

Introdução

Neste trabalho serão apresentados alguns importantes resultados, devidos à Miroslav Fiedler, em Teoria Espectral de Grafos.

Conectividade Algébrica

Dada a matriz laplaciana $L(G)$ de um grafo G , podemos associar seus autovalores. Fiedler mostrou que o menor autovalor de $L(G)$ é 0, e que um grafo é conexo se, e somente se, o segundo menor autovalor laplaciano é positivo. Denomina-se esse autovalor de *conectividade algébrica*. O autovetor associado à conectividade algébrica é denominado *vetor de Fiedler*.

Matriz Laplaciana

Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices, a matriz laplaciana do grafo G é a matriz de ordem n dada por $L(G) = [l_{ij}]$, onde $l_{ij} = -1$ se $v_i v_j \in E$, $l_{ii} = d(v_i)$ e zero nas entradas seguintes.

Numeração característica

Em um grafo G , rotulamos seus vértices por v_1, \dots, v_n , e denotamos o vetor de Fiedler por $y = [y_i]$. Atribuímos essas coordenadas aos vértices de G da seguinte forma: a coordenada y_i numera o vértice v_i . Fiedler chama essa atribuição de *numeração característica*.

Teorema da Monotonicidade de Fiedler

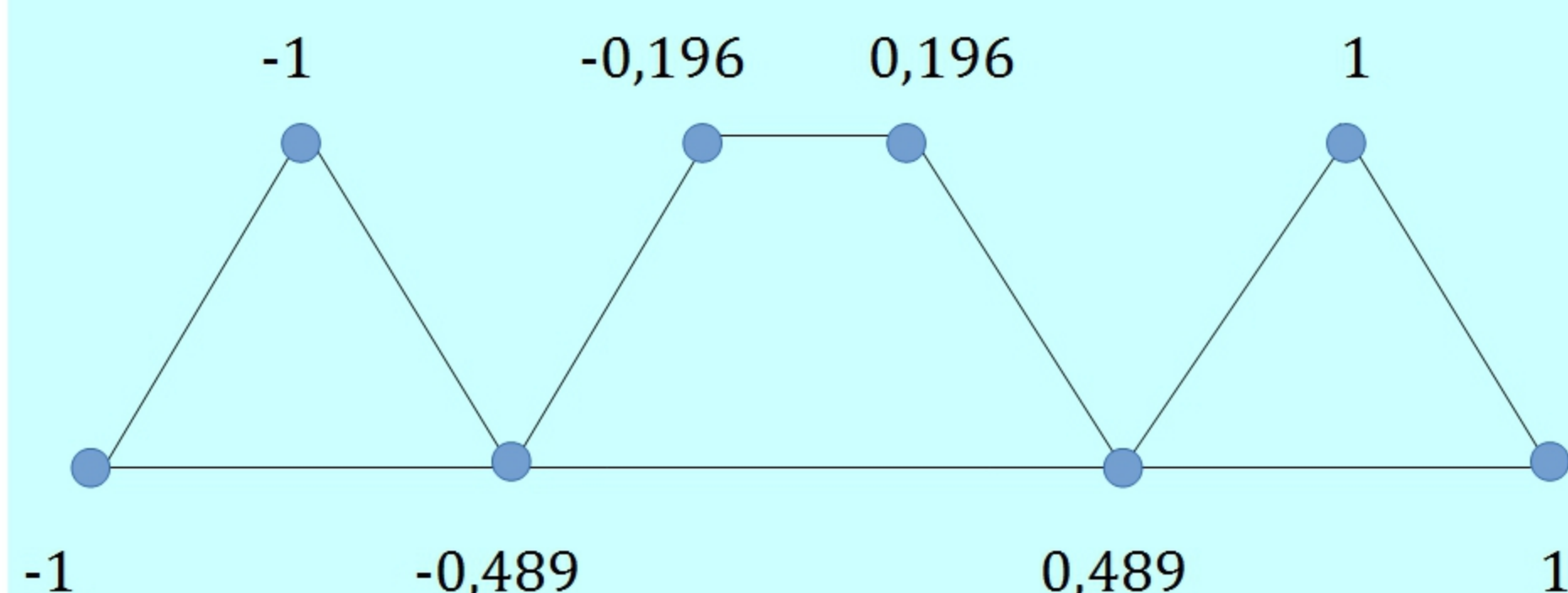
Seja G um grafo conexo e y sua numeração característica. Então exatamente um dos dois casos ocorre:

Caso A: Existe um único bloco B_0 em G que contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, cada bloco restante tem apenas vértices com numeração positiva, negativa ou zero. Além disso, cada caminho puro P iniciando em B_0 e contendo apenas um vértice $v_k \in B_0$ é tal que a numeração nos pontos de articulação em P forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho de acordo com $y_k > 0$, $y_k < 0$ ou $y_k = 0$; no último caso todos os vértices em P têm valor zero.

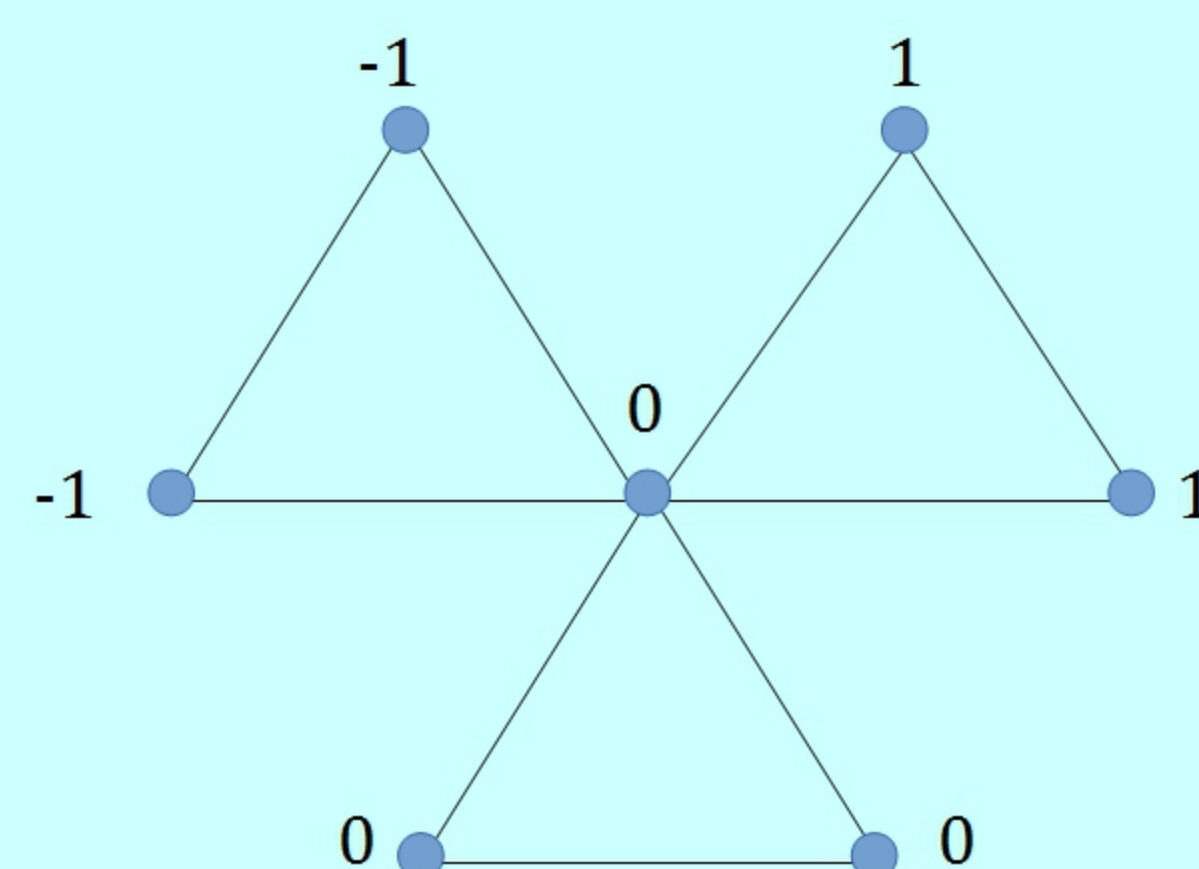
Caso B: nenhum bloco de G contém simultaneamente vértices positivamente e negativamente numerados. Nesse caso, existe um único vértice v_z com numeração zero que possui um vizinho com numeração diferente de zero. Esse vértice é um ponto de articulação. Além disso, cada caminho puro P iniciando em v_z é tal que a numeração nos pontos de articulação forma uma sequência crescente, decrescente ou zero ao longo do caminho. Todo caminho que contém vértices positivamente ou negativamente numerados passa por v_z .

Exemplos

Caso A:



Caso B:



Referências Bibliográficas

- Rocha, I. de S. **Sobre o vetor de Fiedler e as componentes de Perron de um Grafo.** Dissertação (mestrado) – UFRGS. Porto Alegre, 2012.