

UM MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO PARA ANÁLISE DE PEÇAS
DE CONCRETO ESTRUTURAL, SUBMETIDAS A ESTADOS PLANOS
DE TENSÃO, ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

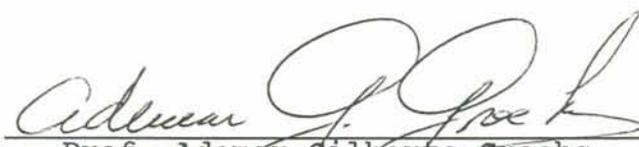
NERI PACHECO PRATES JUNIOR

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre
dezembro 1992

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.


Prof. Américo Campos Filho
orientador


Prof. Ademar Gilberto Groehs
coordenador do CPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA:

- Prof. Américo Campos Filho
D.Sc. pela EPUSP
- Prof. Guilherme J. Creus
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Francisco de P. S. L. Gastal
Ph.D. pela North Caroline State University
- Prof. Marco Túlio M. B. de Vilhena
D.Sc. pela UFRGS

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Américo Campos Filho, pela segurança na orientação deste estudo, pelo inestimável conhecimento transmitido e pela amizade dispensada neste período de trabalho.

Ao Eng. Andrade Osório Prates pelo estímulo e ensinamento transmitido na elaboração da entrada de dados.

Ao Eng. Claudio Enrique Rubio pela valiosa colaboração na confecção das figuras deste trabalho.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela atenção dispensada e aos funcionários pela colaboração cotidiana.

Aos colegas de Pós-Graduação, pela amizade e cooperação no convívio diário.

Aos órgãos CNPq e CAPES que proporcionaram o indispensável auxílio financeiro.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Objetivo	1
1.2 - Modelo reológico	1
1.3 - Conteúdo do trabalho	5
2 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO	7
2.1 - Introdução	7
2.2 - Comportamento elasto-viscoplástico	8
2.2.1 - Expressões básicas	8
2.2.2 - Incremento de deformação viscoplástica	9
2.2.3 - Incrementos de tensão	10
2.2.4 - Equações de equilíbrio	11
2.2.5 - Correção do equilíbrio	13
2.3 - Modelo de camadas	13
3 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E A ARMADURA	16
3.1 - Elementos finitos para o concreto	16
3.2 - Elementos finitos para armadura	19
3.2.1 - Modelo incorporado	20
3.2.2 - Formulação geométrica	21
3.2.3 - Trechos de armadura que ficam no interior de um elemento de concreto	24
3.2.4 - Funções de forma para os elementos de armadura	27
3.2.5 - Matriz de rigidez para a armadura	28
4 - MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	31
4.1 - Comportamento não-linear dos materiais	31
4.2 - Modelos constitutivos para o concreto	31

4.2.1	- Modelo para o concreto comprimido	32
4.2.1.1	- Critério de ruptura	32
4.2.1.2	- Critério de plastificação para o concreto	36
4.2.1.3	- Regra de endurecimento	36
4.2.1.4	- Vetor de fluxo plástico	38
4.2.1.5	- Matriz H	40
4.2.2	- Modelo para o concreto fissurado	42
4.2.2.1	- Critério de fissuração	44
4.2.2.2	- Colaboração do concreto entre fis- suras	45
4.2.2.3	- Rigidez transversal do concreto fis- surado	49
4.3	- Modelo constitutivo para o aço	50
4.3.1	- Armadura passiva	50
4.3.2	- Armadura protendida	51
5	- PROPRIEDADES DO CONCRETO E DO AÇO DEPENDENTES DO TEMPO ..	53
5.1	- Fluência e retração do concreto	53
5.2	- Inclusão da fluência no modelo	54
5.2.1	- Formulação matemática do modelo de Maxwell.	56
5.2.1.1	- Conversão da função de fluência em função de relaxação	57
5.2.1.2	- Determinação de $E_{\mu}(t)$ e $\eta_{\mu}(t)$...	60
5.3	- Determinação dos parâmetros da função de fluência pelo CEB-FIP 1990	62
5.3.1	- Equação básica	62
5.3.2	- Coeficiente de fluência	63
5.3.3	- Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura	64
5.4	- Inclusão da retração no modelo	66
5.5	- Determinação dos parâmetros de retração pelo CEB-FIP 1990	66
5.6	- Relaxação do aço protendido	68
6	- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO	71
6.1	- Generalidades	71
6.2	- Comportamento elasto-viscoplástico do aço	71

A.6.1 - Coordenadas	105
A.6.2 - Conetividades	107
A.6.3 - Vínculos	107
A.6.4 - Propriedades	107
A.6.5 - Parâmetros	113
A.7 - Carregamentos	113
A.7.1 - Datas	113
A.7.2 - Nodal	113
A.7.3 - Gravitacional	115
A.7.4 - Bordo	115
A.8 - Saídas	115
A.8.1 - Dados de entrada	115
A.8.2 - Cálculo	115
A.8.3 - Vídeo	115
A.8.4 - Impressora	115
A.9 - Fim	116
ANEXO B - DERIVADAS DA FUNÇÃO DE PLASTIFICAÇÃO F	118
B.1 - Vetor de fluxo plástico	118
B.2 - Matriz H	119
BIBLIOGRAFIA	125

LISTA DE SÍMBOLOS

I. LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A - área
- A_c - área da seção transversal do concreto
- A_s - área da seção transversal da armadura passiva
- A_p - área da seção transversal da armadura ativa
- B - matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto
- B_s - vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço
- C - matriz definida em (2.11); função de posição
- \bar{C} - aproximação de C
- D - matriz constitutiva
- \hat{D} - matriz constitutiva corrigida
- E - módulo de elasticidade longitudinal
- E_c - módulo de elasticidade longitudinal do concreto
- E_s - módulo de elasticidade longitudinal do aço
- \hat{E}_s - módulo de elasticidade longitudinal modificado do aço
- E_μ - módulo de elasticidade longitudinal da camada de concreto
- F - força; superfície de plastificação; função tensão efetiva
- F_o - tensão corrente de plastificação
- F_p - força de protensão
- G - módulo de elasticidade transversal do concreto
- G_c - módulo de elasticidade transversal do concreto fissurado
- H - matriz definida em (2.9); função de interpolação para o elemento de armadura
- H' - taxa de endurecimento do concreto
- H'_s - taxa de endurecimento do aço
- I - matriz identidade
- I_1 - 1.º invariante do tensor de tensão

I'_1 - 1º. invariante do tensor de deformação
 J - matriz Jacobiana; função de fluência
 J_2 - 2º. invariante do tensor desviador de tensão
 J'_2 - 2º. invariante do tensor desviador de deformação
 K - matriz de rigidez total concreto-aço
 K_C - matriz de rigidez do concreto
 K_S - matriz de rigidez do aço
 N - função de interpolação para o elemento de concreto
 P - vetor de cargas de superfície e de volume; coordenadas dos nós da barra de aço
 Q - função do potencial plástico
 Q_S - forças nodais equivalentes da armadura
 R - função de relaxação
 \hat{R} - pontos discretos de R
 RH - umidade relativa do ar
 S - superfície de contorno
 T - temperatura
 V - vetor de cargas nodais totais (pseudo-cargas)
 V - volume

II. LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

a - vetor de fluxo plástico; coeficiente
 c - parâmetro
 e - espessura total do elemento de concreto
 e_1 - espessura da camada de concreto
 f - superfície de ruptura; flecha
 f - função definida em (3.27)
 f_{cm} - resistência média à compressão do concreto
 f_{ptk} - tensão de ruptura do aço protendido
 f_{pyk} - tensão de escoamento do aço protendido
 f_{tm} - resistência média à tração do concreto
 f_y - tensão de escoamento da armadura passiva
 g - função definida em (3.27)
 h - altura fictícia da seção de concreto
 k - número de iterações; parâmetro; coeficiente para tipo de relaxação
 k - parâmetro de endurecimento

m - número de nós da barra de armadura
n - número de nós do elemento de concreto
ng - número de pontos de integração de Gauss
s - constante que depende do tipo de cimento; distância
t - tempo
t' - data do carregamento
t_p - data da protensão
t_s - data de início da retração
u - campo de deslocamento
x - coordenada cartesiana
y - coordenada cartesiana
w - fator de peso

III - LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

Δ - incremento
Σ - somatório
Φ - função de fluxo

IV - LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

α - coeficiente; ângulo; ângulo de desvio
β - coeficiente; ângulo
γ - coeficiente de fluidez do concreto; distorção
γ_s - coeficiente de fluidez do aço
δ - variação
ε - deformação específica total
ε_{cs} - deformação devida à retração do concreto
ε_e - deformação elástica
ε_{svp} - deformação viscoplástica do aço
ε_{vp} - deformação viscoplástica do concreto
η - coeficiente de viscosidade; coordenada normalizada
η_μ - coeficiente de viscosidade da camada de concreto
θ - ângulo de similaridade; esquema de integração no tempo
λ - parâmetro
μ - coeficiente de atrito para armadura ativa; unidade da cadeia de Maxwell
ν - coeficiente de Poisson

ξ - coordenada normalizada
 π - residual definida em (5.15)
 ρ_{1000} - coeficiente de relaxação do aço
 σ - tensão normal no concreto
 σ_{ef} - tensão efetiva no concreto
 σ_o - tensão de plastificação inicial uniaxial
 σ_{pi} - tensão de protensão aplicada na extremidade do cabo
 σ_{p0} - tensão inicial de protensão
 σ_s - tensão normal na armadura
 τ - tensão tangencial no concreto
 τ_μ - tempo de relaxação da camada de concreto
 ϕ - diâmetro da barra de armadura; coeficiente de fluência;
 função de minimização definida em (5.14)
 χ - coordenada normalizada
 ψ - forças residuais; função definida em (5.44); função de
 relaxação do aço

V. SÍMBOLOS

$\{ \}$ - vetor coluna
 $\langle \rangle$ - vetor linha
 $[]$ - matriz
 $[]^T$ - matriz transposta
 $[]^{-1}$ - matriz inversa

RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para o estudo de peças de concreto armado e protendido submetidas a estados planos de tensão.

O estudo abrange situações de carga de curta e longa duração, onde consideram-se fluência e retração do concreto e relaxação do aço.

São utilizados modelos constitutivos elasto-viscoplásticos para descrever o comportamento dos materiais. Implementou-se um modelo de camadas superpostas para melhor representar o comportamento do concreto, onde o material é composto de diversas camadas que sofrem a mesma deformação. Cada camada possui diferentes características materiais e a tensão total é obtida pela soma das diferentes contribuições de cada camada.

Para a fissuração do concreto, utilizou-se um modelo de fissuras distribuídas, que leva em conta a contribuição do concreto entre fissuras.

Tanto a armadura passiva como a de protensão são introduzidas no modelo como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Os deslocamentos ao longo da armadura são referenciados aos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Deste modo, obtém-se uma matriz de rigidez para a armadura com as mesmas dimensões que a matriz de rigidez do elemento de concreto. A matriz de rigidez do elemento concreto-aço é a soma das duas matrizes.

Considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço.

Os resultados obtidos com esse programa computacional são comparados com valores experimentais disponíveis.

ABSTRACT

The purpose of this work is to develop a computational model, based on the finite element method, for the study of reinforced and prestressed concrete structures under plane stress states.

The study comprehends short and long-term loading situations, where creep and shrinkage in concrete and steel relaxation are considered.

Elasto-viscoplastic constitutive models are used to describe the behavior of the materials.

An overlay model is included to better represent the concrete behavior, where the material is composed by several layers which have the same deformation. Each layer has different material properties and the total stress is obtained by the sum of the different contributions of each one.

A smeared crack model is used for the cracking of concrete, which considers the contribution of concrete between cracks.

The passive reinforcement as well as the prestressing one are inserted in the model as a stiffer material line inside the concrete element. The displacements along the reinforcement are referred to the nodal displacements of the concrete element. So, a stiffness matrix for the reinforcement with the same dimensions of the stiffness matrix of the concrete element is obtained. The stiffness matrix of the reinforcement element is the sum of both above mentioned matrices.

The bond between concrete and steel is assumed to be perfect.

The results obtained through this computational program are compared with available experimental values.

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Objetivo

O comportamento do material concreto armado e protendido é muito complexo e, em virtude de sua importância dentro da engenharia estrutural, é um objeto permanente de estudo.

A diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto; a não linearidade da relação tensão-deformação; a aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente; os fenômenos da fluência e retração; a fissuração do concreto e a transmissão de esforços entre fissuras, entre outros, são fatores que dificultam a análise deste tipo de estrutura.

O método dos elementos finitos, que é uma poderosa técnica para solução numérica de uma variedade de problemas encontrados na engenharia, pode ser empregado na análise do funcionamento das estruturas de concreto.

O trabalho desenvolvido nesta dissertação apresenta um modelo que permite simular o comportamento de peças de concreto estrutural (armado e protendido), sob estados planos de tensão e submetidas a cargas de curta e longa duração. São utilizados modelos constitutivos elasto-viscoplásticos para descrever o comportamento dos materiais.

Para aplicação da formulação teórica do modelo, utilizaram-se soluções numéricas, desenvolvidas pelo método dos elementos finitos, que foram implementadas num programa computacional em FORTRAN para micro-computadores compatíveis com IBM-PC.

1.2 - Modelo reológico

Reologia é a ciência que estuda o comportamento dos

materiais, através de suas equações constitutivas, relacionando tensões-deformações-tempo.

Os três tipos básicos de comportamentos reológicos são: elástico, plástico e viscoso. A combinação desses modelos básicos originam modelos conjugados, que podem representar o comportamento complexo de muitos materiais reais.

Elasticidade é o fenômeno do aparecimento de deformações instantâneas e reversíveis. As deformações aparecem simultaneamente com as tensões correspondentes e permanecem constantes no tempo se as tensões também permanecerem. As deformações se anulam ao se anularem as tensões correspondentes.

Para um caso de estado uniaxial de tensões, o comportamento elástico pode ser representado por uma mola, conforme ilustrado na Fig. 1.1. Um material elástico linear segue a lei de Hooke $\sigma = E \epsilon$, onde σ é a tensão, E é o módulo de elasticidade longitudinal e ϵ é a deformação específica longitudinal.

Plasticidade é a propriedade de um material apresentar deformações imediatas e não-reversíveis. Ou seja, as deformações não desaparecem ao serem removidas as forças que lhe deram origem.

A tensão de plastificação uniaxial σ_0 é o limite entre os domínios elástico e plástico. A partir dela, surgem deformações permanentes.

Um corpo rígido-plástico perfeito não se deforma para tensões menores que a tensão de plastificação. Este comportamento pode ser representado por um bloco sobre uma superfície com atrito ("slider"), conforme a Fig. 1.2.

Viscosidade é o fenômeno do aparecimento de deformações não-imediatas. O material, com este comportamento, se deforma ao longo do tempo quando submetido a uma força. Pode ser representado por um amortecedor, como ilustrado na Fig. 1.3. No instante que é aplicado uma tensão σ aparece uma velocidade de deformação $\dot{\epsilon}$, que segue a lei de Newton de viscosidade $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$, onde η é o coeficiente de viscosidade.

Por combinações dos modelos elástico e plástico, obtém-se o modelo elastoplástico. Este apresenta um comportamento elástico para tensões menores que a tensão de

plastificação e um comportamento plástico após atingida esta tensão.



Figura 1.1 - Modelo elástico

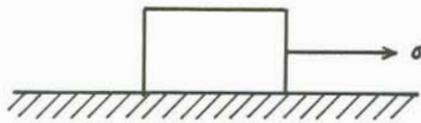


Figura 1.2 - Modelo plástico



Figura 1.3 - Modelo viscoso

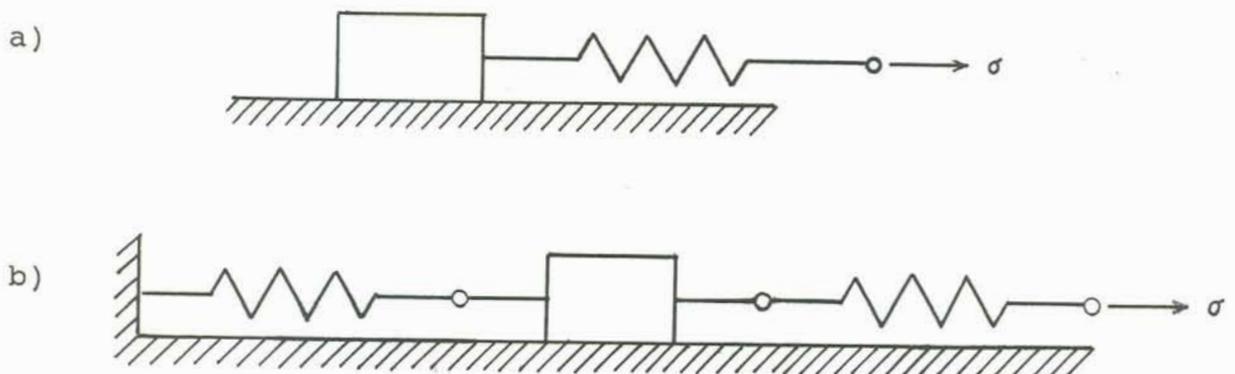


Figura 1.4 - Modelos elastoplásticos

a) perfeito

b) com endurecimento linear

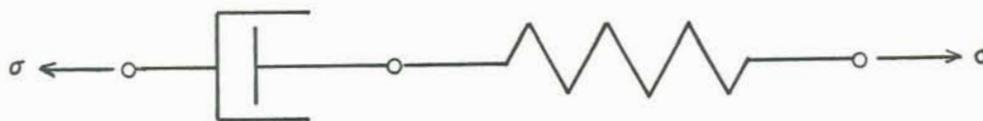


Figura 1.5 - Modelo de Maxwell

Neste modelo, chama-se endurecimento por deformação plástica ao aumento da tensão de plastificação com a deformação plástica ϵ_p , sendo caracterizado por sua taxa $H'(\epsilon_p) = d\sigma / d\epsilon_p$. Caso $H' = 0$, tem-se um material com endurecimento linear. Ambos materiais são representados pelos modelos mecânicos da Fig. 1.4.

Combinando-se elementos elásticos e viscosos, obtém-se o comportamento viscoelástico, que caracteriza-se por apresentar tanto deformações imediatas, como não imediatas. Em particular, interessa neste trabalho, o modelo viscoelástico de Maxwell, representado por uma mola em série com um amortecedor, como na Fig. 1.5.

Um conjunto deste modelo em paralelo possibilita a representação do comportamento do concreto sob cargas de serviço.

O comportamento de um material elasto-viscoplástico pode ser representado pelo modelo reológico unidimensional da Fig. 1.6.

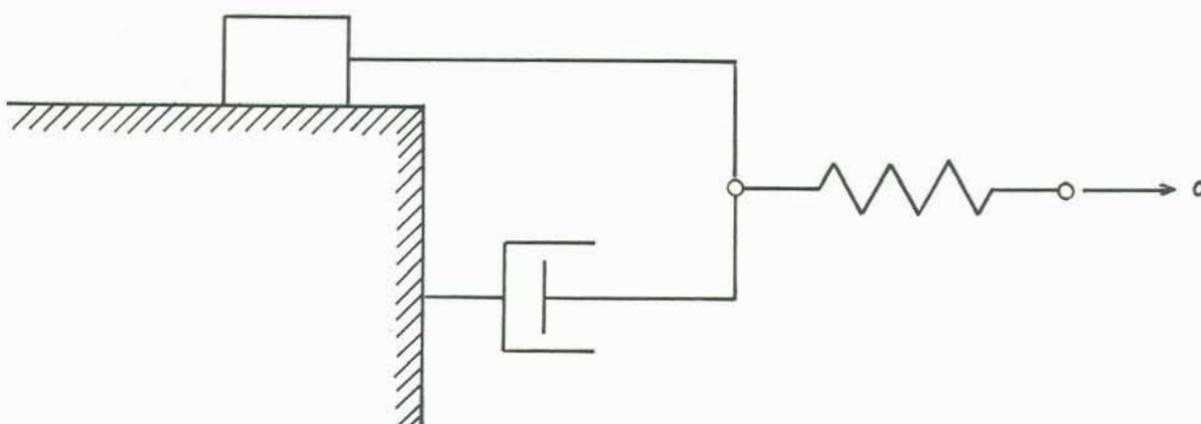


Figura 1.6 - Modelo elasto-viscoplástico

A resposta elástica instantânea é proporcionada pela mola linear. O elemento de atrito torna-se ativo somente se a tensão corrente σ for maior que a tensão de plastificação σ_0 . Este excesso de tensão ($\sigma - \sigma_0$) é absorvido pelo amortecedor, permitindo desta maneira, que o nível de tensão exceda instantaneamente o valor previsto pela teoria da plasticidade. A solução tenderá para este nível de equilíbrio quando as condições de estado estável forem atingidas pelo sistema.

1.3 - Conteúdo do trabalho

Este trabalho estuda o comportamento do concreto estrutural submetido a estados planos de tensão. Para representar este comportamento, utilizou-se um modelo elasto-viscoplástico que tem como casos particulares, o viscoelástico e o elastoplástico.

Os fenômenos de retração, fluência, não-linearidade física e fissuração são levados em conta na elaboração da formulação teórica.

No programa computacional desenvolvido nesta dissertação, há um procedimento incremental no tempo, para solução do problema viscoelástico, e um algoritmo incremental de cargas para solução do problema elastoplástico.

O trabalho foi dividido em capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro.

No segundo capítulo, faz-se o desenvolvimento do modelo de elementos finitos para análise de um material elasto-viscoplástico, segundo proposto por Owen e Hinton [46]. Mostra-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares e explica-se o modelo de camadas adotado.

No terceiro capítulo, são apresentados os modelos de elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura, bem como a montagem da matriz de rigidez global do sistema.

No quarto capítulo, são apresentadas os modelos constitutivos dos materiais, destacando-se o comportamento do concreto tracionado e comprimido e as propriedades da armadura passiva e ativa.

No quinto capítulo, descreve-se as propriedades do concreto e do aço ao longo tempo, nas quais destacam-se a relaxação do aço e a fluência e retração do concreto.

No sexto capítulo, descreve-se o desenvolvimento matemático de um modelo elasto-viscoplástico para o aço, os tipos de protensão e a implementação das etapas de solução do programa.

No sétimo capítulo, são apresentados alguns exemplos que possuem as propriedades abordadas neste estudo. Estes são comparados com resultados experimentais.

No oitavo capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho.

No anexo A, faz-se a descrição do programa de entrada de dados desenvolvido com a finalidade de facilitar a utilização do programa computacional.

No anexo B, são mostradas expressões que complementam as fórmulas desenvolvidas no capítulo quatro.

2 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

2.1 - Introdução

Através da teoria da elasto-viscoplasticidade, pode-se obter a resposta de uma estrutura para cargas de curta e longa duração. O modelo elasto-viscoplástico encontra soluções de problemas elastoplásticos, quando a resposta atinge o estado estacionário. Reduzindo-se a tensão de plastificação do material a zero, resolvem-se problemas viscoelásticos.

Desta forma, o programa computacional desenvolvido permite encontrar a solução de dois tipos de problemas. Na primeira situação, busca-se determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Neste caso, procura-se o estado de deformações da estrutura quando o tempo tende ao infinito. Este estado estável, corresponde a resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a uma carga instantânea. O segundo tipo de problema é a determinação da resposta de uma estrutura ao longo do tempo. Ou seja, busca-se calcular o estado de deformação da estrutura, decorrido um determinado tempo da aplicação do carregamento. Esta resposta corresponde ao comportamento viscoelástico.

Utiliza-se o modelo de camadas superpostas para representar de forma mais precisa o comportamento real do concreto. Neste modelo, o material é composto de diversas camadas que sofrem a mesma deformação. Atribuindo-se diferentes propriedades a cada camada, obtém-se um comportamento composto, que pode exibir as características da resposta elasto-viscoplástica do material real.

2.2 - Comportamento elasto-viscoplástico

Neste item, será vista a formulação matemática para análise estrutural não-linear, através do método dos elementos finitos, de um material isotropo homogêneo de comportamento elasto-viscoplástico, conforme o modelo reológico da Fig. 1.6.

O programa para solução deste problema encontra-se apresentado em Owen e Hinton [46]. A partir deste programa, foram implementados os diversos modelos utilizados para representação dos materiais deste estudo e que serão mostrados nos capítulos seguintes.

2.2.1 - Expressões básicas

De uma maneira geral, para problemas contínuos não-lineares, admite-se que a deformação total ϵ possa ser separada em uma componente elástica ϵ_e , e outra viscoplástica ϵ_{vp} , de forma que a taxa de deformação total pode ser expressa por

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_{vp}\} \quad (2.1)$$

A tensão total é calculada a partir da deformação elástica de acordo com

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon_e\} \quad (2.2)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material. O começo do comportamento viscoplástico é governado por uma superfície de plastificação dada por

$$F(\{\sigma\}) - F_0(k) = 0 \quad (2.3)$$

onde F_0 é a tensão de plastificação uniaxial, que pode ser uma função do parâmetro de endurecimento k . Se $F < F_0$, tem-se um comportamento elástico, se $F = F_0$ plástico, e se $F > F_0$ viscoplástico.

É necessário estabelecer uma lei específica para

determinar as deformações viscoplásticas a partir do estado de tensões. Uma forma explícita para esta lei, conforme [57] é

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0$$

e

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = 0, \quad \text{para } F \leq F_0 \quad (2.4)$$

na qual

$\gamma = 1/\eta$ é o parâmetro de fluidez;

$Q = Q(\{\sigma\})$ é a função potencial plástico;

$\Phi(F)$ é uma função definida no capítulo 4.

Restringindo-se ao caso de plasticidade associada, na qual $F \equiv Q$, a equação (2.4) fica

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi \{a\} \quad (2.5)$$

onde $\{a\}$ é o vetor de fluxo plástico.

2.2.2 - Incremento de deformação viscoplástica

Com a lei para taxa de deformação viscoplástica, expressa em (2.5), pode-se definir um incremento de deformação $\{(\Delta \epsilon_{vp})_n\}$, correspondente a um intervalo de tempo $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, usando um esquema de integração no tempo implícito, como

$$\{(\Delta \epsilon_{vp})_n\} = \Delta t_n \left[(1 - \theta) \{(\dot{\epsilon}_{vp})_n\} + \theta \{(\dot{\epsilon}_{vp})_{n+1}\} \right] \quad (2.6)$$

Para $\theta = 0$, obtém-se um esquema de integração no tempo de Euler, que é também conhecido como "completamente explícito", uma vez que o incremento de deformação fica completamente determinado pelas condições existentes no tempo t_n .

Para $\theta = 1$, tem-se um esquema "completamente implícito", com o incremento de deformação sendo determinado pela

taxa de deformação correspondente ao fim do intervalo de tempo.

Para $\theta = 0,5$, o esquema de integração no tempo é dito implícito trapezoidal, sendo também conhecido como regra de Crank-Nicolson.

Para definir $\{(\dot{\epsilon}_{vp})_{n+1}\}$ na equação (2.6), pode-se usar um desenvolvimento limitado em série de Taylor, de forma que

$$\{(\dot{\epsilon}_{vp})_{n+1}\} = \{(\dot{\epsilon}_{vp})_n\} + [H_n] \{\Delta\sigma_n\} \quad (2.7)$$

onde

$$[H_n] = \left(\frac{\partial \{\dot{\epsilon}_{vp}\}}{\partial \{\sigma\}} \right)_n \quad (2.8)$$

e $\{\Delta\sigma_n\}$ é a variação de tensão no tempo no intervalo Δt_n . Sendo assim, (2.6) pode ser reescrita como

$$\{(\Delta\epsilon_{vp})_n\} = \{(\dot{\epsilon}_{vp})_n\} \Delta t_n + [C_n] \{\Delta\sigma_n\} \quad (2.9)$$

onde

$$[C_n] = \theta \Delta t_n [H_n] \quad (2.10)$$

A matriz $[H_n]$ depende do nível de tensão e será determinada no capítulo 4, em função dos critérios de plastificação adotados para os materiais.

2.2.3 - Incrementos de tensão

Usando a forma incremental em (2.2), obtém-se

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D] \{(\Delta\epsilon_e)_n\} = [D] (\{\Delta\epsilon_n\} - \{(\Delta\epsilon_{vp})_n\}) \quad (2.11)$$

Expressando o incremento de deformação total em termos de incremento de deslocamentos, tem-se

$$\{\Delta \varepsilon_n\} = [B] \{\Delta u_n\} \quad (2.12)$$

onde $[B]$ é a matriz de relações deformações-deslocamentos e $\{\Delta u_n\}$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nas direções dos eixos globais cartesianos x e y . Usando a equação (2.9), a expressão (2.11) resulta em

$$\{\Delta \sigma_n\} = [\hat{D}_n] \left([B] \{\Delta u_n\} - \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} \Delta t_n \right) \quad (2.13)$$

onde

$$[\hat{D}_n] = \left([D]^{-1} + [C_n] \right)^{-1} \quad (2.14)$$

2.2.4 - Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo t_n , são

$$\int_V [B]^T \{\sigma_n\} dV - \{P_n\} = 0 \quad (2.15)$$

onde $\{P_n\}$ é o vetor de cargas nodais e nodais equivalentes devido as forças de superfície e de volume. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio que devem ser satisfeitas são dadas pela forma incremental de (2.15), como segue

$$\int_V [B]^T \{\Delta \sigma_n\} dV - \{\Delta P_n\} = 0 \quad (2.16)$$

na qual $\{\Delta P_n\}$ representa a variação nas cargas durante o intervalo de tempo Δt_n . Na maioria dos casos, os incrementos de cargas são aplicados como passos discretos, considerando $\{\Delta P_n\} = 0$ para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro dentro de um incremento de carga.

Usando (2.9) e (2.11), o incremento de deslocamento, ocorrido durante cada passo de tempo Δt_n , pode ser calculado como

$$\{\Delta u_n\} = [K_n]^{-1} \{\Delta V_n\}$$

$$\{\Delta V_n\} = \int_V [B]^T [\hat{D}]_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} \Delta t_n dV + \{\Delta P_n\} \quad (2.17)$$

onde $[K_n]$ é a matriz de rigidez tangente global, dada por

$$[K_n] = \int_V [B]^T [\hat{D}]_n [B] dV \quad (2.18)$$

$\{\Delta u_n\}$ é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais;

$\{\Delta V_n\}$ é o vetor de incrementos de cargas nodais equivalentes de toda a estrutura, no passo n , chamado de vetor de "pseudo-cargas".

Aplicando a condição inicial, os incrementos de deslocamentos $\{\Delta u_n\}$ podem ser calculados para qualquer instante de tempo t_n , que são substituídos em (2.13) dão os incrementos de tensões $\{\Delta \sigma_n\}$. Assim,

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + \{\Delta \sigma_n\}$$

e

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} \quad (2.19)$$

Usando (2.11) e (2.12) resulta

$$\{(\Delta \varepsilon_{vp})_n\} = [B]^T \{\Delta u_n\} - [D]^{-1} \{\Delta \sigma_n\} \quad (2.20)$$

e então

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_n\} + \{(\Delta \varepsilon_{vp})_n\} \quad (2.21)$$

O estado estacionário pode ser numericamente obtido

examinando a variação dos deslocamentos nodais. A condição de convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena.

2.2.5 - Correção do equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão está baseado numa forma linearizada das equações incrementais de equilíbrio (2.16). Portanto, as tensões totais $\{\sigma_{n+1}\}$, obtidas pela acumulação de todos incrementos de tensões, não são estritamente corretas e não satisfazem exatamente as equações de equilíbrio (2.15). Há vários procedimentos de solução disponíveis para efetuar as correções necessárias [53]. A aproximação mais simples é avaliar $\{\sigma_{n+1}\}$, conforme apresentado no item anterior e, então, calcular as forças residuais ψ (ou fora de equilíbrio), como

$$\{\psi_{n+1}\} = \{P_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{\sigma_{n+1}\} dV \neq 0 \quad (2.22)$$

Esta força residual é então adicionada ao incremento de força aplicada ΔV no próximo passo de tempo. Tal técnica evita um processo de iteração e ao mesmo tempo alcança uma redução do erro.

2.3 - Modelos de camadas

O modelo reológico, correspondente ao comportamento elasto-viscoplástico, descrito no item 1.2, apresenta uma resposta material de acordo com observações experimentais. Porém, a história de deformação com o tempo (curvas de fluência) de muitos materiais reais, como o concreto, não pode ser precisamente representada por um modelo elasto-viscoplástico tão simples.

Uma resposta de um material mais elaborado, pode ser obtida pelo método das camadas superpostas (overlay models), segundo Pande e Owen [48], na qual o sólido analisado é suposto como sendo composto de várias camadas, cada uma das quais

sofrendo a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

Introduzindo um número conveniente de camadas e atribuindo diferentes características materiais a cada uma,

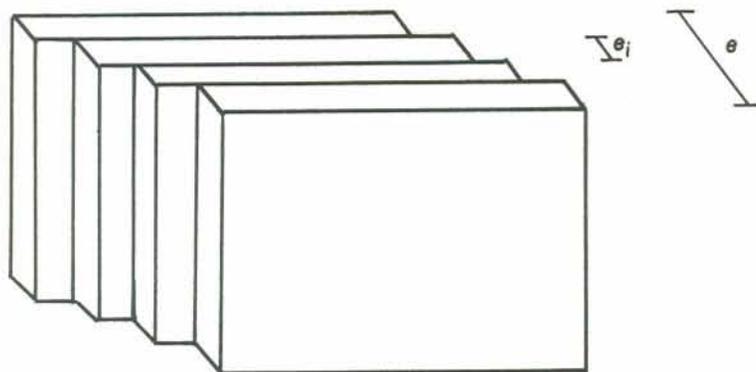


Figura 2.1 - Modelo de camadas superpostas

pode-se reproduzir o comportamento experimental de materiais complexos como o concreto.

No caso mais geral, o modelo reológico é formado por um conjunto de elementos tipo Maxwell em paralelo. Têm-se como parâmetros as espessuras das camadas e_i , os módulos de elasticidade das molas E_i , as constantes dos amortecedores γ_i e as tensões de escoamento F_{0i} , nas quais começam a atuar os elementos de atrito. A maior dificuldade está na determinação dos parâmetros para ajustar o modelo ao comportamento experimental do material.

Para o concreto, aplicar-se-á o modelo de camadas superpostas para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento.

Na Fig. 2.1, ilustra-se esquematicamente a situação de um modelo de camadas superpostas em duas dimensões. Cada camada pode ter espessura diferente e um comportamento material também diferente. Como os nós, em todas as camadas com as mesmas coordenadas globais xy , têm a mesma deformação, resulta em um campo de tensões $\{\sigma_i\}$ diferente em cada camada, devido as diferentes propriedades físicas das camadas. A contribuição de cada camada

para o campo de tensões totais σ , conforme sua espessura relativa e_i , é dada por

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^k \{\sigma_i\} e_i \quad (2.23)$$

onde k é o número de camadas do modelo e

$$\sum_{i=1}^k e_i = 1 \quad (2.24)$$

A equação de equilíbrio em (2.15) fica

$$\{P_n\} - \int_V [B]^T \sum_{i=1}^k \{(\sigma_n)_i\} e_i dV = 0 \quad (2.25)$$

E a matriz de rigidez de cada elemento será a soma das contribuições de cada camada, ou seja

$$[K_n] = \sum_{i=1}^k \int_V [B]^T [\hat{D}_n]_i [B] dV \quad (2.26)$$

onde $[\hat{D}_n]_i$ é a matriz $[\hat{D}_n]$ calculada para cada camada. Esta matriz será diferente para cada camada, em função de suas propriedades. O processo de solução é idêntico ao descrito nas seções anteriores, com os termos de deformação e tensão sendo calculados para cada camada separadamente. É importante observar que, embora as deformações viscoplásticas, em cada camada, possam ser diferentes, devido aos diferentes valores das tensões de plastificação, a deformação total deve ser a mesma.

3 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADOS PARA O CONCRETO E A ARMADURA

3.1 - Elementos finitos para o concreto

Para modelar o concreto foram utilizados três elementos finitos isoparamétricos quadrangulares: um linear e dois quadráticos, da família Serendipity e da família de Lagrange. Estes possuem 4, 8 e 9 nós, respectivamente, com dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos xy do sistema global de coordenadas.

Para o elemento linear, o campo de deslocamentos possui variação linear e o de deformações é constante ao longo dos lados do elemento. Para os outros elementos (8 e 9 nós), o campo de deslocamento possui variação quadrática e o de deformações, variações lineares.

As funções de interpolação (ou de forma), que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas (ξ, η) e numeração dos nós conforme indicado na Fig. 3.1 são:

a) Elemento linear

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) , \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.1)$$

onde $\xi_0 = \xi \xi_1$, $\eta_0 = \eta \eta_1$ e (ξ_1, η_1) são as coordenadas naturais do nó em consideração.

b) Elemento quadrático da família Serendipity

- para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) , \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.2)$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = \xi_1^2/2 (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) + \eta_1^2/2 (1 + \eta_0) (1 - \xi^2) ,$$

$$i = 2, 4, 6, 8 \quad (3.3)$$

c) Elemento quadrático de Lagrange

- para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 (\xi^2 + \xi_0) (\eta^2 + \eta_0) , \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.4)$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = 1/2 \eta_1^2 (\eta^2 - \eta_0) (1 - \xi^2) + 1/2 \xi_1^2 (\xi^2 - \xi_0) (1 - \eta^2) ,$$

$$i = 2, 4, 6, 8 \quad (3.5)$$

- para o nó central:

$$N_i = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) , \quad i = 9 \quad (3.6)$$

Trabalhando com elementos isoparamétricos, pode-se representar as coordenadas cartesianas (x, y) , de um ponto no interior deste elemento, como

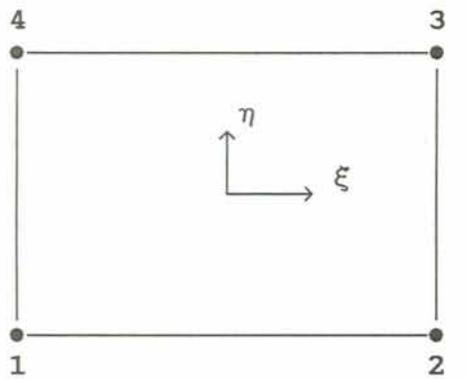
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

na qual N_i é a função de forma correspondente ao nó i do elemento de coordenadas cartesianas (x_i, y_i) e n é o número de nós do elemento.

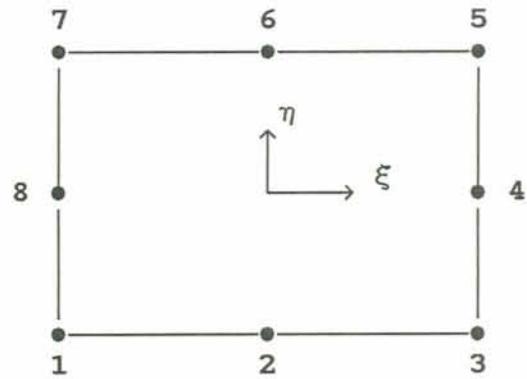
A matriz de rigidez para o concreto é dada por

$$[K_c] = \int_V [B]^T [\hat{D}] [B] dV \quad (3.8)$$

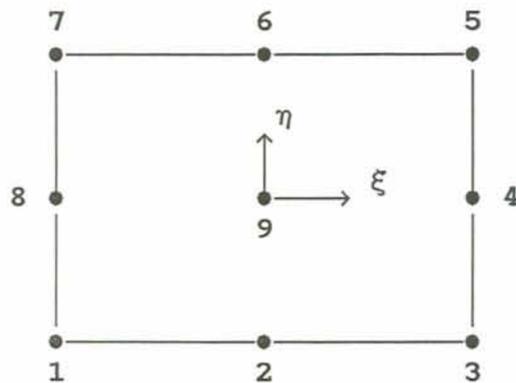
e pode ser calculada numericamente através da expressão



elemento linear de 4 nós



elemento Serendipity de 8 nós



elemento Lagrangiano de 9 nós

Figura 3.1 - Elementos isoparamétricos quadrangulares

$$[K_C] = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} [B_{ij}] [\hat{D}] [B_{ij}] w_i w_j e_{ij} \det J \quad (3.9)$$

onde, ng é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;

$[B_{ij}]$ é a matriz de relações deformações-deslocamentos calculada no ponto de integração com coordenadas naturais (ξ_i, η_i) ;

$[\hat{D}]$ é a matriz constitutiva corrigida, conforme (2.14), calculada a partir da matriz constitutiva elástica para estado plano de tensão;

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

w_i, w_j são os fatores de peso;

e_{ij} é a espessura no ponto de integração;

$\det J$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento, calculada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

As coordenadas naturais e fatores de peso dos pontos de integração encontram-se na referência [47].

3.2 - Elementos finitos para armadura

Existem basicamente três formas de incluir a armadura em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto estrutural: o modelo distribuído, o modelo incorporado e o modelo discreto.

No modelo distribuído, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto. Admite-se aderência perfeita entre aço e concreto. É um modelo conveniente quando a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas.

No modelo incorporado, a geometria das armaduras é consistente com a geometria do elemento de concreto. Isto resulta em um único campo de deslocamentos no domínio do elemento, onde a armadura é considerada como uma linha de material mais rígido no interior do elemento de concreto. Desta

forma, a armadura não necessita estar uniformemente distribuída, podendo ocorrer várias barras de aço no interior de um mesmo elemento de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço.

No modelo discreto, a armadura é representada por elementos unidimensionais de treliça, que se integram à malha de elementos finitos bidimensionais utilizada na representação do concreto.

Este modelo tem a desvantagem da malha de elementos finitos de concreto limitar a disposição das barras de armadura. Neste trabalho, optou-se pelo modelo incorporado para representar a armadura.

3.2.1 - Modelo incorporado

No modelo incorporado, admite-se que a armadura resiste apenas a esforços axiais e que os deslocamentos de qualquer ponto da barra são iguais aos do elemento de concreto na mesma posição. Deste modo, a barra de aço pode ser arbitrariamente colocada dentro do elemento de concreto, sem introduzirem-se incógnitas adicionais ao problema.

Os deslocamentos ao longo da barra de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais do elemento de concreto. Logo, a matriz de rigidez da armadura tem a mesma dimensão da matriz de rigidez do elemento de concreto e a matriz de rigidez total é a soma das duas. A expressão final da matriz de rigidez do elemento é

$$[K] = [K_C] + \sum_{i=1}^{nb} [K_S]_i \quad (3.12)$$

onde nb é o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez de cada barra de armadura é dada por

$$[K_S] = A_S E_S \int_S \{B_S\} \langle B_S \rangle dS \quad (3.13)$$

onde,

A_s é a área da seção transversal da barra de armadura;
 E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;
 $\{B_s\}$ é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura.

As barras de aço são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos. Através destes elementos podem ser modelados barras retas e curvas. A geometria das barras retas fica definida por dois pontos. Para as barras curvas, que irão representar os cabos de protensão, são necessários três pontos para sua definição.

3.2.2 - Formulação geométrica

Neste item, é apresentada uma formulação para incorporar barras de aço ao elemento bidimensional de concreto. As barras de armadura são descritas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos. Durante a integração da expressão do trabalho virtual, é necessário transformar as coordenadas da armadura para coordenadas naturais, como será visto mais adiante.

O elemento de concreto, mostrado na Fig. 3.2, é descrito usando coordenadas globais (x,y) . As coordenadas naturais locais do elemento são (ξ,η) . Seguindo o procedimento usual para o mapeamento isoparamétrico, as coordenadas globais de qualquer ponto, num elemento, são expressas em termos das funções de interpolação N , como

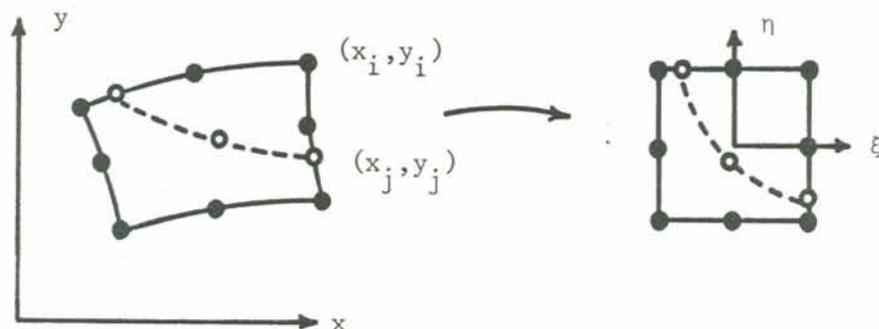


Figura 3.2 - Barra de armadura no interior do elemento de concreto.

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (3.14)$$

As correspondentes diferenciais são

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria da barra de armadura pode ser estabelecida independentemente da malha global. Uma vez criada a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. Para garantir uma continuidade interelementar adequada, é necessário colocar nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós na barra de aço, entre os nós de definição da mesma, são obtidos por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto. Tomando $\{x_j\}$ e $\{y_j\}$ como os vetores que contêm as coordenadas globais de todos os nós da barra, associados com um único elemento, as coordenadas de qualquer outro ponto na barra são dadas por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} H_j & 0 \\ 0 & H_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

As funções de interpolação unidimensionais $H(\chi)$ são expressas em termos de uma coordenada normalizada independente χ .

Para determinar a rigidez associada com a armadura, é necessário fazer integrações ao longo da mesma. Para isto, precisa-se de um elemento diferencial de comprimento dS , ao longo da armadura, que pode ser obtido de (3.16). Conforme a Fig. 3.3, a orientação da tangente à barra é dada pelo ângulo β , onde

$$\cos \beta = \frac{dx}{dS} = \frac{dx}{d\chi} \frac{d\chi}{dS}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{dy}{dS} = \frac{dy}{d\chi} \frac{d\chi}{dS} \quad (3.17)$$

Sendo $\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta = 1$, segue que

$$\frac{dS}{d\chi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\chi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\chi}\right)^2} \quad (3.18)$$

na qual

$$\begin{Bmatrix} dx/d\chi \\ dy/d\chi \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} dH_j/d\chi & 0 \\ 0 & dH_j/d\chi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

logo

$$\cos \beta = \frac{dx}{d\chi} / \frac{dS}{d\chi}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{dy}{d\chi} / \frac{dS}{d\chi} \quad (3.20)$$

Desta forma, os cossenos diretores da reta tangente, em qualquer ponto ao longo da armadura, assim como o fator $dS/d\chi$, podem ser facilmente calculados usando as equações acima.

Um elemento diferencial de volume dV_s da barra de aço,

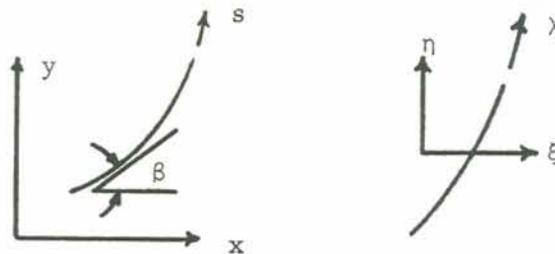


Figura 3.3 - Coordenadas ao longo do eixo da armadura

pode ser expresso por

$$dV_s = A_s dS \quad (3.21)$$

Usando o fator descrito em (3.18), integrais envolvendo elementos de volume ao longo da armadura podem ser escritas em termos da coordenada natural χ como

$$\int_{V_s} c dV_s = \int_{\chi} c A_s \frac{dS}{d\chi} d\chi \quad (3.22)$$

na qual C é uma função de posição ao longo da barra.

3.2.3 - Trechos de armadura que ficam no interior de um elemento de concreto

Na entrada de dados, descrita no anexo A, as barras de armadura são posicionadas por suas coordenadas globais (x,y) . Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto-aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional.

O programa computacional implementado, neste trabalho, calcula automaticamente os segmentos destas barras que ficam no interior do elemento de concreto. Uma vez determinados estes trechos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura.

Como primeira etapa, deve-se realizar a transformação de coordenadas globais $P_j(x,y)$, dos pontos de definição da geometria da barra, para coordenadas naturais $P_j(\xi,\eta)$ dos mesmos. A relação entre estas coordenadas para elementos isoparamétricos é dada por

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_i(\xi,\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

onde (x,y) são as coordenadas globais de um ponto qualquer, (x_i,y_i) são as coordenadas globais dos nós do elemento de

concreto e $N_i(\xi, \eta)$ suas funções de forma.

Uma forma explícita para a relação inversa a (3.23) não é facilmente encontrada. Elwi e Hrudey [30] sugerem o algoritmo de Newton-Raphson para sua determinação numérica. Deste modo, a obtenção de (ξ_p, η_p) está baseada no fato de que estas coordenadas são as raízes do seguinte sistema de equações não lineares

$$\{f(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \end{Bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

Usando o método de Newton-Raphson, tem-se, após $k+1$ iterações,

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_p^k + \begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{Bmatrix}_p^{k+1} = [J^k]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_p - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i^k & 0 \\ 0 & N_i^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \right) \quad (3.26)$$

com $[J] = [J(\xi, \eta)]$ sendo a matriz Jacobiana e $\langle N_i \rangle = \langle N_i(\xi, \eta) \rangle$, as funções de forma do elemento de concreto na iteração k .

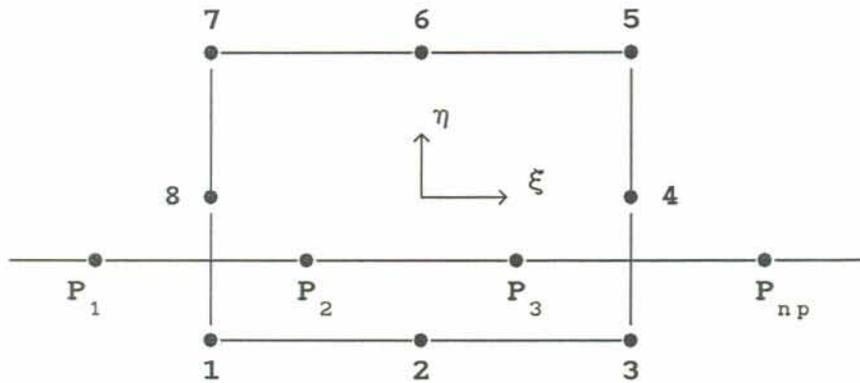


Figura 3.4 - Curva de definição da barra de aço

Determinando as coordenadas naturais (ξ_p, η_p) , dos pontos de definição da geometria da barra, parte-se para uma segunda etapa de definição da curva que passa por estes pontos, como ilustrado pela Fig. 3.4.

Segundo Zienkiewicz [56], têm-se que

$$\xi = \sum_{i=1}^{np} f_i(\eta) \xi_i$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{np} g_i(\xi) \eta_i \quad (3.27)$$

Onde, para os np pontos da barra de aço, calculam-se as funções

$$g_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)}$$

$$f_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{(\eta - \eta_j)}{(\eta_i - \eta_j)} \quad (3.28)$$

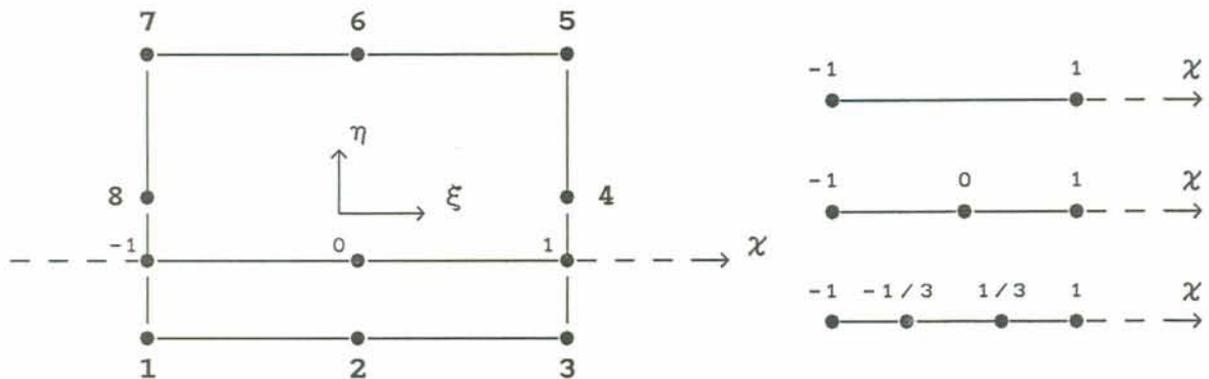


Figura 3.5 - Segmento de armadura dentro do elemento de concreto

A terceira etapa consiste na determinação da intersecção da curva P_1, P_2, \dots, P_{np} com cada um dos quatro lados do elemento de concreto. Para tal, fixa-se a coordenada $\xi = \pm 1$ do elemento de concreto e calcula-se a coordenada η da intersecção lado do concreto-curva da barra. Caso $-1 \leq \eta \leq 1$ significa dizer que a barra intercepta este lado do elemento. De maneira análoga, fixa-se $\eta = \pm 1$ e verifica se $-1 \leq \xi \leq 1$.

A quarta e última etapa deste item, consiste na criação de nós intermediários ao segmento de armadura no interior do elemento de concreto.

Em vista disto, sobre o eixo da coordenada normalizada χ , determina-se no segmento de armadura: zero, um ou dois nós intermediários, conforme o caso. A Fig. 3.5 ilustra esta etapa.

3.2.4 - Funções de forma para os elementos de armadura

As funções de interpolação para o elemento de armadura são polinômios de Lagrange, conforme proposto por Zienkiewicz [14] e são geradas pela expressão

$$H_k^m(\chi) = \frac{(\chi - \chi_1) \dots (\chi - \chi_{k-1}) (\chi - \chi_{k+1}) \dots (\chi - \chi_m)}{(\chi_k - \chi_1) \dots (\chi_k - \chi_{k-1}) (\chi_k - \chi_{k+1}) \dots (\chi_k - \chi_m)} \quad (3.29)$$

A expressão (3.29) tem valor unitário para $\chi = \chi_k$.
Desta forma, para elemento de 2 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{1 - \chi}{2} \\ H_2(\chi) &= \frac{1 + \chi}{2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para o elemento de 3 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{\chi^2 - \chi}{2} \\ H_2(\chi) &= 1 - \chi^2 \\ H_3(\chi) &= \frac{\chi^2 + \chi}{2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para o elemento de 4 nós:

$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= -\frac{1}{16} (9\chi^3 - 9\chi^2 - \chi + 1) \\ H_2(\chi) &= \frac{9}{16} (3\chi^3 - \chi^2 - 3\chi + 1) \\ H_3(\chi) &= -\frac{9}{16} (3\chi^3 + \chi^2 - 3\chi + 1) \\ H_4(\chi) &= \frac{1}{16} (9\chi^3 + 9\chi^2 - \chi - 1) \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2.5 - Matriz de rigidez para a armadura

O campo de deformações, dentro de um elemento de armadura, pode ser definido de diversas maneiras. Segundo Zienkiewicz e Philips [58], a deformação ao longo da armadura é igual à deformação normal, no elemento de concreto, na direção tangente a barra. Sendo assim, considerando aderência perfeita entre o concreto e o aço, a expressão para deformação, em uma

forma incremental, conforme proposto por Elwi e Hrudehy [30], fica

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_x \cos^2 \beta + \Delta \varepsilon_y \sin^2 \beta + \Delta \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta \quad (3.33)$$

Os incrementos de deformações $\Delta \varepsilon_x$, $\Delta \varepsilon_y$ e $\Delta \gamma_{xy}$ são obtidos diretamente do campo de incremento de deslocamentos do elemento de concreto. Da equação (3.33) segue que a deformação incremental na armadura pode ser expressa como

$$\Delta \varepsilon_s = \langle B_s \rangle \{ \Delta u \} \quad (3.34)$$

onde Δu é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de concreto e

$$\langle B_s \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \\ \cos \beta \sin \beta \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} + \sin^2 \beta \left\{ \frac{dN}{dy} \right\} \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura determinado em [30]. As derivadas das funções de forma em relação as coordenadas x e y são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} dN_1/dx \\ dN_1/dy \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} dN_1/d\xi \\ dN_1/d\eta \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, determina-se que a variação do incremento de trabalho interno para a armadura é dada por

$$\delta \Delta W = \int_{V_s} \left(\sigma_s + \Delta \sigma_s \right) \delta \Delta \varepsilon_s dV \quad (3.37)$$

na qual σ_s é a tensão normal na armadura e V_s o seu volume.

A forma incremental da relação constitutiva para a armadura pode ser escrita como

$$\Delta\sigma_s = E_s \Delta\varepsilon_s \quad (3.38)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade do aço. Assim,

$$\delta\Delta W = \int_S \left(\delta\Delta\varepsilon_s E_s \Delta\varepsilon_s A_s \right) dS + \int_S \left(\delta\Delta\varepsilon_s \sigma_s A_s \right) dS \quad (3.39)$$

ou

$$\delta\Delta W = \langle \delta\Delta u \rangle [K_s] \{\Delta u\} + \{Q_s\} \quad (3.40)$$

onde

$$[Q_s] = \int_{\chi} \{B_s\} \sigma_s \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.41)$$

$[Q_s]$ é o vetor de forças nodais equivalentes e

$$[K_s] = \int_{\chi} \{B_s\} E_s \langle B_s \rangle \frac{dS}{d\chi} A_s d\chi \quad (3.42)$$

A representação numérica para o cálculo da matriz de rigidez para a armadura fica

$$[K_s] = \sum_{i=1}^{ng} \{B_s\}_i E_s \langle B_s \rangle_i \frac{dS}{d\chi} A_s w_i \quad (3.43)$$

onde w_i é o fator de peso e ng o número de pontos integração na direção axial da barra.

4 - MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 - Comportamento não-linear dos materiais

O comportamento do material concreto estrutural é extremamente complexo e apresenta uma resposta altamente não-linear, conforme ilustrado pela Fig. 4.1.

Este gráfico carga-deslocamento apresenta as três fases típicas de comportamento pelas quais passa uma peça de concreto estrutural: uma etapa elástica-linear, com o concreto não fissurado; uma etapa de formação de fissuras e uma fase plástica.

Este comportamento é devido, principalmente, a dois fatores: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e do concreto.

Outras não linearidades, independentes do tempo, surgem nos materiais como o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço no concreto fissurado. Os efeitos dependentes do tempo, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço, também contribuem na resposta não-linear e serão tratados no próximo capítulo.

Através de métodos numéricos e principalmente, através da técnica dos elementos finitos, é possível realizar uma análise mais racional destes fenômenos.

4.2 - Modelos constitutivos para o concreto

Evidências experimentais [37] indicam que a deformação não-linear do concreto é basicamente inelástica e portanto, o comportamento tensão-deformação pode ser separado em componentes recuperáveis e irre recuperáveis. A componente de deformação irre recuperável deve ser tratada pela teoria da plasticidade.

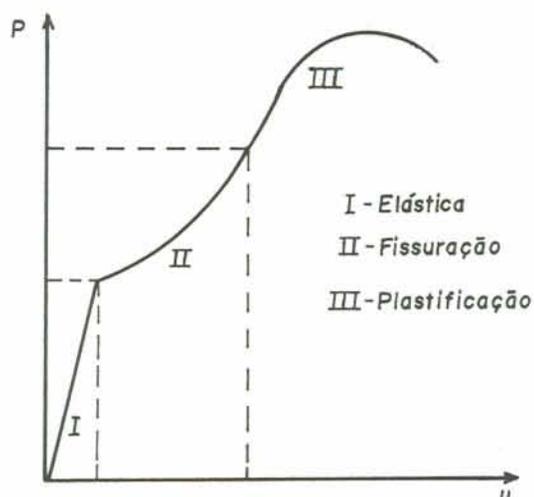


Figura 4.1 - Diagrama carga-deslocamento típico

Neste estudo, foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever o comportamento do concreto comprimido. Este modelo corresponde a solução estável do modelo elasto- viscoplástico, descrito no capítulo 2. Para o concreto, sob tensões de tração, considera-se uma colaboração entre fissuras, devido as forças de aderência entre o concreto e o aço, possibilitando uma análise mais real da estrutura.

A seguir serão descritos os modelos constitutivos utilizados para representar o concreto.

4.2.1 - Modelo para o concreto comprimido

O modelo elastoplástico será composto por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento.

4.2.1.1 - Critério de ruptura

Admitindo-se que o concreto não fissurado é um material de comportamento isotrópico, sua superfície de ruptura pode ser expressa por

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (4.1)$$

onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ são as tensões principais (tensões de tração positivas). Em vez de expressar a superfície de ruptura f em função das tensões principais, é conveniente usar o primeiro invariante do tensor de tensões I_1 , o segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 e o ângulo de similaridade θ . Desta forma, (4.1) fica

$$f(I_1, J_2, \theta) = 0 \quad (4.2)$$

Ottosen [44], propôs o seguinte critério de ruptura para o concreto, que foi adotado pelo CEB [23].

$$\alpha \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \beta \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.3)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto e

$$\begin{cases} \lambda = c_1 \cos [1/3 \arccos(-c_2 \operatorname{sen} 3\theta)] & , \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta \leq 0 \\ \lambda = c_1 \cos [\pi/3 - 1/3 \arccos(c_2 \operatorname{sen} 3\theta)] & , \text{ para } \operatorname{sen} 3\theta > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

com

$$\operatorname{sen} 3\theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.5)$$

e

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m) (\sigma_2 - \sigma_m) (\sigma_3 - \sigma_m)$$

$$\sigma_m = I_1/3 \quad (4.6)$$

Os quatro parâmetros do modelo são determinados a

partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto f_{cm} e da resistência média à tração uniaxial do concreto f_{tm} , dada por

$$f_{tm} = a \left(\frac{f_{cm} - 8}{10} \right)^{2/3}, \quad \text{em MPa}$$

$$0,95 \leq a \leq 1,85$$

Conforme o CEB [23], a resistência à tração do concreto é mais variável que a sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é por demais cauteloso e, para comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar $a = 1,85$. Além disto, a diferença de 8 MPa entre f_{cm} e f_{ck} , proposta pelo CEB, é exagerada para concretos de baixa resistência. Achou-se mais conveniente adotar para este valor, uma fração de f_{cm} (20%). Sendo assim a resistência média à tração adotada no modelo foi

$$f_{tm} = 1,85 (0,8f_{cm})^{2/3} \quad (4.7)$$

Os parâmetros do critério de Ottosen são então calculados por

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}$$

$$c_2 = 1 - 6,8 \left(k - 0,007 \right)^2$$

onde

$$k = f_{tm}/f_{cm} \quad (4.8)$$

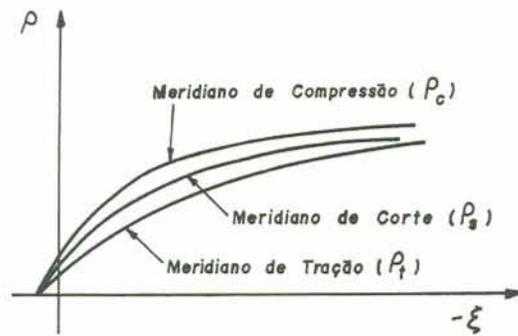


Figura 4.2.a - Meridianos da superfície de ruptura

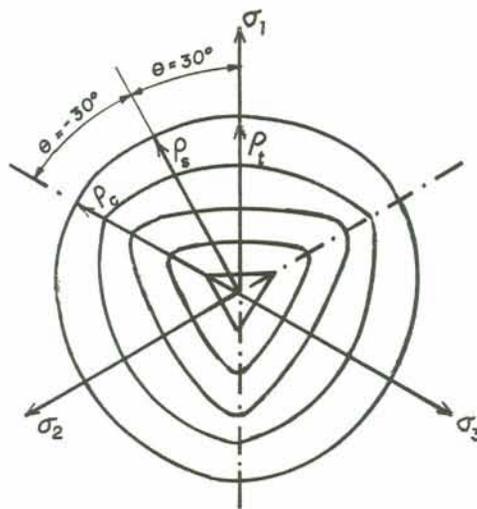


Figura 4.2.b - Seções transversais da superfície de ruptura

A forma geral da superfície de ruptura, no espaço tridimensional de tensões, pode ser visualizada por suas seções em planos desviadores e meridianos, conforme visto na Fig. 4.2. Os primeiros são planos perpendiculares ao eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) e os meridianos são planos que contêm este eixo ($\theta = \text{constante}$). Para um material isotrópico, a superfície de ruptura apresenta tríplex simetria e torna-se necessário estudar apenas um setor com $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. Como o concreto tem menor resistência à tração do que à compressão, a seção transversal da superfície de ruptura não pode ter a origem O como centro de simetria. O setor de estudo não se reduz a 30 graus, como ocorre com os metais.

Desta forma, entre as características da superfície de

ruptura do concreto pode-se destacar:

- é dependente dos três invariantes de tensão;
- a superfície de ruptura é suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- os meridianos são parabólicos e abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- o traço no plano desviador muda de uma forma triangular para circular com o aumento da pressão hidrostática;

O critério de ruptura de Ottosen, adotado neste trabalho, tem por casos particulares o critério de Drucker-Prager ($\alpha=c_2=0$) e o de Von Misses ($\beta=c_2=0$).

4.2.1.2 - Critério de plastificação para o concreto

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura.

Considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente $\sigma_{ef} = f_{cm}$ e operando a equação (4.3), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação

$$F = \left[\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2} \right] / 2 = \sigma_{ef} \quad (4.9)$$

O domínio elástico, para o concreto comprimido, é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento superiores a superfície de plastificação inicial ($0,3 f_{cm} \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$) ocorre o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento (Fig. 4.3).

4.2.1.3 - Regra de endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de

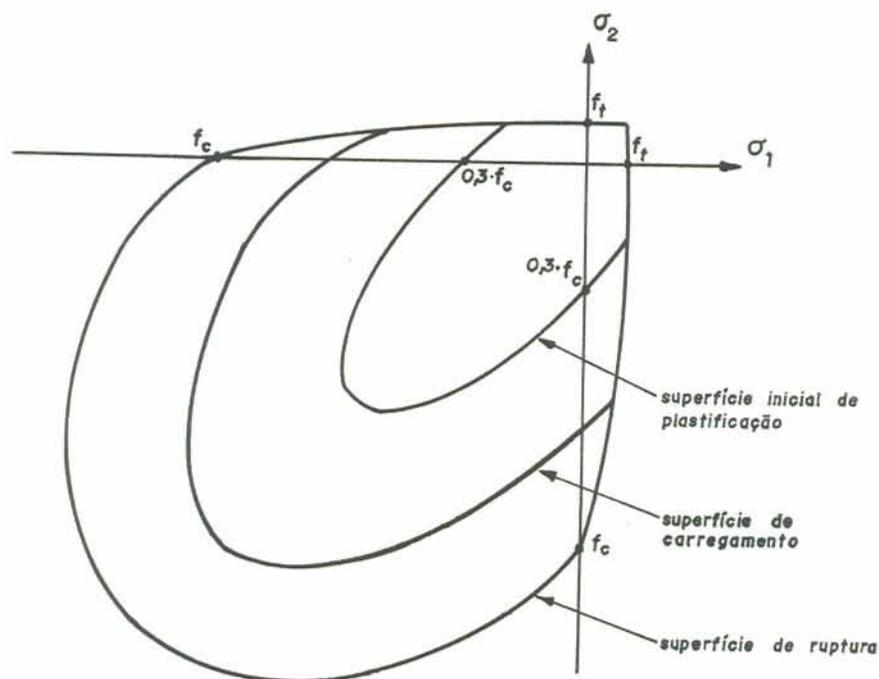


Figura 4.3 - Superfícies de plastificação e ruptura

carregamento) durante a deformação plástica. É determinada pela relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica acumulada ou deformação plástica efetiva. Através dos conceitos de tensão efetiva e de deformação plástica efetiva, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, adotou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo CEB [23] (Fig. 4.4), para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial

$$\sigma = - \frac{- \frac{E}{f_{cm}} \varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{0,0022} \right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}} 0,0022 - 2 \right) \frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.10)$$

Considerando-se que a componente de deformação elástica é σ/E , obtém-se para $0,3 f_{cm} \leq \sigma \leq f_{cm}$, a partir de

(4.10), uma relação $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$

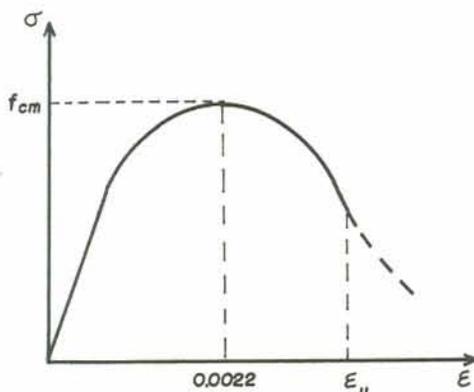


Figura 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

4.2.1.4 - Vetor de fluxo plástico

Na relação tensão-deformação, no domínio plástico, é comum considerar o vetor taxa de deformação plástica normal à superfície de plastificação. Esta regra de fluxo associada é considerada para o concreto predominantemente por motivos práticos, uma vez que há pouca evidência experimental disponível deste fato [1]. Sendo assim, pela equação (2.5)

$$\{\dot{\varepsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \gamma \Phi(F) \{a\}$$

onde $\{a\}$ é o vetor de fluxo plástico e define sua direção perpendicular à superfície de plastificação. A função tensão efetiva F é a condição de plastificação ou as funções de carregamento subsequentes no modelo de plasticidade com endurecimento. O vetor de fluxo plástico é dado por

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}}$$

com

$$\langle \sigma \rangle = \left\{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z \right\}$$

No caso de estado plano de tensão, σ_z é nula.

O vetor $\{a\}$ pode ser transformado em

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (4.11)$$

onde

$$\{a_1\} = \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} = \{1, 1, 0, 1\}$$

$$\{a_2\} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} = \frac{1}{2 \sqrt{J_2}} \left\{ s_x, s_y, 2 \tau_{xy}, s_z \right\}$$

$$\begin{aligned} \{a_3\} = \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = & \left\{ \left(s_y s_z + \frac{J_2}{3} \right), \left(s_x s_z + \frac{J_2}{3} \right), \right. \\ & \left. - 2 s_z \tau_{xy}, \left(s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os valores s_x , s_y e s_z são as tensões desviadoras dadas por

$$s_x = \left(2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z \right) / 3$$

$$s_y = \left(2 \sigma_y - \sigma_x - \sigma_z \right) / 3$$

$$s_z = \left(2 \sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \right) / 3$$

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1}$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$C_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (4.13)$$

As derivadas, dependentes da função F, estão explicitadas no anexo B.

4.2.1.5 - Matriz H

Na solução do esquema implícito de intervalos de tempo, visto no capítulo 2, deve-se determinar, em cada passo, a matriz H dada pela equação

$$[H] = \frac{\partial \{\dot{\epsilon}_{vp}\}}{\partial \{\sigma\}} \quad (4.14)$$

A taxa de deformação viscoplástica $\dot{\epsilon}_{vp}$ é dada pela equação

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \gamma \Phi \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (4.15)$$

e

$$\Phi(F) = F - F_0$$

onde F_0 é a tensão corrente de plastificação. Substituindo (4.15) em (4.14) vem

$$[H] = \gamma \left\{ \Phi \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial \Phi}{\partial F} \{a\} \langle a \rangle \right\} \quad (4.16)$$

Derivando o vetor de fluxo em relação as tensões, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial \{\sigma\}} &= \frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} \langle a_1 \rangle + \frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} \langle a_2 \rangle + \frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} \langle a_3 \rangle + \\ &C_1 \frac{\partial \langle a_1 \rangle}{\partial \{\sigma\}} + C_2 \frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \{\sigma\}} + C_3 \frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \{\sigma\}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Em que as derivadas de C_1 , C_2 e C_3 em relação a $\{\sigma\}$ são as derivadas segundas de F em relação a I_1 , J_2 e θ e estão descritas no anexo B.

As derivadas de $\langle a \rangle = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ em relação a $\{\sigma\}$ são

$$\frac{\partial \langle a_1 \rangle}{\partial \{\sigma\}} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \{\sigma\}} = \left[\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_z} \right] \quad (4.19)$$

onde

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6} \right\} - \langle a_2 \rangle \frac{s_x}{2J_2}$$

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{6} \right\} - \langle a_2 \rangle \frac{s_y}{2J_2}$$

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ 0, 0, 1, 0 \right\} - \langle a_2 \rangle \frac{\tau_{xy}}{J_2}$$

$$\frac{\partial \langle a_2 \rangle}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3} \right\} - \langle a_2 \rangle \frac{s_z}{2J_2}$$

e

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \{\sigma\}} = \left[\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_z} \right] \quad (4.20)$$

onde

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_x} = \left\{ \frac{s_x - s_y - s_z}{3}, \frac{2}{3} s_z, \frac{2}{3} \tau_{xy}, \frac{2}{3} s_y \right\}$$

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_y} = \left\{ \frac{2}{3} s_z, \frac{s_y - s_x - s_z}{3}, \frac{2}{3} \tau_{xy}, \frac{2}{3} s_x \right\}$$

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \tau_{xy}} = \left\{ \frac{2}{3} \tau_{xy}, \frac{2}{3} \tau_{xy}, -2 s_z, -\frac{4}{3} \tau_{xy} \right\}$$

$$\frac{\partial \langle a_3 \rangle}{\partial \sigma_z} = \left\{ \frac{2}{3} s_y, \frac{2}{3} s_x, -\frac{4}{3} \tau_{xy}, \frac{s_z - s_y - s_x}{3} \right\}$$

4.2.2 - Modelo para o concreto fissurado

Provalmente a principal característica do comportamento do concreto simples é sua baixa resistência à tração comparada com sua resistência à compressão. Deste fato, resulta

o aparecimento de fissuras para tensões muito baixas, induzindo um acentuado comportamento não-linear à estrutura.

Os modelos para o concreto fissurado geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissura.

No contexto dos elementos finitos, basicamente duas aproximações têm sido usadas para representar este fenômeno[36].

a) Modelo de fissuras discretas: Este modelo representa as fissuras individuais como descontinuidades reais na malha de elementos finitos. Esta aproximação foi usada por Ngo e Scordelis [43] para análise de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada. Neste estudo, as fissuras foram modeladas por separação dos pontos nodais, inicialmente ocupando a mesma posição no espaço. Uma restrição a este modelo é que as fissuras devem formar-se ao longo do contorno dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha. Além disto, após a formação da fissura a topologia da malha varia, exigindo procedimentos de atualização desta, que consomem muito tempo computacional. Mais recentemente, tem sido usado refinamentos da malha através de métodos auto-adaptativos, de forma que novos elementos de fronteira são inseridos ao longo da propagação das fissuras. Estes desenvolvimentos reduzem a dependência da malha, mas tornam a análise muito cara. Por isso, este modelo é apropriado apenas para problemas envolvendo somente poucas fissuras dominantes.

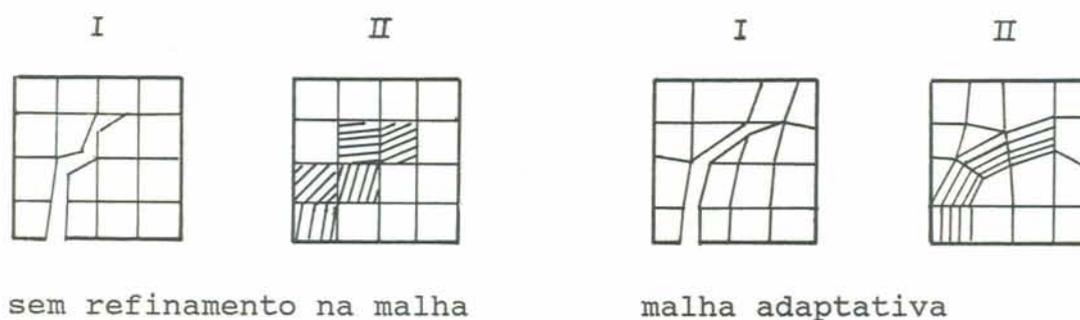
b) Modelo de fissuras distribuídas: Este modelo não leva em conta a descontinuidade da malha. Pelo contrário, o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades materiais são modificadas para considerar o dano devido a fissuração. O concreto é inicialmente isotrópico, mas a fissura induz-lhe anisotropia. Depois de fissurado, admite-se que o concreto torna-se ortotrópico, com os eixos materiais principais orientados no sentido das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo de elasticidade longitudinal é reduzido na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido. O método de

fissuras distribuídas (smeared crack) é computacionalmente atrativo, uma vez que a topologia da malha não muda ao longo da análise, e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

Esta aproximação foi utilizada para diversas aplicações de engenharia estrutural por Bazant [10], Cervenka [16], Campos Filho [15], Senzale [50], entre outros.

A Fig. 4.5 mostra os dois modelos descritos para representar as fissuras numa direção não conhecida "a priori".

Um modelo de fissuras distribuídas foi adotado neste trabalho. Para estabelecer tal modelo, são necessários os seguintes itens: um critério de fissuração; uma regra para consideração da colaboração do concreto entre fissuras (tension stiffening); e um modelo para transferência de tensões tangenciais (shear transfer).



I - fissuras discretas
II - fissuras distribuídas

Figura 4.5 - Modelos para representar as fissuras

4.2.2.1 - Critério de fissuração

A resposta do concreto sob tensões de tração é suposta ser elástica linear até que a superfície de ruptura seja atingida, e seu comportamento é calculado pela versão isotrópica da relação $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$.

A avaliação da fissuração do concreto, no programa desenvolvido neste trabalho, é feita através do nível de tensões dos pontos de integração de Gauss dos elementos de concreto.

Verifica-se, desta forma, se o estado de tensão, correspondente a cada ponto de integração, alcançou a superfície de ruptura, apresentada no item 4.2.1.1.

A tensão principal σ_1 de tração, é determinada através dos invariantes de tensões I_1, J_2, θ , [(4.5) e (4.6)]

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.21)$$

Para distinguir se o ponto atingiu a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto no boletim do CEB [24]:

se $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração fissurou;

se $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal a tensão σ_1 . Portanto o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais.

Para carregamentos posteriores, uma fissura secundária pode ocorrer no ponto de integração que estava fissurado em uma direção. Utiliza-se o chamado procedimento da fissura fixa, onde mantém-se a direção da primeira fissura fixa e determina-se a tensão de tração na direção paralela a fissura existente. Se esta tensão exceder a resistência do concreto à tração, este ponto de integração será considerado fissurado nas duas direções e todas as componentes de tensão serão zeradas.

4.2.2.2 - Colaboração do concreto entre fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto estrutural é fortemente influenciado pela interação entre seus

dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre esses materiais é que torna possível a transmissão de esforços atuantes.

O efeito de aderência evidencia-se a partir da fissuração do concreto. Quando este fato ocorre, há uma ruptura local do material e suas tensões de tração normais à fissura, que eram inicialmente transmitidas pelo concreto, passam a ser transmitidas pela armadura. Esta transferência de tensões do concreto para o aço é feita pelos mecanismos de aderência [15].

A qualidade da aderência é decisiva para a distribuição e para a abertura de fissuras. Ela depende das características das barras da armadura (conformação superficial e diâmetro), da resistência do concreto, da história de carga (especialmente se ocorreram cargas cíclicas) e das tensões normais à superfície da barra.

A incorporação da aderência nos cálculos através do método dos elementos finitos, depende da forma de conectar os elementos de aço aos elementos de concreto. Existem duas maneiras para se modelar esta ligação. Na primeira, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modeladas por suas relações tensões-deslizamentos. Na segunda maneira, os elementos de aço e concreto são ligados diretamente. Neste caso, admite-se completa compatibilidade de deformações entre aço e concreto, e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerarem-se os mecanismos de interação.

A escolha da forma de modelar a aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer grande esforço computacional. Portanto, seu emprego só se justifica nos casos em que as tensões de aderência são de particular interesse, como no estudo de zonas de ancoragem.

Neste trabalho, admitiu-se aderência perfeita entre concreto e aço e modelou-se indiretamente este efeito, pela introdução de um ramo descendente suave na relação tensão-deformação do concreto tracionado (tension stiffening).

Este efeito pode ser incorporado num modelo computacional de duas maneiras indiretas: modificando a curva

tensão-deformação do aço [33] ou admitindo que a perda da resistência à tração no concreto ocorre gradualmente depois da fissura [51]. Este último modelo foi adotado neste estudo.

Considera-se uma gráfico tensão-deformação consistindo de um ramo ascendente, correspondendo a resposta elástica linear, e outro ramo descendente, pós-fissura, que leva em conta a colaboração do concreto entre fissuras, conforme Fig. 4.6.

$$\sigma = \alpha f_{tm} \left(1 - \varepsilon/\varepsilon_m \right) \quad , \text{ para } \varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (4.22)$$

com $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$. Adotaram-se os valores de $\alpha = 0,6$ e $\varepsilon_m = 0,002$, conforme sugestão de Hinton e Owen [37].

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos ou carregamentos posteriores, pode forçar algum ponto previamente fissurado a fechar parcial ou totalmente. Este comportamento é permitido neste modelo. Se a deformação atual ε é menor do que a deformação máxima ε_{ref} alcançada pelo ponto em questão, a tensão normal a fissura é calculado por

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad , \text{ para } \varepsilon < \varepsilon_{ref} \quad (4.23)$$

Este caminho de "descarga" secante é visualizado pela Fig. 4.6. Caso o ponto fissure novamente, segue-se o mesmo caminho até ε_{ref} ser excedido. Depois a tensão é calculada por (4.22).

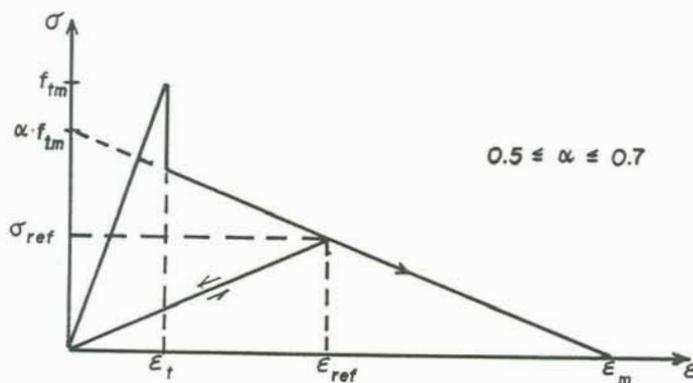


Figura 4.6 - Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado

Para obtenção da tensão no concreto fissurado, deve-se determinar as direções principais de deformações, uma vez que a fórmula (4.22) aplica-se no sistema local dos eixos materiais. Determinam-se as deformações principais através de

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta' + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{I'_1}{3} \\ \varepsilon_2 &= \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \theta' + \frac{I'_1}{3} \\ \varepsilon_3 &= \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \left(\theta' + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{I'_1}{3}\end{aligned}\quad (4.24)$$

onde

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]$$

$$J'_3 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_m) (\varepsilon_2 - \varepsilon_m) (\varepsilon_3 - \varepsilon_m)$$

$$\varepsilon_m = I'_1/3$$

$$\theta' = 1/3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(- \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J'_3}{J'^{3/2}_2} \right)\quad (4.25)$$

Calcula-se, então, a direção da máxima deformação principal de tração, que forma um ângulo α com o eixo x .

Feito isso, determinam-se as componentes locais de

tensões através da matriz de rotação local

$$R^L = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & (\sin 2\alpha)/2 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -(\sin 2\alpha)/2 \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e

$$\{\sigma^L\} = [R^L] \{\sigma^G\}$$

onde $\{\sigma^G\}$ são as componentes globais de tensões.

No sistema local, aplicam-se as fórmulas (4.22) ou (4.23), para calcular as tensões normais. A componente tangencial local é $\tau_{xy}^L = G_c \gamma_{xy}^L$, onde G_c é o módulo de elasticidade transversal reduzido e será definido no próximo item. Com as tensões ajustadas do ponto fissurado, retomam-se as componentes de tensões no sistema global, onde a matriz de rotação global é

$$R^G = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ (\sin 2\alpha)/2 & -(\sin 2\alpha)/2 & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

e

$$\{\sigma^G\} = [R^G] \{\sigma^L\}$$

4.2.2.3 - Rigidez transversal do concreto fissurado

Resultados experimentais indicam que uma quantidade considerável de tensão tangencial pode ser transferida através das superfícies rugosas da fissura [38]. Em concreto simples, o principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados e as principais variáveis envolvidas são o tamanho do agregado e sua granulometria. Em concreto estrutural, o efeito de pino desempenha um importante papel, sendo as principais variáveis a taxa de armadura, o tamanho da barra e o ângulo entre o aço e a fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura das fissuras, sendo a

capacidade de transferência de corte reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Uma aproximação simplificada para contornar este problema é adotar um valor apropriado para o módulo de elasticidade transversal do concreto G_c . Para o ponto de integração, fissurado em uma direção [37],

$$G_c = 0,25 G \left(1 - \varepsilon / 0,004 \right) \quad (4.28)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado. Se a fissura fechar o módulo G é adotado, novamente.

4.3 - Modelo constitutivo para o aço

Nas peças de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços na sua direção. Desta forma, é suficiente conhecer o seu comportamento uniaxial.

No modelo implementado, o aço é representado por um diagrama tensão-deformação bilinear.

O aço é considerado um material elastoplástico com endurecimento. Admite-se que o aço possui o mesmo comportamento em compressão e tração.

4.3.1 - Armadura passiva

O módulo de elasticidade longitudinal adotado para o aço E_s é 210000 MPa. Para as barras de aço da classe A, com

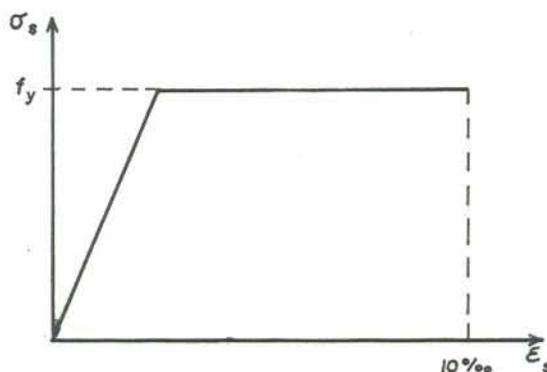


Figura 4.7 - Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A

dureza natural, adotou-se um diagrama elastoplástico perfeito, onde o material possui um comportamento elástico linear até atingir a tensão de escoamento f_y (Fig. 4.7). Após este limite, o aço deforma-se plasticamente até atingir a ruptura, com tensão $\sigma_s = f_y$ e endurecimento nulo ($H'_s = 0$).

O aço da classe B, encruado a frio, possui comportamento elastoplástico com endurecimento. Por simplificação, adotou-se um diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, conforme Fig. 4.8. Desta forma, após atingir o limite de escoamento, as deformações no aço tem um endurecimento definido por

$$H'_s = \frac{d \sigma_s}{d \varepsilon_p} = \frac{\Delta \sigma_s}{\Delta \varepsilon_p} = \frac{0,15 f_y}{\left(10\% - \frac{0,85 f_y}{E_s} \right) - \frac{0,15 f_y}{E_s}}$$

$$H'_s = \frac{0,15 f_y}{10\% - \frac{f_y}{E_s}} \quad (4.29)$$

4.3.2 - Armadura protendida

Adotou-se para o aço de protensão, o valor de 205000 MPa para o módulo de elasticidade longitudinal. Tanto para os

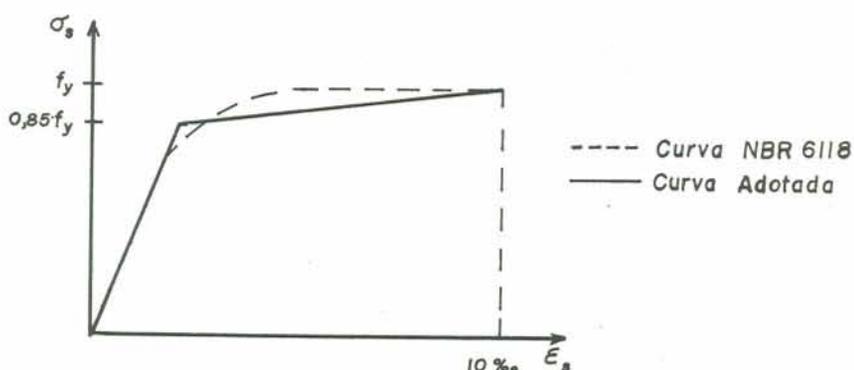


Figura 4.8 - Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B

cabos de baixa relaxação, quanto para os de relaxação normal, o diagrama tensão-deformação tem a mesma forma que o do aço tipo B.

5 - PROPRIEDADES DO CONCRETO E DO AÇO DEPENDENTES DO TEMPO

5.1 - Fluência e retração do concreto

O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida a fluência (creep), que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Fig. 5.1.

Este fenômeno manifesta-se mais acentuadamente nas idades imediatamente posteriores ao aparecimento das tensões, estando ligado a fenômenos de diversos tipos, relacionados com a circulação de água na massa do concreto e sua dissipação para o exterior.

Uma peça de concreto, colocada ao ar livre, sofre durante o processo de endurecimento uma diminuição de volume, denominada retração (shrinkage), conforme visto na Fig. 5.2. Esta deformação ao longo do tempo é independente da tensão aplicada e está ligada a fenômenos semelhantes aos da fluência, relacionados com a água que em parte hidrata os componentes do cimento e, em parte fica livre dentro da massa de concreto.

No estudo de estruturas de concreto, a consideração das deformações por fluência e retração é importante, pois seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão.

A fluência e a retração dependem, entre outros fatores, da umidade e da temperatura ambiente, das dimensões da peça, da composição do concreto e da velocidade de endurecimento do cimento.

A fluência e a retração do concreto não dependem da resistência à compressão ou da idade do carregamento por si só, e sim da sua composição e seu grau de hidratação. Ambas aumentam com a relação água/cimento e a quantidade de cimento e diminuem

com o grau de hidratação do cimento.

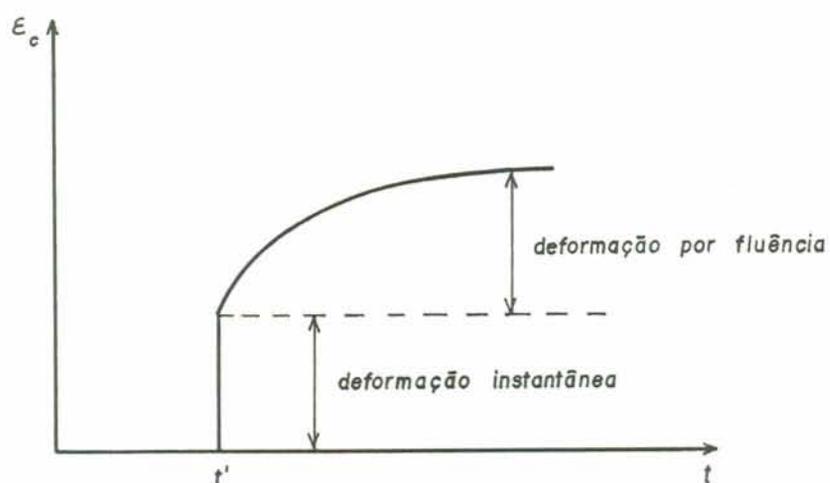


Figura 5.1 - Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em t'

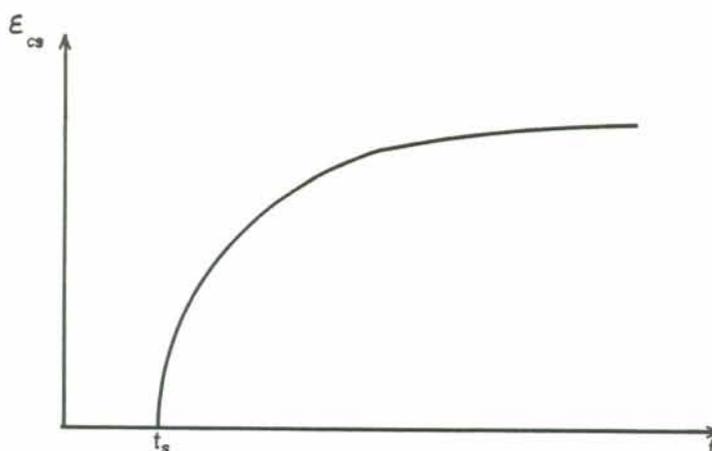


Figura 5.2 - Curva de deformação por retração

5.2 - Inclusão da fluência no modelo

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento dependente do tempo do concreto, foi uma cadeia de elementos Maxwell (Fig. 5.3). Esta cadeia é constituída por uma associação em paralelo de elementos compostos por uma mola em série com um amortecedor viscoso.

Este modelo pode ser obtido do modelo elasto-visco-

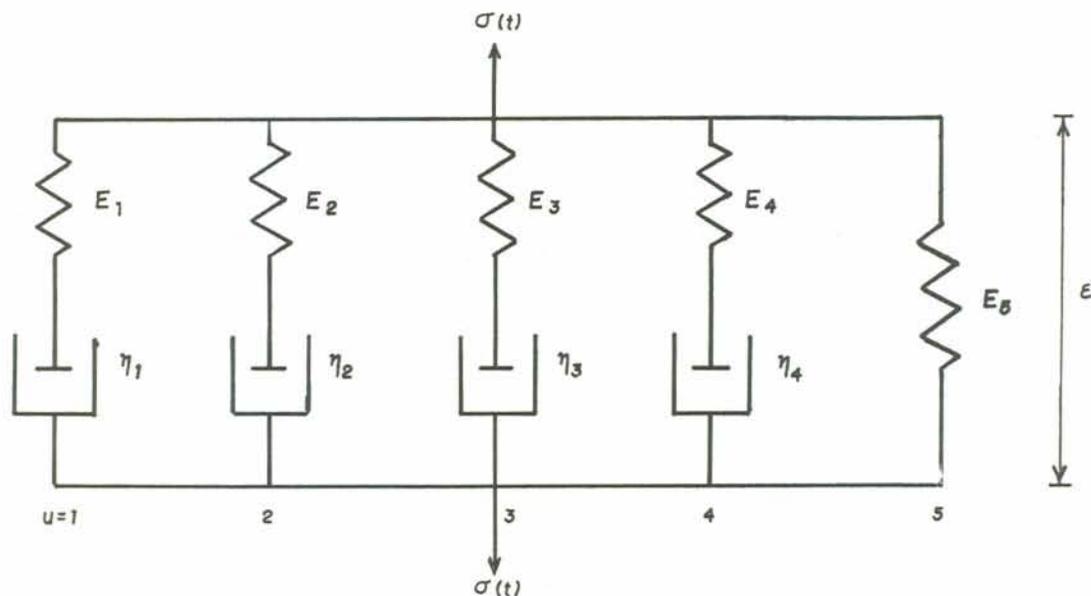


Figura 5.3 - Modelo de cadeias de Maxwell

plástico (Fig. 1.6), admitindo-se que os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula. As molas da unidade μ da cadeia têm módulos de elasticidade $E_\mu(t)$, dependentes da idade t do concreto. Os amortecedores são caracterizados pelos coeficientes de viscosidade dados por

$$\eta_\mu = E_\mu \tau_\mu \quad (5.1)$$

onde

τ_μ é o tempo de relaxação da unidade, considerado constante no tempo.

Bazant [13] desenvolveu um modelo deste tipo para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto, sob baixos níveis de tensão. Além disso, apresenta um algoritmo [7] para determinação dos parâmetros do modelo ($E_\mu(t)$, $\eta_\mu(t)$), para cada idade, a partir de dados de ensaios ou informações de normas para estruturas de concreto.

O comportamento viscoelástico de um material é dito linear [28], quando para uma história de tensões

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \quad (5.2)$$

obtém-se uma história de deformações

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad (5.3)$$

onde $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$ são as histórias de deformações relacionadas com as arbitrarias histórias de tensões $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$ (princípio da superposição).

Segundo [23], para tensões de serviço menores que $0,4f_{cm}$ (resistência à compressão média do concreto), as deformações por fluência são proporcionais a tensão. Neste estudo, por trabalhar-se nesta faixa de tensões, adotou-se este comportamento linear.

5.2.1 - Formulação matemática do modelo de Maxwell

Neste trabalho, utiliza-se o modelo desenvolvido por Bazant [13] e aplicado por [31]. Este modelo de cadeias de elementos Maxwell é interessante para uma formulação em elementos finitos com integração por intervalos de tempo, pois torna desnecessária a armazenagem de toda história de tensões, diminuindo o custo computacional da análise.

Conforme o modelo reológico da Fig. 5.3, empregou-se cinco elementos para compor a cadeia. Os tempos de relaxação de cada unidade, de acordo com a faixa de tempo que se deseja cobrir após a aplicação da carga, são obtidos por

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \tau_1, \quad \mu=1, \dots, 4 \quad (5.4)$$

com

$$\tau_1 = 1 \quad \text{e} \quad \tau_5 = 10^{30}$$

Na unidade $\mu = 5$, tem-se um elemento composto só por uma mola, a fim de tornar a deformação assintoticamente convergente para uma certa data, conforme o comportamento real do concreto.

A tensão é dada por

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^5 \sigma_{\mu}(t) \quad (5.5)$$

onde $\sigma_{\mu}(t)$ representa a tensão no tempo de cada unidade μ da cadeia Maxwell.

A equação diferencial, que representa as relações constitutivas para o elemento Maxwell, é

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_{\mu}}{E_{\mu}} + \frac{\sigma_{\mu}}{\eta_{\mu}} \quad (5.6)$$

cuja solução é

$$\sigma_{\mu}(t, t') = \sigma_1 e^{-(t-t')/\tau_{\mu}} \quad (5.7)$$

A função de relaxação do modelo será a tensão resultante de uma deformação unitária, imposta em $t=t'$ e mantida constante para $t>t'$, dos elementos da cadeia Maxwell e dada por

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^5 E_{\mu}(t') e^{-(t-t')/\tau_{\mu}} \quad (5.8)$$

Esta equação representa o desenvolvimento da função de relaxação $R(t, t')$ em séries de exponenciais reais, chamadas séries de Dirichlet. A determinação dos termos $E_{\mu}(t')$ desta função de relaxação R , pode ser feita a partir de pontos discretos de uma função de relaxação $\tilde{R}(t_1, t')$, onde t_1 representa os pontos discretos em que \tilde{R} é conhecida.

5.2.1.1.- Conversão da função de fluência em função de relaxação

Os pontos discretos $\tilde{R}(t_1, t')$ são obtidos geralmente a partir da função de fluência $J(t, t')$, através da resolução numérica da equação integral de Volterra, para uma história conhecida de deformações,

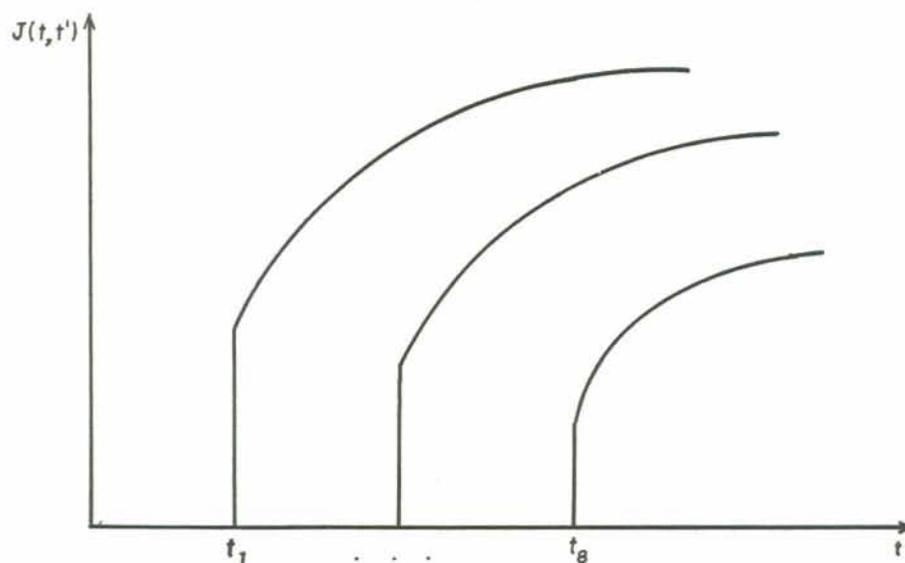


Figura 5.4 - Curvas da função de fluência para diversas datas de carregamento

$$J(t, t') E(t') + \int J(t, \bar{t}) \frac{\partial R(\bar{t}, t')}{\partial \bar{t}} d\bar{t} = 1 \quad (5.9)$$

A função de fluência $J(t, t')$ pode ser obtida por ensaios de laboratório ou por expressões analíticas de normas, como é o caso deste trabalho. Os pontos discretos $\tilde{R}(t_1, t')$ poderiam também ser obtidos diretamente de ensaios de laboratório.

Para determinação de $\tilde{R}(t_1, t')$ necessita-se conhecer $J(t, t')$ para qualquer idade do carregamento t' e durações de carga $(t-t')$, dentro da faixa de tempo considerada. Para tanto, são necessárias somente algumas curvas de fluência (Fig. 5.4).

Para conversão de $J(t, t')$ em $\tilde{R}(t_1, t')$ deve-se subdividir o tempo t em tempos discretos t_1, t_2, \dots, t_N em N intervalos de tempo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=2, 3, \dots, N$). É conveniente fixar $t'=t_1$, pois em ensaios de fluência com tensão constante o primeiro incremento de deformação no tempo t' é instantâneo, isto é, $\Delta t_1=0$. Usando uma regra trapezoidal para aproximar a integral (5.9), sua solução fica

$$\Delta \tilde{R}_i = - \left(J_{i,i} + J_{i,i-1} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \tilde{R}_j \left(J_{i,j} + J_{i,j-1} - J_{i-1,j} - J_{i-1,j-1} \right) \quad (5.10)$$

com

$$J_{i,j} = J(t_i, t_j)$$

$$\Delta \tilde{R}_1 = E(t') = \text{valor inicial}$$

e

$$\tilde{R}(t_i, t') = \tilde{R}(t_{i-1}, t') + \Delta \tilde{R}_i \quad (5.11)$$

Desta forma conhecendo os valores de $J(t, t')$ para quaisquer valores de t' e $t-t'$ dentro da faixa de tempo considerada, obtêm-se os respectivos valores de $\tilde{R}(t_i, t')$ nos N tempos discretos. Entre os valores de t' e $t-t'$ a função J varia linearmente com $\log(t')$ e $\log(t-t')$.

Os valores $(t-t')$ de durações de carga foram escolhidos por uma razão constante crescente, em escala logarítmica, do tipo

$$(t_i - t') = 10^{1/10} (t_{i-1} - t') \quad (5.12)$$

onde

$$(t_1 - t') = 3,525 \text{ dias}$$

$$(t_{30} - t') = 2224,12 \text{ dias}$$

desta forma, tem-se três décadas em $\log(t-t')$ com dez passos por década. E, para as idades t' de carregamento, adotou-se uma faixa de tempo considerada de boa precisão com respeito à dispersão dos dados de fluência, de forma que

$$t'_i = 10^{1/2} t'_{i-1} \quad (5.13)$$

e

$$t'_1 = 2,8 \text{ dias}$$

$$t'_8 = 8854,28 \text{ dias}$$

ou seja, quatro décadas em $\log(t')$ com dois passos por década.

5.2.1.2 - Determinação de $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$

A equação da curva de relaxação, para uma idade t' , pode ser determinada pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos \tilde{R} . A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[R(t_i, t') - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 + \pi \quad (5.14)$$

Sendo π o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por

$$\pi = w_1 \sum_{i=1}^3 \left(E_{\mu+1} - E_\mu \right)^2 + w_2 \sum_{i=1}^2 \left(E_{\mu+2} - 2 E_{\mu+1} + E_\mu \right)^2 \quad (5.15)$$

sendo $w_1 = 0,01$ e $w_2 = 0,08$ os pesos adotados para o termo residual.

Substituindo a função de relaxação (5.8), na equação (5.14), sem o termo residual, tem-se

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 E_\mu(t') e^{-(t_i - t')/\tau_\mu} - \tilde{R}(t_i, t') \right]^2 \quad (5.16)$$

As incógnitas $E_\mu(t')$ são obtidas das condições de minimização

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_{\mu}} = 0 \quad , \quad \mu=1, \dots, 5 \quad (5.17)$$

As equações (5.17) formam um sistema de cinco equações e cinco incógnitas. A resolução deste sistema conduz a valores positivos de $E_{\mu}(t')$, pois a inclinação da curva de relaxação é sempre positiva. Desenvolvendo a equação j deste sistema (5.17),

$$\sum_{i=1}^{30} \left[\sum_{\mu=1}^5 e^{-\left(\frac{t_i-t'}{\tau_{\mu}} + \frac{t_i-t'}{\tau_j}\right)} \right] E_{\mu}(t') = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i-t') e^{-\left(\frac{t_i-t'}{\tau_j}\right)} \quad (5.18)$$

que sob forma matricial fica : $[A] \{E\} = [B]$

Sendo que os elementos deste sistema são os seguintes

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{t_i-t'}{\tau_k} + \frac{t_i-t'}{\tau_j}\right)} \quad , \quad k, j=1, \dots, 5$$

$$E_j = E_j(t')$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{30} \tilde{R}(t_i-t') e^{-\left(\frac{t_i-t'}{\tau_j}\right)} \quad (5.19)$$

Introduzindo-se o termo residual π nas equações (5.17), os elementos A_{jk} da matriz $[A]$ devem ser corrigidos da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= A_{1,1} + w_1 + w_2 & A_{3,1} &= A_{3,1} + w_2 \\ A_{1,2} &= A_{1,2} - w_1 - 2w_2 & A_{3,2} &= A_{3,2} - w_1 - 4w_2 \\ A_{1,3} &= A_{1,3} + w_2 & A_{3,3} &= A_{3,3} + 2w_1 + 5w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &= A_{2,1} - w_1 - 2w_2 & A_{3,4} &= A_{3,4} - w_1 - 2w_2 \\
A_{2,2} &= A_{2,2} + 2w_1 + 5w_2 & A_{4,3} &= A_{4,3} - w_1 - 2w_2 \\
A_{2,3} &= A_{2,3} - w_1 - 4w_2 & A_{4,4} &= A_{4,4} + w_1 + w_2 \\
A_{2,4} &= A_{2,4} + w_2 & &
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Resolvendo o sistema (5.17), determinam-se os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell $E_\mu(t')$ para os valores de t' nos quais são dados os pontos discretos $\tilde{R}(t_i, t')$. Os valores de E_μ , para qualquer idade t , são interpolados pela expressão

$$E_\mu(t) = \left\{ E_\mu(t'_{i-1}) \left[\log(t'_i) - \log(t) \right] + E_\mu(t'_i) \left[\log(t) - \log(t'_{i-1}) \right] \right\} / \left[\log(t'_i) - \log(t'_{i-1}) \right] \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
i &= 2, \dots, 8 \\
\mu &= 1, \dots, 5
\end{aligned}$$

Conhecidos os valores E_μ para as cinco camadas, obtêm-se os respectivos coeficientes de viscosidade, através da relação (5.1). Assim sendo, determinam-se, através deste modelo, $E_\mu(t)$ e $\eta_\mu(t)$ para qualquer idade t do concreto na fase viscoelástica.

5.3 - Determinação dos parâmetros da função de fluência pelo CEB-FIP 1990

5.3.1 - Equação básica

Como foi visto no item anterior, para obtenção da função de relaxação $R(t, t')$, necessita-se saber alguns valores da função de fluência $J(t, t')$. Neste estudo, adotou-se a formulação apresentada pelo Código Modelo do CEB [23], em que a função de fluência, para uma tensão constante menor do que $0,4f_{cm}$ e aplicada no tempo t' , é dada por

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\phi(t, t')}{E_c} \tag{5.22}$$

onde

$J(t, t')$ é a função de fluência, que representa a deformação na idade t , causada por uma tensão unitária atuando a partir do tempo t' ;

$E_c(t')$ é o módulo de elasticidade na idade t' (em dias) do carregamento;

$\phi(t, t')$ é o coeficiente de fluência ;

E_c é o módulo de elasticidade aos 28 dias, que pode ser calculado pela expressão

$$E_c = 2,15 \cdot 10^4 (f_{c_m}/10)^{1/3} \quad , \quad [f_{c_m}] = \text{MPa} \quad (5.23)$$

f_{c_m} é a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias. O valor de E_c deve ser aumentado de 20% se o concreto tiver agregados de basalto [23]. Para uma idade t' , o módulo de elasticidade será calculado por

$$E_c(t') = \beta_{cc}(t')^{0,5} E_c \quad (5.24)$$

com

$$\beta_{cc}(t') = \exp \left\{ s \left[1 - (28/t)^{0,5} \right] \right\} \quad (5.25)$$

onde s é um parâmetro que depende do tipo de cimento

$$s = \begin{cases} 0,20 & \text{para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial} \\ 0,25 & \text{para cimento de endurecimento rápido e normal} \\ 0,38 & \text{para cimento de endurecimento lento} \end{cases}$$

5.3.2 - Coeficiente de fluência

O coeficiente de fluência é calculado por

$$\phi(t, t') = \phi_0 \beta_c(t-t') \quad (5.26)$$

onde

ϕ_0 é o coeficiente de fluência nominal;

β_c é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo;

t' é idade de aplicação da carga;
 t a idade atual em dias do concreto.
 O coeficiente de fluência nominal é

$$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t') \quad (5.27)$$

com

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,46 (h/10)^3} \quad e \quad h = \frac{2A_c}{\mu} \quad (5.28)$$

RH é a umidade relativa do ar em [%];

h é a espessura fictícia em [cm];

A_c a área da seção transversal e μ o perímetro de contato com a atmosfera.

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/10)^{0,5}} \quad (5.29)$$

$$\beta(t') = \frac{1}{0,1 + (t')^{0,2}} \quad (5.30)$$

e

$$\beta_c(t-t') = \left[\frac{(t-t')}{\beta_H + (t-t')} \right]^{0,3} \quad (5.31)$$

com

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left(1,2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h}{10} + 250 \leq 1500 \quad (5.32)$$

5.3.3 - Efeito do tipo de cimento e variação da temperatura

No modelo apresentado acima, os efeitos do tipo de cimento e de variações da temperatura ao longo do tempo, sobre as deformações por fluência, são considerados através de

correções dos coeficientes e das funções descritas acima. Os efeitos de altas ou baixas temperaturas na maturidade do concreto devem ser considerados através do ajuste do tempo t' por

$$t' = t'_T \left[\frac{9}{2 + (t'_T)^{1/2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad (5.33)$$

com

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{para cimento de endurecimento rápido e alta resistên-} \\ & \text{cia inicial} \\ 0 & \text{para cimento de endurecimento rápido ou normal} \\ -1 & \text{para cimento de endurecimento lento} \end{cases}$$

$$t'_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp - \left[\frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)} - 13,65 \right] \quad (5.34)$$

onde

t'_T é o tempo ajustado devido a efeitos provocados por temperaturas diferentes de 20°C , compreendidas entre 0°C e 80°C ; $T(\Delta t_i)$ é a temperatura média atuante por um período Δt_i de dias. As correções nos coeficientes são

- correção do β_H

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T$$

$$\beta_T = \exp \left[\frac{1500}{273 + T} - 5,12 \right]$$

- correção do ϕ_{RH}

$$\phi_{RH} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1) \phi_T^{1/2}$$

$$\phi_T = \exp \left[0,015 (T - 20) \right]$$

5.4 - Inclusão da retração no modelo

As deformações por retração do concreto são tratadas como deformações impostas à estrutura. Para isto, determina-se um vetor de forças nodais equivalentes através da expressão

$$\Delta P_{cs} = \int_V [B]^T [\hat{D}] \{\Delta \varepsilon_{cs}\} dV \quad (5.35)$$

onde

$$\{\Delta \varepsilon_{cs}\} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{cs} \\ \Delta \varepsilon_{cs} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

A exemplo da fluência, a retração não produz diretamente tensões no concreto. Por isso, para avaliação da tensão no concreto, desconta-se do valor da deformação total, obtida a partir do vetor de deslocamentos, a parcela de deformação que foi originada diretamente pela retração.

5.5 - Determinação dos parâmetros de retração pelo CEB-FIP 1990

As deformações totais por retração ou expansão do concreto são calculadas, conforme [23] por

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cso} \beta_s(t - t_s) \quad (5.37)$$

onde

ε_{cso} é o coeficiente de retração nominal;

β_s é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo;

t é a idade do concreto em dias;

t_s é a idade de começo da retração no concreto em dias.

O coeficiente de retração nominal é obtido de

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (5.38)$$

com

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[160 + 10 \beta_{sc} \left(9 - f_{cm}/10 \right) \right] 10^{-6} \quad (5.39)$$

onde

β_{sc} é um coeficiente que depende do tipo de cimento

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 4 & \text{para cimento de endurecimento lento} \\ 5 & \text{para cimento de endurecimento rápido ou normal} \\ 8 & \text{para cimento de endurecimento rápido e alta resis-} \\ & \text{tência inicial} \end{cases}$$

e

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \left(\frac{RH}{100} \right)^3 & \text{para } 0\% \leq RH \leq 99\% \\ 0,25 & \text{para } RH > 99\% \end{cases} \quad (5.40)$$

O desenvolvimento da retração com o tempo é

$$\beta_s(t-t_s) = \left[\frac{t - t_s}{\alpha_{ST} + (t-t_s)} \right]^{0,5} \quad (5.41)$$

com $\alpha_{ST} = 350 (h^2/10)$

Os efeitos da variação da temperatura são também levados em conta no cálculo da deformação por retração, através de correções tais como,

$$\alpha_{ST} = 350 (h/10)^2 \exp \left[-0,06 (T-20^\circ\text{C}) \right] \quad (5.42)$$

onde

α_{ST} é o coeficiente dependente da temperatura na equação (5.41). A correção no coeficiente de retração nominal fica,

$$\beta_{RH,T} = \beta_{RH} \beta_{ST}$$

com

$$\beta_{ST} = 1 + \left(\frac{8}{103 - RH} \right) \left(\frac{T - 20}{40} \right) \quad (5.43)$$

As equações (5.42) e (5.43) descrevem o efeito de uma temperatura constante diferente de 20°C, enquanto o concreto está endurecendo.

5.6 - Relaxação do aço protendido

Na fase viscoelástica, a armadura protendida sofre um processo de relaxação. Para ajustar os resultados disponíveis ao modelo, o parâmetro de fluidez γ_s para o aço é suposto variável com o tempo. Para a armadura passiva $\gamma_s = 0$.

A relaxação do aço é calculada através dos coeficientes ψ_{60} , ψ_{70} , ψ_{80} . Estes coeficientes são o resultado de medidas da tensão após 1000 horas, a 20°C, de amostras de aço, mantidas com comprimento constante e submetidas inicialmente a tensões de tração de, respectivamente, 60%, 70% e 80% da tensão de ruptura característica f_{ptk} . Conhecidos os três valores de ψ , é possível encontrar uma parábola, que passa pelos três pontos, em um gráfico de ψ em função da razão da tensão inicial de protensão σ_{po} e da tensão de ruptura do aço f_{ptk} [54], conforme mostra a Fig. 5.5.

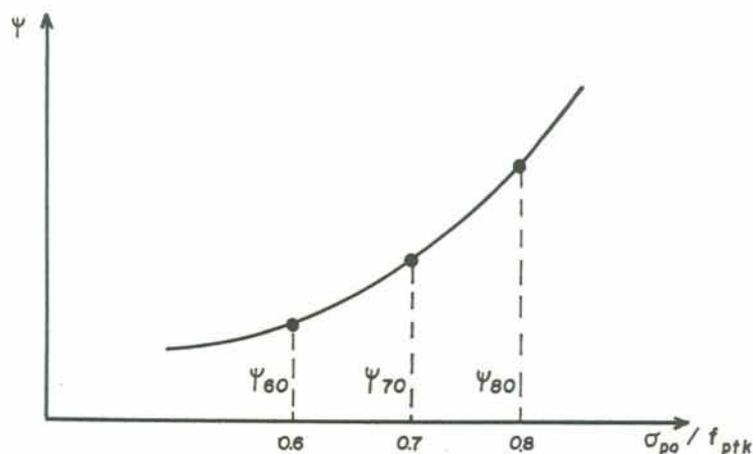


Figura 5.5 - Curva para os coeficientes de relaxação

$$\psi = \rho_{1000} = a \left(\frac{\sigma_{po}}{f_{ptk}} \right)^2 + b \left(\frac{\sigma_{po}}{f_{ptk}} \right) + c \quad (5.44)$$

onde

$$a = 50\psi_{60} - 100\psi_{70} + 50\psi_{80}$$

$$b = -75\psi_{60} + 140\psi_{70} - 65\psi_{80}$$

$$c = 28\psi_{60} - 48\psi_{70} + 21\psi_{80}$$

sendo

TIPO DE AÇO	$\psi_{60}(\%)$	$\psi_{70}(\%)$	$\psi_{80}(\%)$
relaxação normal	4,5	7	12
relaxação baixa	1,5	2,5	3,5

A relaxação do aço, conforme [2], é dada por

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{t}{1000} \right)^k \quad (5.45)$$

t é o tempo em horas e

$$k = \begin{cases} 0,12 & \text{para relaxação normal} \\ 0,19 & \text{para relaxação baixa} \end{cases}$$

Passando a equação (5.45) para t em dias, fica

$$\rho_t = \rho_{1000} \left(\frac{3t}{125} \right)^k \quad (5.46)$$

Com a função de relaxação, dada para um elemento Maxwell,

$$R(t, t_p) = E_s e^{-\frac{(t-t_p)\gamma_s E_s}{\rho_s}} \quad (5.47)$$

onde t_p é a data, em dias, de aplicação da força de protensão,

comparando-se com a equação (5.46), tem-se

$$E_s e^{-(t-t_p)\gamma_s E_s} = E_s \left[1 - \rho_{1000} \left(\frac{3(t-t_p)}{125} \right)^k \right] \quad (5.48)$$

Desta forma, o parâmetro de fluidez para o aço protendido, ao longo do tempo, pode ser tomado por

$$\gamma_s = - \frac{1}{(t-t_p) E_s} \ln \left[1 - \rho_{1000} \left(\frac{3(t-t_p)}{125} \right)^k \right] \quad (5.49)$$

6 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO

6.1 - Generalidades

Este trabalho consiste na elaboração de um programa computacional para análise elasto-viscoplástica de peças de concreto estrutural, utilizando o método dos elementos finitos.

No capítulo 2, apresentou-se um modelo para a análise elasto-viscoplástica de peças de um material homogêneo. Este modelo seria adequado para o estudo de peças de concreto simples.

Neste capítulo, será visto o desenvolvimento de uma formulação para incorporar a armadura a este modelo.

Também será detalhado o algoritmo geral de solução do programa, com suas distinções conforme a classe de aço empregada e a etapa de solução do problema (viscoelástica ou elastoplástica).

6.2 - Comportamento elasto-viscoplástico do aço

Considerando que exista aderência perfeita entre o concreto e o aço, admite-se que o deslocamento de um ponto qualquer da barra de aço é o mesmo do que o do concreto que a envolve. Sendo assim, pode-se escrever o desenvolvimento matemático do modelo elasto-viscoplástico para o aço de uma maneira incremental, similar ao feito no capítulo 2 para o concreto.

6.2.1 - Incrementos de tensão

Conhecidos os incrementos de deslocamentos nodais $\{\Delta u_n\}$, para o passo n de tempo, o incremento da tensão em um ponto de uma barra de aço será

$$(\Delta\sigma_s)_n = E_s (\Delta\varepsilon_e)_n = E_s \left[(\Delta\varepsilon_s)_n - (\Delta\varepsilon_{svp})_n \right] \quad (6.1)$$

onde o incremento da deformação total é

$$(\Delta\varepsilon_s)_n = \langle B_s \rangle \{ \Delta u_n \} \quad (6.2)$$

em que $\langle B_s \rangle$ é o vetor das relações deslocamentos-deformações para a armadura dada por (3.35).

O incremento de deformação viscoplástica, conforme visto em (2.6) é

$$(\Delta\varepsilon_{svp})_n = \Delta t_n \left[(1 - \theta) (\dot{\varepsilon}_{svp})_n + \theta (\dot{\varepsilon}_{svp})_{n+1} \right] \quad (6.3)$$

e a taxa de deformação viscoplástica é

$$(\dot{\varepsilon}_{svp})_{n+1} = (\dot{\varepsilon}_{svp})_n + (H_s)_n (\Delta\sigma_s)_n \quad (6.4)$$

onde H_s é um parâmetro que será visto no item 6.2.3. Substituindo (6.4) em (6.3)

$$(\Delta\varepsilon_{svp})_n = \Delta t_n (\dot{\varepsilon}_{svp})_n + \theta \Delta t_n (H_s)_n (\Delta\sigma_s)_n \quad (6.5)$$

Desta forma, pelas equações (6.1) e (6.5) tem-se

$$(\Delta\sigma_s)_n = (\hat{E}_s)_n \left[\langle B_s \rangle \{ \Delta u_n \} - \Delta t_n (\dot{\varepsilon}_{svp})_n \right] \quad (6.6)$$

sendo que o módulo de elasticidade longitudinal modificado para o aço é

$$(\hat{E}_s)_n = \frac{E_s}{1 + (C_s)_n E_s} \quad (6.7)$$

onde $(C_s)_n = \theta \Delta t_n (H_s)_n$ e a tensão total, no passo $n+1$, fica

$$(\sigma_s)_{n+1} = (\sigma_s)_n + (\Delta\sigma_s)_n \quad (6.8)$$

6.2.2 - Equações de equilíbrio

A equação (2.22), correspondente as forças residuais considerando a presença da armadura, fica

$$\begin{aligned} \{\psi\}_{n+1} = \{P\}_{n+1} - \int_V [B]^T \{\sigma_{n+1}\} dV - \\ \int_1 \{B_s\} (\sigma_s)_{n+1} A_s ds \end{aligned} \quad (6.9)$$

O vetor de pseudo-cargas, da equação (2.17), terá um acréscimo, dado por

$$\{\Delta V_s\}_n = \int_1 \{B_s\} (\hat{E}_s)_n A_s (\dot{\epsilon}_{svp})_n \Delta t_n ds \quad (6.10)$$

6.2.3 - Parâmetro H_s

A taxa de deformação viscoplástica para o aço é

$$(\dot{\epsilon}_{svp}) = \gamma_s \left[\sigma_s - \left(\sigma_y + H'_s \epsilon_{svp} \right) \right] = \gamma_s \left[\sigma_s - Y \right] \quad (6.11)$$

onde σ_y é a tensão de plastificação inicial e H'_s é o parâmetro de endurecimento do aço. Para solução pelo esquema implícito de passo de tempo, o parâmetro $(C_s)_n$ é necessário em cada passo, sendo função do parâmetro $(H_s)_n$. O parâmetro H_s é dado por

$$H_s = \frac{\partial \dot{\epsilon}_{svp}}{\partial \sigma_s} = \gamma_s \left[1 - \frac{\partial Y}{\partial \sigma_s} \right] \quad (6.12)$$

Na fase viscoelástica, $Y = 0$ e $H_s = \gamma_s$. Na fase elas-

toplástica, para o aço da classe A, $H_s = \gamma_s$ e para o da classe B e de protensão $H_s = 0$.

6.3 - Tipos de protensão

Por definição [2], uma peça de concreto protendido é aquela que está submetida a um sistema de forças especialmente e permanentemente aplicadas, chamadas forças de protensão e tais que, em condição de utilização, quando agirem simultaneamente com as demais ações, impeçam ou limitem a fissuração do concreto.

A armadura de protensão (armadura ativa) é constituída por barras ou fios isolados, por cordões (cordoalhas) formados por fios enrolados, ou feixes compostos, ou por fios, ou cordões paralelos e é comumente denominada cabo, qualquer que seja seu tipo.

Nesta armadura, existe uma tensão inicial variável ao longo do cabo e variável ao longo do tempo, devido a perdas ocorridas na protensão.

Neste trabalho implementou-se três modelos matemáticos distintos, conforme o tipo de protensão utilizado na peça de concreto protendido: pré-tração, pós-tração com e sem aderência.

6.3.1 - Pré-tração

O concreto protendido pré-traçado também é conhecido como concreto protendido com aderência inicial. É aquele em que o estiramento da armadura de protensão é feito utilizando-se apoios independentes da peça, antes do lançamento do concreto. A ligação da armadura de protensão com os referidos apoios é desfeita após o endurecimento do concreto. A ancoragem no concreto realiza-se só por aderência.

6.3.2 - Pós-tração com aderência

O concreto protendido pós-traçado com aderência é também chamado de concreto protendido com aderência posterior. Neste caso, o estiramento da armadura de protensão é realizado

após o endurecimento do concreto, utilizando-se, como apoios, partes da própria peça e criando, posteriormente, aderência com o concreto de modo permanente.

A armadura inexistente até o momento da protensão e está no interior de uma bainha metálica onde, após a protensão, é injetada nata de cimento para criar uma aderência com o concreto.

Depois da liberação do cabo, o esforço de protensão é transmitido à peça como uma carga externa de compressão variável no tempo devido a diversos fatores.

6.3.3 - Pós-tração sem aderência

O concreto protendido pós-traçado sem aderência é, às vezes, chamado simplesmente de concreto protendido sem aderência. É obtido como em 6.3.2, mas após o estiramento da armadura de protensão, não é criada aderência com o concreto.

A armadura fica livre dentro da bainha metálica e suas deformações não são acompanhadas pelas deformações do concreto adjacente. Assim, como na pós-tração com aderência, também ocorre o efeito de uma carga externa de compressão aplicada na peça.

6.4 - Perdas de protensão

A armadura de protensão sofre perdas imediatas e progressivas durante sua utilização.

As diversas perdas na armadura protendida estão ilustradas na Fig. 6.1.

6.4.1 - Perdas imediatas

As perdas imediatas são classificadas em perdas por deformação imediata do concreto, perdas por atrito e perdas por deslizamento da armadura na ancoragem e acomodação da ancoragem.

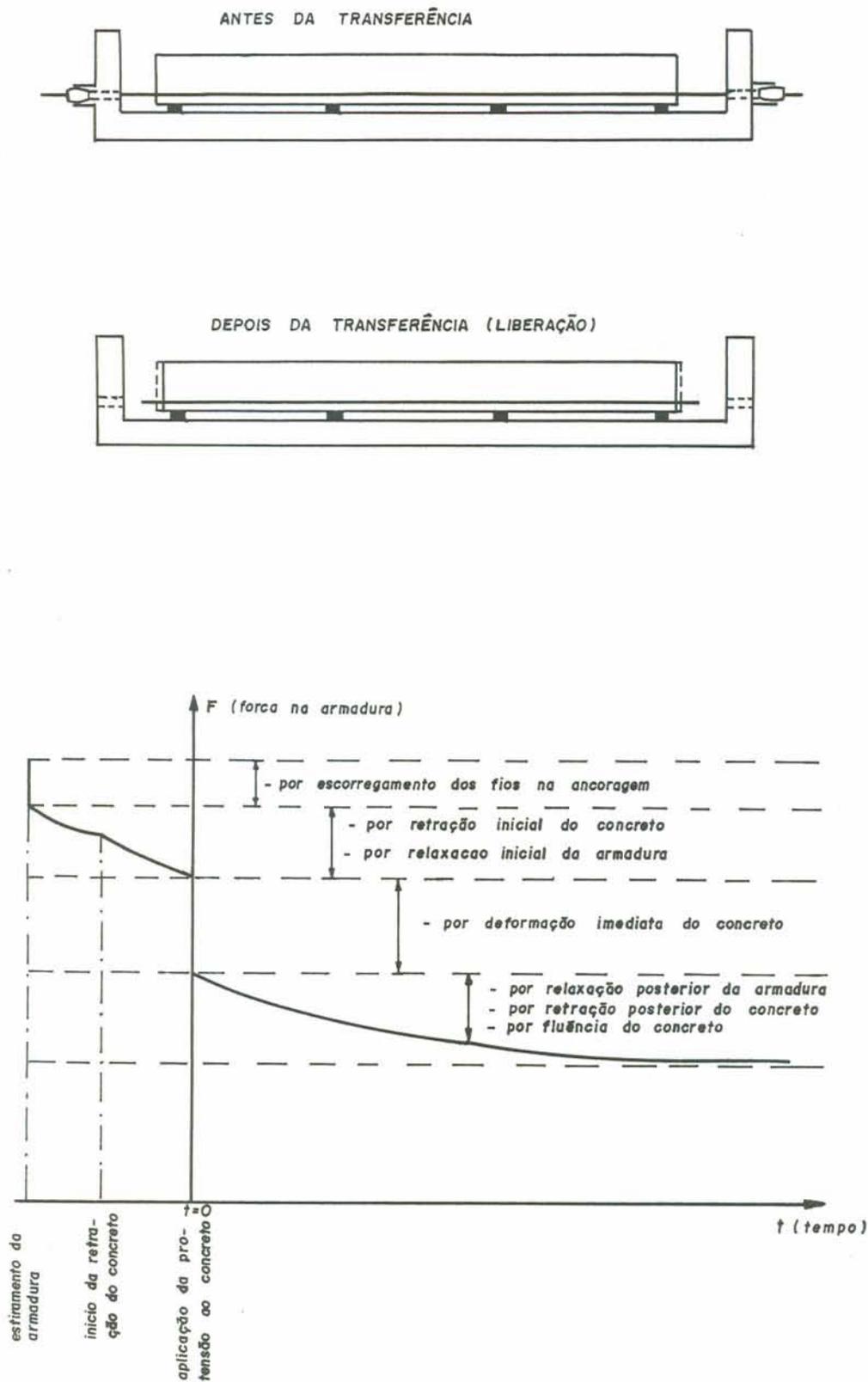


Figura 6.1.a - Perdas na pré-tração

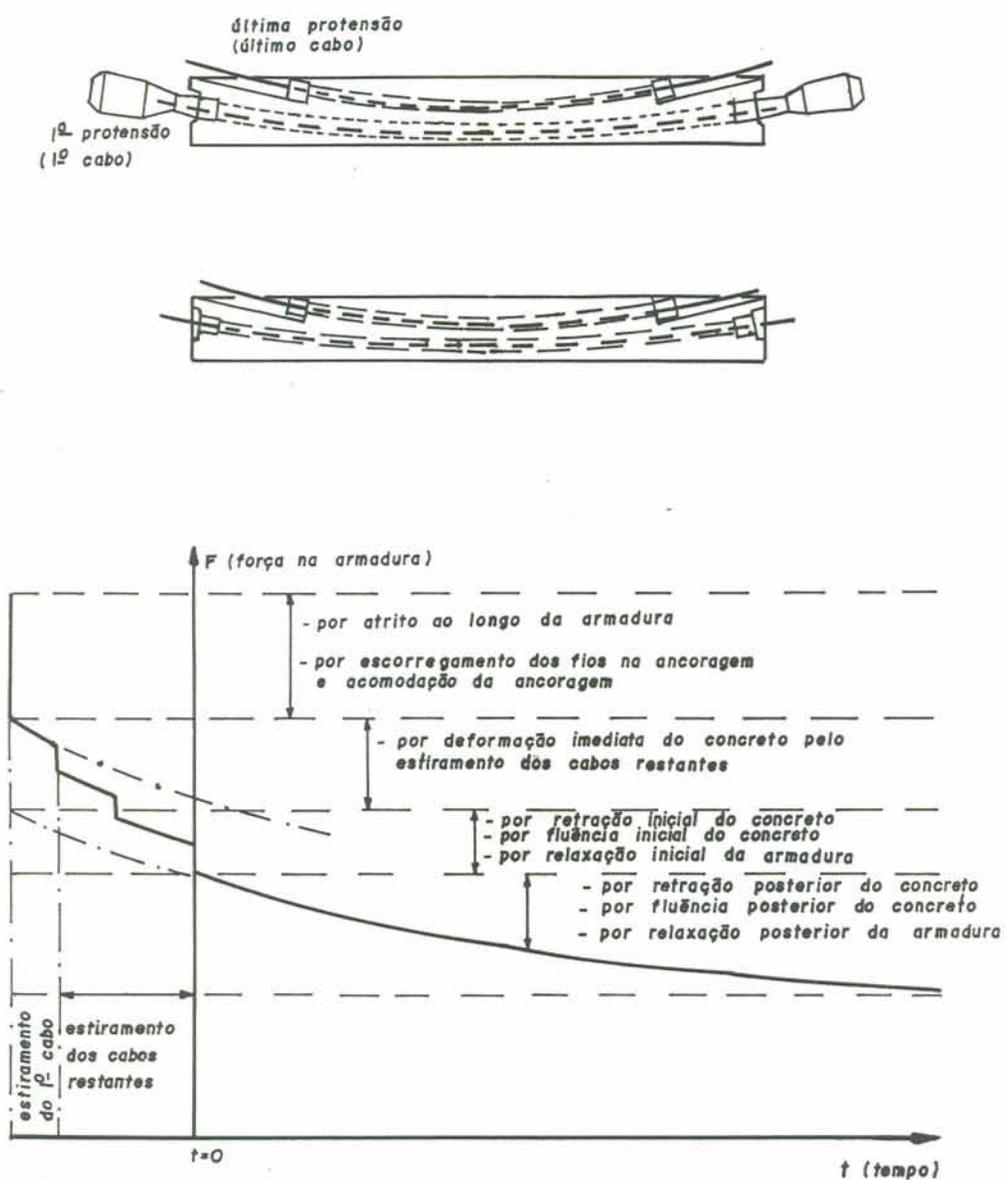


Figura 6.1.b - Perdas na pós-tração

6.4.1.1 - Perdas por deformação imediata do concreto

Nas peças pré-tracionadas, há uma queda de tensão na armadura antes da aplicação da protensão ao concreto (por retração e fluência do concreto e relaxação da armadura). Nas peças pós-tracionadas, a protensão sucessiva de cada um dos cabos provoca uma deformação imediata do concreto e, consequentemente, afrouxamento dos cabos anteriormente protendidos.

6.4.1.2 - Perdas por atrito

Conforme [54], a perda de tensão por atrito no aço é

$$\sigma_{po} = \sigma_{pi} e^{-\mu(\Delta\alpha + 0,0001s)} \quad (6.13)$$

sendo

σ_{po} a tensão inicial de protensão ($t=0$), num ponto qualquer ao longo do cabo;

σ_{pi} é a tensão de protensão aplicada na extremidade do cabo ($s=0$);

$\Delta\alpha$ é a deflexão geométrica total (ângulo de desvio);

s é a distância entre um ponto qualquer ao longo do cabo e a sua extremidade;

μ é o coeficiente de atrito dado por

$$\mu = \begin{cases} 0,50 & \text{para armadura e concreto em contato direto} \\ 0,30 & \text{contato entre armadura de barras ou fios com mossas} \\ & \text{ou saliências e bainha metálica} \\ 0,25 & \text{contato entre armadura de fios paralelos ou cordoa-} \\ & \text{lhas e bainha metálica} \end{cases}$$

No programa computacional, desenvolvido neste trabalho, a variação da tensão ao longo do cabo de protensão é verificada nos pontos de integração do aço. O ponto de integração do cabo, situado mais próximo do ponto de aplicação da carga de protensão, tem o comprimento $s=0$. O parâmetro $\Delta\alpha$ mede a variação da inclinação dos pontos de integração ao longo da barra em relação à inclinação do ponto de $s=0$ (Fig. 6.2). Para barras retas, $\Delta\alpha=0$.

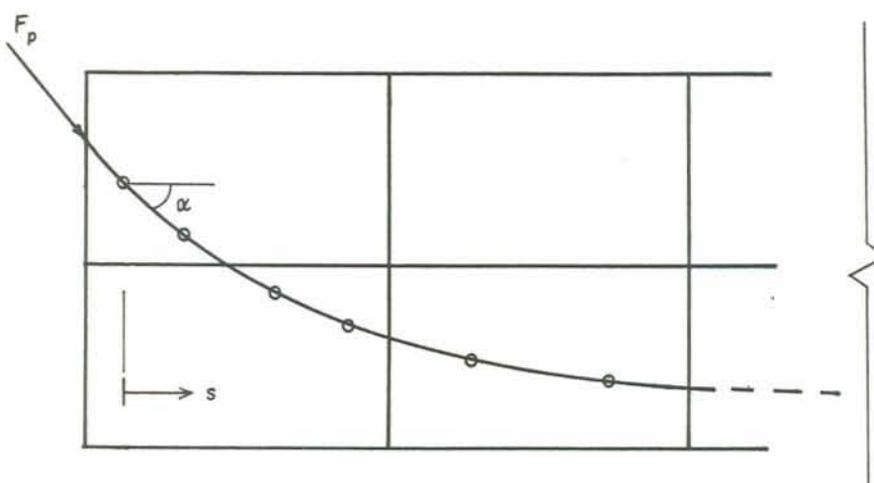


Figura 6.2 - Definição dos parâmetros s e $\Delta\alpha$

6.4.1.3 - Perdas por deslizamento da armadura na ancoragem e acomodação da ancoragem

Segundo Vasconcelos [54], não é possível executar uma ancoragem perfeita. Todas, mesmo aquelas baseadas na ação de parafusos, possuem folgas. Com a carga elevada que o cabo aplica à ancoragem, esta se deforma e durante esse processo há um pequeno retrocesso do cabo. Esse retrocesso depende de cada tipo de ancoragem e seu valor é fixado no catálogo de cada fabricante. Além disso, pode haver simultaneamente algum deslizamento do cabo, na própria ancoragem, antes de se efetivar seu agarramento por atrito ou por engrenamento no corpo da ancoragem. Esses deslizamentos são fixados por meio de medidas experimentais. Neste trabalho, supõe-se que nas forças de protensão aplicadas, as perdas desta natureza já tenham sido consideradas.

6.4.2 - Perdas progressivas

No decorrer do tempo, tanto o concreto quanto o aço sofrem deformações progressivas decorrentes da retração e fluência do concreto e relaxação do aço. As perdas de protensão correspondentes a estes fenômenos, abordados no

capítulo 5, são consideradas automaticamente no algoritmo proposto.

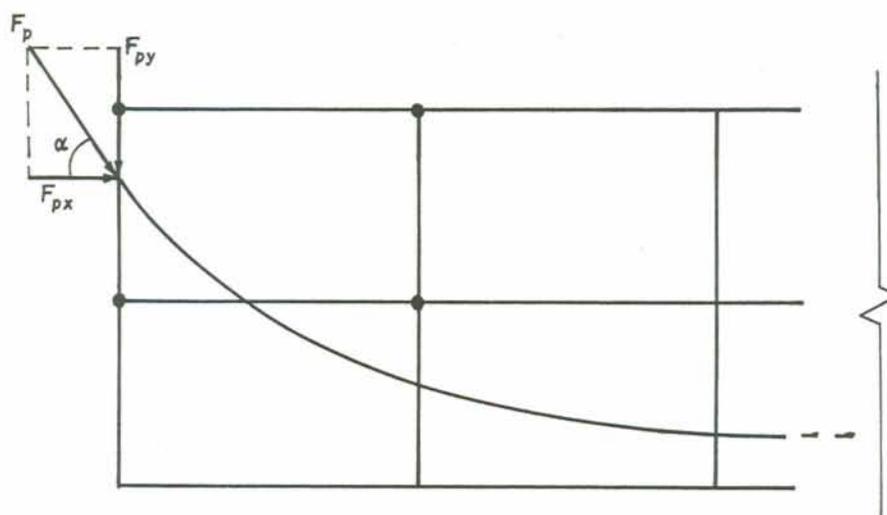


Figura 6.3 - Representação das forças nodais equivalentes devido à carga de protensão

6.5 - Força de compressão na pós-tração

Nas peças de concreto protendido pós-tracionadas, a força de protensão, aplicada na armadura pelo equipamento de tração, é transmitida à peça como uma carga externa de compressão, variável no tempo.

Esta carga aplicada é transformada em forças nodais equivalentes para o elemento de concreto correspondente, conforme Fig. 6.3. A força axial de compressão F_p , devido a barra protendida, é dada por

$$F_p = \sigma_{po} A_p \quad (6.14)$$

onde σ_{po} é a tensão inicial de protensão, no primeiro ponto de integração ($s=0$), e A_p é a área da seção transversal da armadura de protensão.

Esta força decomposta nas direções x e y fica

$$F_{px} = F_p \cos\alpha \quad (6.15)$$

$$F_{py} = - F_p \operatorname{sen}\alpha$$

As forças nodais equivalentes são

$$\begin{Bmatrix} (F_{px})_i \\ (F_{py})_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{px} \\ F_{py} \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

onde N_i é a função de forma para o nó i do elemento de concreto.

6.6 - Algoritmos de solução

O programa computacional, desenvolvido nesta dissertação, propõe-se a analisar peças de concreto estrutural com comportamento elasto-viscoplástico. Para tanto, utilizam-se dois procedimentos distintos, baseados no algoritmo elasto-viscoplástico.

Numa primeira etapa, faz-se a determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura, decorrido um período de tempo da aplicação do carregamento anterior. Há um processo de incremento do tempo real (em dias), onde ocorrem os efeitos ao longo do tempo na estrutura (fluência e retração do concreto e relaxação do aço). Esta resposta representa um comportamento viscoelástico dos materiais, correspondente à etapa 1 no programa.

Na segunda fase, busca-se determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Isto é feito, supondo-se a estrutura elasto-viscoplástica e procurando-se o seu estado de deformação quando o tempo (fictício) tende ao infinito. Este estado estável corresponde a resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a carga instantânea. Esta fase corresponde à etapa 2 do programa.

O programa permite a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos decorrentes do tempo. Desta forma, as etapas 1 e 2 são

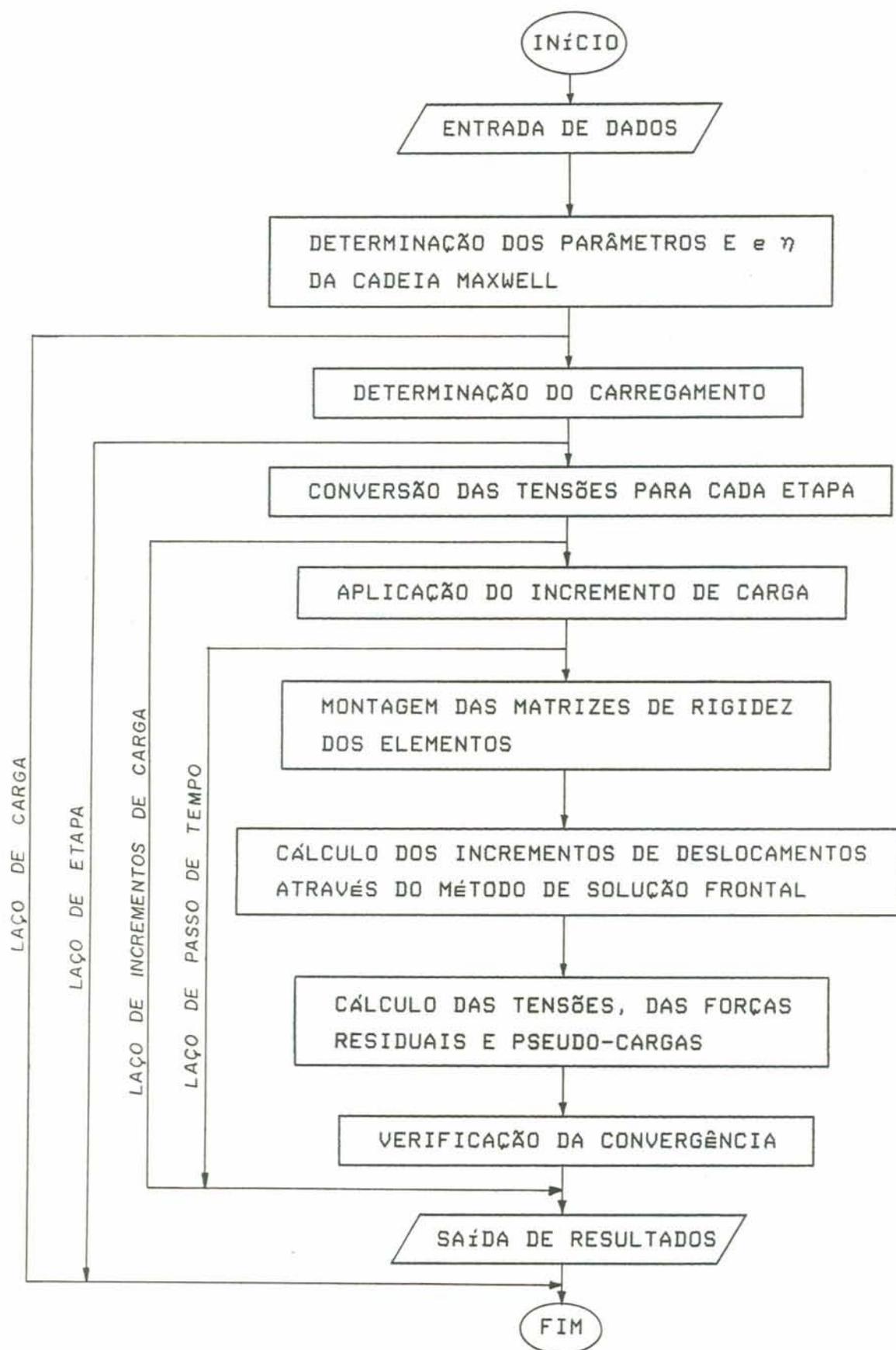


Figura 6.4 - Fluxograma do programa

executadas de forma sucessiva, a medida que são aplicadas as cargas nas datas especificadas.

Na Fig. 6.4 é apresentado um fluxograma geral, onde ilustram-se as diversas fases do programa.

6.6.1 - Implementação das etapas de solução para o concreto

Na etapa 1, viscoelástica, adotou-se para o concreto um modelo de cinco camadas visto em 5.2.1 onde são representadas a fluência e a retração. Nesta etapa, não se considera o efeito de endurecimento e a tensão de plastificação inicial é tomada como zero, desconsiderando o elemento de atrito do modelo da Fig. 1.6. Para os pontos de integração, onde atuam tensões de tração, admite-se que não surjam novas fissuras nesta fase.

Na etapa 2, elastoplástica, é determinado o endurecimento do ponto de integração em que a tensão efetiva exceder a tensão de plastificação inicial. Utiliza-se uma única camada nesta fase de carregamento instantâneo. Quando passa-se de uma etapa 1 para uma etapa 2, calcula-se, para cada ponto de integração, uma tensão equivalente em função das cinco tensões determinadas no final da etapa 1. Nesta fase, são verificados os pontos de integração quanto ao critério de fissuração, visto no capítulo 4.

6.6.2 - Implementação das etapas de solução para o aço

As etapas de solução para o aço apresentam diferentes procedimentos conforme o tipo de aço utilizado. A Fig. 6.5 mostra estas diferenças para caso.

ETAPA	AÇO	σ_y	H'_s	γ_s	$\Delta\psi_s$	$F_{px,y}$
1	A	0	0	0	eq. 6.9	0
	B					
	pré-tração	0	0	se $t > t_p$	eq. 6.9	0
	pós-tração com ader.			eq. 5.49	se $t < t_p$ 0 senão eq. 6.9	se $t \geq t_p$ eq. 6.16
	pós-tração sem ader.			0	0	senão 0
2	A	f_y	eq. 4.29	0,00001	eq. 6.9	0
	B	$0,85f_y$	4.29			
	pré-tração	*	eq. 4.29	0,00001	eq. 6.9	0
	pós-tração com ader.				se $t < t_p$ 0 senão eq. 6.9	se $t \geq t_p$ eq. 6.16
	pós-tração sem ader.				0	senão 0

σ_y : tensão de escoamento

H'_s : endurecimento

γ_s : coeficiente de fluidez

$\Delta\psi_s$: forças equilibradas ($\int B_s \sigma_s dv$)

$F_{px,y}$: força de compressão na pós-tração

*: $0,85 \cdot 0,85 f_{ptk}$

Figura 6.5 - Implementação do aço

7 - EXEMPLOS

7.1 - Introdução

Neste capítulo, apresentam-se comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto armado e protendido com os obtidos pelo programa computacional.

Os três exemplos apresentados visam ilustrar a validade do modelo desenvolvido, uma vez que procurou-se cobrir todas as propriedades apresentadas neste trabalho.

Os exemplos foram testados para uma malha de elementos finitos de concreto com dez ou doze elementos de oito nós. Malhas mais refinadas (15 e 20 elementos) não apresentaram diferenças significativas com relação a estas malhas.

O programa foi desenvolvido de forma a tornar os testes independentes de ajustes de parâmetros. Desta forma, como entrada de dados, são fornecidas somente informações referentes à geometria da peça, ao tipo de carregamento e as propriedades do concreto, aço e ambiente.

Fixaram-se alguns parâmetros referentes ao processo de integração no tempo, descritos na referência [46], tais como: fator $k = 1,5$; $\theta = 0,5$ (a integração implícita apresentou melhores resultados que a explícita); comprimento inicial de passo de tempo $\Delta t_0 = 1$; fator de incremento de tempo $\tau = 1$.

Igualmente foram adotados para todos testes valores fixos de coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e cimento de endurecimento normal.

7.2 - Exemplo 1

Neste exemplo, comparam-se os resultados obtidos através do programa computacional com valores determinados experimentalmente, para a viga ET1 de concreto armado, obtidos

por Leonhardt e Walther [40].

A viga apresenta um carregamento instantâneo até atingir a ruptura através de duas cargas concentradas, como mostra a Fig. 7.1.

A armadura longitudinal apresenta inferiormente quatro barras de 20 mm de diâmetro ($f_y = 428$ MPa) e superiormente, duas barras de 8 mm de diâmetro ($f_y = 465$ MPa). Todas as barras são de aço da classe B.

Os estribos verticais têm 6 mm de diâmetro ($f_y = 320$ MPa, aço classe A), uniformemente espaçados.

A resistência média à compressão do concreto aos 28 dias (f_{cm}) é 24,2 MPa e a altura fictícia (h_f) é 16,15 cm.

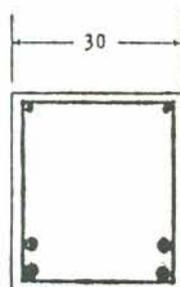
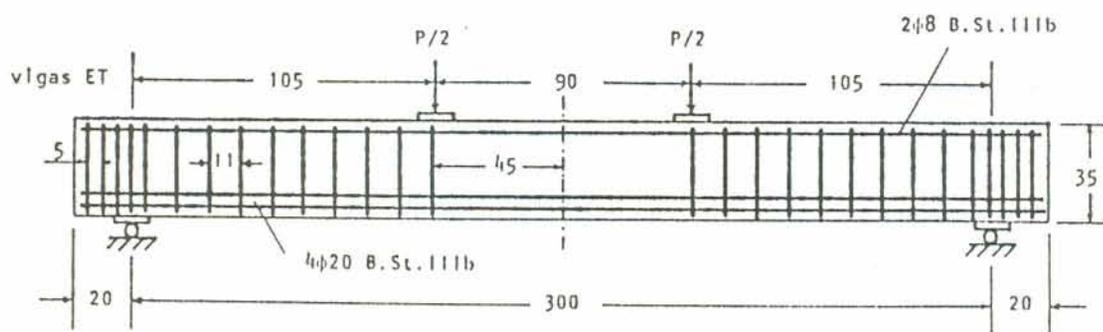
Considerou-se os efeitos da fluência e retração do concreto a partir do sétimo dia após a concretagem da viga. Adotou-se, conforme medições no local, uma umidade relativa do ar de 60% e uma temperatura de 18°C. O peso próprio da viga foi considerado como carga de curta duração, uma vez que os ensaios eram montados na data da execução (aproximadamente, 28 dias da concretagem).

Os valores comparados são valores líquidos, isto é, estão descontados as parcelas correspondentes aos efeitos dependentes do tempo e do peso próprio. Este procedimento foi também adotado para os demais exemplos.

Para o estudo computacional adotou-se a malha da Fig. 7.2, uma vez que a viga apresenta simetria de carga e geometria.

A Fig. 7.3 apresenta a comparação da flecha determinada pelo modelo computacional e pelos dados experimentais, para cada nível de carga.

Na Fig. 7.4, comparam-se as tensões médias na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio.



ET1

Figura 7.1 - Detalhamento da viga

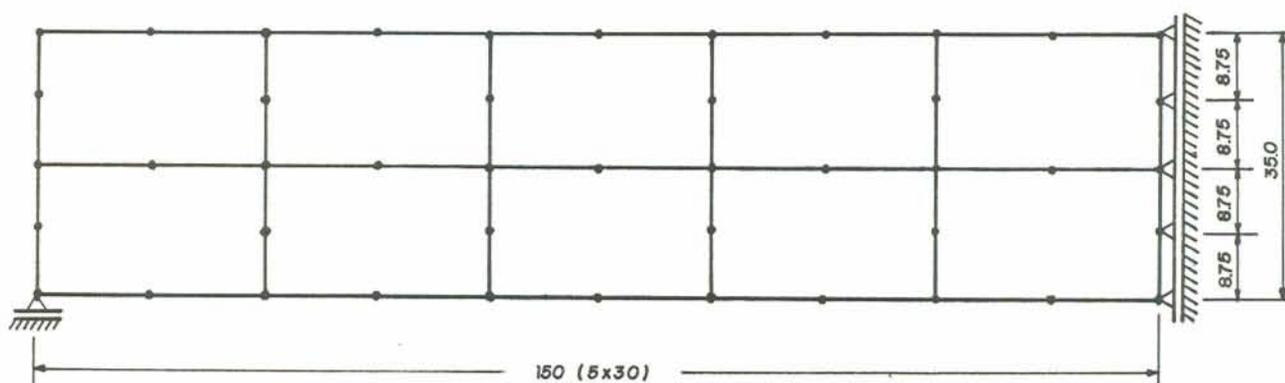


Figura 7.2 - Malha de elementos finitos adotada

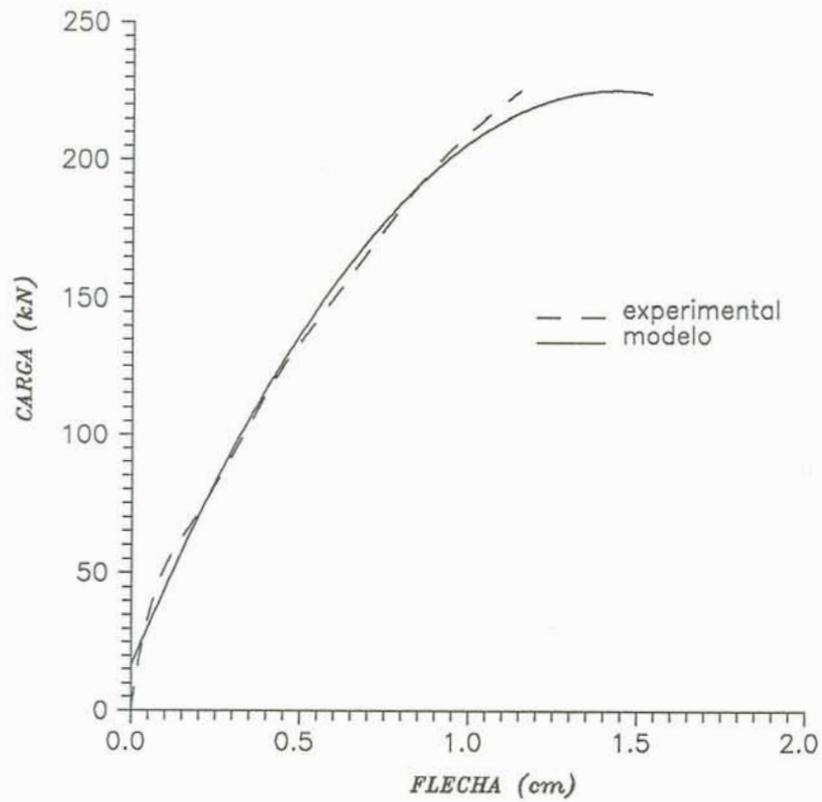


Figura 7.3 - Comparação entre as flechas obtidas pelo ensaio e pelo modelo computacional

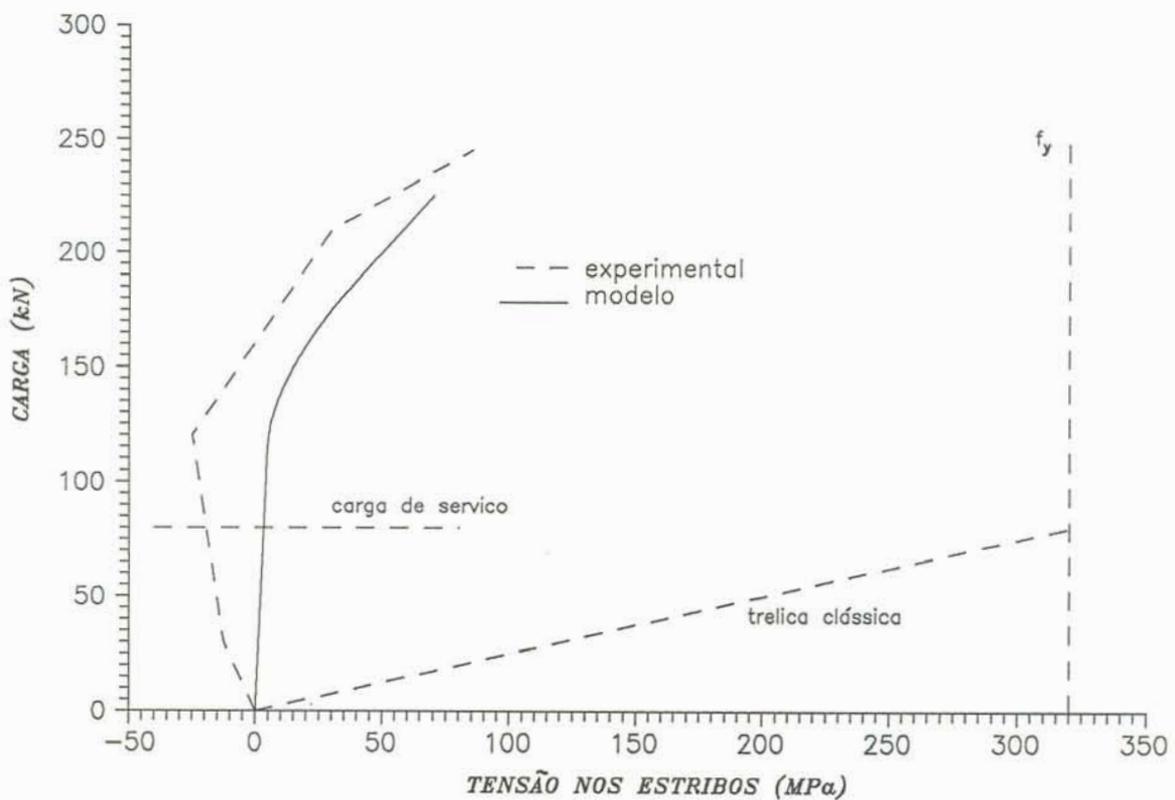


Figura 7.4 - Comparação das tensões nos estribos obtida no ensaio e pelo modelo computacional

7.3 - Exemplo 2

Neste exemplo, comparam-se os resultados computacionais, apresentados em [34], para vigas de concreto armado, submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de curta e longa duração.

Comparam-se os resultados correspondentes as vigas V7 e V8 do referido trabalho. As vigas eram simplesmente apoiadas, com um vão de 3,72 m. O detalhamento da viga aparece na Fig. 7.5.

A armadura longitudinal é composta, inferiormente, por duas barras de 8 mm de diâmetro de aço CA-50A e, superiormente, por duas barras de 3,4 mm de diâmetro de aço CA-60B. Adicionalmente, foram colocadas nas faces das vigas, duas barras de 3,4 mm de diâmetro. A armadura transversal consiste de estribos de 3,4 mm de diâmetro, espaçados de 10 cm.

As vigas foram ensaiadas 16 dias após sua concretagem. Foram submetidas a um carregamento uniformemente distribuído de 2,36 kN/m, além do peso próprio, sendo esta carga mantida constante por mais setenta dias.

Considerou-se a fluência e a retração do concreto a partir do sétimo dia após o carregamento e os valores de $f_{cm} = 21,2$ MPa e $h_f = 5,45$ cm. A umidade relativa do ar foi 75% para uma temperatura constante de 20°C.

A análise computacional foi realizada com o emprego da mesma malha de elementos finitos da Fig. 7.2, porém com dez elementos de 37,2 X 10 cm.

Na Fig. 7.6, comparam-se a flecha da viga, segundo o ensaio e o modelo computacional, para o carregamento instantâneo. Esta figura apresenta duas curvas para o modelo computacional: modelo 1, com $\alpha = 0,8$ na equação (4.22) e modelo 2, para $\alpha = 0,6$. Isto porque, neste exemplo, acredita-se que devido à baixa taxa de armadura da viga a contribuição do concreto tracionado torna-se mais importante.

As Fig. 7.7 e Fig. 7.8, confrontam os resultados experimentais e computacionais, para as deformações na armadura tracionada e na borda comprimida, na seção central das vigas. Estes valores correspondem ao carregamento instantâneo.

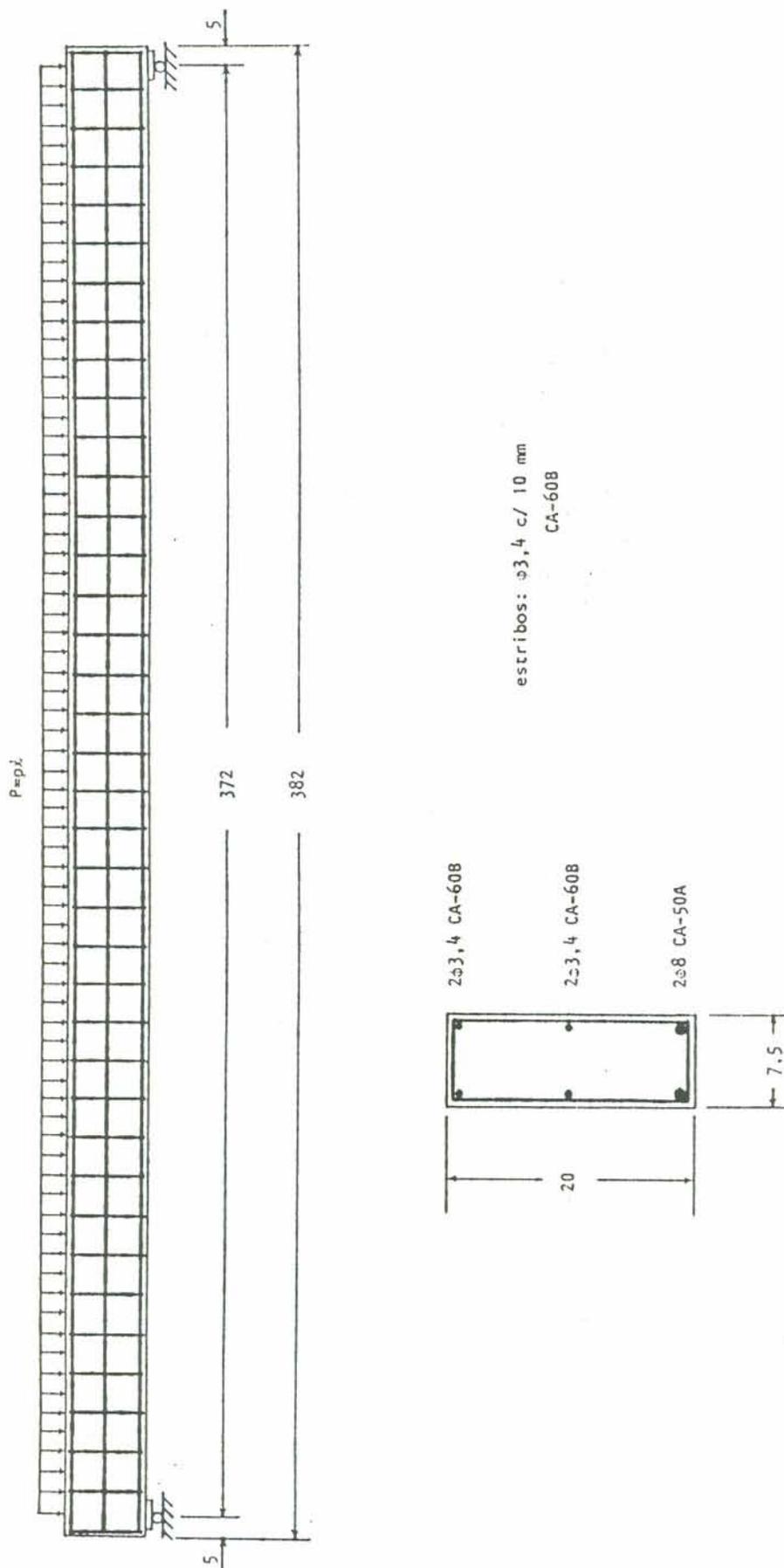


Figura 7.5 - Detalhamento da viga

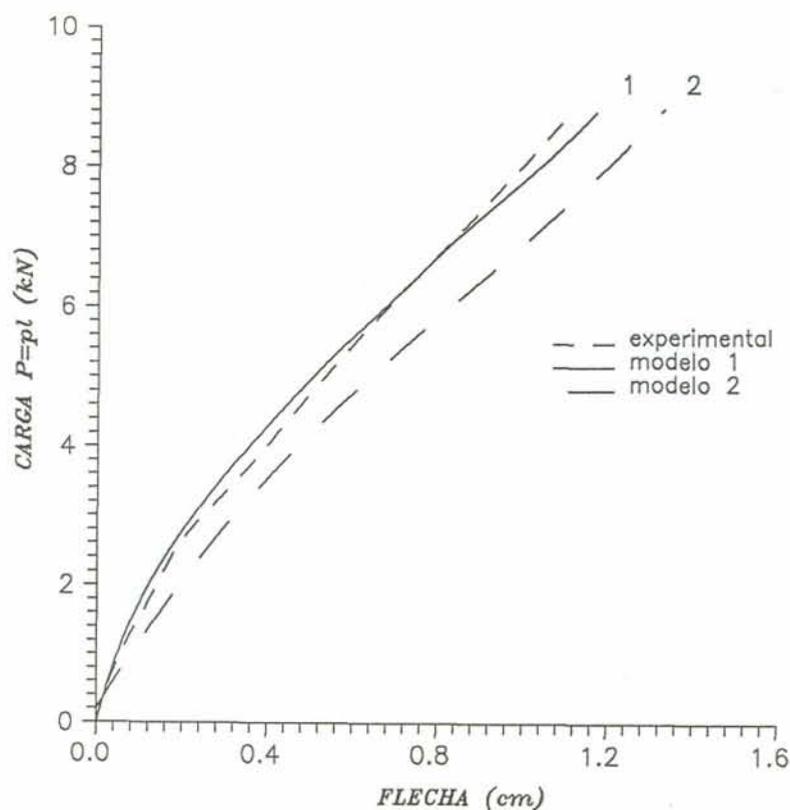


Figura 7.6 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo computacional

A Fig. 7.9, apresenta o desenvolvimento das flechas das vigas, no período de setenta dias que seguiu a data do ensaio.

As Fig. 7.10 e Fig. 7.11 mostram a evolução das deformações na armadura e na borda comprimida, na seção central das vigas V7 e V8, nos setenta dias que sucederam a aplicação da carga.

A Fig. 7.12 mostra as deformações na seção central das vigas V7 e V8, no instante de aplicação da carga e setenta dias após, segundo as medições do ensaio e os resultados da análise computacional. Nesta figura, os resultados experimentais correspondem à média dos valores obtidos.

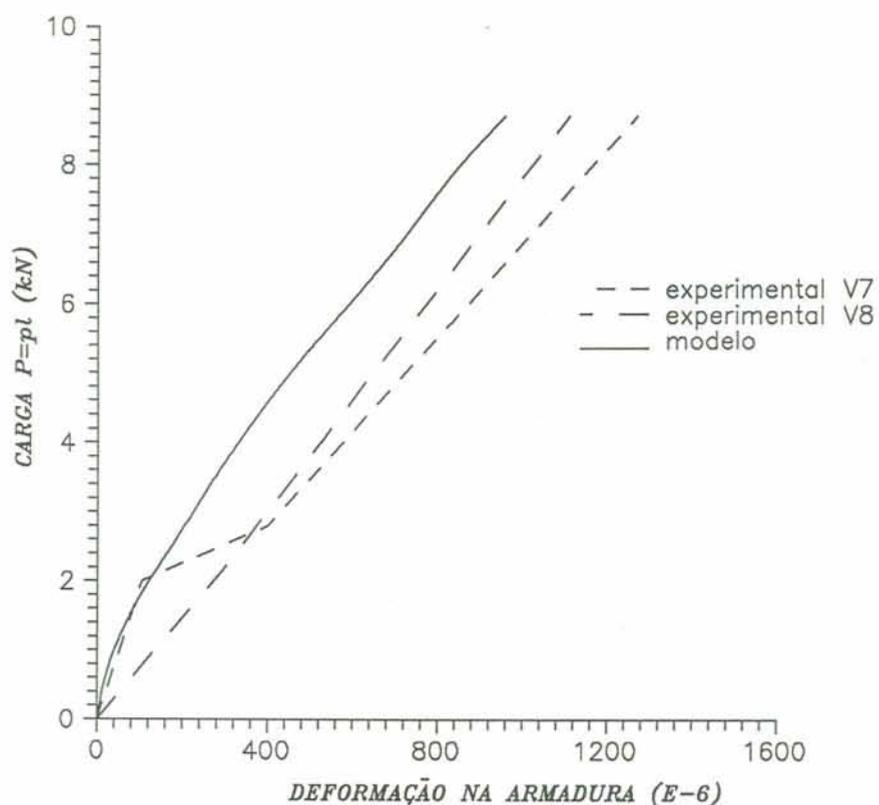


Figura 7.7 - Deformações na armadura tracionada, na seção central, obtidas no ensaio e pelo modelo

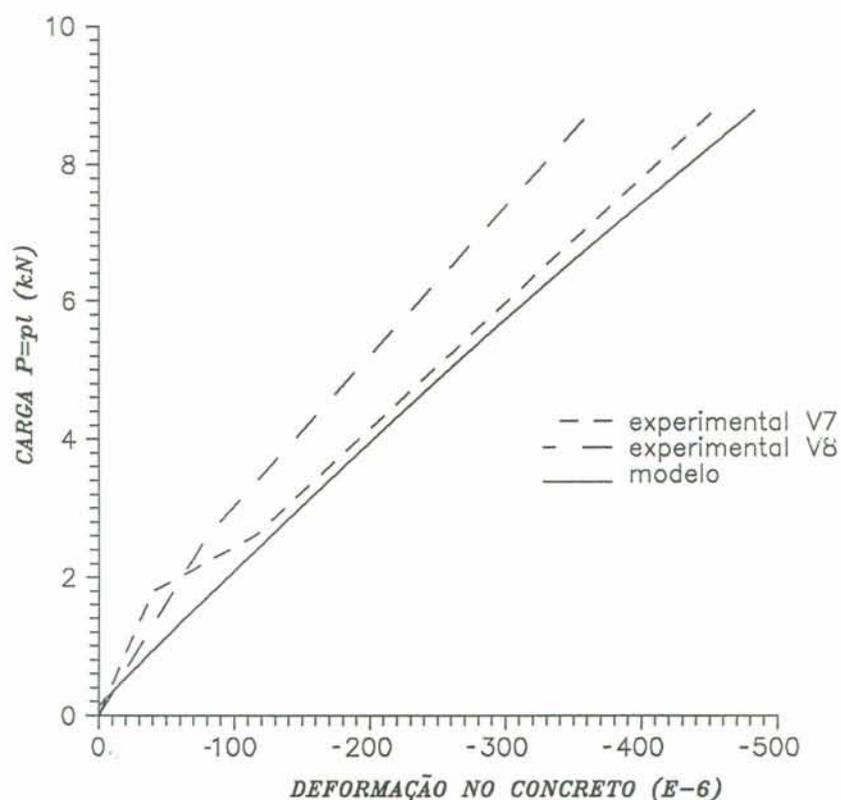


Figura 7.8 - Deformações na borda comprimida, na seção central, obtidas no ensaio e pelo modelo

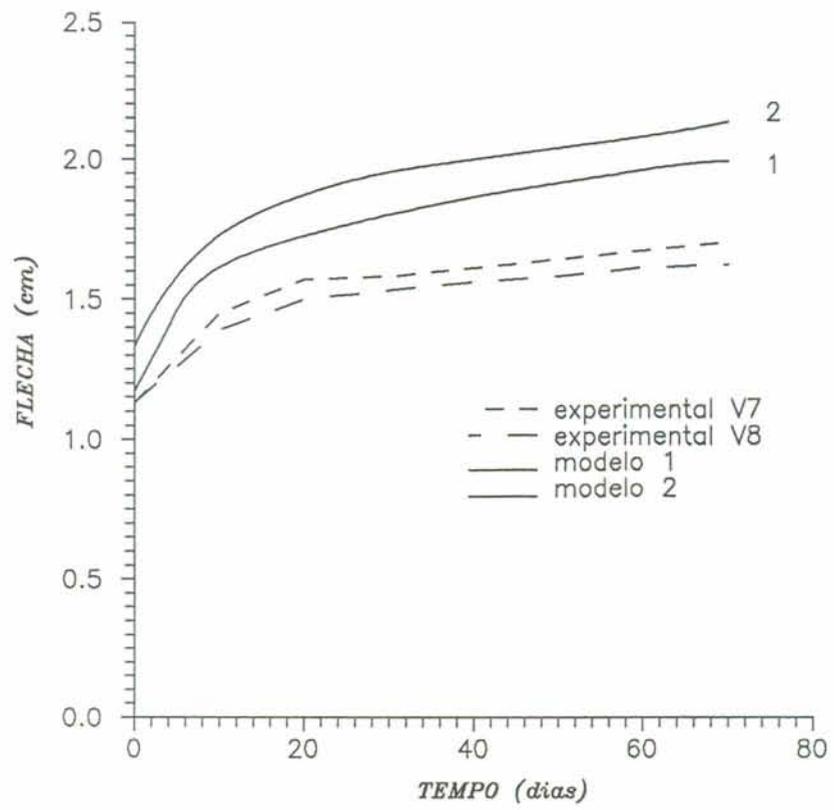


Figura 7.9 - Desenvolvimento das flechas no tempo, segundo o ensaio e o modelo

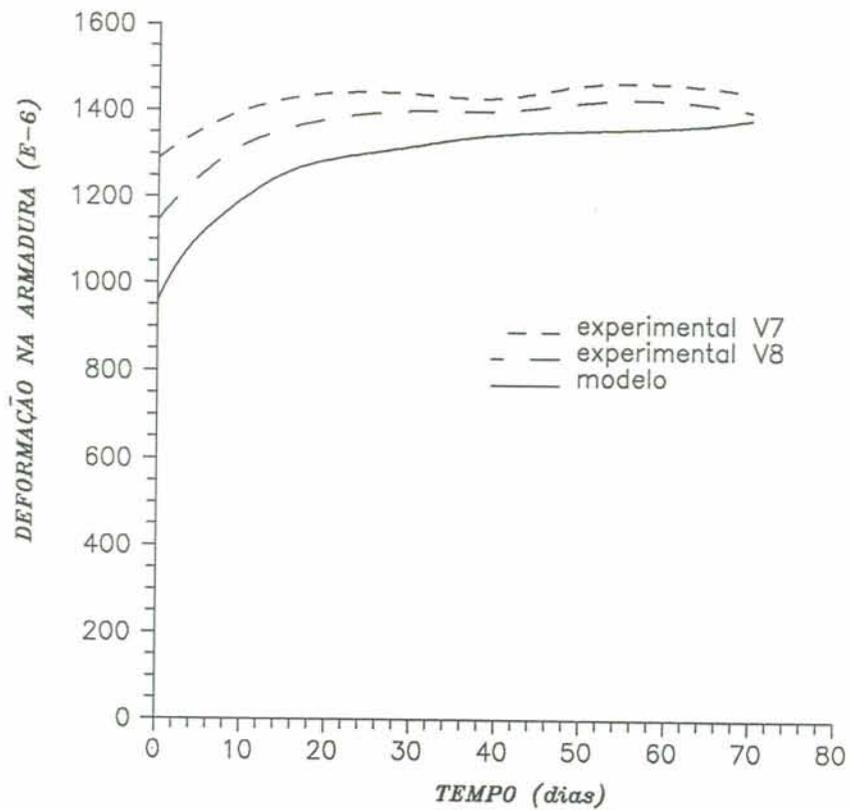


Figura 7.10 - Deformações, no tempo, na armadura tracionada, segundo o ensaio e o modelo

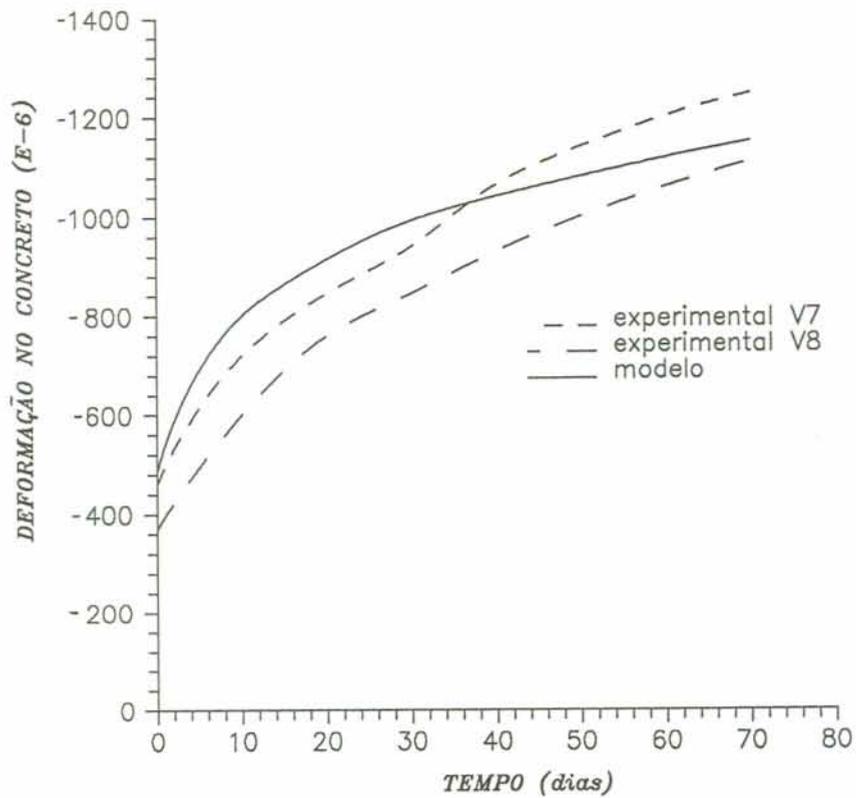


Figura 7.11 - Deformação, no tempo, na borda comprimida, segundo o ensaio e o modelo

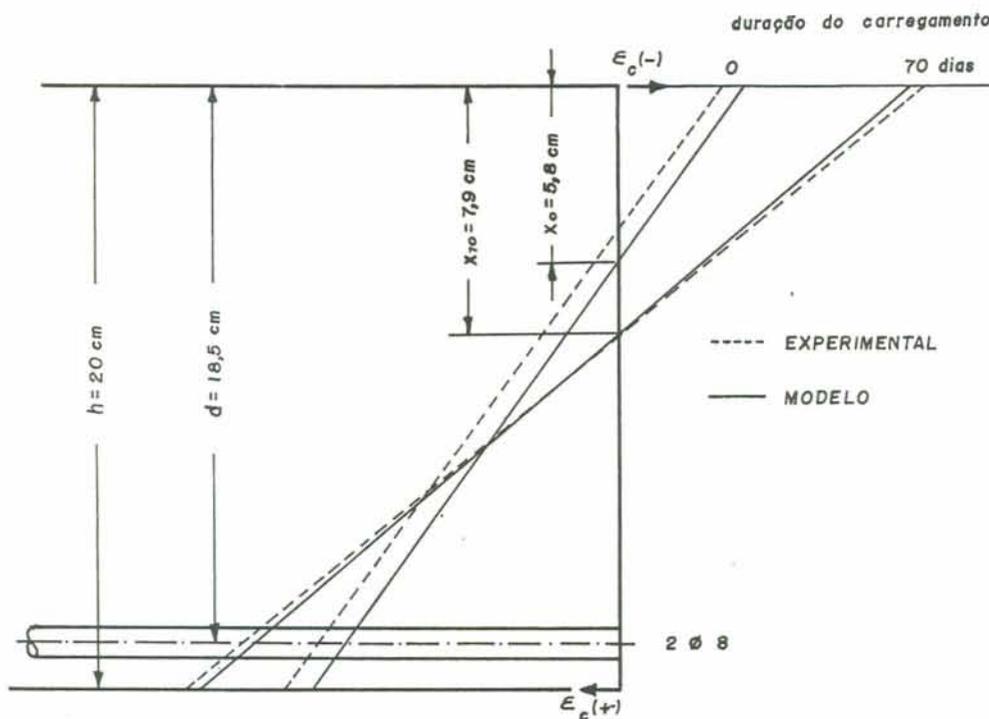


Figura 7.12 - Deformação na seção central das vigas para o carregamento instantâneo e de longa duração

7.4 - Exemplo 3

Neste exemplo, comparam-se os resultados experimentais com os computacionais, apresentados por Gongchen e Xuekang [35], para vigas de concreto protendido, submetidas a um carregamento instantâneo.

Comparam-se os resultados correspondentes as vigas A-3 e A-6 pós-tracionadas sem aderência e as vigas pré-tracionadas D-3 e D-10.

As vigas, simplesmente apoiadas, apresentam um vão de 420 cm com dois pontos de aplicação de carga, conforme Fig. 7.13.

As armaduras passivas longitudinais tracionadas (ϕ_s), as armaduras passivas longitudinais comprimidas (ϕ'_s), as armaduras ativas (ϕ_p), as resistências médias à compressão do concreto (f_{cm}), as tensões de protensão (σ_{pi}) e as tensões de escoamento da armadura passiva (f_y) encontram-se na Fig. 7.15, para cada caso.

Considerou-se a umidade relativa do ar de 60% e a temperatura de 20°C. A espessura fictícia é 10,18 cm.

As vigas A apresentam tensão de ruptura do aço protendido de 1790 MPa e módulo de elasticidade do aço protendido de 205000 MPa. As vigas D têm $f_{ptk} = 1660$ MPa e $E_p = 200000$ MPa.

A análise foi realizada com o emprego da malha de elementos finitos da Fig. 7.14.

Nas Figs. 7.16 até 7.19, comparam-se as flechas das

VIGA	f_{cm} (MPa)	ϕ_p (cm)	σ_{pi} (MPa)	ϕ_s (cm)	ϕ'_s (cm)	f_y (MPa)
A-3	30,6	1,41	820	1,73	0,63	430
A-6	30,6	1,41	854	2,43	0,63	400
D-3	35,6	1,41	879	1,73	0,63	430
D-10	35,6	1,58	825	1,13	0,63	260

Figura 7.15 - Valores para cada viga

vigas, segundo o ensaio e o modelo computacional.

Nas Fig. 7.20 e Fig. 7.21, confrontam-se os resultados experimentais, para o aumento médio de tensão na armadura protendida.

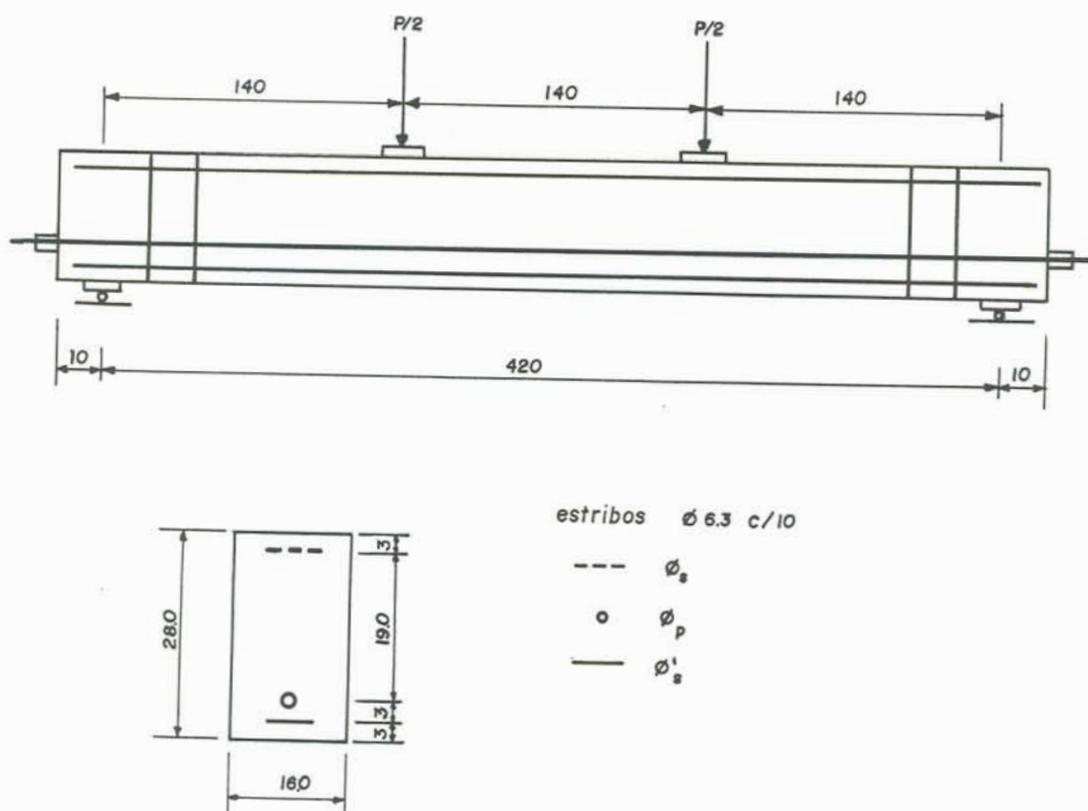


Figura 7.13 - Detalhamento da viga

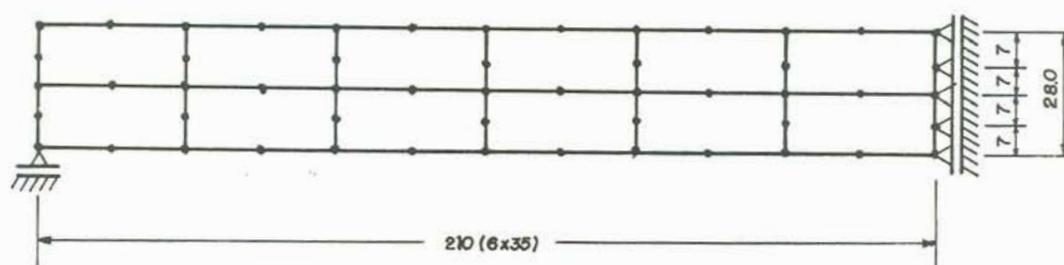


Figura 7.14 - Malha de elementos finitos adotada

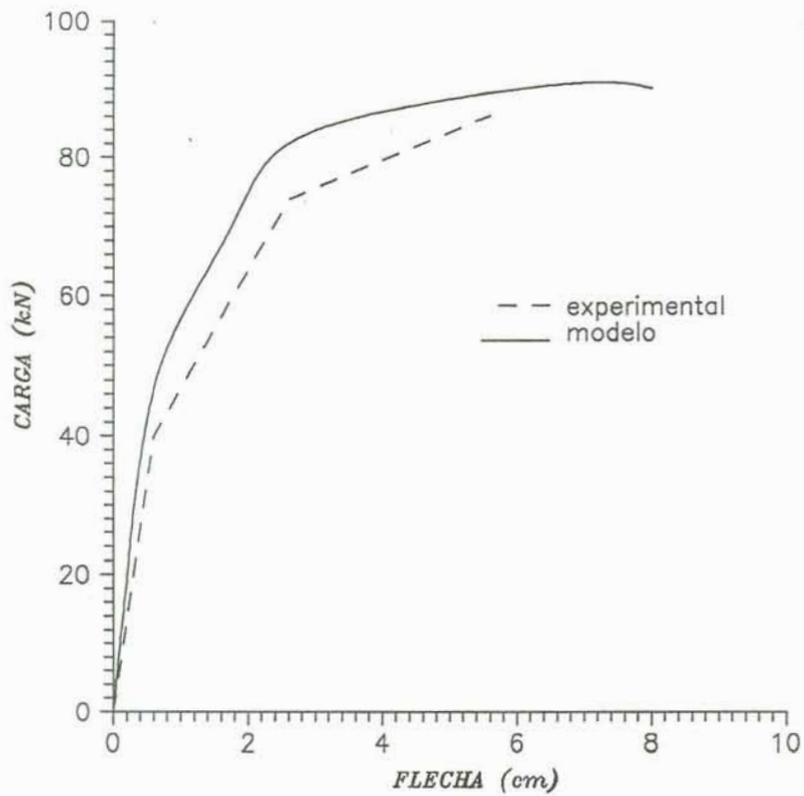


Figura 7.16 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo para viga A-3

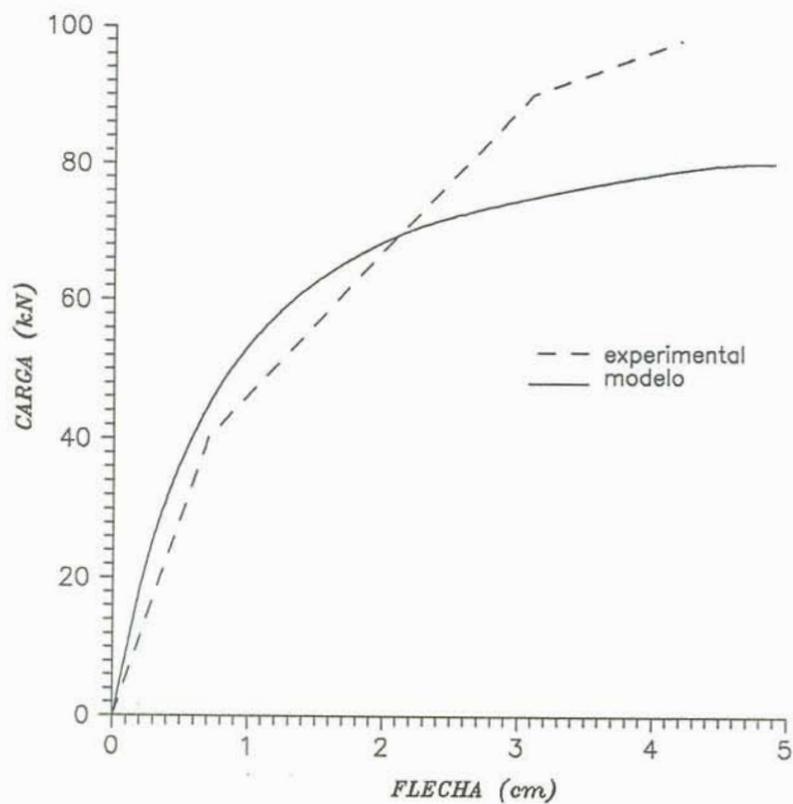


Figura 7.17 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo para viga A-6

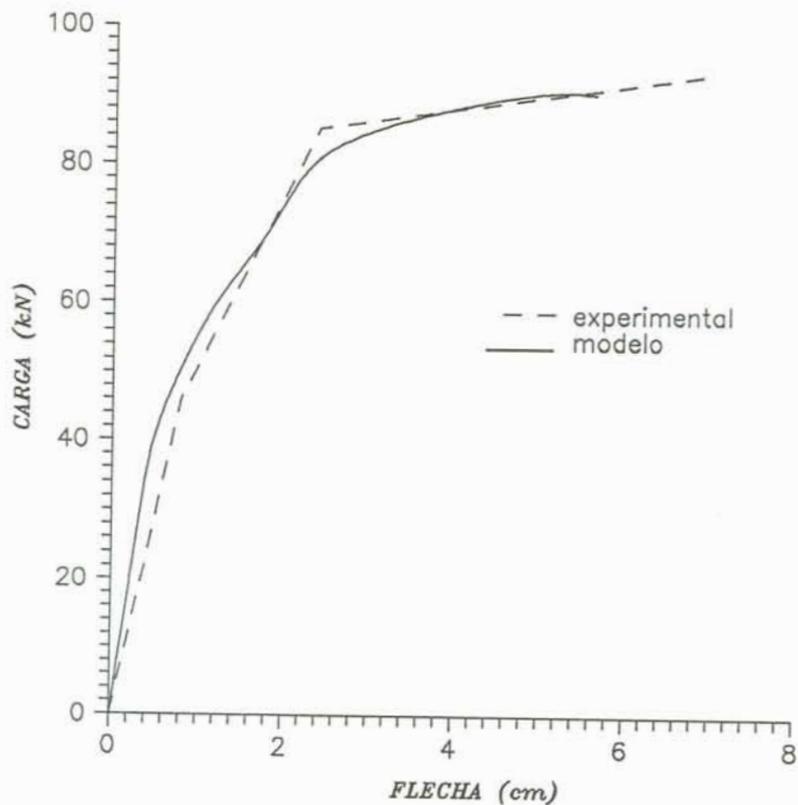


Figura 7.18 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo para viga D-3

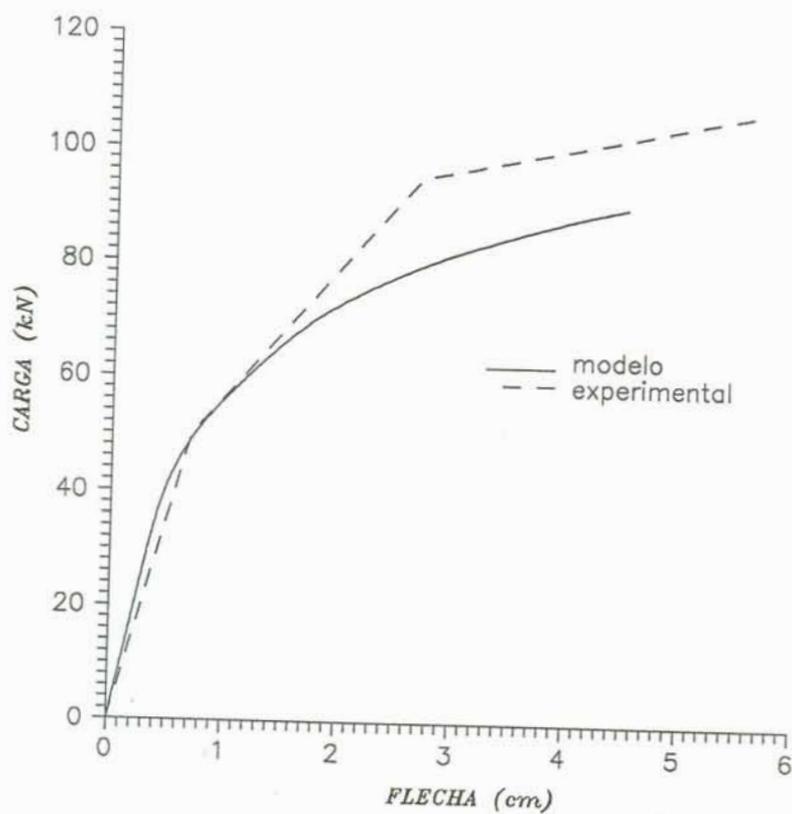


Figura 7.19 - Comparação entre as flechas obtidas no ensaio e pelo modelo para viga D-10

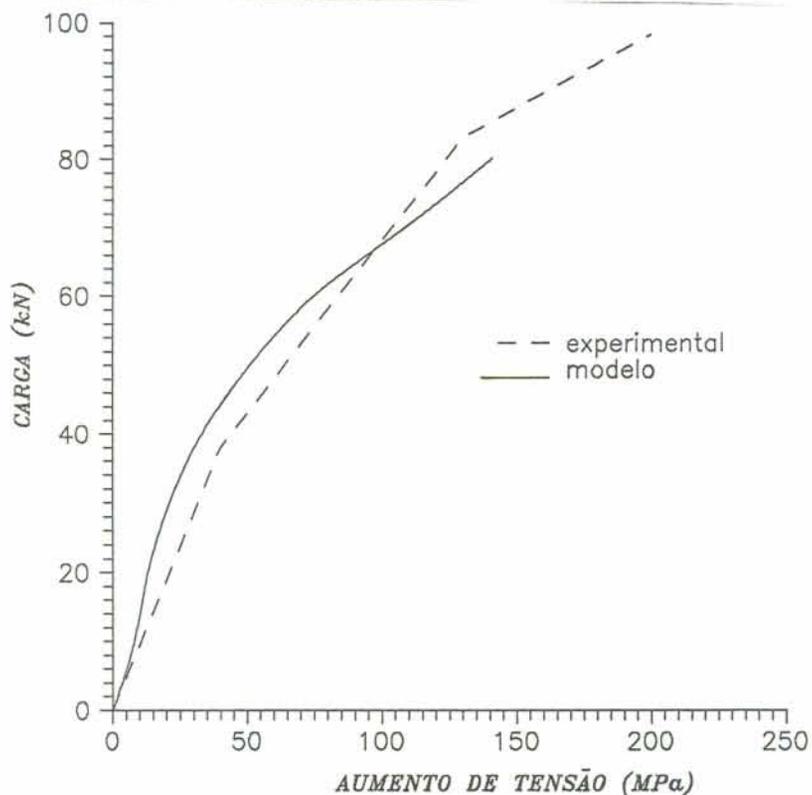


Figura 7.20 - Aumento médio de tensão na armadura protendida, obtida pelo ensaio e pelo modelo, para viga A-3

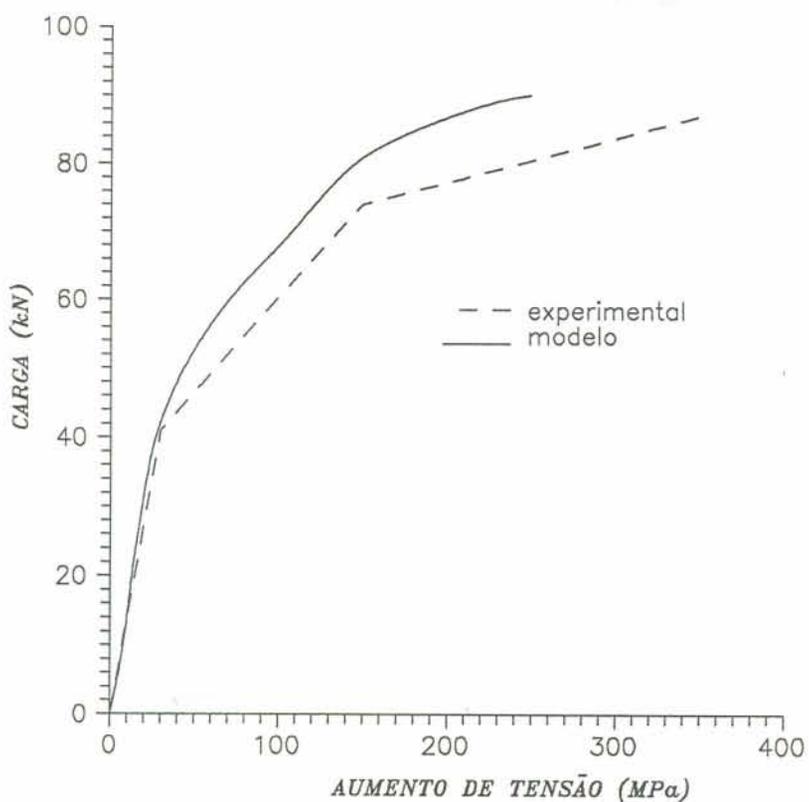


Figura 7.21 - Aumento médio de tensão na armadura protendida, obtida pelo ensaio e pelo modelo, para viga A-6

8 - CONCLUSÕES

Esta dissertação dá sequência ao trabalho de Senzale [50] apresentado no CPGEC/UFRGS em 1991. Em relação ao trabalho anterior, estendeu-se a aplicabilidade do modelo a peças de concreto protendido; automatizou-se o processo de determinação dos segmentos de armadura contidos nos elementos de concreto; abriu-se a possibilidade de utilização de barras curvas para a armadura; incorporou-se ao programa de elementos finitos a determinação dos parâmetros do modelo viscoelástico do concreto e elaborou-se um programa para entrada de dados de forma a facilitar a geração do arquivo de dados.

A finalidade deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático para simular o comportamento de peças de concreto armado e protendido.

Considerando-se a variabilidade inerente ao comportamento deste tipo de estrutura, alcançou-se excelente aproximação frente a todos resultados experimentais analisados. Com isto, é garantida a validade do modelo para o estudo de várias situações nas estruturas correntes de concreto estrutural.

Na análise do funcionamento do concreto ao longo do tempo, a implementação do modelo de camadas de Maxwell atingiu ótimos resultados para o fenômeno da fluência, muito embora o modelo de retração do concreto necessite ser melhor estudado.

A automação da implementação da armadura, através do modelo incorporado, tornou o programa extremamente versátil, uma vez que as barras inseridas dentro dos elementos de concreto são fornecidas apenas por dois ou três pontos nodais. O programa, de maneira automática, encarrega-se da determinação da contribuição de rigidez devida à barra de armadura.

Ficou evidente, através das análises efetuadas, a importância da contribuição do concreto entre fissuras. Para uma

análise mais realista do funcionamento do concreto fissurado, deveria-se levar em consideração a taxa de armadura.

Com a entrada de dados desenvolvida neste trabalho, o programa tornou-se auto-explicativo e de fácil manipulação para usuários não familiarizados com as diversas etapas de seu desenvolvimento.

O modelo obtido pode ser aperfeiçoado a fim de estender a sua validade e precisão.

A conclusão fundamental, extraída deste trabalho, é a possibilidade da simulação computacional do funcionamento real de estruturas de concreto e aço. Com isto, pode-se descrever o comportamento de peças complexas como estas, de maneira mais exata, a fim de otimizar o aproveitamento dos materiais.

ANEXO A - ENTRADA DE DADOS

A.1 - Introdução

A análise numérica pelo método dos elementos finitos constitui-se de uma ferramenta muito avançada na busca de soluções cada vez mais precisas dos problemas encontrados na engenharia estrutural.

Se, por um lado, esta metodologia de cálculo leva a respostas mais próximas da realidade, por outro lado acarreta algumas dificuldades na manipulação de um volume grande de dados.

Tendo em vista estes fatores, os programas computacionais estão se aperfeiçoando muito em proporcionar entradas e saídas de dados que facilitem sua utilização pelo usuário. Desta forma, têm-se diversos trabalhos de elaboração de pré-processadores e pós-processadores como: geradores automáticos de malhas, geração gráfica da malha, análise gráfica de tensões e deslocamentos, etc. Pouco adianta um programa computacional bem elaborado teoricamente, se o usuário terá grandes dificuldades para usá-lo e interpretá-lo.

Neste trabalho o programa computacional foi desenvolvido na linguagem FORTRAN. Considerando que esta não possui recursos adequados para elaboração de uma boa entrada de dados, foi implementado um módulo com o objetivo de torná-la mais amigável. Contudo, como o objetivo desta dissertação não é especificamente a criação de pós e pré-processadores elaborados, a entrada de dados criada não tem a pretensão de ser completa e autosuficiente, e sim de facilitar a tarefa de executar o programa.

A.2 - Implementação

O sistema computacional implementado compõe-se de dois módulos. O cálculo propriamente dito é efetuado por um módulo desenvolvido na linguagem FORTRAN. O gerenciamento da execução assim como a entrada e saída de dados são controlados por um módulo desenvolvido em linguagem CLIPPER.

O CLIPPER é um Sistema Gerenciador de Base de Dados, tendo-se originado do dBASE III. Enquanto o dBASE III é um interpretador o CLIPPER é um compilador, tornando os programas mais rápidos e eficientes. Ambos os softwares geram o mesmo tipo de arquivo de dados (.dbf) e utilizam arquivos de índice com extensão (.ndx) para o dBASE e (.ntx) para o CLIPPER.

No final da etapa de fornecimento dos dados de entrada, o sistema cria um arquivo (.txt) em ASCII para ser lido pelo módulo de cálculo, que realiza a análise do problema. Ao término do processamento, o sistema retorna ao módulo CLIPPER para apresentação dos resultados.

A seguir será descrita a utilização da entrada de dados em suas diversas etapas.

A.3 - Primeira tela

A tela inicial solicita ao usuário o nome do trabalho em questão e o diretório onde serão gravados todos os arquivos de dados (.dbf) e de índices (.ntx), produzidos pelas diversas etapas de entrada. A Fig. A.1 apresenta esta tela.

A.4 - Tela principal - Menu

A tela principal é composta por um menu de barras de seleção, conhecido como "pull down menu". Nesta, constam todas as opções de entrada disponíveis no programa: dados iniciais, dados estruturais, carregamentos, saídas e fim. Para selecionar uma opção, basta posicionar o cursor sobre a opção desejada, através das quatro setas de movimento, e pressionar "Enter". Feito isto, uma nova tela será exibida. Acionando a opção FIM, encerra-se o programa e retorna-se ao sistema operacional. A

Programa: Visco Versão : 1.0	Análise Elasto-Viscoplástica Concreto Estrutural - EPT	Hora : 14:25:33 Data : 27/10/92
<p>Digite o nome do trabalho, com no máximo 5 caracteres (Informe o diretório, caso necessário)</p> <p>Trabalho: <input type="text" value="VPB1"/></p>		

Figura A.1 - Primeira tela

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Análise Elasto-Viscoplástica Concreto Estrutural - EPT	Hora : 14:32:04 Data : 27/10/92					
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>DADOS INICIAIS</td> <td>DADOS ESTRUTURAIS</td> <td>CARREGAMENTOS</td> <td>SAÍDAS</td> <td>FIM</td> </tr> </table>			DADOS INICIAIS	DADOS ESTRUTURAIS	CARREGAMENTOS	SAÍDAS	FIM
DADOS INICIAIS	DADOS ESTRUTURAIS	CARREGAMENTOS	SAÍDAS	FIM			
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%;"> Coordenadas Conetividades Vínculos Propriedades Parâmetros </td> <td style="width: 50%;"> Concreto Armadura passiva Armadura protensão Ambiente </td> </tr> </table>			Coordenadas Conetividades Vínculos Propriedades Parâmetros	Concreto Armadura passiva Armadura protensão Ambiente			
Coordenadas Conetividades Vínculos Propriedades Parâmetros	Concreto Armadura passiva Armadura protensão Ambiente						
<p>As teclas ↑, ↓, ←, → movem a barra de seleção. Selecione pressionando <Enter>.</p>							

Figura A.2 - Menu

Fig. A.2 mostra este menu.

Serão detalhados nos próximos itens os quatro grupos de opções do programa.

A.5 - Dados iniciais

Neste grupo, através das opções gerar, alterar, eliminar e imprimir, são manipulados os parâmetros iniciais para o problema, a saber:

- Número de nós
- Número de elementos de concreto
- Número de barras de armadura
- Número de nós de contorno
- Número de nós por elemento
- Número de materiais diferentes (armadura passiva)
- Número de materiais diferentes (armadura protendida)
- Ordem de integração numérica (Gauss)
- Número de carregamentos

As opções GERAR e ALTERAR são utilizadas para estabelecer valores para os parâmetros iniciais, conforme ilustrado na Fig. A.3.

A opção ELIMINAR remove as informações referentes aos dados iniciais. A opção IMPRIMIR produz a impressão dos dados iniciais fornecidos.

A.6 - Dados estruturais

Este grupo fornece cinco opções para entrada de dados: coordenadas, conectividades, vínculos, propriedades e parâmetros.

A.6.1 - Coordenadas

A opção COORDENADAS gera as coordenadas cartesianas (x,y) de todos os nós da malha de elementos finitos. Ao final da numeração dos nós dos elementos de concreto, são numerados, em sequência, os nós dos elementos de armadura. Desta forma, nesta

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Iniciais	Hora : 14:28:21 Data : 27/10/92
<pre> No. de nós: 98 No. de elementos de concreto.....: 10 No. de barras de armadura: 26 No. de nós de contorno: 6 No. de nós por elemento: 8 No. de materiais diferentes (armadura passiva) ..: 1 No. de materiais diferentes (armadura protensão) : 1 Ordem de integração numérica(Gauss): 3 No. de carregamentos: 2 </pre>		
<p><ESC> grava e retorna ao menu <↑> retorna campo</p>		

Figura A.3 - Tela de dados iniciais

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Coordenadas	Hora : 14:32:04 Data : 27/10/92																																										
<table border="1"> <thead> <tr> <th>NO'</th> <th>COORD. X</th> <th>COORD. Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>12</td><td>0.000</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>13</td><td>85.400</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>14</td><td>170.800</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>15</td><td>259.000</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>16</td><td>335.000</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>17</td><td>427.000</td><td>7.625</td></tr> <tr><td>18</td><td>0.000</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>19</td><td>42.700</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>20</td><td>85.400</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>21</td><td>128.100</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>22</td><td>170.800</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>23</td><td>213.500</td><td>15.250</td></tr> <tr><td>24</td><td>256.200</td><td>15.250</td></tr> </tbody> </table>			NO'	COORD. X	COORD. Y	12	0.000	7.625	13	85.400	7.625	14	170.800	7.625	15	259.000	7.625	16	335.000	7.625	17	427.000	7.625	18	0.000	15.250	19	42.700	15.250	20	85.400	15.250	21	128.100	15.250	22	170.800	15.250	23	213.500	15.250	24	256.200	15.250
NO'	COORD. X	COORD. Y																																										
12	0.000	7.625																																										
13	85.400	7.625																																										
14	170.800	7.625																																										
15	259.000	7.625																																										
16	335.000	7.625																																										
17	427.000	7.625																																										
18	0.000	15.250																																										
19	42.700	15.250																																										
20	85.400	15.250																																										
21	128.100	15.250																																										
22	170.800	15.250																																										
23	213.500	15.250																																										
24	256.200	15.250																																										
<p><F1> Help <ESC> grava <F2> elimina <F3> imprime</p>																																												

Figura A.4 - Tela de coordenadas

opção são geradas as coordenadas dos nós de concreto e aço, conforme Fig. A.4.

Na última linha das telas do sistema é apresentada uma mensagem de auxílio ao usuário.

Nesta tela, a tecla F1 apresenta um Help descrevendo o funcionamento das diversas teclas válidas; F2 faz a eliminação do arquivo de coordenadas e F3, sua impressão. A tecla Esc grava e retorna ao menu e F5 localiza o nó desejado.

Através da tecla F4, pode-se efetuar uma geração múltipla de coordenadas para nós que se encontram sobre uma mesma reta. Basta fornecer o nó inicial, o nó final e suas coordenadas. Automaticamente todas as coordenadas dos nós intermediários serão produzidas.

A.6.2 - Conetividades

A opção CONETIVIDADES, é utilizada para o estabelecimento das conetividades dos elementos de concreto e aço.

Nas conetividades para o concreto, são fornecidos o número do elemento e suas conetividades nodais, conforme ilustrado pela Fig. A.5. As conetividades podem ser produzidas multiplamente pela tecla F4.

Nas conetividades para o aço, são fornecidos o número da barra, o número das propriedades do material, o número da barra da qual é continuação (para barras curvas e poligonais), quantos nós definiram sua geometria e suas conetividades nodais. As teclas F4 e F6, geram conetividades múltiplas. A Fig. A.6 ilustra esta tela.

A.6.3 - Vínculos

A opção VÍNCULOS especifica quais nós são restringidos, seus códigos de restrição e os valores de deslocamentos prescritos nas direções x e y, conforme mostra a Fig. A.7.

A.6.4 - Propriedades

Nesta opção são fornecidas as propriedades do concre-

Programa: Visco Trabalho: VPB1		Dados Estruturais Conetividades - Concreto								Hora : 14:37:49 Data : 27/10/92	
ELEM. CONETIVIDADES											
	1	2	3	13	20	19	18	12	0		
2	18	19	20	30	37	36	35	29	0		
3	3	4	5	14	22	21	20	13	0		
4	20	21	22	31	39	38	37	30	0		
5	5	6	7	15	24	23	22	14	0		
6	22	23	24	32	41	40	39	31	0		
7	7	8	9	16	26	25	24	15	0		
8	24	25	26	33	43	42	41	32	0		
9	9	10	11	17	28	27	26	16	0		
10	26	27	28	34	45	44	43	33	0		
<F1> Help <ESC> grava <F2> elimina <F3> imprime											

Figura A.5 - Tela de conetividades do concreto

Programa: Visco Trabalho: VPB1		Dados Estruturais Conetividades - Aço						Hora : 14:42:03 Data : 27/10/92	
BARRA PROP. CONT.NOS CONETIVIDADES									
	1	0	2	46	47	0	0		
2	2	0	3	48	49	98	0		
3	1	0	2	50	51	0	0		
4	1	0	2	52	53	0	0		
5	1	0	2	54	55	0	0		
6	1	0	2	56	57	0	0		
7	1	0	2	58	59	0	0		
8	1	0	2	60	61	0	0		
9	1	0	2	62	63	0	0		
10	1	0	2	64	65	0	0		
11	1	0	2	66	67	0	0		
12	1	0	2	68	69	0	0		
13	1	0	2	70	71	0	0		
<F1> Help <ESC> grava <F2> elimina <F3> imprime									

Figura A.6 - Tela de conetividades do aço

to, da armadura passiva, da armadura protendida e do ambiente. Para o concreto são informadas as seguintes propriedades, conforme ilustrado na Fig. A.8:

- Resistência média à compressão aos 28 dias
- Espessura do elemento
- Espessura fictícia
- Tipo de cimento: endurecimento lento (1), normal (2) ou rápido (3)

Para a armadura passiva, conforme a Fig. A.9.a, são informadas as seguintes propriedades:

- Número do material
- Número de barras
- Tensão de escoamento
- Diâmetro da barra
- Aço tipo A (0) ou B (1)

Para a armadura protendida, conforme a Fig. A.9.b, são informadas as seguintes propriedades:

- Número do material
- Número de barras
- Tensão de ruptura
- Tensão inicial
- Diâmetro da barra
- Data da protensão
- Tipo de protensão: pré-tração (1), pós-tração com aderência (2) ou pós-tração sem aderência (3).
- Tipo de relaxação: normal (1), ou baixa (2)
- Coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha metálica

Para o ambiente, conforme a Fig. A.10, são informadas as seguintes propriedades:

- Data de início da retração
- Umidade relativa do ar

- Período de duração Δt_1 da temperatura T_1
- Valor da temperatura T_1 no período Δt_1

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Vinculação	Hora : 14:44:39 Data : 27/10/92																												
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Nó</th> <th>CÓDIGO</th> <th>DESLOC. X</th> <th>DESLOC. Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>10</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> <tr> <td>17</td> <td>10</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> <tr> <td>28</td> <td>10</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> <tr> <td>34</td> <td>10</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> <tr> <td>45</td> <td>10</td> <td>0.000000</td> <td>0.000000</td> </tr> </tbody> </table>			Nó	CÓDIGO	DESLOC. X	DESLOC. Y	1	1	0.000000	0.000000	11	10	0.000000	0.000000	17	10	0.000000	0.000000	28	10	0.000000	0.000000	34	10	0.000000	0.000000	45	10	0.000000	0.000000
Nó	CÓDIGO	DESLOC. X	DESLOC. Y																											
1	1	0.000000	0.000000																											
11	10	0.000000	0.000000																											
17	10	0.000000	0.000000																											
28	10	0.000000	0.000000																											
34	10	0.000000	0.000000																											
45	10	0.000000	0.000000																											
<p><F1> Help <ESC> grava e retorna ao menu principal <10> restringido em X <01> restringido em Y <11> restringido em X e Y</p>																														

Figura A.7 - Tela de vinculação

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Propriedades - Concreto	Hora : 14:47:05 Data : 27/10/92
<p>Resistência média a compressão à 28 dias : 2.810 Espessura do elemento: 15.240 Espessura fictícia: 10.160 Tipo de cimento: 2.000</p> <p>1. endurecimento lento 2. endurecimento normal 3. endurecimento rápido</p> <p><Enter> grava <ESC> sai</p>		

Figura A.8 - Tela de propriedades do concreto

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Propriedades - Arm. passiva	Hora : 14:49:31 Data : 27/10/92
<p>MATERIAL ==> 1</p> <p>No. de barras: 2.000</p> <p>Tensão de escoamento: 38.500</p> <p>Diâmetro da barra: 0.794</p> <p>Tipo de aço: 2.000</p> <p>1. Classe A</p> <p>2. Classe B</p> <p><ESC> grava e troca de material <↑> retorna campo</p>		

Figura A.9.a - Tela de propriedades da armadura passiva

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Propriedades - Arm. protensão	Hora : 14:52:17 Data : 27/10/92
<p>MATERIAL ==> 2</p> <p>No. de barras: 2.000</p> <p>Tensão de ruptura: 197.000</p> <p>Tensão inicial: 132.300</p> <p>Diâmetro da barra: 1.123</p> <p>Data da protensão: 28.000</p> <p>Tipo de protensão: 2.000</p> <p>1. Pré-tração</p> <p>2. Pós-tração com aderência</p> <p>3. Pós-tração sem aderência</p> <p>Tipo de relaxação: 1.000</p> <p>1. Normal</p> <p>2. Baixa</p> <p>Coefficiente de atrito cabo/bainha : 0.300 (0.25 a 0.50)</p> <p><ESC> grava e troca de material <↑> retorna campo</p>		

Figura A.9.b - Tela de propriedades da armadura protendida

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Propriedades - Ambiente	Hora : 14:54:43 Data : 27/10/92
-----------------------------------	--	------------------------------------

Data de início da retração: 7.000
Umidade relativa do ar: 80.000

	DURAÇÃO	TEMPERATURA
1.	20000.000	20.000
2.	0.000	0.000
3.	0.000	0.000
4.	0.000	0.000
5.	0.000	0.000

<Enter> grava <ESC> sai

Figura A.10 - Tela de propriedades do ambiente

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Dados Estruturais Parâmetros	Hora : 14:57:07 Data : 27/10/92
-----------------------------------	---------------------------------	------------------------------------

Parâmetro teta: 0.500
Fator tau: 1.000
Comprimento inicial: 1.000
Fator k: 1.500
Tolerância para convergência: 2.000
No. máximo de iterações: 500
Frequência saída de deslocamentos ..: 20
Frequência saída total: 20

<Enter> grava <ESC> sai

Figura A.11 - Tela de parâmetros

A.6.5 - Parâmetros

A opção PARÂMETROS estabelece os parâmetros utilizados no esquema de integração no tempo e a frequência de impressão das saídas.

Esta tela apresenta as seguintes entradas, conforme mostra a Fig. A.11:

- Parâmetro teta
- Fator tau
- Comprimento inicial
- Fator k
- Tolerância para convergência
- Número máximo de iterações
- Frequência de saída de deslocamentos
- Frequência de saída total

A.7 - Carregamentos

Na opção CARREGAMENTOS podem ser introduzidos três tipos de carga para o problema em estudo: cargas nodais, gravitacionais ou de bordo.

A.7.1 - Datas

Na opção DATAS são fornecidas as datas de ocorrência de cada carregamento e o número de incrementos de cargas, conforme Fig. A.12.

A.7.2 - Nodal

Na opção NODAL devem ser incluídas as cargas aplicadas nos nós. São fornecidos o número do nó e as componentes de carga nas direções x e y , como pode ser visto pela Fig. A.13.

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Carregamentos Datas	Hora : 15:19:27 Data : 27/10/92									
<table border="1"> <thead> <tr> <th>CARREG.</th> <th>DATA</th> <th>No. INCR.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>28.00</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>40.00</td> <td>11</td> </tr> </tbody> </table>			CARREG.	DATA	No. INCR.	1	28.00	2	2	40.00	11
CARREG.	DATA	No. INCR.									
1	28.00	2									
2	40.00	11									
<p><F1> Help <ESC> grava <F2> elimina <F3> imprime</p>											

Figura A.12 - Tela de datas dos carregamentos

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Carregamento Nodal	Hora : 15:24:18 Data : 27/10/92									
<p>Carregamento : 1</p> <p>No. de nós carregados ==> 2</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>NO'</th> <th>CARGA X</th> <th>CARGA Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>28</td> <td>0.000</td> <td>-5.000</td> </tr> <tr> <td>49</td> <td>0.000</td> <td>-5.000</td> </tr> </tbody> </table>			NO'	CARGA X	CARGA Y	28	0.000	-5.000	49	0.000	-5.000
NO'	CARGA X	CARGA Y									
28	0.000	-5.000									
49	0.000	-5.000									
<p><F1> Help <F2> elimina <F3> imprime <0> sai</p>											

Figura A.13 - Tela de carregamento nodal

A.7.3 - Gravitacional

Na opção GRAVITACIONAL são fornecidos o ângulo de gravidade, medido em relação ao eixo y positivo, e a constante de gravidade, como visto na Fig. A.14.

A.7.4 - Bordo

Esta opção é utilizada nos casos onde ocorrem cargas distribuídas nos bordos dos elementos. São fornecidos o número do elemento, uma lista de pontos nodais que compõem o bordo do elemento e os valores das componentes normais e tangenciais de carga, conforme o ilustrado na Fig. A.15.

A.8 - Saídas

Este grupo apresenta quatro opções: dados de entrada, cálculo, vídeo e impressora.

A.8.1 - Dados de entrada

O acionamento desta opção produz a impressão de todos os dados relativos ao problema corrente.

A.8.2 - Cálculo

A opção CÁLCULO ativa o módulo de processamento do sistema.

A.8.3 - Vídeo

Apresenta as saídas produzidas pelo cálculo, no monitor de vídeo.

A.8.4 - Impressora

Apresenta as saídas produzidas pelo cálculo, na impressora.

A.9 - Fim

A opção FIM encerra o programa e retorna ao sistema operacional.

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Carregamento Gravitacional	Hora : 15:31:44 Data : 27/10/92
Carregamento : 1		
Angulo do eixo de gravidade - em graus (medido com eixo Y positivo): 0.000		
Constante de gravidade: 10.000		

Figura A.14 - Tela de carregamento gravitacional

Programa: Visco Trabalho: VPB1	Carregamento Bordo	Hora : 15:36:15 Data : 27/10/92
Carregamento : 1		
No. de bordos carregados ==> 1		
ELEM.	BORDO	CARGA NORMAL E TANGENCIAL
3	7 8 9	0.000 2.000 0.000 2.000 0.000
<F1> Help <F2> elimina <F3> imprime <0> sai		

Figura A.15 - Tela de carregamento de bordo

ANEXO B - DERIVADAS DA FUNÇÃO DE PLASTIFICAÇÃO F

B.1 - Vetor de fluxo plástico

Conforme visto no item 4.2.1.4, no vetor de fluxo plástico $\{a\}$, descrito na equação (4.11), aparecem os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 que dependem das derivadas da função de plastificação F em relação aos invariantes de tensão I_1 , J_2 e θ .

Os coeficientes são

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\beta}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2}} \right] \quad (B.1)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[\lambda + \frac{\lambda (\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1) + 4 \alpha \sqrt{J_2}}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2}} \right] \quad (B.2)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (B.3)$$

em que para $\text{sen}3\theta \leq 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \text{ sen} \left[\frac{1}{3} \text{ arc cos} (- c_2 \text{ sen} 3\theta) \right]}{\text{sen} \left[\text{ arc cos} (- c_2 \text{ sen} 3\theta) \right]}$$

e para $\text{sen}3\theta > 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\theta \text{sen} \left[\pi/3 - 1/3 \text{arc cos}(c_2 \text{sen}3\theta) \right]}{\text{sen} \left[\text{arc cos}(c_2 \text{sen}3\theta) \right]}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[1 + \frac{\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1}{\sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2}} \right]$$

O coeficiente C_3 é

$$C_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{B.4})$$

B.2 - Matriz H

No item 4.2.1.5, foi mostrado o desenvolvimento da matriz H. Através da equação (4.17), aparecem as derivadas de $\{a\}$ em relação à $\{\sigma\}$. Nestas surgem derivadas segundas de F em relação à $\{\sigma\}$, como

$$\frac{\partial C_1}{\partial \{\sigma\}} = C_{11} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + C_{12} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + C_{13} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (\text{B.5})$$

onde

$$C_{11} = \frac{\partial C_1}{\partial I_1} = \frac{2 \alpha \beta^2 J_2}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.6})$$

$$C_{12} = \frac{\partial C_1}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}$$

onde

$$\frac{\partial C_1}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{-2\alpha\beta^2 I_1 \sqrt{J_2}}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.7})$$

e

$$\frac{\partial C_1}{\partial \theta} = \frac{\partial C_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (\text{B.8})$$

com

$$\frac{\partial C_1}{\partial \lambda} = \frac{2\alpha\beta J_2^{3/2}}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2 \right]^{3/2}}$$

O coeficiente C_{13} é

$$C_{13} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}$$

A derivada do coeficiente C_2 em relação à $\{\sigma\}$ que aparece em (4.17) é

$$\frac{\partial C_2}{\partial \{\sigma\}} = C_{21} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + C_{22} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + C_{23} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (\text{B.9})$$

onde

$$C_{21} = \frac{\partial C_2}{\partial I_1} = \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \right) - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{B.10})$$

com

$$\frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \right) = \frac{-2 \alpha \beta^2 I_1 \sqrt{J_2}}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) = \frac{2 \alpha \beta J_2^{3/2}}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.12})$$

O coeficiente C_{22} é

$$C_{22} = \frac{\partial C_2}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial C_2}{\partial \theta} \quad (\text{B.13})$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_2}{\partial \sqrt{J_2}} &= \frac{\partial^2 F}{\partial (\sqrt{J_2})^2} - \frac{\partial}{\partial \sqrt{J_2}} \left(\frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \right) \frac{\partial F}{\partial \theta} - \\ &\quad \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \sqrt{J_2}} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (\sqrt{J_2})^2} = \frac{2 \alpha \beta^2 I_1^2}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sqrt{J_2}} \left(\frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \right) = - \frac{\text{tag}3\theta}{J_2} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \sqrt{J_2}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta \partial \sqrt{J_2}} \quad (\text{B.17})$$

e

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta \partial \sqrt{J_2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^3 + 4 \alpha \lambda J_2^{3/2}}{[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2]^{3/2}} \right]$$

O coeficiente C_{23} é

$$C_{23} = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial C_2}{\partial \theta} \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\frac{\partial C_2}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sqrt{J_2} \partial \theta} - \left(\frac{\text{tag} 3\theta}{\sqrt{J_2}} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{3}{\sqrt{J_2} \cos^2 3\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{B.19})$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.20})$$

com

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \frac{2 \alpha J_2^2}{[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2]^{3/2}} \quad (\text{B.21})$$

Sendo que para $\text{sen} 3\theta \leq 0$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} = \frac{-c_1 c_2}{\sin^2 \left[\arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right]} \left\{ (1 - c_2^2) \right. \\ \left. - \frac{3 \sin 3\theta \sin \left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right]}{\sin \left[\arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right]} + \right. \\ \left. c_2 \cos^2 3\theta \cos \left[\frac{1}{3} \arccos(-c_2 \sin 3\theta) \right] \right\}$$

e para $\sin 3\theta > 0$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} = \frac{-c_1 c_2}{\sin^2 \left[\arccos(c_2 \sin 3\theta) \right]} \left\{ (1 - c_2^2) \right. \\ \left. - \frac{3 \sin 3\theta \sin \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \sin 3\theta) \right]}{\sin \left[\arccos(c_2 \sin 3\theta) \right]} + \right. \\ \left. c_2 \cos^2 3\theta \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(c_2 \sin 3\theta) \right] \right\}$$

A derivada do coeficiente C_3 em relação à $\{\sigma\}$ é

$$\frac{\partial C_3}{\partial \{\sigma\}} = C_{31} \frac{\partial I_1}{\partial \{\sigma\}} + C_{32} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\sigma\}} + C_{33} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$C_{31} = \frac{\partial C_3}{\partial I_1} = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \quad (\text{B.23})$$

com

$$\frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) = \frac{2 \alpha \beta J_2^{3/2}}{\left[(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4 \alpha J_2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.24})$$

O coeficiente C_{32} é

$$C_{32} = \frac{\partial C_3}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag}3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial C_3}{\partial \theta} \quad (\text{B.25})$$

onde

$$\frac{\partial C_3}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left[\frac{3}{J_2^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \sqrt{J_2}} \right] \quad (\text{B.26})$$

e

$$\frac{\partial C_3}{\partial \theta} = 3 C_3 \text{tag}3\theta - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.27})$$

O coeficiente C_{33} é

$$C_{33} = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial C_3}{\partial \theta} \quad (\text{B.28})$$

BIBLIOGRAFIA

1. ANDENAES, E., GERSTLE, K., KO, H.Y. Response of mortar and concrete to biaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.103, n.4, p.515-526, Aug. 1977.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto protendido*: NBR-7197. Rio de Janeiro, 1989.
3. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto e execução de obras de concreto armado*: NBR-6118. Rio de Janeiro, 1982.
4. BALAKRISHNAM, S., MURRAY, D.W. Finite element prediction of reinforced concrete behaviour. *Structural Engineering Report*, n.87, p.367-387, Apr. 1986.
5. BATHE, K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982. 735p.
6. BAZANT, Z.P. Constitutive law for nonlinear creep of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.103, n.1, p.113-124, Feb. 1977.
7. BAZANT, Z.P. Input of creep and shrinkage characteristics for a structural analysis program. *Matériaux et Constructions*, v.15, n.88, p.283-290, juil./août 1982.
8. BAZANT, Z.P. Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL

RESEARCH ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 1980, Lausanne Papers... Chichester: John Wiley, 1982. cap.7, p.163-256.

9. BAZANT, Z.P., ASGHARI, A. Computation of age-dependent relaxation spectra. *Cement and Concrete Research*, v.4, n.4, p.567-579, July 1974.
10. BAZANT, Z.P., OH, B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, v.16, n.93, p.157-177, mai./juin. 1983.
11. BAZANT, Z.P., PANULA, L. Practical prediction of time-dependent deformations of concrete. Part I e II: Shrinkage. *Matériaux et Constructions*, v.11, n.65, p.307-328, sept./oct. 1978.
12. BAZANT, Z.P., WU, S.T. Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.99, n.2, p.367-387, Apr. 1973.
13. BAZANT, Z.P., WU, S.T. Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. *Matériaux et Constructions*, v.7, n.34, p.45-60, 1974.
14. BREBBIA, C.A., FERRANTE, A.J. *The finite element technique*. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1975. 412p.
15. CAMPOS FILHO, A. *Análise teórico-experimental de elementos de concreto armado para obtenção de modelo matemático*. São Paulo: USP, 1987, 293p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil).
16. CERVENKA, V. Constitutive model for cracked reinforced concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, v.82, n.6, p.877-882, 1985.
17. CHEN, A.C.T., CHEN, W.F. Constitutive relations for

- concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE. v.101, n.4, p.456-481, Feb. 1984.
18. CHEN, W.F. *Plasticity in reinforced concrete*. New York: McGraw-Hill, 1982. 356p.
 19. CHEN, W.F., HAN, D.J. *Plasticity for structural engineers*. New York: Springer-Verlag, 1988. 606p.
 20. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *Application of the finite element method to two-dimensional reinforced concrete structures*. Paris, 1983. 89p. (Bulletin d'Information, 159).
 21. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response*. Lausanne, 1991. 296p. (Bulletin d'Information, 210).
 22. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *CEB design manual on structural effects of time-dependent behavior of concrete*. Paris, 1984. (Bulletin d'Information, 142).
 23. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *CEB-FIP model code 1990*. Lausanne, 1991. (Bulletin d'Information, 203/205).
 24. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *Concrete under multi-axial states of stress constitutive equations for practical design*. Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 156).
 25. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. *Evaluation of time dependent behavior of concrete*. Lausanne, 1990. (Bulletin d'Information, 199).
 26. CREUS, G.J. *Relações elastoplásticas em tração e compressão*. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 25p. (Cader-no técnico, 49).

27. CREUS, G.J. *Relações elastoplásticas no caso multiaxial*. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 33p. (Caderno técnico, 55).
28. CREUS, G.J. *Viscoelasticity: basic theory and applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 169p.
29. DOZ, G. N. *Influencia del confinamiento en la respuesta estática de vigas de hormigón pretensado sin adherencia*. Tucumán-Argentina: UNT, 1978, 120p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
30. ELWI, A.E., HRUDEY, T.M. Finite element model for curved embedded reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.115, n.4, p.740-745, Apr. 1989.
31. FAIRBAIRN, E.M.R., LONGO, H.I., ZHENG, R. Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto - estudo teórico experimental. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 24, 1987, Porto Alegre. *Anais*. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1987. v.2, p.103-117.
32. FLUGGE, W. *Viscoelasticity*. Berlin: Springer, 1975. 194p.
33. GILBERT, R.I., WARNER, R.F. Tension stiffening in reinforced concrete slab. *Journal of the Structural Division, ASCE*, n.104, p.1885-1900, 1978.
34. GOBETTI, L.C.W., CAMPOS FILHO, A., CAMPAGNOLO, J.L. *Análise teórico-experimental das deformações em vigas de concreto armado*. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1983. 56p. (Caderno técnico, 48).
35. GONGCHEN, D., XUEKANG, T. Contrainte ultime dans câbles non-adhérents de poutres en béton a précontrainte partielle. *Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics*, n.462, p.75-88, Fev. 1988.

36. HINTON, E. *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*. Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.
37. HINTON, E., OWEN, D.R.J. *Finite element software for plates and shells*. Swansea: Pineridge Press, 1984. 403p.
38. HOFBECK, J.A., IBRAHIM, I.O., MATTOCK, A.H. Shear transfer in reinforcement concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, p.119-128, Feb. 1969.
39. KUPFER, H.B., GERSTLE, K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.99, n.4, p.853-866, Aug. 1973.
40. LEONHARDT, F., WALTHER, R. Beiträge zur behandlung der schubprobleme im stahlbetonbau. *Beton und Stahlbetonbau*, v.57, n.7, p.161-173, Juli 1962.
41. MATTOCK, A. H., YAMAZAKI, J., KATTULA, T. Comparative study of prestressed concrete beams, with and without bond. *Journal of the American Concrete Institute*, v.68, n.2, p.116-125, Feb. 1971.
42. NAYAK, G., ZIENKIEWICZ, O.C. Elasto-plastic stress analysis; a generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.5, n.1, p.113-135, Sept./Oct. 1972.
43. NGO, D., SCORDELIS, A.C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of the American Concrete Institute*, v.64, n.3, p.152-163, Mar. 1967.
44. OTTOSEN, N.S. A failure criterion for concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.103, n.4, p.527-535, Aug. 1977.

45. OTTOSEN, N.S. Constitutive model for short-time loading of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.105, n.1, p.127-41, Feb. 1979.
46. OWEN, D.R.J., HINTON, E. *Finite element in plasticity: theory and practice*. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594p.
47. OWEN, D.R.J., HINTON, E. *Finite element programing*. London: Academic Press, 1977. 305p.
48. PANDE, G.N., OWEN. D.R.J., ZIENKIEWICZ, O.C. Overlay models in time-dependent non-linear material analysis. *Computers and Structures*, v.7, n.3, p.435-443, 1977.
49. PINTO, J.D.S *Adaptação do programa NONSAP de um elemento de armadura para análise de estruturas de concreto armado*. Rio de Janeiro: PUC, 1982. 126p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
50. SENZALE, B.C. *Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos*. Porto Alegre: CPGEC, 1991, 109p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
51. SCANLON, A., MURRAY, D.W. Time-dependent reinforced concrete slab deflection. *Journal of the Structural Division*, ASCE, n.100, p.1911-1924, 1974.
52. SOUZA, L.T. *Análise de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos com geração automática da armadura*. Rio de Janeiro, PUC/RJ, 1981. 107p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil).
53. STRINCKLIN, J.A., HAISLER, W., REISEMANN, W. Evaluation of solution procedures of material and/or geometrically non-linear structural analysis. *AIAA Journal*, v.11, n.3 p.292-299, 1973.

54. VASCONCELOS, A.C. *Manual prático para a correta utilização dos aços no concreto protendido em obediência às normas atualizadas*. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora Ltda, 1980. 64p.
55. VIDAL, A.G.R. *CLIPPER versão Summer 87 vol 1*. Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora Ltda, 1989. 546p.
56. ZIENKIEWICZ, O.C. *The finite element method*. London: McGraw-Hill, 1986, 787p.
57. ZIENKIEWICZ, O.C., CORMEAU, I.C. Visco-plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.8, p.821-815, 1974.
58. ZIENKIEWICZ, O.C., PHILLIPS, D.V., OWEN, D.R.J. Finite element analysis of some concrete non-linearities: theory and examples. In: SEMINAR ON CONCRETE STRUCTURES SUBJECTED TO TRIAXIAL STRESSES. *Papers*. Bergamo: IABSE, 1974. p.1.21.