# Um Problema Inverso de Estimativa de Parâmetros em Transporte de Radiação

Aluno: Oliver Hung Buo Tso[1]
Orientadora: Liliane Basso Barichello[2]
1: Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional, UFRGS
2: Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS
XXVII Salão de Iniciação Científica 2015, Propesq

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

## INTRODUÇÃO

- Em aplicações que envolvem transporte de radiação, como sensoriamento remoto e tomografia, um problema de interesse é, a partir de medidas conhecidas da intensidade de radiação, caracterizar o meio onde ela se propaga.
- Problemas como este, fazem parte de uma classe de problemas conhecidos como problemas inversos. Tais problemas, em geral, são mal postos e a solução pode sofrer uma grande variação a partir de mudanças pequenas nos dados experimentais.

## OBJETIVOS

- Dada a equação de transferência radiativa,

$$\mu\frac{\partial}{\partial\tau}I(\tau,\mu)+I(\tau,\mu)=\frac{\varpi}{2}\sum_{l=0}^{L}\beta_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}P_l(\mu')I(\tau,\mu')d\mu',$$

  onde $\tau\in(0,\tau_0)$ é a variável espacial, sendo $\tau_0$ a espessura óptica do meio; $\mu\in[-1,1]$ é a variável angular, o cosseno do ângulo polar $\theta$ formado entre a direção do feixe de radiação e o eixo $\tau$; e, $I(\tau,\mu)$ é a intensidade radiativa na posição $\tau$, segundo a direção $\mu$.
- Deseja-se resolver um problema inverso de estimativa de parâmetros, por exemplo, conhecer o parâmetro $\varpi$, chamado de albedo, que indica a razão entre radiação incidente e refletida pela superfície do corpo. Ou ainda, o parâmetro $L$ que indica o grau de espalhamento da radiação quando incide no meio.

## METODOLOGIA

- Existem várias técnicas para solução de problemas inversos, muitas delas envolvem a resolução do problema direto.
- Neste trabalho, o problema inverso é tratado como um problema de otimização, ou seja, busca-se minimizar a soma dos resíduos quadrados entre valores calculados e medidas experimentais. Assim, métodos dos mínimos quadrados não lineares como métodos de Gauss-Newton[2] e Levenberg-Marquardt[2] foram usados para estimar os parâmetros $\varpi$ e $L$, a partir do conhecimento de medidas da densidade de radiação $\rho$, que pode ser calculada através da equção

$$\rho(\tau)=\int_{-1}^{1}I(\tau,\mu')d\mu'.$$

- A solução direta foi estabelecida a partir do método de ordenadas discretas analítico[1].
- O software Scilab foi utilizado para implementação dos algoritmos que possibilitaram a obtenção de resultados numéricos.
  - Inicialmente foi resolvido um problema direto a partir de parâmetros conhecidos, e, posteriormente, os resultados obtidos foram tomados como dados experimentais para o problema inverso.
  - O problema inverso também foi resolvido introduzindo-se ruídos aleatórios nos dados experimentais.
  - Além disso, foram feitos testes com diferentes quantidades e escolhas de posições dos dados.

## RESULTADOS

- Dados experimentais sem ruídos e igualmente espaçados. Parâmetros exatos: $L=6$, $\varpi=0.99$.
  - Método: Gauss-Newton. Estimativas iniciais: $L_0=0.5$, $\varpi_0=0.5$.

| iteração (i) | $L_i$ | $\varpi_i$ |
|---|---|---|
| 3 | 5.5605 | 1.0150 |
| 4 | 5.9545 | 9.9085 (-1) |
| 5 | 5.9997 | 9.9000 (-1) |
| 6 | 6.0000 | 9.9000 (-1) |

.

  - Estimativas iniciais: $L_0=0.1$, $\varpi_0=0.1$.

| | Gauss-Newton | | Levenberg-Marquardt | |
|---|---|---|---|---|
| iteração (i) | $L_i$ | $\varpi_i$ | $L_i$ | $\varpi_i$ |
| 3 | 3.9560 (1) | 1.8887 | 4.0550 | 9.8995 (-1) |
| 4 | 3.9588 (1) | 2.0113 | 5.5255 | 9.9002 (-1) |
| 5 | 3.9528 (1) | 2.0260 | 5.9725 | 9.9000 (-1) |
| 6 | 3.9377 (1) | 2.2328 | 5.9999 | 9.9000 (-1) |

.

- Dados experimentais uniformemente distribuídos com ruídos aleatórios. Método: Levenberg-Marquardt. Número total de dados: 41. Parâmetros exatos: $L=6$, $\varpi=0.99$. Estimativas iniciais: $L_0=0.5$, $\varpi_0=0.5$.
  - Na coluna 1 foram usados 21 pontos concentrados em uma região do domínio, enquanto a coluna 2 usou 21 pontos igualmente espaçados.

| | Coluna 1 | | Coluna 2 | |
|---|---|---|---|---|
| iteração (i) | $L_i$ | $\varpi_i$ | $L_i$ | $\varpi_i$ |
| 3 | 1.0171 (1) | 1.0693 | 4.9985 | 9.8928 (-1) |
| 4 | 1.7316 (1) | 1.0657 | 6.2423 | 9.8923 (-1) |
| 5 | 2.3789 (1) | 1.0639 | 6.5132 | 9.8922 (-1) |
| 6 | 2.6370 (1) | 1.0634 | 6.5218 | 9.8922 (-1) |

.

  - Os valores desta tabela foram obtidos usando todos os 41 pontos.

| iteração (i) | $L_i$ | $\varpi_i$ |
|---|---|---|
| 3 | 5.6295 | 9.8693 (-1) |
| 4 | 6.6987 | 9.8691 (-1) |
| 5 | 6.8716 | 9.8690 (-1) |
| 6 | 6.8748 | 9.8690 (-1) |

.

## CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

- Conclusões:
  - Observamos que, escolhendo dados experimentais em posições uniformimente distribuídas no domínio, os resultados gerados pelos métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt em geral foram satisfatórios, sendo que o método de Gauss-Newton possui uma exigência maior na estimativa inicial dos parâmetros para que ocorra a convergência.
  - Foi observado também que o aumento no número de medidas conhecidas não resulta necessariamente em melhores valores para a estimativa. No entanto, a escolha de medidas em posições uniformimente distribuídas no domínio parece ter maior relevância.
- Trabalhos Futuros:
  - Na continuidade do trabalho, outros métodos, como método do gradiente-conjugado e estimativa de outros parâmetros, como a fonte externa, serão abordados.

## BIBLIOGRAFIA

[1] Liliane Basso Barichello, *Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems*. In: Helcio R B Orlande; Olivier Fudyin; Denis Maillet; Renato M Cotta. (Org.). Thermal Measurements and Inverse Techniques. Boca Raton: CRC Press, 2011, v. , p. 541-562.

[2] Antônio José da Silva Neto e Francisco Duarte Moura Neto, *Problema Inverso: Conceitos Fundamentais e Aplicações*, ed. Rio de Janeiro: EdUERJ - Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005. v. 1. 82p .