

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Uma Introdução às Aplicações do tipo Twist

Dissertação de Mestrado

Rafael da Costa Pereira

Porto Alegre, 04 de março de 2016

Dissertação submetida por Rafael da Costa Pereira¹,
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em
Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Mate-
mática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do
Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Paolo Giulietti

Banca examinadora:
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Prof. Dr. Carlos Felipe Lardizabal
Prof. Dr. Mario Jorge Carneiro

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço e dedico este trabalho aos meus pais que sempre priorizaram meus estudos e me mostraram sua importância. Agradeço aos meus colegas do Instituto de Matemática da UFRGS, não apenas pela ajuda nos momentos difíceis, mas também pelas lembranças inesquecíveis, agradeço também a todos meus professores que dedicaram seu tempo e energia para que eu pudesse aprender algo, em especial, aos professores Eduardo Brietzke, Ada Maria de Souza Doering, Alexandre Tavares Baraviera e Artur Lopez que além de seus ensinamentos também me ajudaram para que pudesse continuar estudando matemática. Agradeço também ao professor Paolo por estar sempre presente e me auxiliar a superar minhas dificuldades durante este trabalho e pelo incentivo que me deu para continuar meus estudos.

Resumo

O objetivo deste trabalho foi compreender três pilares dos estudos de Sistemas Dinâmicos conservativos: O Teorema de Aubry-Mather, A Forma Normal de Birkhoff e o Teorema KAM. Esses teoremas também ajudam a entender a classe de funções chamadas Aplicações do Tipo do Twist, cujo exemplo importante é a Aplicação Standard que aparece em diversos modelos físicos.

Índice

1	Aplicação Standard	2
1.1	Aplicação Standard e pontos fixos	2
1.2	Motivação	8
2	Aplicações do tipo Twist	11
2.1	Funções geradoras e Fluxo	12
2.2	Princípios Variacionais e Número de rotação	16
3	O Teorema de Aubry-Mather	22
3.1	Órbitas Ciclicamente Ordendas	23
3.2	Conjuntos de Aubry-Mather	33
3.3	Teorema de Classificação de Poincaré	38
4	Forma Normal de Birkhoff	44
4.1	Hamiltonianos	44
4.2	Forma Normal de Birkhoff para Hamiltonianos	47
5	Teorema KAM e algumas aplicações	53
5.1	O Teorema KAM	53
5.2	Aplicações do Teorema KAM	55
5.2.1	O modelo May	55
5.3	O Gráfico de Birkhoff	57
A	Formas Diferenciais	60
B	Topologia	64
	Referências Bibliográficas	65

Capítulo 1

Aplicação Standard

O estudo da Aplicação Standard pode ser encontrado, por volta de 1940, nos trabalhos de Frenkel e Kontorova [14] e de V.I.Veksler [24]. Em 1969 Chirikov [4] descreve propriedades importantes sobre a Aplicação Standard, cujo o nome foi dado, apenas em 1979, por Chirikov [5] e por isso também é conhecida como Aplicação Standard de Chirikov.

1.1 Aplicação Standard e pontos fixos

A Aplicação Standard, ou Aplicação Standard de Chirikov, é uma aplicação $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x', y') \in \mathbb{R}^2$ definida por

$$f : \begin{cases} x' = x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \\ y' = y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \end{cases} \quad (1.1)$$

A aplicação pode ser naturalmente considerada no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, fazendo a identificação $x \rightarrow x \pmod{1}$, tendo em vista que $f(x+1, y) = f(x, y)$. Além disso observamos que $f(x, y+n) = f(x, y) + (n, n)$ com isso, se ainda considerarmos a identificação $y \rightarrow y \pmod{1}$ a aplicação define um difeomorfismo no toro \mathbb{T}^2 . Em cada situação iremos escolher o domínio mais adequado, porém veremos no Capítulo 2 que a Aplicação Standard considerada no $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ faz parte de uma classe mais geral de aplicações, as Aplicações do tipo Twist. Na Figura 1.1 podemos ver algumas simulações variando o parâmetro k , note que para $k = 0$, a órbita de um ponto (x, y) é apenas a translação horizontal por y .

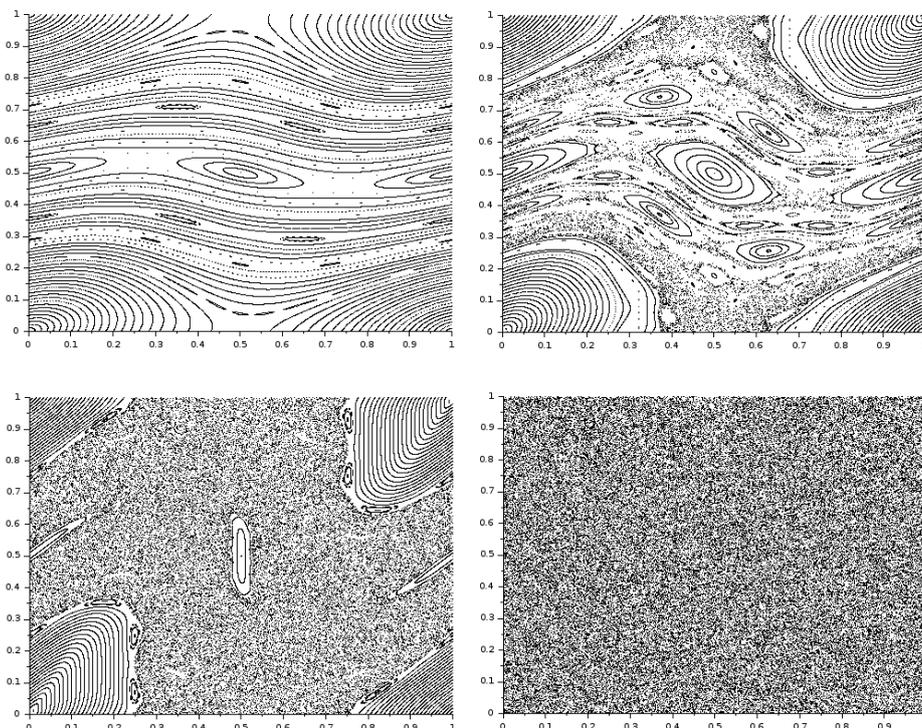


Figura 1.1: Aplicação Standard para mil iterados de pontos da forma $(0, j/100)$, com $j \in \{0, \dots, 90\}$ e para $k = 0.5$ e $k = 1$ respectivamente na primeira linha e para $k = 4$ e $k = 8$ respectivamente na segunda linha

Proposição 1.1.1. *Seja $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ como em 1.1. Os pontos $(0, 0)$ e $(1/2, 0)$ são os únicos pontos fixos.*

Demonstração. Um ponto (x_0, y_0) é ponto fixo se, e somente se, $f(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ com isso temos

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + y_0 - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_0 \pmod{1} \\ y_0 = y_0 - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_0 \pmod{1} \end{cases}$$

mas isto ocorre apenas se, e somente se,

$$\begin{cases} y_0 = \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_0 \pmod{1} \\ 0 = \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_0 \pmod{1} \end{cases}$$

logo (x_0, y_0) é ponto fixo se, e somente se, $x_0 = 0 \pmod{1}$ ou $x_0 = 1/2 \pmod{1}$ e $y_0 = 0 \pmod{1}$. □

Para analisar a estabilidade da aplicação Standard em cada ponto calculamos Df e obtemos:

$$D_{(x,y)}f = \begin{bmatrix} 1 - k \cos 2\pi x & 1 \\ -k \cos 2\pi x & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$D_{(0,0)}f = \begin{bmatrix} 1 - k & 1 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \quad D_{(1/2,0)}f = \begin{bmatrix} 1 + k & 1 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $\lambda_{(x,y)}$ um autovalor de $D_{(x,y)}f$, calculando o determinante de $(D_{(0,0)}f - \lambda I)$ e $(D_{(1/2,0)}f - \lambda I)$ e resolvendo seus polinômios característicos, ficamos com

$$\lambda_{(0,0)} = \frac{-k + 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$$

$$\lambda_{(1/2,0)} = \frac{k + 2 \pm \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

Analisando o termo contido na raiz, temos que $\forall k \in \mathbb{R}^+$ o ponto $(1/2, 0)$ é hiperbólico, entretanto para $k \in (0, 4)$ o ponto $(0, 0)$ é elíptico, no caso $k \in (4, +\infty)$ temos que $(0, 0)$ é um hiperbólico. Nós estamos interessados em calcular a quantidade de pontos fixos de f^2 , consideramos f definida no cilindro, apenas para facilitar alguns cálculos.

Proposição 1.1.2. *Seja $f(x, y)$ a aplicação Standard definida em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ com $k > 2$, isto é,*

$$f(x, y) = \left(x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \pmod{1}, y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \right).$$

Além disso seja $p = \arccos(2/k)$ e α tal que

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left(p - \frac{k}{2} \sin p - \frac{\pi}{2} \right)$$

Então o conjunto $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1)$ contém pelo menos $8|\lceil(\alpha)\rceil| - 8$ e no máximo $8|\lceil(\alpha)\rceil| + 4$ pontos fixo para f^2 .

Demonstração. Seja $(x', y') = f(x, y)$ logo (x, y) é ponto fixo para f^2 se, e somente se, $f(x', y') = (x, y)$. Utilizando a equação 1.1 temos:

$$\begin{cases} x = x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x' \pmod{1} \\ y = y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x' \end{cases}$$

Através de algumas substituições e simplificações obtemos

$$\begin{cases} 0 = 2y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \pmod{1} \\ -\sin 2\pi x = \sin(2\pi(x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x)) \end{cases}$$

Dividimos o sistema em dois, ou

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4\pi} \sin 2\pi x \pmod{1} \\ -\sin 2\pi x = \sin(2\pi(x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x)) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{2} \pmod{1} \\ -\sin 2\pi x = \sin(2\pi(x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x)) \end{cases}$$

por substituição novamente temos ou

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4\pi} \sin 2\pi x \pmod{1} \\ -\sin 2\pi x = \sin(2\pi x - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x) \end{cases} \quad (1.2)$$

ou

$$\begin{cases} y = \frac{k}{4\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{2} \pmod{1} \\ -\sin 2\pi x = \sin(2\pi x - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x) + \pi \end{cases} \quad (1.3)$$

Então nós ficamos com os estudos dessas duas equações 1.2 e 1.3, separadamente. Fazendo um mudança de coordenadas para $t = 2\pi x$, com $t \in [0, 2\pi)$, alterando o sinal da equação.

$$-\sin t = \sin(t - \frac{k}{2} \sin t) \quad (1.4)$$

Vamos considerar $t \in (0, \pi)$, pois $t \in (0, \pi)$ é solução da equação acima se, e somente se, $2\pi - t$ também é solução, além disso é fácil ver que 0 e π são soluções.

Iremos estudar a função $h(t) = \sin(t - \frac{k}{2} \sin t)$, para $k > 2$. Começamos por analisar os pontos críticos de $h(t)$. Temos

$$h'(t) = \cos(t - \frac{k}{2} \sin(t))(1 - \frac{k}{2} \cos t)$$

Logo $h'(t) = 0$ se

$$\left(1 - \frac{k}{2} \cos t\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(t - \frac{k}{2} \sin(t)\right) = 0$$

Como $k > 2$ então $2/k < 1$ logo no primeiro caso temos $t = \arccos(2/k)$, no segundo temos que

$$t - \frac{k}{2} \sin t = \frac{\pi}{2} + j\pi \quad \Rightarrow \quad t - \frac{k}{2} \sin t - \frac{\pi}{2} - j\pi = 0 \quad , \quad j \in \mathbb{Z}$$

Definimos

$$g_j(t) = t - \frac{k}{2} \sin t - \frac{\pi}{2} - j\pi \quad \text{com} \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{fixo,}$$

queremos saber se para $j \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, \pi]$, $g_j(t) = 0$.

Afirmção 1.1.3. Se $j > 0$ então g_j não tem raiz.

Demonstração. De fato, como $t \in (0, \pi)$ temos $t - (k/2) \sin t \leq \pi$, logo $g_j(t) < 0$. \square

Consideramos agora $j = 0$.

Afirmção 1.1.4. Se $j = 0$ então g_0 tem uma única raiz maior que $p = \arccos(2/k)$.

Demonstração. Note que $g_0(0) = -\pi/2 < 0$ e $g_0(\pi) = \pi/2 > 0$, temos também

$$g'_0(t) = 1 - \frac{k}{2} \cos t$$

Como $g'_0(0) < 0$ e o único ponto crítico é p , concluímos que p é ponto de mínimo e com isso garantimos a existência e a unicidade da raiz com a propriedade acima. \square

Afirmção 1.1.5. Seja

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left(p - \frac{k}{2} \sin p - \frac{\pi}{2} \right)$$

Se $\alpha < j < 0$ então g_j tem duas raízes, uma maior que p e outra menor que p .

Demonstração. Note que

$$g_j(0) = 0 - \frac{k}{2} \sin 0 - \frac{\pi}{2} - j\pi > 0 \quad \text{e} \quad g_j(\pi) = \pi - \frac{k}{2} \sin \pi - \frac{\pi}{2} - j\pi > 0, \quad j \in \mathbb{Z}^-$$

temos novamente

$$g'_j(t) = 1 - \frac{k}{2} \cos t$$

Com p sendo o único ponto crítico, concluímos que se $g_j(p) < 0$ garantimos a existência e a unicidade das raízes com a propriedade acima. Queremos

$$g_j(p) < 0 \Leftrightarrow p - \frac{k}{2} \sin p - \frac{\pi}{2} - j\pi < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \left(p - \frac{k}{2} \sin p - \frac{\pi}{2} \right) < j$$

□

Concluimos que $h(t)$ tem $2\lceil(\alpha)\rceil$ pontos críticos, sendo $\lceil(\alpha)\rceil - 1$ menor que p e $\lceil(\alpha)\rceil$ maior que p e π . Por último observamos que se $t_0 \neq p$ é um ponto crítico, então $h(t_0) = \pm 1$. De fato t_0 é tal que

$$\cos\left(t_0 - \frac{k}{2} \sin(t_0)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(t_0) = \sin\left(t_0 - \frac{k}{2} \sin(t_0)\right) = \pm 1$$

logo tem pelo menos $2\lceil(\alpha)\rceil - 1$ pontos de mínimos ou máximos. Podemos afirmar que a equação $h(t) = -\sin t$ tem pelo menos $2\lceil(\alpha)\rceil - 3$ soluções e no máximo $2\lceil(\alpha)\rceil$ no intervalo $(0, \pi)$. Como observamos anteriormente, cada solução de para $t \in (0, \pi)$ corresponde a um solução de $t \in (\pi, 2\pi)$. Além disso 0 e π são sempre soluções. Logo o número de soluções no intervalo $[0, 2\pi)$ é pelo menos $4\lceil(\alpha)\rceil - 4$ e no máximo $4\lceil(\alpha)\rceil + 2$.

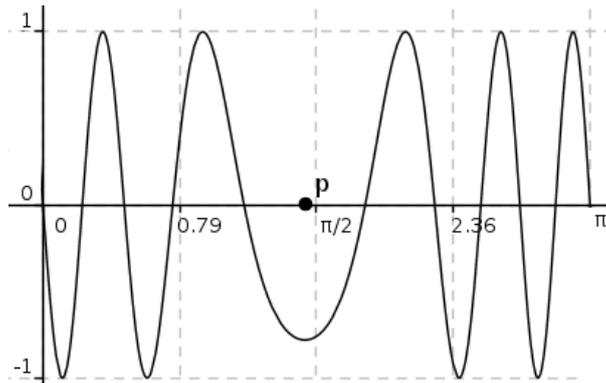


Figura 1.2: Gráfico para $h(t)$ com $k = 30$ (neste caso $\lceil(\alpha)\rceil = 5$)

Tinhamos duas relações envolvendo y , por isso para cada x que obtivemos, temos dois pontos fixos para f^2 . Assim temos o resultado. □

Corolário 1.1.6. *Seja f a Aplicação Standard com $k \leq 2$ então f^2 tem apenas 4 pontos fixos a saber, $(0, 0)$, $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$ e $(1/2, 1/2)$.*

Demonstração. Basta observar que na demonstração acima a função $h(t)$ tem apenas um ponto crítico no intervalo $(0, \pi)$, e $h'(0) > 0$ logo a equação 1.4 tem solução apenas para $t = 0$ e $t = \pi$, que correspondem a $x = 0$ e $x = 1/2$. \square

A conta acima mostra a dificuldade de se encontrar ou calcular a quantidade de pontos periódicos. De fato existe uma famosa conjectura proposta por Arnold, provada apenas recentemente, que diz que uma Hamiltoniano em uma variedade simplética compacta tem pelo tantos pontos fixos quanto uma função real nessa variedade tem pontos críticos. Sem muitos detalhes, uma variedade simplética é uma variedade munida de uma 2-forma diferencial fechada e não degenerada (veja o Apêndice A).

1.2 Motivação

A Aplicação Standard é encontrada em diversos modelos físicos, trazemos aqui, sem muita rigor, duas motivações. Seguindo Ragazzo, Carneiro e Zanata [23], a primeira é o modelo de Frenkel-Kontora, uma exposição completa desse modelo pode ser vista em Braun e Kivshar [3]. Considere uma cadeia infinita unidimensional de partículas \mathbf{x} , cuja a força de interação entre duas partículas vizinhas é igual a força de uma mola com constante elástica e comprimento de repouso l , suponhamos ainda que a cadeia de partículas está sujeita a um potencial periódico $V(x_k) = (a/4\pi^2) \cos(2\pi x_k)$, onde a é uma constante positiva e x_k é a posição da k -ésima partícula. A energia de interação entre a k -ésima partícula e a $(k-1)$ -ésima partícula é $(x_k - x_{k-1} - l)^2/2$. Logo a energia total do sistema W é

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1} - l)^2 + \frac{a}{4\pi^2} \cos(2\pi x_k) \right]$$

Uma configuração \mathbf{x} é de equilíbrio se $dW(\mathbf{x}) = 0$. Posteriormente mostraremos que W é a ação (ver definição 2.2.2) associada à Aplicação Standard, e que $dW(\mathbf{x}) = 0$ se, e somente se, \mathbf{x} for projeção no eixo x de uma órbita da Aplicação Standard (ver proposição 2.2.3).

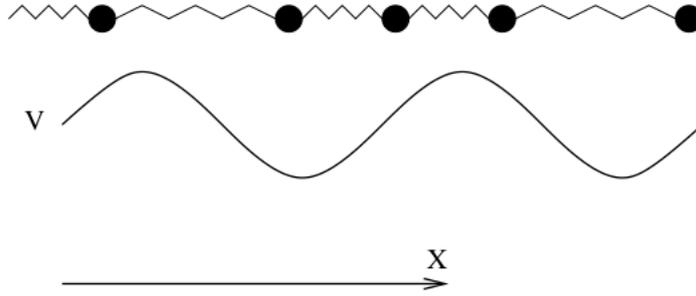


Figura 1.3: Imagem retirada de Ragazzo, Carneiro e Zanata [23]. Modelo de Frenkel-Kontorova.

Nossa segunda motivação é dada a partir de um modelo simplificado de um ciclotron encontrada em Meiss [20]. Considere um campo magnético constante B , e uma queda de voltagem, que depende do tempo t , dada por $V \sin(\omega t)$ em um pequeno intervalo angular como na figura 1.4.

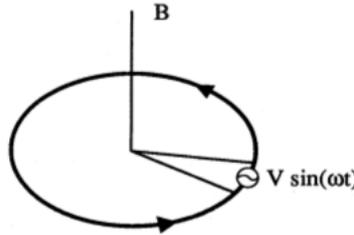


Figura 1.4: Figura retirada de Meiss [20]. Modelo de Ciclontron

Considere ainda um elétron de carga e , massa m , velocidade c e raio da trajetória r , que é circular por causa do campo constante B , pelo mesmo motivo temos ainda que a força centrípeta é igual a força de Lorentz. Com isso período o T é dado por

$$T = 2\pi \frac{m\gamma c}{eB} = 2\pi \frac{E}{eBc}$$

Onde γ é uma constante que leva em conta a massa relativística e $E = m\gamma c^2$ é a energia da partícula. A variação da energia ao passar pelo intervalo angular é $\Delta E = -eV \sin \omega t$. Seja (E, t) a energia e o tempo antes de passar pelo intervalo, e (E', t') a energia e tempo depois de passar pelo intervalo e antes de entrar novamente no intervalo então

$$E' = E - eV \sin \omega t, \quad t' = t + \left(\frac{2\pi}{ceB} \right) E'$$

Considerando a mudança de variável $x = \omega t/2\pi$ e $y = \omega E/ceb$ temos

$$y' = y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad x' = x + y' = x + y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

onde $k = 2\pi\omega V/cB$, observe que a equação acima é análoga à 1.1

Capítulo 2

Aplicações do tipo Twist

A aplicação Standard definida no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é um exemplo de uma classe mais geral de aplicações chamadas Aplicações Twist cuja a motivação surge do estudo de Hamiltonianos, tal motivação pode ser encontrada em Golé [10] e Siegel, Moser [21]. Começaremos por entender Aplicações Twist em $\mathbb{S}^1 \times I$, onde I é um intervalo fechado da reta, e depois estenderemos para o cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Nesse capítulo se faz necessário alguns conceitos de formas diferenciais, um resumo sucinto pode se encontrar no Apêndice A. Esse capítulo é inspirado em Golé [10].

Seja $f(x, y) : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I$, chamamos a função $F : (x, y) \in \mathbb{R} \times I \rightarrow (X(x, y), Y(x, y)) \in \mathbb{R} \times I$ de *levantamento* da função f , se para todo ponto (x_0, y_0) de $\mathbb{R} \times I$ vale que

$$\phi \circ F(x_0, y_0) = f \circ \phi(x_0, y_0) \quad (2.1)$$

Onde $\phi(x, y) = (x \pmod{1}, y)$.

Observamos que a afirmação acima nos diz que se f é um difeomorfismo então temos que $F(x_0 + 1, y_0) = F(x_0, y_0) + (1, 0)$ para qualquer ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I$, de fato a partir da equação 2.1 temos

$$\phi \circ F(x_0, y_0) = f \circ \phi(x_0, y_0) = f \circ \phi(x_0 + 1, y_0) = \phi \circ F(x_0 + 1, y_0)$$

portanto temos $F(x_0, y_0) = F(x_0 + 1, y_0) + (n, 0)$, isso significa que $X(x, y) - X(x + 1, y) = n$. Como $X(x, y) - X(x + 1, y)$ é uma função contínua e assume valores inteiros, então deve ser constante igual n . Além disso como $F|_{[0,1]}$ é um difeomorfismo, temos que existe $(x_0, y_0) \in [0, 1) \times I$, tal que $F(x_0, y_0) = F(1, y) - (1, 0)$, logo $\phi(F(x_0, y_0)) = \phi(F(1, y) - (1, 0))$, pelo fato de ϕ ser a projeção no eixo x , temos $\phi(F(x_0, y_0)) = \phi(F(1, y))$ e portanto $f(x_0, y_0) = f(0, y)$ o que implica que $(x_0, y_0) = (0, y)$ e portanto $F(0, y) = F(1, y) - (1, 0)$.

Definição 2.0.1. Seja $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ um difeomorfismo no plano $\mathbb{R} \times I$, com $I = [a, b]$. Satisfazendo:

- (i) F preserva os fins do cilindro, isto é, $Y(x, a) = a$, $Y(x, b) = b$
- (ii) Fixado x_0 a função real $y \rightarrow X(x_0, y)$ é estritamente monótona (esta é chamada *Condição Twist*).
- (iii) F preserva área e orientação, isto é, $\det DF = 1$
- (iv) $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$

Com isso F induz uma aplicação f em $\mathbb{S}^1 \times I$ denominada aplicação de tipo twist.

Visto que F é um difeomorfismo em um conexo, a segunda condição poderia ser substituída por

$$\frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

com isso teríamos

$$\frac{\partial X}{\partial y} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial X}{\partial y} < 0,$$

dizemos que f induzida pela definição 2.0.1 é, respectivamente, um aplicação do tipo Twist positiva e negativa.

Uma definição equivalente para as aplicações twist pode ser dados a partir dos conceitos de Fluxo e Função Geradora.

2.1 Funções geradoras e Fluxo

Definição 2.1.1. Seja $F : (x, y) \in \mathbb{R} \times I \rightarrow (X(x, y), Y(x, y)) \in \mathbb{R} \times I$ um difeomorfismo que preserva área, onde I é um intervalo fechado da reta ou toda reta. Fixado um ponto base $z_0 \in \mathbb{R} \times I$, uma função geradora de F é uma função $S_{z_0} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$S_{z_0}(z) = \int_{z_0}^z Y dX - y dx$$

onde $z = (x, y)$, na definição acima temos que dX é a derivada exterior da função $X(x, y)$, dx deve ser considerada a 1-forma canônica e y é a projeção no eixo y , mais detalhes sobre essas afirmações podem ser encontradas no Apêndice A.

Vamos mostrar que usando o Teorema de Stokes A.0.14 (veja o Apêndice A) S_{z_0} está bem definida e que $S_{z_0} - S_{z_1}$ é constante, com isso a escolha do ponto base é irrelevante para este estudo e portanto denotaremos a função geradora apenas por S , ficando implícito que fizemos uma escolha de base. Salientamos ainda que se F induz uma aplicação twist, a Condição Twist nos permite definir a mudança de coordenada $\varphi(x, y) = (x, X(x, y))$. Assim se considerarmos função S nas coordenadas (x, X) , isto é $S \circ \varphi$, temos que a derivada exterior de S é tal que $dS = YdX - ydx$, implicando em

$$y = -\frac{\partial S(x, X)}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial S(x, X)}{\partial X} \quad (2.2)$$

Logo podemos obter a função original a partir da função S , justificando assim seu nome. Embora a Aplicação Standard esteja definida apenas em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, podemos obter uma função geradora. Seguiremos de uma maneira um pouco informal. Temos que $F(x, y) = (X, Y)$ tal que

$$\begin{aligned} X &= x + y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \\ Y &= y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \end{aligned}$$

é o levantamento da Aplicação Standard definida no cilindro. Com isso podemos obter

$$\begin{aligned} y &= X - x + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x \\ Y &= X - x \end{aligned}$$

Seja $S(x, X) = (X - x)^2/2 + (k/4\pi^2) \cos(2\pi x)$, temos que satisfaz a equação 2.2 para a Aplicação Standard. Em coordenadas (x, y) , temos que

$$S(x, y) = \left(y - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x\right)^2 + \frac{k}{4\pi^2} \cos 2\pi x$$

e

Definição 2.1.2. O Fluxo de uma função $F : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ que preserva área e tal que $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$, onde I é um intervalo fechado da reta ou toda reta. É o número real denotado por $Flux(F)$, dado por:

$$Flux(F) = S(x + 1, y) - S(x, y)$$

Proposição 2.1.3. A função S e o fluxo estão bem definidos.

Demonstração. Começamos pelo função S_{z_0} , temos que mostrar que S_{z_0} não depende do caminho escolhido, pelo lema A.0.13 é suficiente mostrar a que 1-forma $\omega = Y(x, y)dX - y(x, y)dy$ é tal que $d\omega = dY \wedge dX - dy \wedge dx = 0$. Observamos que

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy \quad ; \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy$$

logo

$$dY \wedge dX = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dy \wedge dx = 1dy \wedge dx$$

com isso $d\omega = 0$ Nos voltamos agora para o fluxo. Primeiro precisamos mostrar que independe da escolha do ponto base, note que dados dois pontos z_0 e z_1 , temos que

$$S_{z_0}(x, y) - S_{z_1}(x, y) = \int_{z_0}^z YdX - ydx - \int_{z_1}^z YdX - ydx = \int_{z_0}^{z_1} YdX - ydx$$

E como já mostramos que a integral independe do caminho o valor acima é constante logo $S_{z_0}(x+1, y) - S_{z_0}(x, y) = S_{z_1}(x+1, y) - S_{z_1}(x, y)$, portanto a partir de agora denotaremos a função geradora por S , onde fica implícito uma escolha de base. Queremos fluxo independa do ponto, isto é, $S(x_0+1, y_0) - S(x_0, y_0) = S(x_1+1, y_1) - S(x_1, y_1)$ para todo (x_0, y_0) e (x_1, y_1) pertencente ao \mathbb{R}^2 .

Seja ω como antes, observamos primeiro que

$$S(x+1, y) - S(x, y) = \int_{z_0}^{(x+1, y)} \omega - \int_{z_0}^{(x, y)} \omega = \int_{(x, y)}^{(x+1, y)} \omega$$

Considere a aplicação $T(x, y) = (x+1, y)$ e denotamos $(x_0, y_0) = z_0$ e $(x_1, y_1) = z_1$. Seja γ_1 e γ_2 caminhos que ligam z_0 à $T(z_0)$ e $T(z_1)$ à z_1 , respectivamente, além disso seja γ_3 um caminho que liga z_0 à z_1 , e $\gamma_4 = -T(\gamma_3)$. Definimos $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3 \circ \gamma_4$, as afirmações acima estão resumidas na figura abaixo.

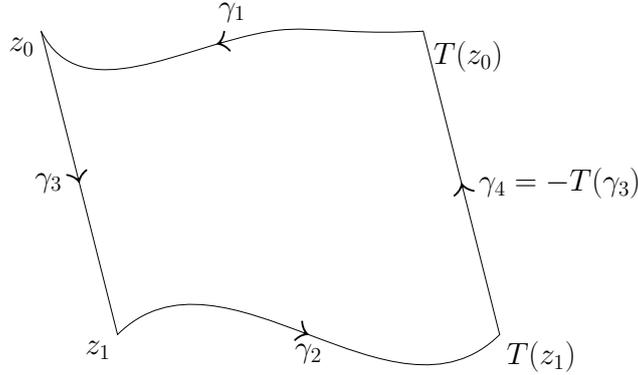


Figura 2.1: Caminhos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

Como γ é um caminho fechado, ω é uma 1-forma fechada em um conjunto simplesmente conexo temos

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega$$

Note que Y e y são invariantes por T , além disso $\gamma' = (T(\gamma))'$. Logo

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_{T(\gamma_3)} \omega = - \int_{-T(\gamma_3)} \omega = - \int_{\gamma_4} \omega$$

Portanto

$$0 = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \Rightarrow S(x_0 + 1, y_0) - S(x_0, y_0) - (S(x_1 + 1, y_1) - S(x_1, y_1)) = 0$$

□

Observe que se F é o levantamento de uma Aplicação do tipo Twist como em 2.0.1, temos que o Fluxo de F é 0. De fato, basta observar que F preserva os fins do cilindro, com isso considerando $\gamma(t) = (t, a)$, temos

$$\begin{aligned} S(0, a) - S(1, a) &= \int_0^1 Y(\gamma(t)) dX(\gamma'(t)) - y(\gamma(t)) dx(\gamma'(t)) \\ &= \int_0^1 a \cdot dX((1, 0)) - a \cdot dx((1, 0)) \\ &= \int_0^1 \left(a \left(\frac{\partial X}{\partial x}(\gamma(t)) \right) - a \right) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Infelizmente a Aplicação Standard não preserva os fins do cilindro, logo se faz necessário definirmos uma aplicação twist no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Definição 2.1.4. Seja f um difeomorfismo no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ seu levantamento para o plano \mathbb{R}^2 , satisfazendo:

- (i) F é homotópica a identidade
- (ii) Fixado x_0 a função real $y \rightarrow X(x_0, y)$ é estritamente monótona.
- (iii) F preserva área e orientação, isto é, $\det DF = 1$
- (iv) F tem fluxo zero.

Assim f é uma aplicação twist no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Salientamos novamente que uma aplicação twist possui uma função geradora S , tal que $S(x+1, y) = S(x, y)$, além disso considerando a mudança de coordenadas que leva $(x, y) \mapsto (x, X(x, y))$, temos $S(x+1, X+1) = S(x, X)$. O fato de que $dS = YdX - ydx$ nos permite expressar a fórmula 2.2, que é uma das mais relevantes sobre o estudo de Aplicações do tipo Twist.

2.2 Princípios Variacionais e Número de rotação

Seja função F como na definição 2.1.4. Vamos chamar de órbita de um ponto (x_0, y_0) a sequência

$$O_{(x_0, y_0)} = \{\dots, (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{F^k(x_0, y_0)\}$$

A próxima proposição afirma que para estudar o comportamento de uma órbita basta apenas observar o que acontece com a sequência formada pelos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Proposição 2.2.1. *Seja F uma aplicação Twist no sentido da definição 2.1.4 e S sua função geradora nas coordenadas (x, X) . Existe uma correspondência biunívoca entre a órbita de um ponto (x_0, y_0) e a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que satisfaz*

$$\frac{\partial S(x_n, x_{n+1})}{\partial x} + \frac{\partial S(x_{n-1}, x_n)}{\partial X} = 0 \quad . \quad (2.3)$$

A demonstração será análoga a de Golé [10]

Demonstração. Seja $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ uma órbita de F , iremos mostrar que a sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ formada pelas projeções na primeira coordenada da órbita, satisfaz 2.3. Observe que a equação 2.2 determina que

$$\begin{aligned} y_n &= -\frac{\partial S(x_n, X(x_n, y_n))}{\partial x} = -\frac{\partial S(x_n, x_{n+1})}{\partial x} \\ y_n &= Y(x_{n-1}, y_{n-1}) = \frac{\partial S(x_{n-1}, X(x_{n-1}, y_{n-1}))}{\partial X} = \frac{\partial S(x_{n-1}, x_n)}{\partial X} \end{aligned}$$

Juntando ambas equações temos

$$\frac{\partial S(x_n, x_{n+1})}{\partial x} + \frac{\partial S(x_{n-1}, x_n)}{\partial X} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfazendo a equação 2.3, definimos

$$y_n = -\frac{\partial S(x_n, x_{n-1})}{\partial x}$$

Queremos mostrar que $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \{(x_n, y_n)\}$ é uma órbita, isto é, que $F(x_{n-1}, y_{n-1}) = (x_n, y_n)$. Primeiro observamos que a inversa da mudança de coordenadas $\phi : (x, y) \mapsto (x, X(x, y))$ é dada implicitamente pela função S , tal que $\phi^{-1} : (x, X) \mapsto (x, -\frac{\partial S}{\partial x}(x, X))$ e além disso podemos escrever a função F , como

$$F(x, y) = \left(\pi_2(\phi(x, y)), \frac{\partial S}{\partial X}(\phi(x, y)) \right)$$

onde π_2 é a projeção na segunda coordenada. Note que $\phi^{-1}(x_{n-1}, x_n) = (x_{n-1}, -\frac{\partial S}{\partial x}(x_{n-1}, x_n)) = (x_{n-1}, y_{n-1})$. Temos

$$\begin{aligned} F(x_{n-1}, y_{n-1}) &= F(\phi^{-1}(x_{n-1}, x_n)) = \left(\pi_2(x_{n-1}, x_n), \frac{\partial S(x_{n-1}, x_n)}{\partial X} \right) \\ &= \left(x_n, -\frac{\partial S(x_n, x_{n+1})}{\partial x} \right) = (x_n, y_n) \end{aligned}$$

□

Após a proposição acima, nos preocuparemos apenas com a sequência formada pelos x_n e podemos agora definir a ação de uma sequência de pontos.

Definição 2.2.2. Seja $(x_N, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^{1+M-N}$. A ação associada a ele é definida por

$$W(x_N, \dots, x_M) = \sum_{i=N}^{M-1} S(x_i, x_{i+1})$$

Observamos que na definição acima a função geradora é considerada nas coordenadas (x, X) , assim a ação é invariante por uma translação inteira, isto é, a sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ e a sequência $\{x_k + m\}_{k \in \mathbb{Z}}$ com $m \in \mathbb{Z}$ tem a mesma ação para qualquer tamanho de segmento.

Proposição 2.2.3. *Uma sequência é a projeção de uma órbita no eixo x se, e somente se, for um ponto crítico para a ação restrita ao espaço das sequências que começam com x_N e terminam em x_M .*

Demonstração. Observamos que W restrito ao espaço das sequências que começam com x_N e terminam x_M é uma função que depende apenas das variáveis x_i , com $N < i < M$. Logo temos

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \sum_{i=N}^{M-1} \frac{\partial S(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i} = \frac{\partial S(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial S(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i} = Y_{i-1} - y_i$$

Portanto uma sequência é crítica para W se, e somente se, $Y_{i-1} = y_i$, isto é, $\{(x_N, y_N), \dots, (x_M, y_M)\}$ é uma órbita. \square

Definição 2.2.4. Seja uma órbita $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de um ponto z chamamos número de rotação, $\rho_F(z)$ quando os limites abaixo existirem e forem iguais:

$$\rho_F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{x_n - x_0}{n}$$

Definição 2.2.5. Uma órbita ou sequência $\{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é dita uma (m, n) -órbita ou uma (m, n) -sequência se existem $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k$:

$$x_{k+n} = x_k + m$$

Proposição 2.2.6. *Uma (m, n) -órbita tem número de rotação $\frac{m}{n}$.*

Demonstração. Seja x uma (m, n) -órbita. Mostraremos que fixado um natural r entre 0 e n , a sequência

$$\frac{x_{r+qn} - x_0}{r + qn}, \text{ com } q \in \mathbb{N}$$

converge para m/n . De fato temos por definição que $x_{r+qn} = x_r + qm$ logo

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{x_{r+qn} - x_0}{r + qn} = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{x_r + qm - x_0}{r + qn} = \frac{m}{n},$$

pois r, x_r, n, m e x_0 são fixos. Isso mostra que $\rho(x) = m/n$, pois para todo número natural N temos $N = q_N n + r$ e $N \gg 0$ implica que $q_N \gg 0$. \square

Podemos definir uma noção de ação periódica para uma (m, n) -órbita, como

Definição 2.2.7. Seja x uma (m, n) -órbita. A ação associada a ela é definida por

$$W_{mn}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}) + S(x_n, x_1 + m)$$

Obtemos um resultado análogo ao anterior, cuja demonstração também é análoga.

Proposição 2.2.8. Uma (m, n) -sequência é a projeção de uma (m, n) -órbita no eixo x se, e somente se, for um ponto crítico para a ação W_{mn}

Uma propriedade interessante da ação W_{mn} é a invariância por translação inteira e pelo shift.

Proposição 2.2.9. Seja \mathbf{x} uma (m, n) -sequência e definimos $\tau_{i,j}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ onde $y_k = x_{k+i} + j$ então \mathbf{x} e \mathbf{y} tem a mesma ação.

Demonstração. Como $S(x, X) = S(x + 1, X + 1)$ temos que $\tau_{i,0}(\mathbf{x}) = \tau_{i,j}(\mathbf{x})$ tem mesma ação para todo j . Agora basta mostrar para $\tau_{1,0}(\mathbf{x})$ e aplicar o processo de indução. Finalmente temos que mostrar que

$$W_{mn}(x_1, \dots, x_n) = W_{mn}(x_2, \dots, x_{n+1})$$

Note que

$$\begin{aligned} W_{mn}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}) + S(x_n, x_1 + m) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} S(x_i, x_{i+1}) + S(x_n, x_{n+1}) \\ &= S(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{n-1} S(x_{i+1}, x_{i+2}) \end{aligned}$$

como

$$S(x_1, x_2) = S(x_1 + m, x_2 + m) = S(x_{n+1}, x_2 + m)$$

temos

$$W_{mn}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} S(x_{i+1}, x_{i+2}) + S(x_{n+1}, x_2 + m) = W_{mn}(x_2, \dots, x_{n+1})$$

□

Podemos nos perguntar sobre a existência de (m, n) -órbitas e a resposta é que sempre existem (m, n) -órbitas, de fato o Teorema de Poincaré (como apresentado em Le Calvez [15]), afirma que existem pelo menos duas (m, n) -órbitas, porém enunciaremos aqui uma versão um pouco mais fraca.

Teorema 2.2.10. *Seja $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ o levantamento de uma aplicação twist uniforme, isto é,*

$$\frac{\partial X}{\partial y} > a > 0,$$

então existe pelo uma (m, n) -órbita para todo o $m, n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que uma aplicação twist uniforme satisfaz a condição de coerção 3.1, isto é, que

$$\lim_{|X-x| \rightarrow \infty} S(x, X) = \infty$$

E com isso o teorema acima é um caso particular do Teorema de Aubry. De fato isso decorre da seguinte proposição apresentada por Mackay, Meiss e Stark [17].

Proposição 2.2.11. *Se F satisfaz a condição de twist uniforme então existem α, β e γ números não-negativos tais que*

$$S(x, X) \geq \alpha - \beta|X - x| + \gamma|X - x|^2$$

Demonstração. Fixamos inicialmente um ponto (x, X) . A partir do teorema de Stokes e considerando a curva $\gamma(s) = (1 - s)x + sX$ $s \in [0, 1]$, obtemos

$$S(x, X) - S(x, x) = \int_0^1 \frac{\partial S(x, \gamma(s))}{\partial X} (X - x) \, ds$$

Fixado um s , a curva $\beta(r) = ((1 - r)x + r\gamma(s))$ $r \in [0, 1]$ utilizando a mesma ideia acima obtemos

$$\frac{\partial S(x, \gamma(s))}{\partial X} - S(\gamma(s), \gamma(s)) = \int_0^1 \frac{\partial S(x, \gamma(s))}{\partial x \partial X} (x - X) \, dr$$

Juntando ambas equações temos

$$\begin{aligned} S(x, X) &= S(x, x) + \int_0^1 \frac{\partial S(\gamma(s), \gamma(s))}{\partial X} (X - x) \, ds + \\ &\quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial S(x, \gamma(s))}{\partial x \partial X} (x - X) \, dr \right) (X - x) \, ds \\ &= S(x, x) + \\ &\quad (X - x) \int_0^1 \frac{\partial S(\gamma(s), \gamma(s))}{\partial X} - (X - x)^2 \int_0^1 ds \int_0^1 \frac{\partial S(x, \gamma(s))}{\partial x \partial X} \, dr \end{aligned}$$

finalmente tomamos

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}} S(x, x), \quad \beta = \max_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial S(x, x)}{\partial X} \right|$$

ambos estão bem definidos, pois S tem período 1. Além disso observamos que

$$\frac{\partial S(x, X)}{\partial x \partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right) = \frac{\partial y}{\partial X} = \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^{-1}$$

Logo basta tomar $\gamma = a/2$. □

Capítulo 3

O Teorema de Aubry-Mather

Iremos primeiro enunciar o Teorema de Aubry-Mather mesmo sem todas as definições necessárias, que serão apresentadas ao longo da seção. Esse capítulo tem como referência Golé [10].

Teorema 3.0.12. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o levantamento de uma aplicação twist $f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$, com uma função geradora S nas coordenadas (x, X) , satisfazendo a condição de coerção:*

$$\lim_{|X-x| \rightarrow \infty} S(x, X) \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

então F possui órbitas com número de rotação real qualquer tais que

1. São bem Ciclicamente Ordenadas (CO).
2. Minimizam a ação W da definição 2.2.2 .
3. Pertencem a um conjunto de Aubry-Mather.

A demonstração desse teorema será dividida em resultados menores, por isso sempre que mencionarmos F , estamos falando de uma F com as mesmas hipóteses do Teorema de Aubry-Mather.

Proposição 3.0.13. *F possui (m, n) -órbita que minimiza W_{mn}*

Demonstração. Observe que $W : \mathbb{R}^{m+1-n} \rightarrow \mathbb{R}$, vamos provar que a imagem inversa de um intervalo $(-\infty, K]$, $W_{mn}^{-1}((-\infty, K])$ é compacto e pelo Teorema de Weierstrass tem uma (m, n) -sequência minimizante.

Lembramos que $S(x+1, X+1) = S(x, X)$, logo a ação W_{mn} é invariante por translações inteiras. Com isso podemos considerar o conjunto das (m, n) -sequências tais que $x_1 \in [0, 1]$, mais precisamente seja $X_{mn} =$

$\{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in [0, 1]\}$. Se $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, na norma usual de R^n , com $\mathbf{x} \in X_{mn}$ então pelo menos alguma de suas coordenadas $|x_i| \rightarrow \infty$, logo temos que $|x_{j+1} - x_j| \rightarrow \infty$, de fato para isso não acontecer teríamos $|x_j| \rightarrow \infty$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, mas x_1 é limitado. O fato acima e condição de coerção nos garante que

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} W_{mn}(\mathbf{x}) = \infty \quad (3.2)$$

Logo se escolhermos K suficientemente grande temos que $W_{mn}^{-1}((-\infty, K])$ é limitado, pois caso contrário 3.2 não poderia acontecer, e não vazio, como W_{mn} é contínua, temos $W_{mn}^{-1}((-\infty, K])$ é fechado, limitado é não vazio e portanto compacto com isso existe uma (m, n) -sequência que minimiza W_{mn} , pela proposição 2.2.6 essa sequência é uma (m, n) -órbita. \square

Note que a partir da proposição acima fica demonstrada a versão mais fraca do Teorema de Poincaré enunciado anteriormente. Para obter uma órbita com número de rotação irracional, vamos considerar um sequência de órbitas com números de rotação racionais cujo o limite é o irracional desejado e obter uma subsequência convergente, mas antes discutiremos algumas propriedades de órbitas minimizantes.

3.1 Órbitas Ciclicamente Ordenadas

Uma órbita $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ é dita ciclicamente ordenada ou CO se

$$x_j \leq x_k + p \Rightarrow x_{j+1} \leq x_{k+1} + p \quad \forall k, j, p \in \mathbb{Z}$$

A motivação para esse nome decorre que se considerarmos a órbita de um levantamento de um homeomorfismo no círculo, então ele deve satisfazer a propriedade acima. Lembramos também que as órbitas (ou sequências) possuem um ordem parcial dada por

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_k \leq y_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Proposição 3.1.1. *Seja $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ uma órbita CO então x possui um número de rotação $\rho(x)$ e*

$$|x_k - x_0 - k\rho(x)| \leq 1 \quad (3.3)$$

Demonstração. Seja \mathbf{x} uma órbita CO precisamos analisar os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{x_n - x_0}{n}$$

vamos começar provando que para $n \rightarrow \infty$ a sequência é de Cauchy. Fixado um $n > 0$ seja $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x_0 + \alpha_n \leq x_n \leq x_0 + \alpha_n + 1 \quad (3.4)$$

Como x é CO, temos que

$$x_0 + k\alpha_n \leq x_{kn} \leq x_0 + k\alpha_n + k \quad (3.5)$$

de fato suponhamos que a equação 3.5 seja válida para algum k temos

$$x_0 + k\alpha_n \leq x_{kn} \leq x_0 + k\alpha_n + k \Rightarrow x_1 + k\alpha_n \leq x_{kn+1} \leq x_1 + k\alpha_n + k$$

Seguindo indutivamente temos

$$x_n + k\alpha_n \leq x_{kn+n} \leq x_n + k\alpha_n + k$$

Utilizando a equação 3.4 acima obtemos

$$x_0 + (k+1)\alpha_n \leq x_{(k+1)n} \leq x_0 + (k+1)\alpha_n + k + 1$$

Assim a equação 3.5 fica demonstrada por indução.

A partir de 3.5 obtemos

$$\alpha_n \leq \frac{x_{kn} - x_0}{k} \leq \alpha_n + 1$$

Como a afirmação acima é válida para todo k temos que

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x_{kn} - x_0}{k} - \frac{x_n - x_0}{1} \leq 1 &\Rightarrow \left| \frac{x_{kn} - x_0}{k} - \frac{x_n - x_0}{1} \right| \leq 1 \\ &\Rightarrow \left| \frac{x_{kn} - x_0}{nk} - \frac{x_n - x_0}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalmente podemos provar que a sequência desejada é de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ seja n e m tais que $n^{-1} + m^{-1} < \varepsilon$, por 3.6 e pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n - x_0}{n} - \frac{x_m - x_0}{m} \right| &\leq \left| \frac{x_{nm} - x_0}{nm} - \frac{x_n - x_0}{n} \right| + \left| \frac{x_{nm} - x_0}{nm} - \frac{x_m - x_0}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.7)$$

Logo a sequência é de Cauchy e seja $\rho(\mathbf{x})$ seu limite. Tomando o limite $m \rightarrow \infty$ em 3.7 temos:

$$\left| \frac{x_n - x_m}{n} - \rho(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |x_n - x_0 - n\rho(\mathbf{x})| \leq 1$$

Precisamos agora mostrar que a sequência converge para o mesmo valor quando tomamos o limite para $-\infty$. Podemos alterar o argumento acima substituindo x_0 por um x_m com $m < 0$ e obtemos:

$$\left| \frac{x_{k(n-m)-m} - x_m}{(n-m)k - m} - \frac{x_n - x_m}{(n-m) - m/k} \right| \leq \frac{1}{|(n-m) - m/k|}$$

observamos que tomando $k \rightarrow \infty$ e multiplicando por $(n-m)$ ficamos com

$$\left| \rho(\mathbf{x}) - \frac{x_n - x_m}{n-m} \right| \leq \frac{1}{n-m}$$

Considerando o limite de $m \rightarrow -\infty$ fica mostrado que $\rho(\mathbf{x})$ está bem definido.

Para mostrar a continuidade de ρ , consideramos uma sequência $\mathbf{x}^{(j)}$ formadas por sequências CO convergindo para uma sequência \mathbf{x} queremos mostrar que $\rho(\mathbf{x}^{(j)})$ converge para $\rho(\mathbf{x})$. Denotamos $x_k^{(j)}$ o k -ésimo elemento da sequência $\rho(\mathbf{x}^{(j)})$. Logo

$$\left| \frac{x_k^{(j)} - x_0^{(j)}}{k} - \rho(\mathbf{x}^{(j)}) \right| \leq \frac{1}{k} \quad , \quad \left| \frac{x_k - x_0}{k} - \rho(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{1}{k} \quad (3.8)$$

denotamos $\mathbf{z}^{(j)}$ e \mathbf{z} respectivamente por

$$z_k^{(j)} = \frac{x_k^{(j)} - x_0^{(j)}}{k} \quad ; \quad z_k = \frac{x_k - x_0}{k}$$

temos que $\mathbf{z}^{(j)}$ converge para \mathbf{z} . Vamos mostrar que a sequência $\rho(\mathbf{x}^{(j)})$ é de Cauchy.

$$|\rho(\mathbf{x}^{(j)}) - \rho(\mathbf{x}^{(i)})| \leq \left| \rho(\mathbf{x}^{(j)}) - z_k^{(j)} \right| + |z_k^{(j)} - z_k^{(i)}| + |z_k^{(i)} - \rho(\mathbf{x}^{(i)})| \leq \frac{2}{k} + |z_k^{(j)} - z_k^{(i)}|$$

como a expressão acima vale para todo k e $\mathbf{z}^{(j)}$ é convergente, concluímos que $\rho(\mathbf{x}^{(j)})$ é convergente, denotamos seu limite por ω , tomando o limite para $j \rightarrow \infty$ em 3.8, obtemos

$$|z_k - \omega| \leq \frac{1}{k} \quad e \quad |z_k - \rho(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{k}$$

O que garante que $\omega = \rho(\mathbf{x})$. □

Outro lema que nos permitirá obter subsequências convergentes é

Proposição 3.1.2. *O conjunto*

$$CO_{[a,b]} = \{x \in CO \mid \rho(x) \in [a, b]\}$$

é fechado na topologia da convergência pontual e

$$CO_{[a,b]} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid x_0 \in [0, 1]\}$$

é compacto.

Demonstração. Começamos por mostrar que o conjunto CO formado pelas sequências CO é fechado na topologia da convergência pontual (Veja o Apêndice B e Munkres [22]), para isso consideramos seu complementar, isto é, o conjunto das funções que não são CO , mais precisamente seja \mathbf{x} uma sequência tal que existem $i, j, k, p \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x_i \leq x_j + p \text{ e } x_{i+1} > x_{j+1} + p$$

por simplicidade vamos supor p positivo, $i \neq j$, $j \neq i + 1$, e observe que podemos assumir que $x_i < x_j + p$, fazemos isso para evitar prolongar a demonstrar em muitos casos. Definimos agora o conjunto

$$A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid y_i \in (x_i - \varepsilon_0, x_i + \varepsilon_0), y_j \in (x_j - \varepsilon_0, x_j + \varepsilon_0), \\ y_{i+1} \in (x_{i+1} - \varepsilon_1, x_{i+1} + \varepsilon_1), y_{j+1} \in (x_{j+1} - \varepsilon_1, x_{j+1} + \varepsilon_1)\}$$

onde

$$\varepsilon_0 = \frac{x_j - x_i + p}{2} \text{ e } \varepsilon_1 = \frac{x_{i+1} - x_{j+1} - p}{2}$$

A é aberto na topologia da convergência pontual, se mostrarmos que toda sequência \mathbf{y} em A , não é CO , concluiremos que o complementar do conjunto CO é aberto e com isso o conjunto CO é fechado. Note que

$$y_j + p > x_j - \frac{x_j - x_i + p}{2} + p = x_i + \frac{x_j - x_i + p}{2} \geq y_i$$

temos também que

$$y_{i+1} > x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_{j+1} - p}{2} = x_{j+1} + \frac{x_{i+1} - x_{j+1} - p}{2} + p > y_{j+1} + p$$

Com isso \mathbf{y} não é CO , logo o conjunto CO é fechado.

Por continuidade da função ρ temos $CO_{[a,b]}$ é fechado. Dado $\mathbf{x} \in CO_{[a,b]} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid x_0 \in [0, 1]\}$, definimos ω e y_k como

$$\omega = \rho(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad y_k = x_k - x_0 - k\omega$$

Observe que pela proposição 3.1.1 $|y_k| \leq 1$ com isso temos que $\mathbf{x} \in CO_{[a,b]} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} | x_0 \in [0, 1]\}$ é um subconjunto de

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} | x_k = x_0 + k\omega + y_k, (x_0, \omega, \mathbf{y}) \in [0, 1] \times [a, b] \times [-1, 1]^{\mathbb{Z}}\}$$

que é compacto pelo teorema B.0.24 de Tychonov's (veja Munkres [22] para mais detalhes), que afirma que o produto arbitrário de conjuntos compactos é compacto, logo $CO_{[a,b]} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} | x_0 \in [0, 1]\}$ também é compacto. \square

Uma maneira útil de representar uma órbita $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ é o que chamamos de diagrama de Aubry, onde é considerado uma curva x_t com $t \in \mathbb{R}$ tal que se $x_t = x_k$ se t for igual à algum inteiro k , caso contrário é a combinação linear entre os inteiros mais próximos, como por exemplo, na figura abaixo:

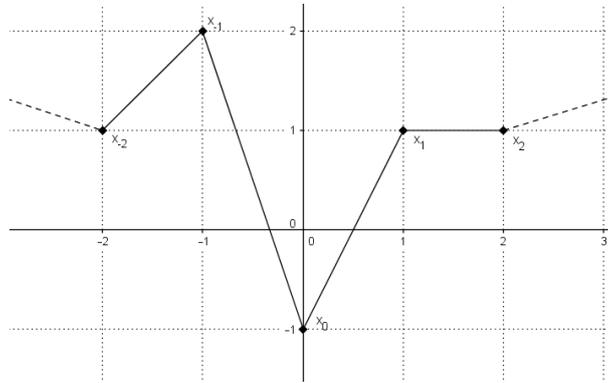


Figura 3.1: Exemplo de um diagrama de Aubry, onde $x_{-2} = 1, x_{-1} = 2, x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 1$

Um das vantagens do diagrama de Aubry-Mather é que podemos agora falar em cruzamento de órbitas, isto é, duas órbitas se cruzam se seus diagrama de Aubry se cruzam, mais precisamente duas órbitas \mathbf{x} e \mathbf{y} se cruzam se existe um k inteiro e um n natural tal que

$$(x_k - y_k)(x_{k+n} - y_{k+n}) < 0$$

Antes de enunciar o lema fundamental de Aubry-Mather, vamos ao um resultado preliminar

Proposição 3.1.3. *Suponhamos que $(x - w)(X - W) \geq 0$ então*

$$S(x, X) + S(w, W) - S(x, W) - S(w, X) \leq 0$$

Ocorrendo a igualdade somente quando $(x - w)(X - W) = 0$

Demonstração. Usando o teorema do Teorema de Stokes A.0.14 (veja o Apêndice A) e considerando a curva $\gamma(s) = (x, X(s) = (1 - s)W + sX)$ podemos escrever

$$S(x, X) - S(x, W) = \int_0^1 \frac{\partial S(x, X(s))}{\partial X} (X - W) ds$$

Consideramos agora a função $h(y) = S(y, X) - S(y, W)$, considerando a curva $x(r) = (1 - r)w + rx$, temos

$$\begin{aligned} h(x) - h(w) &= \int_1^0 h'(x(r))(x - w) dr \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial S(x(r), X(s))(X - W)(x - w)}{\partial x \partial X} ds dr \end{aligned}$$

como a condição twist nos garante que $\frac{\partial}{\partial x \partial X} < 0$ concluímos que $S(x, X) + S(w, W) - S(x, W) - S(w, X) = h(x) - h(w) < 0$ se $(x - w)(X - W) \neq 0$. \square

Enunciaremos agora o lema fundamental de Aubry-Mather cuja a demonstração segue de Meiss [20]

Lema 3.1.4 (Lema Fundamental de Aubry-Mather). *Duas órbitas minimizantes distintas se cruzam no máximo uma vez.*

Demonstração. A demonstração desse lema consiste em mostrar que se duas órbitas minimizantes se cruzam duas vezes, podemos construir uma nova órbita e, com o auxílio do lema, mostrar que sua ação é estritamente menor que as órbitas minimizantes gerando assim um absurdo.

Seja \mathbf{x} e \mathbf{w} duas órbitas minimizantes que se cruzam duas vezes. Existem três tipos de cruzamentos, suponhamos primeiro que ambos se cruzam em tempos não inteiros como na figura abaixo.

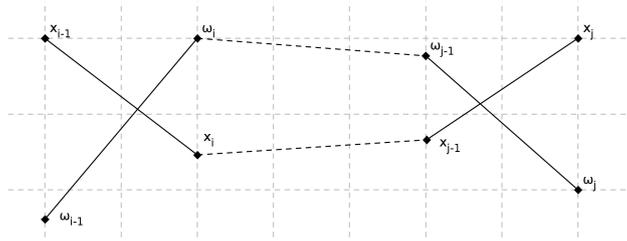


Figura 3.2: Exemplo de um cruzamento em tempo não inteiro.

Seja $t_i \in (i - 1, i)$ e $t_2 \in (j, j + 1)$ os tempos de cruzamento. Definimos duas sequências \mathbf{x}' e \mathbf{w}'

$$x'_k = \begin{cases} w_k, & \text{se } k \in [i, j] \\ x_k, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad w'_k = \begin{cases} x_k, & \text{se } k \in [i, j] \\ w_k, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considerando a ação no intervalo contendo $[i - 1, j + 1]$, temos que \mathbf{x} e \mathbf{x}' coincidem em $i - 1$ e $j + 1$, logo devemos ter que $W(\mathbf{x}') - W(\mathbf{x}) \geq 0$, pois \mathbf{x}' é minimal, analogamente temos $W(\mathbf{w}') - W(\mathbf{w}) \geq 0$. Além disso temos

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}') &= S(x_{i-1}, w_i) + \sum_{k=i}^{j-1} S(w_k, w_{k+1}) + S(w_j, x_{j+1}) \\ W(\mathbf{w}') &= S(w_{i-1}, x_i) + \sum_{k=i}^{j-1} S(x_k, x_{k+1}) + S(x_j, w_{j+1}) \end{aligned}$$

Com isso temos que

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}') - W(\mathbf{x}) + W(\mathbf{w}') - W(\mathbf{w}) &= \\ &= S(x_{i-1}, w_i) + S(w_{i-1}, x_i) - S(x_{i-1}, x_i) - S(w_{i-1}, w_i) \quad (3.9) \\ &+ S(x_j, w_{j+1}) + S(w_j, x_{j+1}) - S(x_j, x_{j+1}) - S(w_j, w_{j+1}) \end{aligned}$$

Observamos que $(x_{i-1} - w_{i-1})(x_i - w_i) < 0$ pelo lema anterior temos que a soma acima é estritamente negativa contrariando a minimalidade de \mathbf{x} ou \mathbf{w} . Logo \mathbf{x} e \mathbf{w} não podem se cruzar mais que uma vez. Consideramos agora o caso em que um cruzamento ocorre em inteiro e outro não. Suponhamos que o cruzamento inteiro ocorra antes, isto é, $x_i = w_i$ e o próximo cruzamento ocorre no intervalo de $(j, j + 1)$ com $j > i$. Construindo a sequências \mathbf{x}' e \mathbf{w}' da mesma maneira, temos que a equação 3.9 fica

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}') - W(\mathbf{x}) + W(\mathbf{w}') - W(\mathbf{w}) &= \\ &= S(x_j, w_{j+1}) + S(w_j, x_{j+1}) - S(x_j, x_{j+1}) - S(w_j, w_{j+1}) \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo temos que a soma acima contradiz a minimalidade de \mathbf{x} ou \mathbf{w} . Analogamente se o cruzamento inteiro ocorre posteriormente em um tempo j temos que

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}') - W(\mathbf{x}) + W(\mathbf{w}') - W(\mathbf{w}) &= \\ &= S(x_{i-1}, w_i) + S(w_{i-1}, x_i) - S(x_{i-1}, x_i) - S(w_{i-1}, w_i) \end{aligned}$$

gerando o mesmo absurdo.

Finalmente suponhamos que \mathbf{x} e \mathbf{w} se cruzem em tempos inteiros. Note que esse cruzamento não pode ser consecutivo, pois se duas sequências são minimizante então elas correspondem a duas órbitas, mas se ambas são tais que $x_i = w_i$ e $x_{i+1} = w_{i+1}$ pela propriedade 2.2 temos que $y_i(x_i, x_{i+1}) = y_i(w_i, w_{i+1})$ logo as órbitas coincidem em um ponto e por consequência são a mesma, mas \mathbf{x} e \mathbf{w} são distintas. Suponhamos que \mathbf{x} e \mathbf{w} se cruzem em tempos i e j tais que $i + 1 < j$ e construímos as sequências \mathbf{x}' e \mathbf{w}' como

anteriormente temos que a equação 3.9 é zero, logo \mathbf{x}' e \mathbf{w}' são minimizantes e correspondem a órbitas, mas \mathbf{x}' coincide com \mathbf{x} para todo tempo $k < i$ e com \mathbf{w} nos tempos $i, i + 1$, pelo que observamos antes temos que as órbitas de \mathbf{x} , \mathbf{x}' e \mathbf{w} devem coincidir, mas \mathbf{x} e \mathbf{w} são distintas. \square

Corolário 3.1.5. *Duas órbitas W_{mn} -minimizantes nunca se cruzam.*

Demonstração. Observe que se \mathbf{x} é uma (m, n) -sequência então

$$W_{mn}(\mathbf{x}) = W(x_1, \dots, x_n, x_1 + m) = W(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \quad (3.10)$$

pelo lema de Aubry, duas (m, n) -sequências não podem se cruzar duas vezes entre o intervalo de $[1, n + 1]$, e pela proposição 2.2.9, elas não podem se cruzar duas vezes em qualquer intervalo fechado de tamanho n porém duas (m, n) -sequências que se cruzam uma vez entre $[1, n + 1]$ devem se cruzar novamente, de fato suponhamos por absurdo que \mathbf{x} e \mathbf{y} sejam duas (m, n) -sequências que se cruzem uma vez, se para algum j tivermos $x_j = y_j$ por definição de (m, n) -sequência temos que $x_{n+j} = y_{n+j}$ o que gera um absurdo, pois seria um segundo cruzamento no intervalo $[j, j + n]$. Suponhamos que $x_1 > y_1$ e que o primeiro cruzamento ocorra entre $(j - 1, j)$, isto é, $x_{j-1} > y_{j-1}$ e $y_j > x_j$ então como $x_1 > y_1$ temos $x_{n+1} > y_{n+1}$, logo por continuidade mais um cruzamento entre o intervalo $(j, n + 1]$, gerando novamente um absurdo. \square

Corolário 3.1.6. *As órbita W_{mn} -minimizantes são CO e o conjunto formado por elas é completamente ordenado para relação parcial.*

Demonstração. Começamos por mostrar que uma (m, n) -sequência minimizante é CO. Seja \mathbf{x} uma (m, n) -sequência minimizante, dados $k, j, p \in \mathbb{Z}$ tais que $x_k \leq x_j + p$. Seja \mathbf{y} uma (m, n) -sequência definida por $y_i = x_{(j-k)+i} + p$ pela proposição 2.2.9 temos \mathbf{y} também é minimizante, logo não pode cruzar com \mathbf{x} , como temos que $x_k \leq y_k$ isso implica que $x_{k+1} \leq y_{k+1} = x_{j+1} + p$ e com isso concluímos que \mathbf{x} é CO. O corolário acima garante que dados duas (m, n) -sequências minimizantes \mathbf{x} e \mathbf{y} devemos ter que $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. \square

Proposição 3.1.7. *Toda órbita W_{mn} -minimizante minimiza a ação W*

Demonstração. Se uma órbita minimiza a ação em um segmento de tamanho n temos que ela irá minimizar um a ação em um segmento menor que n , logo para mostrar que uma sequência é minimizante, basta mostrar que ela minimiza segmentos arbitrariamente grandes. Dada uma (m, n) -sequência mostraremos ela minimiza segmentos de tamanho kn , para todo natural k , observe que pela equação 3.10, minimizar W_{mn} é minimizar um segmento de tamanho n .

Seja \mathbf{x} uma (m, n) -sequência minimizante, mostraremos que ela minimiza a ação $W_{(km)(kn)}$, começamos por mostra que um sequêcia \mathbf{y} minimiza $W_{(km)(kn)}$ então \mathbf{y} é uma (m, n) -sequência. Já sabemos que \mathbf{y} é uma (km, kn) -sequência, suponhamos, por absurdo, que \mathbf{y} não é uma (m, n) -sequência, definimos sequêcia \mathbf{w} tal que $w_j = y_{j+n} + m$ como estamos supondo que \mathbf{y} não é uma (m, n) -sequência então \mathbf{w} e \mathbf{y} são distintas e logo não podem se cruzar, sem perda de generalidade, suponhamos $\mathbf{w} \succ \mathbf{y}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. $\mathbf{w}^{(2)}$ tal que $w_j^{(2)} = w_{j+2n} + 2m = y_{j+2n} + 2m$, afirmamos que $\mathbf{w}^{(2)} \succ \mathbf{y}$, note que

$$w_j^{(2)} = y_{j+2n} + 2m = y_{j+n+n} + m + m = w_{j+n} + m > y_{j+n} + m = w_j > y_j$$

Podemos continuar esse processo e obter $\mathbf{w}^{(k)} \succ \mathbf{w}^{(k-1)} \succ \dots \succ \mathbf{y}$, mas isto gera um absurdo, pois teríamos que

$$w_j^{(k)} = y_{j+kn} + km > y_j$$

O que contradiz o fato de \mathbf{y} ser uma (km, kn) -sequência, logo temos que \mathbf{y} é uma (m, n) -sequência. Finalmente vamos mostrar que uma (m, n) -sequência minimiza a ação W_{mn} se, e somente se, minimiza $W_{(km)(kn)}$, de fato observe que se \mathbf{x} é uma (m, n) -sequência então

$$\begin{aligned} W_{(km)(kn)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{kn-1} S(x_i, x_{i+1}) + S(x_{kn}, x_1 + km) = \sum_{i=1}^{kn} S(x_i, x_{i+1}) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n S(x_i + (j-1)m, x_{i+1} + (j-1)m) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n S(x_i, x_{i+1}) \\ &= kW_{mn}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Logo temos que se \mathbf{x} minimiza a ação W_{mn} então ela minimiza a ação $W_{(km)(kn)}$ para todo k natural, portanto \mathbf{x} minimiza a ação W para qualquer segmento de tamanho kn e por consequência é uma sequêcia minimizante para a ação W \square

Até agora, conseguimos mostrar que F tem órbitas para qualquer número racional e que ainda são CO e minimizam a ação W . Para obter o mesmo resultado para números irracionais precisamos do lema abaixo, cuja demonstração segue de Ragazzo, Carneiro e Zanata [23].

Lema 3.1.8. *Seja \mathbf{x}^k uma seqüência de seqüência minimizantes convergindo para uma seqüência \mathbf{x} então \mathbf{x} é minimizante.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que \mathbf{x} não é minimizante então existe uma seqüência \mathbf{w} tal que $W(x_n, \dots, x_m) = W(w_n, \dots, w_m) + \varepsilon$ para algum m e n naturais e algum ε positivo, e com $x_n = w_n$ e $x_m = w_m$. Como W é contínua temos que existe k_0 tal que para todo $k > k_0$ temos

$$\begin{aligned} |W(x_n, \dots, x_m) - W(x_n^k, \dots, x_m^k)| &< \frac{\varepsilon}{4} \\ |S(w_n, w_{n+1}) - S(x_n^{k_0}, w_{n+1})| &< \frac{\varepsilon}{4} \\ |S(w_{m-1}, w_m) - S(w_{m-1}, x_m^{k_0})| &< \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

Vamos construir uma seqüência \mathbf{y} cuja a ação é menor que a ação de \mathbf{x}^k , gerando um absurdo. Definimos

$$y_i = \begin{cases} w_i & \text{se } i = n + 1 \dots m - 1 \\ x_i^{k_0} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

analisando a ação de \mathbf{y} temos

$$\begin{aligned} W(y_n, \dots, y_m) &= \sum_{i=n}^{m-1} S(y_i, y_{i+1}) \\ &= S(x_n^{k_0}, w_{n+1}) + S(w_{m-1}, x_m^{k_0}) + \sum_{i=n+1}^{m-2} S(w_i, w_{i+1}) \\ &= S(x_n^{k_0}, w_{n+1}) + S(w_{m-1}, x_m^{k_0}) + W(w_n, \dots, w_m) - \\ &\quad S(w_n, w_{n+1}) - S(w_{m-1}, w_m) \end{aligned}$$

Analisando a diferença entre a ação de x e y

$$\begin{aligned}
& W(x_n^{k_0}, \dots, x_m^{k_0}) - W(y_n, \dots, y_m) \\
&= W(x_n^{k_0}, \dots, x_m^{k_0}) - W(x_n, \dots, x_m) + W(x_n, \dots, x_m) \\
&\quad - W(y_n, \dots, y_m) \\
&= W(x_n^{k_0}, \dots, x_m^{k_0}) - W(x_n, \dots, x_m) + W(x_n, \dots, x_m) \\
&\quad - W(w_n, \dots, w_m) + S(w_n, w_{n+1}) - S(x_n^{k_0}, w_{n+1}) \\
&\quad + S(w_{m-1}, w_m) - S(w_{m-1}, x_m^{k_0}) \\
&> |W(x_n^{k_0}, \dots, x_m^{k_0}) - W(x_n, \dots, x_m)| + \varepsilon \\
&\quad - |S(w_n, w_{n+1}) - S(x_n^{k_0}, w_{n+1})| \\
&\quad - |S(w_{m-1}, w_m) - S(w_{m-1}, x_m^{k_0})| \\
&> \varepsilon - \frac{3}{4}\varepsilon > 0
\end{aligned}$$

□

Podemos agora mostrar que F possui órbitas com número de rotação irracional que é CO e minimizante.

Demonstração. Seja q_k uma sequência de números racionais convergindo ao um irracional ω , para cada q_k existe uma sequência \mathbf{x}^k que é CO e minimizante, podemos também supor que $x_0^k \in [0, 1)$, pois ao realizar uma translação inteira que a ação e o número de rotação não se alteram. Assim pelo lema 3.1.2 temos que existe uma subsequência convergente, seja \mathbf{x} tal sequência, temos que \mathbf{x} é CO, pois o conjunto de sequências CO é fechado, pelo lema 3.1.1 tem número de rotação ω e pelo que mostramos acima é minimizante. □

Para concluir a demonstração do Teorema de Aubry-Mather, falta definir e mostrar que as órbitas acima estão em um conjunto de Aubry.

3.2 Conjuntos de Aubry-Mather

Um lema útil para essa seção é o que Golé chama de fenômeno Ratchet

Lema 3.2.1 (Lema Ratchet). *Seja F o levantamento de uma de uma aplicação twist que satisfaz a condição*

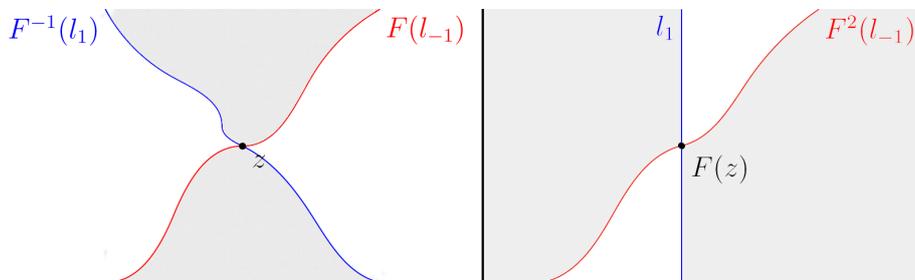
$$b > \frac{\partial X}{\partial y} > a > 0 \tag{3.11}$$

em uma região então para todo ponto z na região existem um cone vertical $C_v(z)$ centrado em z e um cone horizontal $C_h(F(z))$ centrado em $F(z)$, tal que $F(C_v(z)) \subset C_h(F(z))$. Lembramos que um cone vertical $C_v(z_0)$ centrado em um ponto z_0 é um conjunto definido a partir de dois vetores u e v linearmente independentes tais que $C_v(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^2 | z = z_0 + \alpha u + \beta v, \text{ onde } \alpha \cdot \beta \geq 0\}$ e além disso $z_0 + (0, 1) \in C_v(z_0)$, e um cone horizontal $C_h(z_0)$ é definido de maneira análoga, porém é exigido que $z_0 + (1, 0) \in C_h(z_0)$ ao invés de $z_0 + (0, 1)$.

Demonstração. Começamos fazendo algumas observações, primeiro se F é o levantamento de uma Aplicação do tipo Twist positiva, denotamos duas inversa por $F^{-1} = (X^{-1}, Y^{-1})$ e sua composta por $F^2 = (X^2, Y^2)$ a regra da cadeia nos diz que

$$-a > \frac{\partial X^{-1}}{\partial y} > -b \quad ; \quad 2b > \frac{\partial X^2}{\partial y} > 2a$$

Fixe z e considere as retas verticais $l_1 = \{F(z) + (0, y) | y \in \mathbb{R}\}$ e $l_{-1} = \{F^{-1}(z) + (0, y) | y \in \mathbb{R}\}$. Seja C_v a região entre $F^{-1}(l_1)$ e $F(l_{-1})$ que contém a reta vertical e C_h a região entre l_1 e $F^2(l_{-1})$ que contém a reta vertical como na figura abaixo.



Afirmamos que $F(C_v) \subset C_h$. Note que $F(l_{-1})$ é gráfico crescente em relação ao eixo x e $F^{-1}(l_1)$ decrescente em relação ao eixo x . Seja $z_0 \in C_v$, suponhamos primeiro que z_0 está acima de z e ainda que está a esquerda de z , considere $s_e(z_0)$ a semi-reta vertical que inicia em $F^{-1}(l_1)$ e passa por z_0 , temos que $F(s_e(z_0))$ está contido em C_h , de fato, $F(s_e(z_0))$ é um gráfico crescente que inicia-se em l_1 e não pode cruzar com $F^2(l_{-1})$, pois isso implicaria que $s_e(z_0)$ e $F(l_{-1})$ possuem pontos em comum, mas $s_e(z_0)$ está a esquerda de z e $F(l_{-1})$ é monótona crescente, com isso temos que $F(s_e(z_0)) \subset C_h$ e conseqüentemente $F(z_0) \in C_h$. Suponhamos agora que z_0 esteja a direita de z , considere a semi-reta vertical $s_d(z_0)$ que passa por z_0 e inicia-se em $F(l_{-1})$, $F(s_d(z_0))$ é um gráfico crescente que inicia-se em

$F^2(l_{-1}), F(s_d(z_0))$ não pode intersectar novamente $F^2(l_{-1})$, pela observação anterior que o vetor tangente de $F^2(l_{-1})$ tem sempre uma inclinação maior que $F(s_d(z_0))$, logo $F(s_d(z_0)) \subset C_h$ e com isso $z_0 \in C_h$. Com mostramos que parte superior de $F(C_v)$ está contido da parte à direita de C_h . Podemos fazer um argumento análogo para parte de baixo e mostrar que ela é levada pela F na parte a esquerda de C_h .

Para finalizar a demonstração do lema, basta observar que C_v contém um cone vertical e que C_h está contido em um cone horizontal, mas isto é garantido por 3.11. \square

A partir da demonstração acima temos também o seguinte corolário

Corolário 3.2.2. *Os cones obtidos no Lema 3.2.1 são tais que a parte superior do cone vertical é levada na parte à direita do cone horizontal.*

Definição 3.2.3. Seja $M \subseteq \mathbb{R}^2$ é dito F -ordenado se, para todo $(x, y), (x', y') \in M$,

$$x < x' \Rightarrow X(x, y) < X(x', y')$$

onde $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$. Se além de ser F -ordenado, tivermos que M é invariante por F e por F^{-1} , dizemos que M é F -ordenado invariante.

Observe que um conjunto F -ordenado invariante não pode conter dois pontos z, z' tais que $\pi(z) = \pi(z')$, pois isto implicaria que z' está acima de z e como F^{-1} é o levantamento de uma aplicação twist negativa teríamos $\pi(F^{-1}(z')) < \pi(F^{-1}(z))$, mas $\pi(z) = \pi(z')$ o que gera um absurdo. Observe que um conjunto é limitado verticalmente, basta utilizar a proposição 3.1.2 com isso temos que

Proposição 3.2.4. *O fecho de um conjunto F -ordenado invariante é um conjunto F -ordenado invariante.*

Demonstração. Seja M um conjunto F -ordenado invariante, por continuidade da função F temos que \overline{M} é invariante. Suponhamos que F é o levantamento de uma aplicação twist positiva. Afirmamos que se $z, z' \in \overline{M}$ e $\pi(z) \leq \pi(z')$ então $\pi(F(z)) \leq \pi(F(z'))$, Existem duas possibilidades ou $\pi(z) = \pi(z')$ e a condição twist nos garante que $\pi(F(z)) < \pi(F(z'))$, ou $\pi(z) < \pi(z')$ então existem sequências $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e $\{z'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ com $\pi(z_i) < \pi(z'_i)$ para todo i e com isso $\pi(F(z_i)) < \pi(F(z'_i))$ e logo $\pi(F(z)) \leq \pi(F(z'))$. Queremos mostrar que $\pi(F(z)) = \pi(F(z'))$ não pode acontecer. Suponhamos por absurdo que $\pi(z) < \pi(z')$ e $\pi(F(z)) = \pi(F(z'))$. Aplicando o Lema Ratchet 3.2.1 em F^{-1} para $F(z)$, como z' está a direita de z , temos que $F(z')$ está abaixo de $F(z)$. Pela condição de twist temos que $\pi(F^2(z)) < \pi(F^2(z'))$, o que gera um absurdo, pois $\pi(z) < \pi(z')$. \square

Lembramos que um função f é dita de Lipschitz se existe uma constante $K > 0$ tal que $\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\|$. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é um gráfico de Lipschitz sobre a coordenada x se $\pi|_A$ é uma função injetiva e sua inversa é tal que $\pi_y(\pi^{-1}(x))$ é função de Lipschitz, onde π_y é a projeção na coordenada y .

Proposição 3.2.5. *Se M é um conjunto F -ordenado invariante então existe uma constante K , que depende de F , tal que se (x, y) e $(x', y') \in M$ então*

$$|y' - y| \leq K|x' - x|$$

Isto é, M é um gráfico de Lipschitz sobre a coordenadas x .

Demonstração. Como em M não pode ter dois pontos em uma reta vertical, a função $\pi|_M$ é injetiva. Mostraremos agora que é um gráfico de Lipschitz. Seja $z, z' \in M$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\pi(z) < \pi(z')$. Considerando o fenômeno ratchet para F^{-1} no ponto z temos que se z' não pode estar no cone superior de z , pois se estivesse teríamos que $F^{-1}(z')$ está a esquerda de $F^{-1}(z)$ contrariando o fato de M ser F -ordenado invariante, analogamente considerando o Lema Ratchet 3.2.1 para F no ponto z , z' não pode estar no cone inferior de z , logo z' deve estar fora do cone de z , logo M é um gráfico de Lipschitz. \square

Lema 3.2.6. *Todos os ponto de um conjunto F -ordenado tem o mesmo número de rotação.*

Demonstração. Seja M tal conjunto. Mostraremos primeiro que a projeção de uma órbita de um ponto de um conjunto F -ordenado é CO. Seja $z \in M$ suponhamos que $\pi(z) < \pi(F(z))$, como M é F -ordenado temos $\pi(F(z)) < \pi(F^2(z))$ e assim por diante temos $\pi(F^i(z)) < \pi(F^{i+1}(z))$ o que implica que a órbita é CO. Além disso se tivermos dois pontos $z, z' \in M$, suas órbitas não se cruzam, pois se $\pi(z) < \pi(z')$ temos novamente que $\pi(F^i(z)) < \pi(F^i(z'))$ para todo i . Finalmente mostraremos que dadas duas sequências CO, que não se cruzam, elas tem o mesmo número de rotação.

Seja \mathbf{x}, \mathbf{x}' duas sequências CO, tais que $\mathbf{x} \prec \mathbf{x}'$, observe que se $i > 0$ e $k < 0$

$$\frac{x_i}{i} < \frac{x'_i}{i} \quad \text{e} \quad \frac{x_k}{k} > \frac{x'_k}{k}$$

com isso temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i}{i} < \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x'_i}{i} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{x_k}{k} > \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{x'_k}{k}$$

finalmente

$$\rho(\mathbf{x}) \leq \rho(\mathbf{x}') \quad \text{e} \quad \rho(\mathbf{x}) \geq \rho(\mathbf{x}')$$

portanto temos $\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}')$. \square

Finalmente definimos um conjunto de Aubry-Mather.

Definição 3.2.7. Um conjunto M é dito Aubry-Mather para o levantamento de uma aplicação twist F se M for fechado, F -ordenado invariante e invariante por translação inteira no eixo x .

A propriedade de invariância por translações inteiras não exerce grande influência, pois dado um conjunto F -ordenado invariante e unirmos com todas as possíveis translações inteiras ele irá continuar sendo F -ordenado invariante, pois F é invariante por translação inteira no eixo x .

Já que mostramos que existem órbitas CO para todos os números de rotação reais, e considerando o fecho de uma órbita CO e suas translações inteiras temos um conjunto de Aubry-Mather, isto prova a parte final do teorema. Os resultados anteriores nos garantem que um conjunto M de Aubry-Mather é um gráfico de Lipschitz e que todas as órbitas em M são CO com o mesmo número de rotação. Uma propriedade muito interessante dos conjuntos de Aubry-Mather é

Teorema 3.2.8. F restrita a um conjunto M de Aubry-Mather é conjugada a um levantamento de um homeomorfismo no círculo pela projeção π .

Demonstração. Note que $\pi(M)$ é fechado pela proposição B.0.23. Observamos também que $\pi(M)$ é invariante por translação inteira, com isso π induz um homeomorfismo $G : \pi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $G(\pi(z)) = \pi(F(z))$, tal que $G(x+1) = G(x) + 1$, se $\pi(M) = \mathbb{R}$ então G é um levantamento de um homeomorfismo no círculo, se $\pi(M) \neq \mathbb{R}$ então seu complementar é um aberto na reta, que pode ser escrito como união disjunta de intervalos abertos. Note que esse intervalos devem ser sempre limitados, pois um conjunto de Aubry-Mather é ilimitado no eixo x , seja (a, b) um intervalos desses definimos G nesse intervalo como o segmento de reta unindo $G(a)$ até $G(b)$, note que se (a, b) não intersecciona $\pi(M)$ então pela invariância temos que $(a+1, b+1)$ também não intersecciona o $\pi(M)$ e além disso temos que $G(t+1) = G(t) + 1$ para todo $t \in (a, b)$, pois $G(a+1) = G(a) + 1$ e $G(b+1) = G(b) + 1$. Logo temos G é contínua, $G(x+1) = G(x) + 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e G é crescente por definição de G e de conjunto F -ordenado, logo é o levantamento de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação e por definição $G(\pi(z)) = \pi(F(z))$ para todo $z \in M$, logo π é uma conjugação entre $F|_M$ e $G|_{\pi(M)}$. \square

Observamos que na demonstração acima obtemos um função G que além de ser um levantamento de um homeomorfismo do círculo, é também Lipschitz e possui o mesmo número de rotação que M . Uma pergunta natural é como se caracterizam os homeomorfismos do círculo, a resposta é dada pelo

Teorema de Classificação de Poincaré. Alguns autores, como Katok e Hasselblatt [13], definem um conjunto de Aubry-Mather como a projeção do conjunto no cilindro no caso em que M é um conjunto de Cantor. Note que sobre a Aplicação Standard com $k = 0$ se resume a $f(x, y) = (x + y, y)$, logo se considerarmos $M = \{(x, y) | y = y_0\}$, M é um conjunto de Aubry-Mather, e nesse conjunto a aplicação Standard é conjugada a uma rotação y_0 o teorema acima mostra que de uma certa maneira acontece para qualquer valor de k , isto é, existe um conjunto M com número de rotação y_0 tal que restrita a esse conjunto a aplicação Standard é conjugada a um homeomorfismo no círculo com número de rotação y_0 , o que parece surpreendente se observamos a figura 1.1, no caso em que $k = 8$.

3.3 Teorema de Classificação de Poincaré

Os resultados dessa seção seguem a partir de Katok e Hasselblatt [13] Começamos com alguns resultados preliminares.

Proposição 3.3.1. *Seja F o levantamento de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação então o número de rotação é o mesmo para qualquer $x \in \mathbb{R}$*

Demonstração. F é crescente logo toda a órbita é CO, além disso duas órbitas nunca se cruzam, assim pelo o que foi feito no Lema 3.2.6 temos que toda órbita tem o mesmo número de rotação. \square

Com isso podemos definir naturalmente o número de rotação $\rho(f)$ de um homeomorfismo no círculo como o número de rotação de um ponto qualquer. Além disso definimos ω -limite e α -limite de maneira usual.

Definição 3.3.2. *Seja f um homeomorfismo do círculo, e seja $x \in \mathbb{S}^1$, definimos $\omega(x)$ como o conjunto de pontos y de \mathbb{S}^1 tal que existe uma sequência de índices n_k crescendo para ∞ com $f^{n_k}(x)$ convergindo a y . Definimos $\alpha(x)$ analogamente considerando a sequência de índices decrescendo para $-\infty$.*

O Teorema de Classificação de Poincaré que queremos demonstrar é

Teorema 3.3.3 (Teorema de Classificação de Poincaré). *Seja f um homeomorfismo no círculo que preserva orientação e F seu levantamento. Então*

- *Se $\rho(f)$ é racional então $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são órbita periódicas para todo $x \in \mathbb{S}^1$*

- Se $\rho(f)$ é irracional então $\omega(x) = \alpha(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$ e além disso, $\omega(x)$ independe de x , isto é, $\omega(x) = \omega(x')$ para todo $x, x' \in \mathbb{S}^1$. Denote $\Omega = \omega(x)$, então ou $\Omega = \mathbb{S}^1$ ou é um conjunto de Cantor, isto é, é fechado, perfeito e totalmente desconexo.

Começamos por considerar o caso onde $\rho(f)$ é racional.

Proposição 3.3.4. *Seja f um homeomorfismo do círculo tal que $\rho(f)$ é racional então f tem uma órbita periódica.*

Demonstração. Começamos por mostrar que se $\rho(f) = 0$ então f tem ponto fixo. Por contraposição suponhamos que f não tem ponto fixo, seja F seu levantamento tal que $F(0) \in [0, 1)$ temos que $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$, como $F(x) - x$ é contínua, temos que $0 < F(x) - x < 1$, pois caso isso não acontecesse o Teorema do Valor Intermediário $F(x) - x$ assumiria um valor inteiro, além disso como $[0, 1]$ é compacto temos que $F(x) - x$ assume mínimo e máximo, logo podemos assumir que

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

Como F tem período igual a 1, a desigualdade acima vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isso

$$\begin{aligned} \delta &\leq F(0) - 0 && \leq 1 - \delta \\ \delta &\leq F^2(0) - F(0) && \leq 1 - \delta \\ &\vdots \\ \delta &\leq F^n(0) - F^{n-1}(0) && \leq 1 - \delta \end{aligned}$$

somando as inequações acima obtemos

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta$$

finalmente $\rho(f) \neq 0$. Suponhamos agora que $\rho(f) = p/q$. Considere $G(x) = F^q(x) - p$ observe que

$$\frac{G^n(0)}{n} = \frac{F^{qn}(0) - np}{n} = q \frac{F^{qn}(0) - np}{qn}$$

Logo $\rho(G) = q(p/q - p/q) = 0$ Logo G tem ponto fixo, mas isso implica que f^q tem ponto fixo e portanto tem órbita periódica. \square

Queremos mostrar agora que $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são órbitas periódicas. Mostraremos mais do que isso

Proposição 3.3.5. *Se $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{S}^1$ é uma órbita não periódica temos duas possibilidades:*

1. Se f tem apenas uma órbita periódica $O(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{q-1}(x_0)\}$ então x é um ponto heteroclínico para dois pontos de (x_0) em relação a f^q . Esses pontos são distintos se $q > 1$.
2. Se f tem mais de uma órbita periódica então x é um ponto heteroclínico em relação a f^q para dois pontos de órbitas periódicas distintas.

Demonstração. Seja F o levantamento de f e x_0 um ponto periódico de f , considere a função $G(y) = F^q(y) - p$ definida para todo $y \in [x_0, x_0 + 1]$, note que G é crescente, pois F^q é o levantamento de f^q . Como x é não periódico temos que $G(x) \neq x$, suponhamos que $G(x) > x$, seja $I = (a, b)$ o maior intervalo contendo x tal que $G(y) > y$, a existência de I é garantida pelo fato de G ser contínua e observe que a e b devem ser pontos fixos, pois I é maximal. Como G é crescente temos $G((a, b)) \subset [a, b]$, com isso temos $G^n(x)$ é uma sequência crescente e limitada por b , logo é convergente, mas G é um homeomorfismo no intervalo $G^n(x)$ só pode convergir para um ponto fixo, neste caso b . Note que se $G(x) > x$ temos que $G^{-1}(x) < x$, logo $G^{-n}(x)$ é uma sequência decrescente e analogamente deve convergir para a . No caso $G(x) < x$ o argumento é similar, pois teríamos que $G^n(x)$ é decrescente convergindo para a e $G^{-n}(x)$ crescente convergindo para b . Com isso mostramos a primeira parte de 1. e 2.. Observe que em 1. se $q > 1$ então G tem um ponto fixo entre $(x_0, x_0 + 1)$, logo temos que $b - a < 1$ portanto $a \not\equiv b \pmod{1}$ garantido que a e b são pontos distintos de $o(x_0)$. No caso 2. suponhamos por absurdo que a e b pertencem a mesma órbita, isto é, $b \pmod{1} = f^k(a \pmod{1})$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, mas com isso teríamos que $I = (a \pmod{1}, f^k(a \pmod{1}))$ não contém nenhum ponto periódico o mesmo valendo para $f^{nk}(I)$, entretanto temos que $\cup_{0 \leq n \leq q} f^{nk}(I)$ cobre todo o complementar da órbita de a , assim f teria apenas uma órbita periódica contrariando nossa hipótese. \square

Consideramos agora o caso em que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Começamos por um lema auxiliar.

Lema 3.3.6. Se $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ $m \neq n$, seja $x \in \mathbb{S}^1$ e $I \subseteq \mathbb{S}^1$ um intervalo fechado delimitado por $f^n(x)$ e $f^m(x)$. Então $\mathbb{S}^1 \subseteq \cup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(I)$

Demonstração. Consideramos $I_k = f^{(n-m)k}(I)$, note que estes intervalos estão lado a lado, isto é, I_k e I_{k+1} tem um ponto que os delimitam em comum. Suponhamos por absurdo que $\mathbb{S}^1 \neq \cup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(I)$ então a sequência dos pontos

que delimitam converge a um ponto z e com isso teríamos

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)}(f^m(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(-k+1)(n-m)}(f^m(x)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n-m)}(f^{-k(n-m)}(f^m(x))) = f^{n-m}(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)}(f^m(x))) \\ &= f^{n-m}(z) \end{aligned}$$

Com isso teríamos z um ponto periódico, mas isto implicaria que $\rho(f)$ é racional. \square

Proposição 3.3.7. *Seja f um homeomorfismo no círculo tal que $\rho(f)$ é irracional. Então $\omega(x)$ não depende do ponto x e $\omega(x)$ é todo o \mathbb{S}^1 ou um conjunto de Cantor, isto é, perfeito, fechado e totalmente desconexo.*

Demonstração. Começamos por mostrar que $\omega(x)$ não depende do ponto x , considere x e $y \in \mathbb{S}^1$ e seja $f^{l_n}(x) \rightarrow z \in \omega(x)$. Fixado um l_m , considerando o intervalo fechado I_1 formado por $f^{l_1}(x)$ e $f^{l_2}(x)$ pelo lema anterior existe um k_1 tal que $f^{k_1}(y) \in I_1$, considerando o intervalo fechado I_2 formado por l_2 e l_3 novamente o lema anterior garante que existe um k_2 tal que $f^{k_2+k_1}(y) \in I_2$ construindo a sequência por indução e denotando $K_m = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, com isso temos que $K_m \rightarrow \infty$ quando $m \rightarrow \infty$ e além disso temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^{K_m}(y) = z$$

e com isso $\omega(x) \subseteq \omega(y)$, realizando a mesma construção para um ponto $z \in \omega(y)$ concluímos que $\omega(x) = \omega(y)$. $\omega(x)$ não depende de x , seja $\Omega = \omega(x)$. Observe que se A é um conjunto fechado e invariante por f , então $f^n(x) \in A$ para todo $x \in A$, e como A é fechado qualquer ponto de acumulação de $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertence a A , logo $\Omega \subseteq A$, logo os únicos subconjuntos fechados e invariantes de Ω são \emptyset e o próprio Ω . Note que $\partial\Omega$ é invariante por f , de fato seja $x \in \partial\Omega$ e D um aberto contendo $f(x)$, temos que D deve conter pontos Ω e seu complementar por $f^{-1}(D)$ é um aberto que contém x . Além disso a fronteira de um conjunto é um fechado, logo temos que ou $\partial\Omega = \emptyset$ e com isso interior de Ω é igual a Ω portanto Ω é aberto e fechado logo $\Omega = \mathbb{S}^1$ ou $\partial\Omega = \Omega$ com isso o interior de Ω é vazio, e como Ω é fechado temos que Ω é nowhere dense que no círculo é equivalente a ser totalmente desconexo. Finalmente queremos concluir que Ω é perfeito, seja $x \in \Omega$, existe uma sequência l_m tal que $f^{l_m}(x) \rightarrow x$, pois conjunto $\Omega = \omega(x)$, note que $f^{l_m}(x) \in \Omega$, pois Ω é invariante, além disso $f^{l_m}(x) \neq x$, pois como $\rho(f)$ é irracional temos que f não tem ponto periódicos. \square

A partir da proposição acima denotaremos o $\omega(x)$ como $\Omega(f)$.

A proposição abaixo é o último resultado preliminar antes de demonstrarmos a parte final do Teorema de Classificação de Poincaré

Proposição 3.3.8. Se $\rho(f) = \rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então para $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$ temos

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \Leftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

Demonstração. Começamos observando que o fato que $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ implica que $n_1\rho + m_1 \neq n_2\rho + m_2$. Dados $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, defina uma função $G(x) = F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) - m_2$, observe que G não pode ter zeros, pois se $G(z) = 0$ para algum $z \in \mathbb{R}$, teríamos que $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) \in \mathbb{Z}$ e com isso $z \bmod 1$ seria uma órbita periódica, contrariando nossa hipótese. Suponhamos que $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$, por continuidade G não troca de sinal e portanto a desigualdade independe do ponto x com isso tomando $x = F^{-n_2}(0)$ e $x = F^{n_1-2n_2}(0)$, obtemos respectivamente as deseigualdades

$$\begin{aligned} F^{n_1-n_2}(0) &< m_2 - m_1 \\ F^{2(n_1-n_2)}(0) &< (m_2 - m_1) + F^{n_1-n_2}(0) \end{aligned}$$

Combinando as desigualdades acima obtemos $F^{2(n_1-n_2)}(0) < 2(m_2 - m_1)$, prosseguindo indutivamente temos $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, agora note que

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}}{n(n_1-n_2)}(0) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(m_2 - m_1)}{n(n_1 - n_2)} < \frac{(m_2 - m_1)}{(n_1 - n_2)}$$

Consequentemente

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$$

De maneira análoga podemos mostrar que se $F^{n_1}(x) + m_1 > F^{n_2}(x) + m_2$ então $n_1\rho + m_1 > n_2\rho + m_2$ \square

Finalmente mostraremos a parte final do Teorema de Classificação de Poincaré, lembramos que g é dita um fator topológico de f , se existe uma função contínua sobrejetiva h tal que $h \circ f = g \circ h$, h é chamada de semiconjugação.

Teorema 3.3.9. Suponhamos que $\rho(f) = \rho$ seja irracional temos que se $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$ então f é conjugada a rotação R_ρ de ângulo ρ , caso contrário R_ρ é um fator topológico de f .

Demonstração. Seja F o levantamento de f , $x \in \mathbb{R}$ e B o levantamento da órbita de $x \bmod 1$, isto é, $B = \{F^n(x) + m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Definimos $H : B \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) + m \mapsto n\rho + m$, a proposição acima nos diz que H é monótona, além disso $H(B)$ é denso em \mathbb{R} , pois o conjunto $\{n\rho$

$\text{mod } 1 | n \in \mathbb{Z}$ é denso no intervalo $[0, 1)$. Seja $\overline{R_\rho}$ o levantamento de R_ρ , dado por $\overline{R_\rho}(x) = x + \rho$, temos que

$$\begin{aligned} H \circ F(F^n(x) + m) &= H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\rho + m \\ \overline{R_\rho} \circ H(F^n(x) + m) &= \overline{R_\rho}(n\rho + 1) = (n+1)\rho + m \end{aligned}$$

Consequentemente se restringirmos F ao conjunto B , temos $H \circ F = \overline{R_\rho} \circ H$. Note ainda que se $z \in B$, temos

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(z) + 1 \quad (3.12)$$

Afirmamos que podemos estender H continuamente ao fecho \overline{B} de B . Seja $y \in \overline{B}$, temos que existe sequência x_n em B cujo limite é y e portanto definimos $H(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n)$, precisamos primeiro mostrar que tal limite existe. Se $x_n > y$ ou $x_n < y$ temos que o limite desejado existe e independe da escolha de x_n , pois H é monótona e $H(B)$ é denso. Se x_n for uma sequência qualquer e x_{k_m}, x_{l_m} subsequências tais que $x_{k_m} > y$ e $x_{l_m} < y$, poderíamos ter que

$$b = \lim_{m \rightarrow \infty} H(x_{k_m}) > \lim_{m \rightarrow \infty} H(x_{l_m}) = a$$

Mas isto não ocorre, pois se ocorresse teríamos que $\mathbb{R} \setminus H(B)$ conteria o intervalo (a, b) , mas isto gera uma contradição, pois $H(B)$ é denso. Observe que H em relação à \overline{B} é contínua por construção e sobrejetiva (pois $H(B)$ é denso). Note que se $\Omega(f) = \mathbb{S}^1$, temos que $\overline{B} = \mathbb{R}$, como a equação 3.12 continua valendo para extensão H ao conjunto \overline{B} , assim como a monotocidade, temos que H conjugua f e R_ρ . Caso contrário, podemos estender H continuamente à \mathbb{R} , dado um intervalo complementar de \overline{B} definimos H constante igual ao valor dos extremos, e com isso conseguimos semiconjugação entre f e R_ρ (observe que H não é mais injetiva). \square

Capítulo 4

Forma Normal de Birkhoff

Uma das motivações para o estudo de aplicações twist vem do estudo de Hamiltonianos com uma órbita elíptica, essencialmente, se considerarmos uma seção de Poincaré em torno de um ponto dessa órbita a aplicação de primeiro retorno nessa seção, temos uma aplicação twist. Começamos por estudar Hamiltonianos, seguimos Lopes [1] e Grébert [9].

4.1 Hamiltonianos

Considere uma partícula contida em \mathbb{R}^n com massa m , cuja sua posição em função do tempo é dada por $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ e sob influência de um campo de forças, que não varia ao longo do tempo, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a Lei de Newton afirma que

$$mq''(t) = F(q(t))$$

Se definirmos o momento canônico por $p(t) = (mq'_1(t), \dots, mq'_n(t))$ e tomarmos F um campo conservativo, isto é, existe uma função $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F = -\nabla U$, então a energia total do sistema denotada por $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$H(q(t), p(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{|p_i|^2}{2m} + U(q(t))$$

Como F é conservativo é possível mostrar (ver Lopes [1]) que a energia total é conservada, ou seja, se mantém constante ao longo do tempo e também que a Lei de Newton fica reduzida à

$$\begin{cases} q'_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1, \dots, n \\ p'_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.1)$$

A equação 4.1 é conhecida como as equações da Hamilton-Jacobi. Essa foi a motivação inicial de William Rowan Hamilton, que permitiu um entendimento maior da Mecânica Clássica, e se permitirmos funções mais gerais para H , podemos descrever outros modelos físicos que não possuem um campo conservativo, para mais detalhes ver Lopes [2] e o Mackay e Meiss [16]. Neste trabalho Hamiltonianos sempre serão autônomos, isto é, não dependem do tempo e por isso chamaremos apenas Hamiltonianos como na definição abaixo.

Definição 4.1.1. Um Hamiltoniano com n graus de liberdade é uma função C^∞ , $H(q, p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a equação diferencial

$$\dot{\phi} = (\dot{q}, \dot{p}) = J\nabla H(q, p), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad I \text{ é a identidade em } \mathbb{R}^n$$

é o Sistema Hamiltoniano para H , $\nabla H(q, p)$ é o campo Hamiltoniano de H e ϕ é o fluxo Hamiltoniano de H .

Um conceito importante para o entendimento de equações diferenciais e por consequência Sistemas Hamiltonianos é o de Integral Primeira, uma função $V : E \rightarrow \mathbb{R}$, onde E é um aberto de \mathbb{R}^{2n} é dita uma integral primeira de um Hamiltoniano com n graus de liberdade se V não for constante em abertos contidos em E , mas for constante ao longo do fluxo Hamiltoniano.

Definição 4.1.2. Sejam $f(q, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(q, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ funções C^1 , defina $h(q, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(q, p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) (q, p)$$

h é chamada e de colchete de Poisson de f e g , e será denotado por $\{f, g\}$. Uma outra maneira mais sucinta de escrever h é $h = \nabla f \cdot J\nabla g$, onde J é a matriz da definição 4.1.1.

O colchete de Poisson é uma maneira útil para procurar integrais primeiras de um Hamiltoniano, tendo em vista a proposição abaixo

Proposição 4.1.3. Dado um Hamiltoniano $H(q, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ temos

- f é uma integral de primeira ordem de H se, e somente se, $\{f, H\} = 0$
- Se f e g são integrais primeiras de H então $\{f, g\}$ também é.

Demonstração. Observe que

$$\{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p} = \frac{df}{dt}(\phi_t)$$

logo f se uma integral primeira se, e só se, $\frac{df}{dt}(\phi_t) = 0$ mas isto ocorre se, e somente se, $\{f, H\} = 0$. A segunda afirmação decorre direto da identidade de Jacobi descrita na proposição seguinte \square

Proposição 4.1.4. *Sejam f, g e h funções de \mathbb{R}^{2n} em \mathbb{R} e $a \in \mathbb{R}$ temos que*

- $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$
- $\{a \cdot f, g\} = a\{f, g\}$
- $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$. *Está é chamada de identidade de Jacobi*

Todos os itens acima decorrem diretamente da definição de Colchetes de Poisson. Além de Integrais Primeiras podemos procurar mudanças de coordenadas que simplifiquem o Hamiltoniano, mas mantenham a sua estrutura.

Definição 4.1.5. Um difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ é dito canônico se preservar o Colchetes de Poisson, isto é, dadas quaisquer duas funções f e g \mathbb{R}^{2n} em \mathbb{R} , temos

$$\{f, g\} \circ \varphi = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}$$

Uma maneira de obtermos mudanças de coordenadas canônicas é através da Transformada de Lie.

Definição 4.1.6. Seja $\chi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função regular e seja φ_t o fluxo gerado por $J\nabla\chi$, chamamos aplicação $\varphi := \varphi_1$ de a transformada de Lie gerada por χ .

Observamos que a aplicação $(t; q, p) \mapsto \varphi_t(q, p)$ está definida apenas em um aberto em torno de (q, p) , se φ está definida em ponto (q, p) então ela está localmente definida em um aberto em torno de (q, p) .

Lema 4.1.7. *Seja $G : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função regular e φ_t o fluxo gerado por $J\nabla\chi$, temos que*

$$\frac{d}{dt}(G \circ \varphi_t) = \{G, \chi\} \circ \varphi_t$$

Demonstração. Utilizando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{d}{dt}(G \circ \varphi_t)(q, p) = \nabla(G \circ \varphi_t(q, p)) \cdot \dot{\varphi}_t(q, p) \quad (4.2)$$

$$= \nabla(G \circ \varphi_t(q, p)) \cdot J\nabla\chi(\varphi_t(q, p)) = \{G, \chi\} \circ \varphi_t \quad (4.3)$$

□

O lema acima nos permite escrever a série de Taylor de uma função regular G composta com a transformada de Lie da seguinte forma

$$G \circ \varphi = G + \{G, \chi\} + \frac{\{\{G, \chi\}, \chi\}}{2} + \dots$$

4.2 Forma Normal de Birkhoff para Hamiltonianos

Um dos problemas da Mecânica Celeste é entender o que acontece próximo a uma órbita elíptica, de uma maneira simplificada, sabemos que se considerarmos apenas o sistema formado pelo Sol e a Terra, temos que a trajetória da Terra é elíptica, porém se adicionarmos Júpiter em nosso sistema, teremos uma pequena perturbação na trajetória da Terra, queremos então analisar o que podemos dizer sobre a trajetória da Terra que está próxima da trajetória elíptica formada pelo sistema Sol-Terra.

Seja $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano com um ponto elíptico na origem. A fórmula de Taylor na origem para H nos diz

$$H(p, q) = H(0, 0) + \langle \nabla H(0, 0), (p, q) \rangle + \langle \text{Hess}H(p, q), (p, q) \rangle + P(p, q)$$

Onde $P(p, q)$ é uma função C^∞ tem um zero de terceira ordem na origem e $\text{Hess}H$ é a matriz Hessiana de H no ponto $(0, 0)$. Como a origem é um ponto elíptico na origem temos que $H = \langle \text{Hess}H_{(0,0)}(p, q), (p, q) \rangle + P(p, q)$. Afirmamos que

Proposição 4.2.1. *Se $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ um Hamiltoniano com um ponto elíptico na origem então existe uma mudança de coordenadas tais que*

$$\langle \text{Hess}H_{(0,0)}(p, q), (p, q) \rangle = \sum_{j=1}^n w_j(p_j^2 + q_j^2)$$

Onde os w_i são dados pelo $\text{spec}(J\text{Hess}H_{(0,0)}) = \{\pm iw_1, \dots, \pm iw_n\}$

A prova desse resultado pode ser encontrada em Hofer [12]. A proposição acima afirma que $H = H_0 + P$ onde H_0 é o oscilador harmônico, isto é,

$$H_0(q, p) = \sum_{j=1}^n w_j \frac{p_j^2 + q_j^2}{2} = \sum_{j=1}^n w_j I_j$$

onde I_j , que é igual a $\frac{p_j^2 + q_j^2}{2}$, é chamado de a j -ésima ação de (q, p) . Além disso dizemos que P está na forma normal em relação a H se $\{P, H\} = 0$.

Definição 4.2.2. Seja $r \in \mathbb{N}$, um vetor $\omega \in \mathbb{R}^n$ é dito não ressonante de ordem r se para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ tal que $0 < |k| \leq r$ temos

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i \neq 0$$

Teorema 4.2.3 (Forma Normal de Birkhoff). *Seja $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ um hamiltoniano da forma $H = H_0 + P$, onde H_0 é o oscilador harmônico e P é C^∞ com um zero de ordem 3 na origem. Então para todo inteiro $r \geq 3$ fixado, temos que existe uma mudança de coordenada $\tau(q', p') : U \rightarrow V$ que é uma função real analítica e canônica, onde U e V são vizinhanças da origem em \mathbb{R}^{2n} tal que*

$$H(q', p') = H \circ \tau = H_0 + Z + R$$

onde

1. Z é um polinômio de ordem r e $\{Z, H_0\} = 0$, isto é, Z está na forma normal em relação à H_0 .
2. R é C^∞ e $R(q', p') = O(\|(q', p')\|)^{r+1}$
3. $\tau(q', p') = (q', p') + O(\|(q', p')\|)^2$

Em particular se $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, onde ω_i são os coeficientes de H_0 , for não ressonante então Z depende apenas de $I_j = \frac{(p'_j)^2 + (q'_j)^2}{2}$

Demonstração. Para facilitar as contas, vamos trabalhar com variáveis complexas,

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j + ip_j) \quad \text{e} \quad \eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j)$$

observe que nessas coordenadas temos

$$\xi_j \eta_j = \frac{q_j^2 + p_j^2}{2}$$

Fixado um r vamos obter indutivamente transformações τ_k com $k = 2, \dots, r$ tal que

$$H_k := H \circ \tau_k = H_0 + Z_k + P_{k+1} + R_{k+2}$$

onde

1. Z_k é um polinômio de grau k que possui um zero de grau de 3 na origem e $\{Z_k, H_0\} = 0$
2. P_{k+1} é um polinômio homogêneo de grau $k + 1$
3. R_{k+2} é um Hamiltoniano Regular que possui um zero de ordem $k + 2$

Faremos isso, pois quando $k = r$, tomando $Z = Z_r$ e $R = R_{r+2} + P_{r+1}$ fica provado o teorema.

Para $k = 2$, definimos τ_2 como a identidade, $Z_2 = 0$, P_3 como sendo a expansão de Taylor de P de ordem 3 e $R_4 = P - P_3$. Seja χ_{k+1} um polinômio homogêneo de grau $k+1$, podemos associar ele a um Hamiltoniano e considerar sua transformada de Lie ϕ_{k+1} . Com isso temos que $H_k \circ \phi_{k+1} = H_0 \circ \phi_{k+1} + Z_k \circ \phi_{k+1} + P_{k+1} \circ \phi_{k+1} + R_{k+2} \circ \phi_{k+1}$ que podemos reescrever da seguinte forma

$$H_k \circ \phi_{k+1} = H_0 + Z_k + \{H_0, \chi_{k+1}\} + P_{k+1} \quad (4.4)$$

$$+ R_{k+2} \circ \phi_{k+1} + H_0 \circ \phi_{k+1} - H_0 - \{H_0, \chi_{k+1}\} \quad (4.5)$$

$$+ Z_k \circ \phi_{k+1} - Z_k + P_{k+1} \circ \phi_{k+1} - P_{k+1} \quad (4.6)$$

Observe que dados dois polinômios F_1 e F_2 temos que $\{F_1, F_2\}$ é um polinômio cuja o grau é igual a soma dos graus de F_1 e F_2 menos 2. Além disso como $\chi_{k+1}(\xi, \eta) = O(\|(\xi, \eta)\|)^k$ temos que $\phi_{k+1}(\xi, \eta) = (\xi, \eta) + O(\|(\xi, \eta)\|)^k$ e portanto 4.5 e 4.6 são Hamiltonianos regulares com um zero na origem de ordem $k + 2$, logo usando a fórmula de Taylor podemos decompor a soma em $P_{k+1} + R_{k+3}$, onde P_{k+1} é um polinômio homogêneo de grau $k + 1$ e R_{k+3} é um Hamiltoniano Regular que possui um zero de ordem $k + 2$. O lema abaixo nos permite mostrar que existe uma escolha de χ_{k+1} tal que $Z = Z_k + \{H_0, \chi_{k+1}\} + P_{k+1}$ é um polinômio de grau $k + 1$ que possui um zero de grau de 3 na origem e $\{Z, H_0\} = 0$ o que prova a primeira parte do teorema.

Lema 4.2.4. *Seja Q um polinômio real de grau l , existe um polinômios real homogêneo χ de grau l tal que Z definido abaixo*

$$\{H_0, \chi\} + Q = Z \quad (4.7)$$

é um polinômio real de grau l que está na forma normal, isto é,

$$\{Z, H_0\} = 0 \quad (4.8)$$

A demonstração envolve um quantidade de índices que dificulta o seu entendimento, portanto vamos começar com um exemplo. Seja $Q = 2\xi_1\xi_2\eta_2^2 + 3\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2$, por conveniência escrevemos $Q = 2\xi_1\xi_2\eta_2\eta_2 + 3\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2$, observe que

$$\begin{aligned}\{H_0, \xi_1\xi_2\eta_2\eta_2\} &= i(\omega_1\eta_1 \cdot 0 - \omega_1\xi_1 \cdot \xi_2\eta_2\eta_2 + \omega_2\eta_2 \cdot 2\xi_1\xi_2\eta_2 - \omega_2\xi_2 \cdot \xi_1\eta_2\eta_2) \\ &= -i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_2 - \omega_2)\xi_1\xi_2\eta_2\eta_2\end{aligned}$$

Seja $\Omega(1, 2; 2, 2) = (\omega_1\omega_2 - \omega_2 - \omega_2)$ e $\Omega(1, 2; 1, 2) = (\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 - \omega_2)$, suponhamos que $\Omega(1, 2; 2, 2) \neq 0$, definimos

$$\chi = \frac{2}{i\Omega(1, 2; 2, 2)}\xi_1\xi_2\eta_2\eta_2$$

E como $\Omega(1, 2; 1, 2) = 0$, definimos $Z = 3\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2$ e com isso temos $\{H_0, Z\} = 0$ e $Z = \{H_0, \chi\} + Q = Z$.

Demonstração. Seja $j \in [1, \dots, n]^{k_1}$ e $l \in [1, \dots, n]^{k_2}$, tal que $k_1 + k_2 = k$ e denotamos $\xi^{(j)} = \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_{k_1}}$ e $\eta^{(l)} = \eta_{l_1} \cdots \eta_{l_{k_2}}$, calculando como no exemplo acima, obtemos

$$\{H_0, \xi^{(j)}\eta^{(l)}\} = -i\Omega(j; l)\xi^{(j)}\eta^{(l)}$$

onde $\Omega(j; l) = \omega_{j_1} + \cdots + \omega_{j_{k_1}} - \omega_{l_1} - \cdots - \omega_{l_{k_2}}$, como Q é homogêneo, Q pode ser escrito da forma

$$Q = \sum_{(j,l) \in [1, \dots, n]^k} a_{jl}\xi^{(j)}\eta^{(l)}$$

agora seja

$$b_{jl} = \frac{a_{jl}}{i\Omega(j; l)} \quad \text{e} \quad c_{jl} = 0 \quad \text{quando} \quad \Omega(j; l) \neq 0$$

e

$$b_{jl} = 0 \quad \text{e} \quad c_{jl} = a_{jl} \quad \text{quando} \quad \Omega(j; l) = 0$$

assim como no exemplo, definimos

$$\chi = \sum_{(j,l) \in [1, \dots, n]^k} b_{jl}\xi^{(j)}\eta^{(l)} \quad Z = \sum_{(j,l) \in [1, \dots, n]^k} c_{jl}\xi^{(j)}\eta^{(l)} \quad (4.9)$$

Assim temos que χ e Z , satisfazem as hipóteses, além disso como Q é um polinômio real, temos $\overline{a_{jl}} = a_{jl}$ e temos também que $\Omega(j; l) = -\Omega(l; j)$. \square

Observe que a condição de ressonância nos garante que $\Omega(j; l) = 0 \Leftrightarrow j = l$, neste caso teremos

$$Z = \sum_{(j,j) \in [1, \dots, n]^k} a_{jj} \xi^{(j)} \eta^{(j)}$$

□

Considere um hamiltoniano $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema acima, então H pode ser escrito da seguinte forma

$$H(q, p) = \lambda \frac{p^2 + q^2}{2} + Z + R$$

como no teorema acima, suponhamos que λ seja não ressonante de ordem l , logo temos

$$H(q, p) = \lambda \frac{p^2 + q^2}{2} + \sum_{i=1}^l a_i \left(\frac{p^2 + q^2}{2} \right)^i + R$$

Considere $\tilde{H} = H - R$, gostaríamos de escrever o Hamiltoniano H e \tilde{H} em coordenadas polares, porém essa mudança de coordenadas não preserva área, logo não preserva a estrutura simplética de H , porém a seguinte mudança de coordenadas $q = (2r)^{1/2} \cos \theta$ e $p = (2r)^{1/2} \sin \theta$ preserva, nessa coordenadas temos

$$\tilde{H} = \lambda r + Z, \quad Z = \sum_{i=1}^l a_i (r)^i$$

As equações de Hamilton-Jacobi ficam reduzidas à

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} = \lambda + \sum_{i=1}^l a_i (r)^{i-1} \\ \dot{r} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

Vemos facilmente que o fluxo de \tilde{H} , $\tilde{\phi}_t(\theta, r) = (\theta + (\lambda + P(r))t, r)$, onde $P(r) = \sum_{i=1}^l a_i (r)^{i-1}$. Observe que o fluxo de H ϕ_t é tal que $\tilde{\phi}_t - \phi_t = O(|r|^q)$, obtemos portanto que $\phi_1(\theta, r) = (\theta + \lambda + P(r) + O(|r|^l), r + O(|r|^l))$, se substituirmos r por $(r^2)/2$, obtemos em coordenadas polares tradicionais $\phi_1(\theta, r) = (\theta + \lambda + P(r^2) + O(|r|)^{2l}, r + O(|r|)^{2l})$, ainda se considerarmos ϕ_1 em coordenadas complexas $z = r e^{i\theta}$ temos $\phi_1(z) = \lambda z e^{i\theta P(z\bar{z})} + O(z\bar{z})^{2l}$. De fato vale um resultado que também é conhecido como a Forma Normal de Birkhoff que diz

Teorema 4.2.5. *Se f é um difeomorfismo que preserva área em uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^2 , tal que 0 é um ponto fixo elíptico não degenerado seja $\lambda = e^{i2\pi\alpha}$ um dos autovalores de $Df(0)$, ainda se $\lambda^n \neq 1$ para $n = 1, 2, \dots, q$. Então existe uma mudança de coordenada que juntamente com as coordenadas polares f pode ser escrita em uma vizinhança de $(0, 0)$ da seguinte forma*

$$f(\theta, r) = (\theta + \alpha + P(r^2) + O(|r|)^{2q}, r + O(|r|)^{2q})$$

Com $P(x) = a_1x + \dots + a_mx^m$ tal que $2m + 1 < q$

A demonstração desse teorema é similar a demonstração do Teorema da Forma Normal de Birkhoff 4.2.3, pode ser encontrada em Le Calvez [15], a prova é feita por indução em q e o polinômio P é construído recursivamente.

Capítulo 5

Teorema KAM e algumas aplicações

O Teorema KAM é parte fundamental da teoria conhecida como Teoria KAM, surgiu no final da década de 60, nos trabalhos de Kolmogorov, Arnold e Moser, que dão nome a teoria, a motivação principal era a que já mencionamos da mecânica celeste, dado um hamiltoniano integrável, conseguir entender um hamiltoniano não integrável que é uma perturbação do hamiltoniano integral, como no caso dos problemas dos 3 corpos, citado no capítulo anterior.

5.1 O Teorema KAM

Começaremos por enunciar o Teorema KAM para aplicações simpléticas em sua maior generalidade, porém não explicaremos o significado de cada uma das afirmações. O que faremos é reescrever o mesmo Teorema em uma versão mais simplificada, a qual condiz com o trabalho aqui apresentado.

Teorema 5.1.1 (KAM). *Seja f_0 seja uma aplicação integrável simplética do tipo do twist de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^n$ da forma*

$$f_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q} + \omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})$$

onde \mathbb{D}^n é um disco do \mathbb{R}^n e $\omega : \mathbb{D}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é C^∞ . Seja \mathbf{p}_0 é o interior \mathbb{D}^n . Se existem duas constantes positivas c e τ tais que

$$\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{n+1} - \{0\}, \quad \left| \sum_{j=1}^n k_j \omega_j(\mathbf{p}_0) + k_{n+1} \right| \geq c \left(\sum_{j=1}^{n+1} |k_j| \right)^{-\tau} \quad (5.1)$$

Então existe uma vizinhança W de f_0 de funções C^∞ exatas simpléticas tais que para cada $f \in W$, existe um toro invariante imerso $\mathbb{T}_f \simeq \mathbb{T}^n$ no interior de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^n$ tal que

- (i) \mathbb{T}_f é um gráfico Lagrangiano C^∞ sobre a seção 0
- (ii) $f|_{\mathbb{T}_f}$ é C^∞ e conjugada a translação rígida por $\omega(\mathbf{p}_0)$
- (iii) \mathbb{T}_f e a conjugação depende C^∞ em f . Ainda a medida do complementar das uniões dos torus $\mathbb{T}_f(\mathbf{p}_0)$ tende a zero quando $\|f - f_0\| \rightarrow 0$

Observe que se considerarmos $n = 1$, ω como a identidade e $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, temos que $f_0(q, p) = (q + p, p)$, a condição 5.1 se reduz a condição de p_0 ser um irracional diofantino (ver 5.3), logo se considerarmos k suficientemente pequeno, a aplicação Standaard f_k possui um círculo invariante S que é um gráfico e restrita a esse conjunto f_k é conjugada à uma translação p_0 . Observe que isto difere do Teorema Aubry-Mather, pois no Teorema de Aubry-Mather não conseguimos garantir que f_k tem um **círculo** invariante, mas não precisamos que o número de rotação seja diofantino. O quão pequeno deve ser k para que tenha círculo invariante é dada por MacKay e Percival [18] que mostraram que para $k > 63/64$, f_k não tem círculos invariantes. Enunciamos agora a versão do teorema acima no caso $n = 1$.

Teorema 5.1.2. *Seja f_0 do tipo do twist de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ da forma*

$$f_0(q, p) = (q + \omega(p), p)$$

onde $\omega : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é C^∞ . Seja $p_0 \in \mathbb{R}$. Se existem duas constantes positivas c e τ tais que

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad |k_1\omega(p_0) + k_2| \geq c(|k_1| + |k_2|)^{-\tau} \quad (5.2)$$

Então existe uma vizinhança W de f_0 de funções C^∞ twists tais que para cada $f \in W$, existe um círculo invariante $C_f \simeq \mathbb{S}^1$ no interior de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tal que

- (i) C_f é um gráfico sobre a seção $C_0 = \{(x, y) | y = 0\}$
- (ii) $f|_{C_f}$ é C^∞ e conjugada a translação rígida por $\omega(p_0)$
- (iii) C_f e a conjugação depende C^∞ em f . Ainda a medida do complementar das uniões dos círculos invariantes $C_f(p_0)$ tende a zero quando $\|f - f_0\| \rightarrow 0$

5.2 Aplicações do Teorema KAM

Definição 5.2.1. α é dito um irracional diofantino se existem constantes $C > 0$ e $\tau \geq 2$ tais que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^\tau} \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad (5.3)$$

Utilizando o Teorema da Forma Normal de Birkhoff para funções planares 4.2.5 e o Teorema KAM, podemos obter o seguinte resultado.

Proposição 5.2.2. *Seja f nas hipóteses do Teorema 4.2.5, se o autovalor de f for da forma $e^{\alpha i}$ com α um irracional diofantino. Então f tem círculos invariantes em um vizinhança de $(0, 0)$ e a medida de tais círculos tendem a medida total quando a medida da vizinhança tende a zero.*

Demonstração. Aplicando o Teorema de Birkhoff para funções planares 4.2.5 temos que $f(\theta, r) = (\theta + \alpha + P(r^2) + O(|r|)^{2q}, r + O(|r|)^{2q})$, seja $f_0 = (\theta, r) = (\theta + \alpha + P(r^2), r)$, aplicamos o Teorema KAM 5.1.2 para $r_0 = 0$, observe que nesse caso $\omega(r) = \alpha + P(r^2)$ e com isso $\omega(0) = \alpha$ satisfaz 5.2, pois α é diofantino. Agora basta observar que quanto mais próximo da origem f está mais próxima de f_0 , obtendo assim o resultado. \square

5.2.1 O modelo May

Embora os objetos de estudo dessa capítulo foram desenvolvidos a partir de problemas da mecânica celeste, uma aplicação do Teorema KAM pode ser encontrada no trabalho (que é a referência dessa seção) de Gidea, Meiss, Ugarcovici, Weiss [8] sobre dinâmicas populacionais. Um dos modelos estudados nesse trabalho é modelo MAY, que trata sobre evolução de sistema de parasitas e hospedeiros, tratado aqui nessa seção.

Queremos estudar a evolução discreta de um sistema de parasitas e hospedeiros, sejam x_n e y_n a população de hospedeiros e de parasitas, respectivamente, na n -ésima geração, considere uma função $f(x_n, y_n)$ que representa a fração de hospedeiros que não estão infectados. É razoável supor (veja Hassel [11] para mais detalhes) que a evolução de hospedeiros é proporcional a população de hospedeiros não infectados e a evolução dos parasitas é proporcional a população de hospedeiros infectado, com isto obtemos as equações abaixo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= cx_n(1 - f(x_n, y_n)) \end{aligned} \quad (5.4)$$

May [19] considera a função $f(x_n, y_n) = [(1 + by_n)/k]^{-k}$, que modela casos em que a distribuição de ataques por hospedeiros é dada por uma distribuição

binomial negativa com parâmetro k , como pode ser observado a partir dos dados coletados de Griffiths & Holling (1969) entre o parasita *Pleolophus basizonus* e o hospedeiro *Neodiprion sertifer*, que em termos leigos são um tipo de vespa e mosca encontrados no norte da Europa. O modelo considerado por Gidea, Meiss, Ugarcovici, Weiss [8] considera o caso em que $a = c$ e $b = k = 1$, com isso obtemos

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{ax_n}{1 + y_n} \\y_{n+1} &= ax_n \left(1 - \frac{1}{1 + y_n}\right) = \frac{ax_n y_n}{1 + y_n}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Considerando a função

$$M(x, y) = \left(\frac{ax}{1 + y}, \frac{axy}{1 + y} \right)$$

Temos que $(x_n, y_n) = M^n(x_0, y_0)$. Observe que os pontos $(0, 0)$ e $(1, a - 1)$ são pontos fixos, porém que o Jacobiano de M no ponto (x, y) é dado portanto

$$D_{(x,y)}M = \begin{bmatrix} \frac{a}{1+y} & -\frac{ax}{(1+y)^2} \\ \frac{ay}{1+y} & \frac{ax}{(1+y)^2} \end{bmatrix}$$

e com isso temos que

$$D_{(0,0)}M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{(1,a-1)}M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ a-1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Isso significa que em uma vizinhança de $(0, 0)$ a população tende a crescer exponencialmente rápido e a população de hospedeiros deve desaparecer na próxima geração. Infelizmente $\text{Det}D_{(x,y)}M = a^2x/(1 + y)^2$, o que significa que M não preserva área, entretanto mudando para coordenadas logarítmicas, isto é, considerando $(u, v) = (\ln x, \ln y)$, que está bem definida em uma vizinhança de $(1, a - 1)$, note que $(x, y) = (e^u, e^v)$ e logo a transformação M e $D_{(u,v)}M$ são tais que

$$\begin{aligned}M(u, v) &= (\ln a + u - \ln(1 + e^v), \ln a + u + v - \ln(1 + e^v)) \\D_{(u,v)}M &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{e^v}{1+e^v} \\ 1 & 1 - \frac{e^v}{1+e^v} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Agora temos que M preserva área e orientação. Note que o ponto fixo $(1, a - 1)$, nas coordenadas (u, v) é o ponto $(0, \ln(a - 1))$, assim temos

$$D_{(0,\ln(a-1))}M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a-1}{a} \\ 1 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

Cujo os autovalores são

$$\lambda = \frac{(a+1) \pm \sqrt{-3a^2 + 2a + 1}}{2a}$$

Observe que $-3a^2 + 2a + 1 < 0$ para todo $a > 1$, com isso $(0, \ln(a-1))$ é um ponto elíptico da forma $e^{\alpha i}$ com $\alpha = \arccos a + 1/(2a)$. Podemos ainda considerar mais uma mudança de coordenadas, que leva $(u, v) \mapsto (u, v + \ln(a-1))$, para que colocar $(0, \ln(a-1))$ na origem. Para podermos usar o teorema da Forma Normal de Birkhoff 4.2.5, precisamos ainda que λ seja não degenerado, essa conta está em Gidea, Meiss, Ugarcovici, Weiss [8] e devido seu tamanho, não a repetiremos aqui. Finalmente temos que α seja um irracional diofantino então o Modelo May possui círculos invariantes em uma vizinhança do ponto elíptico. A hipótese de α ser um irracional diofantino não é necessário se utilizarmos o Teorema Twist de Moser [21], como de fato foi feito em Gidea, Meiss, Ugarcovici, Weiss [8].

5.3 O Gráfico de Birkhoff

Teorema 5.3.1. *Seja f uma aplicação do tipo Twist no Cilindro então*

1. *Qualquer círculo invariante homeotópico ao círculo $C_0 = \{(x, y) | y = 0\}$ é um gráfico de Lipschitz sobre C_0 .*
2. *Se dois círculos invariante C_- e C_+ são homeotópico à C_0 e formam uma região limitada sem círculos invariantes, então para todo $\epsilon > 0$ existem órbitas que estão ϵ próximas de C_+ que ficam ϵ próxima de C_- e vice-versa.*

Demonstração. Suponhamos sem perda de generalidade que f é uma aplicação do tipo Twist Positiva. Seja C_+ um círculo invariante orientado da esquerda para direita e seja C um gráfico sobre o círculo $\{(x, y) | y = 0\}$ abaixo de C_+ , $f(C)$ não é necessariamente um gráfico sobre C_0 , mas podemos transformá-lo em um pseudográfico da seguinte maneira, considere o conjunto de todos os pontos vistos de cima, esse conjunto forma um gráfico, que denotaremos por $h(x)$, contínuo exceto em um quantidade enumerável de pontos, como ilustra a figura abaixo:

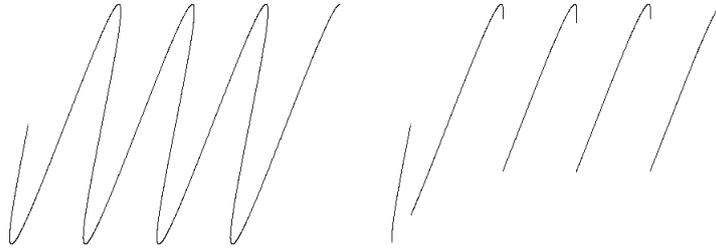


Figura 5.1: Um exemplo do conjunto formado pelos pontos vistos de cima

Observamos que $f(C)$ não pode ter vetor tangente vertical apontando para cima, pois como f^{-1} é uma aplicação do tipo Twist Negativa, teríamos em C um vetor apontando para esquerda e com isso C não seria um gráfico, logo todas as descontinuidades devem ser pulos para baixo, de uma maneira mais formal, queremos dizer que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \quad \forall x$$

Formamos nosso pseudográfico a direita, considerando o conjunto dos pontos vistos de cima e unindo os pontos de descontinuidade por segmentos de retas verticais orientados para baixo, como mostra a figura.

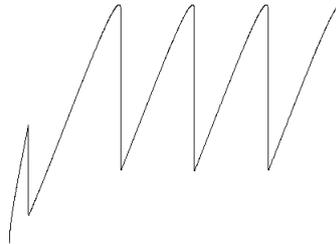


Figura 5.2: Pseudográfico a direita obtido da curva em 5.1

Denotaremos esse processo de $Uf(C)$, isto é, consideramos C uma curva e transformamos $f(C)$ em um pseudográfico a direita. A condição twist positiva nos permite aplicar esse novamente, pois pelo mesmo motivo anterior $f(Uf(C))$ não pode ter nenhum vetor tangente apontando para cima. Assim denotamos $C_0 = C$ e $C_n = Uf(C_{n-1})$. Afirmamos que $C_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup C_n$, onde $\lim \sup$ é no sentido de funções $y = h(x)$ permitindo segmentos verticais, é um gráfico invariante pela f . Observe que dados dois pontos z e z' , onde z'

está a direita de z em C_n com $n > 0$, tem estar no cone horizontal construído no lema 3.2.1, pelo Teorema do Valor Médio. Assim C_∞ é um pseudográfico. Definimos uma ordem parcial no conjuntos do círculos homoetópicos à $\{(x, y)|y = 0\}$, dizemos que $C \preceq C'$ se C' está no na parte superior do fecho do complementar de C . Temos que f e o processo de obter os pseudográfico U , preservam essa ordem e também que $C \preceq U(C)$, com isso temos para todo n que $f^n(C) \preceq Uf^n(C) \preceq C_\infty$ e portanto $f(C_\infty) \preceq Uf(C_\infty) \preceq C_\infty$. Suponhamos por absurdo que $f(C_\infty) \neq C_\infty$, temos então que $f(C_\infty)$ está abaixo de C_∞ seja A a área entre as curvas, e β uma parametrização de C_∞ observe que

$$A = \int_{F(\beta)} ydx - \int_{\beta} ydx = \int_{\beta} YdX - \int_{\beta} ydx = S(\beta(1)) - S(\beta(0))$$

Como $\beta(1) = \beta(0) + (1, 0)$, A é igual ao fluxo gerando um absurdo. logo $f(C_\infty) = Uf(C_\infty) = C_\infty$, agora observe que C_∞ não pode conter retas verticais, pois neste caso $F(C_\infty)$ estaria abaixo de C_∞ \square

Falta agora provar que qualquer círculo invariante C^* hometópico ao círculo $\{(x, y)|y = 0\}$ é um gráfico de Lipschitz, pela proposição 3.2.5, qualquer círculo invariante que é um gráfico é um gráfico de Lipschitz, portanto basta mostrar que C^* , considere a região abaixo de C^* e seja C_m o supremo (em relação a ordem parcial \prec) de gráficos invariantes na região abaixo de C^* . C_m é um gráfico invariante e suponhamos por absurdo que $C^* \neq C_m$, aplicando o processo anterior, para C_m , obtemos C_∞ que é um gráfico tal que $C_m \prec C_\infty \prec C^*$, o que contradiz a maximalidade de C_m . Podemos fazer o mesmo processo considerando os pontos vistos de baixo, e considerando um pseudográfico à esquerda e com isso obter os mesmos resultados. Isso de fato prova o segundo item, pois basta pegar uma curva ε próxima de C_- e aplicar o processo U e assim, obtemos uma órbita ε próxima de C_+ e vice e versa.

Apêndice A

Formas Diferenciais

Essa é um breve resumo do que será necessário para este trabalho. Enunciaremos os resultados apenas no caso bi-dimensional, entretanto todas as definições e proposições podem ser estendidas para o caso n -dimensional e inclusive para superfícies além do plano. Para uma exposição mais detalhada do assunto referimos a Manfredo [6].

Definição A.0.2. O *espaço tangente* de um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os vetores que tem origem em (x, y) denotado por $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$.

Um *campo de vetores diferenciável* de \mathbb{R}^2 é uma aplicação v que associa cada ponto $(x, y) = p$ de \mathbb{R}^2 a um vetor $v(p)$ no espaço tangente de p , que pode ser escrito como

$$v(p) = a_1(p)(e_1)_p + a_2(p)(e_2)_p$$

onde $e_1 = p + (1, 0)$ e $e_2 = p + (0, 1)$ e a_1, a_2 são funções diferenciáveis de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}

O espaço dual de um espaço tangente a p é formado por todas as funções **lineares** de \mathbb{R}^2_p em \mathbb{R} . Chamamos dx e dy as projeções nas coordenadas x e y , respectivamente, e $(dx)_p$ e $(dy)_p$ são as projeções no espaço tangente a p .

Definição A.0.3. Uma 1-forma diferencial ω é uma transformação que associa cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$ à uma função linear de \mathbb{R}^2_p em \mathbb{R} , que pode ser escrita da forma

$$\omega(p) = a_1(p)(dx)_p + a_2(p)(dy)_p$$

Onde a_1, a_2 são funções diferenciáveis de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Observe que como estamos em \mathbb{R}^2 , temos que dado um ponto em $z \in \mathbb{R}^2_p$ temos que $z = p + (x_0, y_0)$ e com isso $(dx)_p(p + (x_0, y_0)) = dx((x_0, y_0))$ tendo

vista essas propriedades do plano temos que uma 1-forma diferencial pode ser escrita da forma

$$\omega(p) = a_1(p)dx + a_2(p)dy$$

Lembramos que $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita bilinear alternada se for linear em cada variável e $F(u, v) = -F(v, u)$

Definição A.0.4. O produto exterior de duas funções, ϕ_1 e ϕ_2 , lineares de \mathbb{R}_p^2 em \mathbb{R} é função bilinear alternada de $\mathbb{R}_p^2 \times \mathbb{R}_p^2$ em \mathbb{R} denotada por $\phi_1 \wedge \phi_2$ definida

$$\phi_1 \wedge \phi_2(u, v) = \det \begin{vmatrix} \phi_1(u) & \phi_1(v) \\ \phi_2(u) & \phi_2(v) \end{vmatrix}$$

Note que dados $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$

$$dx \wedge dy(u, v) = \det \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

que é a área (com sinal) do paralelogramo formado por u e v .

Definição A.0.5. Uma 2-forma diferencial ω é uma transformação que associa cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$ à uma função linear de função bilinear alternada de $\mathbb{R}_p^2 \times \mathbb{R}_p^2$ em \mathbb{R} , que pode ser escrita da forma

$$\omega(p) = a(p)(dx)_p \wedge (dy)_p$$

Onde a é função diferenciável de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Novamente como estamos em \mathbb{R}^2 , ω pode ser escrito da forma

$$\omega(p) = a(p)dx \wedge dy$$

Definição A.0.6. Uma 0-forma diferenciável f , é uma função diferenciável de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} . A derivada exterior de f é uma 1-forma diferencial denotada por df e definida por

$$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)dy$$

Definição A.0.7. A derivada exterior de uma 1-forma diferencial $\omega = a_1dx + a_2dy$, é uma 2-forma diferencial $d\omega$, definida por

$$d\omega = da_1 \wedge dx + da_2 \wedge dy$$

Definição A.0.8. Uma 1-forma diferencial ω é dita fechada se $d\omega = 0$ e é dita exata se existe uma 0-forma diferencial f tal que $df = \omega$

Queremos definir integral de formas diferenciáveis, e isto pode ser feito de uma maneira muito geral para variedades diferenciáveis, porém apresentaremos aqui duas definições no caso de subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

Definição A.0.9 (Integral de Linha). Seja

$$\omega = a_1 dx + a_2 dy$$

Uma 1-forma diferencial definida em um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, seja $\gamma[a, b] : \rightarrow B \subseteq A$, uma curva regular definimos a integral de linha de γ , como

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (a_1(\gamma(t))dx(\gamma'(t)) + a_2(\gamma(t))dy(\gamma'(t))) dt$$

onde a integral do lado direito é a integral usual em relação à variável t . Se C é uma curva parametrizada por γ então

$$\int_C \omega = \int_{\gamma} \omega$$

Não mostramos mas a integral de uma curva independe de sua parametrização

Definição A.0.10. Seja

$$\omega = adx \wedge dy$$

uma 2-forma diferencial definida em um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja B um conjunto aberto limitado e contido em A . Definimos

$$\int_B \omega = \int_B a(x, y) dx dy$$

onde a integral do lado direito é a integral dupla usual.

Proposição A.0.11. *Seja ω uma 1-forma exata em um simplesmente conexo V . Então a integral*

$$\int_{\gamma} \omega$$

depende apenas do ponto inicial e final de γ .

Teorema A.0.12. Lema de Poincaré *Seja ω uma 1-forma exata em um aberto, simplesmente conexo, U de \mathbb{R}^n então toda 1-forma fechada é exata.*

Corolário A.0.13. *A integral de linha de uma 1-forma fechada ω independe do caminho.*

Vamos enunciar o Teorema de Stokes de uma maneira mais geral e depois enunciar o Teorema de Green que é um caso particular ao Teorema de Stokes. Observe que o Teorema Fundamental do Cálculo também é um caso particular do Teorema de Stokes.

Teorema A.0.14 (Stokes). *Seja M uma variedade diferencial de dimensão n , compacta, orientada e com bordo ∂M munido de orientação induzida. Seja ω um $(n - 1)$ -forma diferencial temos que*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Teorema A.0.15 (Green). *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e seja D a região delimitada por C . Se P e Q são diferenciáveis sobre uma região aberta que contém D , então*

$$\int_C Pdx + Qdy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Apêndice B

Topologia

Definição B.0.16. Uma topologia \mathcal{T} para o conjunto X é uma coleção de subconjuntos tais que

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. A união qualquer de elementos de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T}
3. A interseção finita de elementos de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T}

Os conjunto pertencentes a \mathcal{T} são chamados de abertos, e o complementar de um conjunto é aberto é dito fechado. Definir explicitamente uma topologia é muitas vezes complicado, por isso introduzimos o conceito de base

Definição B.0.17. Uma base \mathcal{B} para um conjunto X é uma coleção de subconjuntos de X , chamados de elementos base tais que

1. Para todo $x \in X$ existe um elemento da base B tal que $x \in B$.
2. Se x pertencem a dois elementos base B_1 e B_2 então existe um elemento base B_3 tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

A topologia gerada pela base \mathcal{B} é formada pelos conjuntos $U \subset X$ tais que para todo $x \in U$ existe um elemento base B tal que $x \in B \subset U$

Um exemplo de base são os intervalos abertos de \mathbb{R} , que geram a topologia usual, podemos ver isto a partir do seguinte lema

Lema B.0.18. *Seja \mathcal{B} uma base para X , a topologia gerado por \mathcal{B} é formada por uni oes de elementos base.*

Podemos ainda definir uma topologia a partir de uma coleção ainda menor de conjuntos.

Definição B.0.19. Uma coleção \mathcal{S} de subconjuntos de X é dita uma subbase para X , se a união de todos os elementos de \mathcal{S} é igual a X . A topologia gerada por \mathcal{S} é formada por uniões de interseções finitas de elementos de \mathcal{S}

Observe que os conjuntos formados por interseções finitas de elementos de \mathcal{S} é uma base para X .

Definição B.0.20. Seja X um espaço topológico, uma coleção C de conjuntos abertos é dita cobertura de $A \subset X$ se A está contido na união de todos os elementos da coleção C . Uma subcobertura de C é um subconjunto de C que ainda é uma cobertura de A .

Com isso podemos definir compacidade.

Definição B.0.21. Seja X um espaço topológico um conjunto $A \subset X$ é dito compacto se toda cobertura de A possui uma subcobertura finita.

Existem várias maneiras de definir uma topologia para o produto arbitrário de espaços topológicos. A maneira mais usual é a seguinte.

Definição B.0.22. Seja $X = \prod X_\alpha$, onde X_α é um espaço topológico para todo $\alpha \in J$. Definimos a topologia produto como a topologia gerada pela subbase

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{S}_\alpha$$

Onde $\mathcal{S}_{\alpha'} = \{\prod U_\alpha \mid U_\alpha = X_\alpha \text{ se } \alpha' \neq \alpha_0 \text{ e } U_{\alpha'} \text{ é um aberto de } X_{\alpha'}\}$

Proposição B.0.23. Se Y é compacto então a projeção $\pi : X \times Y \rightarrow X$ leva conjuntos fechados de $X \times Y$ em fechados de X .

Teorema B.0.24 (Tychonoff). *Produto arbitrário de conjuntos compactos é compacto na topologia produto.*

Definição B.0.25. Dados dois espaços topológicos X, Y , um ponto $x \in X$, um aberto U de Y , seja

$$S(x, U) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ e } f(x) \in U\}$$

Os conjuntos $S(x, U)$ formam uma sub-base em Y^X e a topologia gerada por essa sub-base é chamada de topologia da convergência pontual.

Observe que a topologia da convergência pontual é apenas a topologia produto em Y^X visto que $f : X \rightarrow Y$, nada mais é que um elemento de Y^X .

Referências Bibliográficas

- [1] LOPES, A. *Introdução à Mecânica Clássica* Edusp, São Paulo (2006).
- [2] LOPES, A. *Tópicos de Mecânica Clássica* Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro (2012).
- [3] BRAUN, O.M., KIVSHAR, Yu.S.; *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*. Springer, Berlin (2004).
- [4] CHIRIKOV, B.V.; *Research concerning the theory of nonlinear resonance and stochasticity*. Preprint N 267, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk (1969) [4], (Engl. Trans., CERN Trans. 71-40 (1971)).
- [5] CHIRIKOV, B.V.; *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*. Phys. Rep. 52: 263 (1979).
- [6] CARMO, M.; *Formas Diferenciais e Aplicações*. IMPA, Rio de Janeiro (1971).
- [7] FLOER, A. *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*. Comm. Math. Phys. Vol. 120, No 4 (1989).
- [8] GIDEA, M., MEISS, J. D., UGARCOVICI, I., WEISS, H.; *Applications of KAM theory to population dynamics*. Journal of Biological Dynamics, Vol. 5, No. 1 (Janeiro 2011).
- [9] GRÉBERT, B.; *Birkhoff Normal Form and Hamiltonian PDEs*. ArXiv Mathematics e-prints (2006).
- [10] GOLÉ, C.; *Symplectic Twist Maps : Global Variational Techniques*. Singapore, World Scientific (2001).
- [11] HASSEL, M. P.; *Host-parasitoid population dynamics* Journal of Animal Ecology, Vol. 69, No. 4 (Julho 2000).

- [12] HOFER, H., ZEHNDER, E. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhauser, Basel (1994).
- [13] KATOK, A. B., B. HASSELBLATT *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge, Cambridge University Press.(1999).
- [14] KONTOROVA, T., FRENKEL, Y. I.; *On the theory of plastic deformation and doubling*. Zh. Eksp. Teor. Fiz 8: 89 (1938).
- [15] LECALVEZ, P.; *Proprietes dynamiques des diffeomorphismes de l'anneau et du tore*. Astérisque 204 (1991).
- [16] MACKAY, R. S., MEISS, J.; *Hamiltonian Dynamical Systems: a reprint selection*. Adam-Hilgar Press, Londres. (1987).
- [17] MACKAY, R. S., MEISS, J., STARK, J.; *Converse KAM theory for symplectic twist maps*. Nonlinearity 2 (1989).
- [18] MACKAY, R. S., PERCIVAL, C.; *Converse KAM: theory and practice*. Comm. Math. Phys. Vol. 98, No 4 (1985).
- [19] MAY, R. M.; *Host-Parasitoid Systems in Patchy Environments: A Phenomenological Model* Journal of Animal Ecology, Vol. 47, No. 3 (Outubro 1978).
- [20] MEISS, J. D.; *Symplectic maps, Variational Principles, and Transport*. Rev. Mod. Phys. 64 (1992).
- [21] MOSER J.K., SIEGEL, C. L.; *Lectures on Celestial Mechanics..* New York, Springer (1971).
- [22] MUNKRES, J. R.; *Topology* Upper Saddle River, NJ Prentice-Hall (2000).
- [23] RAGAZZO, C. G., CARNEIRO, M. J., ZANATA, A. D.; *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist* Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro (2006).
- [24] VEKSLER, V. I.; *A new method of acceleration of relativistic particles*. Moscow, Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the USSR (1945).