

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Integralidade de Grafos

por

Maikon Machado Toledo

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Orientador

Prof^a. Dr^a. Juliane Golubinski Capaverde
Co-orientadora

Porto Alegre, Fevereiro de 2016.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Toledo, Maikon Machado

Integralidade de Grafos / Maikon Machado Toledo.—
Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2016.

136 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística, Porto Alegre, 2016.

Orientador: Allem, Luiz Emilio; Co-orientadora: Capaverde, Juliane Golubinski

Dissertação: Matemática Aplicada.
Grafos, integralidade, autovalores.

Integralidade de Grafos

por

Maikon Machado Toledo

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de Grafos

Orientador: Prof. Dr. Luiz Emilio Allem

Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Juliane Golubinski Capaverde

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Nair Maria Maia de Abreu
COPPE-UFRJ

Prof. Dr. Eliseu Fritscher
COPPE-UFRJ

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
PPGMAp-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
29 de Fevereiro de 2016.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pela educação que me foi dada dentro de casa, e que apesar das dificuldades não mediram esforços para que eu tivesse a oportunidade de estudar.

Agradeço em especial à minha mãe, Jaqueline Beatriz Machado, que sempre me deu bons conselhos que ajudaram a formar meu caráter e minha conduta. E pela principalmente luta para que pudesse realizar meus sonhos.

Agradeço ao meu pai, João Carlos Toledo, que sempre me apoiou durante minha formação acadêmica.

Agradeço ao meu padrasto, Volnei Corrêa, pelo apoio e conselhos que serviram de inspiração para alcançar minhas metas.

Agradeço ao meu primo, Jonathan Toledo da Silva, pela amizade, pelas conversas e companheirismo que foram fundamentais durante toda minha vida.

Ao meu grande amigo e colega, Guilherme Porto da Silva, pela grande parceria nos estudos, pelas ajudas no texmaker e principalmente pela amizade.

Aos meus colegas, Lilian Cavalet e Cássio Pazinatto, pelas ajudas no texmaker.

Ao meu colega, Fábio Ronei Padilha, pelas conversas e risadas que foram importantes para aliviar tensão nos momentos difíceis.

Ao Prof. Dr. Luiz Emilio Allem, por ter me orientado durante todo o mestrado.

À Prof^a. Dr^a. Juliane Golubinski Capaverde, pela sua grande paciência e dedicação durante a co-orientação, sem sua ajuda certamente não teria chegado a este ponto.

Ao Prof. Dr. Vilmar Trevisan, pelas oportunidades que me deu, pelas conversas e conselhos que foram primordiais ao longo da minha formação acadêmica.

À Prof^a. Dr^a. Nair Maria Maia de Abreu , e aos Profs. Drs. Eliseu Fritscher e Vilmar Trevisan, componentes da banca examinadora, pela atenção ao terem estudado e criticado este trabalho.

Agradeço à UFRGS, ao Instituto de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada pelo excelente ensino público e pelo auxílio financeiro que recebi durante toda minha graduação e pós-graduação.

SUMÁRIO

| | |
|--|------|
| LISTA DE FIGURAS | viii |
| LISTA DE TABELAS | xi |
| LISTA DE SÍMBOLOS | xii |
| RESUMO | xiv |
| ABSTRACT | xv |
| | |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Introdução à Teoria de Grafos | 1 |
| 1.2 Introdução à Teoria Espectral de Grafos | 3 |
| 1.3 Introdução à integralidade de grafos | 5 |
| | |
| 2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE GRAFOS | 10 |
| 2.1 Definições preliminares e grafos especiais | 10 |
| 2.2 Operações com grafos | 15 |
| | |
| 3 GRAFOS E SUAS REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS | 19 |
| 3.1 Conceitos básicos de Álgebra Linear | 19 |
| 3.2 Matriz de Adjacência | 21 |
| 3.3 Matriz Laplaciana | 23 |
| 3.4 Matriz Laplaciana Sem Sinal | 27 |
| | |
| 4 VARIAÇÃO ESPECTRAL INTEIRA | 35 |
| 4.1 Variação espectral inteira | 35 |
| 4.2 Variação espectral inteira em um lugar | 37 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3 | Varição espectral inteira em dois lugares | 41 |
| 5 | GRAFOS CONSTRUTIVELMENTE LAPLACIANO INTEGRAIS | 79 |
| 5.1 | Grafos construtivelmente laplaciano integrais | 80 |
| 5.2 | Obtendo espectro de $G \in \mathcal{C}_n$ através da árvore direcionada . . . | 93 |
| 5.3 | Grafos terminais | 100 |
| 6 | GRAFOS INTEGRAIS E Q-INTEGRAIS | 104 |
| 6.1 | Grafos Integrais | 104 |
| 6.2 | Grafos Q-integrais | 112 |
| 6.3 | Famílias com infinitos grafos Q-integrais | 127 |
| 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 131 |
| 7.1 | Trabalhos futuros | 131 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 133 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Exemplo de um grafo | 1 |
| 1.2 | Grafo modelo das 7 pontes de Königsberg | 2 |
| 2.1 | Grafo simples e não simples. | 11 |
| 2.2 | Subgrafos de G | 12 |
| 2.3 | Grafo 4-regular. | 12 |
| 2.4 | Grafos isomorfos ($G_1 \simeq G_2$). | 13 |
| 2.5 | Caminho e Ciclo. | 13 |
| 2.6 | Floresta com 3 árvores. | 14 |
| 2.7 | K_6 | 14 |
| 2.8 | Grafo tripartido completo e um bipartido completo. | 15 |
| 2.9 | Grafo união ($P_3 \cup C_3$). | 16 |
| 2.10 | Join ($P_3 \vee C_3$). | 16 |
| 2.11 | Adição da aresta e | 17 |
| 2.12 | Remoção da aresta e | 17 |
| 2.13 | Grafo e seu complementar. | 18 |
| 2.14 | Grafo e seu grafo linha. | 18 |
| 3.1 | Matriz de adjacência de C_5 | 22 |
| 3.2 | Matriz laplaciana de $K_{1,3}$ | 24 |
| 3.3 | Matriz de incidência orientada de G | 25 |
| 3.4 | Matriz laplaciana sem sinal de P_4 | 28 |
| 3.5 | Matriz de incidência de G | 32 |
| 4.1 | Variação espectral inteira em um lugar. | 38 |
| 4.2 | Variação espectral inteira em dois lugares. | 64 |
| 5.1 | Grafos L -integrais. | 80 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.2 | Grafo construtivelmente laplaciano integral. | 81 |
| 5.3 | G é um cografo e H não é cografo. | 85 |
| 5.4 | G é livre de P_4 | 85 |
| 5.5 | subgrafo induzido H' de H | 86 |
| 5.6 | Casos possíveis para o subgrafo H | 87 |
| 5.7 | Configuração dos vértices de $G + e$ | 88 |
| 5.8 | Construção do grafo $K_1 \vee ((K_1 \vee (K_1 \cup K_1)) \cup K_1)$ | 91 |
| 5.9 | Grafo H_3 do Teorema 5.5. | 92 |
| 5.10 | Árvore direcionada de G | 94 |
| 5.11 | Árvore direcionada de H | 94 |
| 5.12 | Rotulando os vértices da árvore direcionada de G | 97 |
| 5.13 | Rotulando os vértices da árvore direcionada de H | 98 |
| 5.14 | Grafo terminal G | 100 |
| 5.15 | Grafo threshold. | 102 |
| 6.1 | Grafos integrais. | 105 |
| 6.2 | Produto Cartesiano ($P_2 \square P_3$). | 105 |
| 6.3 | Conjunção ($P_2 \wedge P_3$). | 106 |
| 6.4 | Soma forte ($P_2 \oplus P_3$). | 107 |
| 6.5 | Complementar do grafo C_6 | 108 |
| 6.6 | Grafo de Petersen. | 109 |
| 6.7 | $\overline{K_3} \vee K_2$ | 112 |
| 6.8 | Grafo Q -integral. | 113 |
| 6.9 | Grafo Total. | 116 |
| 6.10 | $H_{2,3,4}$ | 127 |
| 6.11 | CS_5^9 e $MCS_{3,3}^2$ | 128 |

| | | |
|------|--------------------------------------|-----|
| 6.12 | ECS_2^9 e $MECS_{2,2}^6$ | 129 |
|------|--------------------------------------|-----|

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----|--|----|
| 5.1 | Multiconjuntos $L_3(v)$ | 98 |
| 5.2 | Multiconjuntos $L_1(v)$ e $L_2(v)$ | 98 |
| 5.3 | Multiconjuntos $L_3(u)$ | 99 |
| 5.4 | Multiconjuntos $L_1(u)$ e $L_2(u)$ | 99 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-----------------|---|
| $ A $ | Cardinalidade do conjunto A . |
| e_k | k -ésimo vetor da base canônica. |
| $\mathbf{1}_n$ | Vetor de dimensão igual a n com entradas todas iguais a um. |
| $d(v)$ | Grau do vértice v no grafo G . |
| d_v | Grau de entrada do vértice v na árvore direcionada $\vec{T}(G)$. |
| $N(v)$ | Vizinhança do vértice v no grafo G . |
| P_n | Caminho de n vértices. |
| C_n | Ciclo de n vértices. |
| K_n | Grafo completo de n vértices. |
| $K_{r,s}$ | Grafo bipartido completo de r por s vértices. |
| $T(G)$ | Grafo total de G . |
| $\ell(G)$ | Grafo linha de G . |
| $\vec{T}(G)$ | Árvore direcionada associada ao grafo construtivamente laplaciano integral G . |
| \mathcal{C}_n | Conjunto dos grafos construtivamente laplaciano integrais com n vértices. |
| $G - e$ | Grafo resultante da remoção da aresta e do grafo G . |
| $G + e$ | Grafo resultante da adição da aresta e do grafo G . |
| $G \cup H$ | Grafo resultante da união dos grafos G e H . |
| $G \vee H$ | Grafo resultante da join dos grafos G e H . |
| $G \square H$ | Grafo resultante do produto cartesiano dos grafos G e H . |
| $G \oplus H$ | Grafo resultante da soma forte dos grafos G e H . |
| $G \wedge H$ | Grafo resultante da conjunção dos grafos G e H . |
| $H_{n,n+1,n+2}$ | Grafo obtido de $K_n \vee (K_{n+1} \cup K_{n+2})$ removendo n arestas que ligam um vértice de K_n a n vértices de K_{n+2} |

| | |
|---------------------|--|
| I_n | Matriz identidade de ordem n . |
| $0_{n \times m}$ | Matriz de ordem $n \times m$ em que todas as entradas são zero. |
| $u \perp v$ | Vetor u é perpendicular ao vetor v . |
| $\ u\ $ | Norma Euclidiana do vetor u . |
| $P_{A(G)}(x)$ | Polinômio característico da matriz $A(G)$. |
| $P_{L(G)}(x)$ | Polinômio característico da matriz $L(G)$. |
| $P_{Q(G)}(x)$ | Polinômio característico da matriz $Q(G)$. |
| $\lambda_i^{(m_i)}$ | i -ésimo maior autovalor com multiplicidade m_i . |
| $Spect(A(G))$ | Espectro da matriz $A(G)$. |
| $Spect(L(G))$ | Espectro da matriz $L(G)$. |
| $Spect(Q(G))$ | Espectro da matriz $Q(G)$. |
| $A(G)$ | Matriz de adjacência do grafo G . |
| $L(G)$ | Matriz laplaciana do grafo G . |
| $Q(G)$ | Matriz laplaciana sem sinal do grafo G . |
| $D(G)$ | Matriz diagonal dos graus do grafo G . |
| $B(G)$ | Matriz de incidência do grafo G . |
| $\beta(G)$ | Matriz de incidência orientada do grafo G . |
| a_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz de adjacência. |
| ℓ_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz laplaciana |
| q_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz laplaciana sem sinal. |
| d_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz diagonal dos graus. |
| b_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz de incidência. |
| β_{ij} | Entrada da linha i e coluna j da matriz de incidência orientada. |

RESUMO

A Teoria Espectral de Grafos tem como objetivo descobrir propriedades de um grafo G através da análise do espectro de uma matriz associada ao grafo. Nesta dissertação estudamos a matriz de adjacência $A(G)$, a matriz laplaciana $L(G)$ e a matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$. Para cada uma dessas matrizes estudamos o comportamento dos autovalores no que diz respeito à integralidade. Mais especificamente, estudamos os grafos integrais, os grafos Q -integrais e os grafos L -integrais, que são os grafos que têm espectro inteiro em relação às matrizes $A(G)$, $Q(G)$ e $L(G)$, respectivamente.

Estudamos a variação espectral inteira via adição de aresta para a matriz laplaciana. Vimos que se os autovalores da matriz laplaciana variam de maneira inteira, então um dos autovalores aumenta em duas unidades ou dois dos autovalores aumentam em uma unidade cada um. Esses dois tipos de variações são conhecidas como variação espectral inteira em um lugar e dois lugares [26, 33], respectivamente. Essas duas variações foram cruciais para estabelecermos uma estratégia para construção de grafos L -integrais por adição de arestas. Além disso, estudamos os grafos construtivelmente laplaciano integrais [28], que são um subconjunto dos grafos L -integrais. Caracterizamos este subconjunto através dos subgrafos induzidos e mostramos uma técnica alternativa para calcular o seu espectro.

Estudamos também algumas famílias com infinitos grafos integrais e grafos Q -integrais construídos através do join de grafos regulares [12, 15, 24].

ABSTRACT

The spectral graph theory aims to discover properties of a graph G by analyzing the spectrum of a matrix associated to the graph. In this thesis, we study the adjacency matrix $A(G)$, Laplacian matrix $L(G)$ and the signless Laplacian matrix $Q(G)$. For each of these matrices we study the behavior of eigenvalues with respect to integrality. More specifically, we study integral graphs, Q -integral graphs and L -integral graphs, which are graphs that have integral spectrum with regard to the matrices $A(G)$, $Q(G)$ and $L(G)$, respectively.

We study the spectral integral variation for the Laplacian matrix under the addition of an edge. We have seen that if the eigenvalues of the Laplacian matrix change by integer quantities, then one of the eigenvalues increases by two units or two of the eigenvalues increase by one unit each. These two types of variation are known as spectral integral variation in one place and two places [26, 33], respectively. These two variations were crucial to establish a strategy for building L -integral graphs by adding edges. Moreover, we studied the class of constructably Laplacian integral graphs, that are a subset of L -integral graphs. We characterize this subset through vertex-induced subgraphs and show an alternative technique for calculating their spectrum.

We also study some families with infinite integral graphs and Q -integral graphs built through the join of regular graphs [12, 15, 24].

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução à Teoria de Grafos

A cidade de Königsberg (território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado) é banhada pelo rio Pregel que, ao atravessar a cidade se ramifica formando uma ilha (Kneiphof) que está ligada ao restante da cidade, por sete pontes. Dizia-se que os habitantes da cidade, nos dias de descanso, tentavam efetuar um percurso fechado (percurso que sai de um lugar e retorna ao mesmo) que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como as suas tentativas nunca davam certo, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso. Será que tinham razão?

Antes de discutirmos este problema das pontes, olhemos para o conceito de grafo. Um grafo G é um par ordenado (V, E) que consiste de um conjunto V finito e não vazio cujos elementos são chamados de **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V denominados de **arestas**. Um grafo pode ser representado de várias maneiras, a mais comum delas é representar os vértices por pontos e as arestas por ligações entre estes pontos, como na Figura 1.1.

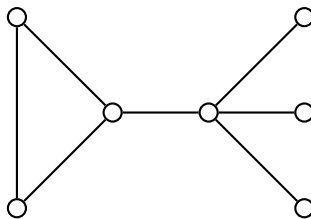


Figura 1.1 Exemplo de um grafo

Voltando ao problema inicial, Euler em 1736 o resolveu [17] usando um raciocínio muito simples. Considerou as pontes como as arestas e as ilhas ou margens como vértices, criando possivelmente o primeiro grafo da história, ver Figura

1.2. Mais do que resolver o problema, Euler o generalizou e introduziu o conceito de caminho euleriano. Para ser considerado euleriano, um grafo deve possuir um caminho (fechado (que sai e volta ao mesmo lugar) ou aberto (que sai e não retorna ao mesmo lugar)) que passe por todas as arestas apenas uma vez. Euler mostrou que todo grafo conexo possui caminho euleriano se e somente se todos os vértices deste caminho têm grau par no caso do caminho fechado ou todos os vértices têm grau par exceto os vértices dos extremos deste caminho no caso do caminho aberto. Logo, o grafo que representa o problema das sete pontes de Königsberg não pode ser considerado euleriano, pois todos os quatro vértices têm grau ímpar, e portanto não há caminho que passe por todas as pontes apenas uma vez.

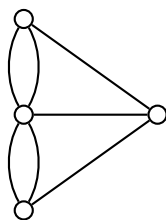


Figura 1.2 Grafo modelo das 7 pontes de Königsberg

Outro problema clássico da Teoria de Grafos é o problema da coloração de mapas. Sabe-se que a cartografia teve uma importância muito significativa no desenvolvimento das civilizações. Muito cedo, mapas foram sendo desenhados e graças a esses mapas novas descobertas puderam ser feitas. Na época das navegações a sua difusão atinge seu auge.

Desde muito cedo se conjecturou que quatro cores bastariam para colorir mapas de tal maneira que países vizinhos não tivessem a mesma cor. Este problema foi modelado da seguinte forma: os vértices representavam os países e dois vértices eram ligados se os países correspondentes tivessem fronteira em comum. Desta forma, o problema consiste em encontrar o número mínimo de cores necessárias para colorir os vértices do grafo de tal maneira que vértices adjacentes não possuam a mesma cor. Em 1852, Francis Guthrie enquanto tentava colorir os

vários distritos do mapa da Inglaterra de tal modo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. O problema da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que países com fronteira comum tenham cores diferentes seguiu sem solução por muitos anos. Matemáticos perseguiram por muito tempo a sua prova.

A conjectura seguiu até 1976 quando Kenneth Appel e Wolfgang Haken [2] apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores, através do uso de aproximadamente 1200 horas de cálculo computacional, que prova que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores! Muitos dos melhores matemáticos do século XX trabalharam seriamente neste problema e pelo caminho muitas questões foram postas e vários problemas relacionados foram resolvidos. Este estudo teve um papel muito importante no desenvolvimento da Teoria de Grafos.

1.2 Introdução à Teoria Espectral de Grafos

A Teoria Espectral de Grafos é uma área da Teoria de Grafos que relaciona a estrutura de um grafo com propriedades obtidas da Teoria de Matrizes e Álgebra Linear. Os estudos em Teoria Espectral de Grafos consideram a obtenção de invariantes de grafos a partir do espectro de matrizes associadas a estes grafos. As matrizes mais utilizadas são as de adjacência, incidência, laplaciana e laplaciana sem sinal. A Teoria Espectral de Grafos teve origem na Química Quântica. Em 1931, Huckel [25] produziu um modelo teórico para um problema a partir de moléculas de hidrocarbonetos não saturadas em que os níveis de energia de certos elétrons eram representados por autovalores de um grafo. Com o artigo [38] de Collatz e Sinogowitz foram estabelecidos os fundamentos da Teoria Espectral de Grafos, consolidada em 1971, com a tese de doutorado de Cvetković [9].

Há várias propriedades de grafos que podem ser deduzidas através dos autovalores, autovetores e polinômios característicos das matrizes associadas a estes grafos. A matriz de adjacência de um grafo G com n vértices, com conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, é a matriz quadrada $A(G)$ de ordem n com entradas a_{ij} dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Podemos verificar várias propriedades do grafo analisando a própria matriz de adjacência, o seu polinômio característico $P_{A(G)}(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ou os seus autovalores, como por exemplo,

- o número de arestas é igual a $-a_2$, e também é igual à soma da metade dos quadrados dos autovalores;
- o número de triângulos é igual a $\frac{-a_3}{2}$, e também é igual a $\frac{\text{tr}(A(G)^3)}{6}$;
- a entrada da matriz $A(G)^\ell$ situada na linha i e na coluna j é o número de caminhos de comprimento ℓ entre o vértice v_i e o vértice v_j do grafo G ;
- um grafo G é bipartido se, e somente se, o espectro de $A(G)$ for simétrico em relação ao zero.

A matriz laplaciana de um grafo, assim como as outras matrizes associadas a grafos, é uma ferramenta importante para obter informações sobre os invariantes de um grafo. Por exemplo, Fiedler mostrou em [18] que um grafo é conexo se e somente se o seu segundo menor autovalor laplaciano for maior que zero. Um dos mais importantes resultados sobre a matriz laplaciana é o Teorema da Monotocidade de Fiedler [3]. Esse teorema relaciona a estrutura dos vértices de

um grafo com qualquer autovetor associado ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana. Outra aplicação importante da matriz laplaciana é o Teorema Matriz-árvore [1], que em sua versão espectral nos diz como obter o número de árvores geradoras de um grafo através dos autovalores de sua matriz laplaciana.

A matriz laplaciana sem sinal, dentre todas outras mencionadas anteriormente, tem assumido papel relevante dentro da Teoria Espectral de Grafos pois há fortes indícios experimentais com grafos com até 11 vértices, de acordo com os resultados apresentados em [23, 36], de que o espectro dessa matriz associado ao grafo descreve de maneira mais clara as propriedades estruturais do mesmo. Pois, segundo estes experimentos computacionais, ela produz um menor número de pares de grafos coespectrais não isomorfos. Por isso há um crescente interesse dos pesquisadores em estudar o comportamento dos autovalores desta matriz.

Em 1980 surge o primeiro livro sobre Teoria Espectral de Grafos, *Spectra of Graphs: Theory and Application* [12], dos autores D. Cvetković, M. Doob e H. Sachs. Nos últimos anos, o número de livros sobre Teoria Espectral de Grafos vem crescendo rapidamente, com destaque para [8, 11, 13, 20]. Há várias aplicações da Teoria Espectral de Grafos na Química [22, 35], na computação e em problemas de particionamento.

1.3 Introdução à integralidade de grafos

Dentre o vasto número de tópicos de pesquisa importantes na Teoria Espectral de Grafos, a busca por grafos integrais é uma delas, isto é, grafos cujo espectro em relação à matriz de adjacência é constituído somente por números inteiros. O interesse por grafos com esta propriedade se iniciou em 1973, quando Harary e Schwenk publicaram o artigo *Which graphs have integral spectra?*[24]. Os autores notaram que uma caracterização geral destes grafos parecia um problema bem complicado e a partir de então, a procura por grafos integrais se dá através

de classes especiais de grafos. Uma aplicação importante dos grafos integrais é a transferência perfeita de estados arbitrários em quantum spin networks [5]. Um dos primeiros resultados mais gerais sobre grafos integrais é devido a Cvetković em [7]. Neste artigo Cvetković mostra que o conjunto de todos grafos r -regulares integrais, com r fixo, é um conjunto finito.

Determinar ou caracterizar árvores integrais também não é fácil [39]. Apesar de haver alguns resultados mais gerais, grande parte dos artigos encontrados na literatura aborda casos particulares. Em [24], Harary e Schwenk mencionaram as árvores integrais, mas os primeiros resultados contundentes foram publicados por Watanabe [40] e Watanabe e Schwenk [41].

À medida que as outras matrizes (laplaciana e laplaciana sem sinal) foram inventadas, o questionamento análogo ao que deu nome ao artigo de Harary e Schwenk foi naturalmente feito para o espectro das outras matrizes. Isso deu origem ao estudo dos grafos L -integrais e Q -integrais, que são os grafos que têm espectro em relação às matrizes $L(G)$ e $Q(G)$, respectivamente, constituído somente por inteiros.

Em 1994, Grone e Merris [21] estudaram os grafos L -integrais, também conhecidos como laplaciano integrais. Eles enfatizaram que, comparados aos grafos integrais, os grafos L -integrais apareciam de maneira mais frequente. Por exemplo, do total de 112 grafos conexos com 6 vértices, 37 são L -integrais enquanto que apenas 6 são integrais. Esta observação despertou o interesse em grafos L -integrais. Diferentemente das árvores integrais, o problema de determinar quais árvores são L -integrais está inteiramente resolvido (portanto, o problema das árvores Q -integrais também, pois veremos que no caso dos grafos bipartidos os espectros de $Q(G)$ e $L(G)$ coincidem). Fiedler [18] provou que, se T é uma árvore, então sua conectividade algébrica (segundo menor autovalor da matriz laplaciana) é menor do que 1, exceto se T é uma estrela ($T = K_{1,n}$). Uma vez que $Spect(L(K_{1,n})) = \{n, 1^{(n-1)}, 0\}$, temos que uma árvore T é L -integral se, e somente se, $T = K_{1,n}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma única árvore L -integral de ordem $n + 1$.

Nesta dissertação vamos estudar os grafos integrais, os grafos L -integrais e os grafos Q -integrais, trabalhando com foco nas operações que preservam a integralidade, L -integralidade e Q -integralidade, respectivamente. Ou seja, operações que quando aplicadas em um grafo com espectro inteiro em relação a uma das matrizes anteriormente citadas, geram um novo grafo que herde esta mesma propriedade. De posse destas operações construiremos famílias de grafos integrais, grafos Q -integrais e caracterizaremos algumas famílias de grafos L -integrais.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns grafos especiais e definiremos alguns conceitos preliminares e de suma importância para o desenvolvimento de uma teoria básica sobre grafos.

No Capítulo 3, dedicaremos nosso foco às matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal. Mostraremos algumas propriedades sobre os espectros dessas matrizes. Tais propriedades serão fundamentais para desenvolvermos nosso estudo sobre a integralidade de grafos nos capítulos 5 e 6.

No Capítulo 4, estudaremos a variação espectral inteira, [26, 33], mais especificamente, estudaremos quando o espectro da matriz laplaciana varia de maneira inteira quando adicionamos uma aresta e em um grafo G , ou seja, veremos quando a diferença entre o autovalor α_i de $L(G)$ e o correspondente autovalor β_i de $L(G + e)$ é um número inteiro. Quando $\alpha_i - \beta_i$ é um número inteiro para todo i dizemos que ocorreu variação espectral inteira via adição da aresta e . Neste capítulo mostraremos condições necessárias e suficientes para que ocorra as variações espectrais integrais em um e dois lugares. Estes resultados serão primordiais para que no Capítulo 5 possamos estabelecer uma estratégia para a construção de grafos L -integrais por adição de aresta.

No Capítulo 5, iniciaremos o estudo sobre a construção de grafos L -integrais por adição de aresta com base no artigo *Constructably Laplacian integral graphs* [28], de Kirkland. Neste capítulo estudaremos os grafos laplaciano integrais,

ou seja, grafos que têm o espectro em relação à matriz laplaciana constituído somente por números inteiros. Com base no estudo da variação espectral inteira, feita no capítulo anterior, veremos como obter um grafo L -integral adicionando somente uma aresta e em um grafo L -integral dado. Após isso, definiremos um subconjunto dos grafos L -inteiros que são os grafos construtivamente laplaciano integrais definidos por Kirkland [28]. Esses grafos podem ser obtidos de um conjunto de vértices isolados adicionando uma aresta por vez de tal forma que a cada adição de aresta um novo grafo L -integral é obtido. Kirkland caracterizou os grafos construtivamente laplaciano integrais através de subgrafos induzidos, mais precisamente, mostraremos que um grafo é construtivamente laplaciano integral se e somente se não tiver nenhum P_4 e C_4 como subgrafo induzido. Falaremos de como obter o espectro laplaciano dos grafos construtivamente laplaciano integrais associando a eles uma árvore direcionada. Também estudaremos os grafos terminais, que são os grafos construtivamente laplaciano integrais tais que ao adicionarmos uma aresta qualquer não conseguimos construir um grafo L -integral. Mostraremos que um grafo é terminal se e somente se não tiver nenhum P_4 e C_4 como subgrafo induzido e qualquer par de vértices não adjacentes se localizar em um subgrafo induzido igual a $K_2 \cup K_2$.

No Capítulo 6, continuaremos nosso estudo sobre a integralidade de grafos, mas com foco nas matrizes de adjacência e laplaciana sem sinal. Primeiramente falaremos sobre os grafos integrais, que são os grafos que têm o espectro em relação à matriz de adjacência formado somente por números inteiros. Com base nos artigos [12, 15, 24], exibiremos e provaremos que algumas operações mantêm a integralidade, ou seja, operações que quando aplicadas em um grafo integral geram um novo grafo integral. Também mostraremos a existência de uma família com infinitos grafos integrais. Posteriormente estudaremos os grafos Q -inteiros, que são os grafos que têm o espectro em relação à matriz laplaciana sem sinal formada somente por inteiros. Provaremos alguns resultados que serão fundamentais para construirmos famílias de grafos Q -inteiros através do join de grafos Q -inteiros e regulares. No final deste capítulo provamos que há famílias com infinitos grafos Q -inteiros.

E por último, no capítulo 7 faremos algumas considerações finais sobre a variação espectral inteira, a operação grafo total em grafos regulares e as árvores integrais com o objetivo de motivar futuras investigações sobre o tópico.

2 NOÇÕES BÁSICAS SOBRE GRAFOS

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção iremos apresentar alguns grafos especiais que aparecem ao longo deste trabalho e definir alguns conceitos preliminares e de suma importância para o desenvolvimento de uma teoria básica sobre grafos. Já na segunda seção falaremos de algumas operações em grafos. Para mais detalhes recomendamos a leitura das referências [1, 12, 19].

2.1 Definições preliminares e grafos especiais

Definição 2.1. *Um grafo G é um par ordenado (V, E) que consiste em um conjunto V finito e não vazio cujo os elementos são chamados de **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V denominados de **arestas**.*

Se u e v pertencem a V e $e = \{u, v\} \in E$, dizemos que a aresta e **incide** nos vértices u e v ou ainda que u e v são **vizinhos (adjacentes)**. O **grau** do vértice v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes em v . O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice v é chamado de vizinhança de v e é denotado por $N(v)$, ou seja, $N(v) = \{u | \{u, v\} \in E\}$. Neste trabalho, consideramos apenas grafos sem arestas ligando um vértice a ele mesmo (**laços**), sem **arestas múltiplas** (mais de uma aresta incidindo no mesmo par de vértices) e sem orientação. Tais grafos são chamados de grafos simples.

No grafo $G = (V, E)$ da Figura 2.1 temos um exemplo de um grafo simples com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. As arestas são $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_5\}$, $e_3 = \{v_1, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$, $e_5 = \{v_2, v_5\}$ e $e_6 = \{v_5, v_6\}$. Os graus dos vértices são: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 0$, $d(v_4) = 2$, $d(v_5) = 4$ e $d(v_6) = 1$.

Podemos ver também na Figura 2.1 um grafo $H = (V', E')$ que não é simples, com $V' = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ e $E' = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}\}$. As arestas são $e_7 = \{u_1, u_3\}$, $e_8 = \{u_1, u_2\}$, $e_9 = e_{15} = e_{16} = \{u_2, u_3\}$, $e_{10} = \{u_1, u_1\}$, $e_{11} = \{u_1, u_6\}$, $e_{12} = \{u_2, u_5\}$, $e_{13} = e_{14} = \{u_3, u_5\}$, $e_{17} = \{u_4, u_6\}$ e $e_{18} = \{u_6, u_5\}$. Os graus dos vértices são: $d(u_1) = 5$, $d(u_2) = 5$, $d(u_3) = 4$, $d(u_4) = 3$, $d(u_5) = 4$ e $d(u_6) = 3$. Note que as arestas $e_9 = e_{15} = e_{16}$ e $e_{13} = e_{14}$ são múltiplas. Observe também que a aresta e_{10} é um laço.

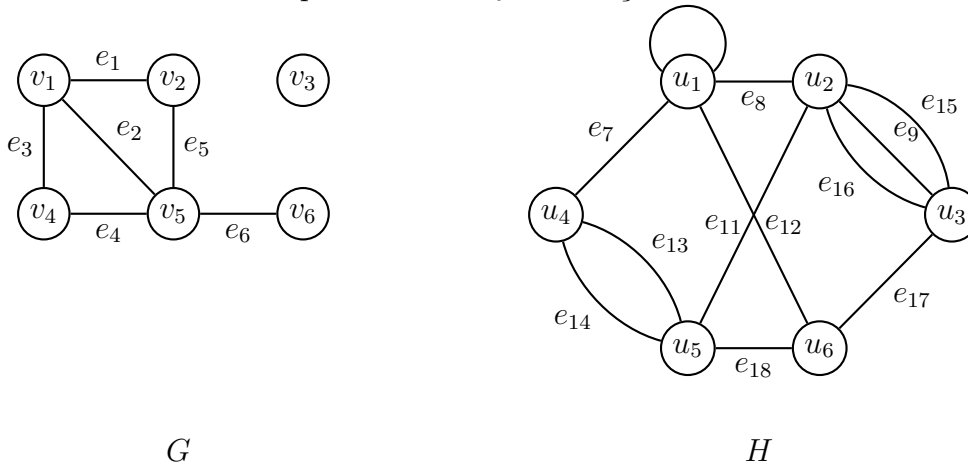


Figura 2.1 Grafo simples e não simples.

Definição 2.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Dizemos ainda que G' é um subgrafo de $G = (V, E)$ induzido pelos vértices V' , se dados dois vértices de V' então eles são adjacentes em G' se e somente se são adjacentes em G .*

Os grafos G' e G'' da Figura 2.2 são subgrafos do grafo G da Figura 2.1. Além disso, o grafo G' é um subgrafo de G induzido pelo vértices $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.



Figura 2.2 Subgrafos de G .

Definição 2.3. Um grafo é dito r -regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau de valor r .

Na Figura 2.3 podemos ver um grafo 4-regular.

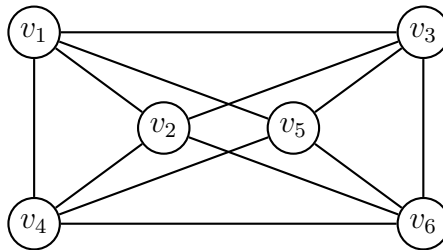


Figura 2.3 Grafo 4-regular.

Definição 2.4. G_1 e G_2 são ditos grafos isomorfos quando existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices de modo que as adjacências sejam preservadas, e denotamos por $G_1 \simeq G_2$. Neste caso, a bijeção é chamada um isomorfismo.

Na Figura 2.4 podemos ver dois grafos isomorfos.

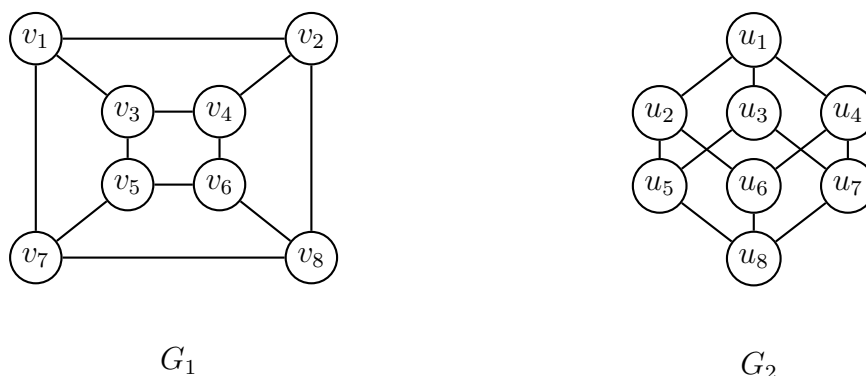


Figura 2.4 Grafos isomorfos ($G_1 \simeq G_2$).

Definição 2.5. Um passeio de v_1 a v_k é uma sequência finita de vértices v_1, v_2, \dots, v_k de um grafo $G = (V, E)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$.

Dizemos que um passeio v_1, v_2, \dots, v_k é fechado se $v_1 = v_k$. Um caminho é um passeio v_1, v_2, \dots, v_k em que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq k$. Um ciclo é um passeio fechado v_1, v_2, \dots, v_k no qual, $v_1 \neq v_l, v_i \neq v_j$, para $i \neq j$ e $2 \leq i, j, l \leq k - 1$. Um caminho e um ciclo com n vértices são denotados por P_n e C_n , respectivamente. O comprimento de um caminho ou de um ciclo é dado pelo número de arestas pelos quais cada um é constituído.

A Figura 2.5 nos dá um exemplo de um caminho com 4 vértices e um ciclo com 5 vértices, respectivamente.

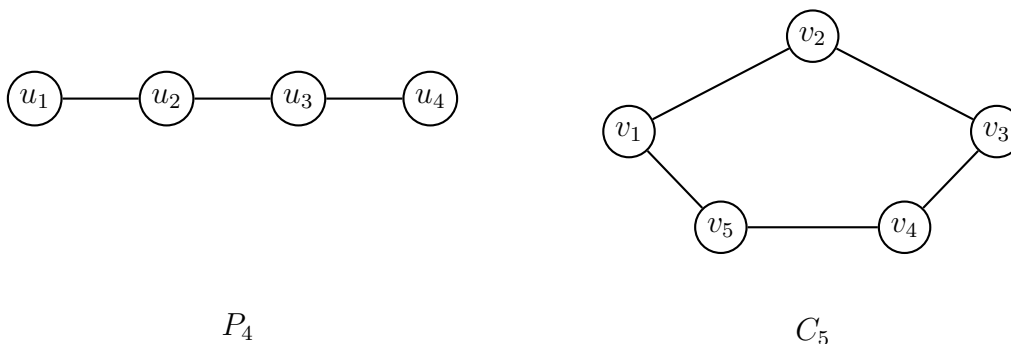


Figura 2.5 Caminho e Ciclo.

Definição 2.6. Dizemos que um grafo é conexo se, dados dois vértices quaisquer, houver pelo menos um caminho que os liga. Caso não haja esse caminho dizemos que o grafo é desconexo.

Na Figura 2.1 temos um exemplo de um grafo desconexo e um conexo, respectivamente.

Definição 2.7. Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo desconexo sem ciclos é chamado de floresta.

O nome floresta é bem sugestivo visto que grafos deste tipo podem ser obtidos através da união de várias árvores.

A Figura 2.6 nos dá um exemplo de floresta formada por três árvores.

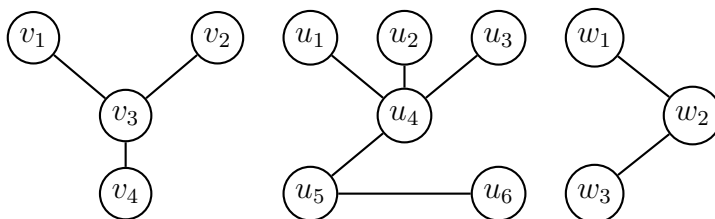


Figura 2.6 Floresta com 3 árvores.

Definição 2.8. Um grafo completo com n vértices é um grafo com todas as arestas possíveis, ou seja, tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, e é denotado por K_n . Um grafo completo quando encarado como um subgrafo é chamado de clique.

A Figura 2.7 exibe o grafo completo com 6 vértices.

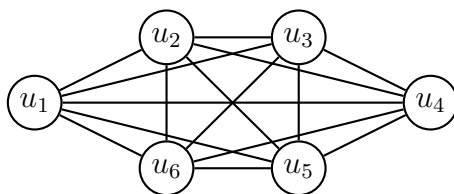


Figura 2.7 K_6 .

Definição 2.9. Um grafo $G = (V, E)$ é k -partido se existe uma partição do conjunto dos vértices em k conjuntos não vazios e disjuntos dois a dois, isto é, $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ com $V_i \cap V_j = \emptyset$, para $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq k$, tais que nenhuma aresta liga vértices do mesmo V_i . Se o grafo k -partido tiver todas as arestas possíveis (sem deixar de ser k -partido, obviamente) então é denominado k -partido completo, e é denotado por $K_{|V_1|, \dots, |V_k|}$. Um caso importante dos grafos k -partidos é quando $k = 2$, neste situação o grafo é chamado de bipartido.

Na Figura 2.8 podemos ver os grafos $K_{3,1,2}$ e $K_{1,3}$, respectivamente. Note ainda que a partição dos vértices de $K_{3,1,2}$ é dada por $V_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V_2 = \{u_4\}$ e $V_3 = \{u_5, u_6\}$. Já a partição dos vértices de $K_{1,3}$ é dada por $V_1' = \{v_1, v_3, v_4\}$ e $V_2' = \{v_2\}$.

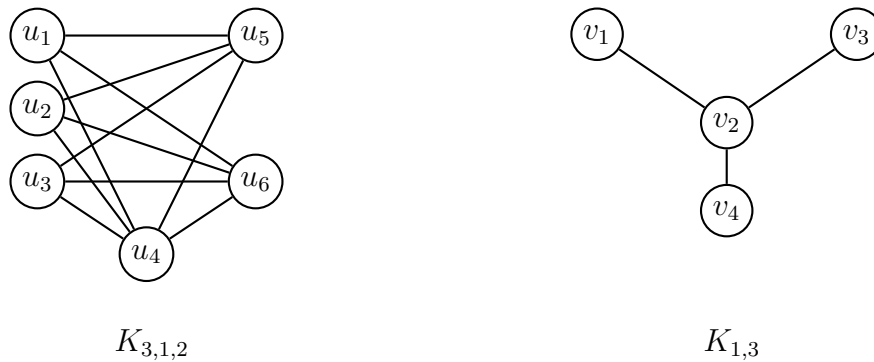


Figura 2.8 Grafo tripartido completo e um bipartido completo.

2.2 Operações com grafos

Nesta seção iremos apresentar as operações que trabalharemos nos capítulos subsequentes, mais precisamente, na construção de grafos integrais, L -integrais e Q -integrais.

Definição 2.10. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. O grafo união (denotado por $G_1 \cup G_2$) é aquele cujos vértices e arestas são $V_1 \cup V_2$ e $E_1 \cup E_2$, respectivamente.

A Figura 2.9 exibe a união de dois grafos.

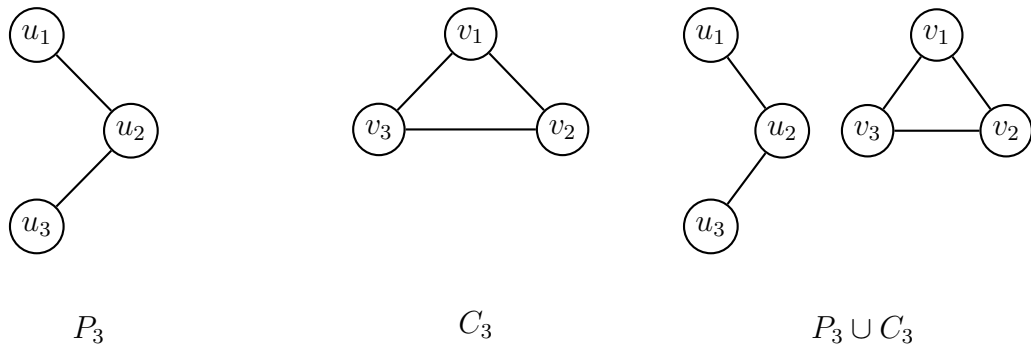


Figura 2.9 Grafo união ($P_3 \cup C_3$).

Definição 2.11. O *join* dos grafos G_1 e G_2 é o grafo obtido de $G_1 \cup G_2$ ligando cada vértice de G_1 a todos os vértices de G_2 e é denotado por $G_1 \vee G_2$.

A Figura 2.10 ilustra o join de dois grafos.

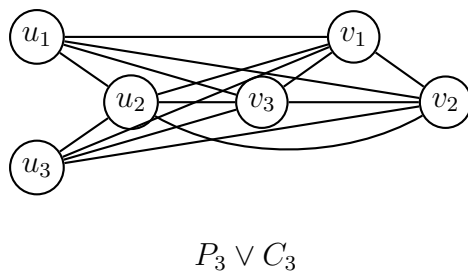


Figura 2.10 Join ($P_3 \vee C_3$).

Definição 2.12. Seja $G = (V, E)$ um grafo, e dois vértices u e v pertencentes a V tal que u e v não são adjacentes. A operação adicionar aresta $e = \{u, v\}$ em G nos dá o grafo que denotamos por $G + e$ cujos conjuntos dos vértices e das arestas são V e $E \cup \{e\}$, respectivamente.

A Figura 2.11 ilustra a adição da aresta e em um grafo G .



Figura 2.11 Adição da aresta e .

A operação inversa da adição de aresta é a remoção de aresta que definiremos a seguir:

Definição 2.13. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo, e u e v dois vértices pertencentes a V tal que u e v são adjacentes. A operação remover aresta $e = \{u, v\}$ em G nos dá o grafo que denotamos por $G - e$ e cujos conjuntos dos vértices e das arestas são V e $E - \{e\}$, respectivamente.*

A Figura 2.12 exemplifica a remoção de uma aresta e em um grafo G .

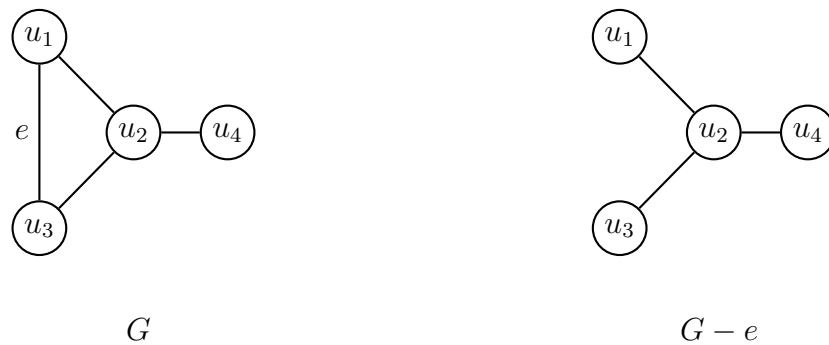


Figura 2.12 Remoção da aresta e .

Definição 2.14. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. O grafo complementar de G , denotado por $\overline{G} = (V, \overline{E})$, é obtido de G de tal forma que $\{u, v\} \in \overline{E}$ se e somente se $\{u, v\} \notin E$.*

A Figura 2.13 exhibe o grafo C_5 e seu complementar $\overline{C_5}$.

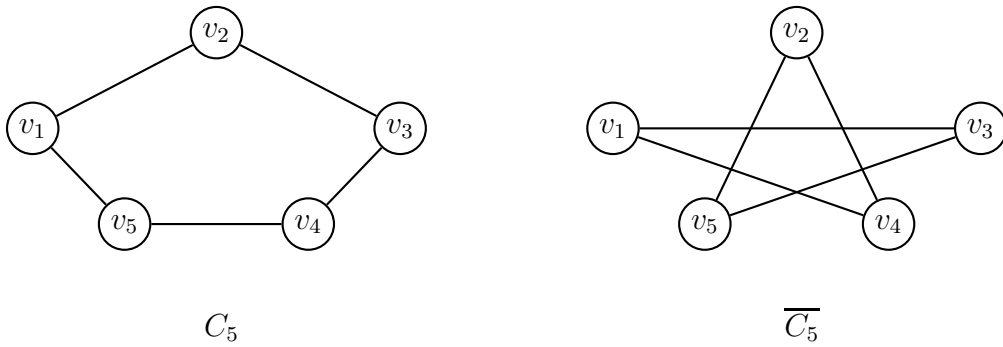


Figura 2.13 Grafo e seu complementar.

Definição 2.15. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. O grafo linha de G , denotado por $\ell(G)$, é o grafo obtido de G tomando as arestas de G como vértices de $\ell(G)$ e dois vértices são ligados em $\ell(G)$ se as arestas correspondentes em G tiverem um vértice em comum.*

A Figura 2.14 ilustra um grafo G e seu grafo linha $\ell(G)$.

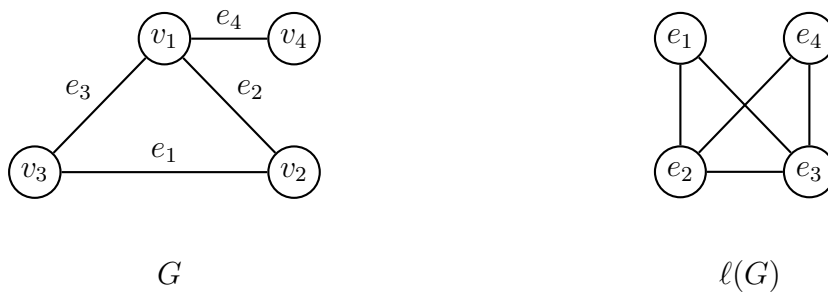


Figura 2.14 Grafo e seu grafo linha.

Todos os conceitos estudados neste capítulo serão importantes para desenvolvermos nosso estudo de integralidade de grafos. Por exemplo, a operação de adição de aresta em um grafo será usada nos Capítulos 4 e 5 para construção de grafos L -integrals. A operação join e os grafos regulares também serão muito explorados no Capítulo 6 para a construção de famílias de grafos Q -integrals.

3 GRAFOS E SUAS REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS

Um grafo pode ser representado de várias maneiras. Os vértices de um grafo são normalmente representados graficamente por pontos e as arestas por ligações entre esses pontos, como no grafo da Figura 3.1. Outra maneira de representar grafos é através de matrizes. Neste capítulo falaremos de algumas dessas matrizes, mais precisamente, das matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal. Mostraremos algumas propriedades sobre os espectros dessas matrizes. Tais propriedades serão fundamentais para desenvolvermos nosso estudo sobre a caracterização e construção de grafos integrais, L -integrais e Q -integrais. As definições e resultados que mostraremos aqui podem ser vistos nas referências [1, 29].

3.1 Conceitos básicos de Álgebra Linear

Nesta seção falaremos de alguns conceitos básicos de Álgebra Linear. E enunciaremos alguns teoremas importantes para o nosso estudo sobre integralidade de grafos.

Definição 3.1. Um vetor $v \neq 0$ é dito um **autovetor** de uma matriz quadrada M se existe um número λ tal que $Mv = \lambda v$. Neste caso dizemos que λ é um **autovalor** da matriz M associado a v .

Note que no exemplo abaixo u e v são autovetores da matriz M associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente,

$$Mu = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } Mv = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.2. O polinômio característico de uma matriz M qualquer é dado por $P_M(\lambda) = \det(\lambda I - M)$.

É fácil ver que λ é um autovalor de uma matriz M se e somente $P_M(\lambda) = 0$. Além disso, dado um autovalor λ_1 de M , se o polinômio $P_M(\lambda)$ for divisível por $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$ e não for divisível por $(\lambda - \lambda_1)^{m_1+1}$ então dizemos que o autovalor λ_1 tem multiplicidade m_1 .

Observe na matriz M do exemplo anterior que o seu polinômio característico é $P_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$.

Definição 3.3. *O espectro de M é o conjunto dos seus autovalores. Denotamos o espectro de M por $\text{Spect}(M) = \{\lambda_1^{(m_1)}, \lambda_2^{(m_2)}, \dots, \lambda_k^{(m_k)}\}$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são os autovalores de M e m_1, m_2, \dots, m_k são suas respectivas multiplicidades.*

Repare que na matriz M do exemplo anterior possui espectro $\text{Spect}(M) = \{1, 2\}$.

O próximo resultado nos ajudará a mostrar uma relação entre o polinômio característico da matriz laplaciana sem sinal associada a um grafo G e o polinômio característico da matriz de adjacência associada ao seu grafo linha $\ell(G)$ (Proposição 3.25).

Teorema 3.4. [1] *Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$ ambas com entradas em \mathbb{R} . Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lambda^m \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_m - AB).$$

O seguinte teorema é primordial para mostrarmos o Teorema 4.4, que nos dá condições necessárias e suficientes para que ocorra variação espectral inteira em um lugar, que será definida no Capítulo 4.

Teorema 3.5. [33] *Dadas duas matrizes simétricas A e B com $\text{Spect}(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e $\text{Spect}(B) = \{\beta, 0, \dots, 0\}$, respectivamente. Então $\text{Spect}(A+B) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k + \beta, \dots, \alpha_n\}$ para algum k se e somente se $AB = BA$.*

O teorema a seguir é um resultado clássico de Álgebra Linear e é usado diversas vezes ao longo deste trabalho. É utilizado por exemplo na Proposição 3.9 da próxima seção. E na prova dos importantes Teoremas 6.9, 6.19 e 6.22.

Teorema 3.6. Teorema Espectral:[29] *Para todo operador linear auto-adjunto $M : E \rightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subseteq E$ formada por autovetores de M .*

Lembrando que todas matrizes simétricas representam operadores lineares auto-adjuntos.

3.2 Matriz de Adjacência

Nesta seção falaremos da matriz de adjacência de um grafo G e de algumas de suas propriedades espectrais. Esta matriz, como o próprio nome nos sugere, é construída através das relações de adjacência entre os vértices de um grafo. Ela é utilizada para obter propriedades estruturais de um grafo através de seu espectro e os coeficientes do seu polinômio característico. Por exemplo é possível saber o número de subgrafos iguais a C_3 que o grafo possui, somente olhando para um dos coeficientes do polinômio característico. Também podemos descobrir o número de passeios de comprimento k ligando dois vértices quaisquer do grafo, olhando somente para uma das entradas da matriz de adjacência elevada na k -ésima potência.

Definição 3.7. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices, com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. A matriz de adjacência de G , denotada por $A(G)$, é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas a_{ij} são:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

A Figura 3.1 exhibe o grafo C_5 e sua matriz de adjacência.

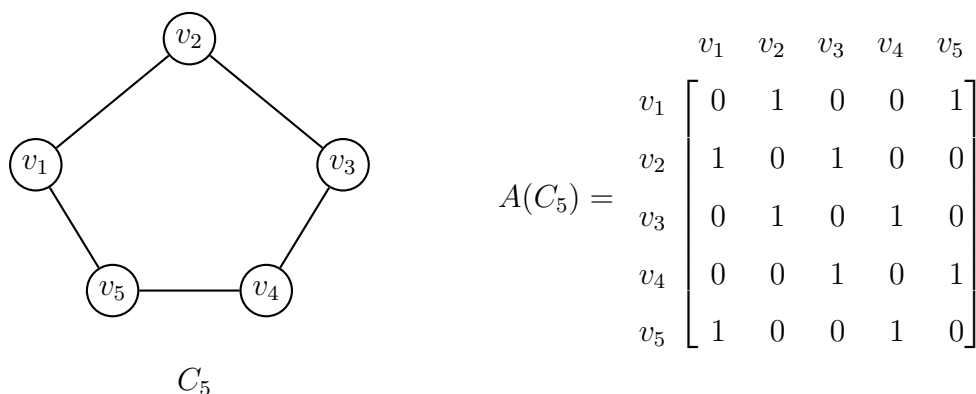


Figura 3.1 Matriz de adjacência de C_5 .

Observe que $A(G)$ é uma matriz real e simétrica cujas entradas são zeros ou uns. Sendo assim, todos seus autovalores são reais. Note ainda que seu traço é nulo, portanto, a soma dos seus autovalores é zero.

Por exemplo, o polinômio característico de C_5 é dado por $P_{A(C_5)}(x) = x^5 - 5x^3 + 5x - 2$. E o espectro de C_5 é $Spect(A(C_5)) = \left\{ 2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}^{(2)}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}^{(2)} \right\}$.

Denotaremos por $\mathbf{1}_n$ o vetor coluna de dimensão n cujas entradas são todas iguais a um. Quando não houver perigo de confusão denotaremos somente por $\mathbf{1}$ e a dimensão do mesmo estará subentendido no contexto em que for usado.

O resultado a seguir nos mostra que, em grafos r -regulares, o valor r é sempre um autovalor de $A(G)$.

Proposição 3.8. *Seja G um grafo r -regular. Então r é um autovalor de $A(G)$.*

Demonstração. Como a soma das entradas de cada linha da matriz de adjacência $A(G)$ é r , temos que $A(G)\mathbf{1} = r\mathbf{1}$, ou seja, r é um autovalor de $A(G)$ associado ao autovetor $\mathbf{1}$. □

A próxima proposição nos diz que há uma relação entre o espectro da matriz de adjacência de um grafo G r -regular dado e o espectro da matriz de adjacência de seu grafo complementar \overline{G} . Com esta relação fica fácil de ver que se

tivermos o espectro da matriz de adjacência de um deles podemos obter o espectro da matriz de adjacência do outro.

Proposição 3.9. *Seja G um grafo r -regular com n vértices e sejam $r, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ os autovalores de $A(G)$. Então os autovalores de $A(\overline{G})$ são $n - r - 1, -1 - \lambda_2, -1 - \lambda_3, \dots, -1 - \lambda_n$ associados aos mesmos autovetores de $A(G)$, respectivamente.*

Demonstração. É fácil verificar que a matriz de adjacência $A(G)$ de G satisfaz $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$, onde J é a matriz quadrada de ordem n em que todas as entradas são iguais a 1. Visto que $A(G)$ é simétrica, o Teorema Espectral 3.6 nos garante que existe uma base $\mathbf{1}, v_2, \dots, v_n$ ortogonal de autovetores de $A(G)$ associados, respectivamente, aos autovalores $r, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Como $A(G)\mathbf{1} = r\mathbf{1}$, então $A(\overline{G})\mathbf{1} = (J - I - A(G))\mathbf{1} = (n - r - 1)\mathbf{1}$, e portanto, $\mathbf{1}$ é um autovetor de $A(\overline{G})$ associado ao autovalor $n - r - 1$. Além disso, para cada i , $2 \leq i \leq n$, $A(\overline{G})v_i = (J - I - A(G))v_i = Jv_i - Iv_i - A(G)v_i = -v_i - \lambda_i v_i = (-1 - \lambda_i)v_i$. Note que a segunda igualdade anterior é válida porque Jv_i tem entradas dadas por $\mathbf{1}v_i = 0$, pois os vetores $\mathbf{1}$ e v_i são ortogonais. Assim segue que v_i é autovetor de $A(\overline{G})$ associado ao autovalor $-1 - \lambda_i$. \square

3.3 Matriz Laplaciana

Nesta seção definiremos a matriz laplaciana de um grafo e mostraremos algumas propriedades do espectro desta matriz. Esta é uma ferramenta importante para obter informações sobre as invariantes de um grafo. Por exemplo, é possível saber o número de componentes conexas que o grafo possui analisando a multiplicidade do autovalor 0 desta matriz. Veremos nesta seção que 0 é sempre um autovalor desta matriz. Outra aplicação importante desta matriz é o Teorema Matriz-árvore [1], que em sua versão espectral nos diz como obter o número de árvores geradoras de um grafo através dos autovalores de sua matriz laplaciana.

Definição 3.10. *Seja G um grafo com n vértices. A matriz laplaciana do grafo G , denotada por $L(G)$, é a matriz quadrada de ordem n dada por $L(G) = D(G) - A(G)$, em que $D(G)$ é a matriz diagonal cujas entradas não nulas são os graus dos vértices, ou seja, $d_{ii} = d(v_i)$, e $A(G)$ é a matriz de adjacência de G . Em outras palavras, $L(G)$ é a matriz quadrada de ordem n tal que as entradas ℓ_{ij} são dadas por*

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E; \\ d(v_i), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

A Figura 3.2 ilustra o grafo $K_{1,3}$ e sua matriz laplaciana.

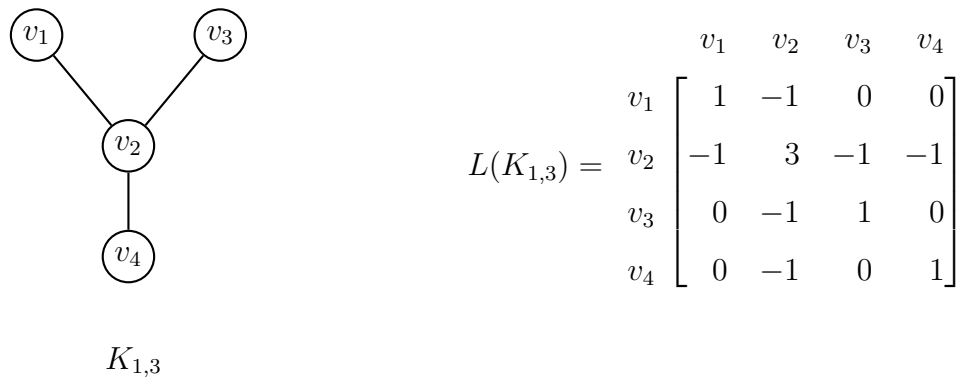


Figura 3.2 Matriz laplaciana de $K_{1,3}$.

Assim como a matriz de adjacência, $L(G)$ é uma matriz real e simétrica, portanto, todos seus autovalores são reais.

Por exemplo, o polinômio característico de $L(K_{1,3})$ é dado por $P_{L(K_{1,3})}(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x$. O espectro da matriz $L(K_{1,3})$ é $Spect(L(K_{1,3})) = \{0, 1^{(2)}, 4\}$.

O resultado a seguir nos mostra que 0 é sempre um autovalor de $L(G)$ associado ao autovetor $\mathbf{1}$.

Proposição 3.11. *Seja G um grafo. Então 0 é um autovalor de $L(G)$.*

Demonstração. Como a soma das entradas de cada linha de $L(G)$ é 0, temos que $L(G)\mathbf{1} = 0\mathbf{1}$, ou seja, 0 é um autovalor de $L(G)$ associado ao autovetor $\mathbf{1}$. \square

A seguir definiremos a matriz de incidência orientada. Esta matriz é definida para um grafo com arestas orientadas. Esta matriz nos será útil para mostrar que os autovalores de $L(G)$ são todos maiores ou iguais a zero.

Definição 3.12. A matriz de incidência orientada de um grafo G com n vértices e m arestas, denotada por $\beta(G)$, é a matriz de ordem $n \times m$ cujas entradas β_{ij} são dadas por:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é o vértice onde chega } e_j; \\ -1, & \text{se } v_i \text{ é o vértice onde parte } e_j; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

A Figura 3.3 exemplifica a matriz de incidência orientada do grafo G .

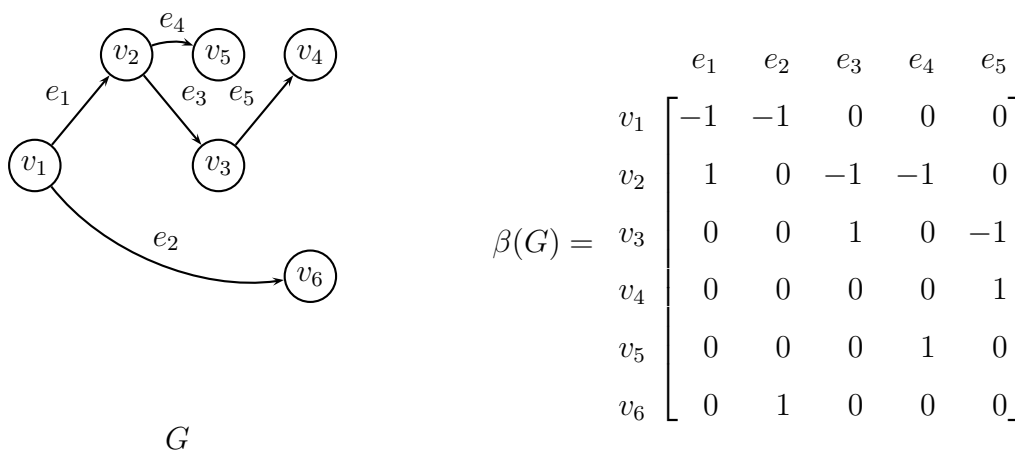


Figura 3.3 Matriz de incidência orientada de G .

Como vimos a matriz de incidência orientada é definida para grafos com arestas orientadas, mas no caso dos grafos simples, podemos escolher uma orientação para as arestas e assim determinar sua matriz de incidência orientada. É claro que

pra cada orientação distinta que escolhermos pra arestas teremos uma matriz de incidência orientada diferente, mas isso não vai interferir no resultado que veremos a seguir, pois independente da matriz de incidência orientada que escolhermos o produto desta matriz de incidência orientada com a sua transposta será sempre a mesma matriz laplaciana. A próxima proposição será fundamental para mostrarmos o Corolário 3.14 que nos afirma que os autovalores de $L(G)$ são todos maiores ou iguais a zero.

Proposição 3.13. *Seja G um grafo. Então $L(G) = \beta(G)\beta(G)^T$.*

Demonstração. Denotemos as entradas da matriz $\beta(G)\beta(G)^T$ por α_{ij} . Note que a matriz $\beta(G)\beta(G)^T$ tem ordem n e a entrada α_{ij} é o produto interno da i -ésima linha de $\beta(G)$ com a j -ésima coluna de $\beta(G)^T$. Logo se $i \neq j$ temos $\alpha_{ij} = -1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e $\alpha_{ij} = 0$ caso contrário. Já para $i = j$ a entrada α_{ij} é o grau do vértice v_i . Logo, pela definição de matriz laplaciana, o resultado segue. \square

O próximo corolário nos afirma que independente do grafo G que tomarmos, o espectro de sua matriz laplaciana é formado sempre por autovalores maiores ou iguais a zero.

Corolário 3.14. *Todos autovalores da matriz laplaciana de um grafo G são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração. Da Proposição 3.13 segue que a matriz $L(G) = \beta(G)\beta(G)^T$. Seja v um autovetor de $L(G)$ associado a μ . Logo temos

$$\begin{aligned} \mu \|v\|^2 &= v^T \mu v = v^T L(G)v = v^T \beta(G)\beta(G)^T v = (\beta(G)^T v)^T \beta(G)^T v \\ &= \|\beta(G)^T v\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Assim $\mu \|v\|^2 \geq 0$. Portanto, $\mu \geq 0$. \square

Observação 3.15. *A partir de um resultado clássico do espectro da matriz laplaciana do join de grafos (veja Corolário de 9.25 [30]), encontramos então que $G = K_p \vee (H_1 \cup \dots \cup H_q)$ tem p como um autovalor de multiplicidade $q - 1$, enquanto o restante dos autovalores diferentes de zero de G são da forma $\lambda + p$, onde λ é um autovalor não-nulo de algum H_i . Além disso, cada autovetor associado a λ em $L(H_i)$ pode ser estendido para um autovetor associado a $\lambda + p$ de $L(G)$ acrescentando zeros nas posições correspondentes aos vértices do grafo G removendo os vértices de H_i .*

Teorema 3.16. *[1] O número de componentes conexas de um grafo coincide exatamente com a multiplicidade do autovalor 0 da matriz laplaciana.*

3.4 Matriz Laplaciana Sem Sinal

Nesta seção falaremos sobre a matriz laplaciana sem sinal. Esta matriz, dentre todas outras mencionadas anteriormente, tem assumido papel relevante dentro da Teoria Espectral de Grafos pois há fortes indícios experimentais, de acordo com os resultados apresentados em [23, 36], de que o espectro dessa matriz associado ao grafo descreve de maneira mais clara as propriedades estruturais do mesmo. Por isso há um crescente interesse dos pesquisadores em estudar o comportamento dos autovalores desta matriz. Veremos a seguir algumas propriedades do espectro dessa matriz.

Definição 3.17. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices. A matriz laplaciana sem sinal do grafo G , denotada por $Q(G)$, é a matriz quadrada de ordem n dada por $Q(G) = D(G) + A(G)$. Em outras palavras, $Q(G)$ é a matriz quadrada de ordem n tal que as entradas q_{ij} são dadas por*

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E; \\ d(v_i), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

A Figura 3.4 ilustra o grafo P_4 e sua matriz laplaciana sem sinal.

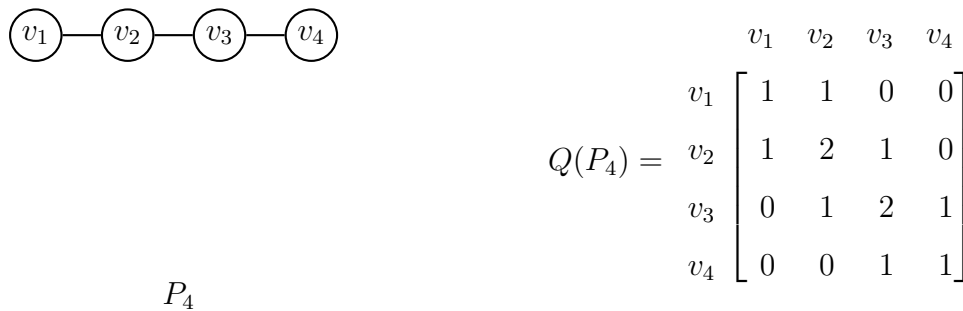


Figura 3.4 Matriz laplaciana sem sinal de P_4 .

Igualmente às duas matrizes que definimos anteriormente, a matriz laplaciana sem sinal é uma matriz real e simétrica, tendo assim todos seus autovalores reais.

Por exemplo, o polinômio característico de $Q(P_4)$ é dado por $P_{Q(P_4)}(x) = x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 4x$. O espectro de $Q(P_4)$ é $Spect(Q(P_4)) = \{0, 2, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$.

Na matriz de adjacência, r é sempre um autovalor de $A(G)$ quando G é r -regular. Na matriz laplaciana sem sinal acontece algo parecido, só que neste caso $2r$ é sempre um autovalor de $Q(G)$ quando G é r -regular. O próximo resultado nos mostra este fato.

Proposição 3.18. *Seja G um grafo r -regular. Então $2r$ é um autovalor de $Q(G)$ associado ao autovetor $\mathbf{1}$.*

Demonstração. Como a soma das entradas de cada linha de $Q(G)$ é $2r$, temos que $Q(G)\mathbf{1} = 2r\mathbf{1}$, ou seja, $2r$ é um autovalor de $Q(G)$ associado ao autovetor $\mathbf{1}$. \square

Um grafo G r -regular é bem comportado, no sentido que o espectro de suas matrizes ($A(G)$, $L(G)$ e $Q(G)$) estão diretamente relacionados. O resultado a seguir mostra como é essa relação.

Proposição 3.19. *Seja G um grafo r -regular. Então temos que*

$$(i) \quad P_{A(G)}(\lambda) = P_{Q(G)}(\lambda + r)$$

$$(ii) \quad P_{L(G)}(\lambda) = (-1)^n P_{Q(G)}(2r - \lambda).$$

Demonstração. Para provar (i), note que $A(G) = Q(G) - D(G) = Q(G) - rI$, portanto, temos que

$$\begin{aligned} P_{A(G)}(\lambda) &= \det(\lambda I - A(G)) = \det(\lambda I - Q(G) + rI) \\ &= \det((r + \lambda)I - Q(G)) = P_{Q(G)}(\lambda + r). \end{aligned}$$

Já para provar (ii), basta observar que $L(G) = 2D(G) - Q(G) = 2rI - Q(G)$. Segue que

$$\begin{aligned} P_{L(G)}(\lambda) &= \det(\lambda I - L(G)) = \det(\lambda I - 2rI + Q(G)) \\ &= \det((-I)(-\lambda I + 2rI - Q(G))) \\ &= \det(-I)\det(-\lambda I + 2rI - Q(G)) = (-1)^n \det((2r - \lambda)I - Q(G)) \\ &= (-1)^n P_{Q(G)}(2r - \lambda). \end{aligned}$$

□

Em grafos bipartidos a matriz laplaciana sem sinal não nos dá nenhuma informação diferente se comparada com a matriz laplaciana, pois seus espectros coincidem. Por exemplo, em árvores tanto faz estudar o espectro da laplaciana ou da laplaciana sem sinal. O próximo resultado nos mostra isso.

Proposição 3.20. *Para grafos bipartidos, o espectro da matriz laplaciana sem sinal é igual ao espectro da laplaciana, ou seja, para todo i , $1 \leq i \leq n$, $q_i = \mu_i$, onde q_i e μ_i são os autovalores das matrizes laplaciana sem sinal e laplaciana, respectivamente.*

Demonstração. Como G é bipartido, por definição, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 (com $V_1 = \{v_1, \dots, v_{n_1}\}$ e $V_2 = \{w_1, \dots, w_{n_2}\}$) tais que se dois vértices são adjacentes então eles estão em subconjuntos distintos. Seja U a matriz diagonal com $u_{ii} = 1$, se $v_i \in V_1$ e $u_{ii} = -1$, se $w_i \in V_2$. Sejam $A(G)$ a matriz de adjacência, e $D(G)$ a matriz diagonal dos graus dos vértices de G . Sendo $D(G)$ e U ambas matrizes diagonais, elas comutam entre si. Além disso, é fácil mostrar que U é inversível com $U^{-1} = U$ e que $UA(G)U^{-1} = -A(G)$. De fato, observe que as matrizes $A(G)$ e U têm o seguinte aspecto

$$A(G) = \begin{array}{c} v_1 \dots v_{n_1} \quad w_1 \dots w_{n_2} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n_2} \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{array}{c} v_1 \dots v_{n_1} \quad w_1 \dots w_{n_2} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n_2} \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

no qual, o bloco M_{n_1, n_2} representa as adjacências entre V_1 e V_2 . Primeiramente note que U inversível.

$$\begin{aligned} UU &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & O_{n_1, n_2} \\ O_{n_2, n_1} & -I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & O_{n_1, n_2} \\ O_{n_2, n_1} & -I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} I_{n_1} + O_{n_1, n_2} & O_{n_2, n_1} I_{n_1} O_{n_1, n_2} - O_{n_1, n_2} I_{n_2} \\ O_{n_2, n_1} I_{n_1} - I_{n_2} O_{n_2, n_1} & O_{n_2, n_1} O_{n_1, n_2} + I_{n_2} I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & O_{n_1, n_2} \\ O_{n_2, n_1} & I_{n_2} \end{bmatrix} = I_{n_1 + n_2}. \end{aligned}$$

Continuando temos

$$\begin{aligned} UA(G) &= \begin{bmatrix} I_{n_1}O_{n_1} + O_{n_1,n_2}M_{n_2,n_1} & I_{n_1}M_{n_1,n_2} + O_{n_1,n_2}O_{n_2} \\ O_{n_2,n_1}O_{n_1} - I_{n_2}M_{n_2,n_1} & O_{n_2,n_1}M_{n_1,n_2} - I_{n_2}O_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_{n_1} & M_{n_1,n_2} \\ -M_{n_2,n_1} & O_{n_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} UA(G)U &= \begin{bmatrix} O_{n_1} & M_{n_1,n_2} \\ -M_{n_2,n_1} & O_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & O_{n_1,n_2} \\ O_{n_2,n_1} & -I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_{n_1}I_{n_1} + M_{n_1,n_2}O_{n_2,n_1} & O_{n_1}O_{n_1,n_2} - M_{n_1,n_2}I_{n_2} \\ -M_{n_2,n_1}I_{n_1} + O_{n_2}O_{n_2,n_1} & -M_{n_2,n_1}O_{n_1,n_2} - O_{n_2}I_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_{n_1} & -M_{n_1,n_2} \\ -M_{n_2,n_1} & O_{n_2} \end{bmatrix} = -A(G). \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $L(G)$ e $Q(G)$ são semelhantes, consequentemente elas têm o mesmo polinômio característico. Portanto $L(G)$ e $Q(G)$ vão ter o mesmo espectro.

$$\begin{aligned} UL(G)U^{-1} &= UL(G)U = U(D(G) - A(G))U = UD(G)U - UA(G)U \\ &= UUD(G) - (-A(G)) = D(G) + A(G) = Q(G). \end{aligned}$$

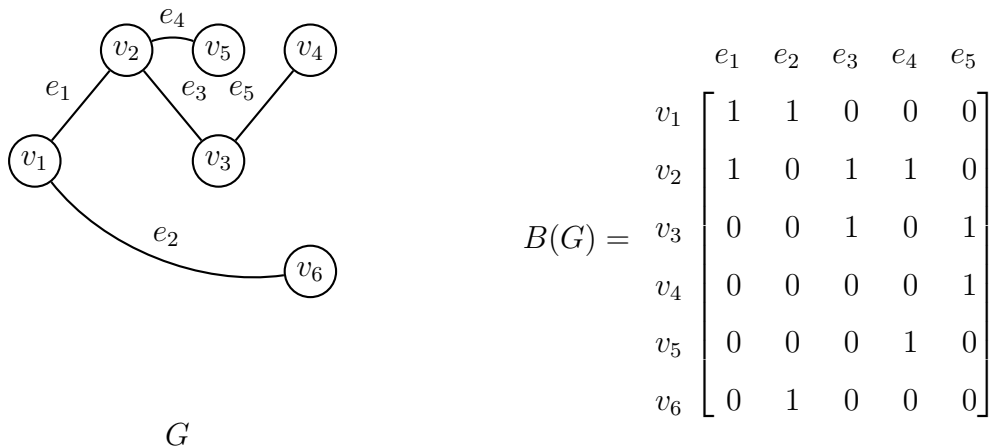
□

Assim como a matriz laplaciana, a matriz laplaciana sem sinal pode ser escrita como o produto de duas matrizes com uma sendo a tranposta da outra, e por consequência disto todos seus autovalores são maiores ou iguais a zero. Para isto definiremos a matriz de incidência.

Definição 3.21. *A matriz de incidência de um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$, denotada por $B(G)$, é a matriz de ordem $n \times m$ cujas entradas b_{ij} são dadas por:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ é uma aresta incidente no vértice } v_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Figura 3.5 exemplifica a matriz de incidência de um grafo.



$$B(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 3.5 Matriz de incidência de G .

O Corolário 3.23 decorre da proposição a seguir.

Proposição 3.22. *Seja G um grafo com n vértices. Então $B(G)B(G)^T = Q(G)$.*

Demonstração. Denotemos as entradas da matriz $B(G)B(G)^T$ por β_{ij} . Seja $D(G)$ a matriz dos graus de G . Note que a matriz $B(G)B(G)^T$ tem ordem n e a entrada β_{ij} é o produto interno da i -ésima linha de $B(G)$ com j -ésima coluna de $B(G)^T$. Logo se $i \neq j$ temos $\beta_{ij} = 1$ se a aresta v_i e v_j são adjacentes e $\beta_{ij} = 0$ caso contrário. Já se $i = j$ a entrada β_{ij} é o grau do vértice v_i e o resultado segue. \square

O resultado a seguir nos mostra que os autovalores da matriz laplaciana sem sinal de um grafo G qualquer são todos maiores ou iguais a zero.

Corolário 3.23. *Todos autovalores da matriz laplaciana sem sinal de um grafo G são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração. Da Proposição 3.22 segue que a matriz $Q(G) = B(G)B(G)^T$. Seja v um autovetor de $Q(G)$ associado a β . Logo temos

$$\begin{aligned}\beta \|v\|^2 &= v^T \beta v = v^T Q(G)v = v^T B(G)B(G)^T v = (B(G)^T v)^T B(G)^T v \\ &= \|B(G)^T v\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\beta \|v\|^2 \geq 0$. Logo $\beta \geq 0$. □

A proposição abaixo nos ajudará a provar uma relação existente entre o polinômio característico da matriz de laplaciana sem sinal de um grafo e o polinômio característico da matriz de adjacência de seu grafo linha (ver Proposição 3.25).

Proposição 3.24. *Seja G um grafo com m arestas. Então $B(G)^T B(G) = 2I_m + A(\ell(G))$.*

Demonstração. Denotemos as entradas da matriz $B(G)^T B(G)$ por α_{ij} . Note que a matriz $B(G)^T B(G)$ tem ordem m e a entrada α_{ij} é o produto interno da i -ésima linha de $B(G)^T$ com j -ésima coluna de $B(G)$. Logo se $i \neq j$ temos $\alpha_{ij} = 1$ se as arestas e_i e e_j incidem em um mesmo vértice e $\alpha_{ij} = 0$ caso contrário. Como a soma das entradas de cada linha da matriz $B(G)^T$ e a soma das entradas da respectiva coluna de $B(G)$ é 2, temos que para $i = j$ a entrada $\alpha_{ij} = 2$. Logo, pela definição de grafo linha e de matriz de adjacência, o resultado segue. □

O próximo resultado mostra que o espectro da matriz laplaciana sem sinal de um grafo G está relacionado com o espectro da matriz de adjacência do seu grafo linha $\ell(G)$.

Proposição 3.25. *Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Então temos $P_{A(\ell(G))}(\lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} P_{Q(G)}(\lambda + 2)$.*

Demonstração. A prova deste resultado segue das duas identidades $B(G)B(G)^T = Q(G)$ e $B(G)^T B(G) = 2I_m + A(\ell(G))$ oriundas das Proposições 3.24 e 3.22. Pelo Teorema 3.4 temos que

$$(\lambda^{m-n})\det(\lambda I_n - B(G)B(G)^T) = \det(\lambda I_m - B(G)^T B(G) -)$$

$$(\lambda^{m-n})\det(\lambda I_n - Q(G)) = \det(\lambda I_m - A(\ell(G)) - 2I_m)$$

$$(\lambda^{m-n})P_{Q(G)}(\lambda) = \det((-2 + \lambda)I_m - A(\ell(G)))$$

$$(\lambda^{m-n})P_{Q(G)}(\lambda) = P_{A(\ell(G))}(-2 + \lambda).$$

Fazendo a mudança de variável $\lambda' = -2 + \lambda$ obtemos $P_{A(\ell(G))}(\lambda') = (\lambda' + 2)^{m-n}P_{Q(G)}(\lambda' + 2)$. \square

Todos os resultados que vimos neste capítulo serão fundamentais para o nosso estudo da integralidade dos grafos. Por exemplo, com auxílio da Proposição 3.25 poderemos mostrar que se um grafo tiver o espectro em relação à matriz laplaciana sem sinal formado somente por inteiros, automaticamente seu grafo linha terá o espectro da sua matriz de adjacência formado por inteiros. Com a ajuda da Proposição 3.19 será possível mostrar que se um grafo for regular e tiver o espectro em relação a uma das matrizes formado somente por inteiros, consequentemente terá o espectro em relação às matrizes remanescentes formado somente por inteiros também. No próximo capítulo estudaremos os grafos L -inteiros que são os grafos que têm espectro da matriz laplaciana formado por inteiros, veremos basicamente como construir grafos L -inteiros via adição de aresta.

4 VARIAÇÃO ESPECTRAL INTEIRA

Neste capítulo estudaremos quando o espectro da matriz laplaciana varia de maneira inteira quando adicionamos uma aresta e em um grafo G , mais precisamente, estudaremos quando a diferença entre o autovalor α_i de $L(G)$ e o correspondente autovalor β_i de $L(G + e)$ é um número inteiro. Quando $\alpha_i - \beta_i$ é um número inteiro para todo i dizemos que ocorreu variação espectral inteira via adição da aresta e . Veremos aqui condições necessárias e suficientes para que ocorra as variações espectrais integrais em um e dois lugares. Estes resultados serão essenciais para no próximo capítulo estabelecermos uma estratégia para a construção de grafos L -integrais por adição de aresta. O resultados que estudaremos aqui podem ser vistos em [26, 33].

4.1 Variação espectral inteira

Teorema 4.1. (*Entrelaçamento*)[37] *Seja G um grafo com n vértices tal que $Spect(L(G)) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ e $Spect(L(G + e)) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ e $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$. Então temos que*

$$\lambda_1 \leq \beta_1 \leq \lambda_2 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \beta_n.$$

Definição 4.2. *Seja G um grafo com n vértices. Considere uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ (com v_1 e v_2 vértices não adjacentes de G) que é adicionada em G . Considere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ os autovalores de $L(G)$ e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ os autovalores de $L(G + e)$. Dizemos que variação espectral inteira ocorre se $\alpha_i - \beta_i$ é um número inteiro para todo i pertencente a $\{1, \dots, n\}$.*

O próximo resultado nos diz que se variação espectral inteira ocorre, então no máximo dois autovalores mudam.

Proposição 4.3. *Seja G um grafo com n vértices. Considere uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ (com v_1 e v_2 vértices não adjacentes de G) que é adicionada em G . Se a variação espectral inteira ocorre então somente uma das duas situações acontece:*

a) *Um autovalor de $L(G)$ aumenta em duas unidades.*

b) *Dois autovalores de $L(G)$ aumentam em uma unidade.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ os autovalores de $L(G)$ e β_1, \dots, β_n os autovalores de $L(G + e)$. A matriz laplaciana de G tem o seguinte aspecto

$$L(G) = \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & \ell_{1n} \\ 0 & d(v_2) & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} L(G + e) &= \begin{bmatrix} d(v_1) + 1 & -1 & \cdots & \ell_{1n} \\ -1 & d(v_2) + 1 & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & \ell_{1n} \\ 0 & d(v_2) & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela linearidade do traço, segue que $Tr(L(G + e)) = Tr(L(G)) + 2$.

Como sabemos por resultados de Álgebra Linear que o traço de uma matriz é igual à soma de seus autovalores, assim temos $\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i + 2$, que implica que $\sum_{i=1}^n \beta_i - \alpha_i = 2$. O Teorema do Entrelaçamento 4.1 nos garante que para todo i temos $\beta_i \geq \alpha_i$, ou seja, $\beta_i - \alpha_i \geq 0$. Assim, dado $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, seis situações podem ocorrer.

$$(1) 0 < \beta_i - \alpha_i < 1$$

$$(3) 2 < \beta_i - \alpha_i$$

$$(2) 1 < \beta_i - \alpha_i < 2$$

$$(4) \beta_i - \alpha_i = 0$$

$$(5) \beta_i - \alpha_i = 1$$

$$(6) \beta_i - \alpha_i = 2$$

Repare que a situação (1) não pode ocorrer, pois por hipótese $\beta_i - \alpha_i$ é um número inteiro. Análogo pra situação (2). A situação (3) também não pode ocorrer pois se houvesse um $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $2 < \beta_j - \alpha_j$, teríamos que $\sum_{i=1}^n \beta_i - \alpha_i > 2$ visto que para todo i temos $\beta_i - \alpha_i \geq 0$, assim chegamos em uma contradição. Portanto, para obtermos $\sum_{i=1}^n \beta_i - \alpha_i = 2$, existem dois e somente dois índices k e j distintos pertencentes a $\{1, 2, \dots, n\}$ tais que (5) acontece e o restante das parcelas é nula, ou existe um único l tal que (6) ocorre e as parcelas que sobram são iguais a zero. \square

As situações a) e b) da proposição acima são conhecidas como variação espectral inteira em um lugar e variação espectral inteira em dois lugares, respectivamente. Nas próximas seções veremos resultados que nos dão condições necessárias e suficientes para que ocorram as variações espectrais inteiras em um e dois lugares.

4.2 Variação espectral inteira em um lugar

A partir desta seção o k -ésimo vetor coluna da base canônica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

será denotado por e_k , em outras palavras, e_k é o vetor de dimensão n cuja k -ésima entrada é igual a 1 e as outras são todas iguais a zero.

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que ocorra a variação espectral inteira em um lugar.

Teorema 4.4. [33] *Seja G um grafo tal que os vértices v_1 e v_2 não são adjacentes. Então a variação espectral inteira ocorre em um lugar por adição de uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ se somente se os vértices v_1 e v_2 têm os mesmos vizinhos em G . Neste caso, o autovalor de $L(G)$ que aumenta tem valor igual ao grau do vértice v_1 . Além disso, o vetor $e_1 - e_2$ é um autovetor de $L(G)$ e $L(G + e)$ associado $d(v_1)$ e $d(v_1) + 2$, respectivamente.*

Antes de vermos a demonstração do Teorema 4.4 observemos um exemplo de uma variação espectral inteira em um lugar.

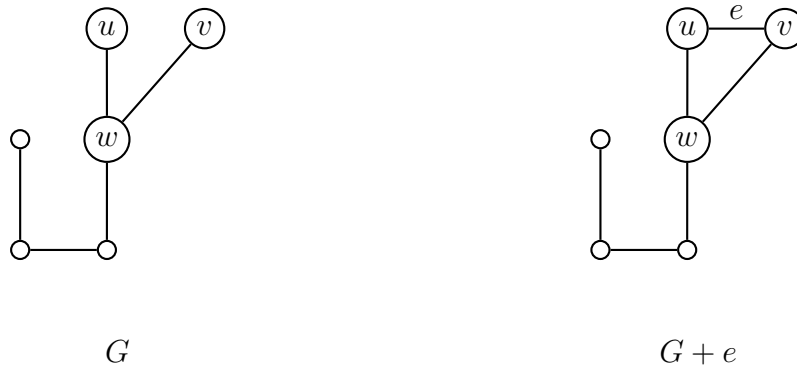


Figura 4.1 Variação espectral inteira em um lugar.

Note na Figura 4.1 os vértices u e v têm só o vértice w como vizinho em G , portanto, pelo Teorema 4.4, um dos autovalores de G deve aumentar em duas unidades quando adicionarmos a aresta $e = \{u, v\}$. De fato, temos que $Spect(L(G)) = \{0, 1, 3, 0.3248, 1.4608, 4.2143\}$ e $Spect(L(G + e)) = \{0, 3, 3, 0.3248, 1.4608, 4.2143\}$. Observe que o autovalor 1 aumentou em duas unidades.

Demonstração. Para provar este resultado usaremos o Teorema 3.5. Note que

$$L(G + e) = \begin{bmatrix} d(v_1) + 1 & -1 & \cdots & \ell_{1n} \\ -1 & d(v_2) + 1 & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & \ell_{1n} \\ 0 & d(v_2) & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & \ell_{1n} \\ 0 & d(v_2) & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos que o espectro de A é $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e note que o espectro de B é $\{2, 0, 0, \dots, 0\}$.

Mostraremos que o produto de A e B comuta se e somente $N(v_1) = N(v_2)$. De fato,

$$AB = \begin{bmatrix} d(v_1) & -d(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -d(v_2) & d(v_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} - \ell_{32} & -\ell_{31} + \ell_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} - \ell_{n2} & -\ell_{n1} + \ell_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} d(v_1) & -d(v_2) & \ell_{13} - \ell_{23} & \cdots & \ell_{1n} - \ell_{2n} \\ -d(v_1) & d(v_2) & -\ell_{13} + \ell_{23} & \cdots & -\ell_{1n} + \ell_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora é fácil ver que $AB = BA$ se e somente se

$$\begin{aligned}
 AB = BA &= \begin{bmatrix} d(v_1) & -d(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -d(v_2) & d(v_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} - \ell_{32} & -\ell_{31} + \ell_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} - \ell_{n2} & -\ell_{n1} + \ell_{n2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} d(v_1) & -d(v_2) & \ell_{13} - \ell_{23} & \cdots & \ell_{1n} - \ell_{2n} \\ -d(v_1) & d(v_2) & -\ell_{13} + \ell_{23} & \cdots & -\ell_{1n} + \ell_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

ou seja, se $d(v_1) = d(v_2)$ e $\ell_{1j} = \ell_{2j}$ para $j \in \{3, \dots, n\}$, ou seja, $N(v_1) = N(v_2)$. Portanto, usando o fato das matrizes A e B comutarem e o Teorema 3.5, concluímos que $Spect(A + B) = Spect(L(G + e)) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k + 2, \dots, \alpha_n\}$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 L(G)(e_1 - e_2) &= \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & \ell_{1n} \\ 0 & d(v_2) & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} d(v_1) \\ -d(v_2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(v_1) \\ -d(v_1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = d(v_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L(G + e)(e_1 - e_2) &= \begin{bmatrix} d(v_1) + 1 & -1 & \cdots & \ell_{1n} \\ -1 & d(v_2) + 1 & \cdots & \ell_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & d(v_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d(v_1) + 2 \\ -d(v_2) - 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(v_1) + 2 \\ -d(v_1) - 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= (d(v_1) + 2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Com os cálculos que acabamos de fazer, podemos concluir ainda que o autovalor que aumenta em duas unidades nessa variação espectral inteira é igual ao grau dos vértices v_1 e v_2 , ou seja, $\alpha_k = d(v_1)$. \square

4.3 Variação espectral inteira em dois lugares

A seguir provaremos alguns resultados auxiliares que nos ajudarão a provar o Teorema 4.11, que é o resultado mais importante desta seção.

Lema 4.5. *Seja G um grafo com n vértices. Suponha que $L(G)$ e $L(G + e) = L(G) + (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T$ compartilham $n - 2$ autovalores incluindo as multiplicidades.*

Então existe uma base ortonormal de autovetores de $L(G)$ tal que $n - 2$ destes autovetores são ortogonais a $e_1 - e_2$.

Demonstração. Seja $L(G) = S^T D S$, onde S é a matriz ortogonal tal que as colunas são formadas pelos autovetores de $L(G)$ e D é matriz diagonal com os correspondentes autovalores. Seja λ um autovalor comum de $L(G)$ e $L(G + e)$. Seja m o mínimo das multiplicidades de λ . Mostraremos que existe uma coleção de m de autovetores de $L(G)$ ortonormais associados a λ ortogonais $e_1 - e_2$. Note que se todo autovetor v de $L(G + e)$ associado a λ é ortogonal a $e_1 - e_2$, então v também será um autovetor de $L(G)$, pois $(e_1 - e_2)^T v = v_1 - v_2 = 0$ e $L(G)v = L(G)v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T v = L(G + e)v = \lambda v$. Assim, temos m autovetores de $L(G)$ ortonormais associados a λ e ortogonais $e_1 - e_2$. Repetindo esse raciocínio para cada autovalor comum de $L(G)$ e $L(G + e)$, o resultado segue. Agora suponha que existe v um autovetor de $L(G + e)$ associado a λ tal que $(e_1 - e_2)^T v = v_1 - v_2 \neq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} L(G + e)v &= L(G)v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T v \\ \lambda v &= S D S^T v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T v \\ \lambda v &= S D S^T v + (v_1 - v_2)(e_1 - e_2) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (4.1) por S^T à esquerda, temos

$$S^T(\lambda I - S D S^T)v = (v_1 - v_2)S^T(e_1 - e_2) = (\lambda I - D)S^T v.$$

Observe que $\lambda I - D$ tem pelo menos m linhas nulas e que as linhas de S^T correspondentes às linhas nulas de $\lambda I - D$ são autovetores de $L(G)$ associados a λ . Como $v_1 - v_2 \neq 0$, olhando para $(\lambda I - D)S^T v = (v_1 - v_2)S^T(e_1 - e_2)$ concluímos que existem m colunas de S tais que cada uma é um autovetor de $L(G)$ associado a λ e todas são ortogonais ao vetor $e_1 - e_2$ como desejado. Aplicando o argumento acima a cada autovalor de $L(G)$ e $L(G + e)$, o resultado segue. \square

Teorema 4.6. *Seja G um grafo com n vértices. Suponha que adicionamos a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ em G (com os vértices v_1 e v_2 não adjacentes, obviamente). Então ocorre variação espectral inteira em dois lugares, com os autovalores λ_1 e λ_2 aumentando por 1 (podemos supor sem perda de generalidade que $\lambda_2 \geq \lambda_1$) se e somente se existe uma base B de autovetores de $L(G)$ que satisfaz as três condições abaixo:*

(1) *Para $n-2$ autovetores em B , as duas primeiras entradas são iguais;*

(2) *Existe um autovetor unitário em B associado a λ_1 da forma*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ u \end{bmatrix}$$

em que $(a_1 - b_1)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$;

(3) *Existe um autovetor unitário em B associado a λ_2 da forma*

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ w \end{bmatrix}$$

em que $(a_2 - b_2)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$;

Demonstração. Supondo que a variação espectral inteira ocorre em dois lugares, temos que a $L(G)$ e $L(G + e)$ compartilham $n - 2$ autovalores, logo pelo Lema 4.5 existe uma base de $L(G)$ que satisfaz a condição (1). Note que $L(G + e) = L(G) + (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T$ e $L(G) = S^T \Lambda S$, no qual S é a matriz ortonormal cujas colunas são os mesmos autovetores de B e Λ é a matriz diagonal dos autovalores de $L(G)$. Tomemos autovetores

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ u \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ w \end{bmatrix}$$

associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente.

Seja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \lambda_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix}$$

onde Δ é a matriz diagonal que contém a os $n - 2$ autovalores comuns entre $L(G)$ e $L(G + e)$.

Permutando, se necessário, as colunas de S de tal maneira que as duas primeiras colunas sejam w_1 e w_2 , temos

$$\begin{aligned} S^T L(G + e) S &= S^T S \Lambda S^T S + S^T (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T S \\ &= \Lambda + S^T (e_1 - e_2)(e_1 - e_2)^T S \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \lambda_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \lambda_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_1 - b_1)^2 & (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) & \mathbf{0} \\ (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) & (a_2 - b_2)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 + (a_1 - b_1)^2 & (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) & \mathbf{0} \\ (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) & \lambda_2 + (a_2 - b_2)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Tomemos } A = \begin{bmatrix} \lambda_1 + (a_1 - b_1)^2 & (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \\ (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) & \lambda_2 + (a_2 - b_2)^2 \end{bmatrix}.$$

Como $L(G + e)$ e $S^T L(G + e)S$ são semelhantes, temos que possuem os mesmos autovalores. Portanto, os autovalores $\lambda_1 + 1$ e $\lambda_2 + 1$ de $L(G + e)$ são raízes de

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\lambda_1 + (a_1 - b_1)^2 + \lambda_2 + (a_2 - b_2)^2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + \lambda_2(a_1 - b_1)^2.$$

Logo, pelas relações de Girard, mais especificamente, pelo produto das raízes segue que

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + \lambda_2(a_1 - b_1)^2 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + \lambda_2(a_1 - b_1)^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 1 &= \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + \lambda_2(a_1 - b_1)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

e além disso, pela soma das raízes

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 &= \lambda_1 + (a_1 - b_1)^2 + \lambda_2 + (a_2 - b_2)^2 \\ 2 &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Trabalhando com as equações (4.2) e (4.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 1 &= \lambda_1(2 - (a_1 - b_1)^2) + \lambda_2(a_1 - b_1)^2 \\ &= 2\lambda_1 - \lambda_1(a_1 - b_1)^2 + \lambda_2(a_1 - b_1)^2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(a_1 - b_1)^2 + 2\lambda_1 \end{aligned}$$

$$\text{logo } (a_1 - b_1)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Fazendo cálculos parecidos aos feitos acima temos:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + 1 &= \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + \lambda_2(2 - (a_2 - b_2)^2) \\
&= \lambda_1(a_2 - b_2)^2 + 2\lambda_2 - \lambda_2(a_2 - b_2)^2 \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)(a_2 - b_2)^2 + 2\lambda_2
\end{aligned}$$

portanto, $(a_2 - b_2)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Seja S a matriz cujas colunas são os vetores de B . Note que $L(G + e)$ e $S^T L(G + e)S$ são semelhantes, e usando as condições (1),(2) e (3), temos que:

$$\begin{aligned}
S^T L(G + e)S &= \begin{bmatrix} \lambda_1 + (a_1 - b_1)^2 & (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) & \mathbf{0} \\ (a_2 - b_2)(a_1 - b_1) & \lambda_2 + (a_2 - b_2)^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 \lambda_1 - \lambda_1^2 + \lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} & \mathbf{0} \\ \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} & \frac{\lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculando o espectro da matriz $S^T L(G + e)S$ verificamos que $\lambda_1 + 1$ e $\lambda_2 + 1$ são autovalores de $S^T L(G + e)S$, portanto, a variação espectral em dois lugares ocorre. \square

Observação 4.7. *Segue do Lema 9 de [42] que*

$$\lambda_1 = \frac{d_1 + d_2 + 1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{d_1 + d_2 + 1 + \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2},$$

onde $d_1 = d(v_1)$ e $d_2 = d(v_2)$, e t é o número de vizinhos comuns dos vértices v_1 e v_2 .

Observação 4.8. *Existe uma base de autovetores de L contendo o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e satisfazendo as condições (1), (2) e (3) do Teorema 4.6. De fato, suponha que G tenha G_1, \dots, G_k como componentes conexas. Para cada $i = 1, \dots, k$, seja w_i o vetor com 1 nas posições correspondentes aos vértices de G_i e 0 nas outras. Note que w_1, \dots, w_k formam uma base B do espaço nulo de $L(G)$, pois*

$$L(G)w_i = \begin{bmatrix} L(G_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & L(G_k) \end{bmatrix} w_i = \mathbf{0},$$

e os w_i 's são obviamente linearmente independentes. Segue ainda que se v_1 e v_2 estão em uma mesma componente conexa de G , então todos os vetores de B são ortogonais a $e_1 - e_2$. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que v_1 e v_2 estão em G_1 , portanto, $w_1^T(e_1 - e_2) = 0$, já que as duas primeiras entradas de w_1 são iguais a 1 devido as posições correspondentes aos vértices v_1 e v_2 . E temos ainda que $w_i^T(e_1 - e_2) = 0$, para $i \neq 1$, pois neste caso as duas primeiras entradas de w_i são iguais e nulas. Por consequência, todo vetor do espaço nulo é ortogonal a $e_1 - e_2$, visto que pode ser escrito como uma combinação linear dos w_i 's. Assim, podemos escolher uma base do espaço nulo contendo o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e completar com os outros autovetores de $L(G)$ do Teorema 4.6 associados aos autovalores não nulos, gerando assim, uma base de autovetores de $L(G)$ que inclui o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e satisfazendo as condições (1), (2) e (3).

Suponhamos agora que v_1 e v_2 estão em componentes conexas de G distintas, digamos que v_1 e v_2 estão em G_1 e G_2 , respectivamente. Então 0 é um dos autovalores que aumentam, pois $G + e$ terá uma componente conexa a menos e a multiplicidade de 0 nos dá o número de componentes conexas do grafo pelo Teorema 3.16. Pelo Teorema 4.6 temos que existem $k - 1$ vetores do espaço nulo ortogonais ao vetor $e_1 - e_2$. O subespaço S gerado destes $k - 1$ autovetores do espaço nulo tem os vetores $w_1 + w_2, w_3, \dots, w_k$ como base. Segue que todo vetor do espaço nulo de $L(G)$ que é ortogonal a cada vetor de S é um múltiplo escalar do vetor

do espaço nulo $z = \frac{w_1}{\|w_1\|^2} - \frac{w_2}{\|w_2\|^2}$. Como anteriormente, podemos estender a base de S com o vetor $\frac{z}{\|z\|}$, produzindo assim uma base de k autovetores do espaço nulo de $L(G)$. Escolhendo uma base do espaço nulo de $L(G)$ que inclui o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e completando esta base com os outros autovetores de $L(G)$ do Teorema 4.6 associados aos autovalores não nulos, geramos uma base de autovetores de $L(G)$ que inclui o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e satisfazendo as condições (1), (2) e (3).

O próximo resultado nos dá mais características das entradas dos autovetores associados aos autovalores que aumentam.

Proposição 4.9. *Seja G um grafo com n vértices. Suponha que a variação espectral inteira em dois lugares ocorre quando adicionamos uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ em G , com os autovalores λ_1 e λ_2 aumentando em uma unidade cada um. Suponha sem perda de generalidade que $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Considere uma base ortonormal de autovetores $L(G)$ que inclui o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ e que satisfaz as condições (1), (2), e (3) do Teorema 4.6. Sejam os autovetores*

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ u \end{bmatrix} \text{ e } w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ w \end{bmatrix}$$

satisfazendo as condições (2) e (3) do Teorema 4.6, respectivamente. Seja

$$L(G) = \begin{bmatrix} d(v_1) & 0 & -x_1^T \\ 0 & d(v_2) & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix}.$$

Então existem constantes não nulas c_1 e c_2 tais que $u = c_1(x_1 - x_2)$ e $w = c_2(x_1 - x_2)$.

Demonstração. Para provar este resultado mostraremos que u , w e $x_1 - x_2$ estão em um mesmo subespaço de dimensão 1. Sendo assim do Teorema 4.6 nós encontramos que existe uma base satisfazendo a propriedades (1). Conforme vimos na Observação

4.8, podemos supor que a base B inclui o vetor $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$. Escrevendo os outros $n - 3$ autovetores, temos

$$\gamma_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \dots, \gamma_\ell \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_\ell \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\ell+1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{n-3} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}$ são os autovalores associados aos respectivos autovetores de (4.4). Note aqui que incluímos a possibilidade de $\ell = 0$ ou $\ell = n - 3$. Observe que para $i = 1, \dots, \ell$ e para $j = \ell + 1, \dots, n - 3$, temos

$$L(G) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(v_1) - x_1^T u_i \\ d(v_2) - x_2^T u_i \\ -x_1 - x_2 + M u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \\ \alpha_i u_i \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

e

$$L(G) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^T u_j \\ -x_2^T u_j \\ M u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_j u_j \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Olhando para (4.5) temos $d(v_1) - x_1^T u_i = \alpha_i$ e $d(v_2) - x_2^T u_i = \alpha_i$, e por consequência $d(v_2) - d(v_1) + (x_1 - x_2)^T u_i = x_2^T \mathbf{1} - x_1^T \mathbf{1} + (x_1 - x_2)^T u_i = -(x_1^T - x_2^T) \mathbf{1} + (x_1 - x_2)^T u_i = -(x_1 - x_2)^T \mathbf{1} + (x_1 - x_2)^T u_i = (x_1 - x_2)^T (-\mathbf{1} + u_i) = 0$.

Analisando (4.6) temos $x_1^T u_j = 0$ e $x_2^T u_j = 0$, logo $(x_1 - x_2)^T u_j = 0$. Assim, concluímos que $x_1 - x_2 \in \text{Span}\{u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}\}^\perp$.

Agora mostraremos que u e w pertencem a $\text{Span}\{u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}\}^\perp$. De fato, como $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & u \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & w \end{bmatrix}^T$ são ortogonais ao vetor $\mathbf{1}$, temos que

$$a_1 + b_1 + u^T \mathbf{1} = 0 \text{ e } a_2 + b_2 + w^T \mathbf{1} = 0,$$

logo

$$a_1 + b_1 = -u^T \mathbf{1} \text{ e } a_2 + b_2 = -w^T \mathbf{1}. \quad (4.7)$$

Além disso, para $i = 1, \dots, \ell$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ u \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_i \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ w \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Olhando para (4.8) e (4.7) temos $0 = a_1 + b_1 + u^T u_i = -u^T \mathbf{1} + u^T u_i = u^T (u_i - \mathbf{1})$ e $0 = a_2 + b_2 + w^T u_i = -w^T \mathbf{1} + w^T u_i = w^T (u_i - \mathbf{1})$.

Seguindo para $j = \ell + 1, \dots, n - 3$ temos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_j \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ u \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_j \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ w \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Observando (4.9), temos $u^T u_j = 0$ e $w^T u_j = 0$. Consequentemente $u, w \in \text{Span}\{u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}\}^\perp$.

Agora mostraremos que $u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}$ são linearmente independentes. Suponha que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i (u_i - \mathbf{1}) + \sum_{j=\ell+1}^{n-3} \beta_j u_j = 0 \quad (4.10)$$

para escalares $\beta_1, \dots, \beta_{n-3}$. Provaremos que $\beta_1 = \dots = \beta_{n-3} = 0$. Como os autovetores de $L(G)$ (olhe (4.4)) são dois a dois ortogonais, isso implica que u_j para $j = \ell + 1, \dots, n - 3$ é ortogonal aos outros vetores remanescentes. De fato,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & u_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_j^T u_k = 0 \Rightarrow u_j \perp u_k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & u_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_j^T u_k = 0 \Rightarrow u_j \perp u_k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & u_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow u_j^T \mathbf{1} = 0 \Rightarrow u_j \perp \mathbf{1}.$$

Calculando o produto interno de u_j com o vetor em (4.10), temos

$$\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i u_j^T (u_i - \mathbf{1}) + \sum_{s=\ell+1}^{n-3} \beta_s u_j^T u_s = 0 = \beta_j.$$

Portanto, $\beta_{\ell+1} = \dots = \beta_{n-3} = 0$. Prosseguindo, sabemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_i \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + \mathbf{1}^T u_i = 0 \Rightarrow \mathbf{1}^T u_i = -2$$

logo segue que

$$\mathbf{1}^T (u_i - \mathbf{1}) = \mathbf{1}^T u_i - \mathbf{1}^T \mathbf{1} = -2 - (n - 2) = -n.$$

Multiplicando o vetor $\mathbf{1}^T$ pelo vetor de (4.10) obtemos:

$$\mathbf{1}^T \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i (u_i - \mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \mathbf{1}^T (u_i - \mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i (-n) = -n \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 0,$$

logo $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = 0$. Segue que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i (u_i - \mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i u_i - \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i u_i = 0,$$

e sendo assim, temos

$$\beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \dots + \beta_{\ell} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ u_{\ell} \end{bmatrix} = 0.$$

Como os vetores acima são linearmente independentes, concluímos que $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$. Portanto, os vetores $u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}$ são linearmente independentes e a dimensão de $\text{Span}\{u_1 - \mathbf{1}, \dots, u_\ell - \mathbf{1}, u_{\ell+1}, \dots, u_{n-3}\}^\perp$ é igual a 1, pois é o complemento ortogonal de um conjunto com $n - 3$ vetores de dimensão $n - 2$. Observe ainda que se u ou w são nulas por (4.7) temos que $b_1 = -a_1$ ou $b_2 = -a_2$, e a relação entre autovetor e autovalor implica que $x_1 = x_2$. Note que $x_1 = x_2$ implica que v_1 e v_2 têm os mesmos vizinhos, uma contradição, pois vimos pelo Teorema 4.4 que isto é equivalente a variação espectral inteira em um lugar. Sendo assim, finalmente concluímos que existem constantes não nulas c_1 e c_2 tais que $u = c_1(x_1 - x_2)$ e $w = c_2(x_1 - x_2)$. \square

Para a notação não ficar muito pesada adotaremos a seguinte notação nos próximos resultados: $d(v_1) = d_1$ e $d(v_2) = d_2$.

Lema 4.10. *Sejam $r_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $r_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -r_1 + 2$ e $s = \frac{d_1 + d_2 - 2t}{(d_1 - d_2)^2}$. As constantes a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 dos vetores w_1 e w_2 , respectivamente, do Corolário 4.9 têm a seguinte forma:*

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1 + 2s}}, \\ b_1 &= -\frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1 + 2s}}, \\ c_1 &= \frac{1}{d_1 - d_2} \sqrt{\frac{r_2}{1 + 2s}}, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1 + 2s}}, \\ b_2 &= -\frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1 + 2s}} \end{aligned}$$

e

$$c_2 = \frac{-1}{d_1 - d_2} \sqrt{\frac{r_1}{1 + 2s}}.$$

no caso em que $d_1 > d_2$.

Já no caso em que $d_1 = d_2$ temos

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{r_1}, \\ b_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{r_1}, \\ c_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{d_1 - t}}, \\ a_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{r_2}, \\ b_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{r_2} \end{aligned}$$

e

$$c_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{d_1 - t}}.$$

Demonstração. Por conveniência, nós separaremos nosso argumento em dois casos: $d_1 > d_2$ e $d_1 = d_2$. Consideremos primeiro o caso em que $d_1 > d_2$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores que sofrem a mudança quando adicionamos a aresta $e = \{v_1, v_2\}$ em G . Tomemos ainda os vetores linhas $-x_1^T$ e $-x_2^T$ formados da primeira e segunda linha da matriz $L(G)$ eliminando as duas primeiras entradas. Pelo Corolário 4.9, existe um autovetor associado a λ_1 de comprimento unitário que é ortogonal ao vetor $\mathbf{1}$ e que tem a seguinte forma:

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

no qual $(a_1 - b_1)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Semelhantemente, existe um autovetor associado a λ_2 de comprimento unitário e ortogonal ao vetor $\mathbf{1}$ da forma

$$w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

em que $(a_2 - b_2)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Como w_1 e w_2 são ortogonais ao vetor $\mathbf{1}$, para $i = \{1, 2\}$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= w_i^T \mathbf{1} = a_i + b_i + c_i(d_1 - t) - c_i(d_2 - t) \\ &= a_i + b_i + c_i(d_1 - d_2), \end{aligned}$$

logo

$$c_i = \frac{-(a_i + b_i)}{d_1 - d_2}. \quad (4.11)$$

Pelo Teorema 4.6, temos que

$$(a_1 - b_1)^2 = r_1.$$

Assim, $b_1^2 - 2a_1b_1 + a_1^2 - r_1 = 0$, e resolvendo esta equação para b_1 , obtemos:

$$b_1 = \frac{2a_1 \pm \sqrt{4a_1^2 - 4(a_1^2 - r_1)}}{2} = a_1 \pm \sqrt{r_1}. \quad (4.12)$$

Como $\|w_1\| = 1$, temos:

$$\begin{aligned} 1 &= \|w_1\|^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2(d_1 - t) + c_1^2(d_2 - t) \\ &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2(d_1 + d_2 - 2t) \\ &= a_1^2 + b_1^2 + \frac{(a_1 + b_1)^2}{(d_1 - d_2)^2}(d_1 + d_2 - 2t) \\ &= a_1^2 + b_1^2 + (a_1 + b_1)^2 s \\ &= a_1^2 + (a_1 \pm \sqrt{r_1})^2 + (2a_1 \pm \sqrt{r_1})^2 s \\ &= 2a_1^2 \pm 2a_1\sqrt{r_1} + r_1 + (4a_1^2 \pm 4a_1\sqrt{r_1} + r_1)s. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Por (4.13), temos:

$$(2 + 4s)a_1^2 \pm \sqrt{r_1}(2 + 4s)a_1 + r_1(1 + s) - 1 = 0. \quad (4.14)$$

Resolvendo (4.14) para a_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\pm\sqrt{r_1}(2+4s) \pm \sqrt{r_1(2+4s)^2 - 4(2+4s)(r_1(1+s) - 1)}}{2(2+4s)} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1(2+4s)^2 - 4(2+4s)(r_1(1+s) - 1)}{(2+4s)^2}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4r_1(1+2s)^2 - 8(1+2s)(r_1(1+s) - 1)}{4(1+2s)^2}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1(1+2s)^2 - 2(1+2s)(r_1(1+s) - 1)}{(1+2s)^2}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+2s)(r_1(1+2s) - 2(r_1(1+s) - 1))}{(1+2s)^2}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1(1+2s) - 2(r_1(1+s) - 1)}{1+2s}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-r_1+2}{1+2s}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{r_1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}.
\end{aligned}$$

Logo existem inteiros j_1 e k_1 tais que

$$a_1 = (-1)^{j_1} \frac{\sqrt{r_1}}{2} + (-1)^{k_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}. \quad (4.15)$$

Por consequência de (4.15) e (4.12), temos que

$$b_1 = (-1)^{j_1+1} \frac{\sqrt{r_1}}{2} + (-1)^{k_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}. \quad (4.16)$$

Caso houver necessidade podemos multiplicar w_1 por -1 , podemos supor j_1 um número par qualquer. Assim,

$$a_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{2} + (-1)^{k_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}, \quad (4.17)$$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{r_1}}{2} + (-1)^{k_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}. \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) e (4.18) em (4.11), obtemos:

$$c_1 = \frac{(-1)^{k_1+1}}{d(v_1) - d(v_2)} \sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}. \quad (4.19)$$

Por um argumento semelhante, estabelecemos sem perda de generalidade, que existe um inteiro k_2 tal que

$$a_2 = \frac{\sqrt{r_2}}{2} + (-1)^{k_2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}, \quad (4.20)$$

$$b_2 = -\frac{\sqrt{r_2}}{2} + (-1)^{k_2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}, \quad (4.21)$$

$$c_2 = \frac{(-1)^{k_2+1}}{d(v_1) - d(v_2)} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}. \quad (4.22)$$

Como w_1 e w_2 são ortogonais, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1^T w_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 \mathbf{1}^T c_2 \mathbf{1}^T + c_1 \mathbf{1}^T c_2 \mathbf{1}^T \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 (d_1 - t) + c_1 c_2 (d_2 - t) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 (d_1 + d_2 - 2t) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + \frac{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)}{(d_1 - d_2)^2} (d_1 + d_2 - 2t) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)s. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.17), (4.18), (4.20) e (4.21) em (4.23), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= w_1^T w_2 = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2} + \frac{(-1)^{k_1+k_2}}{2} \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2s+1} + (-1)^{k_1+k_2} \frac{s\sqrt{r_1 r_2}}{2s+1} \\ &= \sqrt{r_1 r_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{k_1+k_2}}{2} \frac{1}{2s+1} + \frac{s(-1)^{k_1+k_2}}{2s+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k_1+k_2}}{2} \sqrt{r_1 r_2} \left((-1)^{k_1+k_2} + \frac{1}{2s+1} + \frac{2s}{2s+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{k_1+k_2}}{2} \sqrt{r_1 r_2} ((-1)^{k_1+k_2} + 1). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por (4.24) concluímos que k_1 e k_2 obrigatoriamente têm paridades distintas. Agora mostraremos que k_1 é ímpar e k_2 é par. Suponhamos por absurdo que

k_1 é par e k_2 é ímpar. Neste caso

$$a_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}, \quad (4.25)$$

$$b_1 = -\frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}, \quad (4.26)$$

$$c_1 = \frac{-1}{d_1 - d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}. \quad (4.27)$$

Seja M a submatriz de $L(G)$ tal que

$$L(G) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -x_1^T \\ 0 & d_2 & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix}.$$

O Corolário 4.6 nos garante que $L(G)w_1 = \lambda_1 w_1$ e $L(G)w_2 = \lambda_2 w_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} L(G)w_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -x_1^T \\ 0 & d_2 & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ \frac{-1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \lambda_1 w_1 \\ &= \begin{bmatrix} d_1\left(\frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}\right) + \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}x_1^T(x_1 - x_2) \\ d_2\left(-\frac{\sqrt{r_1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}\right) + \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}x_2^T(x_1 - x_2) \\ \frac{\sqrt{r_1}}{2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}(x_1 + x_2) - \frac{\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}}{d_1-d_2}M(x_1 - x_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Olhando para o terceiro bloco do vetor acima, obtemos

$$\frac{\sqrt{r_1}}{2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}(x_1 + x_2) - \frac{\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}}{d_1 - d_2}M(x_1 - x_2) = -\lambda_1 \frac{\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}}{d_1 - d_2}(x_1 - x_2),$$

e dividindo a equação acima por $\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}$, temos

$$\frac{\sqrt{r_1(2s+1)}}{2\sqrt{r_2}}(x_1 - x_2) - \frac{(x_1 + x_2)}{2} - \frac{M(x_1 - x_2)}{d_1 - d_2} = -\lambda_1 \frac{(x_1 - x_2)}{d_1 - d_2}. \quad (4.28)$$

Cálculos semelhantes podem ser feitos para o autovetor w_2 . Assim, temos

$$\begin{aligned}
L(G)w_2 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -x_1^T \\ 0 & d_2 & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}(x_1-x_2) \end{bmatrix} = \lambda_2 w_2 \\
&= \begin{bmatrix} d_1\left(\frac{\sqrt{r_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}\right) - \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}x_1^T(x_1-x_2) \\ d_2\left(-\frac{\sqrt{r_2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}\right) - \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}x_2^T(x_1-x_2) \\ -\frac{\sqrt{r_2}}{2}(x_1-x_2) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}(x_1+x_2) + \frac{\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}}{d_1-d_2}M(x_1-x_2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Olhando para o terceiro bloco do vetor acima, obtemos

$$-\frac{\sqrt{r_2}}{2}(x_1-x_2) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}(x_1+x_2) + \frac{\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}}{d_1-d_2}M(x_1-x_2) = \lambda_2 \frac{\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}}{d_1-d_2}(x_1-x_2),$$

e dividindo a equação acima por $\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}$, temos

$$-\frac{\sqrt{r_2(2s+1)}}{2\sqrt{r_1}}(x_1-x_2) + \frac{(x_1+x_2)}{2} + \frac{M(x_1-x_2)}{d_1-d_2} = \lambda_2 \frac{(x_1-x_2)}{d_1-d_2}. \quad (4.29)$$

Somando as equações (4.28) e (4.29), concluímos:

$$\left(-\sqrt{\frac{r_1(2s+1)}{r_2}} - \sqrt{\frac{r_2(2s+1)}{r_1}}\right) \frac{(x_1-x_2)}{2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{(x_1-x_2)}{d_1-d_2},$$

logo,

$$-\frac{\sqrt{2s+1}}{2} \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} + \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\right) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d_1 - d_2}. \quad (4.30)$$

Portanto, temos uma contradição em (4.30) pois no lado esquerdo da igualdade temos um número negativo e no lado direito um positivo. Assim concluímos necessariamente que k_1 é ímpar e k_2 é par. Logo concluímos que

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1-x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}(x_1-x_2) \end{bmatrix}$$

e

$$w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ \frac{-1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

Agora vamos para o caso em que $d_1 = d_2$. Sabemos que w_1 e w_2 são autovetores (ortogonais e de comprimento unitário associados a λ_1 e λ_2) de $L(G)$ com a seguinte forma:

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1 - x_2) \end{bmatrix} \text{ e } w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

em que $(a_1 - b_1)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ e $(a_2 - b_2)^2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Como $d_1 = d_2$ temos $(x_1 - x_2)^T \mathbf{1} = 0$. Além disso, sabemos que $w_1^T \mathbf{1} = 0$ e $w_2^T \mathbf{1} = 0$, logo $a_1 = -b_1$ e $a_2 = -b_2$. Portanto, sem perda de generalidade, temos

$$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \text{ e } a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}}.$$

Aplicando o fato de ambos serem de comprimento unitário nós encontramos

$$1 = \|w_1\|^2 = w_1^T w_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + 2c_1^2(d_1 - t)$$

e

$$1 = \|w_2\|^2 = w_2^T w_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) + 2c_2^2(d_1 - t).$$

Logo, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $c_1 = (-1)^{k_1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}}$ e $c_2 = (-1)^{k_2} \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}}$.

Sabemos também que w_1 e w_2 são ortogonais, logo segue que

$$0 = w_1^T w_2 = 2a_1 a_2 + 2(d_1 - t)(c_1 c_2).$$

Pela equação acima concluímos que c_1 e c_2 têm obrigatoriamente sinais opostos, conseqüentemente k_1 e k_2 têm paridades opostas. Mostraremos k_1 é par e k_2 é ímpar. Para isto, suponhamos que k_1 é ímpar e k_2 é par.

O Corolário 4.6 nos garante que $L(G)w_1 = \lambda_1 w_1$ e $L(G)w_2 = \lambda_2 w_2$.

Assim,

$$\begin{aligned} L(G)w_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -x_1^T \\ 0 & d_2 & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \lambda_1 w_1 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} x_1^T (x_1 - x_2) \\ \frac{-d_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} x_2^T (x_1 - x_2) \\ \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} (x_1 - x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} M (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Olhando para a primeira linha do vetor acima, obtemos

$$\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} (d_1 - t) = \frac{\lambda_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}}.$$

Multiplicando a equação acima por $2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}$, temos

$$d_1 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 + 1} + \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} \sqrt{d_1 - t} = \lambda_1 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 + 1},$$

o que implica que

$$\lambda_1 = d_1 + \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} \sqrt{d_1 - t}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}}. \quad (4.31)$$

Seguindo, temos

$$L(G)w_2 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -x_1^T \\ 0 & d_2 & -x_2^T \\ -x_1 & -x_2 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \lambda_2 w_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} x_1^T(x_1 - x_2) \\ \frac{-d_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} x_2^T(x_1 - x_2) \\ \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} M(x_1 - x_2) \end{bmatrix}.$$

Olhando para a primeira linha do vetor acima, obtemos

$$\frac{d_1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}}(d_1 - t) = \frac{\lambda_2}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}},$$

e multiplicando a equação acima por $2\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}$, temos

$$d_1 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 - 1} - \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 + 1} \sqrt{d_1 - t} = \lambda_2 \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}$$

o que implica

$$\lambda_2 = d_1 - \frac{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 + 1} \sqrt{d_1 - t}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}}. \quad (4.32)$$

Por (4.31) e (4.32), temos $\lambda_1 \geq d_1 \geq \lambda_2$ o que é uma contradição. Logo concluímos que obrigatoriamente k_1 é par e k_2 é ímpar.

Logo concluímos que

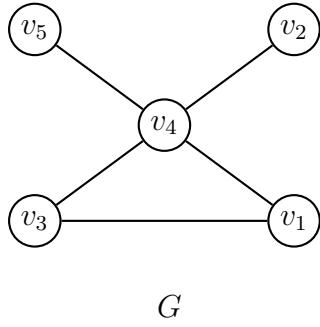
$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

e

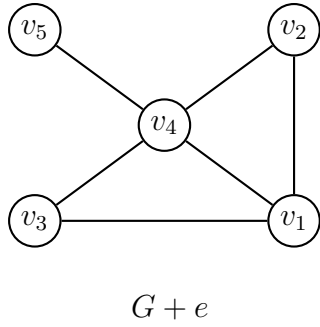
$$w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Agora veremos o seguinte exemplo com uma base ortonormal de autovetores de $L(G)$ satisfazendo as propriedades dos resultados que vimos nesta seção.

Exemplo



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$L(G + e) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores de $L(G)$ e $L(G + e)$ obtemos, $Spect(L(G)) = \{1^{(2)}, 5, 3, 0\}$ e $Spect(L(G + e)) = \{1, 2, 5, 4, 0\}$. Note que os autovalores 1 e 3 aumentam em uma unidade cada um ao adicionarmos a aresta e em G , logo pelo Teorema 4.6 deve existir uma base de autovetores de $L(G)$ satisfazendo as propriedades (1), (2) e (3). De fato, os vetores w_1, w_2, w_3, w_4 e w_5 abaixo formam uma base ortonormal de autovetores de $L(G)$ satisfazendo a propriedade (1). Observe também que os vetores w_1 e w_2 são autovetores associados a 1 e 3, respectivamente, e tem forma descrita no Proposição 4.9. Além disso, as duas primeiras entradas dos autovetores w_1 e w_2 satisfazem as propriedades (2) e (3) do Teorema 4.6 e as propriedades do Lema 4.10:

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, w_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \\ \frac{-4}{\sqrt{20}} \\ \frac{1}{\sqrt{20}} \end{bmatrix}$$

e

$$w_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 \\ \frac{-3}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}.$$

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que ocorra a variação espectral inteira em dois lugares.

Teorema 4.11. [26] *Seja G um grafo tal que os vértices v_1 e v_2 não são adjacentes e com $L(G)$ representada por*

$$L(G) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ 0 & d_2 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

onde, os blocos L_{11} , L_{22} , L_{33} e L_{44} têm dimensão $d_1 - t$, $d_2 - t$, t e $n - 2 - d_1 - d_2 + t$, respectivamente. Suponhamos sem perda de generalidade que $d_1 \geq d_2$. Então a variação espectral inteira ocorre em dois lugares por meio da adição da aresta $e = \{v_1, v_2\}$ em G se e somente se as seguintes condições são satisfeitas

$$L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} = (d_2 + 1)\mathbf{1}, \quad (4.33)$$

$$L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} = -(d_1 + 1)\mathbf{1}, \quad (4.34)$$

$$L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} = -(d_1 - d_2)\mathbf{1}, \quad (4.35)$$

$$L_{41}\mathbf{1} - L_{42}\mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

No caso em as condições acima são satisfeitas, os autovalores que sofrem a mudança pela adição da aresta são

$$\lambda_1 = \frac{d_1 + d_2 + 1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1d_2 + t)}}{2} \quad (4.37)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{d_1 + d_2 + 1 + \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1d_2 + t)}}{2}, \quad (4.38)$$

e os vetores $u_1 = \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ são autovetores de $L(G)$ associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente.

Antes de provarmos o Teorema 4.11 vamos analisar o exemplo a seguir:

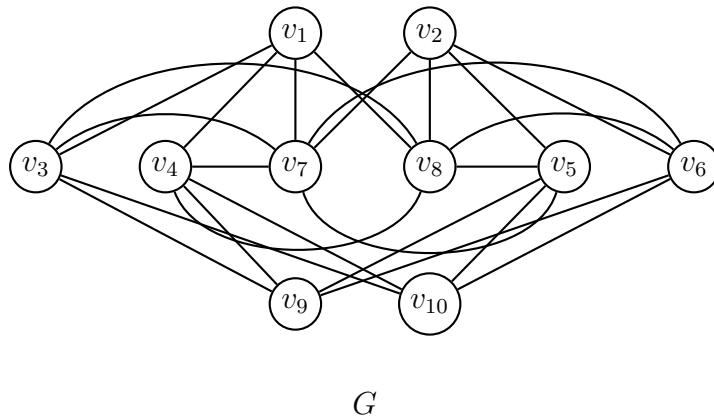


Figura 4.2 Variação espectral inteira em dois lugares.

Considere o grafo G da Figura 4.2. Organizando os vértices nas colunas da matriz $L(G)$ assim como organizamos no Teorema 4.11, temos:

$$L(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Observe os blocos L_{11} , L_{12} , L_{21} , L_{22} , L_{31} , L_{32} , L_{41} e L_{42} da matriz do Teorema 4.11 e compare com os da matriz $L(G)$ acima. Repare que as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36), definidas no Teorema 4.11, são satisfeitas pela matriz $L(G)$ acima, pois

$$\begin{aligned} L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ L_{41}\mathbf{1} - L_{42}\mathbf{1} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.11, ocorre variação espectral inteira em dois lugares ao adicionarmos a aresta $e = \{v_1, v_2\}$. De fato, calculando o espectro do grafo G da

Figura 4.2 e o espectro do grafo $G + e$ temos que:

$$\text{Spect}(L(G)) = \{0, 3, 4, 5^{(2)}, 6^{(2)}, 3.3738, 6.4849, 9.1413\}$$

e

$$\text{Spect}(L(G + e)) = \{0, 4^{(2)}, 5^{(2)}, 6, 7, 3.3738, 6.4849, 9.1413\}.$$

Note que os autovalores que aumentaram em uma unidade foram o 3 e o 6.

A seguir a prova do Teorema 4.11.

Demonstração. Suponha que as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36) são satisfeitas. Vamos mostrar que ocorre variação espectral inteira em dois lugares. Para isto mostraremos que u_1 e u_2 são autovetores de $L(G)$ associados a λ_1 e λ_2 ((4.37), (4.38)) e que $u_1 - (e_1 - e_2)$ e $u_2 - (e_1 - e_2)$ são autovetores de $L(G + e)$ associados a $\lambda_1 + 1$ e $\lambda_2 + 1$, respectivamente.

De fato,

$$\begin{aligned} L(G)u_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ 0 & d_2 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1(d_2 + 1 - \lambda_1) - d_1 + t \\ d_2(\lambda_1 - d_1 - 1) + d_2 - t \\ -(d_2 + 1 - \lambda_1)\mathbf{1} + (d_2 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} - (d_1 + 1)\mathbf{1} \\ -(d_2 + 1 - \lambda_1)\mathbf{1} - (\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} - (d_1 - d_2)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 d_2 - d_1 \lambda_1 + t \\ d_2 \lambda_1 - d_2 d_1 - t \\ \lambda_1 \mathbf{1} \\ -\lambda_1 \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Note que, por (4.37), temos

$$\lambda_1 = \frac{d_1 + d_2 + 1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2}$$

e isolando t na equação acima, temos

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= d_1 + d_2 + 1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} \\ 2\lambda_1 - d_1 - d_2 - 1 &= -\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} \\ -2\lambda_1 + d_1 + d_2 + 1 &= \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} \\ (-2\lambda_1 + d_1 + d_2 + 1)^2 &= (d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} t &= \frac{(-2\lambda_1 + d_1 + d_2 + 1)^2 - (d_1 + d_2 + 1)^2 + 4d_1 d_2}{-4} \\ &= \frac{4\lambda_1^2 - 4\lambda_1(d_1 + d_2 + 1) + (d_1 + d_2 + 1)^2 - (d_1 + d_2 + 1)^2 + 4d_1 d_2}{-4} \\ &= -\lambda_1^2 + \lambda_1(d_1 + d_2 + 1) - d_1 d_2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo o valor de t de (4.40) em (4.39), temos

$$L(G)u_1 = \begin{bmatrix} d_1 d_2 - d_1 \lambda_1 + t \\ d_2 \lambda_1 - d_2 d_1 - t \\ \lambda_1 \mathbf{1} \\ -\lambda_1 \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} d_1d_2 - d_1\lambda_1 + -\lambda_1^2 + \lambda_1(d_1 + d_2 + 1) - d_1d_2 \\ d_2\lambda_1 - d_2d_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1(d_1 + d_2 + 1) + d_1d_2 \\ \lambda_1\mathbf{1} \\ -\lambda_1\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -d_1\lambda_1 + -\lambda_1^2 + \lambda_1(d_1 + d_2 + 1) \\ d_2\lambda_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1(d_1 + d_2 + 1) \\ \lambda_1\mathbf{1} \\ -\lambda_1\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 + \lambda_1d_2 + \lambda_1 \\ \lambda_1^2 - \lambda_1d_1 - \lambda_1 \\ \lambda_1\mathbf{1} \\ -\lambda_1\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_1 u_1. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Fazendo as mesmas contas que fizemos com λ_2 no lugar de λ_1 , obtemos que

$$L(G)u_2 = \begin{bmatrix} d_1d_2 - d_1\lambda_2 + t \\ d_2\lambda_2 - d_2d_1 - t \\ \lambda_2\mathbf{1} \\ -\lambda_2\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Observe ainda que por (4.38), temos

$$\lambda_2 = \frac{d_1 + d_2 + 1 + \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2}.$$

Isolando t , obtemos

$$2\lambda_2 = d_1 + d_2 + 1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}$$

$$2\lambda_2 - d_1 - d_2 - 1 = \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}$$

$$2\lambda_2 - d_1 - d_2 - 1 = \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4d_1 d_2 - 4t}$$

$$(2\lambda_2 - d_1 - d_2 - 1)^2 = (d_1 + d_2 + 1)^2 - 4d_1 d_2 - 4t.$$

Logo

$$\begin{aligned} t &= \frac{(2\lambda_2 - d_1 - d_2 - 1)^2 - (d_1 + d_2 + 1)^2 + 4(d_1 d_2)}{-4} \\ &= \frac{4\lambda_2^2 - 4\lambda_2(d_1 + d_2 + 1) + (d_1 + d_2 + 1)^2 - (d_1 + d_2 + 1)^2 + 4d_1 d_2}{-4} \\ &= -\lambda_2^2 + \lambda_2(d_1 + d_2 + 1) - d_1 d_2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Substituindo o valor de t (4.47) em (4.42), temos

$$\begin{aligned} L(G)u_2 &= \begin{bmatrix} d_1 d_2 - d_1 \lambda_2 + -\lambda_2^2 + \lambda_2(d_1 + d_2 + 1) - d_1 d_2 \\ d_2 \lambda_2 - d_2 d_1 + \lambda_2^2 - \lambda_2(d_1 + d_2 + 1) + d_1 d_2 \\ \lambda_2 \mathbf{1} \\ -\lambda_2 \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda_2^2 + \lambda_2 d_2 + \lambda_2 \\ \lambda_2^2 - \lambda_2 d_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 \mathbf{1} \\ -\lambda_2 \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \lambda_2 u_2. \end{aligned}$$

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned}
L(G + e)(u_1 - (e_1 - e_2)) &= \begin{bmatrix} d_1 + 1 & -1 & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -1 & d_2 + 1 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - d_1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (d_1 + 1)(d_2 - \lambda_1) - \lambda_1 + d_1 - d_1 + t \\ -d_2 + \lambda_1 + (d_2 + 1)(\lambda_1 - d_1) + d_2 - t \\ -(d_2 - \lambda_1)\mathbf{1} + (d_2 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 - d_1)\mathbf{1} - (d_1 + 1)\mathbf{1} \\ -(d_2 - \lambda_1)\mathbf{1} - (\lambda_1 - d_1)\mathbf{1} - (d_1 - d_2)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} d_1 d_2 + d_2 - d_1 \lambda_1 - 2\lambda_1 + t \\ d_2 \lambda_1 - d_2 d_1 - d_1 + 2\lambda_1 - t \\ (\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de t de (4.40) em (4.48), temos

$$L(G + e)(u_1 - (e_1 - e_2)) = \begin{bmatrix} +d_2 - \lambda_1 - \lambda_1^2 + \lambda_1 d_2 \\ -d_1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1 d_1 \\ (\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (\lambda_1 + 1)(d_2 - \lambda_1) \\ (\lambda_1 + 1)(\lambda_1 - d_1) \\ (\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 + 1)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= (\lambda_1 + 1) \begin{bmatrix} (d_2 - \lambda_1) \\ (\lambda_1 - d_1) \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = (\lambda_1 + 1)(u_1 - (e_1 - e_2)).
\end{aligned}$$

Com as mesmas contas que fizemos com λ_2 no lugar de λ_1 , obtemos

$$L(G + e)(u_2 - (e_1 - e_2)) = \begin{bmatrix} d_1 d_2 + d_2 - d_1 \lambda_2 - 2\lambda_2 + t \\ d_2 \lambda_2 - d_2 d_1 - d_1 + 2\lambda_2 - t \\ (\lambda_2 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_2 + 1)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Substituindo o valor de t (4.47) em (4.49), temos

$$L(G + e)(u_2 - (e_1 - e_2)) = \begin{bmatrix} +d_2 - \lambda_2 - \lambda_2^2 + \lambda_2 d_2 \\ -d_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2 - \lambda_2 d_1 \\ (\lambda_2 + 1)\mathbf{1} \\ -(\lambda_2 + 1)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_2 + 1) \begin{bmatrix} (d_2 - \lambda_2) \\ (\lambda_2 - d_1) \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = (\lambda_2 + 1)(u_2 - (e_1 - e_2)).$$

Portanto, ocorre a variação espectral inteira em dois lugares.

Reciprocamente, suponhamos que a variação espectral inteira ocorre em dois lugares. Mostraremos que os blocos da matriz $L(G)$ satisfazem as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36). Para isto, mostraremos, com ajuda das expressões para a_i , b_i e c_i (com $i = \{1, 2\}$) do Lema 4.10, que u_1 e u_2 são múltiplos de w_1 e w_2 . Por consequência, serão autovetores da matriz $L(G)$ associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Por conveniência, nós separaremos nosso argumento em dois casos: $d_1 > d_2$ e $d_1 = d_2$.

Suponha que $d_1 > d_2$ logo pelo Lema 4.10 temos:

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}} \\ \frac{1}{d_1-d_2}\sqrt{\frac{r_2}{1+2s}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1+1}{\lambda_2-\lambda_1}} - \frac{(d_1-d_2)}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \\ \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1+1}{\lambda_2-\lambda_1}} - \frac{(d_1-d_2)}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \\ \left(\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}}\right)\mathbf{1} \\ -\left(\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}}\right)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores λ_1 e λ_2 em cada componente, obtemos

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)+1}}{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}} - \frac{(d_1-d_2)}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \\ \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)+1}}{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}} - \frac{(d_1-d_2)}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \\ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}{2} + \frac{(d_2-d_1)}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}}{2} + \frac{(d_2-d_1)}{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \begin{bmatrix} d_2+1-\lambda_1 \\ \lambda_1-d_1-1 \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$w_1 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)}-1}{(\sqrt{(d_1+d_2+1)^2-4(d_1d_2+t)})(2(d_1+d_2-2t)+(d_1-d_2)^2)}} \right) u_1,$$

ou seja, u_1 é um múltiplo de w_1 e, portanto, u_1 também é um autovetor de $L(G)$ associado a λ_1 .

Pelo Lema 4.10, temos

$$w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ -\frac{\sqrt{r_2}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}} \\ \frac{-1}{d_1-d_2} \sqrt{\frac{r_1}{1+2s}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{(d_1 - d_2)}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \\ \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} + \frac{(d_1 - d_2)}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(2(d(v_1) + d(v_2) - 2t) + (d(v_1) - d(v_2))^2)}} \\ \left(-\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ - \left(-\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os valores λ_1 e λ_2 nas componentes do autovetor acima, obtemos

$$w_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} - 1}{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}} + \frac{(d_1 - d_2)}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \\ \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} - 1}{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}} + \frac{(d_1 - d_2)}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \\ \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ - \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 - 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \right) \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \begin{bmatrix} \frac{-1 - \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2} - \frac{(d_2 - d_1)}{2} \\ \frac{1 + \sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)}}{2} - \frac{(d_2 - d_1)}{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$w_2 = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)} + 1}{(\sqrt{(d_1 + d_2 + 1)^2 - 4(d_1 d_2 + t)})(2(d_1 + d_2 - 2t) + (d_1 - d_2)^2)}} \right) u_2,$$

ou seja, u_2 é um múltiplo de w_2 , portanto, u_2 também é um autovetor de $L(G)$ associado a λ_2 .

Agora a matriz satisfaz as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36) pelo fato de u_1 ser um autovetor de $L(G)$. De fato,

$$\begin{aligned} L(G)u_1 &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ 0 & d_2 & \mathbf{0}^T & -\mathbf{1}^T & -\mathbf{1}^T & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 + 1 - \lambda_1 \\ \lambda_1 - d_1 - 1 \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1(d_2 + 1 - \lambda_1) - d_1 + t \\ d_2(\lambda_1 - d_1 - 1) + d_2 - t \\ (d_2 + 1 - \lambda_1)\mathbf{-1} + L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} \\ -(\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} + L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} \\ -(d_2 + 1 - \lambda_1)\mathbf{1} - (\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} + L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} \\ L_{41}\mathbf{1} - L_{42}\mathbf{1} \end{bmatrix} = \lambda_1 u_1 \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1(d_2 + 1 - \lambda_1) \\ \lambda_1(\lambda_1 - d_1 - 1) \\ \lambda_1\mathbf{1} \\ -\lambda_1\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando os quatro últimos blocos dos vetores acima, temos que:

a condição (4.33) segue da igualdade do primeiro bloco

$$-(d_2 + 1 - \lambda_1)\mathbf{1} + L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} = \lambda_1\mathbf{1} \text{ logo } L_{11}\mathbf{1} - L_{12}\mathbf{1} = (d_2 + 1)\mathbf{1},$$

a condição (4.34) segue da igualdade do segundo do bloco

$$-(\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} + L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} = -\lambda_1\mathbf{1} \text{ logo } L_{21}\mathbf{1} - L_{22}\mathbf{1} = -(d_1 + 1)\mathbf{1},$$

já a condição (4.35) segue da igualdade do terceiro do bloco

$$(\lambda_1 - d_2 - 1)\mathbf{1} - (\lambda_1 - d_1 - 1)\mathbf{1} + L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} = 0 \text{ logo } L_{31}\mathbf{1} - L_{32}\mathbf{1} = (d_2 - d_1)\mathbf{1}$$

e a condição (4.36) sai diretamente da igualdade do último bloco

$$L_{41}\mathbf{1} - L_{42}\mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Consideremos agora o caso em que $d_1 = d_2$. A ideia da prova é a mesma do caso em que $d_1 > d_2$, ou seja, mostrar que u_1 e u_2 são autovetores de $L(G)$ e assim concluir que os blocos da matriz obrigatoriamente satisfazem as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36). Pelo Lema 4.10 temos:

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

e substituindo os valores de λ_1 e λ_2 nas componentes do vetor acima, obtemos:

$$w_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)} + 1}{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)}}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)} + 1}{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)}}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)} - 1}{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)}(d_1 - t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)} - 1}{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)}(d_1-t)}} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= c_1 u_1.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos

$$w_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2(x_1 - x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(d_1 - t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix},$$

e substituindo os valores de λ_1 e λ_2 no vetor acima, temos:

$$\begin{aligned}
w_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}-1}{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}-1}{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}+1}{\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}(d_1-t)}} (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)} + 1}{\sqrt{(2d_1+1)^2 - 4(d_1^2+t)}(d_1-t)}} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{(2d_1+1)^2-4(d_1^2+t)}}{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&= c_2 u_2.
\end{aligned}$$

Assim, as condições (4.33), (4.34), (4.35) e (4.36) são facilmente satisfeitas pelo fato de u_1 e u_2 serem autovetores de $L(G)$ como antes. \square

O Teorema 4.4 da variação espectral inteira em um lugar e o Teorema 4.11 da variação espectral inteira em dois lugares são fundamentais para caracterizarmos um subconjunto dos grafos L -inteiros, mais precisamente, o conjunto dos grafos construtivamente laplaciano inteiros que definiremos no próximo capítulo.

Cabe salientar também que o estudo que fizemos neste capítulo da variação espectral inteira via adição de aresta já foi feito para matriz laplaciana sem sinal. E por um argumento muito semelhante ao que fizemos aqui, se mostra que se variação espectral inteira ocorre, então ela é em um lugar ou em dois lugares, assim como na matriz laplaciana. A grande diferença é que na matriz laplaciana sem sinal na maioria das vezes em que a variação espectral inteira ocorre ela é em dois lugares, mais especificamente, é possível mostrar que para grafos conexos com mais de três vértices não existe a variação espectral inteira em um lugar. Para mais detalhes, recomendamos a leitura das referências [14, 16].

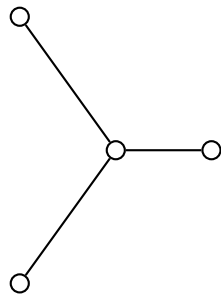
5 GRAFOS CONSTRUTIVELMENTE LAPLACIANO INTEGRAIS

Neste capítulo iniciaremos o estudo da integralidade de grafos. Mais especificamente, estudaremos os grafos laplaciano integrais, ou seja, grafos que têm o espectro em relação à matriz laplaciana constituído somente por números inteiros. Observemos que, se o grafo G for L -integral e ocorrer uma variação espectral inteira ao adicionarmos uma aresta e a ele, então obviamente o grafo $G + e$ também será L -integral. Por isso, usaremos como base os resultados que vimos no capítulo anterior para construir nossos grafos L -integrais por adição de aresta. Veremos aqui como obter um grafo L -integral adicionando somente uma aresta e em um grafo L -integral dado. Após isso, definiremos um subconjunto dos grafos L -integrais, que são os grafos construtivelmente laplaciano integrais, definido por Kirkland [28]. Esses grafos podem ser obtidos de um conjunto de vértices isolados adicionando uma aresta por vez de tal forma que a cada adição de aresta um novo grafo L -integral é obtido. Kirkland caracterizou os grafos construtivelmente laplaciano integrais através de subgrafos induzidos, mais precisamente, Kirkland mostrou que um grafo é construtivelmente laplaciano integral se e somente se não tiver nenhum P_4 e C_4 como subgrafo induzido. Falaremos de como obter o espectro laplaciano dos grafos construtivelmente laplaciano integrais associando a ele uma árvore direcionada. Também estudaremos os grafos terminais, que são os grafos construtivelmente laplaciano integrais tais que ao adicionarmos uma aresta qualquer não conseguimos construir um grafo L -integral. Mostraremos que um grafo é terminal se e somente se não tiver nenhum P_4 e C_4 como subgrafo induzido e qualquer par de vértices não adjacentes se localizar em um subgrafo induzido igual a $K_2 \cup K_2$. Os resultados que mostraremos neste capítulo podem ser encontrados em [28].

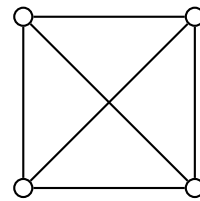
5.1 Grafos construtivamente laplaciano integrais

Definição 5.1. Um grafo é chamado de laplaciano integral ou simplesmente L -integral quando seu espectro em relação à matriz laplaciana for formado somente por números inteiros.

Seguem exemplos de grafos L -integrais na Figura 5.1.



$$\text{Spect}(L(K_{1,3})) = \{0, 1^{(2)}, 4\}$$



$$\text{Spect}(L(K_4)) = \{0, 4^{(3)}\}$$

Figura 5.1 Grafos L -integrais.

Denotaremos por O_n o grafo formado por n vértices isolados.

Definição 5.2. Um grafo G é chamado de construtivamente laplaciano integral quando existe uma sequência de grafos $O_n \equiv G_0, G_1, \dots, G_k \equiv G$ tal que

- (i) G_i é L -integral para $i = 0, \dots, k$
- (ii) Para cada $i = 0, \dots, k - 1$ temos $G_{i+1} = G_i + e$

Todo grafo $K_{1,n}$ é construtivamente laplaciano integral. Em particular, o grafo $K_{1,5}$ Figura 5.2 é um exemplo de grafo construtivamente laplaciano integral.

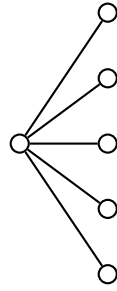
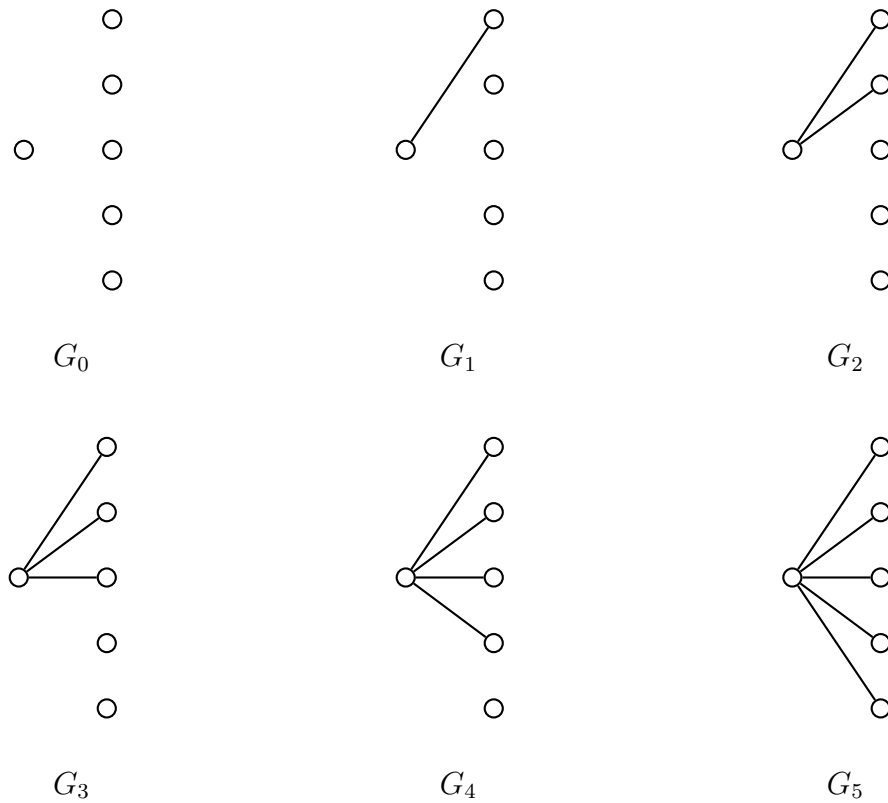


Figura 5.2 Grafo construtivelmente laplaciano integral.

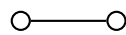
De fato, podemos construir $K_{1,5}$ adicionando uma aresta de cada vez conforme a sequência abaixo:



Observe ainda que para $i = 0, \dots, 4$, temos $G_{i+1} = G_i + e$ e além disso, todos grafos G_i 's são L -inteiros, pois $Spect(L(G_0)) = \{0^{(6)}\}$, $Spect(L(G_1)) = \{0^{(5)}, 2\}$, $Spect(L(G_2)) = \{0^{(4)}, 1, 3\}$, $Spect(L(G_3)) = \{0^{(3)}, 1^{(2)}, 4\}$, $Spect(L(G_4)) = \{0^{(2)}, 1^{(3)}, 5\}$ e $Spect(L(G_5)) = \{0, 1^{(4)}, 6\}$.

Denotaremos por \mathcal{C}_n o conjunto dos grafos construtivamente laplaciano integrais com n vértices.

Cabe observar que nem todo grafo L -integral é construtivamente laplaciano integral basta ver que o grafo C_4 que é L -integral, pois $Spect(L(C_4)) = \{0, 2^{(2)}, 4\}$ mas não é construtivamente laplaciano integral. De fato, note que ao tentarmos construir C_4 adicionando uma aresta por vez de tal maneira que em cada adição uma grafo L -integral é obtido, sempre acabamos tendo um problema ao adicionarmos a terceira aresta. Pois, após adicionarmos as duas primeiras arestas os únicos grafos que podemos gerar a menos de isomorfismo são (ver figura abaixo):



caso 1



caso 2

Logo ao adicionarmos a terceira aresta em ambos os casos acima geraremos um P_4 que sabemos que não é L -integral, já que $Spect(L(P_4)) = \{0, 2, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$. Portanto, não podemos fazer a construção desejada.

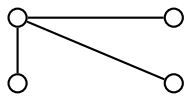
Importante salientar também que a construção de um grafo construtivamente laplaciano integral partindo de vértices isolados em geral não é única, por exemplo, o grafo K_4 é construtivamente laplaciano integral e existem duas maneiras de construir K_4 . Uma das maneiras é:



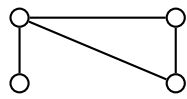
G_0

G_1

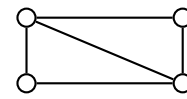
G_2



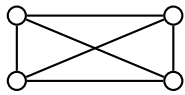
G_3



G_4



G_5



G_6

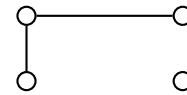
já a outra maneira é



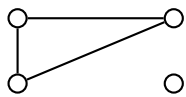
H_0



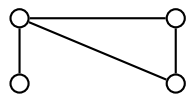
H_1



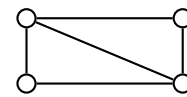
H_2



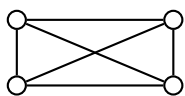
H_3



H_4



H_5



H_6 .

Repare que os grafos G_3 e H_3 das duas construções de K_4 não são isomorfos, portanto, as construções são distintas. Note que nas duas construções evitamos P_4 e C_4 em cada adição de aresta.

A seguir falaremos dos cografos, que é uma classe de grafos muito importante dentro da Teoria de Grafos. A partir de 1970 esta classe foi descoberta e estudada por diversos autores de maneira independente dando origem a diversas

definições e caracterizações distintas. Abaixo segue uma das definições de cografo [6].

Definição 5.3. *Um cografo (ou complementar redutível) é um grafo simples definido de maneira recursiva como segue:*

- i) K_1 é um cografo.*
- ii) Se X e Y são cografos então $X \cup Y$ também é.*
- iii) Se X é um cografo então \overline{X} também é.*

Abaixo seguem algumas caracterizações de cografo G :

- 1-** G pode ser construído a partir de vértices isolados pela operações união disjunta e join.
- 2-** G é a união disjunta de grafos distance-hereditary com diâmetro no máximo 2.
- 3-** Em cada subgrafo H de G , a interseção de cada clique maximal com cada conjunto de vértices independentes maximal de G contém exatamente um único vértice em comum.
- 4-** Cada subgrafo não trivial de G contém pelo menos dois pares de vértices com os mesmos vizinhos.
- 5-** O grafo complementar de um subgrafo conexo de G não trivial é desconexo.
- 6-** Cada subgrafo conexo de G tem diâmetro no máximo 2.
- 7-** G tem a propriedade de que para cada coleção de 4 vértices de G o correspondente subgrafo induzido por estes vértices nunca é um P_4 .

Para as proposições e teoremas que provaremos neste capítulo consideramos a caracterização **7** acima, ou seja, que um cografo nada mais é do que um grafo simples livre de P_4 como subgrafo induzido.

Abaixo seguem exemplos (ver Figura 5.3) de um cografo e um grafo que não é cografo.

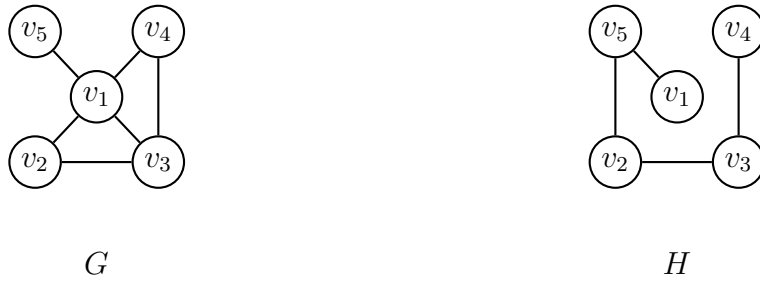


Figura 5.3 G é um cografo e H não é cografo.

De fato, para qualquer coleção de quatro vértices do grafo G acima, o subgrafo induzido por estes vértices nunca é um P_4 , conforme podemos ver abaixo:

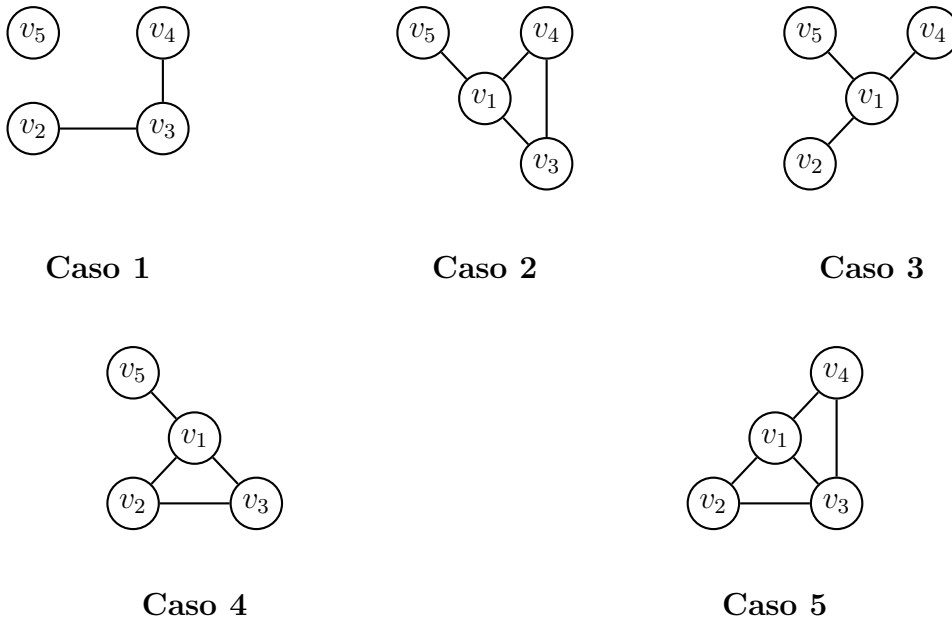
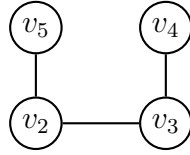


Figura 5.4 G é livre de P_4 .

Já o grafo H não é um cografo pois se tomarmos o subgrafo H' de H induzido pelos vértices v_2, v_3, v_4 e v_5 temos um P_4 como podemos visualizar abaixo:



H'

Figura 5.5 subgrafo induzido H' de H .

O próximo teorema nos ajudará a mostrar o Teorema 5.5, que nos dá uma caracterização dos grafos construtivamente laplaciano integrais.

Teorema 5.4. *Seja $G = (V, E)$ um cografo tal que os vértices v_1 e v_2 em G não são adjacentes. Então a variação espectral inteira ocorre por adição de uma aresta $e = \{v_1, v_2\}$ em G se e somente se $G + e$ também é um cografo.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $G + e$ é um cografo, então $G + e$ é necessariamente L -integral, pois como vimos na caracterização **1** dos cografos, temos que os cografos podem ser construídos de vértices isolados usando as operações join e união. Como a união de grafos L -integrais é um grafo L -integral (pois o espectro da união é a união dos espectros) e o join de grafos L -integrais é um grafo L -integral pelo Teorema 2.1 de [31], concluímos que todo cografo é L -integral. Como G também é L -integral, nós concluímos que ocorre variação espectral inteira sob a adição da aresta e em G .

Reciprocamente, suponhamos que ocorre variação espectral inteira quando adicionamos e em G . Se a variação espectral inteira ocorre em um lugar então pelo Teorema 4.4 temos que $N(v_1) = N(v_2)$. Assim, cada vértice de G é vizinho de v_1 e v_2 ou não é vizinho de nenhum dos dois vértices v_1 e v_2 . Considere um subgrafo H induzido por quatro vértices quaisquer de $G + e$. Se H não contém ambos vértices v_1 e v_2 , então H é também um subgrafo induzido de G , e como G é cografo, por

hipótese, temos que neste caso H não pode ser igual a P_4 . Se H contém ambos vértices v_1 e v_2 , então cada vértice de $G + e$ distinto de v_1 e v_2 é adjacente a ambos v_1 e v_2 ou a nenhum dos dois, portanto é fácil ver que neste caso H não é um P_4 , como ilustra a figura abaixo:

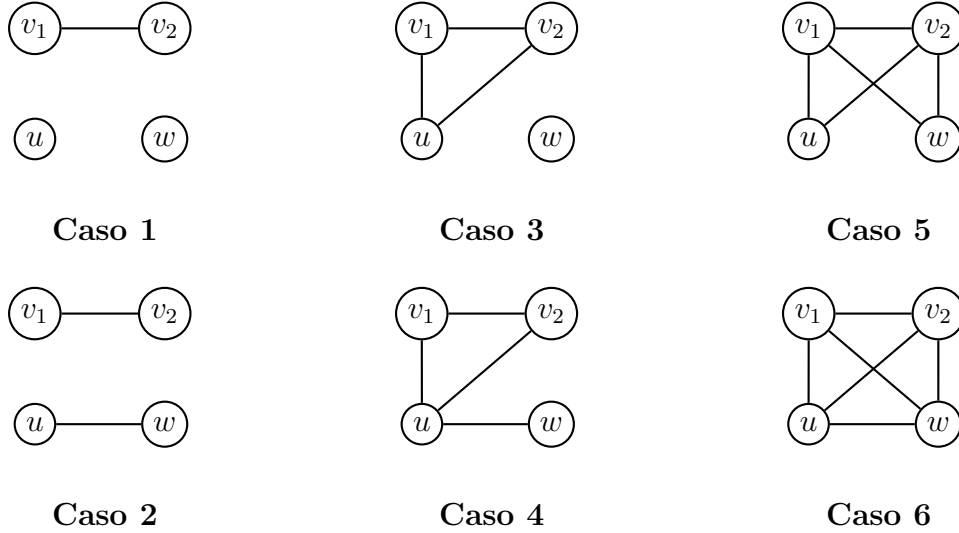


Figura 5.6 Casos possíveis para o subgrafo H .

Finalmente, suponhamos que ocorra variação espectral inteira em dois lugares sob adição da aresta e em G . Então temos que $N(v_1) \neq N(v_2)$. Consideremos os seguintes subconjuntos:

$$S_1 = N(v_1) \setminus N(v_2), S_2 = N(v_2) \setminus N(v_1), S_3 = N(v_1) \cap N(v_2) \text{ e } S_4 = \{v \in V \mid v \notin N(v_1) \cup N(v_2) \cup \{v_1, v_2\}\}.$$

Observe que estes subconjuntos são os que geram a partição da matriz $L(G)$ (do Teorema 4.11). Uma vez que $N(v_1) \neq N(v_2)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $S_1 \neq \emptyset$. Note que, por hipótese, G não contém nenhum P_4 como subgrafo induzido, portanto não pode haver nenhuma aresta ligando vértices de S_1 e S_2 . De fato, suponha que exista um vértice $a \in S_1$ ligado a um vértice $b \in S_2$; assim, o subgrafo induzido por v_1, a, b, v_2 será um P_4 em G . Logo, duas situações podem ocorrer: $S_2 = \emptyset$ ou $L_{12} = 0$. Agora suponha que exista um vértice $v \in S_4$

que é adjacente a um vértice $u \in S_1$. Como $L_{41}\mathbf{1} = L_{42}\mathbf{1}$, por (4.36) do Teorema 4.11, necessariamente existe um vértice $w \in S_2$ tal que v é adjacente a w . Sendo assim, o subgrafo induzido pelos vértices v_1, u, v, w será um P_4 em G (observe que u e w não são adjacentes) o que é uma contradição. Nós concluímos então que $S_4 = \emptyset$ ou $L_{14} = 0$. Agora note que, dado um vértice $z \in S_1$ temos que z está ligado com todos vértices de S_3 , caso contrário, z, v_1, v_2 e w induzem um P_4 em G , logo segue que $L_{13} = -J$, onde J é a matriz cujas entradas são todas iguais a 1. Observar ainda que $L_{11}\mathbf{1} = |S_3| + 1$ e como $L_{11}\mathbf{1} = (d(v_2) + 1)\mathbf{1}$, por (4.33) do Teorema 4.11, concluímos que $|S_3| = d(v_2)$ e $S_2 = \emptyset$. Deste modo concluímos que não há P_4 como subgrafo induzido em $G + e$, ver Figura 5.7. \square

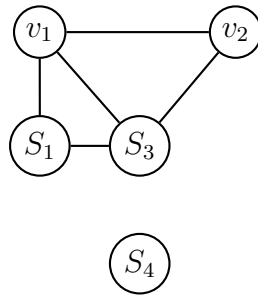


Figura 5.7 Configuração dos vértices de $G + e$.

O próximo teorema nos dá uma caracterização dos grafos construtivamente laplaciano integrais através dos subgrafos induzidos.

Teorema 5.5. *Seja G um grafo com n vértices. Então G é construtivamente laplaciano integral se e somente se ele não tem nenhum subgrafo induzido igual a P_4 e nenhum subgrafo induzido igual a C_4 .*

Demonstração. Suponha que G é construtivamente laplaciano integral, logo pela definição existe uma sequência de grafos $O_n \equiv G_0, G_1, \dots, G_k \equiv G$ tal que

- (i) G_i é L -integral, para $i = 0, \dots, k$
- (ii) Para cada $i = 0, \dots, k - 1$, temos $G_{i+1} = G_i + e$.

Evidentemente, O_n não contém subgrafo induzido igual a P_4 ou C_4 . Além disso, para cada $i = 1, \dots, k - 1$, ocorre variação espectral inteira quando construímos G_{i+1} de G_i , pelo Teorema 5.4, concluímos que G_{i+1} é um cografo. Portanto, G é um cografo, ou seja, G não contém P_4 como subgrafo induzido. Note também que G não contém C_4 como subgrafo induzido, pois a única maneira de isso ocorrer seria se G_{k-1} tivesse um P_4 como subgrafo induzido e acabamos de ver que isso não acontece.

Reciprocamente, suponha que G é um grafo com n vértices que não tem nenhum subgrafo induzido igual a C_4 e P_4 . Provaremos por indução em n que G é construtivelmente laplaciano integral. Note que para $n \leq 4$ isto claramente acontece. Suponha que acontece para $n - 1 \geq 4$. Evidentemente G é construtivelmente laplaciano integral se e somente se suas componentes conexas também forem. Podemos supor sem perda de generalidade que G é conexo. Como, por hipótese, G não tem nenhum subgrafo induzido igual a P_4 , segue que G pode ser escrito como $H_1 \vee H_2$ para algum par de grafos H_1 e H_2 ver [6]. Se nenhum dos grafos H_1 e H_2 é completo então G terá um C_4 como subgrafo induzido, contrariando a hipótese. De fato, se H_1 e H_2 não são completos, então existem vértices não adjacentes w_1 e u_1 pertencentes ao grafo H_1 e dois vértices w_2 e u_2 não adjacentes pertencentes ao grafo H_2 . Note que o subgrafo induzido por w_1, u_1, w_2 e u_2 é um C_4 em G , visto que w_1 e u_1 são adjacentes a w_2 e u_2 . Logo, pelo menos um dos grafos H_1 e H_2 é completo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que H_1 seja completo. Seja v um vértice em H_1 . Observe que v está ligado a todos os vértices de H_1 , pois H_1 é completo e também está ligado a todos os vértices de H_2 pelo join. Portanto, $d(v) = n - 1$, e podemos escrever $G = K_1 \vee H_3$, para algum grafo H_3 sem P_4 e C_4 como subgrafos induzidos. Por hipótese de indução, H_3 é construtivelmente laplaciano integral, logo, por definição, existe uma sequência de grafos tal que:

$$O_{n-1} \equiv A_0, A_1, \dots, A_p \equiv H_3 \text{ tal que}$$

(i) A_i é L -integral para $i = 1, \dots, p$

(ii) Para cada $i = 1, \dots, p - 1$ temos $A_{i+1} = A_i + e$

Considerando a sequência de grafos $B_0 = O_n, B_1 = K_{1,1} \cup O_{n-2}, B_2 = K_{2,1} \cup O_{n-3}, B_3 = K_{3,1} \cup O_{n-4}, \dots, B_{n-1} = K_{n-1,1}$ seguida por $B_n = K_1 \vee A_1, B_{n+1} = K_1 \vee A_2, \dots, B_{n-1+p} = K_1 \vee A_p$. Com esta sequência em mãos facilmente verificamos que G é construtivamente laplaciano integral. De fato, O_n é obviamente L -integral, e para $i = 1, \dots, n - 1$ temos que os grafos $B_i = K_{i,1} \cup O_{n-i-1}$ também são L -integrais pois é a união de dois grafos L -integrais (visto que $K_{i,1}$ é um grafo bipartido completo é L -integral pelo Corolário 6.21 e a pela Proposição 3.20). Já os grafos $B_{n+j-1} = K_1 \vee A_j$ com $j = 1, \dots, p$ são L -integrais pela Observação 3.15. Além disso, para todo $i = n, \dots, n - 1 + p$ temos:

$$B_i = K_1 \vee A_{i+1-n} = K_1 \vee (A_{i-n} + e) = B_{i-1} + e.$$

Já para $i = 1, \dots, n - 1$ temos:

$$B_{i+1} = K_{i+1,1} \cup O_{n-i} = K_{i,1} \cup O_{n-i-1} + e = B_i + e.$$

Note que, no caso em que $i = n - 1$ temos que $B_{n-1} = K_{n-1}$ e $B_n = K_1 \vee A_1$ e, portanto,

$$B_n = K_1 \vee (A_0 + e) = K_1 \vee (O_{n-1} + e) = K_{n-1,1} + e = B_{n-1} + e.$$

Logo concluímos que G é construtivamente laplaciano integral. \square

E usando o Teorema 5.5 podemos verificar que o grafo $G = K_1 \vee ((K_1 \vee (K_1 \cup K_1)) \cup K_1)$ (ver Figura 5.3) é construtivamente laplaciano integral sem precisar verificar a existência da sequência de grafos satisfazendo as propriedades necessárias para isto. De fato, basta olhar a Figura 5.4 e notar que o subgrafo induzido

por qualquer coleção de quatro vértices nunca é um P_4 ou C_4 . Além disso, note que podemos usar a construção do Teorema 5.5 para obter a sequência de grafos L -integrals que dão origem ao grafo $G = K_1 \vee ((K_1 \vee (K_1 \cup K_1)) \cup K_1)$, conforme a Figura 5.8. Repare que iniciamos a construção de G_1 da Figura 5.3 pelo vértice v_1 de grau $n - 1$ assim como na demonstração do teorema acima.

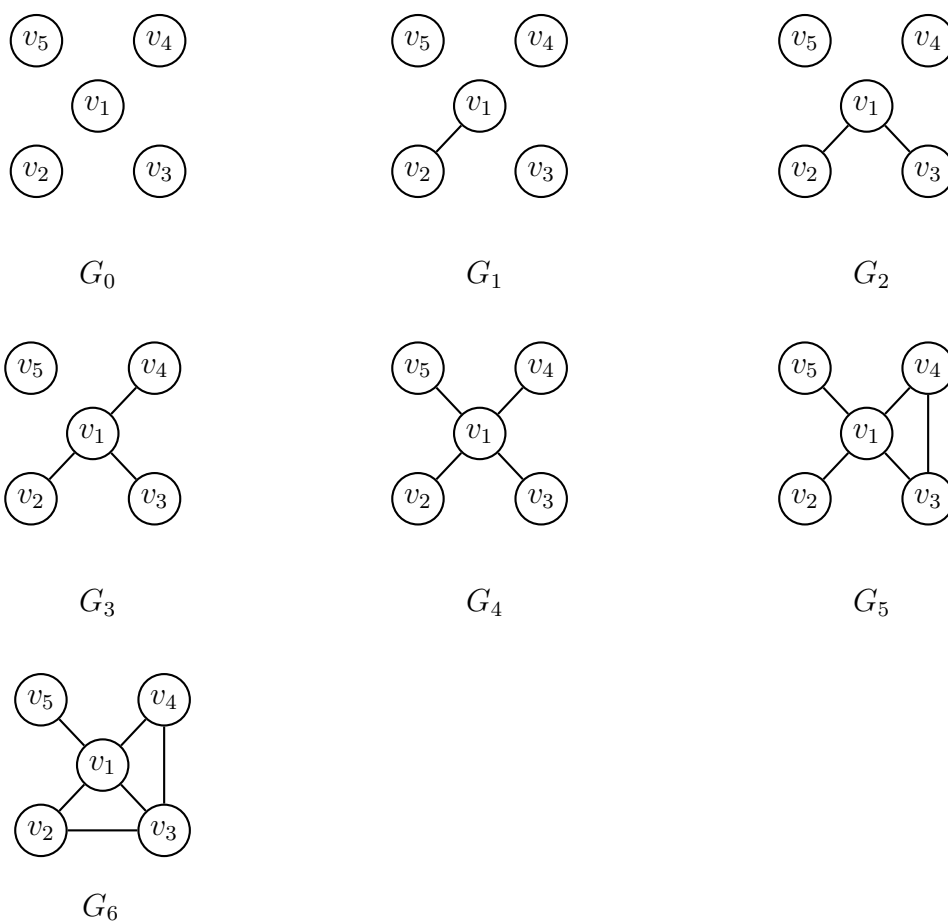
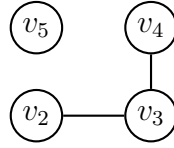


Figura 5.8 Construção do grafo $K_1 \vee ((K_1 \vee (K_1 \cup K_1)) \cup K_1)$.

Além disso, note que o grafo H_3 do teorema acima é o grafo da Figura 5.9.



H_3

Figura 5.9 Grafo H_3 do Teorema 5.5.

Observe ainda que para $i = 0, \dots, 5$, temos $G_{i+1} = G_i + e$. Além disso, $Spect(L(G_0)) = \{0^{(5)}\}$, $Spect(L(G_1)) = \{0^{(4)}, 2\}$, $Spect(L(G_2)) = \{0^{(3)}, 1, 3\}$, $Spect(L(G_3)) = \{0^{(2)}, 1^{(2)}, 4\}$, $Spect(L(G_4)) = \{0, 1^{(3)}, 5\}$, $Spect(L(G_5)) = \{0, 1^{(2)}, 3, 5\}$ e $Spect(L(G_6)) = \{0, 1, 2, 4, 5\}$.

O corolário a seguir nos diz como concluir que um grafo obtido de um grafo construtivamente laplaciano integral adicionando uma aresta é construtivamente laplaciano integral analisando somente a configuração dos vizinhos dos vértices que estamos conectando com a nova aresta adicionada.

Corolário 5.6. *Seja G um grafo construtivamente laplaciano integral, e que os vértices v_1 e v_2 de G não são adjacentes. Considere S o conjunto dos vértices de G distintos de v_1 e v_2 que não são adjacentes a nenhum dos dois vértices v_1 e v_2 . Então o grafo $G + e$ é laplaciano integral (e, portanto, construtivamente laplaciano integral) se e somente se uma das seguintes situações abaixo acontece:*

- a) $N(v_1) = N(v_2)$.
- b) $N(v_2) \subseteq N(v_1)$ e nenhum vértice de $N(v_1) \setminus N(v_2)$ é adjacente a qualquer vértice de S .
- c) $N(v_1) \subseteq N(v_2)$ e nenhum vértice de $N(v_2) \setminus N(v_1)$ é adjacente a qualquer vértice de S .

A prova deste corolário segue direto do Teorema 5.5, pelo fato de que se os vizinhos de v_1 e v_2 não satisfizerem as condições **a)**, **b)** e **c)** acima, automaticamente teremos um P_4 em $G + e$ com $e = \{v_1, v_2\}$.

Observação 5.7. *Uma consequência imediata do teorema que acabamos de mostrar é que se um grafo G tem dois ou mais vértices, é conexo e $G \in \mathcal{C}_n$, então G pode ser escrito como $G = K_p \vee (H_1 \cup \dots \cup H_q)$ para algum $q \geq 2$ em que H_i é um grafo conexo e construtivelmente laplaciano integral. De fato, vimos que nestas condições $G = K_1 \vee G'$ em que $G' \in \mathcal{C}_{n-1}$. Ou seja, G tem pelo menos um vértice de grau $n-1$. Se $G \neq K_n$ e tem p vértices de grau $n-1$, nós encontramos que $G = K_p \vee H$ em que $H \in \mathcal{C}_{n-p}$ e H não é conexo e não tem vértices de grau $n-p-1$.*

5.2 Obtendo espectro de $G \in \mathcal{C}_n$ através da árvore direcionada

Seja G um grafo conexo construtivelmente laplaciano integral. Nesta seção vamos construir indutivamente a árvore direcionada que denotamos por $\vec{T}(G)$. A seguir provaremos um resultado que mostra como $\vec{T}(G)$ pode ser usada para obter o espectro de $L(G)$. Em $\vec{T}(G)$ cada vértice tem um peso m_v . Para construir esta árvore seguimos os dois passos abaixo:

1- Se $G = K_m$, para $m \geq 1$, então $\vec{T}(G)$ é um vértice isolado, a raiz, com peso m .

2- Suponha que G não é completo. Então G , conforme discutimos na Observação 5.7, pode ser escrito como $G = K_p \vee (H_1 \cup \dots \cup H_q)$ para algum $p \geq 1$ e $q \geq 2$, onde H_1, \dots, H_q são grafos conexos construtivelmente laplaciano integrais. Para cada $i = 1, \dots, q$, seja v_i um vértice raiz de $\vec{T}(H_i)$. Assim, $\vec{T}(G)$ é obtido de $\vec{T}(H_1) \cup \dots \cup \vec{T}(H_q)$ adicionando um novo vértice v_0 , com peso p , e um arco de v_i a v_0 , para $i = 1, \dots, q$.

Observe que cada arco em $\vec{T}(G)$ é orientado em direção ao vértice raiz v_0 , e ainda que cada vértice de $\vec{T}(G)$ tem grau de entrada zero ou pelo menos dois.

Abaixo seguem alguns exemplos (ver figuras 5.10 e 5.11) de árvores direcionadas de alguns grafos construtivamente laplaciano integrais.

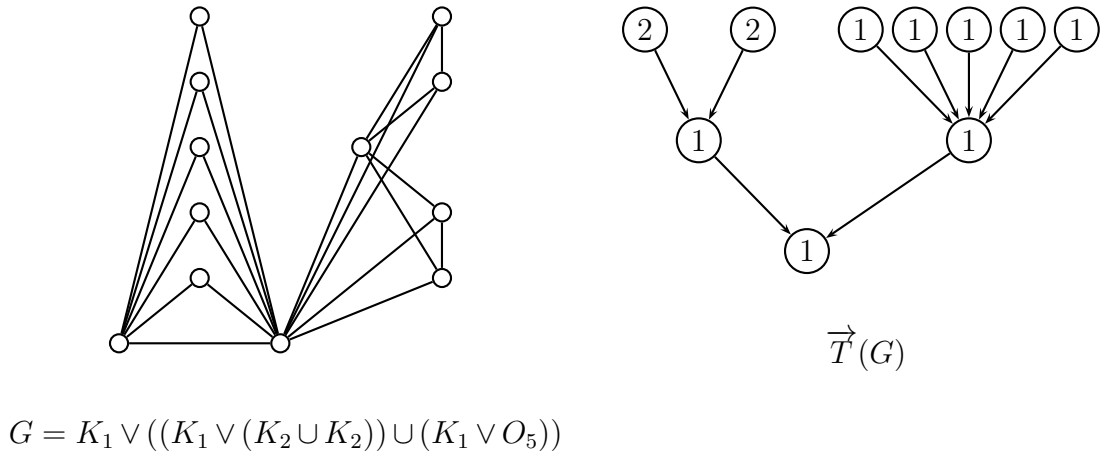


Figura 5.10 Árvore direcionada de G .

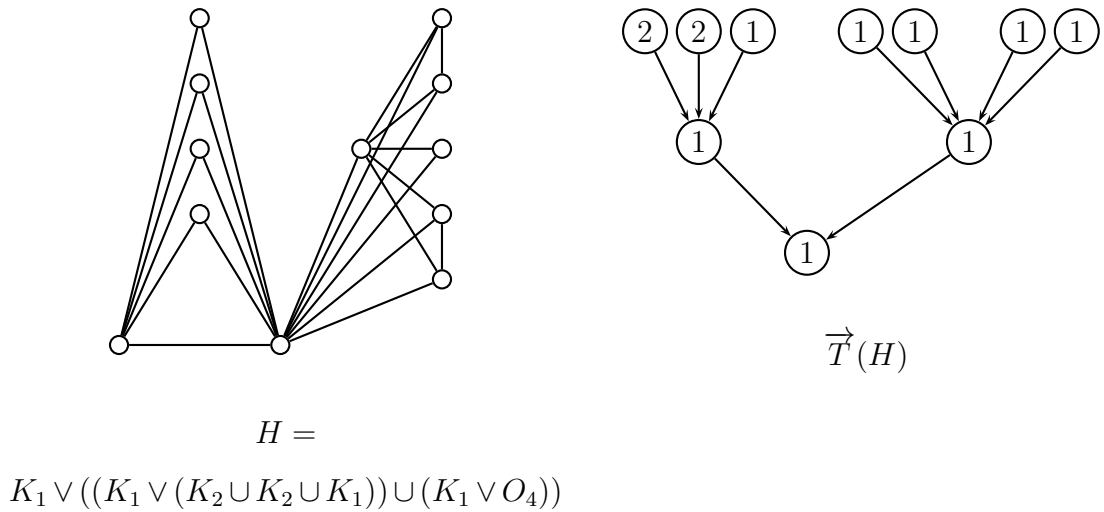


Figura 5.11 Árvore direcionada de H .

Seja A o conjunto dos vértices de $\vec{T}(G)$ com grau de entrada pelo menos dois e B o conjunto dos vértices de $\vec{T}(G)$ com grau de entrada zero.

Façamos as seguintes definições:

- (i) Para cada vértice v de $\vec{T}(G)$, seja s_v a soma dos pesos dos vértices do único caminho que vai de v a v_0 (aqui nós admitimos o caso em que o caminho é vazio, ou seja, $v = v_0$, com $s_{v_0} = m_{v_0}$).
- (ii) Para cada $v \in A$, seja r_v a soma dos pesos dos vértices antes de v que estão no caminho em direção a v_0 passando por v .
- (iii) Para cada vértice v de $\vec{T}(G)$, d_v é o grau de entrada de v .

Agora vamos definir os seguintes multiconjuntos:

- (iv) Para cada $v \in A$, seja $L_1(v) = \{s_v^{(d_v-1)}\}$ e $L_2(v) = \{(r_v + s_v)^{(m_v)}\}$.
- (v) Para cada $v \in B$, seja $L_3(v) = \{s_v^{(m_v-1)}\}$.

O teorema abaixo nos diz exatamente como obter o espectro da matriz laplaciana de um grafo $G \in \mathcal{C}_n$ usando os pesos e os graus de entrada de cada um dos vértices da árvore direcionada correspondente.

Teorema 5.8. [28] *Suponha que G é um grafo conexo e construtivamente laplaciano integral. Seja $\Lambda(G)$ a parte não nula do espectro $L(G)$. Então $\Lambda(G)$ é dado pelo multiconjunto $\bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v)$.*

Demonstração. Nós procederemos por indução no número de vértices do grafo G . Note que se G é um grafo completo com m vértices, então $\vec{T}(G)$ é um vértice isolado v_0 de peso m , $A = \emptyset$, e $L_3(v_0) = \{m^{(m-1)}\}$, pela proposições 6.16 e 3.19 concluímos que $\Lambda(G) = L_3(v_0)$ (observe que no caso $m = 1$ ambos os conjuntos são vazios). No caso particular em que $G = K_2$ (note que este é o único com dois vértices) nós temos que $\Lambda(K_2) = L_3(v_0) = \{2\}$ e, portanto, a base de indução é obtida.

Agora suponhamos que G tem mais de dois vértices e não é o grafo completo. Então pela Observação 5.7, G pode ser escrito como $G = K_p \vee (H_1 \cup \dots \cup H_q)$

para algum $p, q \in \mathbb{N}$ com $q \geq 2$, onde cada H_i é um grafo conexo construtivamente laplaciano integral.

Suponha que para cada i , H_i tem n_i vértices. Considere v_0 o vértice raiz de $\vec{T}(G)$, que tem peso p . Então $v_0 \in A$, $L_1(v_0) = \{p^{(d_{v_0}-1)}\}$ enquanto $L_2(v_0) = \{(p + \sum_{i=1}^q n_i)^{(p)}\}$. Sejam A_i o conjunto dos vértices de $\vec{T}(H_i)$ de grau de entrada pelo menos dois e B_i o conjunto dos vértices de $\vec{T}(H_i)$ grau de entrada zero. Observe que para cada vértice $v \neq v_0$, nós temos $v \in \vec{T}(H_i)$ e note que v está no conjunto A ou B em $\vec{T}(G)$ de acordo como v está em A_i e o B_i . Além disso, para computar s_v do vértice v de $\vec{T}(G)$, nós simplesmente adicionamos p ao correspondente valor de s_v considerando v em $\vec{T}(H_i)$. E defina s_v^i e r_v^i olhando para $v \in \vec{T}(H_i)$ analogamente como definimos s_v e r_v para $v \in \vec{T}(G)$. Faça o mesmo para os conjuntos $L_1^i(v) = \{s_v^{i(d_v-1)}\}$, $L_2^i(v) = \{(r_v^i + s_v^i)^{(m_v)}\}$ e $L_3^i(v) = \{s_v^{i(m_v-1)}\}$. Sabendo que $s_v = s_v^i + p$, $r_v = r_v^i$, $A = \{v_0\} \cup A_1 \cup \dots \cup A_q$ e $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$ temos que:

$$\begin{aligned} \bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v) &= L_1(v_0) \cup L_2(v_0) \cup \bigcup_{v \in A - \{v_0\}} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v) \\ &= L_1(v_0) \cup L_2(v_0) \cup \bigcup_{i=1}^q \left(\bigcup_{v \in A_i} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B_i} L_3(v) \right) \\ &= L_1(v_0) \cup L_2(v_0) \cup \bigcup_{i=1}^q \left(\bigcup_{v \in A_i} (L_1^i(v) \cup L_2^i(v) + p) \cup \bigcup_{v \in B_i} (L_3^i(v) + p) \right). \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução na última igualdade concluímos que:

$$\bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v) = \{p^{(d_{v_0}-1)}\} \cup \{(p + \sum_{i=1}^q n_i)^{(p)}\} \cup \bigcup_{i=1}^q \{\Lambda(H_i) + p\}.$$

Aplicando a Observação 3.15 no segundo membro da igualdade acima segue que:

$$\Lambda(G) = \{p^{(d_{v_0}-1)}\} \cup \{(p + \sum_{i=1}^q n_i)^{(p)}\} \cup \bigcup_{i=1}^q \{\Lambda(H_i) + p\}.$$

Portanto, $\Lambda(G) = \bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v)$ como queríamos mostrar. \square

A seguir exibiremos dois exemplos onde usamos a técnica do Teorema 5.8 (ver figuras 5.12 e 5.13), as árvores direcionadas dos exemplos abaixo referem-se aos grafos das figuras 5.10 e 5.11.

Abaixo segue o **exemplo 1**.

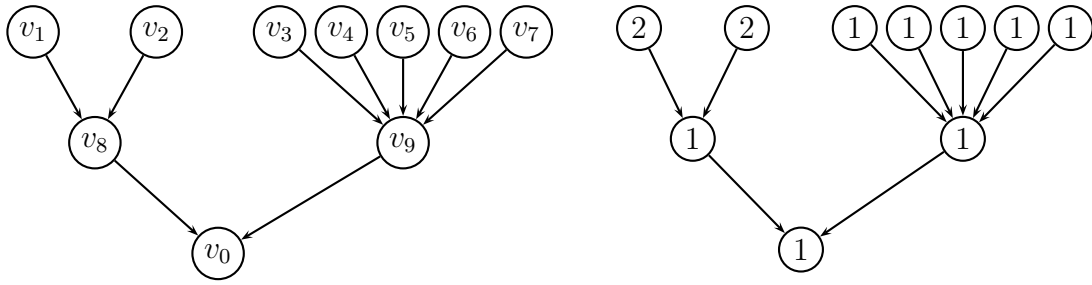


Figura 5.12 Rotulando os vértices da árvore direcionada de G .

Repare que na Figura 5.12 temos $A = \{v_8, v_9, v_0\}$ e $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Além disso, $m_{v_1} = 2, m_{v_2} = 2, m_{v_3} = 1, m_{v_4} = 1, m_{v_5} = 1, m_{v_6} = 1, m_{v_7} = 1, m_{v_8} = 1, m_{v_9} = 1, m_{v_0} = 1$ e $d_{v_8} = 2, d_{v_9} = 5$ e $d_{v_0} = 2$. Seguindo temos:

$$s_{v_1} = m_{v_1} + m_{v_8} + m_{v_0} = 4$$

$$s_{v_6} = m_{v_6} + m_{v_9} + m_{v_0} = 3$$

$$s_{v_2} = m_{v_2} + m_{v_8} + m_{v_0} = 4$$

$$s_{v_7} = m_{v_7} + m_{v_9} + m_{v_0} = 3$$

$$s_{v_3} = m_{v_3} + m_{v_9} + m_{v_0} = 3$$

$$s_{v_8} = m_{v_8} + m_{v_0} = 2$$

$$s_{v_4} = m_{v_4} + m_{v_9} + m_{v_0} = 3$$

$$s_{v_9} = m_{v_9} + m_{v_0} = 2$$

$$s_{v_5} = m_{v_5} + m_{v_9} + m_{v_0} = 3$$

$$s_{v_0} = m_{v_0} = 1$$

$$r_{v_8} = m_{v_1} + m_{v_2} = 4$$

$$r_{v_9} = m_{v_3} + m_{v_4} + m_{v_5} + m_{v_6} + m_{v_7} = 5$$

$$r_{v_0} = m_{v_1} + m_{v_2} + m_{v_3} + m_{v_4} + m_{v_5} + m_{v_6} + m_{v_7} + m_{v_8} + m_{v_9} = 11$$

Calculando os multiconjuntos $L_1(v)$, $L_2(v)$ e $L_3(v)$ obtemos as seguintes tabelas.

| B | $L_3(v) = \{s_v^{(m_v-1)}\}$ |
|-------|------------------------------|
| v_1 | $\{4^{(1)}\}$ |
| v_2 | $\{4^{(1)}\}$ |
| v_3 | $\{3^{(0)}\}$ |
| v_4 | $\{3^{(0)}\}$ |
| v_5 | $\{3^{(0)}\}$ |
| v_6 | $\{3^{(0)}\}$ |
| v_7 | $\{3^{(0)}\}$ |

Tabela 5.1 Multiconjuntos $L_3(v)$.

| A | $L_1(v) = \{s_v^{(d_v-1)}\}$ | $L_2(v) = \{(r_v + s_v)^{(m_v)}\}$ |
|-------|------------------------------|------------------------------------|
| v_8 | $\{2^{(1)}\}$ | $\{6^{(1)}\}$ |
| v_9 | $\{2^{(4)}\}$ | $\{7^{(1)}\}$ |
| v_0 | $\{1^{(1)}\}$ | $\{12^{(1)}\}$ |

Tabela 5.2 Multiconjuntos $L_1(v)$ e $L_2(v)$.

Logo pelo Teorema 5.8, temos que:

$$\Lambda(G) = \bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v) = \{1, 2^{(5)}, 4^{(2)}, 6, 7, 12\}.$$

Portanto, $Spect(L(G)) = \{0, 1, 2^{(5)}, 4^{(2)}, 6, 7, 12\}$.

A seguir o **exemplo 2**.

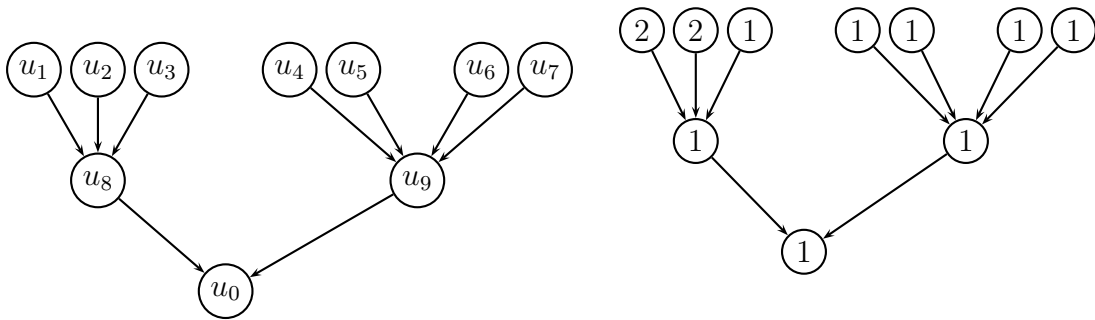


Figura 5.13 Rotulando os vértices da árvore direcionada de H .

Analisando a Figura 5.13 vemos que $A = \{u_8, u_9, u_0\}$ e $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$. Além disso, $m_{u_1} = 2, m_{u_2} = 2, m_{u_3} = 1, m_{u_4} = 1, m_{u_5} = 1, m_{u_6} = 1, m_{u_7} = 1, m_{u_8} = 1, m_{u_9} = 1, m_{u_0} = 1$ e $d_{u_8} = 3, d_{u_9} = 4$ e $d_{u_0} = 2$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
s_{u_1} &= m_{u_1} + m_{u_8} + m_{u_0} = 4 & s_{u_6} &= m_{u_6} + m_{u_9} + m_{u_0} = 3 \\
s_{u_2} &= m_{u_2} + m_{u_8} + m_{u_0} = 4 & s_{u_7} &= m_{u_7} + m_{u_9} + m_{u_0} = 3 \\
s_{u_3} &= m_{u_3} + m_{u_8} + m_{u_0} = 3 & s_{u_8} &= m_{u_8} + m_{u_0} = 2 \\
s_{u_4} &= m_{u_4} + m_{u_9} + m_{u_0} = 3 & s_{u_9} &= m_{u_9} + m_{u_0} = 2 \\
s_{u_5} &= m_{u_5} + m_{u_9} + m_{u_0} = 3 & s_{u_{10}} &= m_{u_0} = 1 \\
\\
r_{u_8} &= m_{u_1} + m_{u_2} + m_{u_3} = 5 \\
r_{u_9} &= m_{u_4} + m_{u_5} + m_{u_6} + m_{u_7} = 4 \\
r_{u_0} &= m_{u_1} + m_{u_2} + m_{u_3} + m_{u_4} + m_{u_5} + m_{u_6} + m_{u_7} + m_{u_8} + m_{u_9} = 11
\end{aligned}$$

Calculando os multiconjuntos $L_1(v)$, $L_2(v)$ e $L_3(v)$ obtemos as seguintes tabelas.

| B | $L_3(v) = \{s_v^{(m_v-1)}\}$ |
|-------|------------------------------|
| u_1 | $\{4^{(1)}\}$ |
| u_2 | $\{4^{(1)}\}$ |
| u_3 | $\{3^{(0)}\}$ |
| u_4 | $\{3^{(0)}\}$ |
| u_5 | $\{3^{(0)}\}$ |
| u_6 | $\{3^{(0)}\}$ |
| u_7 | $\{3^{(0)}\}$ |

Tabela 5.3 Multiconjuntos $L_3(u)$.

| A | $L_1(v) = \{s_v^{(d_v-1)}\}$ | $L_2(v) = \{(r_v + s_v)^{(m_v)}\}$ |
|-------|------------------------------|------------------------------------|
| u_8 | $\{2^{(2)}\}$ | $\{7^{(1)}\}$ |
| u_9 | $\{2^{(3)}\}$ | $\{6^{(1)}\}$ |
| u_0 | $\{1^{(1)}\}$ | $\{12^{(1)}\}$ |

Tabela 5.4 Multiconjuntos $L_1(u)$ e $L_2(u)$.

Logo pelo Teorema 5.8, temos que:

$$\Lambda(H) = \bigcup_{v \in A} (L_1(v) \cup L_2(v)) \cup \bigcup_{v \in B} L_3(v) = \{1, 2^{(5)}, 4^{(2)}, 6, 7, 12\}.$$

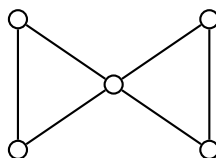
Portanto, $Spect(L(H)) = \{0, 1, 2^{(5)}, 4^{(2)}, 6, 7, 12\}$.

5.3 Grafos terminais

Nesta seção caracterizaremos os grafos terminais através dos subgrafos induzidos, que são os grafos construtivamente laplaciano integrais onde não se pode adicionar nenhuma aresta de tal maneira que obtenhamos um novo grafo L -integral.

Definição 5.9. Um grafo $G \in \mathcal{C}_n$ é chamado de terminal se ao adicionarmos qualquer aresta em G falha a construção de um grafo L -integral.

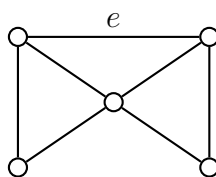
Na Figura 5.14 segue um exemplo de grafo terminal.



G

Figura 5.14 Grafo terminal G .

Note que $G \in \mathcal{C}_5$ (Figura 5.14) e ao adicionarmos qualquer aresta em G não conseguimos produzir um grafo L -integral. De fato, ao adicionarmos uma aresta qualquer e em G , obtemos a menos de isomorfismo o grafo abaixo.



$G + e$

E temos que $Spect(L(G + e)) = \{0, 3, 5, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$, portanto, G é um grafo terminal.

O próximo resultado caracteriza os grafos terminais através dos subgrafos induzidos.

Teorema 5.10. *Um grafo G é terminal se e somente se ambas condições abaixo são satisfeitas:*

(i) *G não tem P_4 e C_4 como subgrafos induzidos;*

(ii) *cada par de vértices não adjacentes de G se localiza em um subgrafo induzido igual a $K_2 \cup K_2$.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que (i) e (ii) acontecem. Como G satisfaz (i), pelo Teorema 5.5 G é obrigatoriamente construtivelmente laplaciano integral. Além disso, por (ii) se adicionarmos qualquer aresta em G teremos que o grafo $G+e$ terá um subgrafo induzido igual a P_4 . Logo $G+e$ não é construtivelmente laplaciano integral e como G é construtivelmente laplaciano integral concluímos $G+e$ não pode ser L -integral. Portanto, G é um grafo terminal.

Reciprocamente, suponhamos que G é um grafo terminal com n vértices. Mostraremos por indução em n que G satisfaz as duas condições. Por definição de grafo terminal G é construtivelmente laplaciano integral e pelo Teorema 5.5 temos que (i) acontece. Note que para $n = 2$ as condições são trivialmente satisfeitas, já que neste caso temos $G = K_2$. Agora suponha que $n \geq 3$. Se G é conexo pela Observação 5.7 temos que G pode ser escrito como $G = K_1 \vee H$ para algum grafo H construtivelmente laplaciano integral com $n - 1$ vértices. Note que H também será um grafo terminal, pois caso contrário G não seria um grafo terminal. Aplicando a hipótese de indução em H concluímos que G obrigatoriamente satisfaz a condição (ii), pois quaisquer par de vértices não adjacentes em G estão em H .

Agora suponha que G não é conexo. Logo $G = G_1 \cup \dots \cup G_k$ onde cada G_i é um grafo construtivelmente laplaciano integral. Evidentemente cada G_i é um grafo terminal, pois caso contrário G não seria um grafo terminal, visto que o espectro da união é a união dos espectros. Note que nenhum dos G_i 's pode ser um vértice isolado, caso contrário, bastaria ligar o vértice isolado ao vértice de maior

grau de algum G_j para construir um grafo L -integral. Portanto, cada G_i é um grafo construtivelmente laplaciano integral com pelo menos dois vértices. Observe ainda que cada par de vértices não adjacentes de G pertencentes a G_i 's distintos se localizam em um subgrafo induzido igual a $K_2 \cup K_2$. Além disso, da hipótese de indução, cada par de vértices não adjacentes pertencentes ao mesmo G_i se localizam em um subgrafo induzido igual a $K_2 \cup K_2$. Logo a propriedade (ii) segue como desejado. \square

Observe que usando o Teorema 5.10 podemos verificar rapidamente que o grafo da Figura 5.14 é terminal. Neste capítulo estudamos alguns importantes resultados do artigo do Kirkland [28]. É importante salientar que neste artigo Kirkland também fala da relação entre os grafos construtivelmente laplaciano integrais e os grafos integralmente completáveis. Os grafos integralmente completáveis são os grafos L -integrais em que se pode ir adicionando uma aresta por vez até que o grafo completo seja obtido, de tal maneira que a cada adição de aresta sempre um grafo L -integral é gerado. Mais precisamente, G é um grafo integralmente completável se existe uma sequência de grafos L -integrais G_0, G_1, \dots, G_k tal que $G_0 = G, G_1, \dots, G_k \equiv K_n$ e para cada $i = 0, \dots, k - 1$ temos $G_{i+1} = G_i + e$. Kirkland observa que um grafo G é construtivelmente laplaciano integral se e somente se seu grafo complementar \overline{G} é integralmente completável.

Por último, Kirkland fala dos grafos threshold (ver Figura 5.15) que são um subconjunto dos cografos, mais especificamente, são os grafos livres de P_4 , C_4 e $K_2 \cup K_2$ como subgrafos induzidos. Logo os grafos threshold são L -integrais, mais do que isso, são construtivelmente laplaciano integrais.

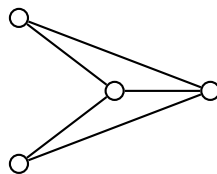


Figura 5.15 Grafo threshold.

Ele observa (com ajuda do Teorema 2.4 de [27] e o Teorema 5.5 que vimos neste capítulo) que um grafo G é integralmente completável e construtivamente laplaciano integral se e somente se G é um threshold.

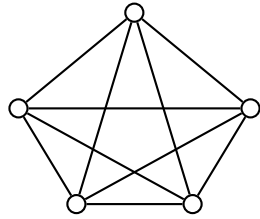
6 GRAFOS INTEGRAIS E Q -INTEGRAIS

Neste capítulo continuaremos nosso estudo sobre a integralidade de grafos, mas com foco nas matrizes de adjacência e laplaciana sem sinal. Este capítulo está dividido em 3 seções onde estudaremos a integralidade dos grafos em relação às duas matrizes (adjacência e laplaciana sem sinal) separadamente. Na primeira seção falaremos sobre os grafos integrais, que são os grafos que têm o espectro em relação à matriz de adjacência formado somente por números inteiros. Exibiremos e provaremos que algumas operações mantêm a integralidade, ou seja, operações que quando aplicadas em um grafo integral geram um novo grafo integral. Também mostraremos a existência de uma família com infinitos grafos integrais. Já na segunda seção estudaremos os grafos Q -integrais, que são os grafos que têm o espectro em relação à matriz laplaciana sem sinal formada somente por inteiros. Provaremos alguns resultados que serão fundamentais para construirmos famílias de grafos Q -integrais através do join de grafos Q -integrais e regulares. Finalmente, na última seção falaremos das famílias com infinitos grafos Q -integrais. As definições e resultados que mostraremos neste capítulo podem ser vistos em [12, 15, 24].

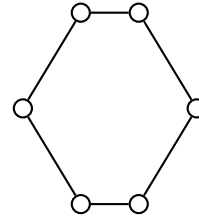
6.1 Grafos Integrais

Definição 6.1. *Um grafo é chamado de integral quando seu espectro em relação à matriz de adjacência for constituído exclusivamente por números inteiros.*

Na Figura 6.1 temos dois exemplos de grafos integrais.



$$\text{Spect}(A(K_5)) = \{4, -1^{(4)}\}$$



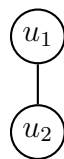
$$\text{Spect}(A(C_6)) = \{2, 1^{(2)}, -1^{(2)}, -2\}$$

Figura 6.1 Grafos integrais.

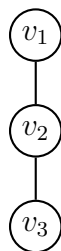
A seguir definiremos algumas operações binárias e posteriormente enunciaremos um resultado que nos mostra que estas preservam a integralidade dos grafos, ou seja, se tomarmos dois grafos integrais e aplicarmos uma destas operações, obteremos um novo grafo integral.

Definição 6.2. O *produto cartesiano* de dois grafos G_1 e G_2 é o grafo cujo conjunto dos vértices é $V = V_1 \times V_2$ e no qual dois vértices $(u_1, u_2) \in V$ e $(v_1, v_2) \in V$ são adjacentes se, e somente se, u_1 é adjacente a v_1 em G_1 e $u_2 = v_2$ em G_2 **ou** $u_1 = v_1$ em G_1 e u_2 é adjacente a v_2 em G_2 .

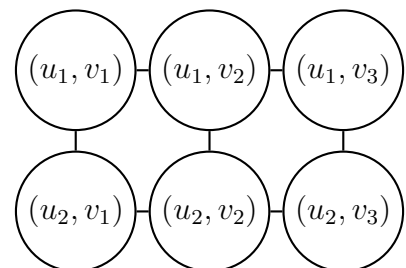
A Figura 6.2 exemplifica o produto cartesiano de dois grafos.



P_2



P_3



$P_2 \square P_3$

Figura 6.2 Produto Cartesiano ($P_2 \square P_3$).

Definição 6.3. A *conjunção* (ou *produto tensorial*) de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \wedge G_2$, cujo conjunto de vértices é $V = V_1 \times V_2$ e no qual dois vértices $(u_1, u_2) \in V$ e $(v_1, v_2) \in V$ são adjacentes se, e somente se, u_1 é adjacente a v_1 em G_1 e u_2 é adjacente a v_2 em G_2 .

A Figura 6.3 apresenta a conjunção de dois grafos.

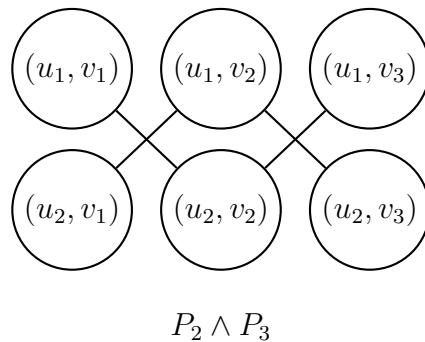
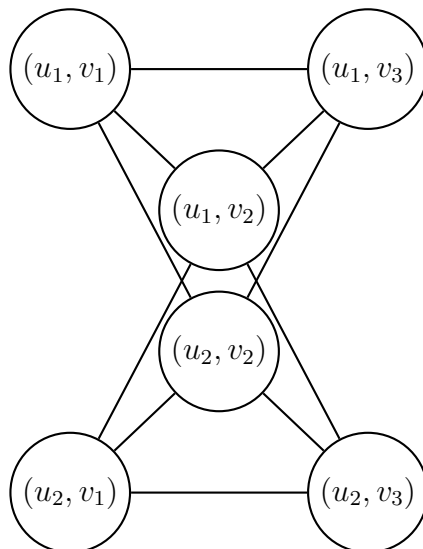


Figura 6.3 Conjunção ($P_2 \wedge P_3$).

Definição 6.4. A *soma forte* (ou *produto forte*) de G_1 e G_2 é o grafo $G_1 \oplus G_2$, cujo conjunto de vértices é $V = V_1 \times V_2$ e no qual dois vértices $(u_1, u_2) \in V$ e $(v_1, v_2) \in V$ são adjacentes se, e somente se, u_1 é adjacente a v_1 em G_1 e u_2 é adjacente a v_2 em G_2 **ou** $u_1 = v_1$.

A Figura 6.4 exibe a soma forte de dois grafos.



$$P_2 \oplus P_3$$

Figura 6.4 Soma forte ($P_2 \oplus P_3$).

Com o Teorema 6.5 é fácil ver que as operações **produto cartesiano**, **conjunção** e **soma forte** preservam a integralidade. Apesar da prova da propriedade (1) ser relativamente simples, omitiremos prova do teorema abaixo porque as propriedades (2),(3) e (4) exigem ferramentas teóricas que não estão nesta dissertação, pois nosso foco nesta seção é construção de famílias de grafos com espectro inteiro usando join de grafos regulares.

Teorema 6.5. [12] *Se α_i e β_j , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$, são os autovalores de $A(G_1)$ e $A(G_2)$ respectivamente, então*

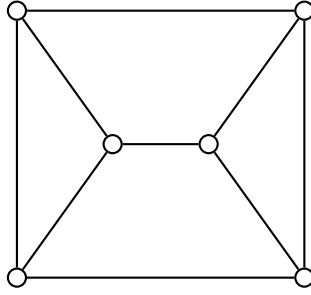
- (1) *Os autovalores de $A(G_1 \cup G_2)$ são: α_i, β_j ;*
- (2) *Os autovalores de $A(G_1 \square G_2)$ são: $\alpha_i + \beta_j$;*
- (3) *Os autovalores de $A(G_1 \wedge G_2)$ são: $\alpha_i \beta_j$;*
- (4) *Os autovalores de $A(G_1 \oplus G_2)$ são: $\alpha_i + \beta_j + \alpha_i \beta_j$.*

A proposição abaixo nos mostra que a operação grafo complementar preserva a integralidade de grafos regulares.

Proposição 6.6. *Se um grafo G é integral e r -regular, então \overline{G} também é integral.*

Demonstração. De fato, esse resultado segue diretamente da Proposição 3.9 que diz que nesta situação os autovalores de $A(\overline{G})$ são $n-r-1, -1-\lambda_2, -1-\lambda_3, \dots, -1-\lambda_n$ em que $r, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ são autovalores de $A(G)$. \square

Como sabemos que C_6 é integral, pelo Corolário 6.6 concluímos que $\overline{C_6}$ é integral, ver Figuras 6.5 e 6.1.



$$\text{Spect}(A(\overline{C_6})) = \{1, 3, 0^{(2)}, -2^{(2)}\}$$

Figura 6.5 Complementar do grafo C_6 .

A próxima proposição nos mostra que a operação grafo linha preserva a integralidade de grafos regulares.

Proposição 6.7. *Se G é um grafo r -regular e integral com n vértices e m arestas, então $\ell(G)$ também é integral.*

Demonstração. Seja $\text{Spect}(A(G)) = \{\lambda_1^{(m_1)}, \lambda_2^{(m_2)}, \dots, \lambda_k^{(m_k)}\}$. Pelas Proposições 3.19 e 3.25 podemos concluir que

$$\text{Spect}(A(\ell(G))) = \{\lambda_1 + r - 2^{(m_1)}, \lambda_2 + r - 2^{(m_2)}, \dots, \lambda_k + r - 2^{(m_k)}\} \cup \{-2^{(m-n)}\}.$$

□

Corolário 6.8. *O grafo de Pertersen é integral.*

Demonstração. De fato, basta notar que o grafo de Pertersen (ver Figura 6.6) é $\overline{\ell(K_5)}$. Sabendo que K_5 é integral, 4-regular e usando as proposições 6.6 e 6.7 o resultado segue facilmente. □

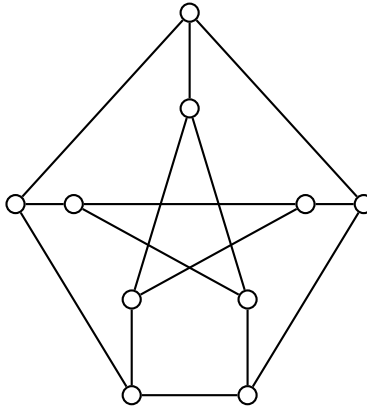


Figura 6.6 Grafo de Petersen.

Diferentemente do produto cartesiano, da conjunção e da soma forte em geral o join de dois grafos integrais não é integral. Mas no caso do join de dois grafos integrais e regulares podemos estabelecer condições para que isto ocorra. O resultado abaixo fala sobre isto.

Teorema 6.9. *Para $i = 1, 2$, seja G_i um grafo r_i -regular com n_i vértices. Então o polinômio característico da matriz $A(G_1 \vee G_2)$ é*

$$P_{A(G_1 \vee G_2)}(x) = \frac{P_{A(G_1)}(x)P_{A(G_2)}(x)f(x)}{(x - r_1)(x - r_2)},$$

onde, $f(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 - n_1n_2$.

Demonstração. Observe primeiramente que

$$A(G_1 \vee G_2) = \begin{matrix} & & v_1 \dots v_{n_1} & v_{n_1+1} \dots v_{n_1+n_2} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ v_{n_1+1} \\ \vdots \\ v_{n_1+n_2} \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc} & \\ A(G_1) & J_{n_1, n_2} \\ & \\ J_{n_2, n_1} & A(G_2) \\ & \end{array} \right] \end{matrix}.$$

Note que o vetor $\mathbf{1}_{n_i}$ é um autovetor de $A(G_i)$ associado a r_i , pela Proposição 3.8.

Vamos relacionar os autovalores de $A(G_1 \vee G_2)$ com os autovalores de $A(G_i)$. Para isto, observemos que $A(G_i)$ é simétrica e portanto é um operador linear auto-adjunto, logo o Teorema Espectral 3.6 nos garante a existência de uma base ortogonal de autovetores de $A(G_i)$. Assim podemos tomar um autovetor v_i de $A(G_i)$ associado a α_i e ortogonal ao vetor $\mathbf{1}_{n_i}$. Defina $w_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix}$ e $w_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Repare que:

$$A(G_1 \vee G_2)w_1 = \alpha_1 w_1,$$

$$A(G_1 \vee G_2)w_2 = \alpha_2 w_2.$$

De fato:

$$\begin{aligned} A(G_1 \vee G_2)w_1 &= \begin{bmatrix} A(G_1) & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & A(G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(G_1)v_1 + J_{n_1, n_2}\mathbf{0}_{n_2} \\ J_{n_2, n_1}v_1 + A(G_2)\mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = \alpha_1 w_1. \end{aligned}$$

Seguindo temos

$$\begin{aligned} A(G_1 \vee G_2)w_2 &= \begin{bmatrix} A(G_1) & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & A(G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(G_1)\mathbf{0}_{n_1} + J_{n_1, n_2}v_2 \\ J_{n_2, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + A(G_2)v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ \alpha_2 v_2 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha_2 w_2. \end{aligned}$$

Assim fabricamos $n_1 - 1$ autovalores associados a autovetores da forma do w_1 e $n_2 - 1$ autovalores associados a autovetores da forma do w_2 que são raízes de $P_{A(G_1)}(x)$ e $P_{A(G_2)}(x)$, respectivamente. Agora só faltam os últimos dois autovalores. Observe a matriz

$$M = \begin{bmatrix} r_1 & n_2 \\ n_1 & r_2 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que o vetor $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de M associado ao autovalor λ se e somente se o vetor $u = \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} & b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de $A(G_1 \vee G_2)$ associado ao mesmo autovalor λ .

De fato, por hipótese temos que

$$\begin{aligned} Mz = \lambda z &= \begin{bmatrix} r_1 & n_2 \\ n_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_1 a + n_2 b \\ n_1 a + r_2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo segue que

$$\begin{aligned} A(G_1 \vee G_2)u &= \begin{bmatrix} A(G_1) & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & A(G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(G_1)\mathbf{1}_{n_1}a + J_{n_1, n_2}\mathbf{1}_{n_2}b \\ J_{n_2, n_1}\mathbf{1}_{n_1}a + A(G_2)\mathbf{1}_{n_2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a\mathbf{1}_{n_1} \\ \lambda b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo f o polinômio característico de M , portanto produzimos os últimos dois autovalores de $A(G_1 \vee G_2)$. \square

O resultado abaixo nos dá uma condição necessária e suficiente para que o join de dois grafos regulares seja integral.

Corolário 6.10. *O join de dois grafos regulares e integrais G_1 e G_2 é integral se e somente se $(r_1 - r_2)^2 + 4n_1n_2$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração. A prova deste corolário segue da análise das raízes de $f(x)$ do Teorema 6.9. De fato, as raízes de f são:

$$\frac{r_1+r_2 \pm \sqrt{(r_2-r_1)^2+4n_1n_2}}{2}.$$

Note que $r_1 + r_2$ e $(r_2 - r_1)^2 + 4n_1n_2$ têm a mesma paridade. Logo a condição necessária e suficiente para que as raízes de f sejam inteiras é que a expressão $(r_2 - r_1)^2 + 4n_1n_2$ seja um quadrado perfeito. \square

O próximo resultado mostra uma família com infinitos grafos integrais.

Proposição 6.11. *Para $m = \frac{k(k-1)}{2}$, com $k \in \mathbb{N}$, $\overline{K_m} \vee K_2$ é integral.*

Demonstração. Note que $\overline{K_m}$ e K_2 são integrais e 0 e 1 regulares, respectivamente. Usando o Corolário 6.10 temos $1 + 4k(k-1) = (2k-1)^2$ e o resultado segue. \square

Em particular, o grafo $\overline{K_3} \vee K_2$ é integral, ver Figura 6.7.

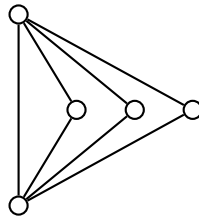


Figura 6.7 $\overline{K_3} \vee K_2$.

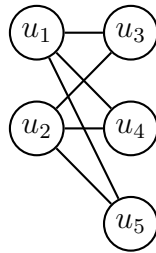
6.2 Grafos Q-integrais

Nesta seção apresentaremos algumas operações que preservam a Q-integralidade e provaremos alguns resultados que nos ajudarão na seção seguinte

a construir famílias com infinitos grafos Q -inteiros através do join de grafos regulares e Q -inteiros. Os resultados que estudaremos nesta seção podem ser encontrados no artigo [15].

Definição 6.12. *Um grafo é chamado de Q -integral quando seu espectro em relação à matriz laplaciana sem sinal for formado somente por números inteiros.*

Na Figura 6.8 temos um exemplo de grafo Q -integral.



$$\text{Spect}(Q(K_{2,3})) = \{0, 5, 3, 2^{(2)}\}$$

Figura 6.8 Grafo Q -integral.

Com o resultado 6.13 a seguir, é fácil concluir que a união e o produto cartesiano de dois grafos Q -inteiros é Q -integral. A demonstração do teorema a seguir será omitida por exigir ferramentas teóricas que não estão no nosso foco de estudo.

Teorema 6.13. [1] *Sejam G_1 e G_2 grafos com $\text{Spect}(Q(G_1)) = \{q_1, \dots, q_n\}$ e $\text{Spect}(Q(G_2)) = \{q'_1, \dots, q'_k\}$, de $Q(G_1)$ e $Q(G_2)$ respectivamente. Então*

1. $\text{Spect}(Q(G_1 \cup G_2)) = \{q_1, \dots, q_n, q'_1, \dots, q'_k\}$;
2. $\text{Spect}(Q(G_1 \square G_2)) = \{q_i + q'_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k\}$.

O resultado a seguir comprova que os grafos regulares são bem comportados pois o espectro de suas matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal são relacionados. Por consequência, se um desses espectros for formado só por inteiros os outros serão também. O resultado abaixo prova isso.

Proposição 6.14. *Se um grafo é r -regular e tem o espectro em relação a uma das matrizes $(A(G), Q(G)$ e $L(G))$ formado somente por números inteiros automaticamente ele terá o espectro em relação as matrizes remanescentes também constituído somente por inteiros.*

Demonstração. Essa proposição segue direto da Proposição 3.19. □

Proposição 6.15. *Seja G um grafo bipartido. Então G é Q -integral se e somente se for L -integral.*

Demonstração. A prova desta proposição segue direto da Proposição 3.20. □

A próxima proposição nos comprova que todo grafo completo é Q -integral, e mais, o fato de ser regular nos garante a integralidade em relação ao espectro das duas outras matrizes pelo Corolário 6.14.

Proposição 6.16. *Para todo $n \in \{1, 2, \dots\}$ temos que K_n é um grafo Q -integral e $\text{Spect}(Q(K_n)) = \{(n-2)^{(n-1)}, 2n-2\}$.*

Demonstração. Iniciaremos mostrando que a família de vetores

$$v_k = \left[-1 \quad 0 \quad \cdots \quad x_k \quad \cdots \quad 0 \right]^T$$

com $k = 2, \dots, n$ e $x_k = 1$, são autovetores de $Q(K_n)$ associados a $n-2$.

De fato,

$$Q(K_n)v_k = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -n+1+1 \\ -1+1 \\ \vdots \\ -1+n-1 \\ \vdots \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n+2 \\ 0 \\ \vdots \\ n-2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (n-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Facilmente verificamos que esta família de $n-1$ autovetores, são linearmente independentes, portanto $n-2$ é um autovalor de $Q(K_n)$ com multiplicidade $n-1$. Agora mostraremos que vetor $\mathbf{1}_n = [1 \ \dots \ 1 \ 1]^T$ é um autovetor de $Q(K_n)$ associado a $2n-2$. Segue que

$$\begin{aligned} Q(K_n)\mathbf{1}_n &= \begin{bmatrix} n-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2n-2 \\ \vdots \\ 2n-2 \\ 2n-2 \end{bmatrix} = (2n-2) \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (2n-2)\mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

□

Definição 6.17. O **grafo total** de $G = (V, E)$ é dado por $T(G) = (V', E')$ em que $V' = V \cup E$. Dois vértices distintos $u, v \in V'$ são adjacentes em $T(G)$ se uma das três condições abaixo acontecer:

- i) $u, v \in V$ e $\{u, v\} \in E$;
- ii) $u, v \in E$ e u e v são incidentes a um mesmo vértice em G ;
- iii) $u \in V, v \in E$ e v é incidente a u em G ;

A Figura 6.9 exemplifica a operação grafo total sendo aplicada em K_3 .

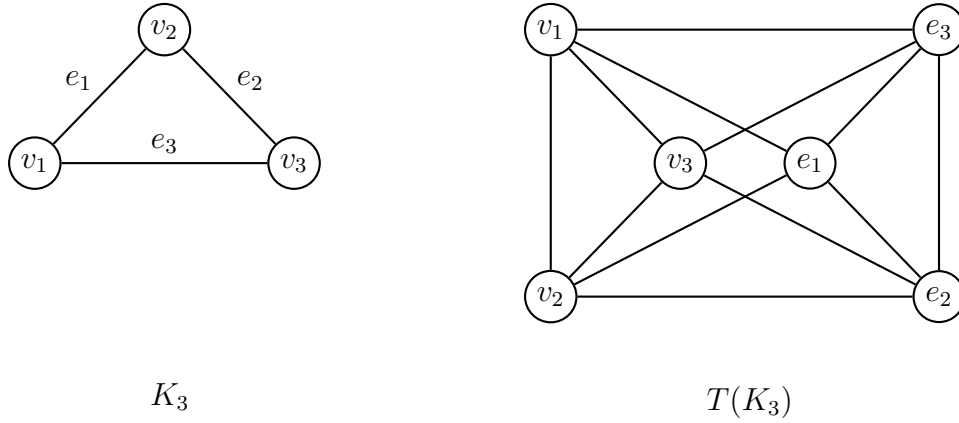


Figura 6.9 Grafo Total.

Proposição 6.18. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $T(K_n)$ é Q -integral. Além disso, para $n \geq 3$ temos $\text{Spect}(Q(T(K_n))) = \{(2n - 4)^{\binom{(n-2)(n+1)}{2}}, (3n - 5)^{(n)}, 4n - 4\}$.

Demonstração. Segue do Teorema 3 de [4] que $T(K_n)$ é isomorfo a $\ell(K_{n+1})$, logo mostrar que $T(K_n)$ é Q -integral é o mesmo que mostrar que $\ell(K_{n+1})$ é Q -integral. Pela Proposição 3.25 temos:

$$P_{A(\ell(K_{n+1}))}(\lambda) = (\lambda + 2)^{\frac{(n-2)(n+1)}{2}} P_{Q(K_{n+1})}(\lambda + 2).$$

A partir da Proposição 6.16 $\text{Spect}(Q(K_{n+1})) = \{2n, (n - 1)^{(n)}\}$. Seja λ_1, λ_2 e λ_3 os autovalores distintos de $A(\ell(K_{n+1}))$. Segue que:

$$\lambda_1 + 2 = 2n \Rightarrow \lambda_1 = 2n - 2$$

$$\lambda_2 + 2 = n - 1 \Rightarrow \lambda_2 = n - 3$$

$$\lambda_3 = -2.$$

É fácil ver que $T(K_n)$ é $2n - 2$ regular. Portanto, usando a Proposição 3.19:

$$P_{A(\ell(K_{n+1}))}(\lambda) = P_{Q(\ell(K_{n+1}))}(\lambda + 2n - 2)$$

$$\lambda_1 + 2n - 2 = 2n - 2 + 2n - 2 = 4n - 4$$

$$\lambda_2 + 2n - 2 = n - 3 + 2n - 2 = 3n - 5$$

$$\lambda_3 + 2n - 2 = -2 + 2n - 2 = 2n - 4.$$

Logo $T(K_n)$ é Q -integral e

$$Spect(Q(\ell(K_{n+1}))) = \{(2n - 4)^{\binom{(n-2)(n+1)}{2}}, (3n - 5)^{(n)}, 4n - 4\}.$$

□

O próximo teorema nos mostra que no caso dos grafos regulares é possível estabelecer uma relação entre o polinômio característico do join destes dois grafos regulares com o polinômio característico de cada um dos grafos regulares que o geraram.

Teorema 6.19. *Para $i = 1, 2$ seja G_i um grafo r_i -regular com n_i vértices. Então o polinômio característico da matriz $Q(G_1 \vee G_2)$ é*

$$P_{Q(G_1 \vee G_2)}(x) = \frac{P_{Q(G_1)}(x - n_2)P_{Q(G_2)}(x - n_1)f(x)}{(x - 2r_1 - n_2)(x - 2r_2 - n_1)},$$

onde $f(x) = x^2 - (2(r_1 + r_2) + (n_1 + n_2))x + 2(2r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2)$.

Demonstração. Supondo sem perda de generalidade que $n_2 \geq n_1$, observe primeiramente que

$$Q(G_1 \vee G_2) = \begin{matrix} & & v_1 \dots v_{n_1} & & v_{n_1+1} \dots v_{n_2+n_1} & & \\ & & & & & & \\ & & v_1 & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & v_{n_1} & & & & \\ & & & & v_{n_1+1} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & v_{n_2+n_1} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ Q(G_1) + n_2 I_{n_1} & & & & J_{n_1, n_2} & & \\ & & & & & & \\ J_{n_2, n_1} & & & & Q(G_2) + n_1 I_{n_2} & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Note que o vetor $\mathbf{1}_{n_i}$ é um autovetor de $Q(G_i)$ associado a $2r_i$ pela Proposição 3.18 .

Vamos relacionar os autovalores de $Q(G_1 \vee G_2)$ com os autovalores de $Q(G_i)$. Para isto, observemos que $Q(G_i)$ é simétrica e portanto é um operador linear auto-adjunto, logo o Teorema Espectral 3.6 nos garante a existência de uma base ortogonal de autovetores de $Q(G_i)$. Assim podemos tomar um autovetor v_i de $Q(G_i)$ associado α_i e ortogonal ao vetor $\mathbf{1}_{n_i}$. Defina $w_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix}$ e $w_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Repare que:

$$Q(G_1 \vee G_2)w_1 = (\alpha_1 + n_2)w_1$$

$$Q(G_1 \vee G_2)w_2 = (\alpha_2 + n_1)w_2.$$

De fato:

$$\begin{aligned} Q(G_1 \vee G_2)w_1 &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + n_2I_{n_1} & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)v_1 + n_2I_{n_1}v_1 + J_{n_1, n_2}\mathbf{0}_{n_2} \\ J_{n_2, n_1}v_1 + Q(G_2)\mathbf{0}_{n_2} + n_1I_{n_2}\mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + n_2)v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = (\alpha_1 + n_2) \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix} = (\alpha_1 + n_2)w_1. \end{aligned}$$

Seguindo temos

$$\begin{aligned} Q(G_1 \vee G_2)w_2 &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + n_2I_{n_1} & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)\mathbf{0}_{n_1} + n_2I_{n_1}\mathbf{0}_{n_1} + J_{n_1, n_2}v_2 \\ J_{n_2, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + Q(G_2)v_2 + n_1I_{n_2}v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ (\alpha_2 + n_1)v_2 \end{bmatrix} = (\alpha_2 + n_1) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \end{bmatrix} = (\alpha_2 + n_1)w_2. \end{aligned}$$

Assim fabricamos $n_1 - 1$ autovalores associados a autovetores da forma do w_1 e $n_2 - 1$ autovalores associados a autovetores da que são raízes de $P_Q(G_1, x - n_2)$ e $P_Q(G_2, x - n_1)$ respectivamente. Agora só faltam os últimos dois autovalores. Observe a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2r_1 + n_2 & n_2 \\ n_1 & 2r_2 + n_1 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que o vetor $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de M associado a λ se e somente se o vetor $u = \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} & b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de $Q(G_1 \vee G_2)$ associado ao mesmo λ .

De fato, por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} Mz = \lambda z &= \begin{bmatrix} 2r_1 + n_2 & n_2 \\ n_1 & 2r_2 + n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2r_1 + n_2)a + n_2b \\ n_1a + (2r_2 + n_1)b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} Q(G_1 \vee G_2)u &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + n_2I_{n_1} & J_{n_1, n_2} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)a\mathbf{1}_{n_1} + n_2I_{n_1}a\mathbf{1}_{n_1} + J_{n_1, n_2}b\mathbf{1}_{n_2} \\ J_{n_2, n_1}a\mathbf{1}_{n_1} + Q(G_2)b\mathbf{1}_{n_2} + n_1I_{n_2}b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a\mathbf{1}_{n_1} \\ \lambda b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo f o polinômio característico de M , portanto produzimos os últimos dois autovalores de $Q(G_1 \vee G_2)$. \square

Diferentemente da união e do produto cartesiano, em geral, o join de dois grafos Q -inteiros não é Q -integral, mas no caso dos grafos regulares é possível estabelecer condições para que isto ocorra. O resultado abaixo nos diz que condição é essa.

Corolário 6.20. *Para $i = 1, 2$, seja G_i um grafo r_i -regular com n_i vértices. O grafo $G_1 \vee G_2$ é Q -integral se e somente se, G_1 e G_2 são Q -inteiros e $((2r_1 - n_1) - (2r_2 - n_2))^2 + 4n_1n_2$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Pelo Teorema 6.19 concluímos diretamente que $G_1 \vee G_2$ é Q -integral se e somente se G_1 e G_2 são Q -inteiros e as raízes de $f(x) = x^2 - (2(r_1 + r_2) + (n_1 + n_2))x + 2(2r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2)$ são inteiras. Facilmente vemos que as raízes de f são:

$$\frac{2r_1 + 2r_2 + n_1 + n_2 \pm \sqrt{(2r_1 + 2r_2 + n_1 + n_2)^2 - 8(2r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2)}}{2}.$$

Note que $2r_1 + 2r_2 + n_1 + n_2$ e $(2r_1 + 2r_2 + n_1 + n_2)^2 - 8(2r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2)$ têm a mesma paridade, logo a condição necessária e suficiente para que f tenha raízes inteiras é que $(2r_1 + 2r_2 + n_1 + n_2)^2 - 8(2r_1r_2 + r_1n_1 + r_2n_2) = ((2r_1 - n_1) - (2r_2 - n_2))^2 + 4n_1n_2$ seja um quadrado perfeito. \square

O próximo resultado diz que qualquer grafo bipartido completo é Q -integral. Em particular, toda estrela é um grafo Q -integral e L -integral, esse fato decorre imediatamente do resultado abaixo e do Corolário 6.10.

Corolário 6.21. *Todo grafo bipartido completo é Q -integral.*

Demonstração. Primeiramente note que todo grafo G bipartido completo pode ser obtido do join de dois grafos 0- regulares. Seja V_1 e V_2 os conjuntos de vértices que fazem a partição de G com $|V_1| = m_1$ e $|V_2| = m_2$. Usando o Corolário 6.20 temos $((2r_1 - n_1) - (2r_2 - n_2))^2 + 4n_1n_2 = (-m_1 + m_2)^2 + 4m_1m_2 = (m_1 + m_2)^2$. \square

O teorema a seguir é fundamental para mostrar a existência de uma família com infinitos grafos Q -inteiros da forma $K_n \vee (K_{n+1} \cup K_{n+2})$.

Teorema 6.22. Para $i = 1, 2, 3$, seja G_i um grafo r_i -regular com n_i vértices. O polinômio característico da matriz $Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))$ é

$$P_{Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))}(x) = \frac{P_{Q(G_1)}(x - (n_2 + n_3))P_{Q(G_2)}(x - n_1)P_{Q(G_3)}(x - n_1)g(x)}{(x - (2r_1 + n_2 + n_3))(x - (2r_2 + n_1))(x - (2r_3 + n_1))},$$

em que, $g(x) = x^3 - (2(r_1 + r_2 + r_3) + 2n_1 + n_2 + n_3)x^2 + ((n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + 2(r_2 + r_3)) + 4(r_1(n_1 + r_3) + r_2(r_1 + r_3)))x - (2n_1(n_1r_1 + n_2r_2 + n_3r_3 + 2r_1(r_2 + r_3)) + 4r_2r_3(2r_1 + n_2 + n_3))$.

Demonstração. Para $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$ e $k = 1, \dots, n_3$, sejam z_i , u_j e w_k vértices G_1 , G_2 e G_3 , respectivamente. A matriz laplaciana sem sinal do grafo $G_1 \vee (G_2 \cup G_3)$ pode ser representada como:

$$Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3)) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_{n_1} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n_2} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc} & z_1 \dots z_{n_1} & u_1 \dots u_{n_2} & w_1 \dots w_{n_3} \\ Q(G_1) + (n_2 + n_3)I_{n_1} & J_{n_1, n_2} & J_{n_1, n_3} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} & 0_{n_2, n_3} \\ J_{n_3, n_1} & 0_{n_3, n_2} & Q(G_3) + n_1I_{n_3} \end{array} \right]. \end{array}$$

Sabemos que o vetor $\mathbf{1}_{n_i}$ é um autovetor de $Q(G_i)$ associado a $2r_i$ pela Proposição 3.18 e além disso, tendo em vista que $Q(G_i)$ é simétrica, o Teorema Espectral 3.6 nos garante que podemos tomar um autovetor v_i de $Q(G_i)$ associado a α_i e ortogonal a $\mathbf{1}_{n_i}$. Assim podemos relacionar os autovalores de $Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))$ com os autovalores de $Q(G_i)$. Defina

$$w_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} \text{ e } w_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que:

$$Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))w_1 = (\alpha_1 + n_2 + n_3)w_1$$

$$Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))w_2 = (\alpha_2 + n_1)w_2$$

$$Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))w_3 = (\alpha_3 + n_1)w_3.$$

Para notação não ficar muito pesada adotaremos a seguinte notação $Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3)) =$

Q :

$$\begin{aligned} Qw_1 &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + (n_2 + n_3)I_{n_1} & J_{n_1, n_2} & J_{n_1, n_3} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1 I_{n_2} & 0_{n_2, n_3} \\ J_{n_3, n_1} & 0_{n_3, n_2} & Q(G_3) + n_1 I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)v_1 + (n_2 + n_3)I_{n_1}v_1 + J_{n_1, n_2}\mathbf{0}_{n_2} + J_{n_1, n_3}\mathbf{0}_{n_3} \\ J_{n_2, n_1}v_1 + Q(G_2)\mathbf{0}_{n_2} + n_1 I_{n_2}\mathbf{0}_{n_2} + 0_{n_2, n_3}\mathbf{0}_{n_3} \\ J_{n_3, n_1}v_1 + 0_{n_3, n_2}\mathbf{0}_{n_2} + Q(G_3)\mathbf{0}_{n_3} + n_1 I_{n_3}\mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha_1 + n_2 + n_3)v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} = (\alpha_1 + n_2 + n_3) \begin{bmatrix} v_1 \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} = (\alpha_1 + n_2 + n_3)w_1. \end{aligned}$$

Seguindo temos

$$\begin{aligned} Qw_2 &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + (n_2 + n_3)I_{n_1} & J_{n_1, n_2} & J_{n_1, n_3} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1 I_{n_2} & 0_{n_2, n_3} \\ J_{n_3, n_1} & 0_{n_3, n_2} & Q(G_3) + n_1 I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)\mathbf{0}_{n_1} + (n_2 + n_3)I_{n_1}\mathbf{0}_{n_1} + J_{n_1, n_2}v_2 + J_{n_1, n_3}\mathbf{0}_{n_3} \\ J_{n_2, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + Q(G_2)v_2 + n_1 I_{n_2}v_2 + 0_{n_2, n_3}\mathbf{0}_{n_3} \\ J_{n_3, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + 0_{n_3, n_2}v_2 + Q(G_3)\mathbf{0}_{n_3} + n_1 I_{n_3}\mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ (\alpha_2 + n_1)v_2 \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} = (\alpha_2 + n_1) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ v_2 \\ \mathbf{0}_{n_3} \end{bmatrix} = (\alpha_2 + n_1)w_2.$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} Qw_3 &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + (n_2 + n_3)I_{n_1} & J_{n_1, n_2} & J_{n_1, n_3} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} & 0_{n_2, n_3} \\ J_{n_3, n_1} & 0_{n_3, n_2} & Q(G_3) + n_1I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)\mathbf{0}_{n_1} + (n_2 + n_3)I_{n_1}\mathbf{0}_{n_1} + J_{n_1, n_2}\mathbf{0}_{n_2} + J_{n_1, n_3}v_3 \\ J_{n_2, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + Q(G_2)\mathbf{0}_{n_2} + n_1I_{n_2}\mathbf{0}_{n_2} + 0_{n_2, n_3}v_3 \\ J_{n_3, n_1}\mathbf{0}_{n_1} + 0_{n_3, n_2}\mathbf{0}_{n_2} + Q(G_3)v_3 + n_1I_{n_3}v_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ (\alpha_3 + n_1)v_3 \end{bmatrix} = (\alpha_3 + n_1) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} \\ \mathbf{0}_{n_2} \\ v_3 \end{bmatrix} = (\alpha_3 + n_1)w_3. \end{aligned}$$

Acabamos de construir $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ e $n_3 - 1$ autovalores associados a autovetores da forma de w_1 , w_2 e w_3 , raízes de $P_{Q(G_1)}(x - (n_2 + n_3))$, $P_{Q(G_2)}(x - n_1)$ e $P_{Q(G_3)}(x - n_1)$, respectivamente. Agora restam os três últimos autovalores. Observe a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2r_1 + n_2 + n_3 & n_2 & n_3 \\ n_1 & 2r_2 + n_1 & 0 \\ n_1 & 0 & 2r_3 + n_1 \end{bmatrix}.$$

Mostraremos que o vetor $u = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de M associado a λ se e somente se $z = \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} & b\mathbf{1}_{n_2} & c\mathbf{1}_{n_3} \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de $Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))$ associado ao mesmo λ . De fato,

$$Mu = \lambda u = \begin{bmatrix} 2r_1 + n_2 + n_3 & n_2 & n_3 \\ n_1 & 2r_2 + n_1 & 0 \\ n_1 & 0 & 2r_3 + n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2r_1a + n_2a + n_3a + n_2b + n_3c \\ n_1a + 2r_2b + n_1b \\ n_1a + 2r_3c + n_1c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$$

se e somente se

$$\begin{aligned} Qz &= \begin{bmatrix} Q(G_1) + (n_2 + n_3)I_{n_1} & J_{n_1, n_2} & J_{n_1, n_3} \\ J_{n_2, n_1} & Q(G_2) + n_1I_{n_2} & 0_{n_2, n_3} \\ J_{n_3, n_1} & 0_{n_3, n_2} & Q(G_3) + n_1I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \\ c\mathbf{1}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q(G_1)a\mathbf{1}_{n_1} + (n_2 + n_3)I_{n_1}a\mathbf{1}_{n_1} + J_{n_1, n_2}b\mathbf{1}_{n_2} + J_{n_1, n_3}c\mathbf{1}_{n_3} \\ J_{n_2, n_1}a\mathbf{1}_{n_1} + Q(G_2)b\mathbf{1}_{n_2} + n_1I_{n_2}b\mathbf{1}_{n_2} + 0_{n_2, n_3}c\mathbf{1}_{n_3} \\ J_{n_3, n_1}a\mathbf{1}_{n_1} + 0_{n_3, n_2}b\mathbf{1}_{n_2} + Q(G_3)c\mathbf{1}_{n_3} + n_1I_{n_3}c\mathbf{1}_{n_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a\mathbf{1}_{n_1} \\ \lambda b\mathbf{1}_{n_2} \\ \lambda c\mathbf{1}_{n_3} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} a\mathbf{1}_{n_1} \\ b\mathbf{1}_{n_2} \\ c\mathbf{1}_{n_3} \end{bmatrix} = \lambda z. \end{aligned}$$

Portanto, fabricamos os últimos três autovalores de $Q(G_1 \vee (G_2 \cup G_3))$. \square

Corolário 6.23. *Para $i = 1, 2, 3$, seja G_i um grafo r_i -regular com n_i vértices. O grafo $G_1 \vee (G_2 \cup G_3)$ é Q -integral se e somente se G_1 , G_2 e G_3 são Q -integrais e as raízes do polinômio $g(x) = x^3 - (2(r_1 + r_2 + r_3) + 2n_1 + n_2 + n_3)x^2 + ((n_1 + n_2 + n_3)(n_1 + 2(r_2 + r_3)) + 4(r_1(n_1 + r_3) + r_2(r_1 + r_3)))x - (2n_1(n_1r_1 + n_2r_2 + n_3r_3 + 2r_1(r_2 + r_3))4r_2r_3(2r_1 + n_2 + n_3))$ são inteiras.*

Demonstração. A prova do corolário segue direto do teorema anterior. \square

O resultado abaixo nos dá uma condição necessária e suficiente para que o grafo $K_{n_1} \vee (K_{n_2} \cup K_{n_3})$ seja Q -integral.

Corolário 6.24. *O grafo $G = K_{n_1} \vee (K_{n_2} \cup K_{n_3})$ é Q -integral se e somente se $(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 16n_2n_3$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Pela Proposição 6.16 sabemos que K_{n_i} é Q -integral. Note que neste caso as raízes do polinômio g são:

$$x_1 = \frac{2n_3 + 3n_1 + 2n_2 - 4 + \sqrt{4n_3^2 + 4n_1n_3 - 8n_2n_3 + n_1^2 + 4n_1n_2 + 4n_2^2}}{2},$$

$$x_2 = \frac{2n_3 + 3n_1 + 2n_2 - 4 - \sqrt{4n_3^2 + 4n_1n_3 - 8n_2n_3 + n_1^2 + 4n_1n_2 + 4n_2^2}}{2}$$

e

$$x_3 = n_3 + n_1 + n_2 - 2.$$

Observe primeiramente que x_3 é sempre inteira logo para garantirmos que o polinômio g tem raízes inteiras basta estabelecermos condições para que x_1 e x_2 sejam inteiros. Para isto, note que $2n_3 + 3n_1 + 2n_2 - 4$ e $4n_3^2 + 4n_1n_3 - 8n_2n_3 + n_1^2 + 4n_1n_2 + 4n_2^2$ têm a mesma paridade, portanto basta que $4n_3^2 + 4n_1n_3 - 8n_2n_3 + n_1^2 + 4n_1n_2 + 4n_2^2 = (n_1 + n_2 + n_3)^2 - 16n_2n_3$ seja um quadrado perfeito para que x_1 e x_2 sejam números inteiros. \square

O próximo teorema nos diz que se removermos determinadas n arestas do grafo $K_n \vee (K_{n+1} \cup K_{n+2})$ obtemos um novo grafo Q -integral.

Teorema 6.25. *Para todo $n \in \{1, 2, \dots\}$ o grafo $H_{n,n+1,n+2}$ obtido de $K_n \vee (K_{n+1} \cup K_{n+2})$ removendo n arestas que ligam um vértice de K_n a n vértices de K_{n+2} é Q -integral.*

Demonstração. Observe primeiramente que removendo sem perda de generalidade as n arestas $\{v_1, v_{2n+2}\}, \{v_1, v_{2n+3}\}, \dots, \{v_1, v_{3n+1}\}$ temos que $Q(H_{n,n+1,n+2})$ pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} 2n+2 & \mathbf{1}_{n-1}^T & \mathbf{1}_{n+1}^T & \mathbf{0}_n^T & \mathbf{1}_2^T \\ \mathbf{1}_{n-1} & (3n+1)I_{n-1} + J_{n-1} & J_{n-1,n+1} & J_{n-1,n} & J_{n-1,2} \\ \mathbf{1}_{n+1} & J_{n+1,n-1} & (2n-1)I_{n+1} + J_{n+1} & 0_{n+1,n} & 0_{n+1,2} \\ \mathbf{0}_n & J_{n,n-1} & 0_{n,n+1} & (2n-1)I_n + J_n & J_{n,2} \\ \mathbf{1}_2 & J_{2,n-1} & 0_{2,n+1} & J_{2,n} & 2nI_n + J_2 \end{bmatrix}.$$

Tomando vetores u_1, u_2 e u_3 pertencentes a $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}$ e \mathbb{R}^{n-1} e ortogonais a $\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_{n+1}$ e $\mathbf{1}_{n-1}$ respectivamente.

$$\text{Definamos } w_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2n+1} \\ u_1 \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ u_2 \\ \mathbf{0}_{n+2} \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_3 \\ \mathbf{0}_{2n+3} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$w_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n+1} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Repare que

$$Q(H_{n,n+1,n+2})w_1 = (2n-1)w_1$$

$$Q(H_{n,n+1,n+2})w_2 = (2n-1)w_2$$

$$Q(H_{n,n+1,n+2})w_3 = (3n+1)w_3$$

$$Q(H_{n,n+1,n+2})w_4 = (2n)w_4.$$

Note ainda que se $u = \begin{bmatrix} a & b & c & e \end{bmatrix}^T$ é um autovetor da matriz M associado a λ se somente se $w = \begin{bmatrix} a & b\mathbf{1}_{n-1}^T & c\mathbf{1}_{n+1}^T & e\mathbf{1}_2^T \end{bmatrix}^T$ é um autovetor de

$Q(H_{n,n+1,n+2})$ associado a λ . Seja

$$M = \begin{bmatrix} 2n+2 & n-1 & n+1 & 0 & 2 \\ 1 & 4n & n+1 & n & 2 \\ 1 & n-1 & 3n & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3n-1 & 2 \\ 1 & n-1 & 0 & n & 2n+2 \end{bmatrix}.$$

Calculando o espectro de M obtemos que $Spect(M) = \{5n+1, 3n+1, 2n+2, 2n, 2n-1\}$.

Sendo assim concluímos que $Spect(Q(H_{n,n+1,n+2})) = \{5n+1, (3n+1)^{(n-1)}, 2n+2, (2n)^{(2)}, (2n-1)^{(2n)}\}$. □

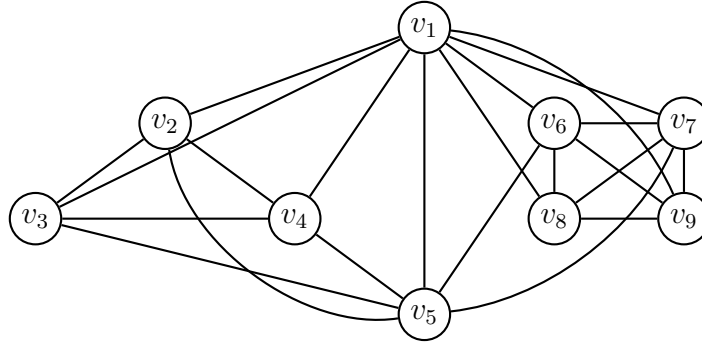


Figura 6.10 $H_{2,3,4}$.

Note que $Spect(Q(H_{2,3,4})) = \{11, 7^{(1)}, 6, 4^{(2)}, 3^{(4)}\}$ (ver Figura 6.10).

6.3 Famílias com infinitos grafos Q-integrais

Nesta seção provaremos alguns resultados que comprovam a existência de famílias com infinitos grafos Q-integrais.

Definição 6.26. Para $a, b, j \in \mathbb{N}$, temos as seguintes classes de grafos:

- O grafo split completo $CS_b^a \simeq \overline{K_a} \vee K_b$;
- O grafo multi-completo similar split $MCS_{b,n}^a \simeq \overline{K_a} \vee (\cup_{i=1}^n K_b)$;
- O grafo completo-estendido similar split $ECS_b^a \simeq \overline{K_a} \vee (K_b \square K_2)$;
- O grafo multi-completo-estendido similar split $MECS_n^a \simeq \overline{K_a} \vee (\cup_{i=1}^n K_b \square K_2)$;

Nas Figuras 6.11 e 6.12 vemos exemplos dos grafos que acabamos de definir.

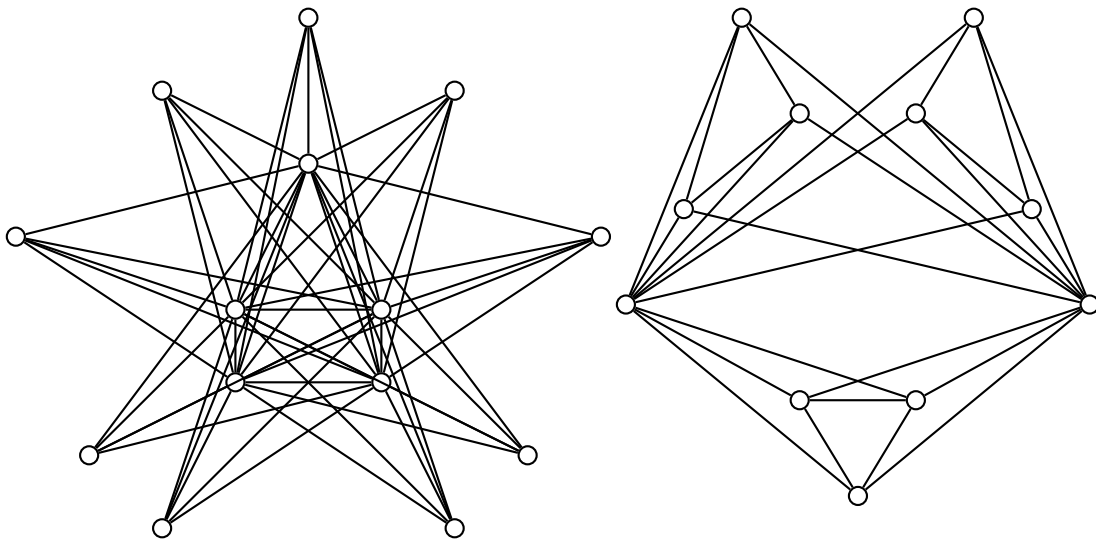


Figura 6.11 CS_5^9 e $MCS_{3,3}^2$.

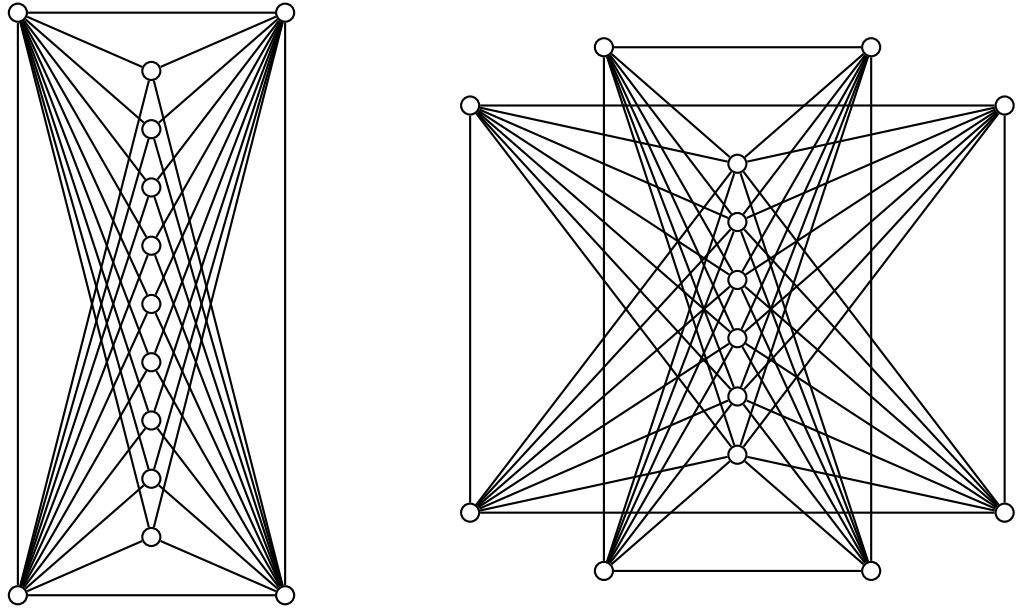


Figura 6.12 ECS_2^9 e $MECS_{2,2}^6$.

Os próximos resultados nos mostram que dentro das classes de grafos que definimos existem famílias com infinitos grafos Q -integrals.

Proposição 6.27. Para $a = 3j$ e $b = 2j - 1$ com $j \in \mathbb{N}$ o grafo CS_b^a é Q -integral.

Demonstração. Pelo Corolário 6.20 sabemos que CS_b^a é Q -integral se somente se $(a + b - 2)^2 + 4ab$ é um quadrado perfeito. De fato, $(a + b - 2)^2 + 4ab = (5j - 3)^2 + 12j(2j - 1) = 49j^2 - 42j + 9 = (7j - 3)^2$ e o resultado segue. \square

Note que $Spect(Q(CS_5^9)) = \{20, 12^{(4)}, 5^{(8)}, 2\}$, ver Figura 6.11.

Proposição 6.28. Para $n \geq 2$, $a = (n - 1)j$ e $b = j + 2$ com o grafo $MCS_{b,n}^a$ é Q -integral.

Demonstração. Pelo Corolário 6.20 sabemos que $MCS_{b,n}^a$ é Q -integral se somente se $(a + 2(b - 1) - nb)^2 + 4anb$ é um quadrado perfeito. De fato, $(a + 2(b - 1) - nb)^2 + 4anb = ((2n + 1)j + 2(n + 1))^2$ e o resultado segue. \square

Repare que $Spect(Q(MCS_{3,3}^2)) = \{12, 9, 6^{(2)}, 3^{(7)}\}$, ver Figura 6.11.

Proposição 6.29. Para $a = (2b - 1)^2$ o grafo ECS_b^a é Q -integral.

Demonstração. Pelo Corolário 6.20 sabemos que ECS_b^a é Q -integral se somente se $a(a + 8b)$ é um quadrado perfeito. De fato, $a(a + 8b) = (4b^2 - 1)^2$; e o resultado segue. \square

Observe que $Spect(Q(ECS_2^9)) = \{16, 11^{(2)}, 9, 4^{(8)}, 1\}$, ver Figura 6.12.

Proposição 6.30. Para $a = (2n - 1)b$ com $b, n \in \mathbb{N}$ o grafo $MECS_{b,n}^a$ é Q -integral.

Demonstração. Usando o Corolário 6.20 concluímos que $MECS_{b,n}^a$ é Q -integral se somente se $(a + 2b(n - 1))^2 + 8ab$ é um quadrado perfeito. De fato, $(a + 2b(n - 1))^2 + 8ab = (b(4n - 1))^2$ e o resultado segue. \square

Note que $Spect(Q(MECS_{2,2}^6)) = \{16, 10, 8^{(9)}, 6^{(2)}, 2\}$, ver Figura 6.12.

Proposição 6.31. Para $j, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 2n$, o grafo $K_j \vee (K_{2n-j} \cup K_n)$ é Q -integral.

Demonstração. Para $j, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 2n$, $(j + 2(2n - j) + 2n)^2 - 16(2n - j) = (j + 2n)^2$. Logo pelo Corolário 6.24 $K_j \vee (K_{2n-j} \cup K_n)$ é Q -integral. \square

Neste capítulo estudamos algumas operações que preservam a integralidade e a Q -integralidade. Com estas operações provamos a existência de algumas famílias de grafos integrais e Q -integrais. Destaque para as famílias com infinitos grafos split Q -integrais que foram construídas basicamente fazendo join de grafos regulares e Q -integrais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação estudamos a variação espectral inteira. E como constatamos a operação de adição de aresta mostrou-se muito útil para a construção de grafos L -integrals. Vimos que os resultados da variação espectral inteira em um e dois lugares desencadearam uma série de outros resultados como a caracterização dos grafos construtivelmente laplaciano integrals e dos grafos terminais através dos subgrafos induzidos. Diferentemente do que ocorre com os grafos L -integrals, a operação adição de aresta não é uma boa operação para construir grafos integrals. Já que pelo Corolário 2.5 de [32] dado um grafo G integral então $G + e$ será integral se e somente se $G = K_1 \cup K_1$. Portanto, a construção de grafos integrals por adição de aresta está descartada.

Estudamos também a construção de famílias de grafos integrals e Q -integrals através do join de grafos regulares. Vimos que esta operação é uma boa ferramenta para construção destas famílias. Em especial para as famílias com infinitos grafos split Q -integrals que foram construídas basicamente fazendo join de grafos regulares e Q -integrals.

7.1 Trabalhos futuros

Como já foi comentado no Capítulo 4, o estudo da variação espectral inteira já foi feito para a matriz laplaciana sem sinal [14, 16], inclusive sendo chamada neste caso de variação Q -espectral inteira. E igualmente à matriz laplaciana, se a variação Q -espectral inteira ocorre, então ela é em um lugar ou em dois lugares, assim como na matriz laplaciana. Examinando as figuras dos grafos Q -integrals em [34], podemos observar que há poucos pares de grafos Q -integrals onde um deles é obtido do outro por adição de apenas uma aresta entre dois vértices não adjacentes.

Talvez seja interessante se investigássemos a existência de infinitos pares grafos Q -integrals onde um é construído a partir do outro por adição de aresta, isso legitimaria de vez o estudo da variação Q -espectral inteira.

Uma operação que poderia ser estudada com mais cuidado nos grafos integrais é a operação grafo total que definimos no capítulo anterior. No artigo [10], Cvetković estabelece uma relação entre o espectro da matriz de adjacência dos grafos regulares com o espectro da matriz de adjacência de seus correspondentes grafos totais. Com estas relações talvez seja possível estabelecer condições para que a operação grafo total produza um novo grafo integral a partir de um grafo integral regular dado, e abrindo assim a possibilidade de uma construção de uma família de novos grafos integrais.

Já foi mencionado na introdução que o problema das árvores com espectro inteiro já está resolvido para as matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. Já para a matriz de adjacência este problema segue com muitas interrogações. Na tese de doutorado do Ligong Wang [39] são apresentadas várias famílias de árvores integrais de diâmetro 4, 5, 6 e 8 e diversas fórmulas para os polinômios característicos destas árvores. Talvez com estas fórmulas dos polinômios característicos em mãos seja possível determinar fórmulas parecidas para famílias de árvores com diâmetro maior, abrindo assim a possibilidade de construção de novas famílias de árvores integrais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. Teoria espectral de grafos-uma introdução iio colóquio de matemática da região sul.
- [2] APPEL, K. I., AND HAKEN, W. *Every planar map is four colorable*, vol. 98. American mathematical society Providence, 1989.
- [3] BAPAT, R., LAL, A., AND PATI, S. On algebraic connectivity of graphs with at most two points of articulation in each block. *Linear and Multilinear Algebra* 60, 4 (2012), 415–432.
- [4] BEHZAD, M., CHARTRAND, G., AND NORDHAUS, E. Triangles in line-graphs and total graphs. *Indian J. Math* 10 (1968), 109–120.
- [5] CHRISTANDL, M., DATTA, N., DORLAS, T. C., EKERT, A., KAY, A., AND LANDAHL, A. J. Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks. *Physical Review A* 71, 3 (2005), 032312.
- [6] CORNEIL, D. G., LERCHS, H., AND BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3, 3 (1981), 163–174.
- [7] CVETKOVIC, D. Cubic integral graphs. *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., Fiz*, 498-541 (1975), 107–113.
- [8] CVETKOVIC, D., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. *Spectral generalizations of line graphs: on graphs with least eigenvalue-2*, vol. 314. Cambridge University Press, 2004.
- [9] CVETKOVIĆ, D. M. *Grafovi i Njihovi Spektri... Graphs and Their Spectra*. 1971.

- [10] CVETKOVIC, D. M. Spectrum of the total graph of a graph. *Publ. Inst. Math.(Beograd)* 16, 30 (1973), 49–52.
- [11] CVETKOVIC, D. M., DOOB, M., GUTMAN, I., AND TORGAŠEV, A. *Recent results in the theory of graph spectra*. Elsevier, 1988.
- [12] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs: theory and application*, vol. 87. Academic Pr, 1980.
- [13] CVETKOVIĆ, D. M., ROWLINSON, P., AND SIMIC, S. *Eigenspaces of graphs*. No. 66. Cambridge University Press, 1997.
- [14] DE FREITAS, M. A. A., DE ABREU, N. M., AND DEL-VECCHIO, R. Variação q-espectral inteira em apenas um lugar é impossível.
- [15] DE FREITAS, M. A. A., DE ABREU, N. M., DEL-VECCHIO, R. R., AND JURKIEWICZ, S. Infinite families of q-integral graphs. *Linear Algebra and its Applications* 432, 9 (2010), 2352–2360.
- [16] DE FREITAS, M. A. A., DEL-VECCHIO, R. R., DE ABREU, N. M., AND KIRKLAND, S. On q-spectral integral variation. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 35 (2009), 203–208.
- [17] EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8 (1741), 128–140.
- [18] FIEDLER, M. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak mathematical journal* 23, 2 (1973), 298–305.
- [19] FRITSCHER, E. *Propriedades espectrais de um grafo*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, 2011.
- [20] GODSIL, C., AND ROYLE, G. F. *Algebraic graph theory*, vol. 207. Springer Science & Business Media, 2013.

- [21] GRONE, R., AND MERRIS, R. The laplacian spectrum of a graph ii. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7, 2 (1994), 221–229.
- [22] GUTMAN, I., AND TRINAJSTIĆ, N. Graph theory and molecular orbitals. total φ -electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters* 17, 4 (1972), 535–538.
- [23] HAEMERS, W. H., AND SPENCE, E. Enumeration of cospectral graphs. *European Journal of Combinatorics* 25, 2 (2004), 199–211.
- [24] HARARY, F., AND SCHWENK, A. J. Which graphs have integral spectra? In *Graphs and combinatorics*. Springer, 1974, pp. 45–51.
- [25] HÜCKEL, E. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 70, 3 (1931), 204–286.
- [26] KIRKLAND*, S. A characterization of spectral integral variation in two places for laplacian matrices. *Linear and Multilinear Algebra* 52, 2 (2004), 79–98.
- [27] KIRKLAND, S. Completion of laplacian integral graphs via edge addition. *Discrete Mathematics* 295, 1 (2005), 75–90.
- [28] KIRKLAND, S. Constructably laplacian integral graphs. *Linear Algebra and its Applications* 423, 1 (2007), 3–21.
- [29] LIMA, E. L. *Álgebra linear*. IMPA, 2006.
- [30] MERRIS, R. Graph theory. 2001.
- [31] MERRIS, R. Laplacian graph eigenvectors. *Linear algebra and its applications* 278, 1 (1998), 221–236.
- [32] PAN, Y.-L., FAN, Y.-Z., AND LI, J.-S. Spectral rational variation in two places for adjacency matrix is impossible. *Linear algebra and its applications* 404 (2005), 275–282.

- [33] SO, W. Rank one perturbation and its application to the laplacian spectrum of a graph*. *Linear and Multilinear Algebra* 46, 3 (1999), 193–198.
- [34] STANIC, Z. There are exactly 172 connected q-integral graphs up to 10 vertices. *Novi Sad J. Math* 37, 2 (2007), 193–205.
- [35] TRINAJSTIĆ, N. Chemical graph theory, i and iicrc press. *Boca Raton, FL* (1983).
- [36] VAN DAM, E. R., AND HAEMERS, W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its applications* 373 (2003), 241–272.
- [37] VAN DEN HEUVEL, J. Hamilton cycles and eigenvalues of graphs. *Linear algebra and its applications* 226 (1995), 723–730.
- [38] VON COLLATZ, L., AND SINOGOWITZ, U. Spektren endlicher grafen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* (1957), vol. 21, Springer, pp. 63–77.
- [39] WANG, L. *Integral trees and integral graphs*. University of Twente, 2005.
- [40] WATANABE, M. Note on integral trees. *Mathematics reports* 2 (1979), 95–100.
- [41] WATANABE, M., AND SCHWENK, A. J. Integral starlike trees. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)* 28, 01 (1979), 120–128.
- [42] YIZHENG, F. On spectral integral variations of graphs. *Linear and Multilinear Algebra* 50, 2 (2002), 133–142.