

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMATICA

INVERSAO NUMERICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE  
POR POLINOMIOS TRIGONOMETRICOS E DE LAGUERRE

LILIANE BASSO BARICHELLO

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Julio Cesar Ruiz Claeysen, apresentada ao Instituto de Matemática da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

PORTO ALEGRE  
1988

UFRGS  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS  
BIBLIOTECA CENTRAL DE MATEMATICA

## RESUMO

Neste trabalho são desenvolvidos métodos numéricos para inversão da transformada de Laplace, fazendo-se uso de polinômios trigonométricos e de Laguerre. Sua utilização é ilustrada num problema de fronteira móvel da área de engenharia nuclear, através do algoritmo computacional ALG-619.

Uma revisão dos aspectos analíticos básicos da transformada de Laplace e sua utilização na resolução de equações diferenciais parciais é apresentada de maneira sucinta.

## ABSTRACT

In this work are developed numerical methods for Laplace Transform inversion, by trigonometrical (ALG-619) and Laguerre polynomials.

The ALG-619 algorithm is applied to a diffusion with moving boundary problem in nuclear field.

Basic analytical aspects of Laplace Transform and its use in solution of partial differential equations are reviewed.

# INDICE

RESUMO

ABSTRACT

DEDICATÓRIA

AGRADECIMENTOS

|       |  |    |
|-------|--|----|
| I.    | O MÉTODO OPERACIONAL EM PROBLEMAS DE DIFUSÃO .....   | 9  |
| 1.    | O Método Operacional .....   | 10 |
| 2.    | Distribuição de temperatura em uma barra com temperatura fixa nos extremos .....                 | 11 |
| 3.    | Fluxo linear de calor numa barra semi-infinita .....   | 20 |
| II.   | INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE .....   | 25 |
| 1.    | Aspectos Gerais sobre os Métodos de Inversão ..  | 26 |
| 2.    | Inversão com Polinômios de Laguerre .....  | 33 |
| 2.1   | - Inversão Numérica da transformada de Laplace usando Polinômios de Laguerre Generalizados ..... | 38 |
| 2.1.1 | - Método "especial" para o cálculo dos coeficientes $a_k$ .....                                  | 41 |
| 2.1.2 | - Cálculo dos coeficientes via aproximação da integral de contorno .....                         | 43 |
| 2.2   | - A modificação de Lyness-Giunta .....   | 46 |
| 2.3   | - Escolha de Parâmetros .....  | 51 |
| 3.    | Inversão com Séries de Fourier .....   | 53 |
| III.  | UMA APLICAÇÃO DA INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PELO ALG-619 .....                 | 64 |
| 1.    | O Algoritmo 619 - (ALG 619) .....  | 65 |
| 2.    | ALG-619 modificado .....   | 68 |



|   |    |
|---|----|
| 3. Modelo de fluxo de neutrons dependente do tempo<br>em um reator nuclear leito-fluidizado ..... | 70 |
| IV - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....   | 74 |
| V - APÊNDICE .....  | 76 |
| 1. Definições e Convergência .....  | 77 |
| 2. Analiticidade .....  | 82 |
| 3. Unicidade .....  | 84 |
| 4. Fórmula de Inversão Complexa .....   | 86 |
| 5. Convolução .....   | 90 |
| 6. Propriedades .....   | 91 |

## CAPITULO I

## O METODO OPERACIONAL EM PROBLEMAS DE DIFUSAO

A transformada de Laplace é muito utilizada em problemas que ocorrem em diversas áreas da matemática aplicada; problemas com equações diferenciais lineares com coeficientes independentes do tempo ("time invariant") e que envolvem condições iniciais ou de contorno. Ela permite transformar os problemas, no caso das equações diferenciais ordinárias, em equações algébricas e no caso das equações diferenciais parciais em equações diferenciais com dimensão espacial menor.

Estas "simplificações" decorrem fundamentalmente de propriedades simples da transformada, mas extremamente importantes, e que são expostas no apêndice I.

Neste capítulo, fazendo-se uso das propriedades mais usadas da transformada, introduzimos a discussão do método operacional propriamente dito, que envolve a aplicação de transformada de Laplace, abordando problemas de difusão.

1. O Método Operacional

Consideremos a equação

$$\nabla_u^2 + A_2(x, y, z) \frac{\partial u^2}{\partial t^2} + A_1(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial t} + A_0(x, y, z) u = B(x, y, z, t) \quad (1)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; (x, y, z) \text{ é um ponto numa região dada e } t, \text{ normalmente o tempo, é positivo.}$$

Ainda, como condições iniciais:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) \\ \lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, y, z, t) &= u_1(x, y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

e a condição de contorno é satisfeita de forma

$$G(x, y, z) u + H(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial \eta} = k(x, y, z, t) \quad (3)$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  denota derivada normal.

Agora, considerando a transformada

$$U = \int_0^\infty e^{-st} u(x, y, z, t) dt = L[u] = U(s, x, y, z) \quad (*)$$

e as propriedades referentes a transformadas de derivadas, decorre de (1) que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + [s^2 A_2(x, y, z) + s A_1(x, y, z) + A_0(x, y, z)] U &= \\ = [s u_0 + u_1] A_2(x, y, z) + u_0 A_1(x, y, z) + \int_0^\infty e^{-st} B(x, y, z, t) dt \end{aligned} \quad (4)$$

e a condição de contorno (3) fica substituída por:

$$G(x, y, z) U + H(x, y, z) \frac{\partial U}{\partial \eta} = \int_0^\infty e^{-st} K(x, y, z, t) dt \quad (5)$$

Assim, se podemos determinar  $U$  de (4) e (5), nosso problema se reduz a determinar  $u$  da equação:

$$U(x,y,z,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,y,z,t) dt \quad (*)$$

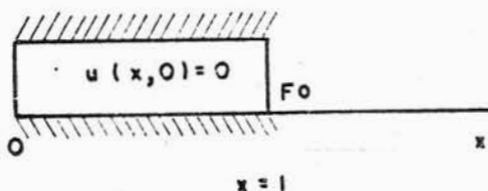
Neste caso, pode acontecer que  $U(x,y,z,s)$  apareça na tabela de transformadas e então diretamente poderemos obter  $u(x,y,z,t)$ . Se não for o caso, obtemos  $u$  de  $U$  pelo Teorema de Inversão, mencionado na seção 5 do apêndice.

O processo de inversão, por sua vez, consta de duas partes. A primeira consiste em determinar a função  $u$  e a segunda verificar que esta solução é realmente a solução da equação diferencial.

Em particular, nesta dissertação nosso interesse é com o primeiro aspecto (ver seção 5, Apêndice). Contudo, no decorrer dos seguintes exemplos indicaremos de maneira conveniente o processo analítico usual em relação ao segundo aspecto.

## 2. Distribuição de temperatura em uma barra com temperatura fixa nos extremos:

Seja  $u(x,t)$  a temperatura em cada ponto de uma barra (Fig. I)



com superfície lateral isolada e com seus extremos ( $x = 0$  e  $X = 1$ ) mantidos à temperatura zero e  $F_0$  respectivamente; quando a temperatura inicial através da barra é zero.

Pretendemos obter uma representação em série desta função temperatura. Esta série deverá convergir rapidamente para  $t$  grande. Procederemos formalmente para obter esta solução, justificando posteriormente nosso resultado.

Tomemos inicialmente a unidade de comprimento como o comprimento da barra e para uma escolha apropriada da unidade de tempo podemos escrever  $K=1$  na equação do calor, onde  $K$  é o coeficiente de difusividade.

O problema de valores na fronteira em  $u(x,t)$  é então dado por:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (0 < x < 1); \quad (t > 0)$$

$$u(x,0^+) = 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$u(0^+,t) = 0; \quad u(1^-,t) = F_0 \quad (t > 0); \quad F_0 = \text{CTE}$$

Usando então as propriedades de transformada  $U(x,s)$  de  $u(x,t)$ , temos:

$$s U(x,s) = U_{xx}(X,s) \quad (0 < x < 1)$$

$$U(0^+,s) = 0, \quad U(1^-,s) = \frac{F_0}{s}$$

Como este problema, pela teoria das equações diferenciais ordinárias, tem uma solução que é contínua em  $x=0$  e  $X=1$ , então  $U(0^+,s) = U(0,s)$  e  $U(1^-,s) = U(1,s)$ . A solução é dada por:

$$U(x,s) = F_0 \frac{\operatorname{senhx}\sqrt{s}}{s \operatorname{senh}\sqrt{s}} \quad (6)$$

onde  $\sqrt{s}$  denota algum ramo da função de valores duplos  $s^{1/2}$ .

Desenvolvendo em série de potências em  $s$  o numerador e o denominador de (6) pode-se observar que na verdade  $U(x,s)$  é uma função analítica de  $s$ , exceto para os pontos singulares isolados (ver [3])

$$s=0, \quad s_n = -n^2 \pi^2 \quad (n=1,2,\dots) \quad (7)$$

onde  $\sinh \sqrt{s} = 0$ . Além disso

$$\lim_{s \rightarrow 0} s U(x,s) = F_0 x \quad (8)$$

e portanto quando  $x \neq 0$  a função  $U(x,s)$  tem um pólo simples em  $s=0$  com resíduo  $F_0 x$ .

Agora, tomando o corte do ramo de  $\sqrt{s}$  no eixo real positivo, temos que  $\sqrt{s}$  é analítica no eixo real negativo. Além disso, pode-se mostrar que  $s_n = -n^2 \pi^2$  são os pólos simples de  $U(x,s)$ , onde os resíduos de  $e^{st} U(x,s)$ , desde que  $e^{st}$  é inteira, são dados por:

$$\begin{aligned} R(U, s_n) &= \lim_{s \rightarrow s_n} (s-s_n) U(x,s) = \lim_{s \rightarrow s_n} (s-s_n) \frac{p(x,s)}{q(x,s)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{P(x,s)}{q(x,s)} \quad ; \quad \text{onde } P(s_n) = q(s_n) = 0 \end{aligned}$$

portanto aplicando L'Hôspital:

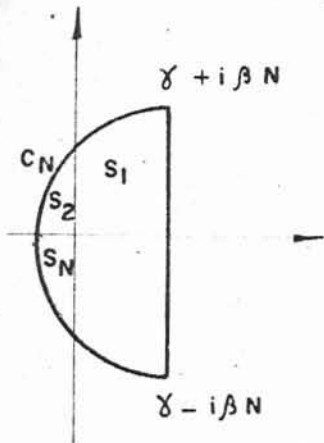
$$\begin{aligned} R(U, s_n) &= \lim_{s \rightarrow s_n} (s-s_n) U(x,s) = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{P'(x,s)}{q'(x,s)} = \\ &= F_0 \frac{i \frac{\text{sen } n\pi x}{-n^2 \pi^2}}{\pi} = (-1)^n 2n\pi i e^{-n^2 \pi^2 t} \\ R(U, s_n) &= F_0 \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \text{sen } n\pi x \quad (9) \end{aligned}$$

Mas, por um lado temos do teorema da inversão que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} U(x,\lambda) d\lambda$$

De outro lado, devido a natureza de  $U(x,s)$ , usando contornos como o da figura II (contendo as singularidades), temos pelo teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\beta N}^{\gamma+i\beta N} e^{\lambda t} U(x,\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_N} e^{\lambda t} U(x,\lambda) d\lambda &= \\ &= \sum_{n=1}^N \rho_n(t) \end{aligned}$$



onde  $\rho_n(t) =$  resíduo de  $e^{\lambda t} U(x,\lambda)$  em  $\lambda=s_n$ .

Assim, com  $N \rightarrow \infty$ , mostrado que as integrais sobre  $c_N$  tendem a zero, teremos que:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(t) \quad (10)$$

ou seja, no nosso caso, por (8) e (9)

$$u(x,t) = F_0 \left[ x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \text{sen } n\pi x \right] \quad (11)$$

A rigor, no processo operacional acima descrito, precisamos mostrar que a integral infinita

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} U(x,\lambda) d\lambda \quad (12)$$

é bem definida, logo, satisfaz a equação e finalmente a validade do cômputo de solução por resíduos.

Para o primeiro passo é suficiente estimarmos o comportamento de  $U(x,s)$  para  $\text{Re}(s) \geq \gamma$ . Mais precisamente, se

$$|U(x,s)| < \frac{M}{|s|^k}, \quad \text{Re}(s) \geq \gamma$$

então a integral (12) converge para uma função  $u$  cuja transformada é precisamente  $U$  ([3], teo 8, pg. 184). De fato, tomando

$$s = re^{i\theta}, \quad \sqrt{s} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$$

$$\text{então } \text{Re}(\sqrt{s}) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) > \sqrt{r/2} \geq \sqrt{\gamma/2}$$

assim

$$\left| \frac{\sinh x \sqrt{s}}{\sinh \sqrt{s}} \right| = \left| e^{(x-1)\sqrt{s}} \frac{(1-e^{-2x\sqrt{s}})}{1-e^{-2\sqrt{s}}} \right|$$

$$< \frac{1+e^{-2x\sqrt{\gamma/2}}}{1-e^{-2\sqrt{\gamma/2}}} e^{-(1-x)\sqrt{r/2}} \leq M e^{-(1-x)\sqrt{r/2}}$$

$$\text{onde } M = \frac{2}{(1-e^{-2\sqrt{\gamma/2}})}$$

Assim se  $x \neq 1$ ,  $r^k U(x,s)$  é limitada no semi-plano  $\text{Re}(s) \geq \gamma$ , para todo  $k$  fixo. Na verdade, se  $x_1 < 1$  e  $0 \leq x \leq x_1$  então existe uma constante  $M'$  independente de  $x$ , neste intervalo, tal que:

$$|U(x,s)| < \frac{M'}{|s|^k} \quad \text{Re}(s) \geq \gamma \quad (13)$$



como desejávamos. Assim:  $u(x,t) = L^{-1} [U(x,s)]$  (28)

Além disso, o mesmo resultado nos garante que  $u(x,t)$  é contínua com respeito a  $t$  ( $t > 0$ ) e satisfaz:

$$u(x,0^+) = u(x,0) = 0 \quad (0 \leq x < 1) \quad (28)'$$

$$u_t(x,t) = L^{-1} [s U(x,s)] \quad (0 \leq x < 1)$$

Com relação as derivadas de  $U(x,s)$  com respeito a  $x$ ,

$$U_x(x,s) = F_0 \frac{\cosh x/s}{\sqrt{s} \sinh/s}; \quad U_{xx}(x,s) = s U(x,s)$$

são também de ordem  $O(s^{-k})$ , para todo  $k$  constante, no semiplano, uniformemente com respeito a  $x$  ( $0 \leq x \leq x_1$ ) onde  $x_1 < 1$ . Ora, isto é evidente comparando-as com  $U(x,s)$ . Sendo assim, por ([3], teo 9, pg. 185):

$$u_{xx} = L^{-1} [U_{xx}(x,s)] \quad (0 \leq x < 1) \quad (16)$$

Como  $U_{xx}(x,s) = s U(x,s)$  segue de (15)' que a função (14) satisfaz a equação do calor:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad (0 < x < 1)$$

Mais ainda: a integral de inversão representa uma função contínua de  $x$  quando  $0 \leq x \leq x_1$  e além disso

$$u(0^+,t) = u(0,t) = L^{-1} [U(0,s)] = 0, \quad \text{já que}$$

$U(0,s) = 0$ . No entanto, vimos que a função (14) satisfaz todas as condições do nosso problema de valores na fronteira exceto que

$$u(1^-,t) = F_0 \quad (17)$$

Na verdade é evidente que

$$u(1,t) = L^{-1} [U(1,s)] = L^{-1} \cdot \left| \frac{F_0}{s} \right| = F_0 \quad (18)$$

mas isto não nos assegura que nossa função se aproxima de  $F_0$  quando  $x \rightarrow 1$ , que é uma condição que a função temperatura deve satisfazer.

Vamos então escrever

$$\begin{aligned} \frac{\sinh x \sqrt{s}}{\sinh \sqrt{s}} &= e^{(x-1)\sqrt{s}} \left( \frac{1 - e^{-2x\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} \right) = \\ &= e^{-(1-x)\sqrt{s}} \left( \frac{1 - e^{-2\sqrt{s}} - e^{-2x\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainda: } \frac{1}{F_0} U(x,s) = \frac{1}{s} e^{-(1-x)\sqrt{s}} + G(x,s) \quad (19)$$

onde

$$G(x,s) = \frac{1}{s} e^{-(1-x)\sqrt{s}} \left( \frac{e^{-2\sqrt{s}} - e^{-2x\sqrt{s}}}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} \right)$$

$$\text{Mas } L \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{1-x}{2\sqrt{t}} \right) \right] = \frac{1}{s} e^{-(1-x)\sqrt{s}}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (20)$$

A função erro complementar aqui, é contínua e limitada com respeito a  $t$ , para cada  $x$  fixo; [3] daí ao longo de  $\operatorname{Re}(s) = \gamma$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s} e^{-1(1-x)\sqrt{s}} \right] = \operatorname{erfc} \left( \frac{1-x}{2\sqrt{t}} \right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Por outro lado, se notamos que

$$G(x,s) = \frac{1}{s} e^{-(1+x)\sqrt{s}} \left( \frac{e^{-2(1-x)\sqrt{s}} - 1}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} \right)$$

segue, quando  $\operatorname{Re}(s) \geq \gamma$  e portanto  $\operatorname{Re}(s) > \sqrt{r}/2$ , que

$$|G(x,s)| \leq \frac{1}{r} e^{-\sqrt{r}/2} \left( \frac{2}{1 - e^{-\sqrt{2}\gamma}} \right) \quad 0 \leq x \leq 1$$

Daí  $G(x,s)$  é de ordem  $O(s^{-k})$  num semiplano, onde  $k$  é constante qualquer, uniformemente com respeito a  $x$ . Consequentemente

$L^{-1} [G(x,s)] = g(x,t)$  que é contínua com respeito a  $x$  e

$g(1^-,t) = g(1,t) = L^{-1} [G(1,s)] = 0$ , já que  $G(1,s) = 0$

Portanto, de (19) e (20)

$$u(x,t) = F_0 \left| \operatorname{erfc} \frac{(1-x)}{2\sqrt{t}} + g(x,t) \right| \quad (21)$$

e quando  $t > 0$ ,  $u(1^-,t) = F_0 [\operatorname{erfc} f(0) + g(1,t)] = F_0$ .

Assim (14) satisfaz (17) e fica completamente estabelecida como uma solução do nosso problema de valores na fronteira.

Assim sendo, vimos até aqui que a função

$$U(x,s) = F_0 \frac{\operatorname{senh} x \sqrt{s}}{\operatorname{senh} \sqrt{s}}$$

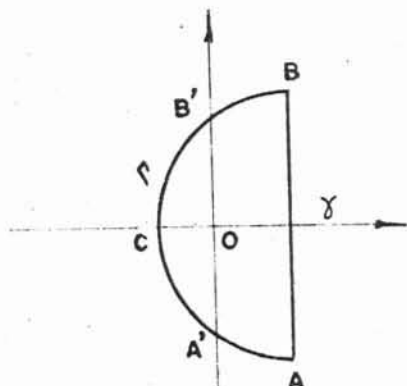
é analítica exceto nos pólos  $s=0$  e  $s=-n^2\pi^2$  e que sua inversão converge para uma função  $u(x,t)$  que é a solução do nosso problema de valores na fronteira.

A representação em série (11) de  $u(x,t)$ , dada anteriormente neste exemplo, será portanto válida se finalmente provarmos que a integral

$$\int_{C_N} e^{zt} U(x,z) dz$$

tomada ao longo da curva  $C_N$ , de uma família de curvas ( $n = 1, 2, \dots$ ) entre os pólos, tende a zero com  $n$  tendendo a infinito. Para isto utilizaremos o conhecido resultado do chamado teorema de Jordan:

Se  $|F(s)| < CR^{-k}$  quando  $s = Re^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ ,  $R > R_0$  onde  $R_0$ ,  $C$ ,  $K$  são constantes e  $k > 0$ , então  $\int e^{st} F(s) ds$  sobre os arcos  $BB'C$  e  $AA'C$  do círculo  $\Gamma$  de raio  $R$  (figura abaixo) tende a zero com  $R \rightarrow \infty$ ,  $t > 0$ .



Para selecionarmos agora curvas  $C_N$  tais que  $|U(x, z)|$  tenha propriedades de ordem aceitáveis se  $z$  está em  $C_N$ , inicialmente notemos que:

$$|\sinh \sqrt{z}|^2 = \sinh^2 \left( \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + \sinh^2 \left( \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

daí, se  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} = a_n$ , onde

$$a_n = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (n=1, 2, \dots) \quad (22)$$

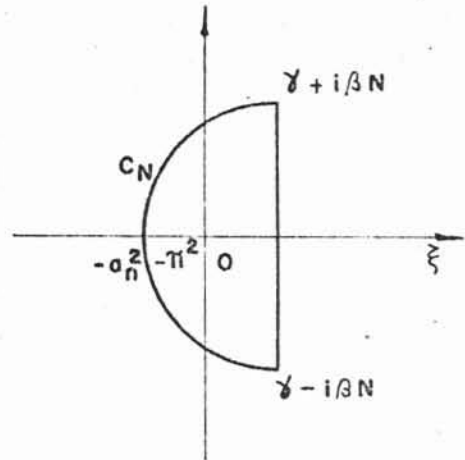
então

$$|\sinh \sqrt{z}|^2 = \sinh^2 \left( \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right) + 1 \quad (23)$$

Ainda tomemos  $C_N$  como o arco da parábola

$$r = \frac{a_n^2}{\sin^2 \theta/2} = \frac{2 a_n^2}{1 - \cos \theta} \quad (24)$$

que fica à esquerda da linha  $\xi = \gamma$ , onde  $\gamma$  é qualquer constante positiva e  $z = \xi + i\eta$  (Fig. III).



Então quando  $z$  está em  $C_N$

$$\left| \frac{z U(x, z)}{F_0} \right|^2 = \frac{\sinh^2(x/r \cos \theta/2) + \sin^2(x/r \sin \theta/2)}{\sinh^2(\gamma/r \cos \theta/2) + 1} < 1$$

pois  $0 < x < 1$  e  $\sinh^2 \gamma$  ocorre quando  $|\eta|$  cresce.

Assim  $|U(x, z)|$  é o  $O(z^{-1})$  em  $C_N$ , com isto a integral tende a zero, usando Jordan, e ainda a série de resíduos de  $e^{zt} U(x, z)$  converge para a integral de inversão para todos os valores positivos de  $t$ . ([3], teo 10, pg. 193).

A série (11) representa então uma solução do nosso problema, que pode ser escrita como:

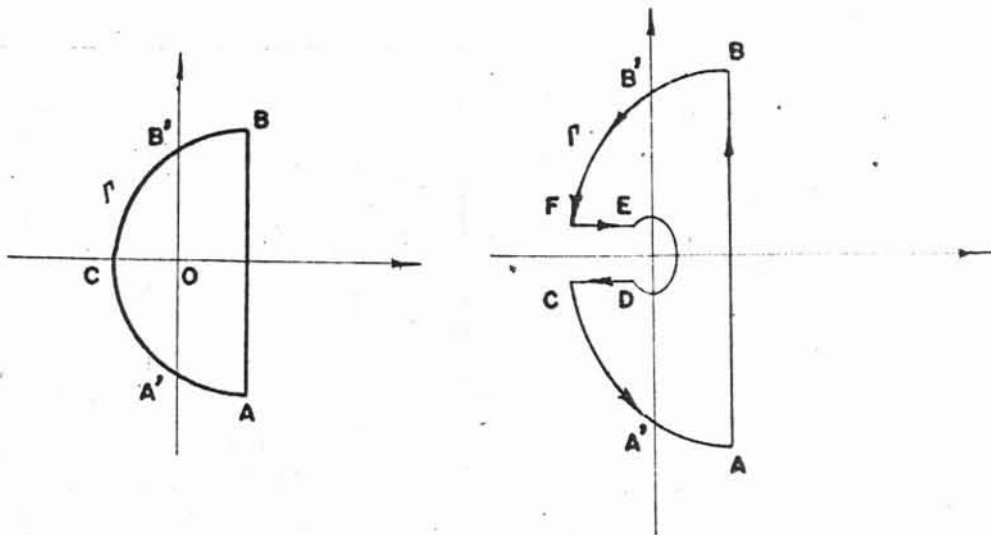
$$u(x, t) = F_0 \left[ x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x \right], t > 0.$$

### 3. Fluxo Linear de calor numa barra seminfinita

A integral de linha para  $f(t)$  obtida no uso do teorema da inversão, normalmente, como já vimos, é avaliada usando-se um contorno fechado, tomando limite e aplicando cálculo de resíduos. Neste sentido muitos dos pro-

blemas encontrados nas aplicações podem ser classificados de acordo com a natureza de  $F(x,s)$  como função de  $s$ .

I -  $F(x,s)$  é uma função de  $s$  com um número infinito enume\_rável de pólos. Neste caso usamos o contorno abaixo, escolhendo para raio  $R$  do círculo maior  $\Gamma$  uma seqüên\_cia de valores  $R_n$  tal que nenhum destes círculos passem por algum pólo de  $F(x,s)$ . Então, se  $F(x,s)$  satisfaz as condições do teorema de Jordan, a integral sobre o círculo de raio  $R_n$  na figura abaixo (I) tende a zero, com  $n \rightarrow \infty$ . Assim, pelo teorema de Cauchy, o cálculo da integral de linha pode ser substituído pelo limite com  $n \rightarrow \infty$  de  $2\pi i$  vezes a soma dos resíduos do integrando em seus pólos contidos no círculo  $\Gamma$  de raio  $R_n$ . (Como foi feito no exemplo anterior de distribuição de temperatura em uma barra).



II-  $F(x,s)$  tem um "branch point" na origem mas por outro lado tem somente um número finito de pólos. Neste caso usamos o contorno da figura acima. (II)

Se  $F(x,s)$  satisfaz as condições do teorema de Jordan, a integral sobre os arcos BF e AC do círculo  $\Gamma$  tendem a zero quando seu raio  $R$  tende ao infinito. O integrando será "single-valued" dentro e sobre o contorno e assim quando  $R \rightarrow \infty$  a solução é obtida com uma integral real infinita (derivada das integrais ao longo de CD e EF) juntamente com  $2\pi i$  vezes a soma dos resíduos nos pólos dentro do contorno, e possivelmente um termo que se origina da integral sobre um pequeno círculo em torno da origem. Esta situação passa a ser considerada, na análise do fluxo linear de calor num sólido semi-infinito, caracterizado pelo problema:

$$v_t(x,t) = K v_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (25)$$

com

$$v(0,t) = v_0, \quad t > 0, \quad v_0 = \text{CTE} \quad (26)$$

$$v(x,0) = 0, \quad x > 0 \quad (27)$$

$v$  limitada.

sendo que, usando as propriedades da transformada  $V(x,s)$  de  $v(x,t)$ , temos:

$$V_{xx}(x,s) - \frac{s}{k} V(x,s) = 0, \quad x > 0 \quad (28)$$

com 
$$V(0,s) = \frac{v_0}{s} \quad (29)$$

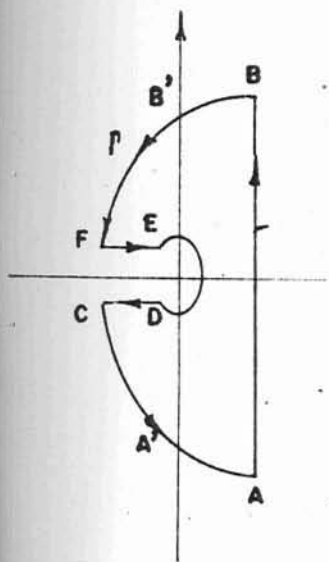
A solução de (28) e (29), que permanece finita quando  $x \rightarrow \infty$ , é:

$$V(x,s) = \frac{v_0}{s} e^{-x\sqrt{s/k}} \quad (30)$$

E então pelo teorema da inversão:

$$v(x,t) = \frac{v_0}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt-x\sqrt{z/k}} \frac{dz}{z} \quad (31)$$

onde o integrando de (31) tem um "branch-point" na origem; então para avaliarmos (31) precisamos escolher um contorno de integração que não contenha a origem. Tomemos então o contorno de figura (III), onde AB é paralelo ao eixo imaginário, ficando a uma distância  $\gamma$  do mesmo. O círculo  $\Gamma$  de raio R e centro na origem, corta esta linha em A e B e o eixo imaginário em A' e B'. Existe ainda um "corte" ao longo do eixo real negativo. Centrado na origem temos um pequeno círculo de raio  $\epsilon$ . Este círculo é aberto em DE e  $\Gamma$  é aberto em FC. O argumento de  $z$  é  $-\pi$  em CD e  $\pi$  em EF.



Chamando C a este contorno fechado, sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zt-x\sqrt{z/k}} \frac{dz}{z} = 0$$

quando  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ . Porém, como

$$\left| \frac{1}{z} e^{-x\sqrt{z/k}} \right| < \frac{1}{|z|} \text{ em BF e AC, as condições do teorema}$$

de Jordan são satisfeitas e portanto a integral sobre BF e AC tende a zero com  $R \rightarrow \infty$



Assim, segue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt-x\sqrt{z/k}} \frac{dz}{z}$$

é igual à soma das integrais sobre CD e EF e sobre o pequeno círculo, quando  $R \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nas integrais ao longo de CD e EF, colocando  $z = \rho e^{-i\pi}$  e  $z = \rho e^{i\pi}$  respectivamente, obtemos

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\rho t} [e^{ix\sqrt{\rho/k}} - e^{-ix\sqrt{\rho/k}}] \frac{d\rho}{\rho}$$

isto é,

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\rho t} \operatorname{sen} x\sqrt{\rho/k} \frac{d\rho}{\rho}$$

ou

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ku^2 t} \operatorname{sen} ux \frac{du}{u}$$

ou ainda

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2} du$$

Finalmente, como obtemos de integral sobre o pequeno círculo o valor 1, de (31) resulta:

$$v(x,t) = v_0 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2} du \right)$$

ou de outra forma:

$$v(x,t) = v_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right)$$

já que  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ .

## CAPÍTULO II

### INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste capítulo trataremos o processo de inversão numérica de Transformada de Laplace pelos métodos de "Lanczos" (Polinômios da Laguerre) e de "Durbin" (Séries de Fourier) e suas variantes devido a Weeks, Piessens, Lyness e Dubner-Abcte, respectivamente.

Com o propósito de termos uma visão geral do processo numérico, incluiremos uma descrição suscinta de outros métodos. Os métodos são avaliados quanto à qualidade ou confiabilidade dos resultados obtidos através deles.

### 1. Aspectos Gerais sobre os Métodos de Inversão:

Como já foi dito, existem muitos problemas cuja solução pode ser encontrada em termos da transformada de Laplace. Contudo, se torna bastante complicado o processo de inversão desta transformada através de técnicas de análise complexa. Ou seja, a dificuldade principal em aplicar-se a técnica da transformada de Laplace é a determinação da função original  $f(t)$  a partir de sua transformada

$$F(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s = v + iw \quad (1)$$

Em vista disto, métodos numéricos tem sido desenvolvidos já que na maioria dos casos os métodos analíticos são insuficientes. Os melhores métodos numéricos conhecidos, para inversão da transformada de Laplace, são baseados na integração numérica da integral de Bromwich,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2)$$

ou na expansão da função original numa série de funções ortogonais.

Na verdade é preciso que se observe, antes de tudo, certos critérios para avaliação de diferentes técnicas numéricas de inversão, como por exemplo: aplicação a uma variedade de tipos comuns de problemas de inversão; precisão numérica; tempo relativo de computação; dificuldades de programação e implementação, e outros. Conscien

tes, no entanto, de que nenhum método é definitivamente superior em todos os critérios.

Na prática existem muitos problemas para os quais inverter numericamente a transformada de Laplace requer um tipo especial de método ou pode ser grandemente facilitado pelo uso de um determinado método.

Ainda assim, como já dissemos, não se pode esperar que qualquer método específico para inversão da transformada funcionará igualmente bem em todos os casos, mesmo porque, a inversão numérica da transformada de Laplace é notoriamente um processo mal-condicionado, ou seja: mudanças arbitrariamente pequenas em  $F(s)$  podem produzir mudanças arbitrariamente grandes no valor de  $f(t)$ . Basta que observemos por exemplo, o caso:

$$L(\text{sen } at) = \int_0^{\infty} e^{-st} \text{sen } at \, dt = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

onde a transformada de Laplace é uniformemente limitada por  $1/a$ , para  $s \geq 0$ , no entanto a função  $\text{sen } at$  oscila entre  $\pm 1$ . Além disto uma pequena perturbação em  $F(s)$  poderá ser ampliada consideravelmente quando nós passamos para  $f(t)$ .

Levando em conta os aspectos anteriormente citados, vários métodos tem sido descritos na literatura, métodos nos quais a transformada inversa é obtida da integral complexa de inversão pelo uso de quadratura numérica, ou se obtém a inversa como uma expansão em série em termos de um conjunto de funções linearmente independentes.

Em síntese, a inversão de Laplace é a solução de uma equação integral do primeiro tipo, e métodos gerais são aplicáveis, entre os quais, seguindo a visão de Davis [6], destacamos especialmente.

A- Método de Bellman, Kalaba e Lockett

Parte da expressão (1)

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f(t)]$$

e usando a troca de variável  $x = e^{-t}$ , obtém

$$F(s) = \int_0^1 x^{s-1} g(x) dx \quad (3)$$

onde  $g(x) = f(-\ln x)$ .

Então, integrando o lado direito de (3), aproximadamente, usando um esquema de Gauss, de ordem  $n$ , em  $(0,1)$ , resulta:

$$F(s) \approx \sum_{i=1}^n w_i x_i^{s-1} g(x_i)$$

e fazendo  $s$  assumir os valores  $s = 1, \dots, n$  temos o sistema linear

$$F(k+1) = \sum_{i=1}^n w_i x_i^k g(x_i) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

ou introduzido  $y_i = w_i g(x_i)$   $i = 1, \dots, n$ , resulta

$$F(k+1) = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Agora, se os elementos na inversa da matriz de Vandermonde  $(x_i^k)$  são designados por  $q_{kj}$ , este sistema pode ser resolvido na forma:

$$Y_j = \sum_{k=0}^{n-1} q_{kj} F(k+1) \quad (4)$$

onde os elementos  $q_{kj}$  são os coeficientes da interpolação fundamental

$$\frac{Q_n(x)}{(x-x_j) Q_n'(x_j)}$$

e  $Q_n(x)$  são os polinômios de Legendre no intervalo  $[0,1]$ . (ver [6]). Também a tabulação dos elementos da matriz inversa pode ser vista em [1].

#### B- Método de Gauss para a Integral de Bromwich

Pela fórmula de inversão de Bromwich (2), temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{st} F(s) ds$$

onde tomamos  $L$  como sendo qualquer linha vertical  $\text{Re}(s) = \text{constante} = c$  à direita da abscissa de convergência da integral de Laplace (1). Para  $t$  fixo, fazendo a troca de variável  $st = u$  e chamando

$$G(u) = u^s F\left(\frac{u}{t}\right)$$

obtemos em (2) que

$$t f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^u u^{-s} G(u) du$$

sendo  $L^*$  agora  $\text{Re}(u) = ct.$

Salzer mostrou que esta integral complexa é possível por "Gauss", ou seja, nós podemos encontrar abcissas complexas  $u_k$  e pesos complexos  $w_k$  tais que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^u u^{-s} G(u) du = \sum_{k=1}^n w_k G(u_k) \quad (5)$$

se  $G(u)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $2n-1$  na variável  $\frac{1}{u}$ .

Neste caso os polinômios ortogonais relevantes, para os quais

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} e^u u^{-s} p_n \left(\frac{1}{u}\right) u^{-k} du = 0 \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\text{são } p_n \left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^n e^{-u} u^{n+s-1} \frac{d^n}{du^n} \left(\frac{e^u}{u^{n+s+1}}\right)$$

onde se nota a dependência polinomial sobre  $s$ .

Quanto aos cálculos de abcissas e pesos, podem ser encontrados, para  $s=1$ , em Stroud/Secrest e Krylov/Skoblyya; para outros valores de  $s$  em Skoblyya/Piesens. [1] Observa-se que para valores grandes de  $u$  os pesos são grandes, refletindo o mal-condicionamento do processo.

Posteriormente Piessens observou que é possível iniciar com um esquema de  $n$  pontos, de precisão  $2n-1$ , e  $n+1$  abcissas e chegar em um esquema de  $2n+1$  pontos, de precisão  $3n+1$ .

C- Métodos de Aproximação

Por este procedimento, assumimos que  $f(t)$  pode ser aproximada sobre  $[0, \infty)$  por uma série finita da forma:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(t) \quad (6)$$

Posteriormente assumimos que as transformadas

$$L[\xi_i(t)] = \psi_i(s)$$

são conhecidas explicitamente e são razoavelmente simples.

Por exemplo,  $\xi_i(t) = e^{\lambda_i t}$ ; então

$$F(s) \sim \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(s) \quad (7)$$

A partir daí o problema será determinar as constantes  $a_i$  tal que o lado direito de (7) aproxime  $F(s)$  para um certo domínio de valores. Esta aproximação pode ser feita por interpolação, por aproximação de raízes mínimas ou por aproximação em alguma outra norma como uma aproximação mínima.

É de importância, neste caso, o domínio de valores, ou pontos dados, sobre o qual realizamos a aproximação, e ainda deve-se dar atenção ao fato de que o comportamento de  $F(s)$  em  $s = \infty$  determina o de  $f(t)$  em  $t = 0$ . Em síntese, é fundamental que se observe quatro aspectos: as funções "especiais"  $\psi_i(s)$ ; a norma;  $n$ ; o domínio na variável  $s$ .

Com relação aos métodos citados, cabe-nos salien



tar que aqueles baseados, na quadratura numérica nos fornecem bons resultados mas podem consumir muito tempo se a transformada inversa é requerida para um grande número de valores da variável independente, quando o procedimento deve ser repetido para cada valor desta variável. Neste sentido, é conveniente o uso de um método de aproximação, onde a inversa pode ser obtida, para qualquer valor da variável independente, por um simples somatório de série.

Procedimentos baseados nesta idéia, da aproximação, tem sido desenvolvidos por vários autores; particularmente usando a expansão da função original numa série de funções ortogonais; em especial funções ortogonais exponenciais, funções trigonométricas, polinômios de Legendre ou polinômios de Laguerre.

No caso das funções ortogonais exponenciais, somente valores reais de  $F(s)$  são requeridos para cálculo dos coeficientes da expansão em série de  $f(t)$ . Contudo, o cômputo de  $f(t)$  a partir de valores de  $F(s)$  no eixo real é numericamente instável.

Para funções trigonométricas e polinômios de Legendre, é necessário mudar o intervalo  $(0, \infty)$  para um intervalo finito, através de uma transformação exponencial.

O procedimento mais natural é o uso das funções de Laguerre. Estas funções formam o sistema ortogonal mais adequado para aproximação no intervalo  $(0, \infty)$ , sendo portanto um dos itens onde concentraremos nossa discussão.

(item 3, cap. II).

Por outro lado, através do estudo comparativo apresentado por Davies e Martin, (ver [5]), e mesmo por resultados práticos (ver cap. 4), sabe-se que os métodos de aproximação baseados na convergência acelerada de Séries de Fourier nos fornecem boa precisão (ver cap. 4) para um domínio razoavelmente amplo de funções.

Ficam assim justificada, dentro do estudo que nos dispusemos a fazer, a atenção que dispensaremos aos métodos de aproximação, em especial os que envolvem Polinômios ou Funções de Laguerre e Séries de Fourier, nos itens a seguir.

## 2. Inversão com Polinômios de Laguerre:

Antes de tratarmos especificamente de métodos de inversão numérica da transformada de Laplace, baseados no uso de Polinômios de Laguerre, é interessante que analisemos um exemplo onde o uso destes polinômios num processo de inversão decorre naturalmente. É o caso, por exemplo, do que Lanczos [10] apresenta relativamente a circuitos elétricos. Também aí, como já falamos anteriormente, transformada de Laplace favorece, no sentido da simplificação das equações, resultando que a transformada de Laplace da "out put function" do circuito é dada como quociente de dois polinômios

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

onde o grau de  $q(s)$  é ao menos um grau maior do que  $p(s)$ .

A partir daí, aplicando-se uma transformação do tipo (ver [9]).

$$s = \frac{1-v}{1+v} = -1 + \frac{2}{1+v}$$

obtemos a transformada  $F_1(v)$  que pode ser expandida em série de Taylor em torno de  $v=0$ . Assim

$$F_1(v) = C_0 + C_1 v + c_2 v^2 + \dots \quad (8)$$

Em problemas de circuitos, os coeficientes  $C_k$  podem ser obtidos por um algoritmo conhecido como divisão sintética de dois polinômios (ver Lanczos [9]). Finalmente o problema então se reduz a inverter uma transformada de Laplace especial, do tipo:

$$\frac{2v^k}{(1+s)^2} = \frac{2(1-s)^k}{(1+s)^{k+2}} = \frac{2(-1)^k s_1^k}{(2+s_1)^{k+2}} \quad (9)$$

onde tomamos  $s = 1 + s_1$ .

Este problema é então resolvido em passos. Em primeiro lugar, introduzindo  $s_1$  como uma nova variável, obtemos:

$$F(s_1) = \int_0^\infty f(t) e^{-t} e^{-s_1 t} dt = \int_0^\infty \psi(t) e^{-s_1 t} dt$$

onde  $\psi(t) = f(t) e^{-t}$

Agora, sabemos que a função indicial da transformada  $\frac{1}{(2+s)}$  é  $f(t) = e^{-2t}$  (isto é,  $F(s) = L[f(t)]$ ).

Sabemos também que a multiplicação por  $t$  significa diferenciação no plano da transformada. Daí a transformação da função indicial

$$t^{k+1} e^{-2t}$$

torna-se

$$F(s_1) = \frac{(k+1)!}{(2+s_1)^{k+2}}$$

De forma semelhante, multiplicação por  $s_1$  no plano de transformada significa diferenciação no plano original. Então a função indicial de

$$F(s_1) = s_1^{k+1} \frac{(k+1)!}{(2+s_1)^{k+2}} \quad (10)$$

torna-se

$$f(t) = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} (t^{k+1} e^{-2t})$$

Por outro lado uma importante classe de polinômios ortogonais, os polinômios de Leguerre, são definidos pela seguinte operação:

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$$

daí

$$L_n(2t) = e^{2t} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-2t}) \quad (11)$$

Assim, com base em (10) e (11) podemos escrever:

$$\text{Função indicial: } \psi(t) = \frac{e^{-2t}}{(k+1)!} L_{k+1}(2t)$$

$$\text{Transformada de Laplace: } F(s_1) = \frac{s_1^{k+1}}{(2+s_1)^{k+2}}$$

Mais ainda:

$$\text{Função indicial: } \psi(t) = e^{-2t} \left[ \frac{L_k(2t)}{k!} - \frac{L_{k+1}(2t)}{(k+1)!} \right]$$

Transformada de Laplace:

$$F(s_1) = \frac{s_1^k}{(2+s_1)^{k+1}} - \frac{s_1^{k+1}}{(2+s_1)^{k+2}} = \frac{2s_1^*}{(2+s_1)^{k+2}}$$

Para voltar à variável original  $s$ , temos de multiplicar  $\psi(t)$  por  $e^t$ . Daí concluímos que a inversão da transformada de Laplace (9) torna-se

$$(-1)^k e^{-t} \left[ \frac{L_k(2t)}{k!} - \frac{L_{k+1}(2t)}{(k+1)!} \right] \quad (12)$$

e introduzindo-se as funções de Laguerre

$$\psi_k(t) = \frac{e^{-t/2} L_k(t)}{k!} \quad (13)$$

as quais formam um sistema ortonormal de funções em  $[0, \infty)$ , da variável  $t$ , a expressão [12] pode ser reescrita na forma

$$(-1)^k [\psi_k(2t) - \psi_{k+1}(2t)]$$

e a inversão da série (8) torna-se

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= c_0 \psi_0(t) - (c_0 + c_1) \psi_1(t) + (c_1 + c_2) \psi_2(t) - \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (c_{k-1} + c_k) \psi_k(2t)
 \end{aligned}$$

escrita em função de polinômios de Laguerre, conforme desejávamos.

Como Lanczos, procedimentos numéricos usando funções de Laguerre foram descritos por Papoulis [15]. Neste caso, a transformada inversa é obtida como uma expansão em série em termos de funções de Laguerre e os coeficientes são obtidos dos coeficientes da expansão em Série de Taylor da transformada de Laplace resolvendo-se um sistema triangular de equações lineares.

Posteriormente, Weeks [15] apresenta uma elaboração e refinamento das idéias de Lanczos e Papoulis para satisfazer os requerimentos do cômputo automático, porém com a diferença que os coeficientes da expressão da transformada inversa são obtidos diretamente por interposição trigonométrica aplicada à transformada de Laplace.

Continuando o desenvolvimento destas idéias, tendo em vista as maiores dificuldades que se apresentam, como o cálculo dos coeficientes da expansão de Laguerre da função original, descrevemos a seguir o método de inversão numérica da transformada de Laplace segundo Piessens e Branders [12], usando os chamados polinômios de Laguerre generalizados. Posteriormente consideraremos uma recente modificação deste método e das idéias de Weeks, apresenta

da por Lyness e Guinta [11].

## 2.1. Inversão Numérica da transformada de Laplace usando Polinômios de Laguerre Generalizados

Consideremos a transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14)$$

a partir da qual pretendemos determinar a função original  $f(t)$ .

Inicialmente assumimos que  $f(t)$  pode ser expandida numa série

$$f(t) = t^a \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k^{(a)}(t) \quad (a > -1) \quad (15)$$

onde  $L_k^{(a)}(t)$  é o polinômio generalizado de Laguerre de grau  $k$ :

$$L_k^{(a)}(t) = \frac{1}{k!} e^t t^{-a} D^k (e^{-t} t^{k+a}) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k+a}{k-m} \frac{t^m}{m!} \quad (16)$$

Na equação (15)  $a$  é um parâmetro livre, cuja escolha será discutida posteriormente, notando-se porém que para  $a=0$ , (15) é uma expansão em polinômios de Laguerre. Os coeficientes  $a_k$  de série expressa pela equação (15) são dados por:

$$a_k = \frac{k!}{\Gamma(k+a+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) L_k^{(a)}(t) dt \quad (17)$$

ou

$$a_k = \frac{k!}{\Gamma(k+a+1)} \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{k+a}{k-m} \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} e^{-t} f(t) t^m dt \quad (18)$$

ou

$$a_k = \frac{k!}{\Gamma(k+a+1)} \sum_{j=0}^k \frac{k+a}{k-j} \frac{1}{j!} \left. \frac{d^j}{ds^j} F(s) \right|_{s=1} \quad (19)$$

Logo, se a transformada de Laplace de  $f(t)$  é conhecida, os coeficientes  $a_k$  da expansão em série da equação (15) podem ser calculados através da equação (19). Ainda, se a equação (15) é truncada após  $N$  termos, uma aproximação de função original é obtida.

Contudo, a equação (19) não é adequada para cálculos numéricos. Existem então outros métodos para o cálculo dos  $a_k$ . Por exemplo, usando uma transformação termo a termo da equação (15) obtemos:

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(a+k+1)}{k!} \frac{(s-1)^k}{s^{k+a+1}} \quad (20)$$

Agora, considerando

$$\phi(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{a+1} F\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad (21)$$

a equação (20) resulta

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(a+k+1)}{k!} z^k \quad (22)$$

tal que

$$a_k = \frac{1}{\Gamma(k+a+1)} \left. \frac{d^k}{dz^k} \phi(z) \right|_{z=0} \quad (23)$$



Embora as equações (19) e (23) sejam teoricamente equivalentes, a equação (23) é mais adaptável aos cálculos numéricos. (ver [2]).

Generalizando os resultados anteriores: se  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$  e se  $f(t)$  pode ser expandida numa série:

$$f(t) = e^{-ct} t^a \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k^{(a)}(bt) \quad (24)$$

onde  $a, b, c$  são parâmetros livres; os coeficientes  $a_k$  na equação (24) são também os coeficientes da expansão em série de potências:

$$\phi(a, b, c)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)}{k!} a_k z^k \quad (25)$$

onde

$$\phi(a, b, c)(z) = \left(\frac{b}{1-z}\right)^{a+1} F\left(\frac{b}{1-z} - c\right) \quad (26)$$

Desta forma os  $a_k$  são dados pela equação (23) substituindo-se  $\phi(z)$  por  $\phi(a, b, c)(z)$  (omitiremos a partir daqui os subscritos  $a, b, c$  e escreveremos apenas  $\phi(z)$ ).

Quanto aos parâmetros  $a, b, c$  na equação (24), são introduzidos na tentativa de suavizar qualquer irregularidade em  $f(t)$  e para acelerar a convergência em (24). Sendo assim, sua escolha e sua influência são importantes e serão discutidos posteriormente.

O cálculo numérico dos coeficientes  $a_k$  é feito tendo em conta que:

(i) Algumas funções  $\phi(z)$  podem ser facilmente expandidas em série de potências através de operações algébricas. (veja exemplo 1 a seguir);

(ii) Para transformadas de Laplace quaisquer, as derivadas na equação (23) podem ser avaliadas por integração em contornos no plano complexo (ver 3.1.2) sendo que (ii) é mais geral (ver [12].).

### 2.1.1. Método "especial" para o cálculo dos coeficientes

$a_k$ :

Exemplo 1: Consideremos a transformada de Laplace

$$F(s) s^{-\nu-1} \exp(-us^{-1}) \quad (27)$$

onde  $u$  é número real positivo arbitrário e  $a$  deverá ser escolhido como  $a=\nu$ , como veremos depois.

Então obtemos de (21)

$$\phi(z) = \exp(-u+uz) \quad (28)$$

e portanto a função original é dada por:

$$f(t) = t^\nu e^{-u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\Gamma(k+\nu+1)} L_k^{(\nu)}(t) \quad (29)$$

De (29) um resultado interessante pode ser obtido. Sabendo-se que

$$L^{-1}[s^{-\nu-1} \exp(us^{-1})] = (t/u)^{\nu/2} J_\nu\{2\sqrt{ut}\} \quad (30)$$

obtemos uma importante expansão em série para a função de Bessel de 1º tipo:

$$J_\nu(x) = e^{-u} (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{\Gamma(k+\nu+1)} L_k^{(\nu)}(x^2/4u) \quad (31)$$

da mesma forma podemos obter:

$$J_\nu(x) = e^u (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{\Gamma(k+\nu+1)} L_k^{(\nu)}(x^2/4u) \quad (32)$$

As equações (31) e (32) são extensões das expansões em série dadas por Sinsworth (ver [12]).

Podemos observar então, como já havíamos comentado em (i), que para alguns tipos de transformada de Laplace a expansão em série de potências da função correspondente  $\phi(z)$ , dada pela equação (8), é conhecida explicitamente ou pode ser facilmente obtida por operações algébricas, como por multiplicação de séries conhecidas, ou, se  $F(s)$  é função racional, por divisão longa.

Ainda muitas transformadas de Laplace podem ser invertidas da mesma forma, em particular tipos de transformadas racionais e irracionais, isto é:

$$F(s) = s^u \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad (33)$$

$$F(s) = s^u \frac{\sqrt{a_0} s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad (34)$$

$$F(s) = s^u \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{\sqrt{b_0} s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{2n-1} s + b_{2n}} \quad (35)$$

$$F(s) = s^\mu \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{\sqrt{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}} \quad (36)$$

onde  $\mu, a_k, b_k$  são números reais arbitrários. Supõe-se no entanto, que  $F(s)$  é analítica para  $\text{Re}(s) \geq 1$ .

Como já foi dito, a situação 3.1.1 caracteriza um método "especial" para o cálculo dos  $a_k$ . A seguir, segundo (ii), apresentaremos um método mais geral:

### 2.1.2. Cálculo dos coeficientes via aproximação da integral de contorno:

Este método é baseado na teoria das funções complexas. Se  $F(s)$  é analítica para  $\text{Re}(s) \geq b/2 - c$ ;  $\phi(z)$  é analítica dentro e sobre o cálculo unitário.

Então temos

$$\frac{\phi^k(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)}{z^{k+1}} dz \quad (37)$$

onde  $C$  é o círculo  $|z| = r$  com  $r \leq 1$ . Substituindo  $z = re^{2\pi i t}$

(38) obtemos:

$$\frac{\phi^k(0)}{k!} = r^{-k} \int_0^1 \phi(r e^{2\pi i t}) e^{-2\pi i t k} dt \quad (39)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Ainda, como  $z^n \phi(z)$  é analítica dentro e sobre  $C$ , temos:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^n \phi(z) dz = \int_0^1 e^{2\pi i (n+1)t} \phi(re^{2\pi i t}) dt = 0 \quad (40)$$

$$h = 0, 1, 2, \dots$$

Combinando (39) e (40):

$$\frac{\phi^k(0)}{k!} = 2r^{-k} \int_0^1 \operatorname{Re} \{ \phi(r e^{2\pi i t}) \} \cos 2\pi k t \, dt \quad (41)$$

e

$$\frac{\phi^k(0)}{k!} = -2ir^{-k} \int_0^1 \operatorname{Im} \{ \phi(r e^{2\pi i t}) \} \operatorname{sen} 2\pi k t \, dt \quad (42)$$

Fazendo  $r=1$  em (41) temos:

$$\operatorname{Re} \{ \phi(e^{i\theta}) \} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)}{k!} a_k \cos k\theta \quad (43)$$

Este resultado também pode ser obtido substituindo-se diretamente (38) em (25).

Contudo, permanece ainda o problema do cálculo dos coeficientes de Fourier em cossenos da função  $\operatorname{Re}\{\phi(e^{i\theta})\}$  que pode ser feito por uma das seguintes fórmulas de aproximação conhecidas:

$$a_k = \frac{2k!}{\Gamma(a+k+p)M} \sum_{p=0}^{\infty} \psi(p\pi/M) \frac{\cos \pi p k}{M} \quad (44)$$

ou

$$a_k = \frac{2k!}{\Gamma(a+k+p)(M+p)} \sum_{l=0}^M \psi\left(\frac{2p+1}{M+1} \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2p+1}{M+1} \frac{k\pi}{2}\right) \quad (45)$$

onde

$$\psi(x) = \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{i}{2} \cotg \frac{x}{2} + \frac{b}{2} \right)^{a+1} F \left( \frac{i}{2} \cotg \frac{x}{2} - c + \frac{b}{2} \right) \right\} \quad (46)$$

sendo que para avaliação das equações (44) e (45) a transformada rápida de Fourier pode ser aplicada, mas geralmente o número de termos necessários em (24) não é grande, logo o uso desta transformada é desnecessário.

Faz-se necessário ainda dizer que o método que acabamos de descrever requer valores de  $F(s)$  para valores de  $s$  sobre o eixo imaginário ou sobre outra linha vertical no plano complexo. Outros métodos são conhecidos com esta característica ([11]); são baseados na avaliação de

$$f(t) = \frac{2e^{dt}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos wt \phi(w) dw \quad (47)$$

onde  $\phi(w) = \text{Re} \{F(d + iw)\}$ ,  $d$  é real tal que  $F(s)$  é analítica para  $\text{Re}(s) \geq d$ . Os métodos diferem apenas no método numérico usado para o cálculo da integral (47).

## 2:2 A modificação de Lyness-Giunta

Introduziremos agora uma modificação do método anterior sugerida por Lyness e Giunta [11], cuja eficiência, segundo os próprios autores, tem sido verificada e confirmada através de muitos experimentos numéricos, já que anteriormente ou autores acreditavam que os métodos fossem equivalentes.

Parte-se novamente de uma expansão de  $f(t)$  em termos de funções de Laguerre, ou seja:

$$f(t) = e^{\sigma t} \sum_{s=0}^{\infty} a_s e^{-bt/2} L_s(bt) \quad \begin{matrix} b > 0 \\ \sigma > \sigma_0 \end{matrix} \quad (48)$$

a qual pode ser mostrada que existe. Sendo que a maior dificuldade em explorar isto numericamente é determinar valores para  $b$  e  $\sigma$ .

A partir daí, usando também as idéias de Piessens-Branders de que os coeficientes  $A_s$  em (48) coincidem com os coeficientes da expansão em Taylor da função  $\phi(z)$ , isto é,

$$\phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s \quad (49)$$

onde

$$\phi(z) = \frac{b}{1-z} F\left(\frac{b}{1-z} - \frac{b}{2} + \sigma\right) \quad (50)$$

e considerando a representação da integral de Cauchy:

$$a_s = \frac{\phi^{(s)}(0)}{s!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)}{z^{s+1}} dz, \quad s \geq 0 \quad (51)$$

onde  $C$  é qualquer contorno que inclua a origem e não inclua qualquer singularidade de  $\phi(z)$ . Por várias razões

toma-se C um contorno singular, centrado na origem, de raio r. (Ver [11]). Sendo assim,

$$a_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\phi(z)}{z^{s+1}} dz = \frac{1}{2\pi r^s} \int_0^{2\pi} \phi(re^{i\theta}) e^{-is\theta} d\theta, \quad s > 0 \quad (52)$$

No entanto, esta integral pode e será aproximada usando a regra m-painel trapezoidal,

$$a_s^{[m,1]}(r) = \frac{1}{r^s m} \sum_{j=1}^m \phi(r e^{2\pi i j/m}) \exp(-2\pi i s j/m) \quad (53)$$

Agora, como  $\phi(z)$  é real quando  $z$  é real e  $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$ , a soma em (53) requer somente  $m/2$  avaliações independentes tanto da parte real como da parte imaginária de  $\phi(z)$ . Assim:

$$a_s^{[m,1]}(r) = \frac{2}{r^s m} \sum_{j=1}^{m/2} \operatorname{Re}\{\phi(re^{2\pi i j/m})\} \cos(2\pi s j/m) \quad (54)$$

$$+ \frac{2}{r^s m} \sum_{j=1}^{m/2} \operatorname{Im}\{\phi(re^{2\pi i j/m})\} \operatorname{sen}(2\pi s j/m)$$

sendo que nesta "modificação" usa-se esta aproximação para  $a_s$  para  $s = 0, 1, \dots, m-1$ .

Ora, vejamos então como os modelos de aproximação usados desde Weeks [15] e mesmo o de Piessens-Branders [12] diferem deste:

Em Lyness-Giunta [11], como podemos ver, desde que  $\phi(z)$  não tem singularidade no interior do círculo  $|z|=r$ , do teorema de Cauchy:



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \phi(z) z^{s-1} dz = \frac{r^s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(re^{i\theta}) e^{is\theta} d\theta = \begin{matrix} a_0 & (s=0) \\ 0 & (s>0) \end{matrix}$$

Combinando este resultado (dividido por  $r^{2s}$ ) com (52) e tomando a soma e a diferença; encontramos:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\phi(z)}{s} \left( \frac{1}{z^s} + \frac{z^s}{r^{2s}} \right) dz = \\ &= \frac{2}{2\pi r^s} \int_0^{2\pi} \phi(re^{i\theta}) \cos s\theta d\theta = \begin{matrix} 2 a_s & (s=0) \\ a_s & (s>0) \end{matrix} \end{aligned} \quad (56)$$

e

$$\begin{aligned} B_s &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\phi(z)}{z} \left( \frac{1}{z^s} - \frac{z^s}{r^{2s}} \right) dz = \\ &= \frac{2}{2\pi r^s} \int_0^{2\pi} \phi(re^{i\theta}) \operatorname{sen} s\theta d\theta = \begin{matrix} 0 & (s=0) \\ i a_s & (s>0) \end{matrix} \end{aligned} \quad (56)a$$

sendo que pela simetria, a integral final em (56)a é puramente imaginária.

Notemos que quando  $s>0$ , claramente,  $A_s$ ,  $-iB_s$  e  $a_s$  definem a mesma quantidade; e em todos os casos,

$$2 a_s = A_s - i B_s \quad (57)$$

A aproximação usada por Weeks [15], consiste em aproximar a representação integral (56) para  $s=0,1,\dots, \frac{m}{2}$ , usando a  $m$ -pánel aproximação do ponto médio:

$$\begin{aligned}
 A_S^{[m,0]}(r) &= \frac{2}{r^S_m} \sum_{j=1}^m \phi \left( re^{\pi i(2j-1)/m} \right) \cos \left( \pi(2j-1)s/m \right) \\
 &= \frac{4}{r^S_m} \sum_{j=1}^{m/2} \operatorname{Re} \left( \phi \left( re^{\pi i(2j-1)/m} \right) \right) \cos \left( \pi(2j-1)s/m \right)
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Sendo a segunda igualdade justificada pelo fato de que  $\phi(z)$  é função analítica, real quando  $z$  é real. Além disto  $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$ , tal que as partes real e imaginária de  $\phi(re^{i\theta})$  são simétricas e anti-simétricas sobre  $\theta = \pi$ . Como o fator coseno é simétrico, segue a segunda igualdade.

Esta aproximação requer  $m/2$  avaliações da função  $\operatorname{Re}(\phi(z))$ . Como

$$\phi(z) = b(1-z)^{-1} F(b(1-z)^{-1} + \sigma - b/2)$$

ela requer também  $m/2$  avaliações das partes real e imaginária de  $F(s)$ .

Em relação as aproximações apresentadas anteriormente, salientamos que Weeks [15] usa a aproximação do ponto médio (58) com  $r=1$ ; já Piessins e Branders [12] propuseram, com  $r=1$ , a aproximação do ponto médio e do ponto extremo. Esta última dada por:

$$\begin{aligned}
 A_S^{[m,1]}(r) &= \frac{2}{r^S_m} \sum_{j=1}^m \phi \left( re^{2\pi i j/m} \right) \cos 2\pi s j/m \\
 &= \frac{4}{r^S_m} \sum_{j=1}^{m/2} \operatorname{Re} \left( \phi \left( re^{2\pi i j/m} \right) \right) \cos 2\pi s j/m
 \end{aligned}
 \tag{59}$$

Resumindo, o método original de Weeks usa aproximação (51) com

$$\begin{aligned}
 (60) \quad r=1, \mu = m/2 \quad e \quad \bar{a}_0 &= \frac{1}{2} A_0^{[m,0]}(r) \\
 \bar{a}_s &= A_s^{[m,0]}(r), \quad s=1, 2, \dots, m/2-1 \\
 \bar{a}_{m/2} &= \frac{1}{2} A_{m/2}^{[m,0]}(r)
 \end{aligned}$$

Piessens/Bronders discutem este método e o método correspondente ao ponto extremo, ao qual podemos nos referir como método de Weeks ajustado, uma vez que é precisamente como o acima, substituindo  $[m,1]$  por  $[m,0]$ .

Por fim, a modificação de Lyness/Giunta usa (51) com

$$r=1, \mu=m-1 \quad e \quad \bar{a}_s = a_s^{[m,1]}(r) \quad s=0, 1, \dots, m-1$$

(61)

Outras modificações podem ser feitas, segundo Lyness/Giunta. Por exemplo usar  $B_s$  no lugar de  $A_s$  em (60) ou  $a_s^{[m,0]}(r)$  no lugar de  $a_s^{[m,1]}(r)$  em (61). Mas apesar de que  $\mu=m/2$  em (60) e  $\mu=m-1$  em (61) sempre é requerido a parte real e imaginária de  $m/2$  valores da função  $F(z)$ .

Como já foi dito anteriormente, a escolha dos parâmetros que se apresentam é de grande importância nas aproximações dos coeficientes  $a_k$ . Como veremos a seguir:

### 2.3 Escolha de parâmetros

Analisando inicialmente as considerações de Piessens [12], onde assumimos que  $f(t)$  pode ser expandida numa série:

$$f(t) = e^{-et} t^a \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k^{(a)}(bt) \quad (24)$$

e, como já foi dito, os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são introduzidos nesta equação na tentativa de afastar qualquer irregularidade em  $f(t)$  e para acelerar a convergência da mesma.

Neste sentido, é muito importante escolher " $a$ " tal que  $t^{-a} f(t)$  possa ser facilmente aproximada por um polinômio. Além disso o parâmetro " $a$ " deve ser determinado tal que  $s^{a+1} F(s)$  seja analítica, não tenha "branch point" no infinito, e então possamos escrever

$$s^{a+1} F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^{-k} \quad (62)$$

sendo que o valor ótimo de " $a$ " é obtido se na equação (62),  $C_0 \neq 0$ .

É importante salientar que devido a introdução do parâmetro  $a$ , uma classe muito grande de transformadas de Laplace podem ser eficientemente invertidas, tornando-se evidente a vantagem do uso dos polinômios generalizados de Laguerre. Contudo, um valor ótimo de  $a$  nem sempre existe. (Ver [11], sec 5, exemplos 5 e 6)..

Já o valor do parâmetro  $c$  é determinante para o comportamento assintótico da série truncada da equação (24) para  $t \rightarrow \infty$ . Se possível é preferível escolher  $-c$  igual à

parte real do polo dominante de  $F(s)$ .

Quanto à escolha do parâmetro  $b$ , pela equação (46) é intuitivamente evidente que sua convergência é melhor quanto mais afastados as singularidades de  $\psi(Z)$  estão do círculo unitário, ou em outras palavras, quando as singularidades de  $F(s)$  estão mais afastados da linha vertical  $\text{Re}(s) = b/2 - c$  no plano complexo. Em vista disso, seria de se pensar que um grande valor de  $b$  é favorável para uma boa convergência da série. Mas neste caso, somente um número pequeno de termos pode ser usado, já que por (44) e (45), o erro relativo do  $a_k$  cresce muito com  $k$ . Se, devido ao erro de arredondamento, não há redução dos coeficientes  $a_k$  depois de  $N+1$  termos, a série é truncada e o erro de truncamento  $\epsilon_N$  é aproximadamente igual ao primeiro termo negligenciado:

$$\epsilon_N \approx a_{N+1} e^{-ct} t^a L_{N+1}^{(a)}(bt) \quad (63)$$

Agora, o maior zero  $\xi$  de  $L_{N+1}^{(a)}(bt)$ , (ver [12]) é dado aproximadamente por:

$$\xi = (4N+2a+2)/b$$

Portanto, para  $t < \xi$  o erro  $\epsilon_N$  oscila; mas para valores grandes de  $t$  o erro cresce muito; sendo que esta discussão é válida somente no caso de convergência rápida da seqüência dos coeficientes  $a_k$ .

A conclusão é que com  $b$  crescendo, somente um pequeno número de termos pode ser usado em (24), e o intervalo de aproximação é menor. Logo, se a função original de-

ve ser conhecida num intervalo grande, devemos tomar um valor pequeno de  $b$  e calcular mais termos na em (24).

No caso de modificação introduzida por Lyness e Giunta, os autores ainda não discutem as escolhas dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $m$  requeridos para definir o método, pretendendo fazê-lo em publicações subsequentes, sendo discutida apenas a escolha de  $r$ , que é uma consequência direta das fórmulas apresentadas. Assim em [11], a partir da influência de  $r$  nos valores dos erros; a influência do tipo de aproximação ( $m$ -panel) usada, e outros critérios, os autores sugerem o uso de  $r=1-\delta$ , onde  $\delta$  é escolhido tal que  $\delta\bar{m} < 2$ , onde  $\bar{m}$  é o maior valor de  $m$  permitido no programa.

### 3. Inversão com Séries de Fourier:

Passamos a analisar um método para inversão numérica da transformada de Laplace, baseado na aproximação através de Séries de Fourier. O método é sugerido por Durbin [7], e na verdade é uma prolongação natural, um aperfeiçoamento de um método anterior apresentado por Dubner e Abate.

A transformada de Laplace de uma função real, definida para  $t$  positivo, localmente integrável, de crescimento exponencial na infinidade e tal que para todo  $t$  no intervalo  $\tau(0, \infty)$  existe uma vizinhança em que a função é de variação limitada, e sua fórmula inversa, já sabemos, são definidas como:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > v \quad (64)$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (65)$$

onde  $s = v+iw$ ;  $v, w \in \mathbb{R}$  e  $v$  arbitrário de tal forma que a parte real de todas as singularidades de  $F(s)$  sejam menores que  $v$ . E como sempre é possível "recolocar" as singularidades de  $F(s)$  à esquerda da origem, se necessário, através de uma translação adequada do eixo imaginário, na discussão que segue assumimos que (64) e (65) existem para  $\text{Re}(s) \geq v > 0$ .

Expandindo (64) em integrais trigonométricas:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \cos wt dt - i \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \sin wt dt \quad (66)$$

ou

$$F(s) = \text{Re}\{F(v+iw)\} + i \text{Im}\{F(v+iw)\} \quad (67)$$

Usando que  $ds=iw$  em (65), obtemos:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{vt} (\cos wt + i \sin wt) (\text{Re}\{F(s)\} + i \text{Im}\{F(s)\}) iw \quad (68)$$

ou

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Re}\{F(s)\} \cos wt - \text{Im}\{F(s)\} \sin wt) dw + \right. \\ \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} (\text{Im}\{F(s)\} \cos wt + \text{Re}\{F(s)\} \sin wt) dw \right] \quad (69)$$

Devido à paridade de  $\text{Re}\{F(s)\}$  e  $\text{Im}\{F(s)\}$ , a parte imaginária em (69) se cancela, resultando:

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos wt - \operatorname{Im}\{F(s)\} \operatorname{sen} wt) dw \right] \quad (70)$$

Mas para  $t < 0$ ,  $f(t) = 0$ , o que significa que

$$\int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos wt + \operatorname{Im}\{F(s)\} \operatorname{sen} wt) dw = 0 \quad (71)$$

Conseqüentemente obtemos três fórmulas para a transformada inversa de Laplace  $f(t)$ , correspondente a  $F(s)$ :

$$f(t) = \frac{2e^{vt}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos wt \, dw \quad (72)$$

$$f(t) = \frac{-2e^{vt}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{F(s)\} \operatorname{sen} wt \, dw \quad (73)$$

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos wt - \operatorname{Im}\{F(s)\} \operatorname{sen} wt) dw \quad (74)$$

A partir disto, segundo Dubner-Abate, cujo trabalho antecedeu o de Durbin [7], tomamos  $h(t)$  uma função real de  $t$ , com  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ , e construímos um conjunto infinito de funções pares,  $2T$ -periódicas,  $g_n(t)$ , considerando secções de  $h(t)$  em intervalos como  $(nT, (n+1)T)$ .

(Veja Fig. 1). Assim:

$$n = 0, 2, 4, \dots \quad g_n(t) = \begin{cases} h(nT-t) & -T < t < 0 \\ h(nT+t) & 0 < t < T \end{cases} \quad (75)$$

$$h(nT+t) \quad 0 < t < T \quad (76)$$

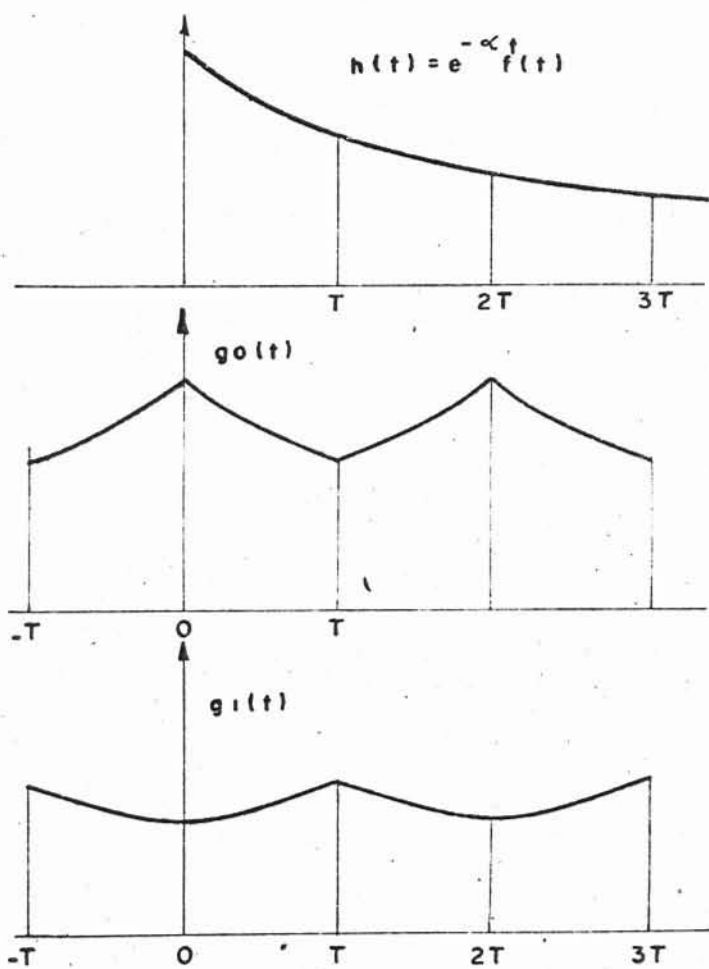
$$h[(n+2)T-t] \quad T < t < 2T \quad (77)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots \quad g_n(t) = \begin{cases} h[(n+1)T+t] & -T < t < 0 \\ h[(n+1)T-t] & 0 < t < T \end{cases} \quad (78)$$

$$h[(n+1)T-t] \quad 0 < t < T \quad (79)$$

$$h[(n-1)T+t] \quad T < t < 2T \quad (80)$$





Desenvolvendo cada  $g_n(t)$  em Série de Fourier em cossenos:

$$g_n(t) = \frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos \Omega_k t; \quad \Omega_k = \frac{k\pi}{T} \quad (81)$$

$$\text{onde } A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^{(n+1)T} h(t) \cos \frac{k\pi}{T} t dt \quad (82)$$

Agora, como sempre é possível escrever

$$h(t) = e^{-vt} f(t) \quad (83a)$$

ou

$$f(t) = e^{vt} h(t) \quad (83b)$$

temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \cos \frac{k\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} \operatorname{Re}\{F(v + \frac{k\pi}{T} i)\} \quad (84)$$

e portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) = \frac{2e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{F(v + \frac{k\pi}{T} i)\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (85)$$

ainda usando (76, 77, 79, 80, 83a, 83b) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} g_n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vkT} [f(2kT+t) + e^{2vt} f(2kt-t)] \quad (86)$$

$$= f(t) + \text{ERRO } 1(v, t, T) \quad (87)$$

ou seja,

$$f(t) = \frac{2e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{F(v + \frac{k\pi}{T} i)\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right] - \text{ERRO } 1 \quad (88)$$

que é a fórmula de Dubner-Abate; numericamente válida somente para  $t \leq T/2$ .

O ERRO 1, de discretização, é uma função de  $v, t, T$ , sendo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vkT} f(2kT-t) e^{2vt}$$

é claramente o fator de maior distúrbio, já que cresce exponencialmente com  $t$ .

Continuando o método anterior, Durbin [7] também parte da consideração da função  $h(t)$  no intervalo  $(nT, (n+1)T)$ , desta vez construindo um conjunto infinito de funções ímpares,  $2T$ -periódicas  $K_n(t)$ ; (ver fig II), por definição:

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad K_n(t) = \begin{cases} h(t) & nT \leq t < (n+1)T \\ -h(2nT-t) & (n-1)T \leq t < nT \end{cases}$$

De forma análoga, nos intervalos  $(-T, T)$ ,  $(0, T)$ ,  $(T, 2T)$  podemos escrever:

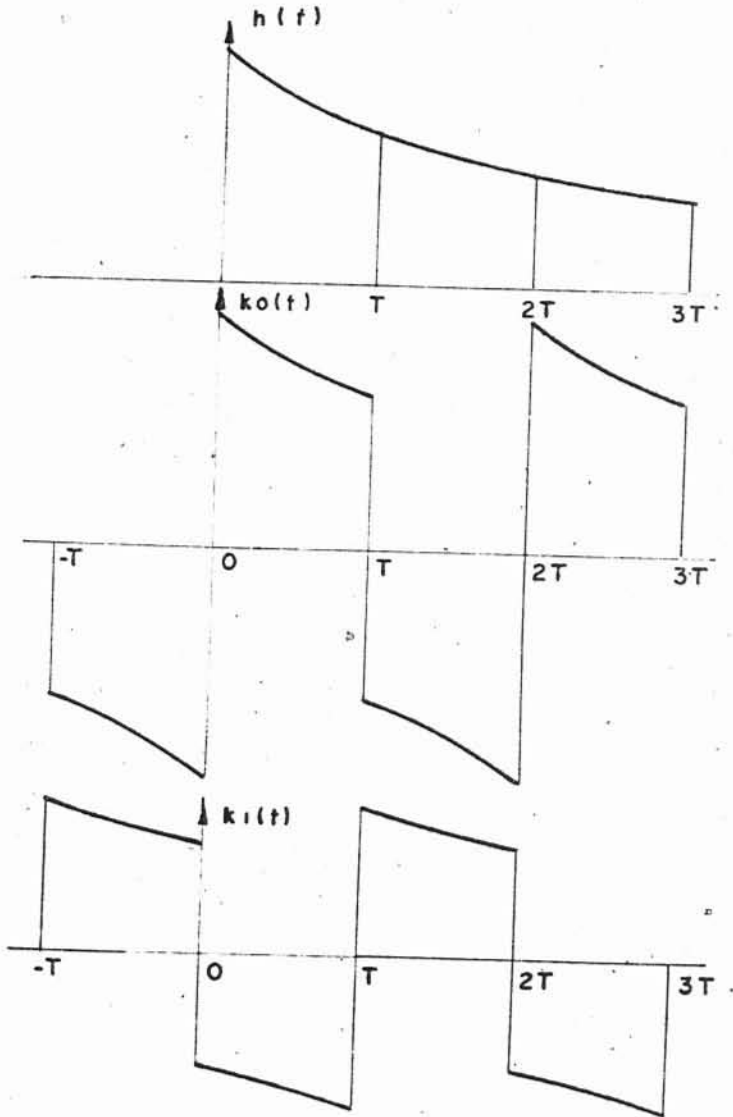
$$n = 0, 2, 4, \dots \quad K_n(t) = \begin{cases} -h(nT-t) & -T \leq t < 0 & (89a) \\ h(nT+t) & 0 \leq t < T & (89b) \\ -h[(n+2)T-t] & T \leq t < 2T & (89c) \end{cases}$$

$$n = 1, 3, 5, \dots \quad K_n(t) = \begin{cases} h[(n+1)T+t] & -T \leq t < 0 & (90a) \\ -h[(n+1)T-t] & 0 \leq t < T & (90b) \\ h[(n-1)T+t] & T \leq t < 2T & (90c) \end{cases}$$

Agora, a representação de Fourier para cada função ímpar  $K_n(t)$  é:

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t = \sum_{k=0}^{\infty} B_{n,k} \operatorname{sen} \Omega_k t \quad (91)$$

$$\text{onde } B_{n,k} = \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-vt} f(t) \operatorname{sen} \Omega_k t dt \quad (92)$$



Somando (92) em relação a  $n$  e comparando com (66):

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} e^{-vt} f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t \, dt = \frac{-2}{T} \operatorname{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\}$$

Então somando (91) em relação a  $n$  e multiplicando ambos os lados por  $e^{vt}$  obtemos uma relação semelhante a (85):

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} K_n(t) = \frac{-2e^{vt}}{T} \left[ \operatorname{Im} \left\{ F\left(v + i \frac{k\pi}{T}\right) \right\} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (93)$$

Igualmente, no intervalo  $(0, 2T)$  encontramos então, usando (83a, 89b, 89c, 90b, 90c):

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{vt} k_n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vkT} [f(2kT-t) - e^{2vt} f(2kT-t)] \quad (94)$$

$$= f(t) + \text{ERRO 2}(v, t, T)$$

e portanto outra representação para  $f(t)$  é:

$$f(t) = \frac{-2e^{vt}}{T} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ F\left(v + i \frac{k\pi}{T}\right) \right\} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t \right] - \text{ERRO 2}(v, t, T)$$

Se analisarmos as duas expressões semelhantes obtidas:

$$\begin{aligned} f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kvT} [f(2kT+t) + e^{2vt} f(2kT-t)] &= \\ &= \frac{2e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right] \end{aligned} \quad (96a)$$

e

$$\begin{aligned} f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2kvT} [f(2kT+t) - e^{2vt} f(2kT-t)] &= \\ &= \frac{-2e^{vt}}{T} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t \right] \end{aligned} \quad (96b)$$

qualquer uma delas não mostra vantagem específica, já que ambos os termos do erro contêm um fator que é exponencialmente crescente com  $t$ , ainda que estes fatores tenham sinais opostos.

Para uma análise mais precisa, notemos que como não existe singularidades de  $F(s)$  no semi-plano direito ( $\text{Re} \{F(s)\} > 0$ ) temos ([7], [3])  $c > 0$ ,  $m \geq 0$  e  $t_0 > 0$  tal que  $|f(t)| \leq c t^m$ , para todo  $t \geq t_0$ .

Sendo assim, vejamos por exemplo o caso que  $|f(t)| < c$ . Tanto ERRO 1( $v, t, T$ ) como ERRO 2( $v, t, T$ ) tem o mesmo limite, dado por:

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{l} \text{ERRO 1}(v, t, T) \\ \text{ERRO 2}(v, T, T) \end{array} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} c e^{-2KvT} (1 + e^{2vt}) = \\
 &= c \frac{e^{-2vT}}{1 - e^{-2vT}} (1 + e^{2vt}) \\
 &\leq c \exp(-vT + vT) \frac{\cosh vt}{\sinh vt} \quad (97)
 \end{aligned}$$

Mas vamos reduzir consideravelmente este limite se somarmos em (96a) e (96b):

$$\begin{aligned}
 f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vKT} [f(2KT+t)] &= f(t) + \text{ERRO 3}(v, t, T) = \\
 &= \frac{e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \text{Re} \{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (98)
 \end{aligned}$$

para  $0 < t < 2T$ .

E esta é então a fórmula de aproximação de Dur-

bin:

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k\pi}{T} \operatorname{Re}\{F(v+k\frac{k\pi}{T})\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{k\pi}{T} \operatorname{Im}\{F(v+k\frac{k\pi}{T})\} \left\{ \sin \frac{k\pi}{T} t \right\} - \operatorname{ERRO3}(v, t, T) \right] \quad (98)$$

para  $0 < t < 2T$ . Sendo  $\operatorname{ERRO3}(v, t, T)$  o erro de discretização, dado por:

$$\operatorname{ERRO3}(v, t, T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vkT} f(2kT+t)$$

Fazendo agora a mesma análise anterior, ou seja, partindo do fato que  $|f(t)| < ct^m$ , vemos que, para  $m = 0$ :

$$|\operatorname{ERRO3}(v, t, T)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c e^{-2KvT} = \frac{c}{e^{2vT} - 1} \quad (99)$$

que é um resultado muito importante, já que o erro agora é limitado por uma quantidade fixa, e nos permite inclusive usar a representação de  $f(t)$  em  $(0, 2T)$  ao invés de somente em  $(0, T/2)$ . (Esta quantidade fixa depende somente do produto  $vT$ ; uma vez que a precisão  $\Omega = \{\max \operatorname{ERRO3}\}$  é escolhida,  $v$  é determinado.

Esta estimativa mostra também, que o erro de discretização pode se tornar arbitrariamente pequeno escolhendo-se  $v$  suficientemente grande.

Para  $m > 0$  (ver [7])

$$|\text{ERRO3}(v, t, T) \leq K(2T)^m e^{-2vT} \left( \frac{\alpha_1}{2vT} + \dots + \frac{\alpha_{m+1}}{(2vT)^{m+1}} \right) \quad (100)$$

onde  $K, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+1} \in \mathbb{R}$ .

De novo vemos que o termo do erro decresce rapidamente com  $vT$ , e depende de  $T$ .

Ocorre também erro de truncamento em (98) devido ao fato de ser somado em (98) somente um número finito de termos  $N$ . Este erro é expresso como:

$$\begin{aligned} \text{ERROT}(N, v, t, T) = & \frac{e^{vt}}{T} \left[ \sum_{k=N+1}^{\infty} \text{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \\ & \left. - \text{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (101) \end{aligned}$$

Então o valor aproximado para a transformada inversa  $f(t)$ , por este método é

$$\begin{aligned} f_N(t) = & \frac{e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \text{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^N \left\{ \text{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \right. \\ & \left. \left. - \text{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right\} \right] \quad (102) \end{aligned}$$

A subrotina ALG-619 calcula a transformada inversa de Laplace usando (102) conforme veremos no capítulo 3.



## CAPITULO III

### UMA APLICAÇÃO DA INVERSAO NUMERICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PELO ALG - 619

Neste capítulo discutiremos uma subrotina FORTRAN para inversão numérica da transformada de Laplace, conhecida como Algoritmo 619 ou ALG 619, a qual será aplicada a um problema de fluxo de neutrons num reator nuclear leito-fluidizado. Esta subrotina foi desenvolvida por Piessens e Huysmans [13] e será utilizada neste trabalho, experimentando modificações, incluindo algumas referentes a escolha da abcissa ótima de convergência.

## 1. O Algoritmo 619 - (ALG 619)

Como já pudemos constatar, existem muitos métodos diferentes para inverter numericamente a transformada de Laplace. Contudo, somente uns poucos métodos são aceitáveis para inversão automática.

O algoritmo 619 tem como base uma das variantes do método de aproximação por Séries de Fourier: o método de Durbin (ver cap. II); segundo os autores Piessens e Huysmens [13] por permitir aplicação a uma grande classe de funções, um grande intervalo de valores de  $t$  e uma estimativa segura do erro, aspectos estes requeridos quando um programa é planejado.

Sendo assim, partindo de uma análise geral, o usuário introduz neste programa:

1. Uma subrotina para avaliar a função complexa  $F(s)$ , da variável complexa  $s$ , a ser invertida;
2. A abcissa de convergência de  $F(s)$ ;
3. O valor de  $t$ ;
4. O erro requerido.

O programa então fornece um valor aproximado de  $f(t)$  no intuito de satisfazer a precisão requerida ou fornece uma observação de que a precisão não pode ser obtida. Sendo que um valor aproximado para a transformada inversa de Laplace,  $f(t)$ , é dado pela fórmula de Durbin, estabelecida no capítulo anterior:

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \frac{F(v)}{2} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right] \quad (1)$$

$$\text{sendo } F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) \geq v \quad (2)$$

A fórmula (1) é implementada numa subrotina FORTRAN dita DLAINV; ainda existem as subrotinas auxiliares DQEXT, que é uma implementação do algoritmo- $\epsilon$  de convergência, e DIMACH, que fornece as constantes dependentes da máquina. (ver [12]).

Para os valores dos parâmetros livres  $a$  e  $T$  (ver cap. II) em (1), os autores sugerem  $T=16t$  e  $a=v+2/t$ , onde  $v$  é a abscissa de convergência de  $F(s)$ . Com estes valores, o erro de discretização (cap. 99) é desprezível. Tomando um valor menor de  $T$ , a eficiência pode aumentar (o número de avaliações requeridos de  $F(s)$  diminuiria), mas as custas da confiabilidade do erro estimado. (que é prioritária).

A série infinita (1) é truncada automaticamente pelo algoritmo- $\epsilon$  de maneira que o erro de truncamento esteja dentro de precisão desejada.

Ainda DLAINV fornece uma estimativa do erro absoluto do resultado computado. Esta estimativa inclui somente o erro de truncamento da avaliação das séries infinitas (1) e não o erro de discretização da fórmula de inversão, que normalmente é muito menor (para valores grandes de  $T$ ).

O usuário tem de conhecer somente o significado dos parâmetros da subrotina DLAINV. A seqüência chamada é CALL DLAINV (FUN, T, V, EPSRE, EPSAB, RESULT, ESTERR, NUM, IER)

sendo que:

Parâmetros de entrada:

FUN: subrotina definindo a transformada de Laplace como uma função complexa

T: valor da variável independente para o qual a transformada inversa tem de ser computada ( $T > 0$ )

C: abcissa de convergência da transformada de Laplace

EPSRE: Erro relativo requerido

EPSAB: Erro absoluto requerido

Parâmetros de saída:

RESULT - transformada inversa de Laplace

EPSERR - estimativa do erro:  $ABS (F(T) - RESULT)$ .

NUM - Número de avaliações do FUN.

IER - Parâmetro que fornece informação sobre o término do algoritmo:

IER = 0 : término normal e seguro (convergência)

IER = 1 : os cálculos foram interrompidos porque o limite do número de avaliações de FUN foi atingido

IER = 2 : o valor de T é menor ou igual a zero.

A listagem do programa contém informações mais precisas.

Contudo, é preciso que se faça restrições quanto a alguns aspectos, como:

- para entrada da função  $F(s)$  a ser invertida é exigida a decomposição da mesma em suas componentes real e imaginária;

- a abcissa de convergência usada é arbitrária;

- o erro é estimado em termos da solução exata (EXA), a qual nem sempre é conhecida.

## 2. ALG-619 modificado:

Tendo em vista os aspectos acima citados, e aplicação no problema (ítem 3, a seguir), introduzimos algumas modificações no ALG-619:

- a decomposição de  $F(s)$  em suas componentes real e imaginária (no caso em que  $F(s)$  é quociente de polinômios) passa a ser feita automaticamente:

- o erro passou a ser estimado em termos de algoritmos significativos corretos: ASC.

- finalmente, introduzimos ao algoritmo a escolha da abcissa ótima de convergência (para  $N$  e  $T$  fixos), considerando-se a definição de parâmetro ótimo quando os valores absolutos dos erros de truncamento e discretização são iguais.

Com relação à abcissa ótima de convergência, o cálculo é feito conforme [8]. Tomando-se:  $f_N$ : o valor aproximado de  $f(t)$  computado por Durbin

$$f_N(t) = \frac{e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(v)\} + \sum_{k=1}^N \left\{ \operatorname{Re}\left\{F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right)\right\} \cos \frac{k\pi}{T} t - \operatorname{Im}\left\{F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right)\right\} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{T} t \right\} \right] \quad (3)$$

e:

$R(N, v, t, T)$  a expressão à direita (entre colchetes) no erro de truncamento correspondente:

$$\text{ERROT } (N, v, t, T) = \frac{e^{vt}}{T} \left[ \sum_{k=-N+1}^{\infty} \left\{ \text{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \right. \\ \left. \left. - \text{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right\} \right] \quad (4)$$

Ignorando a dependência de  $v$  em  $R$ , fixando  $t, T: R(N, v, t, T) \approx R(N), \delta$ , onde  $\delta \in [-1, 1]$  indica a aplicação de um método de aceleração ( $\delta=1$ , nenhum método é usado). Assim:

$$\text{ERROT } (N, v, t, T) \approx \frac{e^{vt}}{T} R(N) \delta. \quad (5)$$

Sendo  $f(t)$ , por Durbin, dada por:

$$f(t) = \frac{e^{vt}}{T} \left[ \frac{1}{2} \text{Re} \{ F(v) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \cos \frac{k\pi}{T} t \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im} \left\{ F\left(v + \frac{k\pi}{T} i\right) \right\} \sin \frac{k\pi}{T} t \right] - \text{ERRO3} \quad (6)$$

$\forall 0 < t < 2T$ , onde

$$\text{ERRO3 } (v, t, T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2vkT} f(2kT+t) \quad (7)$$

é o erro de discretização; temos de (5), (6), (7)

$$f_N(t) \approx f(t) - \frac{e^{vt}}{T} R(N) \delta + O(e^{-2vT}) \quad (8)$$

Agora, escolhendo-se  $v_1, v_2$  grandes,  $v_1 \neq v_2$ , (por exemplo,  $v_1 = 20; v_2 = v_1 - 2$ ), então:

$$f_N^1(t) - f_N^2(t) \approx R(N) \delta (e^{v_2 t} - e^{v_1 t}) / T \quad (9)$$

ou

$$R(N) \delta \approx t \frac{f_N^1(t) - f_N^2(t)}{e^{v_2 t} - e^{v_1 t}} \quad (10)$$

Ainda, como o erro de discretização (7) pode ser escrito como:

$$\text{ERRO3 } (v, t, T) \cong e^{-2vT} f(2T+t) + O(e^{-4vT}) \quad (11)$$

Portanto, usando a definição de abcissa ótima quando os valores absolutos dos erros de discretização e truncamento são iguais, e por (5), (10), (11), encontramos a seguinte expressão para abcissa ótima:

$$v_{\text{OPT}} \cong - \frac{1}{2T+t} \ln \left| \frac{R(N) \delta}{T f_N(2T+t)} \right| \quad (12)$$

a qual é usada no ALG-619 modificado.

### 3. Modelo de fluxo de neutrons dependente do tempo em um reator nuclear leito-fluidizado

Num reator nuclear do tipo leito-fluidizado, a reatividade cresce com a porosidade para um valor máximo e depois decresce. Este reator opera na condição crítica quando a porosidade é a correspondente ao máximo da reatividade. Um desvio da condição crítica pode ser simulado por uma equação de difusão com fronteira móvel. A distribuição do fluxo de neutrons dependente do tempo no núcleo cilíndrico do reator é dada por: [ver [4]].

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left| z \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \right| - \Sigma_a \phi(z, t) + S(z, t) = \frac{1}{V} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} \quad (13)$$

para  $z_1 < z < z(t)$ ,  $0 < z < t_1$ , sujeita às condições de fronteira

$$-\alpha_1 \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + \beta_1 \phi(z,t) = \gamma_1 \quad z=z_1, \quad 0 < t < t_1 \quad (14)$$

$$-\alpha_2 \frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z} + \beta_2 \phi(z,t) = \gamma_2 \quad z=z_2, \quad 0 < t < t_1 \quad (15)$$

e à condição inicial  $C(z,t) = E(z), t=0, z_1 < X < z_2 (0)$  (16)

Onde o movimento da superfície da fronteira é especificado por  $z = z_2(t)$ .

A técnica de inversão numérica da transformada de Laplace por série de Fourier (ALG 619) foi aplicada ao problema (13). Para investigação do grau de precisão da solução de Laplace, foi considerado um problema de fronteira móvel, com solução exata conhecida; cuja formulação é:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} - K\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{para } 0 < X < 1-vt, \quad 0 < t < t_1 \quad (17)$$

sujeito as condições de fronteira

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad 0 < t < t_1 \quad (18)$$

$$\phi(x,t) = 0, \quad x=1-vt, \quad 0 < t < t_1 \quad (19)$$

e condição inicial  $\phi(x,t) = 1, t=0, 0 < x < 1$  (20)

Aplicando à (17) a técnica da transformada de Laplace, a seguinte solução é obtida:

$$\phi(x,t) = e^{-kt} \left| 1 - \frac{L^{-1} \{ \cos h \sqrt{k+s} x \}}{L^{-1} \{ \cos h [\sqrt{k+s} (1-vt)] \}} \right| \quad (21)$$



onde  $L^{-1}$  é o operador inverso de Laplace. A inversão em (21) foi feita numericamente usando o ALG-619 e posteriormente o ALG-619 modificado.

Uma comparação de resultados obtidos pelos métodos da transformada integral generalizada (ordem zero e um) (ver [4]), por inversão numérica da transformada de Laplace, e a solução exata (segundo [4]), é apresentada na tabela I. Observa-se que o ALG 619 e sua modificação apresentam bons resultados. Pela sua simplicidade, este algoritmo pode ser utilizado a uma certa classe de problemas de fronteira, com eficiência.

| x                    | Método               | Valor      | Erro%   | ASC | v                  |
|----------------------|----------------------|------------|---------|-----|--------------------|
| $\frac{1}{5} (1-vt)$ | Ordem zero           | 0,20538    | 47      |     |                    |
|                      | Ordem zero           | 0,14523    | 4.2     |     |                    |
|                      | 1ª ordem             | 0,14354    | 3.0     |     |                    |
|                      | Laplace              | 0,13945    | 0.01    |     |                    |
|                      | Laplace Modif.       | 0,13943    | -       | 5   | 0,36431<br>0,24294 |
|                      | Exato                | 0,13939    | -       |     |                    |
|                      | $\frac{2}{5} (1-vt)$ | Ordem zero | 0,17471 | 45  |                    |
| Ordem zero           |                      | 0,12354    | 2.6     |     |                    |
| 1ª ordem             |                      | 0,12401    | 3.0     |     |                    |
| Laplace              |                      | 0,12259    | 0.3     |     |                    |
| Laplace Modif.       |                      | 0,12039    | -       | 5   | 0,27859<br>0,24294 |
| Exato                |                      | 0,12036    | -       |     |                    |
| $\frac{3}{5} (1-vt)$ |                      | Ordem zero | 0,12693 | 42  |                    |
|                      | Ordem zero           | 0,08976    | 0.1     |     |                    |
|                      | 1ª ordem             | 0,09240    | 3.1     |     |                    |
|                      | Laplace              | 0,08992    | 0.06    |     |                    |
|                      | Laplace Modif.       | 0,08971    | -       | 4   | 0,16897<br>0,24294 |
|                      | Exato                | 0,08966    | -       |     |                    |

Tabela I: Comparação de valores numéricos obtidos para  $\exp(kt)\phi(x,t)$  por diferentes métodos ( $c=1$ ,  $t=0,5$ ,  $v_1=20$ ,  $v_2=v_1-2$ ).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BELLMAN, R.; KALABA, R.E.; LOCKET, J.A. Numerical Inversion of the Laplace Transform. New York, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1966.
- [2] CARLSLAW, H.S.; JAEGER, J.C. Operational Methods in Applied Mathematics. London, Oxford University Press, 1949.
- [3] CHURCHILL, R.V. Operational Mathematics. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1958.
- [4] CLAEYSSSEN, J.R.; VILHENA, M.T.; LOPEZ, J.G.; BARI-CHELLO, L.B. Otimização do algoritmo de inversão numérica ALG-619, Atos 10ª CNMAC, Vol. 2., 1040-1045, 1987.
- [5] DAVIES, B.; MARTIN, B. Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods. Journal of Computational Physics, Vol. 33, 1-32, 1979.
- [6] DAVIS, P.J.; RABINOWITZ, P. Methods of Numerical Integration. New York, Academic Press, 1975.
- [7] DURBIN, F. Numerical Inversion of the Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. The computer Journal, Vol. 17, nº 4, 371-376, 1973.
- [8] HONIG, G.; HIRDES, U. A method for the numerical inversion of Laplace Transforms. Comunicação Privada.
- [9] KREIDER, D.L.; KULLER, R.G.; OSTBERG, D.R.; PERKINS, F.W. An Introduction to Linear Analysis. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966.
- [10] LANCZOS, C. Applied Analysis. London, Sir Isaac Pitmann & Sons, LTD. 1957.
- [11] LYNES, J.N.; GIUNTA, G. A Modification of the weeks Method for Numerical Inversion of the Laplace Transform. Mathematics of Computation, Vol. 47, nº 175, 313-322, 1986.
- [12] PIESSENS, R.; BRANDERS, M. Numerical Inversion of the Laplace Transform using generalised Laguerre Polynomials. PROC. IEE, Vol, 118, nº 10, 1517-1523, 1971.

- [13] PIESSENS, R.; HUYMANS, R. Algorithm 619-Automatic Numerical Inversion of the Laplace Transform [D5]. ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 10, n<sup>o</sup> 3, 348-353, 1981.
- [14] SANSONE, G. Orthogonal Functions. New York, Interscience Publishers, Inc., 1959.
- [15] WEEKS, W.T. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 13, n<sup>o</sup> 3, 419-426, 1966.
- [16] WIDDER, D.V. The Laplace Transform. Princeton, Princeton University Press, 1946.

## APENDICE

### A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados básicos da transformada de Laplace, no espírito do clássico trabalho de Widder [16]. A transformada será definida em termos de funções de variação limitada. Isto permite considerar uma classe ampla de funções que possuem transformadas, em particular a classe de funções de ordem exponencial que é comumente apresentada na literatura da transformada de Laplace.

O estabelecimento da região e abcissa de convergência é o primeiro passo que segue-se à definição da transformada de Laplace. A seguir considera-se o caráter analítico da transformada. A propriedade de unicidade das transformadas, conhecida como o Teorema de Lerch, abre caminho para a fórmula de inversão por meio de integrais de contorno. Ainda será considerado o produto de transformadas através do processo de convolução e finalmente estabeleceremos algumas propriedades de interesse específico na resolução de equações diferenciais.

### Definições e Convergência

Seja  $\alpha(t) = \alpha_1(t) + i \alpha_2(t)$  uma função complexa de variação limitada no intervalo  $0 \leq t \leq R$  para todo  $R$  positivo. Definimos a transformada de Laplace-Stieltjes da função  $\alpha$  através da integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} d\alpha(t) \quad (1)$$

quando ela convergir para um dado valor de  $s$ . Neste caso designamos a integral como  $F(s)$ . Se  $\alpha(t)$  é de variação limitada no intervalo  $\varepsilon \leq t \leq R$  para todo  $\varepsilon$  positivo e  $R$  positivo, então usaremos a notação

$$\int_{0+}^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^R e^{-st} d\alpha(t) \quad (1')$$

quando o limite existir. Por exemplo, se  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) = t \operatorname{sen} (1/t)$ , temos que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = s \int_0^{\infty} e^{-st} t \operatorname{sen} \left(\frac{1}{t}\right) dt, \operatorname{Re}(s) > 0,$$

mesmo que  $\alpha(t)$  não seja de variação limitada em torno da origem.

Agora, se a integral (1) converge para  $s_0 = v_0 + iw_0$ , então, converge para todo  $s = v + iw$  com  $v > v_0$ . Isto decorre do seguinte resultado:

**TEOREMA 1:** Suponhamos que  $\beta(R) = \int_0^R e^{-st} d\alpha(t)$  é limitada para todo  $R$  não-negativo. Então

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-st} \beta(t) d\alpha(t),$$

onde a integral na direita converge absolutamente.

Decorre que a divergência de (1) no ponto  $s=s_0$  implica divergência para todo  $s$  com  $v < v_0$ . Mais precisamente temos três alternativas:

- (a) a integral (1) não converge em nenhum ponto;
- (b) a integral converge para todo ponto;
- (c) a integral converge para  $v > v_c$  e diverge para  $v < v_c$ .

No caso (c) definimos  $v_c$  como sendo a abscissa de convergência. No caso (a) escreveremos  $v_c = \infty$ , e no caso (b),  $v_c = -\infty$ .

Os seguintes exemplos mostram que os três casos podem ocorrer:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{et} dt ; v_c = \infty$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{-et} dt ; v_c = -\infty$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt ; v_c = 0$$

Para estes exemplos, consideramos  $\alpha(t)$  da forma  $\alpha(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ ,  $f$  Riemann integrável (2)

de modo que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

Quando  $\alpha(t)$  é da forma (2), escrevemos

$$L(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3)'$$

e nos referimos a (3)' como sendo a Transformada de Laplace da função  $f(t)$ . Usualmente denotamos (3)' como uma função  $F(s)$  da variável  $s$ . Observe-se ainda que para  $\alpha(t) = 2\sqrt{t}$ , por exemplo, temos

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\pi}{s}$$

no sentido de (1)'. .

Quanto à abscissa de convergência  $v_c$ , pode ser determinada em termos da ordem de crescimento da função  $\alpha(t)$ . Mais precisamente:

TEOREMA 2: a) Suponhamos que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = K \neq 0 \quad (4)$$

Então,  $v_c = K$ . Esta afirmação é também válida nos casos  $K = \pm \infty$ .

b) Suponhamos que  $v_c \geq 0$ . Então

$$v_c = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} \quad (4')$$

c) Suponhamos que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t)|}{t} = 0,$$

e que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$  não existe. Então  $v_c = 0$ .

d) Se  $\alpha(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$  existe e se

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t) - \alpha(\infty)|}{t} = m < 0,$$

Então,  $v_c = M$ .

e) Se  $v_c < 0$ ; então  $\alpha(\infty)$  existe e temos

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |\alpha(t) - \alpha(\infty)|}{t} = 0$$

Observe-se que c) não é válida sem as hipóteses em  $\alpha(t)$ . Pois se  $\alpha(t) = 1 - e^{-t}$  então  $K=0$ , mas  $v_c = -1$ .



Estes resultados decorrem das relações entre a ordem de  $\alpha(t)$  e a convergência da transformada, como segue:

Lema 1: Se  $\alpha(t) = O(e^{\gamma t})$ , quando  $t$  tende ao infinito, para algum real  $\gamma$ ; então a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t), \quad s = v + iw$$

converge absolutamente para  $v > \gamma$ .

Por outro lado, partindo das propriedades de convergência de integral, temos:

Lema 2: Se a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

converge para  $s = s_0 = \gamma + i\delta$  com  $\gamma > 0$  ( $\gamma < 0$ ), então

$$\alpha(t) = o(e^{\gamma t}),$$

quando  $t$  tende ao infinito. (respectivamente  $\alpha(t) = \alpha(\infty) + o(e^{\gamma t})$ ).

Deve ser observado que o caso  $\gamma = 0$  não é válido. Pois, para  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) = 1$  a integral (1) converge para todo  $s$ ; porém  $\alpha(t) \neq 0(1)$  quando  $t$  tende ao infinito. Também, se  $\alpha(t) = 2$  ( $t \leq 1$ ) e  $\alpha(t) = 2\sqrt{t}$  ( $t > 1$ ), a integral (1) para  $s = i$  é dada por

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u}} du$  a qual é convergente. Mas  $\alpha(\infty)$  não existe.

É importante ressaltar que da discussão acima decorre, em particular, que para funções  $f(t)$  que são Riemann integráveis no intervalo  $0 \leq t \leq R$ , para todo  $R$

positivo, e além disso são de ordem exponencial, isto é,

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

a transformada  $F(s) = L(f)$  possui abcissa de convergência

$$\sigma_c \geq \gamma .$$

Analiticidade:

A função  $F(s)$  definida pela integral (1) não somente é diferenciável dentro de sua região de convergência:  $\text{Re}(s) > v_c$ , quanto é analítica no caso em que  $v_c < \infty$ . Mais precisamente:

TEOREMA 3: Se a integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

converge para  $\text{Re}(s) > v_c < \infty$ , então  $F(s)$  é analítica para  $\text{Re}(s) > v_c$  e

$$F^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (-t)^k d\alpha(t) \quad (6)$$

Este resultado decorre de escrevermos

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} d\alpha(t)$$

e considerarmos que as funções

$$\int_n^{n+1} e^{-st} d\alpha(t)$$

são inteiros, com derivadas

$$(-1)^k \int_n^{n+1} e^{-st} t^k d\alpha(t),$$

e que a série acima converge uniformemente. Para este último resultado ver o teorema 4.3 em Widder [16].

Agora, da analogia com séries de potências poderíamos ser tentados a supor que  $F(s)$  teria ao menos uma singularidade no eixo de convergência,  $s=v_c+iy$ , da integral que define  $F(s)$ . Isto, contudo, não é o caso.

A função

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^t \operatorname{sen}(e^t) dt = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^s} dx$$

claramente possui  $v_c = 0$ , como abcissa de convergência. No entanto, para  $v > 0$  temos, após a integração por partes

$$F(s) = \cos 1 - s \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^{s+1}} dx$$

Esta integral converge para  $v > -1$ , de modo que esta equação serve para estender  $F(s)$  analiticamente no semi-plano  $v > -1$ . Isto é,  $F(s)$  não possui singularidades no eixo imaginário, que é o eixo de convergência da transformada original. De fato, pode ser estabelecido, por sucessivas integrações por partes, que  $F(s)$  é inteira.

Um caso, no entanto, em que certamente existe uma singularidade no eixo de convergência é descrito no seguinte resultado:

Lema 3: Se  $\alpha(t)$  é monótona, então  $s=v_c$  é uma singularidade de de

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

(Aqui é assumido que  $v_c$  é finito).

Unicidade:

A reconstrução da função  $\alpha(t)$  em termos da sua transformada (1) requer duas coisas: uma adequada definição de  $\alpha(t)$  nos pontos de descontinuidade (saltos), e que a transformada seja determinada de maneira única. Aqui estas questões serão tratadas via funções normalizadas.

Uma função de variação limitada  $\alpha^*(t)$  no intervalo  $a < t < b$  é dita normalizada quando

$$\alpha^*(a) = 0$$

$$\alpha^*(t) = \frac{\alpha^*(t^+) + \alpha^*(t^-)}{2}, \quad a < t < b$$

Por exemplo,  $\alpha^*(t) = t - a$ , ou de forma mais geral:  $\alpha^*(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$ ,  $f$  Riemann integrável. Ou ainda, para cada função de variação limitada  $\alpha(t)$ , temos que a seguinte função:

$$\alpha^*(a) = 0$$

$$\alpha^*(t) = \frac{\alpha(t^+) + \alpha(t^-)}{2} - \alpha(a) \quad (a < t < b)$$

$$\alpha^*(b) = \alpha(b) - \alpha(a)$$

é normalizada.

Além disso, para cada  $f(t)$  contínua temos que:

$$\int_a^b f(t) d\alpha(t) = \int_a^b f(t) d\alpha^*(t),$$

e a função  $\int_a^t f(t) d\alpha^*(t)$  também é normalizada.  $(a < t < b)$

Outro resultado importante é dado por:

TEOREMA 4: Sejam  $\alpha^*(t)$ ,  $\beta^*(t)$  normalizadas, tais que

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha^*(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\beta^*(t)$$

para todo  $s$  em uma região comum de convergência. Então

$$\alpha^*(t) = \beta^*(t), \quad 0 \leq t < \infty$$

Em particular, se

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt$$

para todo  $s$  numa região comum de convergência, então

$$f(t) = g(t)$$

para quase todo valor positivo de  $t$ . No caso de  $f(t), g(t)$  serem contínuas, a igualdade é válida para todo  $t \geq 0$ . Este resultado de unicidade decorre do seguinte teorema devido a Lerch:

TEOREMA 4': Seja  $\alpha^*(t)$  normalizada,  $s_0$  um ponto da região de convergência da integral  $\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha^*(t)$ , e  $k$  um número positivo tal que

$$F(s_0 + nk) = \int_0^{\infty} e^{-(s_0 + nk)t} d\alpha^*(t) = 0; \quad n=0,1,2,\dots$$

então,

$$\alpha^*(t) = 0 \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

O teorema de Lerch é obtido fazendo-se uma mudança de variável:

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-(s_0 + nk)t} d\alpha^*(t) = \int_0^{\infty} e^{-nkt} d\beta(t) = \int_0^1 u^n d\beta \quad (k^{-1} \log u^{-1})$$

$n=0,1,2,\dots$

onde

$$\beta(t) = \int_t^{\infty} e^{-s_0 u} d\alpha^*(u) \quad t \geq 0$$

e utilizando-se o seguinte fato:

Lema 4: Se  $\alpha^*(t)$  é normalizada em  $(0, 1)$  e tal que

$$\int_0^1 t^n d\alpha^*(t) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

então  $\alpha^*(t)$  é identicamente nula em  $(0, 1)$ .

A segunda parte do teorema da unicidade (Teorema 4) é consequência de que se  $\alpha^*(t) = \int_0^t f(t)dt$ , com  $f$  de classe  $L$  no intervalo  $(0, R)$ , para todo  $R$  positivo, então pelo Teorema de Lerch implica  $\alpha^*(t) = 0$  e portanto sua derivada  $[\alpha^*(t)]' = f(t)$  é zero em quase toda parte; ou mais precisamente,  $f(t) = 0$  para todo valor de  $t$  em que  $f$  é contínua.

#### Fórmula de Inversão Complexa:

Pretendemos obter uma fórmula de inversão para a transformada de Laplace, ou seja, uma fórmula que nos forneça a função  $\alpha(t)$  de (1) em termos da função  $F(s)$ . Neste sentido, a fórmula de Cauchy para os coeficientes de uma série de potências em termos de sua soma fornece uma analogia para o resultado de inversão analítica que logo estabeleceremos.

Inicialmente notemos que a integral de Laplace de uma função  $\alpha(t)$  do tipo

$$\alpha(0)=0, \quad \alpha(t)=bn = a_1+a_2+\dots+a_n; \quad n-1 \leq t < n \quad n=1, 2, 3, \dots$$

se reduz a uma série de potências em  $e^{-s}$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = F(z) \quad (z=e^{-s})$$

Portanto, temos que:

$$(1-z)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

com

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{(1-z)z^{n+1}} dz,$$

onde:  $F(z)$  denota a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$

o contorno é o círculo  $|z| = \gamma$ , com  $\gamma < 1$  e  $\gamma < \rho$ ; com  $\rho$  sendo o raio de convergência da série definida pela integral acima.

Agora, uma mudança de variável nos fornece

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} \frac{F(s) e^{ns}}{1-e^{-s}} ds,$$

com  $c = \log \frac{1}{\gamma} > 0$ ,  $c > \log \frac{1}{\rho}$

Pela teoria de resíduos, podemos estabelecer que

$$\alpha(t) = b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) e^{st}}{s} ds, \quad (7)$$

para  $n-1 < t < n$ ;  $c < 0$ ;  $c < \log \frac{1}{\rho}$

Este exemplo de inversão simplesmente mostra o tipo de fórmula que se espera, a ser estabelecida num caso geral; também indica a possível restrição  $c > 0$ . De forma mais precisa:



TEOREMA 5: Seja  $\alpha^*(t)$  uma normalizada de variação limitada em  $(0, R)$  para todo  $R$  positivo, e suponhamos que a integral de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha^*(t)$$

possui abcissa de convergência  $v_c$ . Então para  $c > 0$  e  $c > v_c$ , temos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{F(s)}{s} e^{st} ds = \begin{matrix} \alpha^*(t) & t > 0 \\ \frac{\alpha^*(0^+)}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{matrix}$$

O resultado acima segue se uma integração por partes,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha^*(t) = s \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha^*(t) dt$$

que é válida quando  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Re}(s) > v_c$ . Na verdade, temos:

TEOREMA 5': Suponhamos que a integral de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha(t) dt$$

converge absolutamente na linha  $\text{Re}(s) = c$  para  $\alpha(t)$  de classe  $L$  em  $(0, R)$  com  $R$  positivo. Então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \tilde{F}(s) e^{st} ds = 0, \quad t < 0$$

Além disso, se  $\alpha(t)$  é de variação limitada na vizinhança de  $t$ , então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \tilde{F}(s) e^{st} ds = \begin{matrix} \frac{\alpha(t^+) + \alpha(t^-)}{2}, & t > 0 \\ \frac{\alpha(0^+)}{2}, & t = 0 \end{matrix} \quad (9)$$

É claro que (8) e (9) são a mesma coisa quando colocamos  $\alpha(t) = \alpha^*(t)$  e  $\tilde{F}(s) = F(s)/s$ .

É importante observar que a maioria dos enunciados encontrados na literatura de métodos operacionais, são casos particulares de (9). Por exemplo, se escolhemos:

$$\alpha^*(t) = \int_0^t f(t) dt$$

onde  $f(t)$  é de ordem exponencial e com derivada  $f'(t)$  seccionalmente contínua. A condição relativa a derivada é artificial no seguinte sentido: o resultado do teorema 5' é estabelecido com auxílio da integral de Dirichlet ([14], pg 65):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \frac{\text{sen } T(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Este limite é mais facilmente demonstrado se incluímos uma condição na derivada de  $f(t)$ . Tudo isto faz parte do trabalho prévio ao teorema de inversão de Fourier-Mellin, do qual também decorre o teorema de inversão da transformada de Laplace do tipo teorema 5.

Convolução:

Finalizamos os aspectos básicos relativos à transformada de Laplace com o teorema da convolução. Ele refere-se ao produto de transformadas, e pode ser considerado como um análogo do teorema de Cauchy para a multiplicação de séries de potências.

TEOREMA 6: Suponhamos que  $\alpha^*(t)$ ,  $\beta^*(t)$  são funções normalizadas, de variação limitada, e que as integrais

$$F(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\alpha^*(t), \quad G(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\beta^*(t),$$

convergem absolutamente. Então

$$F(s_0) G(s_0) = \int_0^\infty e^{-s_0 t} d\gamma(t), \quad (10)$$

onde

$$\gamma(t) = \int_0^t \alpha^*(t-u) d\beta^*(u) = \int_0^t \beta^*(t-u) d\alpha^*(u)$$

Propriedades de Diferenciação

A) Seja  $f$  uma função contínua em  $(0, \infty)$ , de ordem exponencial em  $[0, \infty]$  e tal que  $f'$  é seccionalmente contínua em  $[0, \infty]$ . Então

$$L[f'] = s L[f] - f(0^+) \quad (11)$$

onde  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ . Mais geralmente, se  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  são contínuas para todo  $t > 0$ , de ordem exponencial em  $[0, \infty]$  e  $f^{(n)}$  é seccionalmente contínua em  $[0, \infty)$ , então:

$$L[f''] = s^2 L[f] - sf(0^+) - f'(0^+) \quad (12)$$

.

.

.

$$L[f^{(n)}] = s^n L[f] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Como pode-se observar, a propriedade anterior trata da transformada de derivadas, ou melhor, expressa a transformada da derivada de  $f$  em termos de  $L[f]$  e do comportamento de  $f$  em 0. Resultado análogo pode ser estabelecido para integrais, que também é freqüentemente usado no cômputo de transformadas e suas inversas:

Se  $f$  é uma função de ordem exponencial em  $[0, \infty)$  e seja  $a$  um número real não negativo. Então:

$$L\left[\int_a^t f(x) dx\right] = \frac{1}{s} L[f] - \frac{1}{s} \int_0^a f(x) dx \quad (13)$$

Mais geralmente:

$$L\left[\int_a^t \dots \int_a^t f(x) dx \dots dx\right] = \frac{1}{s^n} L[f] = \frac{1}{s^n} \int_0^a f(x) dx$$

$$- \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^a \int_a^t f(x) dx dx - \dots - \frac{1}{s} \int_0^a \int_a^t \dots \int_a^t f(x) dx \dots dx$$

(n-1) (14)

B) Se  $L[f] = F(s)$ , com  $\text{Re}(s) > \alpha$ . Então substituindo o argumento de transformada por  $s-a$ , sendo  $a$  uma constante, temos

$$F(s-a) = L[e^{at} f(t)], \text{Re}(s) > \alpha+a, \quad (15)$$

Este resultado é conhecido como teorema da substituição algumas vezes, ou como teorema da translação, e pode ser escrito em termos das transformadas inversas como

$$L^{-1} [F(s-a)] = e^{at} L^{-1} [F(s)]$$

ou

$$L^{-1} [F(s)] = e^{at} L^{-1} [F(s+a)]$$

Esta propriedade é bastante utilizada quando procuramos a transformada inversa de  $F(s)$  usando o método de frações parciais para converter  $F(s)$  a uma forma na qual sua inversa possa mais facilmente ser identificada. Também é importante quando trabalhamos com funções "degrau unitário". (ver [9]).

Finalizamos este ítem mencionando algumas propriedades de  $f(t)$  deduzidas a partir do conhecimento de sua transformada  $F(s)$ , sem a determinação de solução completa. Em particular dois resultados simples, normalmente usados, que se referem ao comportamento assintótico de

$f(t)$  com  $t \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow \infty$ .

C) Se  $s \rightarrow \infty$  através de valores reais,  $F(s) \rightarrow 0$ . Se além disso  $f(t)$  é contínua para  $t > 0$ , então:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (16)$$

Se  $F(s_0)$  existe e  $s \rightarrow s_{0+}$  por valores reais,  $F(s) \rightarrow F(s_0)$ . Se além disso  $f(t)$  é contínua para  $t > 0$ , então:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (17)$$

provado que o lado direito de (17) existe e assumido que  $f(t)$  é tal que sua transformada de Laplace existe para  $\text{Re}(s) \geq \text{Re}(s_0)$ .