Planaridade em grafos, uma generalização: Crossing number

Yuri Wladimir Pitthan, Orientador: Carlos Hoppen

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

Um grafo G é uma estrutura matemática que pode ser representada por um conjunto de vértices e um conjunto de arestas. Pode-se interpretar geometricamente essa estrutura como um conjunto de pontos – os vértices – conectados por um conjunto de linhas ou curvas – as arestas. É usual representar graficamente essa estrutura.

Definição 1. *Um **grafo completo** é um grafo no qual cada um de seus vértice é adjacente a todos os outros vértices. O grafo completo de n vértices é denotado por* K_n.

Definição 2. *Um grafo é dito **grafo bipartido completo** quando seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos U e V tais que cada um dos vértices de U é adjacente a todos os vértices de V. Considere* $|U| = m$ *e* $|V| = n$*, denotamos o grafo bipartido completo por* $K_{m,n}$.

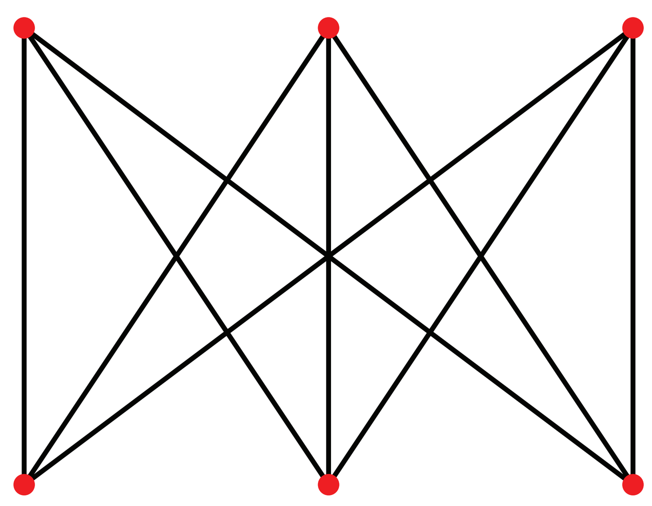

Figura 1: Grafo bipartido $K_{3,3}$

Definição 3. *Um **grafo planar** é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que haja o cruzamento de suas arestas.*

Dado um grafo arbitrário, como decidir sua planaridade? O primeiro matemático a apresentar uma caracterização simples de grafos planares foi Kuratowski, porém não é trivial verificar essa condição para um grafo qualquer.

Definição 4. *Uma aresta é dita **subdividida** quando é deletada e substituída por um caminho de comprimento 2 conectando suas pontas, o vértice interno deste caminho é um novo vértice.*

Definição 5. *Uma **subdivisão de um grafo** H é um grafo G obtido através de um processo finito de sucessivas subdivisões das arestas de H.*

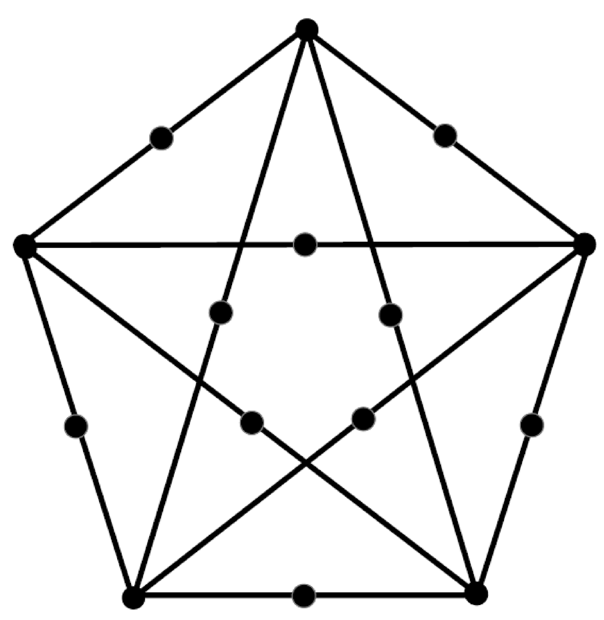

Figura 2: Uma subdivisão de K_5

Teorema 1 (Kuratowski)**.** *Um grafo é planar se, e somente se, ele não contém um subgrafo que é uma subdivisão de* K_5 *ou de* $K_{3,3}$.

O que este Teorema oferece é uma caracterização elegante a respeito da planaridade de um grafo, porém não fornece um algoritmo muito prático para teste de planaridade. O primeiro algoritmo com complexidade de tempo linear é dado por Hopcroft e Tarjan, publicado em 1974 [2].

Apesar da simplicidade matemática da caracterização e da eficiência do algoritmo, se um grafo não é planar, ou seja, se haverá pelo menos um cruzamento de arestas, como determinar uma cota que caracterize o menor (ou maior) número de cruzamentos de arestas de um grafo arbitrário G? A investigação se dá através da ideia de determinar um critério que responda quantos cruzamentos existem, este é o *Crossing Number*.

Crossing Number

Uma primeira definição pode ser dada por:

Definição 6. *O **crossing number** de um grafo G, denotado por cr(G), é o menor número de cruzamentos de arestas em um desenho de G no plano.*

Problemas em aberto

Em geral, determinar o *Crossing Number* de um grafo genérico é um problema difícil, já foi mostrado que para grafos cúbicos, ou seja, aqueles em que todos os vértices têm grau 3, o problema é NP-completo. No entanto, há um interesse muito grande em determinar $cr(K_{m,n})$, um problema em aberto é a seguinte conjectura:

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

Já foi mostrada a validade para $m \leq 6$ e para todo n e também para $m = 7$ e 8 quando $n \leq 10$.

Referências

[1] John Adrian Bondy and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London, 1976.

[2] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.

[3] János Pach and Géza Tóth. Which crossing number is it, anyway?[computational geometry]. In *Foundations of Computer Science, 1998. Proceedings. 39th Annual Symposium on*, pages 617–626. IEEE, 1998.