entradas e saídas. Dada a medição de  $y(t)$ , a referência virtual é definida como  $T_d(q)\bar{r}(t) = y(t)$  e o erro virtual é dado por

$$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t) = (T_d^{-1}(q) - I)y(t).$$

Em (CAMPESTRINI et al., 2016), a seguinte função objetivo é proposta:

$$J^{VRFT}(P) = \sum_{t=1}^N \|F(q)[u(t) - C(q,P)\bar{e}(t)]\|_2^2, \quad (22)$$

onde  $F(q)$  é um filtro que pode ser utilizado com um grau de liberdade adicional. Quando  $C_d(q) \in \mathcal{C}$ , o filtro pode ser utilizado para reduzir o ruído em alta frequência. Caso contrário, o filtro pode ser utilizado para aproximar o mínimo de (16) e (22). O filtro ótimo para o caso MIMO ainda é objetivo de pesquisa, embora dois filtros sejam comumente utilizados:  $F(q) = T_d(q)$  e  $F(q) = T_d(q)(I - T_d(q))$ . Neste trabalho foi utilizado o segundo filtro em todos os casos em que o VRFT foi aplicado.

A função  $J^{VRFT}(P)$  não depende da matriz de transferência  $G_0(q)$ , então o método proposto é descrito como um método baseado em dados. Se  $C(q,P)$  é linearmente parametrizado, então  $J^{VRFT}(P)$  é quadrático e existe uma solução fechada para o problema de otimização.

Considere a estrutura de controladores apresentada em (20)–(21), e seja o filtro

$$F(q) = \begin{bmatrix} F_{11}(q) & F_{12}(q) & \dots & F_{1m}(q) \\ F_{21}(q) & F_{22}(q) & \dots & F_{2m}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m1}(q) & F_{m2}(q) & \dots & F_{mm}(q) \end{bmatrix}.$$

Seja

$$A_n = \begin{bmatrix} F_{n1}(q)C_{11}(q)\bar{e}_1(t) \\ F_{n1}(q)C_{12}(q)\bar{e}_2(t) \\ \vdots \\ F_{n1}(q)C_{1m}(q)\bar{e}_m(t) \\ F_{n2}(q)C_{21}(q)\bar{e}_1(t) \\ F_{n2}(q)C_{22}(q)\bar{e}_2(t) \\ \vdots \\ F_{n2}(q)C_{2m}(q)\bar{e}_m(t) \\ \vdots \\ F_{nm}(q)C_{mm}(q)\bar{e}_m(t) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

e defina

$$\varphi(t) \triangleq [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_m], \quad (23)$$

$$\beta(t) \triangleq F(q)u(t). \quad (24)$$

A solução de (22) é então dada por

$$P_F = \begin{bmatrix} \rho_{11} \\ \vdots \\ \rho_{1m} \\ \rho_{21} \\ \vdots \\ \rho_{2m} \\ \vdots \\ \rho_{mm} \end{bmatrix} = \left( \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T \right)^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\beta(t)^T \quad (25)$$

Se o sistema é afetado por ruído, então recomenda-se o uso de variáveis instrumentais.

## 2.4 Controle descentralizado

O problema de controle *feedback* descentralizado consiste em controlar uma planta  $G_0(q)$  quadrada com um controlador diagonal

$$C(q) = \text{diag}\{c_i(q)\} = \begin{bmatrix} c_{11}(q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{mm}(q) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Podem parecer que utilizar controle descentralizado limita seriamente o desempenho atingível. No entanto, muitas vezes a perda em desempenho é pequena, parcialmente por causa do uso de um ganho alto de realimentação. Não obstante, para plantas com interação e controladores com banda limitada, existe uma perda no desempenho causada pelas interações dos elementos fora da diagonal de  $G_0(q)$ . Um elemento-chave em controle descentralizado é, portanto, a seleção de bons pareamentos de entradas e saídas, tal que o efeito das interações seja minimizado. O projeto de controle descentralizado tipicamente envolve dois passos:

1. A seleção de pareamentos (seleção da configuração de controle)
2. O projeto (sintonia) de cada controlador  $c_i(q)$ .

Como o passo 2 será feito utilizando algum método de controle baseado em dados, será discutido nesta Seção a seleção do pares de controle e desempenho atingível. O uso efetivo de controle descentralizado requer algum elemento de desacoplamento. Vagamente falando, o sistema pode ser desacoplado no espaço:  $G_0(q)$  é próximo de diagonal; ou pode ser desacoplado no tempo: uma malha é muito mais rápida que a outra, e pode-se assumir “controle perfeito” da malha mais rápida ao analisar a malha mais lenta. Além disso, o número de opções de pareamento é  $m!$  para uma planta  $m \times m$ .

Outra preocupação com controle descentralizado é que se tenha *integridade*, ou seja, a malha fechada deve permanecer estável quando subsistemas controlados são colocados e tirados de serviço, ou quando as entradas saturam. A fim de analisar essas questões (estabilidade e desempenho sob controle descentralizado), serão, primeiramente, introduzidos alguns índices largamente utilizados em controle multivariável. Em seguida será discutida a relação desses índices com as questões levantadas.

#### 2.4.1 RGA: Relative Gain Array

A RGA (BRISTOL, 1966) de uma matriz de funções de transferência fornece uma medida de interações no sistema. Suponha que se deseja utilizar a entrada  $u_j$  para controlar a saída  $y_i$ . Dois casos extremos podem acontecer:

- Todas as outras malhas estão abertas:  $u_k = 0, \forall k \neq j$ .
- Todas as outras malhas são fechadas com controle perfeito:  $y_k = 0, \forall k \neq i$ .

Seja  $g_{ij}(q)$  a função de transferência do par  $y_i, u_j$  quando as outras malhas estão abertas e  $k_{ij}(q)$  quando as outras malhas estão perfeitamente controladas. Então o elemento  $(i, j)$  da RGA é

$$\lambda_{ij}(q) = \frac{g_{ij}(q)}{k_{ij}(q)}.$$

Suponha que uma mudança na entrada  $j$  ( $\Delta u_j$ ) cause uma mudança na saída  $k$  ( $\Delta y_k$ ). Então

$$\Delta u_j = \sum_k \bar{g}_{jk}(q) \Delta y_k,$$

onde  $\bar{G}(q) = G_0^{-1}(q)$ . Mas se todas as malhas diferente de  $y_i$  são perfeitamente controladas, então

$$\Delta u_j = \bar{g}_{ji}(q) \Delta y_k,$$

de onde se obtém

$$k_{ij}(q) = \frac{1}{\bar{g}_{ji}(q)}.$$

Então

$$\lambda_{ij}(q) = g_{ij}(q) \bar{g}_{ji}(q).$$

Em termos de operações de matrizes, a RGA é definida como

$$\text{RGA}(G_0(q)) = \Lambda(G_0(q)) \triangleq G_0(q) \otimes (G_0^{-1}(q))^T \quad (27)$$

onde  $\otimes$  é a multiplicação elemento por elemento (produto Hadamard ou Schur).

A suposição de que todas as demais saídas são perfeitamente controladas é artificial, a não ser que seja restringida para uma gama de frequências específica. De fato, a RGA é quase invariavelmente definida em termos da informação de regime permanente, ou seja, para  $q = 1$ . Doravante, o termo RGA será utilizado para se referir à  $\Lambda(G(1))$ , ou simplesmente  $\Lambda(G)$ , exceto quando especificado contrário.

Existem dois motivos para essa restrição. Primeiro, se controle integral é utilizado, então a suposição de controle perfeito em regime permanente é inteiramente realista, e controle integral é usado frequentemente. Segundo, a RGA tem sido utilizada mais amplamente em processos industriais, onde muitas vezes é difícil obter modelos dinâmicos confiáveis, enquanto que informação do ganho de regime permanente é prontamente disponível (MACIEJOWSKI, 1989). Além disso, a RGA é independente da normalização (*scaling*) das variáveis de entrada e saída. Os trabalhos de (GROSDIDIER; MORARI; HOLT, 1985; SKOGESTAD; MORARI, 1987) fornecem explicações teóricas da utilidade da RGA para controle, pois até então era utilizado de forma empírica; algumas dessas utilidades serão expostas a seguir.

Duas propriedades algébricas da RGA se destacam: qualquer permutação em  $G_0(q)$  se reflete igualmente em  $\Lambda$ ; se  $G_0(q)$  é triangular ou instável, então  $\Lambda = I$ .

As principais propriedades úteis para controle da RGA são (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005):

- C1:** Elementos grandes na RGA (tipicamente, 5-10 ou maior), indicam que a planta é fundamentalmente difícil de controlar devido a forte interações e a sensibilidade a incertezas.
- C2:** Controladores baseados na inversa do modelo (desacopladores) devem ser evitados quando a RGA apresenta elementos grandes.
- C3:** Controladores diagonais não têm elementos em  $\Lambda(C)$  maiores que 1, e podem ser capazes de proporcionar razoável robustez para estabilidade mesmo se  $\Lambda(G)$  tem elementos grandes, porém o desempenho é prejudicado.
- C4:** A escolha sobre qual entrada controla qual saída deve considerar:
  - (a) Preferir pareamentos tal que o sistema rearranjado tenha RGA perto da identidade.
  - (b) Evitar, se possível, pareamentos que tenham elementos RGA negativos.
- C5:** Elementos negativos na diagonal da RGA indicam a presença de zeros fora do círculo (no sistema todo ou na sub-malha correspondente) se  $G$  for estável e estritamente própria. Na verdade, deve-se avaliar se há troca de sinal de  $\Lambda(G(1))$  para  $\Lambda(G(-1))$ <sup>1</sup>.
- C6:** Se a RGA apresentar elementos negativos na diagonal principal e diferentes pareamentos não forem possíveis, então um controlador diagonal não deve ser utilizado, porque é impossível obter integridade completa (estabilidade na presença de falhas na malha). Nesse caso, um controlador acoplado é fortemente recomendado.

<sup>1</sup>A análise de  $G(1)$  e  $G(-1)$  em tempo discreto é o equivalente contínuo de  $G(0)$  e  $G(j\infty)$ . Deve-se lembrar que na análise por Fourier  $q = e^{j\omega}$  e que em tempo discreto o espectro é definido de  $-\pi < \omega \leq \pi$ , pois repete-se a cada  $2\pi$ .

**C7:** Elementos pequenos na RGA não significam necessariamente plantas fáceis de controlar, embora isso seja geralmente verdade.

**C8:** Se o pareamento resultar em elementos  $\lambda_{ii} > 0,5$ , sendo esse o maior valor em módulo da coluna  $i$  e da linha  $i$ , pode-se esperar bom desempenho na malha  $(i, i)$  utilizando controladores diagonais, embora não se possa evitar completamente interações.

As propriedades aqui apresentadas serão utilizadas para tomar certas decisões no projeto do modelo de referência no Capítulo 4. Para a prova das propriedades citadas, outras utilidades e propriedades algébricas da RGA, recomenda-se a leitura de (BRISTOL, 1966; MACIEJOWSKI, 1989; GROSDIDIER; MORARI; HOLT, 1985; SKOGESTAD; MORARI, 1987; SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Nota-se que muitas decisões sobre a estrutura de controle e sobre o tipo de projeto aplicado ao sistema podem ser influenciadas pela RGA. De fato, essa é uma ferramenta bastante útil e a informação necessária é relativamente fácil de obter do sistema.

#### 2.4.2 Notação e fatoração da função de sensibilidade

Considere  $G_0(q)$  já devidamente permutada a fim de ter o pareamento entrada-saída em sua diagonal, e o controlador  $C(q)$  definido em (26). Seja

$$\tilde{G}_0(q) \triangleq \text{diag}\{g_{ii}\} = \begin{bmatrix} g_{11}(q) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22}(q) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{mm}(q) \end{bmatrix} \quad (28)$$

a matriz consistindo apenas dos elementos da diagonal de  $G_0(q)$ . Também

$$\tilde{S}(q) \triangleq (I + \tilde{G}_0(q)C(q))^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{1 + g_{ii}(q)c_i(q)}\right\} \quad \text{e} \quad \tilde{T}(q) = I - \tilde{S}(q) \quad (29)$$

são as funções de sensibilidade e de sensibilidade complementar para as malhas individuais. Note que  $\tilde{S}(q)$  não é igual a matriz com os elementos da diagonal de  $S(q) = (I + G_0(q)C(q))^{-1}$ .

Com controle descentralizado, as interações são dadas pelos elementos não-diagonais  $G_0(q) - \tilde{G}_0(q)$ . As interações podem ser normalizadas com respeito aos elementos diagonais. Define-se

$$E(q) \triangleq (G_0(q) - \tilde{G}_0(q))\tilde{G}_0^{-1}(q). \quad (30)$$

A “magnitude” da matriz  $E(q)$  é usualmente utilizada como uma “medida de interação”. Será mostrado adiante que o valor singular estruturado de  $E(q)$ ,  $\mu(E)$ , é uma medida para dominância diagonal generalizada. Para derivar esses resultados, faz-se uso da seguinte fatoração da função de sensibilidade total  $S(q) = (I + G_0(q)C(q))^{-1}$  com todas as malhas fechadas (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005)

$$\underbrace{S(q)}_{\text{total}} = \underbrace{\tilde{S}(q)}_{\substack{\text{malhas} \\ \text{individuais}}} \underbrace{(I + E(q)\tilde{T}(q))^{-1}}_{\text{interações}} \quad (31)$$

### 2.4.3 Integridade de sistemas de controle descentralizado

Primeiramente, duas suposições são necessárias:

1. A planta  $G_0(q)$  é estável;
2. Cada malha individual é estável por si só ( $\tilde{S}(q)$  e  $\tilde{T}(q)$  são estáveis).

A Suposição 1 é necessária pois se uma malha for tirada de serviço, o sistema deve permanecer estável. E a Suposição 2 é base para se ter controle descentralizado utilizando projeto independente em cada canal. Para alcançar estabilidade do sistema com todas as malhas fechadas, então as interações não podem causar instabilidade. Antes de definir as condições para integridade, serão introduzidos os conceitos de valor singular estruturado e dominância diagonal generalizada.

O valor singular estruturado  $\mu$  foi introduzido em (DOYLE, 1982) e fornece uma generalização do valor singular e do raio espectral. Ele foi apresentado como uma ferramenta para análise de robustez na presença de incertezas estruturadas (de onde vem seu nome). No caso de controle descentralizado, as interações podem ser consideradas como as incertezas do sistema. Não serão tratadas aqui em detalhes as propriedades de  $\mu$  com relação à robustez, pois este não é o enfoque do trabalho. De fato, o interesse nesse caso é estabelecer uma relação para  $\mu(E(q))$  para definir “dominância diagonal” do sistema.

O valor singular estruturado é computado em relação a uma estrutura de incertezas. No caso da matriz  $E(q)$ , ele é computado em relação a uma estrutura para  $\tilde{T}(q)$ . Assim como na RGA, algumas propriedades podem ser obtidas considerando o regime permanente. Desse modo, considerando controle integral, para o cálculo de  $\mu(E(1))$  a estrutura de  $\tilde{T}(1)$  é a matriz identidade  $I$ .

No MATLAB, o valor singular pode ser calculado com a seguinte linha de comando:

$$\text{mu} = \text{ssv}(\text{ss}(E), 1).$$

Doravante, será utilizado apenas  $\mu(E)$  para designar  $\mu(E(1))$ .

Seja  $\Lambda$  a RGA de regime permanente do sistema. Para uma planta  $m \times m$ , então  $\lambda_{ii} > 0,5 \forall i$  é uma condição necessária para  $\mu(E) < 1$  (dominância diagonal em regime permanente) (KARIWALA; FORBES; MEADOWS, 2003). Além disso, pode-se utilizar  $\mu(E)$  para definir dominância diagonal (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 310 e p. 441):

*Um sistema  $G_0(q)$  possui dominância diagonal generalizada se, e somente se,*

$$\mu(E) < 1.$$

O termo “dominância diagonal generalizada” significa “pode ser normalizada (por uma matriz diagonal  $D$ ) para ser diagonal dominante”. Além disso,  $\mu(E) = 0$  para uma planta triangular.

Voltando ao ponto inicial, integridade significa que a malha fechada deve permanecer estável quando subsistemas controlados são colocados e tirados de serviço, ou quando as entradas saturam. Um requerimento ainda mais forte (completa possibilidade de dessintonia) é requerer que o sistema se mantenha estável quando o ganho em várias malhas é reduzido (dessintonizado) por um fator arbitrário  $\epsilon_i$ ,  $0 \leq \epsilon_i \leq 1$ .

Controlabilidade integral descentralizada (CID) é um conceito que preocupa-se em saber se a possibilidade de completa dessintonia é possível, ou não, com controle integral. A CID considera a existência de um controlador, então ela depende apenas da planta e do

pareamento escolhido. A RGA fornece uma ferramenta útil para testar a CID, como provado primeiramente em (GROSDIDIER; MORARI; HOLT, 1985, Teorema 6) e mostrado a seguir:

**Teorema 2.6.** (RGA em regime permanente e CID) *Considere um sistema  $G_0(q)$  quadrado, estável e um controlador diagonal  $C(q)$  com ação integral em todos os elementos, e assuma que a função de laço  $L(q)$  é estritamente própria. Se um dado pareamento de entrada-saída corresponder a um elemento negativo da RGA, então o sistema em malha fechada possui pelo menos uma das seguintes propriedades:*

- (i) *O sistema em malha fechada é instável;*
- (ii) *A malha com o elemento negativo da RGA é instável;*
- (iii) *O sistema em malha fechada é instável se a malha com o elemento negativo da RGA é aberta.*

*Isso pode ser resumido como: uma planta (reordenada)  $G_0(q)$  estável tem CID somente se  $\lambda_{ii} \geq 0, \forall i$*

Tudo isso resulta em condições necessárias para se ter CID. Mas como se assume o uso de ação integral em todas as malhas, então uma condição suficiente para CID é que  $G_0(q)$  tenha dominância diagonal generalizada (BRAATZ, 1993, p. 154), i.e.,

$$\mu(E) < 1. \quad (32)$$

## 2.5 Algumas definições em álgebra (super) tropical

São apresentadas nesta Seção algumas definições no campo de álgebra tropical (IZHAKIAN; ROWEN, 2011). Esta álgebra será utilizada na prova dos teoremas apresentados na Seção 3.1.1 e uma condição fundamental com relação à causalidade do controlador ideal será determinada utilizando esta formulação.

Semianéis idempotentes surgem em uma variedade de contextos em matemática aplicada. Um importante semianel é o *álgebra min-plus* ou *semianel tropical*  $\{\mathbb{R} \cup \infty, \oplus, \odot\}$ . As operações aritméticas de *adição tropical*  $\oplus$  e de *multiplicação tropical*  $\odot$  são definidas como

$$x \oplus y \triangleq \min(x, y) \quad \text{e} \quad x \odot y \triangleq x + y.$$

O semianel tropical é idempotente no sentido de que  $x \oplus x \oplus \dots \oplus x = x$ . Baseado nessas operações, apresentam-se as seguintes definições utilizadas neste trabalho, como em (IZHAKIAN; ROWEN, 2011):

*Determinante tropical ou permanente:* Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz  $k \times k$  com elementos em  $\mathbb{R} \cup \infty$ . O determinante tropical de  $A$  é basicamente o cálculo padrão do determinante mas utilizando multiplicação e adição tropical nos elementos e será representado por  $|A|^\star$ .

*Menores e matriz adjunta:* O  $(i, j)$ -menor  $A_{i,j}^\star$  da matriz  $A$  é obtido através da remoção da linha  $i$  e da coluna  $j$  de  $A$ . A matriz adjunta  $\text{adj}^\star(A)$  de  $A$  é definida como a transposta da matriz cofatora  $\text{cof}^\star(A)$ , onde  $\text{cof}^\star(A)_{i,j} = |A_{i,j}^\star|^\star$ . Esta é a definição clássica dos menores e da matriz adjunta, porém a matriz de cofatores não leva em conta a mudança de sinal em cada menor.

*Pseudo-inversa canônica:* Se  $|A|^\star$  é inversível, a pseudo-inversa canônica é definida como

$$A^\nabla = \frac{\text{adj}^\star(A)}{|A|^\star} = \text{adj}(A)^\star - |A|^\star. \quad (33)$$

**Exemplo 2.4.** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

*Então*

$$|A|^\star = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}^\star}_{\min(5, 9)} = 5.$$

*A adjunta tropical é dada por:*

$$\text{adj}^\star(A) = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Portanto, a inversa tropical pode ser calculada como:*

$$A^\nabla = \text{adj}(A)^\star - |A|^\star = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Além disso, a seguinte definição será também utilizada. Seja  $X(q)$  uma matriz de transferência qualquer de dimensão  $m \times m$ , com elementos  $x_{ij}(q)$ , cada um consistindo de uma função de transferência racional. Seja  $\Gamma(X(q))$  definida como a matriz de graus relativos, ou seja,

$$\Gamma(X(q)) \triangleq \begin{bmatrix} \deg(x_{11}) & \dots & \deg(x_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \deg(x_{m1}) & \dots & \deg(x_{mm}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

onde  $\deg(\cdot)$  indica o grau relativo do argumento, dado pela diferença do número de polos e do número de zeros.

Com relação a matriz de graus relativos (34), afirmamos as duas propriedades seguintes que serão usadas ao longo do texto:

1.

$$\Gamma(X(q)Y(q)) = \Gamma(X(q)) \odot \Gamma(Y(q)). \quad (35)$$

A propriedade (35) é um uso direto da álgebra (super) tropical e  $\odot$  significa

$$(A \odot B)_{ij} = \min(A_{ik} + B_{kj}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. Se  $X(q)$  possui elementos causais, então

$$\Gamma((I \pm X(q))^{-1}) = \text{adj}^\star(\Gamma(I \pm X(q))). \quad (36)$$

Note que  $\Gamma(I \pm X(q))$  tem os elementos da diagonal principal iguais a zero e os demais elementos são valores positivos. Então, o determinante tropical de  $\Gamma(I \pm X(q))$  é zero. Então  $\Gamma((I \pm X(q))^{-1})$  é igual a sua adjunta tropical (veja (33)).

**Exemplo 2.5.** Deseja-se mostrar por meio de um exemplo que  $\Gamma(G_0^{-1}(q))$  pode ser obtida diretamente a partir de  $\Gamma(G_0(q))$  por meio da álgebra tropical. Este resultado e sua utilidade se tornarão mais claros na Seção 3.1.1.

Considere o modelo de tempo contínuo da coluna de destilação apresentada em (WOOD; BERRY, 1973).

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{12.8}{16.7s+1} e^{-1s} & \frac{-18.9}{21s+1} e^{-3s} \\ \frac{6.6}{10.9s+1} e^{-7s} & \frac{-19.4}{14.4s+1} e^{-3s} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

que tem o seguinte modelo de tempo discreto com  $T_s = 1$  min, considerando um retentor de ordem zero em sua entrada:

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0.74397}{q(q-0.9419)} & \frac{-0.87891}{q^3(q-0.9535)} \\ \frac{0.57856}{q^7(q-0.9123)} & \frac{-1.3015}{q^3(q-0.9329)} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Considerando a fórmula da inversa  $G_0^{-1}(q) = \frac{\text{adj}(G_0(q))}{\det(G_0(q))}$ , o determinante de (38) tem a forma

$$\det(G_0(q)) = \frac{K_1}{q^4(q-0.9419)(q-0.9329)} + \frac{K_2}{q^4(q-0.9535)(q-0.0329)} \quad (39)$$

$$= \frac{K_1 q^6 (q-0.9535)(q-0.0329) + K_2 q^4 (q-0.9419)(q-0.9329)}{q^{10}(q-0.9535)(q-0.0329)(q-0.9419)(q-0.9329)} \quad (40)$$

O grau relativo de  $\det(G_0(q))$  é 6. Como o interesse é somente no grau relativo do determinante e não em seu valor, nota-se que: o grau relativo dos termos multiplicados em (39) é dado pela soma do grau relativo de cada termo; o grau relativo da soma (ou subtração) dos termos em (39) é dado pelo menor grau relativo entre os termos, como pode ser melhor visto em (40). Observe que essas são exatamente as mesmas regras apresentadas acima.

A matriz de grau relativos de (38) é dada por

$$\Gamma(G_0(q)) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix},$$

então  $\det^*(\Gamma(G_0(q))) = \min(2+4, 4+8) = 6$ .

A inversa de  $G_0(q)$  também depende da matriz

$$\text{adj}(G_0(q)) = \begin{bmatrix} \frac{-1.3015}{q^3(q-0.9329)} & \frac{0.87891}{q^3(q-0.9535)} \\ \frac{-0.57856}{q^7(q-0.9123)} & \frac{0.74397}{q(q-0.9419)} \end{bmatrix}.$$

Note que o grau relativo de seus elementos é independente do sinal, o que, mais uma vez, é coincidente com as definições de álgebra (super)tropical. Então

$$\text{adj}^*(G_0(q)) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pode-se, então, aplicar as regras da inversão tropical à fórmula de inversão de matriz  $G_0^{-1}(q) = \frac{\text{adj}(G_0(q))}{\det(G_0(q))}$  e obter sobre  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(G_0^{-1}(q)) &= \Gamma\left(\frac{\text{adj}(G_0(q))}{\det(G_0(q))}\right) \\ &= \text{adj}^*(\Gamma(G_0(q))) - |\Gamma(G_0(q))|^*. \end{aligned}$$

Aplicando essa definição para (38), obtém-se

$$\Gamma(G_0^{-1}(q)) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Para mais propriedades, definições e maior compreensão em álgebra (super)tropical, veja (IZHAKIAN; ROWEN, 2011).

## 2.6 Exemplo motivacional do trabalho

Será apresentado nesta seção um exemplo prático a fim de motivar o restante do trabalho. Será visto como uma escolha imprudente do modelo de referência pode levar a resposta obtida em malha fechada a não ter qualquer semelhança com a resposta especificada. Isto porque, como será discutido mais tarde, o desempenho que foi especificado não é realista, dadas as restrições da classe do controlador e as características da planta.

**Exemplo 2.6.** Foi projetado um controlador MIMO para uma planta-piloto, onde o objetivo é controlar os níveis de dois tanques com a abertura de duas válvulas pneumáticas em uma planta de três tanques. Essa mesma planta foi utilizada em (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011), onde um controlador SISO foi obtido através do método VRFT-SISO considerando o controle do fluxo de apenas um tanque. O diagrama esquemático na Figura 3 descreve o processo, o qual é constituído com equipamentos industriais comerciais (bombas, válvulas, sensores e tanques). Os tanques 1 e 2 tem 70 litros cada, enquanto o tanque 3 é um reservatório de 250 litros.

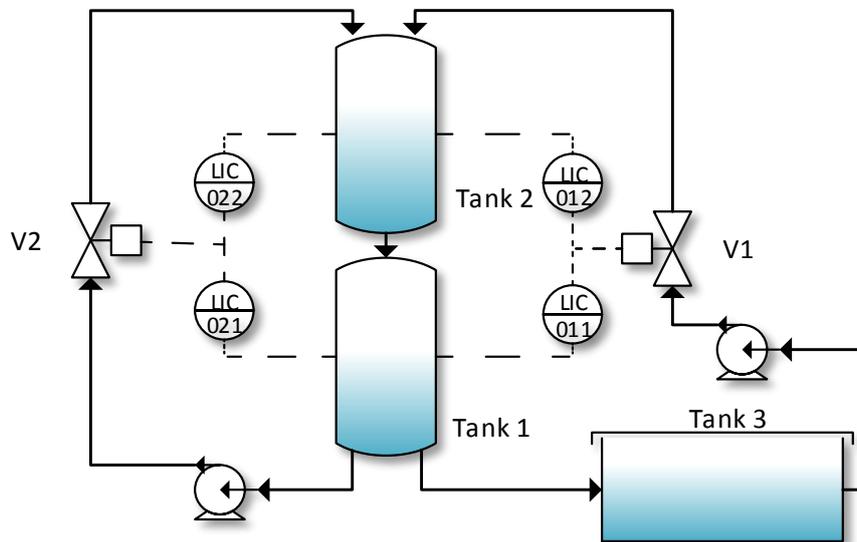


Figura 3: Planta de três tanques com controle de nível.

O sistema é amostrado a  $T_s = 1$  s, mas apenas os controladores LIC-011 e LIC-022 estão disponíveis, ou seja, uma estrutura de controle descentralizada é utilizada, onde cada um dos elementos é um controlador PI:

$$C(q) = \begin{bmatrix} \frac{(kp_{11} + ki_{11})q - kp_{11}}{(q-1)} & 0 \\ 0 & \frac{(kp_{22} + ki_{22})q - kp_{22}}{(q-1)} \end{bmatrix}.$$

Considere que a resposta desejada para ambas as saídas apresente erro nulo em regime permanente para referências constantes, sem sobrepasso, e tempo de acomodação de 130 s para a primeira saída e de 200 s para a segunda saída. Essas especificações podem ser representadas pelo seguinte modelo de referência diagonal:

$$T_{d_0}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0.03}{(q-0.97)} & 0 \\ 0 & \frac{0.02}{(q-0.98)} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Além disso, a escolha de um modelo de referência diagonal significa que se deseja desacoplamento total. Um experimento de malha aberta foi realizado, aplicando sinais Pseudo Random Binary Sequence (PRBS) em ambas as entradas por 8000 s. O resultado do ensaio em malha aberta é mostrado na Figura 4.

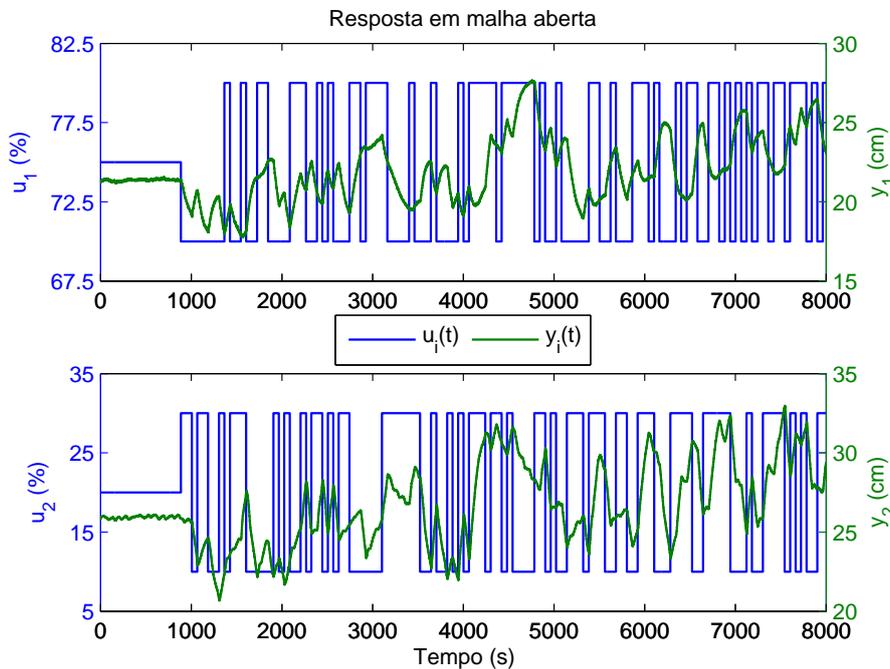


Figura 4: Resposta em malha aberta da planta piloto para entradas com sinais PRBS.

O controlador foi então obtido aplicando o método VRFT-MIMO (CAMPESTRINI et al., 2016), resultando no seguinte controlador PI descentralizado

$$C_0(q,P) = \begin{bmatrix} \frac{1,5055(q-0,9959)}{(q-1)} & 0 \\ 0 & \frac{3,7136(q-0,9966)}{(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

A resposta de malha fechada obtida é mostrada na Figura 5. A resposta real é muito mais lenta do que a desejada com tempo de acomodação em torno de 870 s para  $y_1(t)$  e em torno de 990 s para  $y_2(t)$ . É também significativamente mais lenta do que em malha aberta (mais informações na Seção 5.5) e há um acoplamento significativo. Isto porque, como será discutido mais tarde, o desempenho que foi especificado não é realista, dadas as restrições da classe do controlador e as características da planta. O desempenho que foi especificado está muito longe do que é possível obter com a estrutura de controle utilizada: um controlador PI descentralizado.

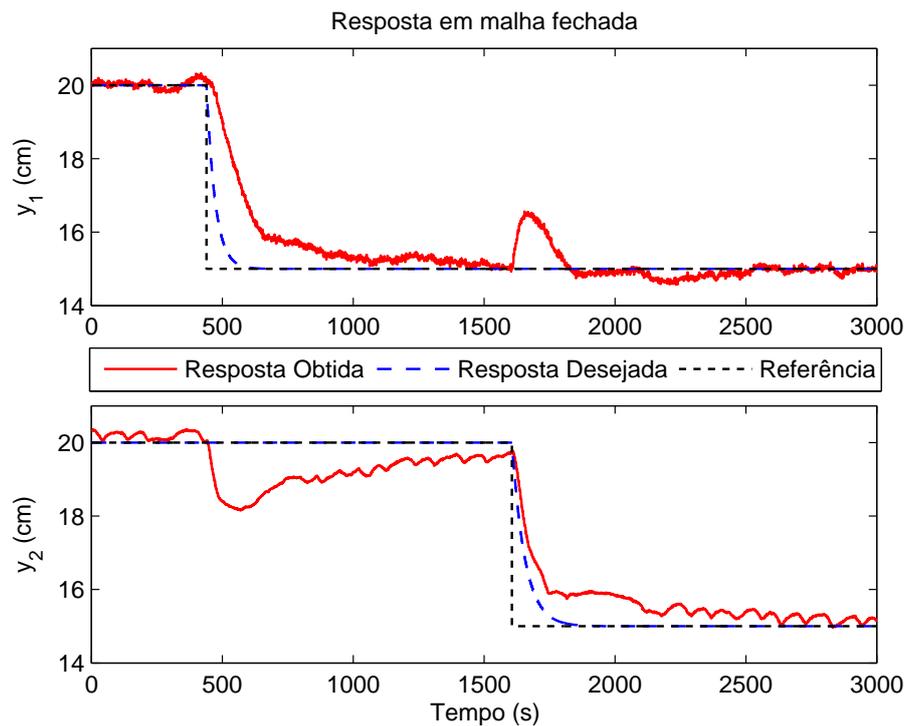


Figura 5: Resposta em malha fechada da planta piloto com o controlador (42) comparada com a resposta do modelo de referência (41).

Como o controlador ideal é função de  $G_0(q)$  e  $T_d(q)$  (veja (18)), uma escolha apropriada de  $T_d(q)$  deve possibilitar que o controlador ideal pertença à classe do controlador, ou pelo menos ter uma estrutura a qual não é tão longe de  $\mathcal{C}$ . Neste trabalho, será mostrado como as escolhas do usuário podem ser feitas a fim de alcançar esta situação para o projeto de controladores MIMO, especialmente no caso em que o modelo do processo  $G_0(q)$  é desconhecido. Atenção especial será dada para o caso padrão de controladores PID.

### 3 LIMITAÇÕES IMPOSTAS PELO SISTEMA E ATRIBUIÇÃO DE DESEMPENHO

Neste capítulo serão abordadas as principais limitações na escolha do modelo de referência em função do sistema ao qual se deseja aplicar algum dos métodos de controle por MR e, por consequência, qual o mínimo de conhecimento que se deve adquirir da planta. Algumas dessas limitações visam garantir estabilidade em malha fechada, principalmente na presença de polos e zeros de transmissão fora do círculo unitário, enquanto outras estão mais relacionadas com o desempenho, como no caso da presença de atraso e do tipo de controlador escolhido.

A literatura referente a este assunto é bastante voltada para a análise em frequência dos sistemas com representação em tempo contínuo. Sendo assim, boa parte do que será apresentado a seguir foi necessário traduzir para o caso de tempo discreto, pois a resposta em frequência é dependente do período de amostragem. Primeiramente, serão apresentadas as limitações mais rígidas a fim de garantir estabilidade interna e causalidade do controlador ideal. Em seguida, serão vistas as limitações de desempenho decorrentes dessas limitações mais rígidas.

A ideia é determinar as restrições que devem ser respeitadas a fim de poder fazer escolhas no modelo de referência  $T_d(q)$  de modo a se obter  $C_d(q)$  utilizando a classe de controladores  $\mathcal{C}$ , ou pelo menos chegar perto dessa condição.

Como motivação do capítulo, considere o caso SISO: um modelo de referência SISO  $T_d(q)$  representa o comportamento de malha fechada desejada do sistema, o que pode levar o usuário a acreditar que a escolha do modelo de referência é algo simples – traduzir o tempo de acomodação, sobrepasso e erro de regime permanente em uma função de transferência. Na verdade, esta é metade do trabalho, mas precauções devem ser tomadas em conta, como descrito em detalhe em (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011):

- para se obter um controlador ideal causal, o grau relativo do modelo de referência  $T_d(q)$  não pode ser menor do que o grau relativo do processo  $G_0(q)$ ;
- para se obter estabilidade interna com o controlador ideal, os zeros de fase não-mínima do processo  $G_0(q)$  devem ser incluídos no modelo de referência  $T_d(q)$ .

Assim, mesmo no caso SISO, escolher uma  $T_d(q)$  não é uma questão simples quando  $G_0(q)$  não é conhecida. Para satisfazer as restrições acima, o projetista necessita de um conhecimento prévio sobre o grau relativo da planta (ou, pelo menos, um limite superior para ele) e, no caso de apresentar zeros de fase não-mínima, a sua posição (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2011).

Além disso, a escolha de um desempenho que é muito longe do que pode ser alcançado considerando as limitações do sistema só irá contribuir para uma resposta deteriorada. Por exemplo, um controlador PI não será capaz de proporcionar um tempo de acomodação que é muito mais rápido do que a resposta de malha aberta, exceto para as plantas mais simples (como pode ser facilmente demonstrado por um argumento de lugar das raízes); e se a escolha do modelo de referência desconsidera essa limitação, então a resposta obtida provavelmente será completamente diferente da que foi especificada, e não raramente tornando-se instável. Orientações sobre escolhas seguras do modelo de referência para sistemas SISO são dadas em (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014).

### 3.1 Limitações rígidas

Aqui são apresentadas as limitações mais rígidas a fim de garantir estabilidade interna e controladores próprios a serem identificados no caso MIMO.

#### 3.1.1 Causalidade do controlador ideal

A primeira preocupação é que os elementos do controlador ideal sejam causais, i.e., o grau relativo dos elementos de  $C_d(q)$  devem ser não-negativos. Escolher um modelo de referência de modo que isso seja respeitado é bastante simples para o caso SISO, mas não para o caso MIMO. Esse problema será tratado a seguir, e para isso será feito uso das ferramentas de álgebra tropical (IZHAKIAN; ROWEN, 2011), descritas brevemente na Seção 2.5.

Uma matriz de transferência causal é aquela cujos elementos são funções de transferências próprias ou estritamente próprias. Então, utilizando a definição (34), a causalidade do controlador ideal pode ser escrita como

$$\Gamma(C_d(q)) \geq [\mathbf{0}],$$

a qual representa uma desigualdade elemento por elemento.

O Teorema a seguir fornece condições suficientes sobre o modelo de referência que garantem que o controlador ideal seja causal.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\gamma_i$  o menor grau relativo dos elementos da  $i$ -ésima coluna de  $G_0^{-1}(q)$ . Suponha que as três seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. *para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $T_{d_{ii}}(q) \neq 0$  e  $\deg(T_{d_{ii}}(q)) = \nu_i$  (todos os elementos na diagonal do modelo de referência são não-nulos com grau relativo  $\nu_i$ ).*
2. *para um dado  $i$ , e para  $j = 1, \dots, m, j \neq i$ , ou  $T_{d_{ij}}(q) = 0$  ou  $\deg(T_{d_{ij}}(q)) \geq \nu_i$  (todos elementos não-nulos fora da diagonal principal de uma dada linha de  $T_d(q)$  tem grau relativo maior ou igual a  $\nu_i$ ).*
- 3.

$$\nu_i \geq -\gamma_i, \forall i = 1, \dots, m. \quad (43)$$

Então o controlador ideal é causal.

*Prova.* A prova é dividida em três partes e utiliza as ferramentas de álgebra tropical. Primeiro, será mostrado que a condição 1 e o caso limitante da condição 2 (quando todos os elementos em uma dada linha tem o mesmo grau relativo) do Teorema implicam

que  $\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q))$ . A seguir, prova-se que a condição 3 junto com  $\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q))$  implica no resultado do Teorema. Por fim, argumenta-se por que a condição 2 pode ser relaxada.

Seja

$$\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q)) \odot \Gamma((I - T_d(q))^{-1})$$

que vem da propriedade (35). Aplicando a propriedade (36) resulta

$$\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q)) \odot \text{adj}^*(\Gamma(I - T_d(q))). \quad (44)$$

Na sequência, será considerada uma matriz  $3 \times 3$ , mas a argumentação que se segue irá compreender uma matriz quadrada de ordem qualquer.

Defina os elementos do primeiro termo no lado direito de (44) como

$$\Gamma(T_d(q)) = [t_{ij}]. \quad (45)$$

O segundo termo do lado direito de (44) será então

$$\text{adj}^*(\Gamma(I - T_d(q))) = \begin{bmatrix} 0 & \min(t_{12}, t_{13} + t_{32}) & \min(t_{13}, t_{12} + t_{23}) \\ \min(t_{21}, t_{23} + t_{31}) & 0 & \min(t_{23}, t_{21} + t_{13}) \\ \min(t_{31}, t_{32} + t_{21}) & \min(t_{32}, t_{31} + t_{12}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Multiplicando tropicalmente  $\Gamma(T_d(q))$  por (46) obtém-se (mostrada só a primeira coluna):

$$\Gamma(L_d(q)) = \begin{bmatrix} \min(t_{11}, t_{12} + t_{21}, t_{12} + t_{23} + t_{31}, t_{13} + t_{31}, t_{13} + t_{21} + t_{32}) & \cdots \\ \min(t_{21}, t_{21} + t_{22}, t_{22} + t_{23} + t_{31}, t_{23} + t_{31}, t_{21} + t_{23} + t_{32}) & \cdots \\ \min(t_{31}, t_{21} + t_{32}, t_{23} + t_{31} + t_{32}, t_{31} + t_{33}, t_{21} + t_{32} + t_{33}) & \cdots \end{bmatrix}. \quad (47)$$

a qual pode ser simplificada para

$$\Gamma(L_d(q)) = \begin{bmatrix} \min(t_{11}, t_{12} + t_{21}, t_{12} + t_{23} + t_{31}, t_{13} + t_{31}, t_{13} + t_{21} + t_{32}) & \cdots \\ \min(t_{21}, t_{23} + t_{31}) & \cdots \\ \min(t_{31}, t_{21} + t_{32}) & \cdots \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Em (48), cada elemento de  $\Gamma(L_d(q))$  é o mínimo entre seu elemento correspondente de  $\Gamma(T_d(q))$  e uma soma de elementos que contém, pelo menos, um elemento *na mesma linha* do elemento correspondente de  $\Gamma(T_d(q))$ . Para matrizes de ordem superior, outras somas irão aparecer na argumentação do mínimo, mas com essa mesma característica.

Sob a hipótese de que todos os elementos fora da diagonal principal de uma mesma linha tem o mesmo grau relativo e que são, pelo menos, igual ao termo da diagonal principal, tem-se

$$\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q)).$$

Seja  $\Gamma(C_d(q)) = [c_{ij}]$ ,  $\Gamma(G_0(q)^{-1}) = [\bar{g}_{ij}]$  e  $\Gamma(L_d(q)) = [l_{ij}]$ ; lembre que  $C_d(q) = G_0(q)^{-1}L_d(q)$ . Então os elementos  $c_{ij}$  são dados por

$$c_{ij} = \min_k (\bar{g}_{ik} + l_{kj}) \quad (49)$$

Então, para cada  $i, j$ ,  $c_{ij} \geq 0$  requer que  $l_{kj} \geq -\bar{g}_{ik} \forall k$ , uma desigualdade que deve ser satisfeita para todo  $i, j = 1, \dots, m$ . Como  $\Gamma(L_d(q)) = \Gamma(T_d(q))$ , para um dado  $k$ ,

$l_{k,j} = \nu_k \forall j$ . Então, pode-se escrever cada desigualdade  $l_{k,j} \geq -\bar{g}_{ik}$  como  $\nu_k \geq -\bar{g}_{ik}$ . Variando  $i, j$  para um  $k$  fixo resulta:  $\nu_k \geq -\bar{g}_{ik} \forall i$ , ou mais compacto:  $\nu_k \geq -\gamma_k, \forall k$ .

Agora, observe que os elementos fora da diagonal principal de (48) dependem apenas dos elementos fora da diagonal de  $\Gamma(T_d(q))$ . Assim, aumentar o grau relativo dos elementos fora da diagonal principal de  $T_d(q)$  só pode aumentar o grau relativo dos elementos fora da diagonal de  $L_d(q)$  e, portanto, só pode aumentar  $\Gamma(C_d(q))$ .  $\square$

Na formulação acima, se um elemento da matriz de transferência é zero, seu grau relativo é definido como  $\infty$ , então a demonstração é válida em todo caso.

As condições do Teorema 3.1 envolvem apenas o grau relativo dos elementos de  $G_0^{-1}(q)$ , ou seja, os elementos da matriz  $\Gamma(G_0^{-1}(q))$ . Essa matriz pode ser calculada diretamente a partir do grau relativo da planta  $\Gamma(G_0(q))$ , novamente utilizando álgebra tropical, pela seguinte expressão:

$$\Gamma(G_0^{-1}(q)) = \text{adj}^*(\Gamma(G_0(q))) - |\Gamma(G_0(q))|^*. \quad (50)$$

Portanto, assim como no caso SISO, pode-se facilmente escolher o modelo de referência de modo que a causalidade do controlador ideal seja garantida por conhecer apenas um limite superior para o grau relativo da planta  $\Gamma(G_0(q))$ .

Um caso particular importante é aquele em que a estrutura do controlador é descentralizada. Neste caso, é desejado que o controlador ideal seja descentralizada e causal. Garantir essas duas propriedades exigiria a escolha adequada das singularidades do modelo de referência para coincidir com as da planta, que por sua vez exigiria o pleno conhecimento do modelo do processo. Ainda assim, é de interesse utilizar toda a informação disponível para escolher um modelo de referência que não desconsidere que o controlador ideal tenha a estrutura desejada. Isto pode ser feito aplicando o seguinte Teorema, que fornece condições necessárias no modelo de referência para que o controlador seja descentralizado e causal.

**Teorema 3.2.** *Se  $C_d(q)$  é causal e descentralizado, então*

$$\Gamma(T_d(q)) \geq \Gamma(G_0(q)) \odot \text{adj}^*(\Gamma(I + G_0(q))). \quad (51)$$

$\diamond$

*Prova.* Suponha inicialmente que, além de ser causal e descentralizado,  $C_d(q)$  é também inversamente causal; então

$$\Gamma(C_d(q)) = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \dots & \infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \infty & \infty & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

que é o elemento neutro da multiplicação de matrizes em álgebra tropical. Ainda,

$$T_d(q) = G_0(q)C_d(q)(I + G_0(q)C_d(q))^{-1}$$

a qual, utilizando as propriedades (35) e (36) resulta em

$$\Gamma(T_d(q)) = \Gamma(G_0(q)C_d(q)) \odot \text{adj}^*(\Gamma(I + G_0(q)C_d(q))). \quad (53)$$

Mas sob a hipótese (52), tem-se

$$\Gamma(G_0(q)C_d(q)) = \Gamma(G_0(q)) \odot \Gamma(C_d(q)) = \Gamma(G_0(q)) \quad (54)$$

a qual, utilizando novamente as propriedades (35) e (36), resulta em:

$$\text{adj}^*(\Gamma(I + G_0(q)C_d(q))) = \text{adj}^*(\Gamma(I + G_0(q))). \quad (55)$$

Substituindo (54) e (55) em (53) prova que, sob a hipótese (52),  $\Gamma(T_d(q)) = \Gamma(G_0(q)) \odot \text{adj}^*(\Gamma(I + G_0(q)))$ . Aumentando o grau relativo do modelo de referência só pode aumentar o grau relativo do controlador ideal, o que estabelece (51).  $\square$

*Observação 1.* A condição (51) é apenas necessária (não suficiente) para que  $C_d(q)$  seja causal e descentralizado.

*Observação 2.* Note que para o caso  $1 \times 1$ , ou seja, o caso SISO, tanto (43) quanto (51) se reduzem à  $T_d(q)$  ter grau relativo maior ou igual ao da  $G_0(q)$ , exatamente como apresentado anteriormente.

Em resumo, é importante conhecer o grau relativo da planta, ou, pelo menos, um limitante superior para ele, a fim de escolher adequadamente o modelo de referência. Se a planta  $G_0(q)$  surge a partir da amostragem de uma planta de tempo contínuo, como é geralmente o caso, então esta informação está prontamente disponível. Se o sistema de tempo contínuo é livre de atrasos e tem elementos estritamente próprios, então todos os elementos não nulos de  $G_0(q)$  terão grau relativo 1 (ÅSTRÖM; HAGANDER; STERNBY, 1984). Para cada função de transferência com atraso ( $\theta$ ), o grau relativo do elemento discretizado será  $\lceil \frac{\theta}{T_s} + 1 \rceil$  onde  $\lceil \cdot \rceil$  significa arredondamento para baixo e  $T_s$  é o período de amostragem. Assim, um conhecimento *a priori* do grau relativo dos elementos planta, ou pelo menos de um limitante superior, é necessário, mesmo quando nenhum modelo do processo está disponível.

Pela primeira vez, então, faz-se referência a um princípio óbvio, embora muitas vezes esquecido: é impossível projetar apropriadamente um controlador para um dado processo sem conhecer absolutamente nada sobre ele. No entanto, para métodos baseado em dados não é necessário um modelo completo e preciso do processo, o qual se aplica a uma grande variedade de sinais de excitação, mas o projetista deve conhecer características básicas do processo com muito pouco ou nenhum custo, como o grau relativo do processo.

Além disso, observa-se que o controlador ideal é obtido através da inversa do modelo do processo. Então, se algum dos zeros e polos cancelados pelo controlador estiver fora do círculo unitário, a malha fechada resultante será internamente instável, embora a entrada-saída seja estável. Esses cancelamentos de instabilidade devem ser evitados a todo custo, o que pode ser conseguido por uma escolha adequada do modelo de referência, conforme será visto no decorrer deste trabalho.

Por fim, deve-se levar em conta que o modelo de referência deve ser suficientemente próximo ao que pode ser atingido com a classe dada de controladores. Essa prerrogativa é, além de intuitiva, baseada no fato de que grande parte das propriedades dos métodos baseados em dados baseiam-se na hipótese de que  $C_d(q) \in \mathcal{C}$ . Além disso, uma escolha adequada do modelo também acarreta sinais de controle moderados, o que é geralmente uma preocupação na indústria de processos.

### 3.1.2 Estabilidade interna na presença de zeros de transmissão de fase não-mínima

A primeira importante limitação devido à presença de zeros de transmissão fora do círculo unitário é relacionada à estabilidade em malha fechada. A restrição de interpolação em função da equação de malha fechada, conforme apresentada em (HAVRE; SKOGESTAD, 1996), tem uma direção, pois o próprio zero tem uma direção também.

**Teorema 3.3.** *Se  $G_0(q)$  tem um zero de transmissão de fase não-mínima em  $z_i$  com direção de saída  $y_{z_i}$ , então para estabilidade interna do sistema realimentado com o controlador ideal, a seguinte restrição de interpolação deve aplicar-se:*

$$y_{z_i}^H T_d(z_i) = 0 \quad (56)$$

Em palavras, (56) diz que  $T_d(q)$  deve ter um zero de transmissão de fase não-mínima na mesma direção de  $G_0(q)$ . Uma imposição de projeto é notável a partir desse teorema: se for desejado um modelo de referência diagonal, então todos os elementos da diagonal para os quais  $y_{z_i} \neq 0$  deverão possuir o zero de fase não-mínima. Dessa forma, todas as saídas sofrerão degradação na resposta em regime transitório.

Em sistemas SISO, é bastante conhecido da análise pelo lugar das raízes que, quando o ganho de realimentação aumenta em direção ao infinito, os polos de malha fechada migram para a posição dos zeros de malha aberta. Então, a presença de zeros fora do círculo implica instabilidade em ganhos altos, o que, por sua vez, limita o desempenho. Abordagem similar pode ser feita no caso MIMO, considerando a “pior” direção do zero (veja mais em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, p. 235)). Em termos de escolha da função de malha fechada, deve-se respeitar a restrição (56), e uma escolha menos exigente do tempo de acomodação ou uma margem menos rigorosa de sobrepasso é, também, recomendada. Quanto mais perto da borda do círculo unitário estiver o zero de fase não-mínima, maior a limitação no tempo de resposta (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, paralelo com o caso contínuo).

Por fim, é importante notar que a restrição (56) é função dos zeros multivariáveis e não tem relação direta com o zero dos elementos de  $G_0(q)$ . Para melhor entender isso, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.1.** *Seja o modelo do processo a ser controlado dado por*

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{q-1,3}{(q-0,9)(q-0,8)} & \frac{0,4}{q-0,9} \\ \frac{0,8125}{q-0,9} & \frac{0,2}{q-0,9} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

cujo período de amostragem é  $T_s = 1$  s. Para esse sistema, o polinômio de polos é dado por  $\phi(q) = (q - 0,9)^2(q - 0,8)$  e o polinômio de zeros é dado por  $\psi(q) = q$ . Note que o polinômio de zeros não possui o zero em 1,3 do elemento  $g_{11}$ . A resposta do sistema a uma seqüência de saltos é apresentada na Figura 6.

Observa-se claramente o efeito do zero de fase não-mínima na saída 1 quando aplicado um salto na entrada. Um projetista descuidado pode ser ludibriado a tomar a decisão de incluir esse zero no modelo de referência, obtendo uma malha fechada com o efeito degradante do zero, quando de fato não precisaria. Considere, então, os dois seguintes modelos de referência, o primeiro inserindo o zero de fase não-mínima e o segundo sem o levar em conta, pois não aparece em  $\psi(q)$ .

$$T_1(q) = \begin{bmatrix} \frac{-0,3(q-1,3)}{(q-0,7)^2} & 0 \\ 0 & \frac{0,1}{q-0,9} \end{bmatrix}.$$

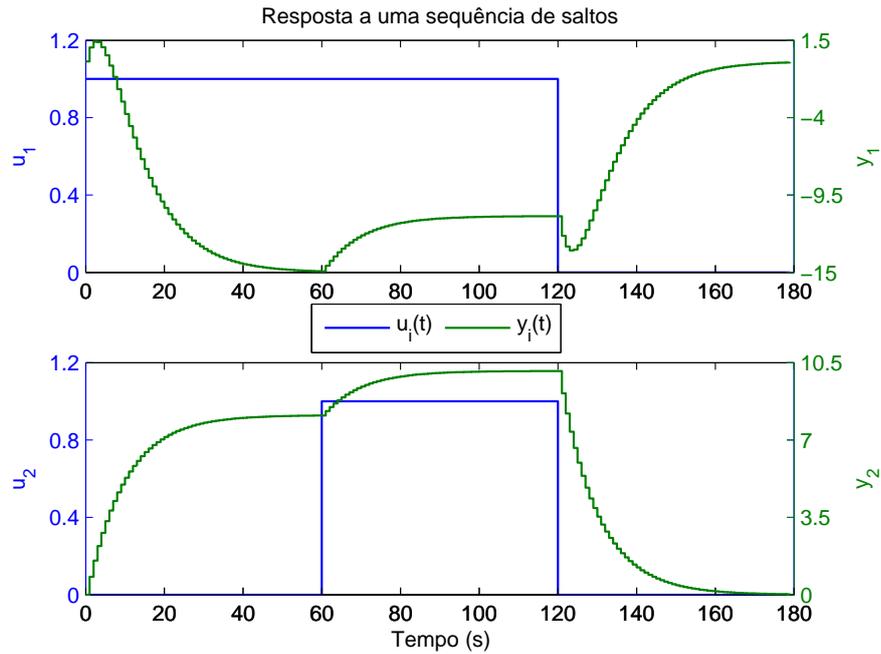


Figura 6: Resposta ao salto do sistema (57).

$$T_2(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,3}{q-0,7} & 0 \\ 0 & \frac{0,1}{q-0,9} \end{bmatrix}.$$

Os controladores ideais para esses casos, dados por (18), são:

$$C_1(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,48(q-0,9)(q-0,8)(q-1,3)}{q(q-1)(q-0,1)} & \frac{-1,95(q-0,9)(q-0,8)(q-1,3)}{q(q-1)(q-0,1)} \\ \frac{0,32(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)(q-0,1)} & \frac{-0,8(q-0,9)(q-1,3)}{q(q-1)(q-0,1)} \end{bmatrix}.$$

$$C_2(q) = \begin{bmatrix} \frac{-0,48(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{1,95(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ \frac{0,32(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-0,8(q-0,9)(q-1,3)}{q(q-1)} \end{bmatrix}.$$

Os dois controladores projetados apresentam o zero de fase não-mínima de  $g_{11}(q)$  em pelo menos um dos seus elementos. No entanto, para o primeiro projeto, o zero aparece em toda a primeira linha, “causando” o aparecimento do efeito de resposta inversa em malha fechada. Contudo, o controlador  $C_1(q)$  não faz a malha fechada ser internamente estável (8), pois  $C_1(q)(I+G_0(q)C_1(q))^{-1}$  é instável. No caso do controlador  $C_2(q)$ , a malha fechada é internamente estável. Sendo assim, zeros de fase não-mínima em elementos do controlador podem ser, então, benéficos para a malha de controle, considerando seguimento de referência; porém o ganho do controlador não deve ser alto para não levar a polos instáveis em malha fechada.

Esse exemplo ilustra uma vantagem em se trabalhar com o sistema como um todo (considerando a matriz de transferência). Muitas vezes, faz-se o projeto do controlador considerando apenas a resposta das sub-malhas (apenas o elemento da matriz). Quando todas as malhas são fechadas e a interação entre elas entra em ação, acaba-se obtendo um desempenho pobre para o sistema MIMO.

Por outro lado, zeros de transmissão não são diretamente perceptíveis na saída do sistema multivariável (veja Exemplo 2.2), o que dificulta o projeto do controlador. Sendo assim, uma análise gráfica das saídas do sistema pode ser bastante enganosa quanto à presença de zeros multivariáveis e pode levar a projetos de controladores com desempenho aquém do que poderia ser atingido considerando o sistema inteiro.

### 3.1.2.1 Movendo o efeito de zeros de transmissão para uma saída específica

Em sistemas MIMO pode-se muitas vezes mover o efeito de deterioração de um zero de transmissão de fase não-mínima para uma saída menos importante. Isso é possível pois, embora a restrição (56) imponha uma certa relação entre os *elementos* de cada *coluna* de  $T_d(q)$ , as colunas podem ainda ser escolhidas independentemente. Para melhor entender essa possibilidade, considere o exemplo apresentado em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, paralelo caso discreto):

**Exemplo 3.2.** *Reconsidere o Exemplo 2.2 cuja direção do zero foi determinada no Exemplo 2.3:*

$$y_{z_i} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,89 \\ 0,45 \end{bmatrix}$$

Qualquer  $T_d(q)$  admissível deve satisfazer (56) e isso impõe a seguinte relação entre os elementos das colunas de  $T_d(q)$ :

$$-2t_{11}(z_i) + t_{21}(z_i) = 0; \quad -2t_{12}(z_i) + t_{22}(z_i) = 0. \quad (58)$$

Três possíveis escolhas para  $T_d(q)$  serão examinadas:  $T_{d_0}(q)$  diagonal (projeto desacoplado);  $T_{d_1}(q)$  com a saída 1 perfeitamente controlada; e  $T_{d_2}(q)$  com a saída 2 perfeitamente controlada. Note que na prática controle perfeito não pode ser atingido, ou seja, a Hipótese 1 (p. 21) não é satisfeita pois a condição do grau relativo não é obedecida, mas usa-se a suposição para simplificar a argumentação. Em todos os casos, deseja-se erro nulo em regime permanente, i.e.,  $T_{d_i}(1) = I$ .

Um projeto desacoplado requer  $t_{12}(q) = t_{21}(q) = 0$  e para satisfazer (58) necessita-se  $t_{11}(z_i) = t_{22}(z_i) = 0$ , de forma que o zero de transmissão de fase não-mínima deve estar presente em ambos elementos da diagonal. Uma possível escolha, que também satisfaz  $T_0(1) = I$ , é

$$T_{d_0}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{z_i}(q-z_i)}{q(q-\frac{1}{z_i})} & 0 \\ 0 & \frac{-\frac{1}{z_i}(q-z_i)}{q(q-\frac{1}{z_i})} \end{bmatrix}$$

Para os projetos com uma saída perfeitamente controlada, pode-se escolher

$$T_{d_1}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\beta_1(z_i+1)(q-1)}{q(q-\frac{1}{z_i})} & \frac{-\frac{1}{z_i}(q-z_i)}{q(q-\frac{1}{z_i})} \end{bmatrix}; \quad T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{z_i}(q-z_i)}{q(q-\frac{1}{z_i})} & \frac{\beta_2(z_i+1)(q-1)}{q(q-\frac{1}{z_i})} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base para essas escolhas são: para a saída que não é perfeitamente controlada, o elemento diagonal deve conter o zero de fase não-mínima para satisfazer (58), e o elemento não-diagonal deve ter um termo  $q-1$  no numerador para satisfazer  $T_d(1) = I$ . Por fim, para satisfazer completamente (58) para as duas escolhas, tem-se

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

O zero de transmissão de fase não-mínima não tem efeito na saída 1 para o projeto  $T_{d_1}(q)$ , e não tem efeito na saída 2 para o projeto  $T_{d_2}(q)$ . Portanto, nota-se que é de fato possível mover o efeito do zero de transmissão de fase não-mínima para uma saída específica. Entretanto, o preço a pagar é haver alguma interação entre as malhas. Note que a magnitude da interação, expressada por  $\beta_k$ , é maior para o caso em que a saída 1 é perfeitamente controlada ( $\beta_1 = 2$ ). Isso é razoável, uma vez que a direção de saída do zero é maior na direção da saída 1, então tem-se que “pagar mais” para empurrar seu efeito para a saída 2.

O exemplo acima mostra que para se obter um sistema desacoplado, tem-se que aceitar que o efeito do zero de transmissão apareça em ambas saídas, i.e., enquanto  $G_0(q)$  tem um zero multivariável de fase não-mínima,  $T_d(q)$  tem dois. Pode-se também notar que é possível mover o efeito do zero para uma determinada saída, mas então tem-se de aceitar alguma interação entre as malhas. Essa característica será abordada em maior detalhe na Seção 4.2.

### 3.1.3 Estabilidade interna na presença de polos instáveis

Assim como no caso de zeros multivariáveis fora do círculo unitário, a primeira importante limitação devido à presença de polos instáveis é relacionada à estabilidade em malha fechada. A restrição de interpolação em função da equação de malha fechada, conforme apresentada em (HAVRE; SKOGESTAD, 1996), também tem uma direção, pois o próprio polo tem uma direção.

**Teorema 3.4.** *Se  $G_0(q)$  tem um polo instável em  $p_i$  com direção de saída  $y_{p_i}$ , então para estabilidade interna do sistema realimentado com o controlador ideal a seguinte restrição de interpolação deve aplicar-se:*

$$T_d(p_i)y_{p_i} = y_{p_i} \quad (59)$$

O teorema é válido se  $L(q) = G_0(q)C_d(q)$  não contém um zero de transmissão em  $z_i = p_i$ . Então se  $G_0(q)$  tem um polo instável logo  $C_d(q)$  não deve conter um zero que “cancele” o polo.

O maior problema, entretanto, relacionado a polos instáveis está no sinal de controle, porque a estabilização do modo instável requer realimentação com uso ativo dos sinais de controle e atuadores. Com realimentação, e desconsiderando distúrbios,  $u(t) = C(q)S(q)(r(t) + v(t))$ . Note que mudanças em  $v(t)$  estão fora de controle e portanto inevitáveis, e para uma planta instável um valor mínimo em  $|C(q)S(q)|$  é também inevitável. Portanto, para uma planta instável uma utilização mínima da entrada  $u(t)$  é requerida e ainda causa um sobrepasso no sinal de saída com a malha fechada (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Para que a malha seja estável, o produto  $C(q)S(q)$  deve satisfazer

$$\begin{aligned} \|C(q)S(q)\|_\infty &\geq \|u_{p_i}^H G_s^{-1}(p_i)\|_2, \\ \|G_0(q)^{-1}T(q)\|_\infty &\geq \|u_{p_i}^H G_s^{-1}(p_i)\|_2, \end{aligned} \quad (60)$$

a qual assume a igualdade para o caso de um único polo instável real, e  $G_s(q)$  é uma versão “estável” de  $G_0(q)$ . É comum encontrar na literatura como versão estável do sistema em tempo contínuo o modelo com os polos instáveis  $p_i$  refletidos em relação ao eixo imaginário. A abordagem de refletir o polo em tempo discreto consiste em trazer um polo cujo módulo é maior que 1 para dentro do círculo unitário. Isso é equivalente a

$$G_s(q) = B_p(q)G_0(q)$$

$$B_p(q) = I - \frac{\frac{1}{\bar{p}_i}(q - p_i)}{q - \frac{1}{\bar{p}_i}} y_{p_i} y_{p_i}^H$$

onde  $\bar{p}_i$  é o complexo conjugado de  $p_i$  e  $B_p(q)$  é um filtro passa-tudo estável.

Estabilização torna-se mais difícil se a planta tiver atrasos ou zeros de transmissão de fase não-mínima localizados perto do polo instável. Além disso, quando o ganho de realimentação aumenta, tanto o sobrepasso quanto o tempo de subida decrescem. Isso pode dar a falsa impressão de que se pode melhorar o desempenho com o aumento do ganho, porém o pico em  $C(q)S(q)$  aumenta, o que pode gerar problemas de saturação (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

## 3.2 Limitações de desempenho

Foram vistas na seção anterior as condições necessárias para se ter estabilidade e causalidade em malha fechada com o controlador ideal na presença de zeros e polos fora do círculo e em função do grau relativo dos elementos da planta. Serão vistas agora as limitações de desempenho na presença destes mesmos elementos.

### 3.2.1 Limitações devido aos atrasos

Atraso no tempo em sistemas discretos nada mais é do que o grau relativo da função de transferência. Porém, assim como no caso contínuo, um atraso impõe sérias limitações no desempenho de controle atingível. Isso é fácil de entender uma vez que, independente do controlador utilizado, o efeito de uma mudança na entrada só será sentido na saída depois de um tempo  $\gamma$ .

Em sistemas MIMO, atrasos frequentemente aparecem em algum elemento da matriz de funções de transferência, devido às interações entre as diferentes malhas. Nesse caso, do ponto de vista das entradas, os atrasos contidos nos elementos das linhas de  $G_0(q)$  fornecem a ideia do tempo mínimo que qualquer entrada leva para influenciar alguma saída. Então um limite mínimo de atraso na saída  $i$  é dado pelo menor atraso na linha  $i$  de  $G_0(q)$ , i.e.,

$$\gamma_i^{min} = \min_j \gamma_{ij} \quad (61)$$

e  $\gamma_i^{min}$  pode ser visto como o atraso fixado na saída  $i$ .

Em geral, atrasos no tempo impõem limitações na banda passante de malha fechada, o que implica respostas em malha fechada mais lentas. Se a especificação de tempo de acomodação de malha fechada for muito mais rápida do que se pode obter com o controlador utilizado, o sistema torna-se instável em malha fechada, devido a limitação em fase imposta pelo atraso.

A frequência de corte  $\omega_c$  da função de laço (considere o caso SISO) é definida tal que  $|L(e^{j\omega_c T_s})| = 1$ , o que implica  $|T(e^{j\omega_c T_s})| = |S(e^{j\omega_c T_s})|$ . Em sistemas MIMO, os elementos fora da diagonal principal de  $T(q)$  e  $S(q)$  são iguais em todas as frequências, i.e,  $t_{ij}(q) = s_{ij}(q)$  e apenas os elementos da diagonal principal irão apresentar um único ponto em comum  $\omega_{c_i}$ . Nessa caso, essa será a frequência de corte da malha  $i$ .

Para o caso com as saídas perfeitamente controladas,  $T(q) = \frac{1}{q^\gamma}$ , obtém-se um limite superior da frequência de corte:

$$\omega_c < \frac{\pi}{3} \frac{1}{\gamma T_s} \quad (62)$$

Esse é um limitante superior para a frequência de corte de malha fechada e, na grande maioria dos casos, não deve ser atingido.

### 3.2.2 Limitações devido aos zeros de transmissão de fase não-mínima

Como o objetivo da malha de controle é o seguimento de referências, principalmente constantes, o desempenho deve ser priorizado em baixas frequências. Assim como foi feito em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), será derivada uma limitação em frequência em função do zero de fase não-mínima utilizando uma função peso  $w_P(q)$  na função de sensibilidade  $S(q)$ . A ideia é derivar um limitante na banda passante (faixa de frequência em que a magnitude assintótica da função de sensibilidade é menor que 1). Primeiramente, considere o caso SISO.

Seja  $1/|w_P(e^{j\omega T_s})|$  um limitante superior na função de sensibilidade, ou seja,

$$|S(e^{j\omega T_s})| < 1/|w_P(e^{j\omega T_s})| \quad \forall \omega \iff \|w_P(e^{j\omega T_s})S(e^{j\omega T_s})\|_\infty < 1. \quad (63)$$

No entanto, pela restrição de interpolação (56),  $S(z_i) = 1$ , e utilizando o teorema do módulo máximo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005) tem-se que

$$\|w_P(e^{j\omega T_s})S(e^{j\omega T_s})\|_\infty \geq |w_P(z_i)S(z_i)| = |w_P(z_i)|.$$

Então, para satisfazer (63), deve-se *pelo menos* requerer que a função peso satisfaça

$$|w_P(z_i)| < 1. \quad (64)$$

Considere a seguinte função peso

$$w_P(q) = \frac{\frac{q-1}{M} + \omega_b^* T_s}{q - (1 - \omega_b^* T_s A)} \quad (65)$$

Esse peso enfatiza o desempenho em baixas frequências. Ele especifica uma largura de banda mínima  $\omega_b^*$ , um pico máximo de  $|S(q)|$  menor que  $M$ , um desvio em regime permanente menor que  $A < 1$ , e em frequências mais baixas do que a banda passante requer-se que a sensibilidade melhore pelo menos 20 dB/década. Então, tem-se que

$$|w_P(q)| = \left| \frac{\frac{q-1}{M} + \omega_b^* T_s}{q - (1 - \omega_b^* T_s A)} \right| < 1$$

Para um desvio nulo em regime permanente ( $A = 0$ ),  $M = 2$  ( $\|S(e^{j\omega T_s})\|_\infty < 2$ ) e um zero real, tem-se:

$$\omega_b^* < \frac{z_i - 1}{2T_s}. \quad (66)$$

Assim como em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005) pode-se definir esse limitante em função da frequência de corte  $\omega_c$ , i.e.,

$$\omega_c < \frac{z_i - 1}{2T_s}. \quad (67)$$

Para sistemas MIMO,  $\|S(e^{j\omega T_s})\|_\infty$  está relacionada ao maior valor singular, o qual indica a “pior” direção (e está de alguma forma relacionada com  $y_{z_i}$ ). Então, limitações de banda passante podem não ser fundamentais em todas as malhas, mas principalmente no sentido em que  $y_{z_i}$  tem maior direcionalidade. Além disso, nota-se que conforme  $z_i$  se aproxima de 1 pela direita, mais difícil torna-se controlar o processo, pois a banda passante torna-se cada vez mais estreita.

### 3.2.3 Limitações devido aos polos instáveis

Para estabilizar uma planta, é necessário reagir suficientemente rápido, então a banda passante da malha fechada possui um limitante inferior, para o qual o processo é estabilizado. O mesmo procedimento apresentado para o caso do zero de fase não-mínima pode ser feito, mas nesse caso considerando um limitante na função de sensibilidade complementar e ganhos em alta frequência, pois o limitante é inferior.

Seja  $1/|w_T(e^{j\omega T_s})|$  um limitante superior na função de sensibilidade complementar, ou seja,

$$|T(e^{j\omega T_s})| < 1/|w_T(e^{j\omega T_s})| \quad \forall \omega \iff \|w_T(e^{j\omega T_s})T(e^{j\omega T_s})\|_\infty < 1. \quad (68)$$

No entanto, pela restrição de interpolação (59),  $T(p_i) = 1$ , e utilizando o teorema do módulo máximo (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005), tem-se que

$$\|w_T(e^{j\omega T_s})T(e^{j\omega T_s})\|_\infty \geq |w_T(p_i)T(p_i)| = |w_T(p_i)|.$$

Então, para satisfazer (63), deve-se *pelo menos* requerer que a função peso satisfaça

$$|w_T(p_i)| < 1. \quad (69)$$

Considere a seguinte função peso

$$w_T(q) = \frac{q-1}{\omega_{bt}^* T_s} + \frac{1}{M_T}. \quad (70)$$

Esse peso requer que  $T(q)$  tenha uma taxa de decaimento de pelo menos 20 dB/década em altas frequências, que  $|T(q)|$  seja menor que  $M_T$  em baixas frequências e que  $|T(q)|$  seja menor que 1 na frequência  $\omega_{bt}^*$ . Então, tem-se que

$$|w_T(q)| = \left| \frac{q-1}{\omega_{bt}^* T_s} + \frac{1}{M_T} \right| < 1.$$

Com  $M_T = 2$  (robustez razoável) e um polo real, tem-se:

$$\omega_{bt}^* > \frac{2(p_i - 1)}{T_s}. \quad (71)$$

Assim como em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005) pode-se definir esse limitante em função da frequência de corte  $\omega_c$ , i.e.,

$$\omega_c > \frac{2(p_i - 1)}{T_s}. \quad (72)$$

Note que, conforme  $p_i$  se afasta de 1 pela direita, maior é a banda passante necessária, ou seja, é necessário agir cada vez mais rápido para estabilizar o processo.

### 3.2.4 Considerações preliminares

Nas subseções acima foram vistas as limitações em frequência impostas pelo sistema. Nota-se que no caso de haver polos instáveis e zeros de transmissão de FNM ou atrasos maiores, há um conflito em relação à frequência de corte de malha fechada. A fim

de obter um desempenho aceitável em baixa frequência mantendo também a robustez e combinando (62), (67) e (72), obtém-se as condições

$$p_i < 0,25z_i + 0,75 \text{ e } p_i < \frac{\pi}{6\gamma} + 1$$

a fim de poder estabilizar a planta e ao mesmo tempo atingir desempenho aceitável em baixa frequência e robustez. Para o caso MIMO, entretanto, essas condições são limitantes superiores, pois dependem também da direção (ver (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005)), e representam o pior caso, ou seja, quando as direções de saída estão alinhadas.

As margens de frequência impostas por (62), (67) e (72) são mostradas na Figura 7 para o seguinte sistema:

$$G_0(q) = \frac{0,1(q - 1,3)}{(q - 1,05)(q - 0,8)q^3}, \quad T_s = 0,2 \text{ s}, \quad (73)$$

e são dadas, respectivamente, por  $M_3$ ,  $M_2$  e  $M_1$ .

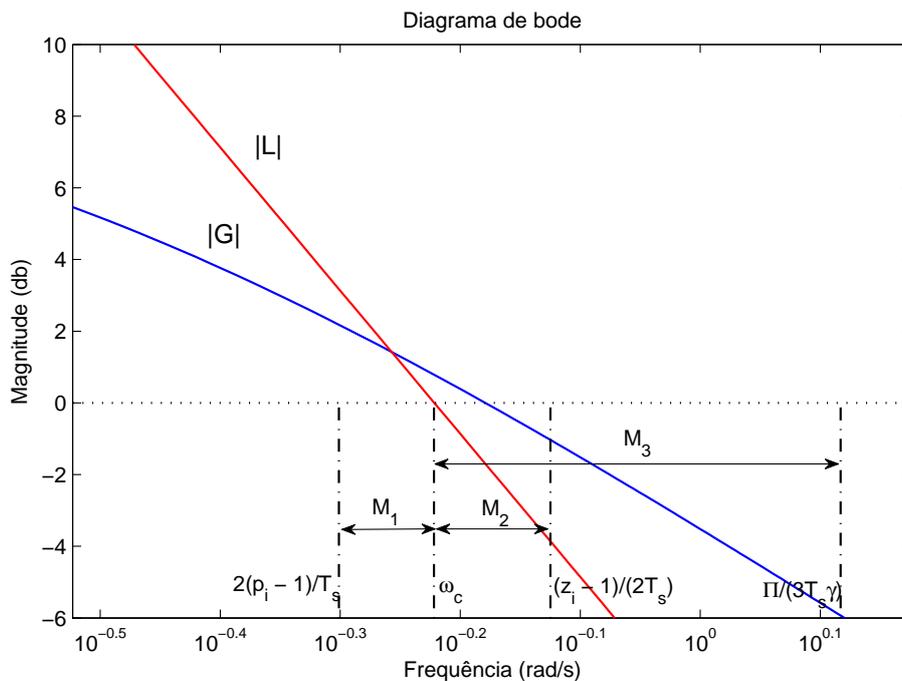


Figura 7: Exemplo de critérios de controlabilidade para o sistema (73).

### 3.3 Atribuição de desempenho

Nesta Seção será visto como se pode traduzir os requisitos de desempenho em polos e zeros de funções de transferência. Neste trabalho a escolha do modelo de referência será feita utilizando três critérios de desempenho amplamente encontrados na literatura: erro nulo em regime permanente para seguimento de referência constante, máximo sobrepasso (*overshoot*) e tempo de acomodação. Será considerado que todas as malhas devem ser estáveis em malha fechada.

A fim de alcançar o critério de seguimento de referência constante, o controlador utilizado na malha fechada necessita conter ação integral, o que é o caso de controladores

PI/PID, se o processo não a contiver. Além disso, o ganho em regime permanente do modelo de referência deve satisfazer

$$T_d(q)|_{q=1} = I. \quad (74)$$

O segundo critério abordado é o tempo de acomodação. Considere o tempo de acomodação como o instante em que a resposta atinge 98% do valor de regime permanente; para um processo estável de primeira ordem em tempo contínuo ele é calculado como

$$t_s = \frac{\ln(0,02)}{p_s} \approx \frac{-4}{p_s} \quad (75)$$

onde  $p_s$  é o polo do processo (modelo contínuo); e para um processo de segunda ordem sub-amortecido

$$t_s = -\frac{\ln(0,02)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n} \approx \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (76)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\xi$  é o fator de amortecimento do processo (OGATA, 2009). Também, a relação entre polos discretos e contínuos é dada por

$$p_q = e^{p_s T_s}, \quad (77)$$

onde  $p_q$  é o polo discreto. Então, a fim de obter uma resposta com um tempo de acomodação desejado, o modelo de referência deve possuir em sua diagonal principal (malha de interesse) polos discretos dominantes tais que

$$p_q = e^{\frac{-4}{t_s} T_s} \quad (78)$$

ou um par de polos complexos onde a relação

$$\xi\omega_n = e^{\frac{4}{t_s} T_s}$$

é respeitada.

O equivalente ao tempo de acomodação em tempo discreto é o número de amostras  $n_s$  no tempo de acomodação. O valor de  $n_s$  nada mais é do que

$$n_s = \frac{t_s}{T_s}. \quad (79)$$

Substituindo (79) em (78), obtém-se

$$n_s = \frac{-4}{\ln(p_q)} \quad (80)$$

$$n_s = \frac{-4}{\ln(|p_q|)} \quad (81)$$

onde (81) considera também o caso de um par de polos complexos.

Por fim, tem-se o critério de sobrepasso. Se o sobrepasso aceitável no projeto é maior que zero, então o elemento correspondente no modelo de referência deve ter um par de polos complexos dominante, ou um zero em um lugar específico no caso de haver um polo instável (sobrepasso devido ao zero; será ilustrado na Seção 5.2).

Considere um sistema de segunda ordem em tempo contínuo cujo polinômio característico pode ser representado por  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  e cujas raízes são

$$p_{s1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}. \quad (82)$$

Da teoria de sistemas (OGATA, 2009), sabe-se que o máximo sobrepasso (aqui será trabalhado com valores de 0 a 1 em vez de porcentagem, sem perda de generalidade) é dado por

$$M_0 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (83)$$

cujo fator de amortecimento é equivalentemente dado por

$$\xi = \sqrt{\frac{\frac{\ln^2(M_0)}{\pi^2}}{1 + \frac{\ln^2(M_0)}{\pi^2}}}. \quad (84)$$

Ou seja, para um valor de máximo sobrepasso projetado, pode-se determinar o fator de amortecimento por (84) e, tendo-se o tempo de acomodação desejado, a frequência natural é obtida por (76). Baseado nesses valores, os polos contínuos são dados por (82) e utilizando a relação (77), os polos discretos para um modelo de referência de segunda ordem são dados por

$$\begin{aligned} p_{q1,2} &= e^{-\xi\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}} \\ &= e^{-\xi\omega_n T_s} [\cos(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}) \pm j \sin(\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2})]. \end{aligned} \quad (85)$$

Uma forma automática de traduzir os requisitos de desempenho de malha fechada na função de transferência desejada em função das características de malha aberta é apresentada em (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014).

### 3.4 Considerações finais

Esse capítulo mostra que é impossível projetar corretamente um controlador e o sistema em malha fechada sem conhecer absolutamente nada do sistema a ser controlado. Aliás, essa é uma premissa básica, porém muitas vezes ignorada. As principais restrições apresentadas, como (56) e (59), visam garantir estabilidade em malha fechada na presença de elementos de fase não-mínima no sistema em malha aberta. Dessa forma, se o sistema apresenta algum zero de transmissão ou polo fora do círculo unitário, é indispensável que se conheça sua *posição* e, conforme apresentado para o caso MIMO, sua *direção*.

Além disso, foi apresentada uma formulação para determinar o menor grau relativo necessário nos elementos do modelo de referência, sem a necessidade de se ter um modelo do processo. Não se tem na literatura uma outra formulação para o caso MIMO e a formulação apresentada, que tem suporte na área de álgebra tropical, necessita apenas saber o grau relativo dos elementos do processo, ou pelo menos um limitante superior para eles. Essa informação é facilmente obtida em um ensaio de resposta ao salto.

Por fim, foram apresentadas restrições na frequência de corte de malha fechada em função dos elementos de fase não-mínima e do grau relativo (atrasos em tempo discreto). Para isso, foi utilizada uma formulação paralela à encontrada na literatura para o caso

contínuo. As restrições em frequência foram apresentadas para as funções de sensibilidade e de malha fechada considerando o controlador real operando na malha, e a ideia seguinte é então respeitar essas limitações também no modelo de referência. Portanto, essas restrições caracterizam o mínimo de conhecimento necessário que o projetista precisa ter sobre o processo antes de proceder com um projeto adequado para o modelo de referência.

A ideia então é respeitar as restrições apresentadas neste capítulo também no modelo de referência e fazer escolhas em  $T_d(q)$  de tal modo que  $C_d(q)$  seja atingível utilizando a classe de controladores disponíveis, ou pelo menos próximo em frequência. O capítulo a seguir trata dessas escolhas e tem enfoque na situação em que se tem controladores PID disponíveis.

## 4 ESCOLHA DO MODELO DE REFERÊNCIA

Como visto nos capítulos anteriores, escolher um modelo de referência adequado não é uma tarefa fácil e requer algum conhecimento do processo e alguma experiência do projetista. Se o projetista escolher um modelo de referência que não leve em conta características do processo, como a presença de zeros e polos fora do círculo, a fim de garantir estabilidade em malha fechada, métodos de controle por Modelo de Referência não são seguros. Se o modelo de referência especificar um desempenho muito diferente do melhor que pode ser atingido, então a malha fechada com o controlador obtido pode não ter qualquer semelhança com a resposta desejada. De fato, pode mesmo ser instável.

A ideia-chave na escolha do modelo de referência  $T_d(q)$  é tentar encaixar o controlador ideal na classe do controlador identificado, utilizando o mínimo de conhecimento possível sobre a planta para esta finalidade. Um ajuste perfeito é normalmente impossível, porém serão sugeridas orientações para fazer a classe do controlador ideal próximo da classe de controlador disponível  $\mathcal{C}$ . Será dado enfoque para o projeto de um modelo de referência MIMO na situação padrão em que cada elemento da matriz de controladores é um PI(D) e cada saída deve seguir uma referência constante com erro nulo em regime permanente.

### 4.1 Modelo de referência diagonal

Nesta Seção será visto o caso da escolha diagonal, ou desacoplada, para a matriz do modelo de referência. Deve-se entender que o caso SISO encaixa-se inteiramente nesta parte do trabalho. Primeiramente, será vista uma breve introdução teórica sobre desacoplamento, a fim de entender melhor as condições em que um projeto desacoplado é recomendado e/ou pode ser parcialmente atingido. Em seguida, será visto como escolher as características de cada elemento da matriz de transferência.

#### 4.1.1 Desacoplamento

Desacoplar é diagonalizar a função de transferência do sistema e consiste em um compensador  $W(q)$  tal que  $G_0(q)W(q) = G_d(q)$  (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). O principal tipo de desacoplador é o desacoplador dinâmico.

Um desacoplador dinâmico é aquele em que  $G_d(q)$  é diagonal em todas as frequências. De maneira geral, o desacoplador envolve o inverso do modelo do sistema, obtendo-se assim a matriz identidade, no caso ideal. No entanto, outras escolhas podem ser feitas a fim de escolher os elementos da diagonal. Seja

$$W(q) = l(q)G_0^{-1}(q) = l(q)\frac{\text{adj}(G_0(q))}{\det(G_0(q))}. \quad (86)$$

Nota-se que uma condição necessária para que o sistema possa ser desacoplado é que

ele seja não-singular. Fisicamente falando, isso significa que cada entrada deve influenciar pelo menos uma saída (nenhuma coluna igual a zero) e que as interações das malhas não tendem a se cancelar. Além disso, a inversa do modelo do sistema resulta na maioria das vezes em um desacoplador não-causal.

A fim de tornar  $W(q)$  realizável, e desconsiderando requisitos de desempenho, uma escolha possível é  $l(q) = G_{diag}(q)$ , onde  $G_{diag}(q)$  é a matriz formada somente pelos elementos da diagonal de  $G_0(q)$ , a fim de manter os elementos da diagonal principal do sistema e os demais elementos nulos. Dessa forma obtém-se um desacoplamento dinâmico causal.

Outras propostas encontradas em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005) envolvem desacoplamento de regime permanente, ou seja,  $G_d(0)$  é diagonal. Nesse caso o compensador é um ganho estático  $W(q) = G^{-1}(0)$ . Proposta semelhante considera um desacoplamento aproximado em uma frequência  $\omega_0$  utilizando um compensador constante  $W(q) = G_{real}^{-1}(e^{j\omega_0 T_s})$ , onde  $G_{real}$  é uma aproximação real de  $G(e^{j\omega_0 T_s})$ . A banda passante é uma boa escolha para a frequência  $\omega_0$ , pois o efeito, sobre o desempenho, de redução da interação é normalmente maior nessa frequência.

De maneira geral, se as especificações de desempenho forem consideradas, a escolha de  $l(q)$  vai ao encontro da escolha do modelo de referência na forma diagonal. Nesse caso, o algoritmo baseado em dados para sintonia do controlador  $C(q)$  irá identificar a parte referente a  $W(q)$  também. Dessa forma o projeto pode ser visto como a sintonia de um único controlador (ou uma matriz de controladores), diferente do praticado na indústria de processos, onde primeiramente é feita a parte de desacoplamento e depois a parte de desempenho.

#### 4.1.2 Escolha dos elementos

Na situação em que se deseja escolher um modelo de referência diagonal, o controlador deve ser uma matriz cheia, como em (20), para fornecer desacoplamento dinâmico, caso contrário, o usuário já está começando a partir de um ponto em que o controlador ideal está longe de  $\mathcal{C}$ .

Nesta subseção será analisada a escolha dos elementos da diagonal conforme a presença de alguns fatores no sistema em malha aberta. Como o projeto pode ser visto como vários modelos SISO sendo especificados, pode-se utilizar o mesmo procedimento adotado para escolher o modelo de referência monovariável (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014), como será repetido a seguir.

Propõe-se escolher o modelo de referência como:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} t_{11}(q) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn}(q) \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Se o processo não apresenta polo instável, nem zero de transmissão de FNM, então utilize

$$t_{ii}(q) = \frac{1 - p_{1i}}{q^{\gamma_i - 1}(q - p_{1i})}, \quad (88)$$

escolha  $p_{1i}$  como (78) para ajustar o critério de tempo de acomodação e selecione  $\gamma_i$  como em (43) para satisfazer o critério de grau relativo.

Caso contrário, cada elemento pode ser projetado como

$$t_{ii}(q) = \frac{K_{ii}(q - z_i)}{q^{\gamma_i - 1}(q - p_{1i})(q - p_{2i})} \quad (89)$$

e a escolha de cada parâmetro é detalhada e justificada a seguir.

1. Primeiro, selecione  $\gamma_i$  como em (43), de forma que o termo  $q^{\gamma_i-1}$  em (89) satisfaça o critério de grau relativo com  $(\gamma_i - 1)$  polos de malha fechada em zero.<sup>1</sup>
2. Se a planta apresenta um zero de transmissão de FNM, então fixe  $z_i$  igual ao zero de transmissão de FNM para todos  $t_{ii}$  onde  $y_{z_i} \neq 0$ .
  - (a) Se não se deseja sobrepasso, escolha  $p_{1i}$  como em (78) e escolha  $p_{2i} = \frac{z_i(1-p_{1i})}{(z_i-p_{1i})}$ . Essa escolha para  $p_{2i}$  faz os polos de  $l_{ii}(q) = \frac{t_{ii}(q)}{1-t_{ii}(q)}$  serem iguais a  $q(q-1)$  quando  $\gamma_i - 1 = 0$ , o que corresponde aos polos de um controlador PID.
  - (b) Se um certo sobrepasso é permitido, então escolha  $p_{1,2}$  como valores complexos, onde  $\text{Re}\{p\} = \frac{|p|^2+z_i}{2z_i}$ . Essa escolha também resulta em polos de um controlador PID em  $l_{ii}(q)$  quando  $\gamma_i - 1 = 0$ . Note, entretanto, que o sobrepasso será função do zero e do requisito de tempo de acomodação, não podendo ser escolhido livremente.
3. Se o sistema não apresenta zero de transmissão de FNM, nem polo instável, mas um certo sobrepasso é permitido, escolha os polos como  $p_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T_s \pm j\omega_n T_s \sqrt{1-\xi^2}}$  e o zero como  $z_i = \frac{\text{Re}\{p\}}{2}$ .
4. Se a planta apresenta um polo instável, então escolha os polos de malha fechada conforme especificações de desempenho e escolha o zero para satisfazer  $T_d(p_i)y_{p_i} = y_{p_i}$ .
5. Em cada caso, ajuste  $K_{ii}$  de forma que  $t_{ii}(1) = 1$ .
6. Verifique se as condições sobre  $\omega_c$  (Seção 3.2) foram satisfeitas. Caso contrário, refaça as escolhas: polos mais lentos para o caso do zero de transmissão de FNM e polos mais rápidos para o caso do polo instável.

Com o modelo de referência escolhido, o usuário está seguro para aplicar um método de controle por MR para sintonizar o controlador PI ou PID.

## 4.2 Modelo de referência bloco-triangular: caso especial

Uma estrutura bloco-triangular para o modelo de referência permite um projeto onde se pode mover o efeito do zero de transmissão de FNM para uma saída específica. Seja  $k$  a saída para a qual se deseja mover o efeito do zero de fase não-mínima. Então o modelo de referência pode ser definido como:

$$T_d(q) = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \dots & t_{kk} & \dots & t_{km} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t_{mm} \end{bmatrix} \quad (90)$$

<sup>1</sup>Quaisquer outros polos mais rápidos do que  $p_{1i}$  e do que  $p_{2i}$  podem ser especificados como alternativa.

Essa estrutura de modelo é proposta em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). No entanto, os autores utilizam os elementos da diagonal iguais a 1. Então, será discutido aqui um caso mais realista.

Os elementos  $t_{jj}(q), j \neq k$ , podem ser escolhidos de acordo com o desempenho desejado utilizando modelos de primeira ou segunda ordem conforme apresentado na Seção anterior. O elemento  $t_{kk}(q)$  deve obrigatoriamente conter o zero multivariável de FNM e os polos são escolhidos conforme especificações de desempenho. Para a escolha dos demais elementos da linha  $k$ , a análise do filtro (19),  $L_d(q) = T_d(q)[I - T_d(q)]^{-1}$ , pode auxiliar. Para esse caso, tem-se

$$L_d(q) = \begin{bmatrix} \frac{t_{11}}{1-t_{11}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t_{22}}{1-t_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \dots & 0 \\ \frac{t_{k1}}{(1-t_{11})(1-t_{kk})} & \frac{t_{k2}}{(1-t_{22})(1-t_{kk})} & \dots & \frac{t_{kk}}{1-t_{kk}} & \dots & \frac{t_{km}}{(1-t_{mm})(1-t_{kk})} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{t_{mm}}{1-t_{mm}} \end{bmatrix} \quad (91)$$

Deseja-se que o controlador ideal (18),  $C_d(q) = G_0(q)L_d^{-1}(q)$ , seja próximo da classe de controladores que será identificada, então  $l_{jj}(q)$  e  $l_{kj}(q)$  devem, pelo menos, ter os mesmos polos desses controladores, e.g., um PID. Para facilitar a argumentação, assuma que  $t_{kk}(q) = \frac{K_{kk}(q-z_i)}{(q-p_{1kk})(q-p_{2kk})}$  e  $t_{jj}(q) = \frac{K_{jj}}{(q-p_{1jj})}$ . Então

$$l_{jj}(q) = \frac{1 - p_{1jj}}{q - 1}$$

$$l_{kj}(q) = \frac{t_{kj}}{\frac{(q-1)}{(q-p_{1jj})} \frac{(q-1) \left( q - \frac{z_{kk}(1-p_{1kk}-p_{2kk})+p_{1kk}p_{2kk}}{1-z_{kk}} \right)}{(q-p_{1kk})(q-p_{2kk})}}$$

Para que ambos os filtros tenham polos de controladores PID, então  $t_{kj}$  deve ter tanto os polos de  $t_{jj}$  e, também, a expressão  $\frac{z_{kk}(1-p_{1kk}-p_{2kk})+p_{1kk}p_{2kk}}{1-z_{kk}}$  deve ser escolhida para coincidir com os polos da classe de controladores. Para um controlador PID, a expressão deve ser igual a zero, então  $p_{1kk}$  e  $p_{2kk}$  podem ser escolhidos conforme proposto no caso do modelo diagonal.

Agora considere, por exemplo, a expressão para o controlador ideal  $c_1$

$$c_1(q) = \bar{g}_{11}(q)l_{11}(q) + \bar{g}_{1k}(q)l_{1k}(q), \quad (92)$$

onde  $\bar{g}_{ij}(q)$  é o elemento  $(i,j)$  de  $G_0^{-1}(q)$ . Note que nesse caso o controlador ideal tem, a princípio, um polo em  $z_i$  (instável). Uma escolha interessante seria aquela em que o numerador de (92) tivesse o termo  $(q - z_i)$ . Isso implica que o controlador não cancela o zero de transmissão do processo, ou seja, que a restrição (56) é respeitada. Considere a seguinte escolha para  $t_{kj}(q)$ :

$$\begin{aligned} t_{kj}(q) &= K_j \frac{(q-1)(q-z_{kj})}{(q-p_{1jj})(q-p_{1kk})(q-p_{2kk})} \\ &= K_j (q-z_{kj}) \bar{t}_{kj}(q) \end{aligned} \quad (93)$$

Aplicando (56),  $y_{z_i}^H T_d(z_i) = 0$ , tem-se:

$$y_j t_{jj}(z_i) + y_k t_{kj}(z_i) = y_j t_{jj}(z_i) + y_k K_j (z_i - z_{kj}) \bar{t}_{kj}(z_i) = 0$$

$$z_{kj} = z_i + \frac{y_j t_{jj}(z_i)}{y_k K_j \bar{t}_{kj}(z_i)} \quad (94)$$

Os termos  $K_j$  e  $z_{kj}$  são, então, graus de liberdade (dependentes, pois  $z_{kj}$  depende do valor escolhido para  $K_j$ ), que podem ser utilizados para satisfazer (56) e obter o termo  $(q - z_i)$  no numerador do controlador ideal. Escolha um valor para  $K_j$  (menor que 1, se  $k$  for a direção com maior direcionalidade – tipicamente  $0,1 \leq K_j \leq 0,5$ ; ou maior que 1 caso contrário) e determine  $z_{kj}$  utilizando (94).

Existe um compromisso entre a escolha de  $K_j$  e de  $z_{kj}$  e do valor máximo esperado na saída de  $t_{kj}(q)$ , mas essa não é uma relação direta. Além disso, como ilustrado no Exemplo 3.2, é mais “fácil” mover o efeito para a saída para a qual o zero apresenta maior direcionalidade (em módulo). Se  $k$  for essa saída, então pode-se esperar que escolhendo  $K_j < 1$  (menor interação) também resultará em um zero  $z_{kj}$  dentro do círculo unitário. Além disso, como  $\bar{t}_{kj}(q)$  possui tanto os polos de  $t_{jj}(q)$  quanto os de  $t_{kk}(q)$ , se todas as malhas  $j$  forem mais “rápidas”, ou tiverem a mesma velocidade que a malha  $k$ , também pode-se esperar uma interação menor.

Se forem considerados modelos de ordem maior (em função dos atrasos), abordagem semelhante pode ser feita, porém, novamente, o usuário deve estar ciente de que o controlador ideal muito provavelmente não estará na classe do controlador a ser identificado.

### 4.3 Modelo de referência cheio

Considere então a situação onde apenas controle descentralizado pode ser usado, ou seja, tem-se que ajustar um controlador como

$$C(q,P) = \begin{bmatrix} C_{11}(q,\rho_{11}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{nn}(q,\rho_{nn}) \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Neste caso, um modelo de referência diagonal é claramente longe de ser atingível, e o projetista deve se contentar com uma especificação mais realista – uma matriz cheia do modelo de referência. Em um projeto de modelo de referência cheio, o usuário deve definir não só os elementos da diagonal  $t_{ii}(q)$ ,  $i = 1 \dots m$ , que definem o desempenho de malha fechada para alterações de referência, mas também os elementos fora da diagonal  $t_{ij}(q)$ ,  $i \neq j$ ,  $i = 1 \dots m$ ,  $j = 1 \dots m$ , que especificam a interferência permitida entre as malhas.

Quando essa estrutura de controle for aplicada a um sistema, é interessante analisar a RGA (27) do sistema e determinar se  $\mu(E)$  satisfaz (32). Note que isso não garante bom desempenho, mas, pelo menos, garante que é possível projetar um controlador que faça o sistema em malha fechada ser estável. Mas isso também depende da escolha do modelo de referência, pois nesse caso não se pode ser muito exigente com relação ao desempenho. Além disso, se o processo tem um zero de transmissão de FNM, então um projeto com controle descentralizado não é recomendado: propriedade **C6** da RGA.

Antes de prosseguir com a definição dos elementos do modelo de referência, será feito o processo contrário: será considerado um sistema  $2 \times 2$  de primeira ordem com um

controlador PI descentralizado para tentar ilustrar o que se pode esperar da malha fechada. Seja

$$L(q) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{q-p_1} & \frac{1}{q-p_2} \\ \frac{1}{q-p_3} & \frac{1}{q-p_4} \end{bmatrix}}_{G_0(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \frac{q-k_1}{q-1} & 0 \\ 0 & K_2 \frac{q-k_2}{q-1} \end{bmatrix}}_{C(q,P)}.$$

Então a malha fechada tem a forma

$$T(q) = \frac{1}{\prod_{i=1}^6 (q - p_{f_i})} \begin{bmatrix} m_1(q)(q - k_1) & K_2 \frac{\prod_{i=1}^4 (q - p_i)}{q - p_2} (q - k_2)(q - 1) \\ K_1 \frac{\prod_{i=1}^4 (q - p_i)}{q - p_3} (q - k_1)(q - 1) & m_2(q)(q - k_2) \end{bmatrix} \quad (96)$$

onde  $p_{f_i}$  são os polos de malha fechada e  $m_i(q)$  são polinômios de ordem 4.

Primeiro, observe que os polos de cada elemento de (96) são os mesmos, se não houver cancelamentos. Além disso, o zero do controlador  $c_{jj}(q)$  aparece em cada elemento da coluna  $j$  de (96). Os zeros dos elementos fora da diagonal são polos de ambas as matrizes  $G_0(q)$  e  $C(q)$ . Nota-se pelo exemplo acima que fazer o controlador ideal coincidir com a estrutura descentralizada requer o conhecimento de todos os polos e zeros do sistema, pois os elementos de acoplamento do modelo de referência ( $t_{ij}(q)$ ) deverão conter essa informação. Então deve-se esperar na grande maioria dos casos que o controlador ideal não pertença a classe de controladores identificados.

Como atingir o caso ideal (*Hipótese 1*) requer muito conhecimento da planta, a escolha abordada aqui será feita considerando que a resposta em frequência escolhida para os elementos do modelo de referência é próxima daquela que faria o controlador ideal ser próximo do identificado.

Sugere-se o seguinte projeto para a matriz do modelo de referência com base em informações facilmente obtidas do sistema:

1. Para cada elemento nulo em  $G_0(q)$  selecione nulo o elemento corresponde em  $T_d(q)$ .
2. Polos comuns de malha fechada ( $p_{f_i}$  no exemplo): comece com dois polos que representam o comportamento desejado *a priori*; para cada interação bidirecional em  $G_0(q)$ , ou seja,  $g_{ij}(q)$  e  $g_{ji}(q)$  diferentes de zero, adicione um novo polo.
3. Elementos da diagonal: escolha *pelo menos* tantos zeros quantos existirem no controlador; um deles pode ser estimado pelo tempo de acomodação de malha aberta (está relacionado com o cancelamento de polo para um processo de primeira ordem). Observe que os zeros podem alterar os critérios de malha fechada, de modo que o usuário pode precisar redefinir os polos de malha fechada.
4. Verifique se (51) é satisfeita, caso contrário, adicione tantos polos quanto necessário em  $q = 0$ .
5. Elementos fora da diagonal: use o modelo

$$t_{ij}(q) = K_{ij} \frac{n_{ij}(q)}{d_{ij}(q)} (q - z_{jj})(q - 1), \quad (97)$$

onde

- (a) existe um zero em 1 para garantir erro nulo em regime permanente. É um polo do controlador, o qual se assume ter ação integral.
  - (b)  $z_{jj}$  é igual ao “zero do controlador” escolhido para o elemento  $t_{jj}$ .
  - (c)  $n_{ij}(q)$  pode ter as mesmas raízes da parte fixa do controlador (menos a parte integral, já considerada) e os polos relacionadas com o tempo de acomodação estimado das outras malhas.
  - (d)  $d_{ij}(q)$  é um polinômio formado pelos polos comuns de malha fechada e termos extras que podem ser usados para satisfazer (51).
  - (e)  $K_{ij}$  é um ganho a ser escolhido de modo a limitar a interação.
6. Se o processo tem um zero de transmissão de FNM, então os elementos do modelo de referência devem ser rearranjados para satisfazer a condição (56) no Teorema 3.3, o que pode ser feito de duas maneiras: ou todos os elementos de  $T_d(q)$  tem o zero de transmissão de FNM, ou nenhum tem o zero, mas os ganhos dos elementos fora da diagonal principal devem ser ajustados para satisfazer (56). Isso pode ser um problema para sistemas maiores que  $2 \times 2$ , porque haverá mais variáveis do que equações, então, alguns ganhos devem ser definidos primeiro.

#### 4.4 Considerações finais

A escolha do modelo de referência envolvendo uma estrutura diagonal é, definitivamente, a mais fácil a ser feita em um projeto de controle por modelo de referência multi-variável, pois menos elementos precisam ser especificados. Se existe a possibilidade de se usar um controlador cheio, então essa é a escolha a ser feita. Além disso, no que se refere a sistemas que apresentam polos e zeros de transmissão fora do círculo unitário, apenas o conhecimento da posição desses elementos é necessária, e não sua direção de saída, uma vez que as restrições de interpolação devem ser respeitadas em todos os elementos.

Quando o sistema tem um zero de transmissão de FNM e uma das saídas do sistema não puder arcar com a deterioração da resposta de malha fechada causada por esse zero, então um projeto bloco-triangular deve ser utilizado. Nesse caso, porém, o usuário necessita conhecer não somente a posição do zero, como também sua direção de saída. Está fora do escopo deste trabalho, porém é assunto para trabalhos futuros, como o usuário pode obter essas informações.

Por fim, quando apenas uma estrutura de controle descentralizada está disponível para ser sintonizada, então o modelo de referência deve possuir uma estrutura cheia. A escolha do modelo de referência torna-se mais complexa, pois existem mais elementos a serem especificados. A especificação proposta baseia-se em informações que podem ser facilmente obtidas em um ensaio degrau em malha aberta. No entanto, essa estrutura de controle não é recomendada para sistemas que apresentam polo ou zero de transmissão fora do círculo unitário, embora ainda seja possível fazer o projeto. Neste caso, novamente, deve-se conhecer a localização e a direção de saída desses elementos no sistema em malha aberta para que possam ser incorporados no modelo de referência.

## 5 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E EXPERIMENTAIS

Nesta parte do trabalho serão tratados alguns exemplos ilustrativos da metodologia proposta. Foi escolhido o método VRFT para sintonizar o controlador, devido a sua facilidade de implementação e ampla aplicação na literatura. Em seguida, serão tratados vários exemplos de sistemas em grau crescente de complexidade e, por fim, será retomado o caso experimental da planta piloto apresentada no início deste trabalho.

### 5.1 Sistema simples

Considere o seguinte sistema

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,5(q-0,75)}{(q-0,9)(q-0,82)} & 0 & 0 \\ \frac{0,3(q-0,65)}{(q-0,9)(q-0,7)} & \frac{0,4}{(q-0,8)} & \frac{0,1}{(q-0,7)} \\ 0 & \frac{0,5(q-0,6)}{(q-0,75)(q-0,7)} & \frac{0,6(q-0,4)}{(q-0,75)(q-0,7)} \end{bmatrix} \quad (98)$$

Esse sistema não tem zeros de transmissão de fase não-mínima, nem polos fora do círculo e todos elementos possuem apenas grau relativo 1. Além disso, sua RGA é

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 54/49 & -5/49 \\ 0 & -5/49 & 54/49 \end{bmatrix}$$

Note que a RGA desse sistema é próxima da identidade e o valor singular estruturado é  $\mu = 0,30429$ , portanto um controle descentralizado pode ser projetado a princípio. Contudo, as condições também são favoráveis para se fazer um projeto de controle cheio utilizando um modelo de referência diagonal.

Primeiramente, será feito um projeto para a malha de controle onde será escolhido um modelo de referência diagonal para ser utilizado com um controlador cheio.

Considere como critério de desempenho para o caso do modelo de referência diagonal: sem sobrepasso nas malhas, malhas pelo menos duas vezes mais rápidas que malha aberta (isso equivale a utilizar (78) com  $t_s = t_{s_{MA}}/2$ , onde  $t_{s_{MA}}$  é o tempo de acomodação de malha aberta) e seguimento de referências constantes. Como o sistema não apresenta zeros de transmissão de FNM e sobrepasso não é desejado, utiliza-se (88) da proposta de

escolha apresentada na Subseção 4.1.2. O seguinte modelo de referência é então definido:

$$T_{d_1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,19}{(q-0,81)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,36}{(q-0,64)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,44}{(q-0,56)} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Por fim, considere o caso de controle descentralizado. Para esse caso, as restrições de desempenho foram relaxadas, de modo a ser mais condizente com o que se pode obter utilizando tal estrutura. Admite-se sobrepasso de no máximo 25% nas malhas, tempos de acomodação próximo de 20 s (correspondente a um polo em aproximadamente  $q = 0,83$ ) e não mais que 40% de variação devido às interações. Note que as malhas 2 e 3 estão duplamente acopladas, então espera-se que a malha fechada tenha pelo menos 3 polos em comum (passo 2 do procedimento).

Primeiramente foi definido um par de polos complexos de malha fechada de modo a satisfazer  $M_o = 5\%$  e  $|p| = 0,85$ . A ideia por trás dessas escolhas é deixar uma folga em função da adição de mais um polo e dos zeros do modelo de referência. Para fazer as escolhas do modelo de referência, não foi usado o modelo da planta, mas apenas as informações obtidas a partir da resposta em malha aberta do processo. Como a malha 2 possui interação com todas as malhas, primeiro serão ajustados os parâmetros em função dessa malha. Um dos zeros é escolhido como  $q = 0,83$ , equivalente ao tempo de acomodação da segunda malha quando todas as entradas atuam ao mesmo tempo (passo 3 do procedimento). Em seguida, a fim de manter tempo de acomodação e sobrepasso máximo foi escolhido um par polo-zero em  $p = 0,72$  e  $z = 0,71$  (passo 4 do procedimento verificado). Agora que os três polos de malha fechada já foram escolhidos, os zeros dos demais elementos *da diagonal* foram escolhidos de forma a atingir o desempenho especificado (passo 3). Para os elementos fora da diagonal, um zero em 1 é adicionado (para erro nulo em regime) e um dos zeros de cada elemento da diagonal foi replicado na respectiva coluna (passos *a* e *b* do passo 5). Os ganhos foram ajustados para limitar o nível de interação (passo *e*). O modelo de referência resultante é dado por:

$$T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,30547(q-0,84)(q-0,73)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} & 0 & 0 \\ \frac{0,15(q-0,84)(q-1)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} & \frac{0,26768(q-0,83)(q-0,71)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} & \frac{0,08(q-0,75)(q-1)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} \\ 0 & \frac{0,2(q-0,83)(q-1)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} & \frac{0,17595(q-0,75)(q-0,7)}{(q-0,72)(q^2-1,675q+0,7225)} \end{bmatrix} \quad (100)$$

Para cada caso foi identificado um controlador PID utilizando os mesmos dados coletados do processo. Os controladores identificados foram, respectivamente

$$C_1(q,P) = \begin{bmatrix} \frac{0,42899(q-0,9174)(q-0,253)}{q(q-1)} & \frac{-0,06691(q^2-2,208q+1,254)}{q(q-1)} & \frac{0,02789(q^2-2,148q+1,189)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,37265(q-0,9184)(q-0,1696)}{q(q-1)} & \frac{1,1723(q-0,801)(q-0,1418)}{q(q-1)} & \frac{-0,25662(q-0,8457)(q-0,5738)}{q(q-1)} \\ \frac{0,32084(q-0,9247)(q-0,4341)}{q(q-1)} & \frac{-1,0108(q-0,8168)(q-0,4004)}{q(q-1)} & \frac{0,97856(q-0,8215)(q-0,4372)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$C_2(q,P)= \begin{bmatrix} \frac{0,54221(q-0,8257)(q-0,1138)}{q(q-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-0,015972(q-12,93)(q-0,5469)}{q(q-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0,17664(q-0,8509)(q+0,3499)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (102)$$

Foram realizados ensaios em malha fechada com os controladores obtidos. Inicialmente foi aplicado um salto unitário na referência da primeira malha, aos 60 segundos o mesmo foi feito para a segunda referência e aos 120 segundos para a terceira. Aos 180 todas referências voltaram para 0.

A Figura 8 apresenta a resposta obtida em malha fechada com o controlador (101). O acoplamento entre as malhas é praticamente nulo (máximo de 3,4% aparente na malha 1) e os tempos de acomodação foram respeitados.

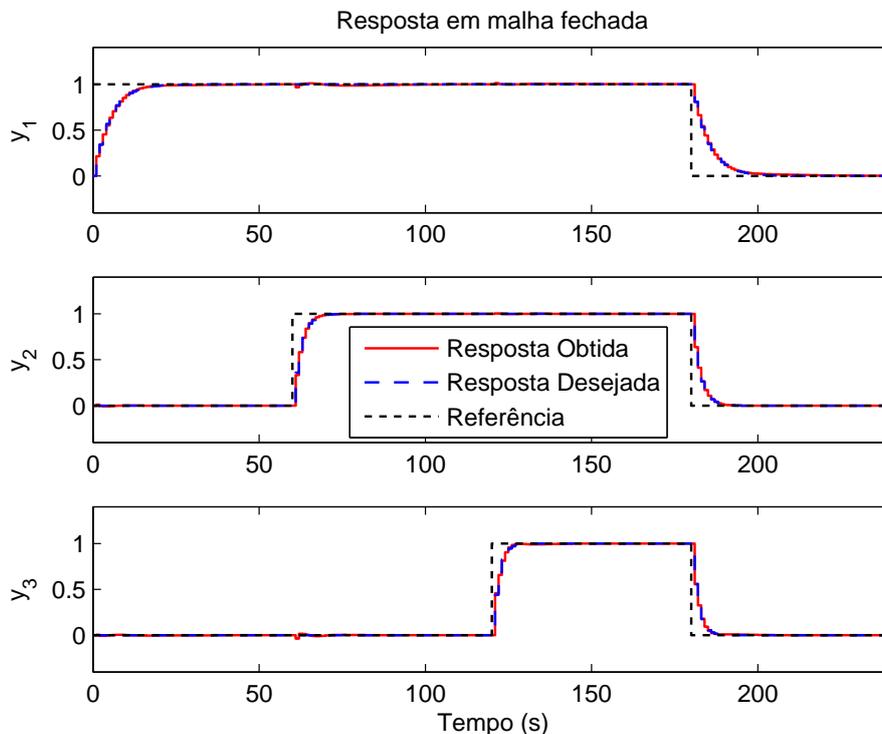


Figura 8: Resposta em malha fechada do sistema (98) com o controlador (101).

Quando o controlador (102) é colocado em malha fechada, a resposta obtida é mostrada na Figura 9. Observa-se que a malha 1 apresenta um comportamento bastante parecido com o especificado pelo modelo de referência. Já a malha 2 apresenta um comportamento ligeiramente diferente do especificado: o tempo de acomodação é cerca de 8 s maior que o desejado, no entanto os limites de sobrepasso e interação foram respeitados. Contudo, a malha 3 foi a mais prejudicada: o tempo de acomodação é cerca de 9 s maior que o desejado, uma interação maior que 40% pode ser observada em relação à segunda malha, porém o critério de sobrepasso foi respeitado. O projeto com controle descentralizado dificilmente levará a uma resposta igual à especificada, e a avaliação do desempenho deverá considerar margens aceitáveis para a malha fechada.

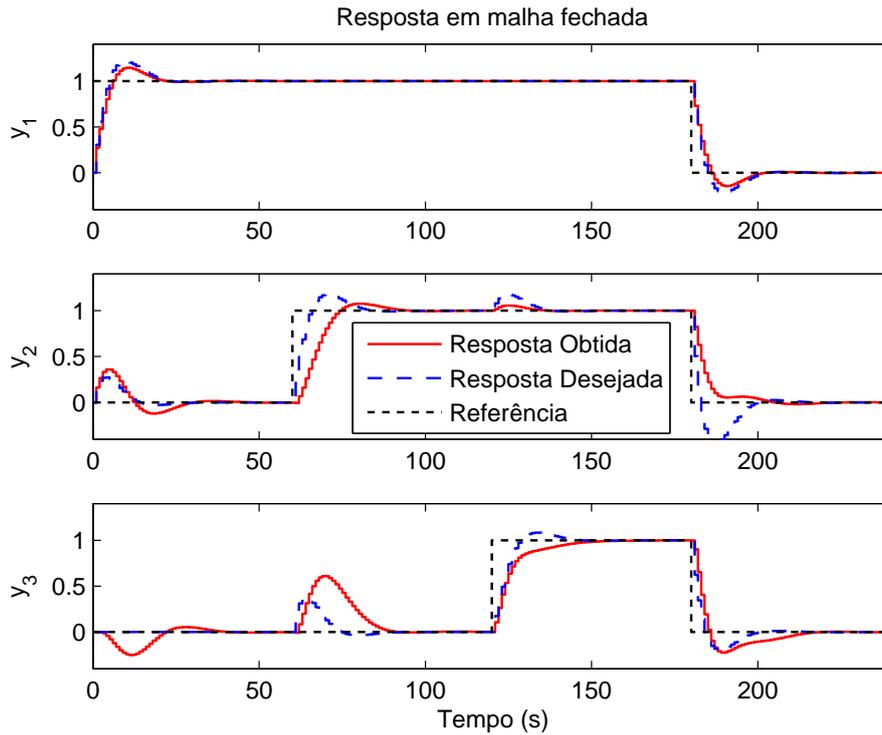


Figura 9: Resposta em malha fechada do sistema (98) com o controlador (102).

## 5.2 Sistema com polo instável

Neste exemplo será tratado um sistema com polos instáveis. Será visto que um mínimo de cuidado na escolha do modelo de referência deve ser tomado para garantir estabilidade. Seja

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,2(q-0,9)}{(q-1,2)(q-0,8)} & \frac{0,5(q-0,7)}{(q-0,9)(q-0,8)} \\ 0 & \frac{0,4}{(q-1,2)} \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Esse sistema claramente possui um polo instável em  $p_i = 1,2$  e afeta ambas as malhas. Dois projetos diagonais serão feitos para esse sistema: um considerando a restrição  $T_d(p_i) = I$  e o outro caso apenas próximo da restrição. A ideia é mostrar que a escolha da localização do zero de malha fechada é fundamental, mesmo quando o controlador ideal está fora da classe considerada.

Como critérios de desempenho, considere:

- Malha 1 tão rápida quanto  $1/p_i$ .
- Malha 2 mais lenta que a malha 1, pois mudanças na malha 2 afetam a malha 1 e o sistema é instável.

Por causa das restrições  $T_d(p_i) = I$  e  $T_d(1) = I$  (seguimento de referências constantes), então os elementos de  $T_d(q)$  deverão conter pelo menos um zero para fornecer o grau de liberdade necessário para respeitar ambas condições. Então os elementos do modelo de referência serão modelos de segunda ordem com um zero. Esses modelos com grau relativo 1 satisfazem (43) para esse sistema.

Para satisfazer a restrição  $T_d(p_i) = I$ , cada zero dos elementos deverá ser escolhido como:

$$z_1 = \frac{p_i - p_1 p_2}{p_i - p_1 - p_2 + 1}. \quad (104)$$

O primeiro modelo levará à risca a escolha do zero proposta em (104) para as duas malhas, e o segundo modelo apenas irá considerar um zero maior que o polo mais lento. A fim de cumprir com os requisitos de malha fechada, a primeira malha terá um polo dominante em  $q = 1/1,2 = 0,833333$  e a segunda malha será especificada com um polo em  $q = 0,9$ , o que significa que a malha 1 é cerca de 73% mais rápida que a malha 2. O segundo polo de cada malha será 4 vezes mais rápido que o polo mais lento, para pouco afetar o critério de desempenho de tempo.

Para o primeiro caso, o modelo de referência resultante é dado por:

$$T_{d_1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,88441(q-0,9024)}{(q-0,83333)(q-0,4823)} & 0 \\ 0 & \frac{0,6439(q-0,9466)}{(q-0,9)(q-0,6561)} \end{bmatrix} \quad (105)$$

Para o segundo caso, o zero do elemento  $t_{22}$  será escolhido próximo do zero calculado anteriormente e o outro elemento será mantido. Nesse caso  $T_d(p_i) \approx I$ . Note que a diferença é pequena. O modelo de referência resultante é dado por:

$$T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,88441(q-0,9024)}{(q-0,83333)(q-0,4823)} & 0 \\ 0 & \frac{0,49129(q-0,93)}{(q-0,9)(q-0,6561)} \end{bmatrix} \quad (106)$$

Para a coleta dos dados de entrada e saída, o sistema foi colocado com um controlador que estabilizasse a malha fechada, mas sem nenhum critério de desempenho. Foram identificadas estruturas de controladores PI centralizadas e os resultados obtidos foram respectivamente

$$C_1(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{5,1753(q-0,7565)}{(q-1)} & \frac{-5,7561(q-1,182)}{(q-1)} \\ 0 & \frac{1,6097(q-0,9466)}{(q-1)} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$C_2(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{5,1707(q-0,7645)}{(q-1)} & \frac{-3,9769(q-1,402)}{(q-1)} \\ \frac{-0,015211(q+1,078)}{(q-1)} & \frac{1,4407(q-1,051)}{(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Foram realizados ensaios em malha fechada com os controladores obtidos. No instante inicial foi aplicado um salto unitário na referência da primeira malha, aos 60 segundos o mesmo foi feito para a segunda referência e aos 120 segundos para a terceira. Aos 180 todas referências voltaram para 0.

A Figura 10 mostra o resultado obtido com o controlador (107). Não foi possível obter desacoplamento completo na primeira malha, mas a resposta a uma mudança na referência ficou dentro do esperado. Na segunda malha foi obtida a resposta ideal. Note que o zero do controlador  $c_{22}$  é igual ao zero do modelo de referência, pois esse é controlador ideal para a segunda malha.

A Figura 11 mostra o resultado obtido com o controlador (108). A malha fechada resultou em um sistema instável, mesmo com um zero do modelo de referência bem próximo do que seria o ideal. No entanto, note que o zero do controlador  $c_{22}$  é bem diferente.

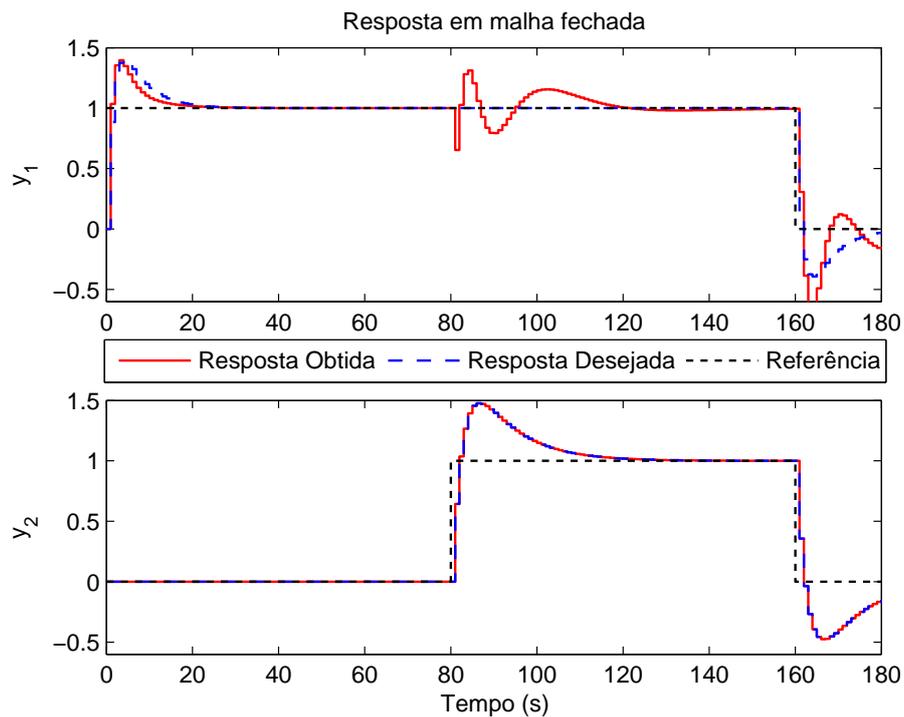


Figura 10: Resposta em malha fechada do sistema (103) com o controlador (107).

De fato, foi observado que, somente com o zero do segundo elemento do modelo de referência entre  $[0,94; 0,98]$ , os controladores identificados resultaram em malha fechada estável.

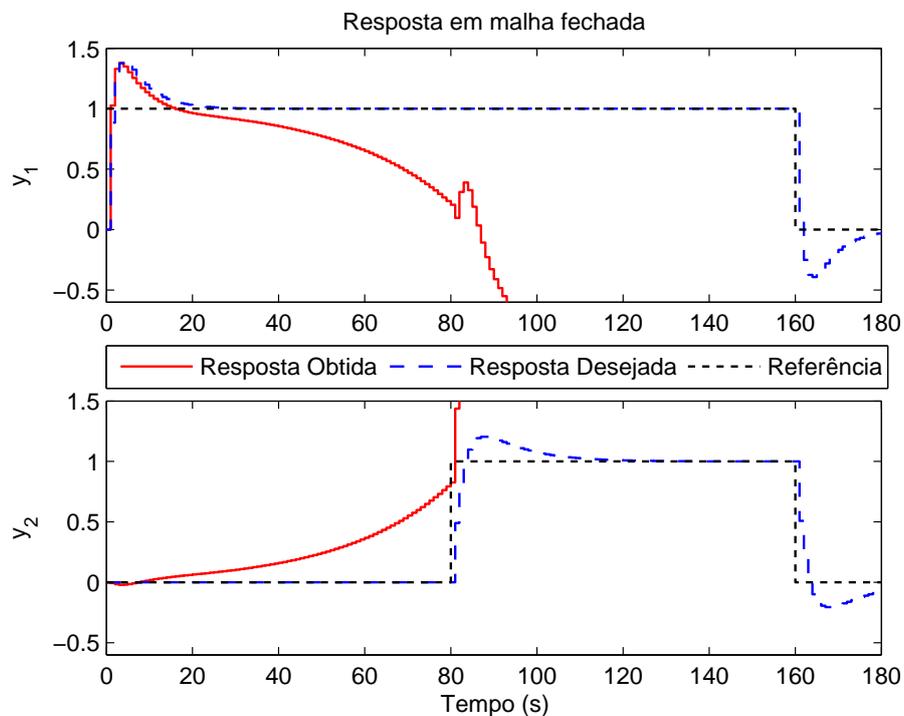


Figura 11: Resposta em malha fechada do sistema (103) com o controlador (108).

Embora este seja um exemplo relativamente simples, é importante observar como a

restrição (59) deve ser seguida no projeto do controlador, mesmo quando o controlador ideal não pertence à classe identificada.

### 5.3 Sistema com atrasos

Considere o seguinte modelo em tempo discreto de uma coluna de fracionamento apresentado em (HARRIS; BOUDREAU; MACGREGOR, 1996).

$$G(q) = \begin{bmatrix} -\frac{1,5}{(q-0,659)q^2} & -\frac{0,167}{(q-0,923)} \\ -\frac{0,519}{(q-0,784)q^4} & -\frac{0,154q+0,144}{(q-0,874)q^3} \end{bmatrix}. \quad (109)$$

A principal discussão neste exemplo é que, embora a ordem do controlador ideal seja elevada, devido aos atrasos, ainda é possível obter uma boa resposta em malha fechada, mesmo com controladores PI/PID. A ideia também é mostrar que a restrição de grau relativo (43) deve ser seguida. Caso contrário, o controlador ideal não será causal e será visto que o desempenho nesse caso será comprometido. Serão comparadas duas escolhas diagonais para o modelo de referência: uma considerando a restrição de grau relativo e a outra onde se considera somente o menor atraso presente em cada malha.

A matriz de graus relativos (34) desse sistema é

$$\Gamma(G_0(q)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma(G_0^{-1}(q)) = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

o que mostra que os elementos da primeira linha do modelo de referência devem ter grau relativo 3 e que os elementos da segunda linha devem ter grau relativo 5.

Como requisito de desempenho, considere que se deseja fazer cada malha 50% mais rápida que em malha aberta. Sendo assim, a primeira malha deve ter um polo dominante em  $q = 0,535$  e a segunda malha um polo dominante em  $q = 0,817$ . Será especificado mais 1 polo para cada malha e então o grau relativo será completado com polos em zero. Em função de haver atrasos na malha, a matriz de controladores será composta por PIDs na diagonal principal e por PIs fora da diagonal.

Para a escolha da malha fechada 1, como o polo dominante já é bastante rápido com respeito a velocidade de malha aberta, o outro polo não necessariamente precisa ser muito ( $> 4$  vezes) mais rápido que o polo dominante. Foi então escolhido um polo em  $q = 0,2$ . Para a segunda malha, porém, o polo dominante é mais lento e polos mais próximos deste polo alteram o tempo de acomodação. Sendo assim, o segundo polo será  $q = (0,817)^4$ . Dessa forma, o primeiro modelo de referência é dado por:

$$T_{d_1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,3348}{(q-0,535)(q-0,2)q} & 0 \\ 0 & \frac{0,10147}{(q-0,817)(q-0,4455)q^3} \end{bmatrix} \quad (111)$$

O segundo modelo de referência será dado apenas pelo polo dominante de malha fechada e irá considerar o menor grau relativo de cada malha, o qual é dado por:

$$T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,4650}{(q-0,535)} & 0 \\ 0 & \frac{0,183}{(q-0,817)q^2} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Note que os elementos do modelo (112) possuem grau relativo menor que os do modelo (111). O controlador ideal no primeiro caso é de ordem 6 na primeira linha e de

ordem 11 na segunda linha, e no segundo caso ele é não-causal. Os controladores obtidos com os dados do processo foram:

$$C_1(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{-0,21057(q-0,7196)(q-0,3675)}{q(q-1)} & \frac{-0,038801(q-0,7041)}{(q-1)} \\ \frac{-0,21772(q-0,8022)}{(q-1)} & \frac{0,12509(q+1,088)(q-0,8845)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (113)$$

$$C_2(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{-0,15027(q^2-1,238q+0,4897)}{q(q-1)} & \frac{-0,13174(q-0,9233)}{(q-1)} \\ \frac{-0,52679(q-0,8536)}{(q-1)} & \frac{0,29515(q-0,9012)(q+0,1429)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (114)$$

Foram realizados ensaios em malha fechada com os controladores obtidos. Inicialmente foi aplicado um salto unitário na referência da primeira malha, aos 60 segundos o mesmo foi feito para a segunda referência e aos 120 segundos para a terceira. Aos 180 todas referências voltaram para 0.

A Figura 12 mostra o resultado obtido com o controlador (113). Note que inicialmente a resposta obtida varia antes da resposta desejada, devido ao grau relativo do elemento do modelo de referência ser maior que o do sistema. Porém observa-se um bom comportamento geral da malha fechada: requisitos de desempenho atingidos e um nível alto de desacoplamento entre as malhas.

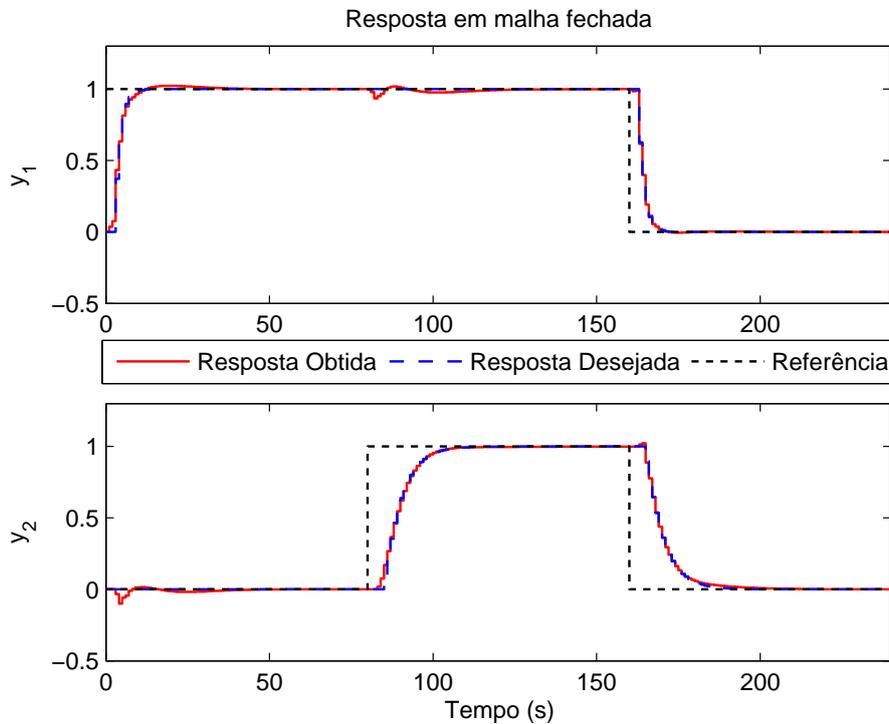


Figura 12: Resposta em malha fechada do sistema (109) com o controlador (113).

A Figura 13 mostra o resultado obtido com o controlador (114). Observa-se uma resposta em malha fechada bastante diferente da resposta desejada, com sobrepasso, tempos de acomodação superiores ao projetado e um certo acoplamento entre as malhas.

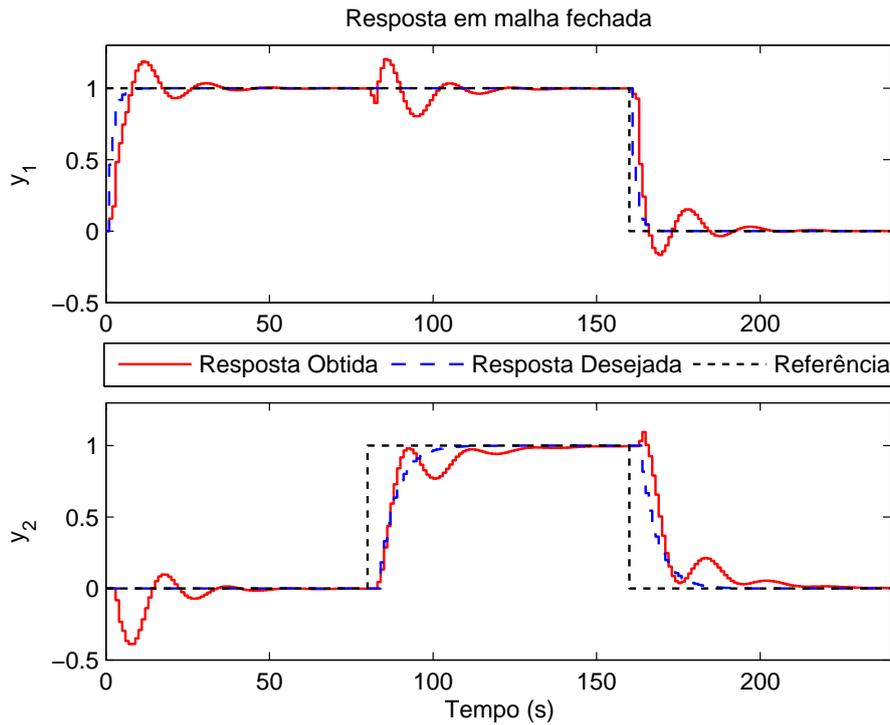


Figura 13: Resposta em malha fechada do sistema (109) com o controlador (114).

#### 5.4 Sistema com zero de transmissão de fase não-mínima

Considere o sistema dado por

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} \frac{q}{(q-0,9)(q-0,8)} & \frac{0,6}{(q-0,9)} \\ \frac{1}{(q-0,9)} & \frac{0,2}{(q-0,9)} \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Esse sistema possui um zero de transmissão em  $z_1 = 1,2$  com direção de saída  $y_{z_1} = [-\sqrt{10}/10 \ 3\sqrt{10}/10]^T$ . Inicialmente, três projetos diagonais serão discutidos de forma crescente de melhoria de desempenho: o primeiro projeto desconsidera o conhecimento do zero multivariável de FNM; o segundo considera esse zero, porém a escolha dos polos (principalmente o segundo, que tende a ser negligenciado) não irá seguir à risca as orientações fornecidas; o último projeto então reconsidera a escolha dos polos de forma que o desempenho obtido seja igual ao desejado. A ideia não é só mostrar que a restrição (56) deve ser satisfeita, mas também que a capacidade da classe do controlador representar exatamente o controlador ideal depende da escolha do modelo de referência. Em seguida, será feito um projeto ilustrativo cujo objetivo é mover o efeito do zero para uma das saídas.

Satisfazer a restrição (56) em um projeto diagonal, significa que todos os elementos para os quais  $y_{z_1}$  é não-nulo devem conter o zero de transmissão de FNM. Como critérios de desempenho, deseja-se que a primeira malha seja pelo menos 150% mais rápida que em malha aberta e a segunda malha pelo menos 100%, ambas sem sobrepasso. Então, pode-se escolher um polo dominante em  $q = 0,75$  para a primeira malha e um polo dominante em  $q = 0,8$  para a segunda malha. A matriz de controladores será composta por PIDs em todos os elementos.

Como no primeiro modelo de referência o zero de transmissão é desconsiderado, então

seguinto de acordo com a metodologia proposta pode-se escolher modelos de primeira ordem. Sendo assim, o modelo de referência é dado por

$$T_{d_1}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,25}{(q-0,75)} & 0 \\ 0 & \frac{0,2}{(q-0,8)} \end{bmatrix}. \quad (116)$$

O segundo modelo de referência levará em conta o zero de transmissão, mas não considera a escolha proposta para o segundo polo. Nesse caso, a fim de não alterar o desempenho *especificado*, foi escolhido um polo 4 vezes mais rápido que a malha mais rápida para ser adicionado em ambos elementos, i.e.,  $p_2 = 0,75^4$ . Então o modelo pode ser definido como

$$T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-0,85449(q-1,2)}{(q-0,75)(q-0,3164)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,68359(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,3164)} \end{bmatrix}. \quad (117)$$

Por fim, o terceiro modelo considera todos as decisões apontadas na Subseção 4.1.2. O modelo de referência é então

$$T_{d_3}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-0,41666(q-1,2)}{(q-0,75)(q-0,6666)} & 0 \\ 0 & \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Foi realizado um experimento em malha aberta utilizando como sinal de entrada um PRBS para coletar os dados do processo. Este mesmo conjunto de dados foi utilizado para identificar controladores PID para todos os projetos. Os controladores identificados foram, respectivamente:

$$C_1(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{0,15912(q-1,051)(q-0,7885)}{q(q-1)} & \frac{0,057193(q-0,6103)(q+0,1512)}{q(q-1)} \\ \frac{-1,2011(q-1,004)(q-0,7906)}{q(q-1)} & \frac{1,0572(q-0,9985)(q-0,0428)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$C_2(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{0,27081(q^2-1,748q+0,7659)}{q(q-1)} & \frac{-0,68245(q-0,899)(q-0,8334)}{q(q-1)} \\ \frac{-1,2412(q-0,9155)(q-0,7975)}{q(q-1)} & \frac{1,0395(q-0,9148)(q+0,0981)}{q(q-1)} \end{bmatrix} \quad (120)$$

$$C_3(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{0,20833(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ \frac{-1,0417(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{(q-0,9)}{(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (121)$$

A resposta em malha fechada com o controlador (119) é mostrada na Figura 14. A escala de tempo é maior a fim de mostrar que a resposta obtida é instável.

A resposta obtida para o projeto (117) é mostrada na Figura 15. Note que neste caso obteve-se uma malha fechada estável, porém o desempenho acabou sendo prejudicado, pois a escolha do segundo polo não permite que o controlador ideal esteja na classe de controladores identificada.

Por fim, a resposta obtida com o controlador (121) é mostrada na Figura 16. Neste caso, a resposta obtida combina perfeitamente com a resposta desejada, uma vez que o controlador identificado é o controlador ideal.

Será discutido agora o caso em que se deseja mover o efeito do zero de transmissão de FNM para a saída 2. O elemento  $t_{22}$  de (118) será mantido e um modelo de primeira ordem

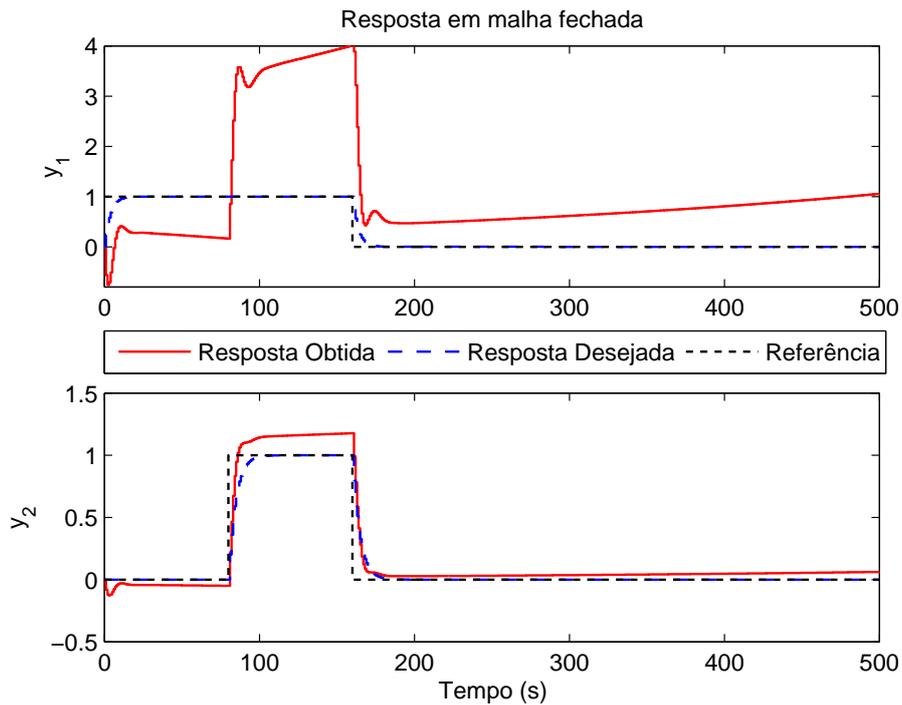


Figura 14: Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (119).

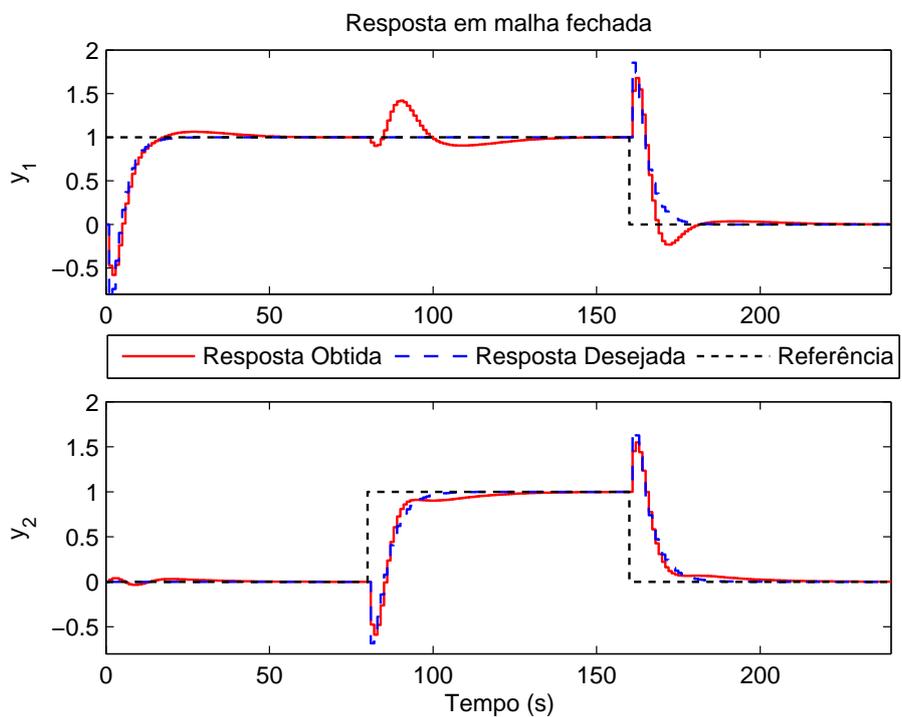


Figura 15: Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (120).

será escolhido para o elemento  $t_{11}$ , conforme definido anteriormente. Então, de acordo com (93) já se tem  $\bar{t}_{21} = \frac{(q-1)}{(q-0,8)(q-0,75)(q-0,6)}$  e ainda falta determinar  $K_2$  e  $z_{21}$ . Como  $y_{z_1}$  tem maior direcionalidade na saída 2 e a razão entre as direções é  $1/3$ , será escolhido  $K_2 = 0,3$  que é próximo dessa razão. Então  $z_{21}$  pode ser determinado utilizando (94)

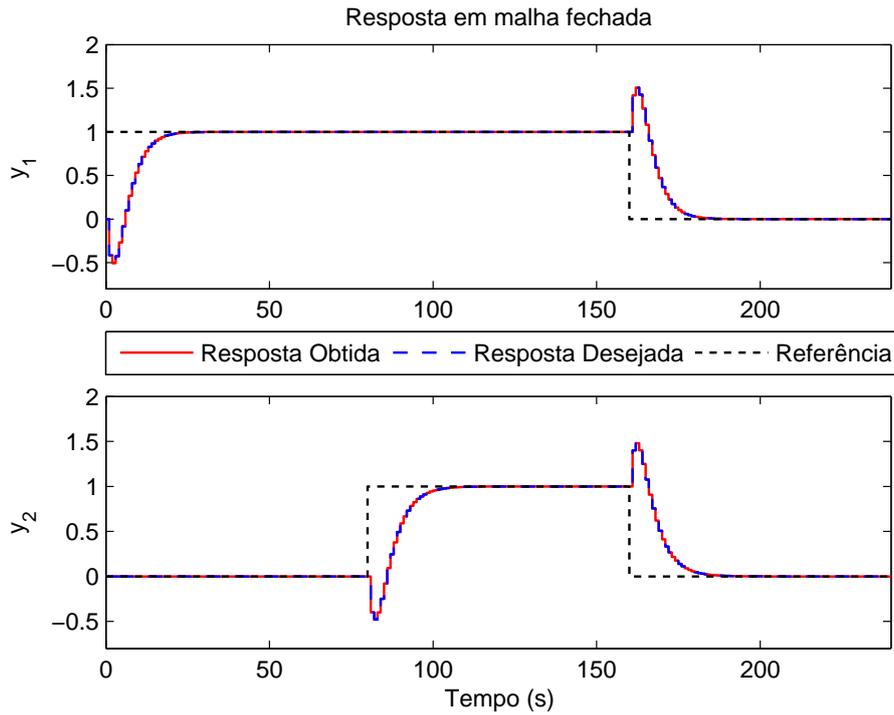


Figura 16: Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (121).

para obter  $z_{21} = 13/15$ . O modelo de referência final é:

$$T_{d_4}(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,25}{(q-0,75)} & 0 \\ \frac{0,3(q-1)(q-0,8666)}{(q-0,8)(q-0,75)(q-0,6)} & \frac{-0,4(q-1,2)}{(q-0,8)(q-0,6)} \end{bmatrix} \quad (122)$$

e o controlador identificado foi

$$C_4(q) = \begin{bmatrix} \frac{0,325(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} & \frac{-0,6(q-0,9)(q-0,8)}{q(q-1)} \\ \frac{-0,125(q-0,9)}{(q-1)} & \frac{(q-0,9)}{(q-1)} \end{bmatrix}, \quad (123)$$

o qual é igual ao controlador ideal.

A Figura 17 mostra a resposta obtida em malha fechada. Observa-se que o efeito de resposta inversa é inexistente na malha 1 e aparece apenas na malha 2. Além disso, um pequeno acoplamento é observado na segunda saída, conforme esperado.

## 5.5 Planta de nível

Considere novamente a planta piloto do Exemplo 2.6. Ao contrário dos exemplos anteriores, que eram dados de simulação, este é uma aplicação real. Primeiro, será discutido o caso em que um controlador cheio é utilizado e em seguida um controlador descentralizado, porém com uma escolha adequada do modelo de referência. A partir de um experimento com degrau em malha aberta, determinou-se

$$\Gamma(G_0(q)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \Gamma(G_0^{-1}(q)) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (124)$$

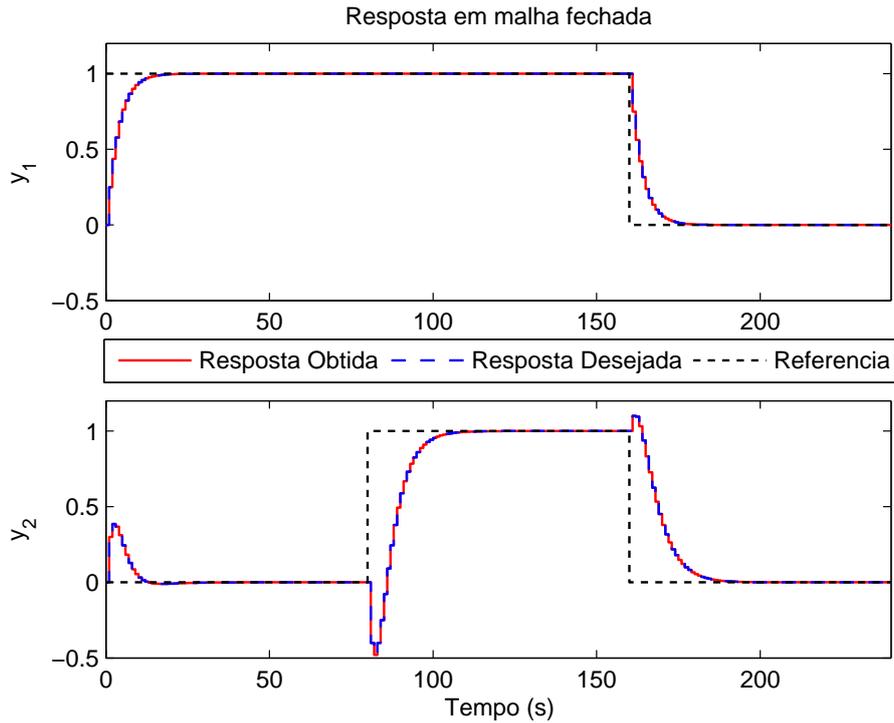


Figura 17: Resposta em malha fechada do sistema (115) com o controlador (123).

então  $\gamma_{t_{11}} = \gamma_{t_{22}} = 1$  são escolhidos, de acordo com (43). Uma vez que o desempenho especificado pelo modelo de referência (41) corresponde ao grau relativo necessário, pode-se manter este modelo de referência, mas utiliza-se agora uma matriz de controladores PI *cheia* para ser ajustada, i.e., os controladores LIC-021 e LIC-012 (Figura 3) são colocados em operação. Utilizando a mesma batelada de dados de entrada e de saída como antes, o seguinte controlador foi identificado:

$$C_1(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{4,3893(q-0,9918)}{(q-1)} & \frac{3,1204(q-1,000)}{(q-1)} \\ \frac{-10,493(q-0,9933)}{(q-1)} & \frac{0,26566(q-0,8282)}{(q-1)} \end{bmatrix}. \quad (125)$$

Note que  $c_{12}(q, \rho_{12})$  em (125) é um controlador Proporcional, ainda que uma estrutura PI tenha sido escolhida. A Figura 18 mostra a resposta de malha fechada obtida com (125), a qual é muito semelhante à desejada e apenas um pequeno acoplamento pode ser observado na saída 2. Foi possível obter um desempenho próximo ao especificado graças ao fato de que este modelo de referência não é muito restritivo no que diz respeito a esta estrutura do controlador, o que foi garantido por seguir as orientações prescritas.

Claro que uma comparação direta entre o desempenho final obtido aqui e entre o apresentado no Exemplo 2.6 seria sem sentido, pois as estruturas do controlador em cada caso são completamente diferentes. A estrutura descentralizada do controlador é considerada a seguir e uma comparação significativa será, então, fornecida.

Primeiramente, analisa-se se o sistema tem as condições apropriadas para aplicação de controle descentralizado. A matriz de regime permanente do sistema é

$$G(1) = \begin{bmatrix} 0,863076760 & 0 \\ 1,021959940 & 0,457943207 \end{bmatrix} \quad (126)$$

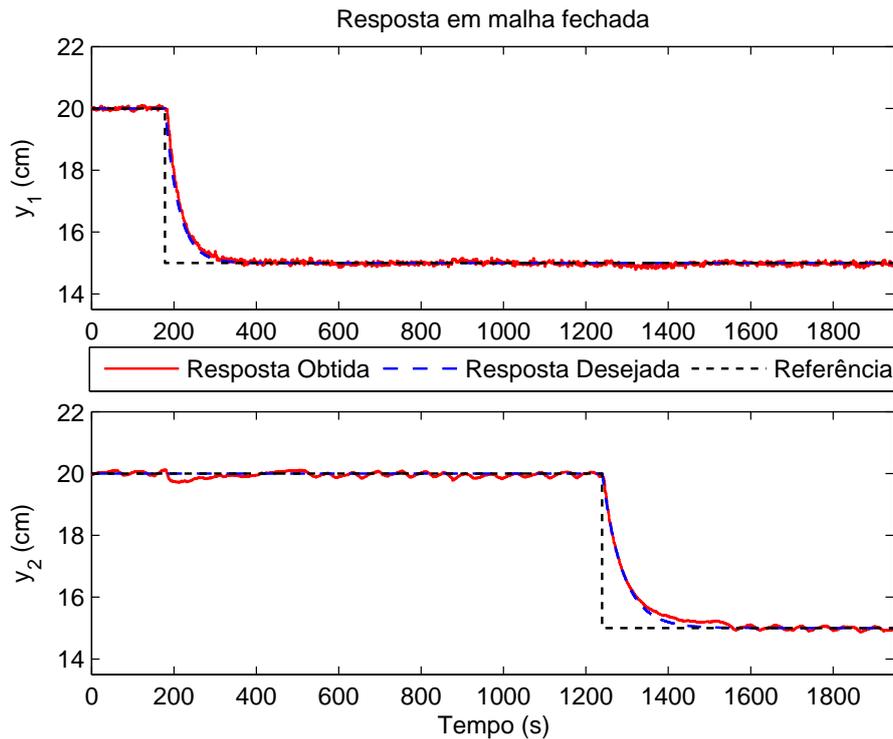


Figura 18: Resposta de malha fechada da planta piloto com o controlador (125) comparada com a resposta do modelo de referência (41).

a qual é triangular. Logo, a RGA é a matriz identidade e o valor singular estruturado é  $\mu = 0$ . Sendo assim, condições favoráveis para a aplicação de controle descentralizado são encontradas.

Para escolher o modelo de referência para esta planta de acordo com as orientações apresentadas, procede-se da seguinte forma.

- Informações extras coletadas a partir do experimento com degrau em malha aberta: sabe-se que o ganho de regime permanente de  $g_{12}$  é zero, o que significa que  $g_{12}$  tem um zero em 1; também, estima-se o tempo de acomodação (e o polo correspondente) de cada malha:  $t_s = 890$  s ( $q = 0,995614$ ) para a malha 1 e  $t_s = 660$  s ( $q = 0,994090$ ) para a malha 2.
- Definição do número de polos de malha fechada: como há uma interação bidirecional no processo, deve ser adicionado um polo extra, de acordo com o passo 2 do procedimento. Partindo-se de um modelo de segunda ordem, a malha fechada desejada deve ter pelo menos 3 polos em comum. Como  $g_{12}$  tem um zero em 1 então  $t_{12}$  deve ter dois zeros em 1 (um do processo e outro do controlador): então um polo extra é necessário *neste elemento*. Os zeros do modelo de referência devem ser escolhidos juntamente com polos para atingir os critérios de desempenho.

Devido a estrutura do controlador que é descentralizada, não se pode esperar uma malha fechada desacoplada e nem tão rápida quanto anteriormente, portanto os critérios de desempenho serão relaxados em comparação aos usados no Exemplo 2.6 e no projeto anterior. Assim, certo sobrepasso é agora permitido e o tempo de acomodação é mais lento, porém ainda mais rápido do que em malha aberta para a malha 1. Os critérios de desempenho, neste caso, são

- máximo sobrepasso de 20% para uma única mudança tipo salto na referência (40% para mudança simultânea).
- tempo de acomodação da malha 1 em torno de 360 s e para a malha 2 até no máximo o tempo de malha aberta (660 s).
- no máximo 40% de variação na saída devido ao acoplamento.

Como a faixa de frequências, neste caso, é muito baixa, a localização dos zeros afetará tanto o critério de tempo como o de sobrepasso. Assim, começa-se com um critério de sobrepasso inferior para determinar o par de polos complexos. Considerando-se um sobrepasso de 10% e dado o tempo de acomodação definido (360 s), pode-se encontrar os polos de malha fechada

$$p_{1,2} = 0,989083 \pm j0,014665$$

para todos os elementos. Dado que o critério de tempo de acomodação da malha 1 é mais rigoroso, o terceiro polo comum será selecionado com a escolha do elemento  $t_{11}$ . As escolhas para os elementos são justificadas a seguir:

- Elemento  $t_{11}$ : como  $g_{11}$  tem grau relativo 2 (veja (124)), assim terá  $t_{11}$ . O zero é igual ao tempo de acomodação de malha aberta  $z_1 = 0,995614$ . E para manter o tempo de acomodação sob os limites, foi escolhido  $p_3 = 0,9955$ .
- Elemento  $t_{21}$ : os 3 polos de malha fechada já foram então selecionados. Então este elemento terá um zero em 1 (ganho nulo em regime permanente) e o outro zero igual ao zero de  $t_{11}$ . Foi selecionado  $K = 0,0145$  para manter a interação abaixo de 40%.
- Elemento  $t_{22}$ : um zero foi alocado em  $z_2 = 0,994090$  (tempo de malha aberta) e um segundo zero em  $z_3 = 0,989$  para ajustar os critérios de tempo, sobrepasso e grau relativo.
- Elemento  $t_{12}$ : como que  $g_{12}$  tem um zero em 1, então a função de transferência de malha fechada terá dois zeros em 1. Além disso, deve ter o mesmo zero que  $t_{22}$ , então  $t_{12}$  deve ter um outro polo, para ajustar o grau relativo. Dados os critérios de tempo e de amplitude, foram selecionados  $p_4 = 0,9925$  e o ganho  $K = -0,017$ .

Estas escolhas para os elementos satisfazem (51) considerando (124). O modelo de referência resultante é finalmente dado por

$$T_{d_2}(q) = \begin{bmatrix} \frac{3,4294 \times 10^{-4}(q-0,995614)}{(q-0,9955)(q^2-1,978166q+0,9785)} & \frac{-0,017(q-1)^2(q-0,994090)}{(q-0,9925)(q-0,9955)(q^2-1,978166q+0,9785)} \\ \frac{0,0145(q-1)(q-0,995614)}{(q-0,9955)(q^2-1,978166q+0,9785)} & \frac{0,023176(q-0,994090)}{(q-0,9955)(q^2-1,978166q+0,9785)} \end{bmatrix}, \quad (127)$$

para o qual foi identificado o seguinte controlador PI descentralizado

$$C_2(q, P) = \begin{bmatrix} \frac{1,94981(q-0,991481)}{q-1} & 0 \\ 0 & \frac{6,47879(q-0,990718)}{q-1} \end{bmatrix} \quad (128)$$

Foi realizado um ensaio em malha fechada com o controlador obtido. Aos 280 segundos a referência da primeira malha foi mudada de 20 cm para 15 cm, aos 1200 segundos

o mesmo foi feito para a segunda referência e aos 2475 ambas referências voltaram para 20 cm. Em função do ruído presente no sistema, as margens de cálculo do tempo de acomodação foram aumentadas para 5%.

A Figura 19 mostra a resposta obtida em comparação com a que foi especificada. os tempos de acomodação são aproximadamente  $t_s \simeq 300$  s para a saída 1 e  $t_s \simeq 460$  s para a saída 2, o que está de acordo com as exigências – ao contrário do Exemplo 2.6. Observe que a resposta obtida não apresentou sobrepasso. Além disso, apenas rejeição à “perturbação” na malha 1 causada por uma alteração de referência na malha 2 ficou fora dos limites (10% a mais) especificados no modelo de referência. Comparando com o exemplo inicial, nota-se também uma resposta mais rápida devido à interação em malha 2, quando então um sobrepasso foi observado (25% para a malha 1 e 32% para a malha 2). Em geral, a resposta alcançada neste projeto é bastante satisfatória.

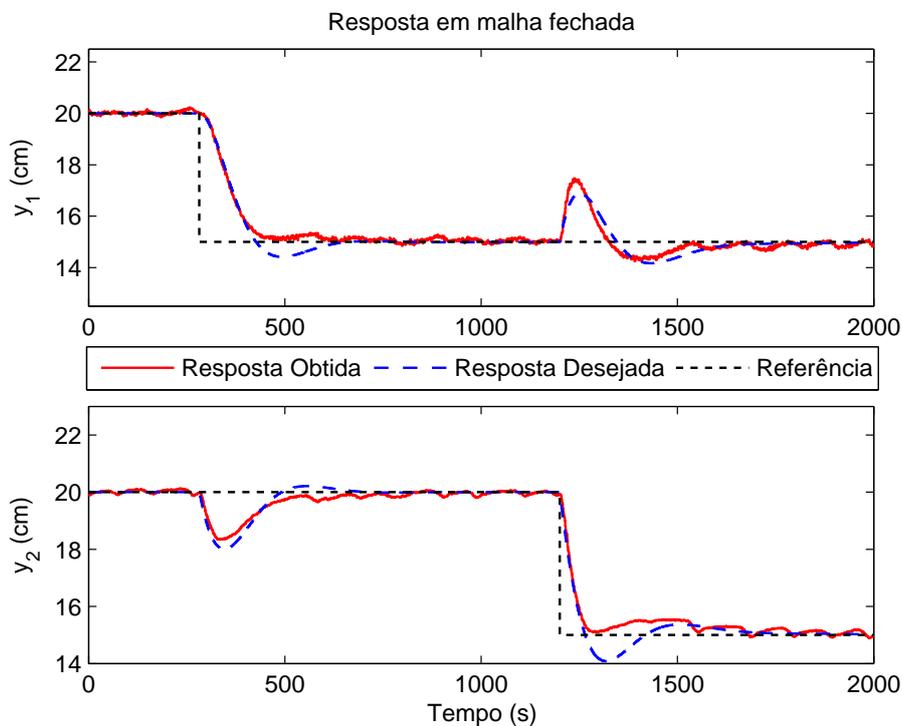


Figura 19: Resposta em malha fechada da planta piloto com o controlador (128) comparada com a resposta do modelo de referência (127).

É notável, e a mensagem principal do exemplo, que um modelo de referência mais rápido (o do Exemplo 2.6) não resulta em uma malha fechada mais rápida, e que um modelo de referência desacoplado não resulta em uma malha fechada menos acoplada – muito pelo contrário. Como o modelo de referência original no Exemplo 2.6 representa um conjunto de expectativas irrealistas, o desempenho de malha fechada guarda pouca correlação com o desejado, e a resposta de malha fechada que foi obtida naquele exemplo foi muito pobre. Também é importante notar que todas as informações necessárias para a escolha adequada do modelo de referência feita no presente Exemplo são diretamente observáveis em uma simples resposta ao salto, e que essa informação não precisa ser perfeita – de fato, apenas os valores estimados para os tempos de acomodação foram necessários, e não seus valores precisos.

## 6 CONCLUSÃO

Para Controle por Modelo de Referência MIMO foi mostrado que, tal como no caso SISO, existem restrições fundamentais que o modelo de referência deve satisfazer a fim de assegurar estabilidade e desempenho em malha fechada. Satisfazer essas restrições depende tanto da estrutura do modelo de referência quanto da estrutura do controlador. Sendo assim, torna-se evidente que é impossível fazer o projeto totalmente no “escuro”.

Primeiramente foram reconhecidos, no Capítulo 3, essas limitações e o mínimo de conhecimento necessário sobre o processo. Foi proporcionada uma formulação, *não encontrada na literatura*, para determinar o menor grau relativo necessário nos elementos do modelo de referência de modo que os elementos do controlador ideal sejam causais. Em seguida, foi visto como elementos de fase não-mínima (zeros multivariáveis e polos fora do círculo) devem ser tratados na escolha do modelo de referência e suas respectivas limitações de desempenho. Os limitantes de desempenho para o caso discreto derivados neste trabalho utilizam uma abordagem semelhante à encontrada na literatura para o caso contínuo.

Se o usuário tem uma matriz de controladores cheia (centralizada) a sua disposição, então a concepção do modelo de referência é facilitada, porque pode ser definida como uma matriz diagonal em que cada elemento representa o desempenho desejado para cada malha. Se apenas um controle descentralizado está disponível, então usar um modelo de referência diagonal irá provavelmente resultar num desempenho pobre em malha fechada; um modelo de referência cheio é então necessário.

Neste trabalho foram apresentadas, no Capítulo 4, algumas orientações (*guidelines*) para a escolha do modelo de referência em cada caso, de tal forma que o controlador ideal esteja perto de classe de controladores disponível. Ainda, foi discutida uma metodologia para a situação em que se deseja mover o efeito de um zero multivariável de fase não-mínima para uma saída específica, utilizando um modelo de referência mais realista do que o apresentado em (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). A aplicação dessas orientações em simulação e em uma planta piloto produziram resultados bastante promissores.

Por fim, destaca-se que a metodologia apresentada foi desenvolvida para seguimento de referência. Para trabalhos futuros, uma formulação semelhante poderia ser feita para o caso de controle de mínima variância (ou controle regulatório), a fim de reduzir a variabilidade no sistema. Além disso, um método direto e eficiente para identificação de zeros multivariáveis de fase não-mínima e sua respectiva direção de saída seriam uma contribuição enorme tanto para teoria de identificação quanto para métodos de controle por Modelo de Referência.

## REFERÊNCIAS

- ÅSTRÖM, K. J.; HAGANDER, P.; STERNBY, J. Zeros of sampled systems. **Automatica**, Tarrytown, USA, v.20, n.1, p.31–38, 1984.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **Advanced PID Control**. Durham, USA: ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. **Data-driven controller design: the H2 approach**. Amsterdam, NL: Springer Science & Business Media, 2011.
- BRAATZ, R. D. **Robust loopshaping for process control**. 1993. 229 f. Dissertação (Doctor of Philosophy) — Division of Chemistry & Chemical Engineering, California Institute of Technology, Pasadena, USA, 1993.
- BRISTOL, E. On a new measure of interaction for multivariable process control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Foxboro, MA, USA, v.11, n.1, p.133–134, 1966.
- CAMPESTRINI, L. **Contribuições para métodos de controle baseados em dados obtidos em apenas um experimento**. 2010. 118 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BR, 2010.
- CAMPESTRINI, L. et al. Model Reference Control Design by Prediction Error Identification. In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION, 16., Brussels, Belgium. **Anais...** New York: IFAC, 2012. p.1478 – 1483.
- CAMPESTRINI, L. et al. Unbiased MIMO VRFT with application to process control. **Journal of Process Control**, Tarrytown, USA, v.39, p.35–49, 2016.
- CAMPI, M.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.38, n.8, p.1337 – 1346, 2002.
- CHEN, Y.-C.; TENG, C.-C. A model reference control structure using a fuzzy neural network. **Fuzzy Sets and Systems**, Tarrytown, USA, v.73, n.3, p.291–312, 1995.
- DE BRUYNE, F. Iterative feedback tuning for MIMO systems. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT AUTOMATION AND CONTROL, 2., 1997, Anchorage, USA. **Proceedings...** Pennsylvania: CiteSeerX, 1997. p.1–8.

DOYLE, J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. **Control Theory and Applications, IEE Proceedings D**, England, UK, v.129, n.6, p.242–250, 1982.

ECKHARD, D. et al. Data-based control design for a process class with guaranteed convergence to the globally optimum controller. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, Budapest, Hungary. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. v.1, p.993–998.

FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. M. Noniterative data-driven design of multivariable controllers. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE (CDC-ECC), 50., 2011, Orlando, USA. **Anais...** New York: IEEE, 2011. p.5106–5111.

FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. M.; DEL RE, L. Non-iterative direct data-driven controller tuning for multivariable systems: theory and application. **Control Theory Applications, IET**, London, UK, v.6, n.9, p.1250–1257, June 2012.

GEVERS, M. Identification for Control: from the early achievements to the revival of experiment design. **European Journal of Control**, London, UK, v.11, n.4 - 5, p.335 – 352, 2005.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Automating the choice of the reference model for data-based control methods applied to PID controllers. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20., 2014, Belo Horizonte, BR. **Anais...** Uberlândia: SWGE, 2014. p.1088–1095.

GOODWIN, G. C.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. E. **Control system design**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1984. v.240.

GOODWIN, G. C.; SIN, K. S. **Adaptive Filtering Prediction and Control**. New York, NY, USA: Dover Publications, Inc., 2009.

GROSDIDIER, P.; MORARI, M.; HOLT, B. R. Closed-loop properties from steady-state gain information. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, Washington, USA, v.24, n.2, p.221–235, 1985.

GUARDABASSI, G.; SAVARESI, S. Virtual reference direct design method: an off-line approach to data-based control system design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, USA, v.45, n.5, p.954–959, 2000.

HARRIS, T. J.; BOUDREAU, F.; MACGREGOR, J. F. Performance assessment of multivariable feedback controllers. **Automatica**, Tarrytown, USA, v.42, n.11, p.1505–1518, 1996.

HAVRE, K. **Studies on controllability analysis and control structure design**. 1998. 301 f. Tese (Doutorado em Engenharia Química) — Department of Chemical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, NO, 1998.

HAVRE, K.; SKOGESTAD, S. Effect of RHP zeros and poles on performance in multivariable systems. In: IEE CONFERENCE PUBLICATIONS, London, UK. **Anais...** New York: IEEE, 1996. n.427, p.930–935.

- HJALMARSSON, H.; BIRKELAND, T. Iterative feedback tuning of linear time-invariant MIMO systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 1998, Tampa, FL. **Proceedings...** New York: IEEE, 1998. v.4, p.3893–3898.
- HJALMARSSON, H. et al. Iterative feedback tuning: theory and applications. **Control Systems, IEEE**, Piscataway, USA, v.18, n.4, p.26 – 41, 1998.
- HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista, USA. **Proceedings...** New York: IEEE, 1994. v.2, p.1735–1740.
- IZHAKIAN, Z.; ROWEN, L. Supertropical matrix algebra. **Israel Journal of Mathematics**, Jerusalem, Israel, v.182, n.1, p.383–424, 2011.
- JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. Gradient approximations in iterative feedback tuning for multivariable processes. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Sussex, v.18, n.8, p.665–681, 2004.
- KARIMI, A.; HEUSDEN, K. van; BONVIN, D. Noniterative data-driven controller tuning using the correlation approach. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, Kos Island, Greece. **Anais...** New York: IEEE, 2007.
- KARIMI, A.; MISKOVIC, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Sussex, v.18, n.8, p.645 – 664, 2004.
- KARIWALA, V.; FORBES, J. F.; MEADOWS, E. S. Block relative gain: properties and pairing rules. **Industrial & engineering chemistry research**, Washington, USA, v.42, n.20, p.4564–4574, 2003.
- LANDAU, I. D. et al. **Adaptive control: algorithms, analysis and applications**. 2nd.ed. London, UK: Springer-Verlag London, 2011. XXII, 590p.
- LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2nd.ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- MACFARLANE, A. G. J.; KARCANIAS, N. Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. **International Journal of Control**, London, v.24, n.1, p.33–74, 1976.
- MACIEJOWSKI, J. M. **Multivariable Feedback Design**. 1st.ed. Wokingham, Berkshire, UK: Adisson-Wesley, 1989.
- MIŠKOVIĆ, L. et al. Correlation-based tuning of decoupling multivariable controllers. **Automatica**, Tarrytown, USA, v.43, n.9, p.1481–1494, 2007.
- NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, 2004, Sapporo, Japan. **Anais...** New York: IEEE, 2004. v.3, p.2208–2213.
- OGATA, K. **Modern control engineering**. 5th.ed. New Jersey: Prentice Hall, 2009.

ROJAS, J.; MORILLA, F.; VILANOVA, R. Multivariable PI control for a boiler plant benchmark using the Virtual Reference Feedback Tuning. In: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PID CONTROL, 2., 2012, Brescia, Italy. **Anais...** New York: IFAC, 2012. p.376–381.

SKOGESTAD, S.; MORARI, M. Implications of large RGA-elements on control performance. **Industrial & engineering chemistry research**, Washington, USA, v.26, n.11, p.2323–2330, 1987.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control Analysis and Design**. 2nd.ed. Sussex: John Wiley & Sons, 2005.

WOOD, R.; BERRY, M. Terminal composition control of a binary distillation column. **Chemical Engineering Science**, Tarrytown, USA, v.28, n.9, p.1707–1717, 1973.

YUBAI, K.; USAMI, H.; HIRAI, J. Correlation-based direct tuning of MIMO controllers by least-squares and its application to tension-and-speed control apparatus. In: ICCAS-SICE, 2009, Fukuoka, Japan. **Anais...** New York: IEEE, 2009. p.931–936.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the ASME**, New York, USA, v.64, p.759 – 768, 1942.