

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Estrutura de diagramas de fase de sistemas dinâmicos de tempo contínuo *

Cristian Bonatto

Tese de doutorado realizada sob orientação do Prof. Dr. Jason A. C. Gallas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

2008

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

À memória de minha mãe...

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Eu sou profundamente grato ao meu orientador, Prof. Jason A.C. Gallas, por todos os seus ensinamentos, pela sua excelente supervisão, pela sua amizade, pela paciência que teve comigo, por ter me iniciado em pesquisa e problemas de dinâmica, e por todo apoio que me deu desde os tempos de minha iniciação científica.

Sou eternamente grato ao meu pai, pelo apoio incondicional, e a todos os meus irmãos. Agradeço também a Rosângela por toda sua ajuda. Sou especialmente grato ao meu irmão Alexandre, também físico e colega da sala M202, pelo apoio inestimável que sempre me ofereceu. Agradeço também à minha cunhada Viviane e a Deize pelo incentivo.

Sou extremamente grato aos meus amigos da sala M202, Fernando, Lucas e Wilson, pelo imenso incentivo, por todo apoio e ajuda, e por tudo que vivemos juntos desde os tempos da graduação. Também sou grato ao amigo e colega da sala M202 Marcelo, por todo apoio, ajuda e incentivo durante a nossa convivência na pós-graduação. Agradeço ao meu grande amigo Gian, pela excelente amizade e por todo apoio que sempre me ofereceu.

Agradeço a todos os meus colegas do Instituto de Física. Agradeço em especial aos colegas e amigos da pós-graduação da turma do futebol, pelos momentos de descontração e alegria que passávamos em nossos jogos nas quinta-feiras.

Agradeço aos meus colegas do grupo de Física Computacional pela convivência muito boa que tivemos, ao ex-colega de grupo e amigo Antônio Endler por todo apoio e amizade, e aos ex-colegas estrangeiros do grupo, os lusitanos Pedro Lind e Joana Freire pela ajuda e amizade.

Agradeço a todos os professores que eu tive no Instituto de Física da Ufrgs, em especial aos meus professores da pós-graduação Miguel A.C. Gusmão, Marcia C.B. Barbosa, Luiz F. Ziebell e Felipe B. Rizzato, pelas suas aulas e ajudas. Agradeço ao professor Elbert E.N. Macau por seus comentários e sugestões, e ao professor Marcus W. Beims pelos seus apontamentos.

Sou grato a todo pessoal responsável pelos computadores, especialmente os clusters onde este trabalho foi desenvolvido como o pcastro2, pbiocomp, pcapg, minuano e cesup, por todo auxílio que recebi sempre que precisei.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte e à UFRGS por toda sua estrutura.

Resumo

Este trabalho trata da investigação do espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos não-lineares de tempo contínuo. A análise é focada essencialmente em regiões de alta complexidade dinâmica, contendo as fases caóticas e regiões de períodos altos. O objetivo não é uma análise completa da estrutura de bifurcações existentes, mas sim a investigação da estrutura e organização das regiões periódicas que existem encaixadas em meio às fases caóticas. Investigamos aqui alguns modelos físicos dissipativos, descritos por equações diferenciais ordinárias não-lineares de baixa ordem, como um laser de CO_2 com perdas moduladas, um laser de semicondutor com injeção óptica, um circuito eletrônico e o oscilador de Duffing. Investigamos a estrutura fina das regiões caóticas e reportamos algumas regularidades previamente não conhecidas no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos de tempo contínuo. Em particular, mostramos a existência de vários tipos de estruturas auto-similares, acumulações de estruturas auto-similares com adição de período, hierarquia de espirais em um sistema com simetria e recorrências nas fases caóticas no espaço de dois parâmetros de equações diferenciais não-lineares. Algumas destas regularidades poderiam ser verificadas experimentalmente para os sistemas investigados.

A análise é baseada na computação de diagramas de fase obtidos pela integração direta dos sistemas de equações diferenciais ordinárias não-lineares e estimativa numérica dos expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov são codificados em uma conveniente metodologia que desenvolvemos. A metodologia que utilizamos aqui poderia ser uma alternativa aos métodos de continuação numérica largamente utilizados no estudo do espaço de parâmetros de equações diferenciais.

Abstract

This work deals with the investigation of the parameter space of continuous-time nonlinear dynamical systems. The analysis is focused mainly in regions of high dynamical complexity, containing the chaotic phases and regions of high periods. The goal is not a complete analysis of the bifurcation structure, but the investigation of the structure and organization of periodic regions that exist embedded in the chaotic phases. We investigate here some dissipative physical models, described by low-order nonlinear differential equations, such as a CO₂ laser with modulated losses, a semiconductor laser with optical injection, an electronic circuit and the Duffing oscillator. We investigate the fine structure of the chaotic regions and we report some regularities previously unknown in the parameter space of continuous-time dynamical systems. In particular, we show the existence of several kinds of self-similar structures, accumulations of self-similar structures with period adding, hierarchy of spirals in a system with symmetry and recurrences in the chaotic phases in the two-parameter space of nonlinear differential equations. Some of these regularities could be verified experimentally for the investigated systems.

The analysis is based on the computation of phase diagrams obtained by direct time integration of systems of nonlinear ordinary differential equations and numerical estimation of the Lyapunov exponents. The Lyapunov exponents are encoded in a convenient methodology that we developed. The methodology used here could be an alternative to the numerical continuation methods widely used in the study of the parameter space of nonlinear differential equations.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Proposta de trabalho	1
1.2	Estado da arte	2
1.3	Metodologia	4
1.3.1	Continuação numérica \times integração direta	4
1.3.2	Diagramas de fase baseados no espectro de Lyapunov	6
1.4	Organização da tese	8
2	Laser de CO₂ com perdas moduladas	10
2.1	Introdução	10
2.2	O modelo de dois níveis e lasers da classe B	11
2.2.1	As equações de taxa	13
2.2.2	Modulação das perdas da cavidade	16
2.3	Caracterização do espaço frequência-amplitude	20
2.4	Auto-similaridades na região caótica	24
3	Laser de semicondutor com injeção óptica	32
3.1	Introdução	33
3.2	As equações de taxa	36
3.2.1	Laser operando livremente	36
3.2.2	Injeção óptica externa	39
3.3	Diagramas de fase para a região caótica	42
3.4	Acumulações dentro da fase caótica	48

3.5	Outras acumulações em lasers com injeção óptica	56
4	Circuito eletrônico simétrico	61
4.1	O modelo	61
4.2	Espirais e hierarquia	64
4.3	Camarão com quebra de simetria	73
5	Oscilador de Duffing	76
5.1	A equação de Duffing	76
5.2	Estrutura e similaridades no espaço de parâmetros	78
5.3	Recorrências nas fases caóticas	85
6	Considerações Finais	92
6.1	Conclusões	92
6.2	Perspectivas	94
A	Acumulações em outros sistemas	96
A.1	Sistemas de tempo contínuo	96
A.1.1	Circuito eletrônico autônomo	97
A.1.2	Osciladores químicos	97
A.1.3	Laser de CO ₂ com realimentação	98
A.1.4	Modelo de Rössler	99
A.1.5	Modelo de Lorenz-84	100
A.2	Sistemas de tempo discreto	102
A.2.1	Mapa quártico	102
B	Código fonte	104
B.1	Codificação de cores	104
	Referências	113
	Publicações	127

Capítulo 1

Introdução

1.1 Proposta de trabalho

O objetivo principal deste trabalho é investigar a estrutura do espaço de parâmetros de alguns sistemas físicos dissipativos modelados por conjuntos de equações diferenciais ordinárias não-lineares de baixa ordem. Nosso interesse maior está centrado na estrutura e organização global de órbitas periódicas e caóticas presentes nesses sistemas sob a variação de pelo menos dois parâmetros. Nosso foco aqui é dado principalmente a uma abordagem descritiva das regiões de alta complexidade dinâmica, contendo as fases caóticas e regiões de períodos altos. Concentramos nossas investigações em modelos que sejam fisicamente relevantes e passíveis de investigação experimental.

Nossa motivação é usufruir de recursos computacionais e *clusters* disponíveis atualmente para computar diagramas de fase com alta resolução e obter um nível de informação em grande detalhe que é muito difícil de se conseguir por outras metodologias. O método que utilizamos aqui é uma alternativa aos métodos de continuação numérica largamente utilizados atualmente e é particularmente útil na análise de regiões com grande complexidade no espaço de parâmetros.

1.2 Estado da arte

Desde o trabalho influente de Lorenz [1] que, com o auxílio de um computador digital, mostrou que um simples sistema de equações diferenciais ordinárias poderia exibir oscilações aperiódicas e sensibilidade às condições iniciais, houve um extensivo trabalho na área que denominamos estudo do caos determinístico. Ao longo das últimas décadas uma diversidade de modelos físicos descritos por equações diferenciais ordinárias de baixa-ordem, como por exemplo osciladores mecânicos, osciladores químicos, lasers, circuitos eletrônicos, neurônios, etc., serviram como base para investigações relacionadas com a conduta não-linear desses sistemas, tanto do ponto de vista teórico e numérico quanto experimental. Muitos resultados já foram suficientemente estabelecidos [2, 3, 4, 5, 6]. Enquanto temos uma boa compreensão de muitos fenômenos que ocorrem pela variação de um parâmetro do sistema, ainda não temos uma boa compreensão de fenômenos em codimensão maior, principalmente nas regiões de grande complexidade dinâmica em equações diferenciais não-lineares como, por exemplo, é o caso das regiões caóticas.

A caracterização do comportamento das soluções em função dos parâmetros do sistema é uma das questões básicas no estudo de equações diferenciais não-lineares. Uma grande parte do entendimento que temos da estrutura do espaço de parâmetros de muitos modelos de equações diferenciais é devido principalmente aos problemas bifurcacionais [7] e à utilização de metodologias baseadas na computação de curvas de bifurcações [8]. Em geral conhecemos que muitos sistemas de equações diferenciais podem apresentar uma estrutura complexa de bifurcações quando parâmetros são variados e uma descrição completa de todas as curvas de bifurcações possíveis é uma tarefa impossível, mesmo se considerarmos a variação de somente dois parâmetros. Uma limitação crucial dos métodos de continuação numérica é que eles não podem localizar soluções caóticas e mesmo uma detalhada descrição das bifurcações em regiões periódicas de alta complexidade é uma tarefa extremamente árdua. Dessa maneira apenas as curvas de bifurcações de períodos mais baixos são geralmente mostradas por métodos baseados em curvas de bifurcações. Usualmente, no máximo o contorno das regiões caóticas são apresentados, como por exemplo, foi obtido previamente em investigações de alguns modelos paradigmáticos de osciladores periodica-

mente forçados [9, 10, 11, 12, 13, 14]. A determinação de algumas curvas de bifurcações das regiões de períodos mais baixo, dentro da região caótica, foi realizada em investigações prévias do modelo de Rössler [15, 16]. Métodos baseados na análise de mapeamentos de Poincaré foram utilizados na investigação da estrutura do espaço de parâmetros do circuito de Chua [17], revelando periodicidades no interior da região caótica.

Em regiões de grande complexidade no espaço de parâmetros, o atual entendimento que temos deve-se principalmente aos sistemas dinâmicos de tempo discreto, como por exemplo, os mapas unidimensionais do círculo, cúbico e quártico, e os mapas bidimensionais de Hénon e de Ikeda. Tais sistemas foram bastante investigados na literatura, obtendo-se um detalhamento muito maior em uma estrutura fina do espaço de parâmetros em regiões caóticas ou com quasiperiodicidade, tanto por curvas de bifurcações, quanto por simulações diretas. Isso deve-se evidentemente ao custo computacional envolvido, visto que a iteração de mapas discretos é muito mais simples e demanda menos custo computacional do que a integração de equações diferenciais. Muitos resultados foram obtidos na literatura com relação a mapeamentos discretos. É bem conhecida, por exemplo, a estrutura básica do espaço de parâmetros de mapeamentos unidimensionais do círculo, como o mapa do seno. Em regiões onde o mapa é invertível, o espaço de parâmetros contém as chamadas línguas de Arnold, isto é, um encaixamento de regiões de travamento de fase em meio a regiões de quasiperiodicidade. Em regiões de parâmetros onde o mapa é não invertível, a estrutura do espaço de parâmetros é mais complicada, passando a existir multiestabilidade e estruturas periódicas encaixadas dentro de domínios contendo soluções caóticas. Formas características de bifurcações e estruturas periódicas, apresentando características de auto-similaridades no espaço de parâmetros, foram identificadas em diversos trabalhos e sistemas [18-36], através da computação/diagramação de algumas curvas básicas no espaço de parâmetros [15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 34], através da iteração direta dos mapas com identificação da periodicidade [30, 31, 32, 33, 35, 36] ou através da computação dos expoentes de Lyapunov [24, 28]. Gallas [30] mostrou um encaixamento de estruturas auto-similares, com diversas periodicidades, alinhadas ao longo de direções específicas, na região caótica do espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Essas

estruturas auto-similares foram estudadas em maiores detalhes nas referências [32, 35].

Com relação a equações diferenciais, as regiões de grande complexidade no espaço de parâmetros, especialmente as regiões caóticas, são muito menos conhecidas e ainda demandam mais investigações. Embora não tão comuns quanto os métodos de continuação numérica, métodos baseados na integração direta têm sido utilizados para descrever o espaço de parâmetros de sistemas de equações diferenciais há mais de uma década atrás [33, 37] e estão ficando mais populares, como por exemplo, as investigações recentes em modelos de lasers [38, 39]. Certamente uma lista muito maior existe. É bem conhecido que equações diferenciais, quando olhamos para a variação de dois parâmetros, podem apresentar grandes extensões de regiões preenchidas predominantemente por caos, contendo também regiões de periodicidade em seu interior. Entretanto, um estudo sistemático do espaço de parâmetros de equações diferenciais incluindo as regiões de grande complexidade dinâmica, como são as regiões caóticas, ainda não foi realizado. Com a metodologia que descrevemos a seguir, procuramos endereçar essa questão nesta tese com o intuito de descrever a estrutura dessas regiões complexas no espaço de parâmetros para alguns modelos específicos e identificar fenômenos associados à variação de dois parâmetros. Recentemente tem havido um interesse em investigações e caracterizações de estruturas de estabilidade que existem encaixadas nas regiões caóticas de diversos modelos físicos, conforme reportam os trabalhos [40, 41, 42, 43].

1.3 Metodologia

1.3.1 Continuação numérica \times integração direta

Como é bem conhecido, equações diferenciais não-lineares não podem ser resolvidas analiticamente, exceto em muito raras exceções. Então freqüentemente devemos recorrer a algum tipo de método numérico. Com relação ao estudo em dois parâmetros de equações diferenciais podemos utilizar uma metodologia baseada na computação de curvas no espaço de parâmetros ou uma metodologia baseada na integração direta das equações sobre porções extensas do espaço de parâmetros.

Os métodos numéricos mais utilizados atualmente são os métodos de continuação numérica [44, 45, 46]. Esses métodos são baseados na localização e continuação de curvas de bifurcações no espaço de parâmetros. Para utilizá-los, devemos iniciar de uma solução estacionária ou periódica e então escolher uma direção de variação do parâmetro. O programa então evolui até encontrar uma bifurcação. Após encontrar uma bifurcação é possível segui-la ao longo do espaço de parâmetros. Podemos apontar diversas vantagens dos métodos de continuação numérica: i) eles identificam o tipo de bifurcação, dentre diversos tipos de bifurcações pré-estabelecidos; ii) é possível localizar soluções instáveis e seguir suas curvas de bifurcações no espaço de parâmetros; iii) podemos descrever regiões multiestáveis em um único diagrama, visto que é possível fazer uma superposição de curvas no espaço de parâmetros; iv) eles demandam poucos recursos computacionais. Entretanto, uma desvantagem crucial dos métodos de continuação numérica é que eles não podem lidar com soluções caóticas. Mesmo soluções periódicas dentro de regiões caóticas são muito difíceis de se localizar. Isso se deve ao fato que deveríamos conhecer de antemão a localização das regiões periódicas, uma a uma, para que fosse possível segui-las no espaço de parâmetros. Nesse caso, em regiões caóticas ou regiões de alta complexidade dinâmica, é necessário recorrermos a um método de integração direta para obtermos uma descrição adequada.

A vantagem dos métodos de integração direta é que eles permitem localizar as soluções caóticas. Uma outra vantagem desses métodos é que eles são muito mais simples para utilizarmos, visto que uma vez escolhido os parâmetros para variarmos devemos apenas colocar o programa para rodar em um computador. Uma desvantagem dos métodos de integração direta é que eles demandam muito mais recursos computacionais. Outras desvantagens que podemos apontar, é que eles não podem lidar com soluções instáveis nem descrever em um único diagrama as regiões multiestáveis, ou seja, apenas uma solução é plotada no diagrama nas regiões onde ocorre coexistência de dois ou mais atratores.

De uma maneira geral, os métodos de integração direta conseguem dar uma descrição de regiões complicadas no espaço de parâmetros que seria impossível por outras metodologias. Nesta tese usamos extensivamente a metodologia baseada na integração direta.

1.3.2 Diagramas de fase baseados no espectro de Lyapunov

A metodologia que utilizamos para analisar o espaço de parâmetros das equações diferenciais é baseada na integração direta do sistema de equações e estimativa numérica dos expoentes de Lyapunov. Dessa maneira computamos diagramas de fase em função de dois parâmetros do sistema. Diagramas de fase construídos pela integração direta de um sistema de equações, embora menos utilizados que os métodos de continuação numérica, são ferramentas já bem estabelecidas e com utilização no estudo do espaço de parâmetros de equações diferenciais. Entretanto, a novidade que introduzimos aqui, para essa metodologia, é uma conveniente codificação de cores utilizando a informação do maior ou segundo maior expoente (caso o maior seja zero) ao invés de somente o maior expoente, como é encontrado na literatura. A grande vantagem desse simples artifício é que podemos *identificar a localização de curvas de bifurcações* no espaço de parâmetros. Outro ponto é que assim também temos *informação da variação do expoente de Lyapunov* nas regiões periódicas.

Para a construção dos diagramas, as equações diferenciais são resolvidas numericamente utilizando-se o método de Runge-Kutta padrão de quarta ordem com passo fixo e os expoentes de Lyapunov são computados utilizando-se o método proposto por Wolf *et al.* [47]. As equações são integradas numericamente descartando-se um pequeno transiente e depois integrando-se o sistema por um longo período de tempo computando-se os expoentes. Tipicamente utilizamos 35000 passos de integração para o tempo transiente e 700000 passos de integração para o restante da integração numérica. O valor do passo de integração varia de sistema para sistema e é obtido após alguns testes de convergência.

Na integração das equações, todos os parâmetros são mantidos fixos, exceto os dois que são escolhidos para variar em uma malha de $M \times M$ valores de parâmetros igualmente espaçados. Utilizamos M tipicamente entre 600 e 1200. Para cada ponto do espaço de parâmetros são computados os N expoentes de Lyapunov relativos às N direções do espaço de fases.

O expoente relevante é selecionado simplesmente por testarmos se o maior expoente é igual a zero. Caso o maior expoente seja igual a zero, tomamos o segundo expoente.

Por exemplo, para um sistema tri-dimensional, temos a seguinte possibilidade para os expoentes ordenados, do maior para o menor, de acordo com o tipo de atrator no espaço de fases:

ponto fixo	–	–	–
caótico	+	0	–
periódico	0	–	–
quasiperiódico	0	0	–

Os expoentes nulos destacados em vermelho, na tabela acima e referentes aos atratores periódicos ou quasiperiódicos, são descartados. Nesses casos utilizamos a magnitude do segundo expoente na construção dos diagramas de fase. A seguir determina-se o maior e menor valor dos expoentes selecionados para toda a janela de parâmetros considerada a fim de se normalizar os valores em uma escala de cores de acordo com a magnitude do expoente. A escala de cores é dividida em duas partes com o intuito de se discriminar entre condutas caóticas e não-caóticas. Sendo assim, os expoentes positivos são codificados em uma escala de cores e os expoentes negativos em outra escala, com o zero colocado no centro da escala e com uma cor específica. Note que o fato de se colocar uma cor específica para o expoente zero permite identificar a localização de curvas de bifurcações no espaço de parâmetros, conforme já mencionamos. No caso de soluções que divergem, dentro de algum limite numérico estabelecido, uma cor é denotada especificamente para essa situação.

Quanto às condições iniciais, tipicamente começamos de uma condição inicial obtida por tentativa e erro para o primeiro valor de parâmetro e utilizamos a técnica de seguir-se o atrator, ou seja, utilizamos como condição inicial para um novo valor de parâmetro o último valor do estado do sistema para o parâmetro anterior. Dessa maneira obtemos um diagrama com muito mais qualidade, visto que o tempo gasto em um eventual transiente é evitado, resultando em uma convergência melhor para o expoente. Em regiões de multiestabilidade, apenas um dos atratores é identificado em função de se poder associar apenas uma cor para um ponto do diagrama de fase. No caso de se desejar priorizar uma região em detrimento de outras nos locais multiestáveis, eventualmente algum outro critério de

condições iniciais pode ser utilizado.

Os diagramas foram produzidos utilizando-se processamento paralelo, ou seja, dividimos o espaço de parâmetros em partes iguais, como por exemplo, fatias horizontais, e computamos cada parte separadamente em cada processador. Isso é possível porque os pontos do espaço de parâmetro são independentes um do outro, sendo, portanto, um problema totalmente paralelizável. Note que o fato de utilizarmos o resultado obtido da computação anterior para um novo valor de parâmetro é apenas uma técnica que melhora a convergência dos expoentes. No caso mais geral, podemos começar de condições iniciais arbitrárias para qualquer ponto do espaço de parâmetros. Mas mesmo utilizando-se a técnica que mencionamos de seguir-se o atrator, as fatias de parâmetros que selecionamos são totalmente independentes. Nesse caso, seguimos o atrator para cada fatia do espaço de parâmetros, sendo que cada fatia seria computada independentemente em um processador diferente. Toda produção dos dados relativos à integração numérica das equações diferenciais foi realizada na linguagem *Fortran* enquanto que o tratamento dos dados e aplicação da codificação de cores para os expoentes de Lyapunov foi realizada por um programa em *C* que desenvolvemos. No apêndice B apresentamos maiores detalhes da implementação da metodologia.

1.4 Organização da tese

No capítulo 2 investigamos o modelo de um laser de CO_2 descrito pelas equações de taxa. O laser de CO_2 é bastante popular no estudo de dinâmica não-linear por ter sido o primeiro laser onde uma rota de dobramento de período para o caos e multiestabilidade foi verificada experimentalmente. Apresentamos pela primeira vez a estrutura da região caótica para esse modelo e realizamos uma comparação com a estrutura fina da região caótica de um sistema de tempo discreto.

No capítulo 3 investigamos o modelo de um laser de semiconductor com injeção óptica. Esse modelo tem sido muito investigado tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Investigamos com bastante detalhe uma região caótica desse modelo. Mostramos

diversos tipos de estruturas periódicas que existem encaixadas na região caótica. Reportamos fenômenos no espaço de parâmetros desse modelo que nunca haviam sido observados em nenhum modelo de equações diferenciais.

No capítulo 4 investigamos o modelo de um circuito eletrônico resistivo bastante simples, contendo dois diodos como elemento não-linear. O modelo é descrito por um conjunto de equações diferenciais autônomas possuindo uma simetria com relação a origem. Esse modelo foi investigado há quase 20 anos atrás e tem permanecido praticamente inexplorado na literatura. Realizamos pela primeira vez uma análise em dois parâmetros desse modelo, onde encontramos uma organização muito interessante no espaço de parâmetros formada por infinitas espirais encaixadas na região caótica.

No capítulo 5 investigamos o oscilador de Duffing amortecido e forçado, um modelo paradigmático no estudo de dinâmica não-linear. É atribuído a esse modelo a primeira observação de conduta aperiódica em equações diferenciais. Investigamos uma grande porção do espaço de parâmetros desse oscilador e investigamos regiões periódicas que existem encaixadas na região caótica, e como elas recorrem quando a amplitude da força externa cresce.

Finalmente, no capítulo 6 apresentamos as principais conclusões deste trabalho e mencionamos algumas possibilidades de continuidade e exploração do trabalho realizado nesta tese.

Capítulo 2

Laser de CO₂ com perdas moduladas

Este capítulo é baseado na publicação [48]. Neste capítulo realizamos uma investigação numérica detalhada do modelo de dois níveis do laser de CO₂ com perdas moduladas, focando na estabilidade global do laser em relação aos parâmetros de modulação. Nossas investigações encontraram regularidades no espaço de parâmetros desse modelo, onde o tempo é contínuo, que até então tinham sido encontradas apenas em modelos baseados em mapas, onde o tempo é discreto. Investigamos a estrutura fina da região caótica do modelo do laser de CO₂ e mostramos a existência de infinitas estruturas de estabilidade auto-similares alinhadas em direções específicas no espaço de parâmetros. Mostramos que o ordenamento dessas estruturas periódicas encaixadas na região caótica do laser de CO₂ é o mesmo ordenamento do mapa de Hénon.

2.1 Introdução

Em 1982, Arecchi *et al.* [49] reportaram a primeira observação experimental de uma seqüência de bifurcações sub-harmônicas conduzindo ao caos e coexistência de atratores em um sistema laser. Em seus experimentos, eles utilizaram um laser de CO₂ sujeito a uma modulação periódica das perdas da cavidade e compararam seus resultados com um modelo teórico simples, baseado nas equações de taxa. Naquela época existia um grande interesse por parte dos cientistas em demonstrar e investigar condutas erráticas ou

caóticas, que já eram bem conhecidas em ocorrer em sistemas determinísticos não-lineares.

Desde então o laser de CO₂ foi extensivamente investigado, tanto experimentalmente como numericamente, principalmente nos anos 80 e 90, onde diversos resultados com relação à dinâmica desse modelo foram obtidos [50, 51, 52, 53]. Vários fenômenos que ocorrem tipicamente em sistemas não-lineares foram observados experimentalmente através do laser de CO₂ como, por exemplo, dimensões fractais de atratores estranhos [55], ocorrência de janelas periódicas [56] e crises [57]. Mais recentemente, algumas investigações estiveram voltadas para a utilização de modulações adicionais ou a introdução de perturbações periódicas fracas. Alguns outros fenômenos têm sido mostrados utilizando-se o modelo do laser de CO₂ como protótipo, como por exemplo, aniquilação de atratores em sistemas bi-estáveis [58] e indução de multiestabilidade em sistemas não-lineares [59].

Entretanto a maioria das investigações realizadas para o laser de CO₂, foi com relação a fenômenos ocorrendo no espaço de fases do laser. Com relação a variações de dois parâmetros apenas as primeiras curvas de bifurcações de regiões periódicas foram investigadas numericamente por Goswami [60, 61] na forma do oscilador de Toda. O oscilador de Toda foi mostrado por Oppo e Politi [62] ser equivalente a um laser da classe B, que é a classe a que pertence o laser de CO₂.

Na seqüência deste capítulo vamos apresentar investigações para o modelo de dois níveis do laser de CO₂ com perdas moduladas, focando na estabilidade global do laser, e variando-se simultaneamente os dois parâmetros de modulação desse sistema. Nossas investigações apresentam pela primeira vez a estrutura da região caótica para esse modelo.

2.2 O modelo de dois níveis e lasers da classe B

O laser de CO₂ pode ser descrito de uma maneira bastante simplificada pelas chamadas equações de taxa, ou seja, duas equações diferenciais acopladas, uma para a intensidade do laser e outra para a população de inversão. As equações de taxa podem ser obtidas através de uma argumentação fenomenológica ou diretamente reduzidas das equações de Maxwell-Bloch [63, 64, 65], provenientes da teoria semi-clássica do laser. Fisicamente, as equações

de Maxwell-Bloch descrevem a interação de um campo eletromagnético intenso com uma coleção de átomos de dois níveis, idênticos e não-interagentes, os quais constituem um meio de ganho onde ocorre a ação laser. Muitas suposições e aproximações são realizadas [63, 64, 65] até a obtenção de um conjunto fechado de equações diferenciais ordinárias de baixa ordem para modelar o laser. Os termos relacionados a ganhos e perdas presentes nas equações são adicionados de maneira fenomenológica. As equações diferenciais resultantes descrevem a evolução do campo elétrico E , da polarização do meio ativo P e da diferença de população D entre os dois níveis de energia dos átomos que constituem o meio ativo.

A forma mais simples das equações de Maxwell-Bloch é dada por assumir-se E e P reais, resultando em um conjunto de três equações diferenciais ordinárias não-lineares. Esse conjunto de equações foi mostrado por Haken [66] em 1975 ser isomórfico ao modelo proposto por Lorenz em 1963 para descrever, de uma forma bastante simplificada, o movimento convectivo de um fluido [1], e foi uma das motivações iniciais para a utilização de lasers no estudo de instabilidades geradas em sistemas determinísticos. Entretanto, diferentemente do que ocorre usualmente no modelo de Lorenz, os modelos descrevendo lasers reais têm taxas de decaimento para suas variáveis que podem diferir de várias ordens de magnitude entre si. Então, algumas das variáveis do laser podem ser eliminadas em um processo chamado eliminação adiabática [67].

No estudo de dinâmica de lasers, é comum utilizarmos uma classificação introduzida por Arecchi *et al.* [68] para os diferentes tipos de lasers. Eles classificaram os lasers em três classes, A, B ou C, de acordo com a relação entre as magnitudes das taxas de decaimento de cada variável. Lasers pertencentes à classe A são aqueles em que as taxas de decaimento da polarização e da população são muito maiores do que as perdas da cavidade. Deste modo as variáveis P e D podem ser eliminadas adiabaticamente e o laser é descrito por uma única equação diferencial não-linear para o campo elétrico E . Lasers da classe B são aqueles em que a taxa de decaimento da polarização é muito maior do que as taxas de perda do campo elétrico e da população. Então a polarização pode ser eliminada adiabaticamente e o laser é descrito por duas equações diferenciais acopladas, uma para o campo elétrico e outra para a população de inversão. Já os lasers da classe C são aqueles

em que todas as taxas de decaimento são da mesma ordem de magnitude, necessitando então o conjunto completo das equações de Maxwell-Bloch para sua descrição.

Os dois modelos de lasers que tratamos nesta tese, o laser de CO₂ e o laser de semicondutor, pertencem à classe B. Assim, neste capítulo vamos considerar um laser da classe B sujeito a uma modulação das perdas da cavidade, enquanto no capítulo 2 vamos tratar de um laser da classe B sujeito a uma injeção óptica. A seguir, apresentamos as equações de taxa do laser de CO₂ que investigamos.

2.2.1 As equações de taxa

As equações de taxa que descrevem um laser de CO₂ podem ser escritas como [49, 59]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\tau}(z - k)u, \quad (2.1a)$$

$$\frac{dz}{dt} = (z_0 - z)\gamma - uz. \quad (2.1b)$$

No sistema de equações 2.1, u é proporcional à densidade de radiação do laser e z é o ganho do meio ativo. Ou seja, essas duas quantidades são proporcionais ao campo elétrico E e à população de inversão D do laser, respectivamente. Os quatro parâmetros do sistema de equações 2.1 são: z_0 é ganho não-saturado do meio ativo e está relacionado com a energia fornecida para se obter a inversão de população no laser, τ é o tempo transiente da luz na cavidade, γ é a taxa de decaimento do ganho e k são as perdas totais da cavidade. Os valores desse parâmetros foram fixados seguindo-se valores realísticos para um laser de CO₂ usados em investigações teóricas e experimentais reportadas na referência [59], e são dados por: $\tau = 3.5 \times 10^{-9}$ s, $\gamma = 1.978 \times 10^5$ s⁻¹, $z_0 = 0.175$ e $k = 0.1731$.

O sistema de equações 2.1 tem apenas dois graus de liberdade e, como é bem conhecido, não pode apresentar soluções caóticas, conforme mostra o teorema de Poincaré-Bendixson [69]. Basicamente esse teorema estabelece que, em sistemas dinâmicos de tempo contínuo no plano, a conduta a tempos longos de qualquer órbita que permanece em uma região

limitada do espaço de fases aproxima-se, ou de um ponto fixo, ou de uma órbita periódica. Assim, condutas caóticas podem existir apenas em sistemas dinâmicos de tempo contínuo cujo espaço de fases tem três ou mais dimensões. Esse teorema não se aplica para sistemas dinâmicos de tempo discreto, onde é possível existir conduta caótica mesmo em sistemas com uma dimensão.

Antes de introduzirmos a modulação do laser e investigarmos o diagrama de fase em função dos parâmetros de modulação vamos analisar a estabilidade do sistema de equações 2.1 por técnicas elementares de estabilidade linear [70]. Tomando as derivadas iguais a zero nas equações 2.1:

$$\frac{1}{\tau}(z - k)u = 0, \quad (2.2a)$$

$$(z_0 - z)\gamma - uz = 0. \quad (2.2b)$$

Temos duas soluções possíveis para o sistema 2.2 que são:

$$\text{i) } \bar{u} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{z} = z_0, \quad (2.3a)$$

$$\text{ii) } \bar{u} = \gamma\left(\frac{z_0}{k} - 1\right) \quad \text{e} \quad \bar{z} = k. \quad (2.3b)$$

A solução 2.3a corresponde ao estado de equilíbrio trivial do laser, com bombeamento e sem fótons na cavidade. A solução 2.3b corresponde à condição de operação não-trivial, permitindo uma intensidade diferente de zero. Essa solução só tem significado físico se $z_{thr} \equiv \frac{z_0}{k} > 1$, sendo a condição $z_{thr} > 1$ conhecida como condição de limiar para o funcionamento do laser. Essa condição expressa o resultado bastante conhecido de que para haver ação laser o ganho deve compensar as perdas. A seguir, vamos analisar a estabilidade da solução 2.3b, que é a solução fisicamente interessante, através do procedimento convencional de análise de estabilidade linear.

Considerando pequenos desvios ϵ e η das soluções estacionárias, escrevemos:

$$u(t) = \bar{u} + \epsilon, \quad (2.4a)$$

$$z(t) = \bar{z} + \eta. \quad (2.4b)$$

Substituindo 2.4 no sistema de equações 2.1 obtemos:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\gamma}{\tau} \left(\frac{z_0}{k} - 1 \right) \eta, \quad (2.5a)$$

$$\dot{\eta} = -k\epsilon - \gamma \frac{z_0}{k} \eta, \quad (2.5b)$$

onde os autovalores desse sistema linear são calculados por:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\gamma k}{\tau} \left(\frac{z_0}{k} - 1 \right) \\ -k & -\gamma \frac{z_0}{k} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Os dois autovalores, λ_1 e λ_2 , são dados pela expressão:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma z_0}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma z_0}{2k} \right)^2 - \frac{\gamma k}{\tau} \left(\frac{z_0}{k} - 1 \right)}. \quad (2.6)$$

Como todos os parâmetros do sistema de equações 2.1 são reais e positivos, e ainda o laser de CO₂ satisfaz a condição $\frac{k}{\tau} \gg \gamma$, o termo dentro da raiz em 2.6 é sempre negativo. Podemos escrever então:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma z_0}{2k} \pm i \sqrt{\frac{\gamma k}{\tau} \left(\frac{z_0}{k} - 1 \right) - \left(\frac{\gamma z_0}{2k} \right)^2}. \quad (2.7)$$

Como a parte real de ambos os autovalores em 2.7 é negativa, essa solução é estável, significando que perturbações locais convergirão para essa solução com o transcorrer do tempo. Como os autovalores em 2.7 contém uma parte imaginária, as soluções perturbadas se aproximarão das soluções estacionárias de maneira oscilatória. O segundo termo dentro do radical em 2.7 pode ser desprezado frente ao primeiro termo, conforme condições já comentadas para o laser de CO₂, de onde obtemos a usual expressão para a frequência das oscilações de relaxação f_{RO} para lasers da classe B:

$$f_{RO} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma k}{\tau} \left(\frac{z_0}{k} - 1 \right)}. \quad (2.8)$$

A figura 2.1 ilustra as soluções para a intensidade e inversão do laser obtidas nume-

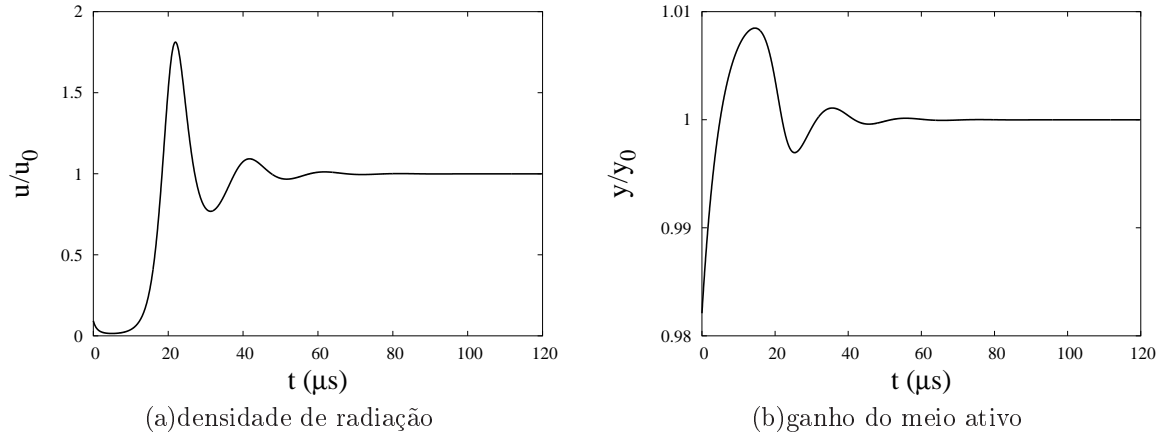


Figura 2.1: Oscilações de relaxação convergindo para as soluções estacionárias do laser. Os valores estão normalizados com relação aos valores estacionários.

ricamente para as equações 2.1 com os valores de parâmetros que fixamos, mencionados anteriormente. O sistema evolui a partir de uma condição inicial e converge para uma solução estacionária (ponto fixo), exibindo oscilações de relaxação. Substituindo os valores numéricos dos parâmetros na expressão 2.8 obtemos o valor aproximado $f_{RO} \approx 52.2\text{kHz}$ para frequência das oscilações de relaxação. Esse valor pode ser comparado com o valor mais preciso, para a frequência das oscilações de relaxação, obtido sem desprezar o segundo termo dentro do radical na parte imaginária dos autovalores da expressão 2.7. Nesse caso obtemos $f_{RO} = 49.7\text{kHz}$.

2.2.2 Modulação das perdas da cavidade

A motivação inicial para introduzir-se uma modulação nas perdas da cavidade do laser, era aumentar a dimensionalidade do sistema de forma que ele pudesse ter a possibilidade de apresentar conduta caótica. Esse tipo de modulação foi proposto teoricamente pela primeira vez por Ivanov *et al.* [71] para o modelo de um laser da classe B, enquanto simultaneamente e independentemente Arecchi *et al.* [49] reportaram os seus resultados experimentais utilizando essa modulação para o laser de CO₂. Fisicamente, esse tipo de modulação pode ser obtido por introduzir-se um modulador eletro-óptico no interior da cavidade ressonante do laser.

Do ponto de vista teórico, esse processo é modelado através de uma modulação do

parâmetro k , que refere-se às perdas totais da cavidade do laser:

$$k \equiv k(t) = k_0(1 + a \cos 2\pi ft). \quad (2.9)$$

Com a introdução da dependência temporal ao parâmetro $k \equiv k(t)$, o sistema de equações 2.1 ganha um grau de liberdade necessário para exibir uma grande variedade de condutas dinâmicas, incluindo oscilações caóticas. Na equação 2.9, k_0 é a parte constante das perdas, enquanto a e f são a amplitude e a frequência da modulação periódica aplicada, respectivamente. Aqui tomamos $k_0 = 0.1731$. O ponto central deste capítulo será a análise teórica da conduta do sistema em função dos parâmetros de modulação a e f .

Com as perdas da cavidade moduladas conforme a equação 2.9 e com os valores de parâmetros que fixamos, a conduta dinâmica do sistema de equações 2.1 depende da escolha dos valores dos parâmetros da modulação (a, f), além de poder depender também das condições iniciais. É bem conhecido que, para valores da frequência de modulação comparáveis à frequência das oscilações de relaxação, o laser tende a apresentar diversos tipos de instabilidades. No caso que estamos investigando aqui, como vimos no final da seção 2.2.1, a frequência das oscilações de relaxação é 49.7kHz. A figura 2.2 mostra séries temporais para a intensidade do laser integradas durante um tempo equivalente a 30 vezes o período da modulação e projeções do espaço de fases no plano intensidade-inversão para quatro valores diferentes da amplitude de modulação. Aqui “A” ilustra uma oscilação de período 1, “B” período 2, “C” período 4 e “D” uma oscilação caótica, ou seja, a usual seqüência de dobramentos de período conduzindo ao caos.

A figura 2.3 ilustra tipicamente o que ocorre com a intensidade do laser quando variamos continuamente um dos parâmetros de modulação. Nessa figura são plotados os máximos da série temporal da intensidade do laser em função da amplitude de modulação, para uma frequência fixa $f = 90\text{kHz}$. Os valores da intensidade estão normalizados em relação ao seu valor estacionário. Para valores pequenos da amplitude de modulação o sistema oscila com a mesma frequência f da modulação aplicada. Para valores maiores da amplitude de modulação essa solução se desestabiliza e o sistema passa a oscilar com uma frequência $f/2$. E assim ocorre sucessivamente seguindo-se a usual seqüência

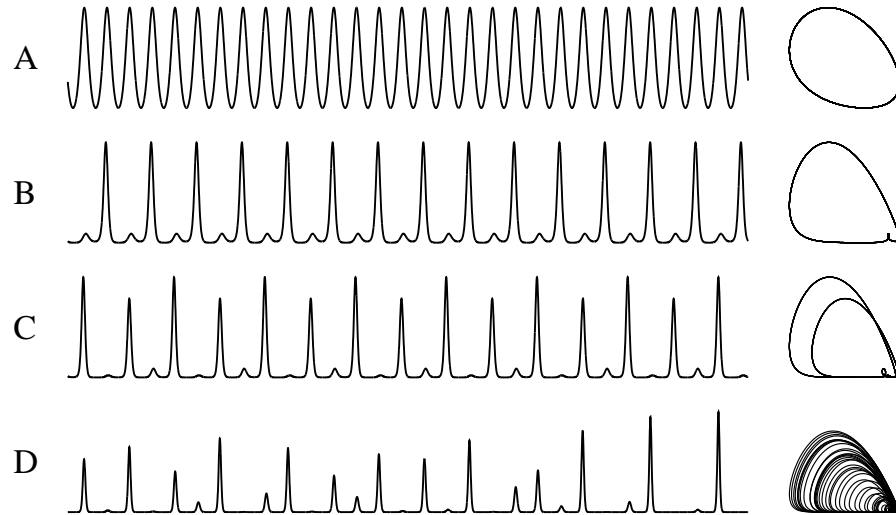


Figura 2.2: Séries temporais para a intensidade do laser (esquerda) e projeções das soluções no plano $z \times u$ (direita), para quatro valores de amplitude de modulação a . A: $a = 0.005$, período 1; B: $a = 0.018$, período 2; C: $a = 0.0285$, período 4; D: $a = 0.057$, caos. A frequência foi fixada em $f = 90\text{kHz}$.

infinita de bifurcações subharmônicas até atingir-se a transição para as soluções caóticas, caracterizando o chamado cenário de Feigenbaum [72]. As três primeiras bifurcações subharmônicas ocorrem para $a \approx 0.0124$, $a \approx 0.0267$ e $a \approx 0.0321$ e estão denotadas, respectivamente, pelos números 1, 2 e 3 na figura 2.3.

Ainda sobre a figura 2.3, observamos que em $a \approx 0.0412$, denotado pelo número 4, ocorre o surgimento de uma nova solução periódica. Essa solução coexiste com a solução proveniente do ramo original de soluções (que nasceu a partir de $a = 0$) até o ponto $a \approx 0.0524$, denotada pelo número 5. Nesse ponto o ramo de soluções original é aniquilado por uma crise de fronteira [73]. Para uma melhor visualização, uma das soluções é plotada na cor vermelha no intervalo em que ocorre coexistência. Uma análise teórica da interação entre diferentes ramos de soluções que podem coexistir no modelo do laser de CO₂ com perdas moduladas foi reportada na referência [51]. O ponto denotado por 4 é o ponto onde ocorre uma bifurcação do tipo sela-nó, ou seja, o ponto onde nasce uma solução de período 3. Período 3 aqui refere-se que o sistema oscila com um período $3T$, ou seja, um período 3 vezes maior que o período da modulação aplicada que é $T \equiv 1/f$. O ponto onde nasce um novo ramo de soluções, como a solução de período 3 que nasce no ponto

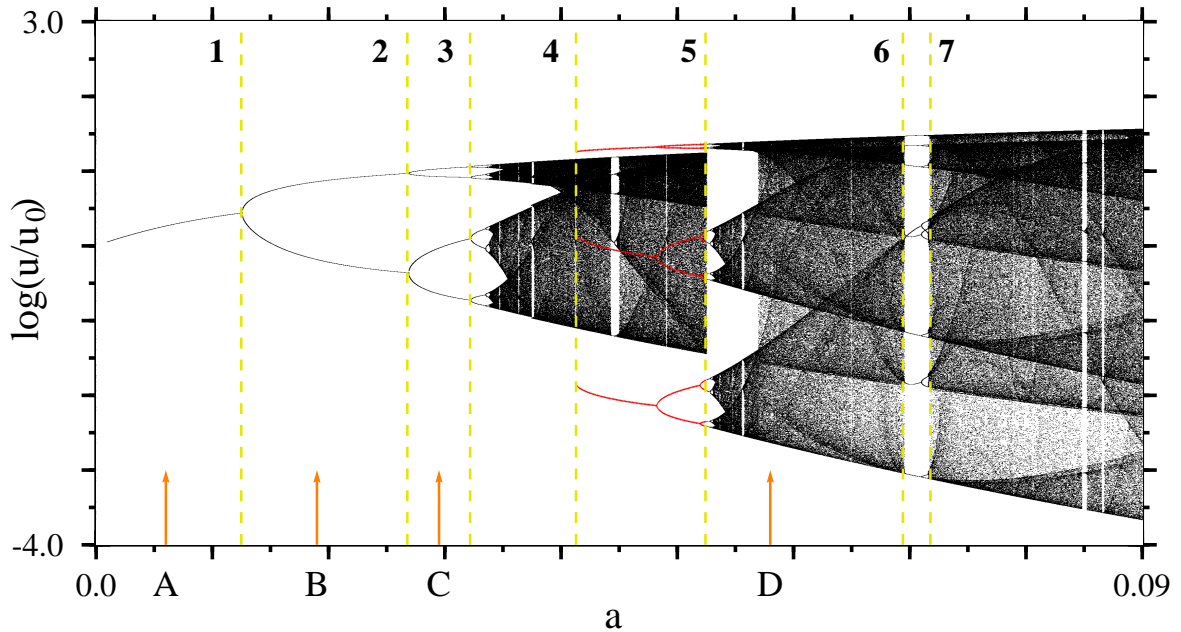


Figura 2.3: Diagrama de bifurcações para os máximos da intensidade do laser. O intervalo limitado pelos números 4 e 5 ilustra uma região onde ocorre coexistência de soluções. Nesse caso, uma das soluções está plotada em vermelho.

4, foi chamado de *bifurcação sela-nó primária* por Schwartz [74]. De fato, esse trabalho argumenta, através da análise de um modelo reduzido para as equações do laser modulado, a existência de uma seqüência infinita de bifurcações sela-nó primárias com período n/f , onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Por fim, como última informação obtida da figura 2.3, destacamos a existência das janelas periódicas que tipicamente observamos em diagramas de bifurcações dependentes de um parâmetro, em meio ao regime caótico. No intervalo entre $a \approx 0.0694$ e $a \approx 0.0717$, denotados pelos números 6 e 7, ocorre uma janela de período $8T$. A análise dessas janelas periódicas, quando olhamos para a variação simultânea dos dois parâmetros de modulação, amplitude e freqüência, será o principal foco de estudo no decorrer deste capítulo.

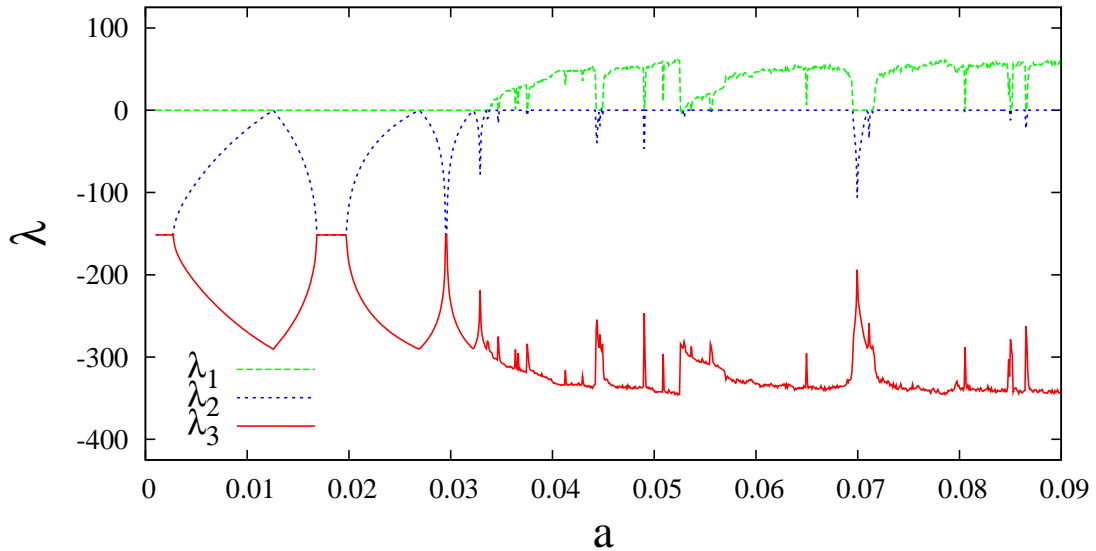


Figura 2.4: Espectro de expoentes de Lyapunov em função da amplitude da modulação para $f = 90\text{kHz}$. As cores representam os três expoentes ordenados, onde verde denota o maior expoente, azul o segundo e vermelho o terceiro. Os expoentes estão em ks^{-1} .

2.3 Caracterização do espaço frequência-amplitude

Na seção anterior descrevemos algumas das principais características com relação ao modelo de um laser da classe B sujeito a uma modulação periódica das perdas da cavidade. Em particular apontamos os principais resultados investigados na literatura que são principalmente em relação à variação de um parâmetro de modulação, enquanto o outro é mantido fixo. Nesta seção investigamos a conduta dinâmica do laser olhando para a variação simultânea de dois parâmetros do modelo, que são a frequência e a amplitude da modulação. Esses são justamente os dois parâmetros de controle que podem ser facilmente ajustados em experimentos reais. Para caracterizar o espaço dos dois parâmetros $a \times f$ computamos um diagrama de fase baseado na estimativa numérica dos expoentes de Lyapunov, conforme descrevemos na seção 1.3. O sistema de equações 2.1 foi integrado numericamente utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo $h = 4 \times 10^{-8}$.

Para ilustrar a confecção dos diagramas de fase, a figura 2.4 mostra o espectro de expoentes de Lyapunov em função da amplitude da modulação para uma frequência fixa

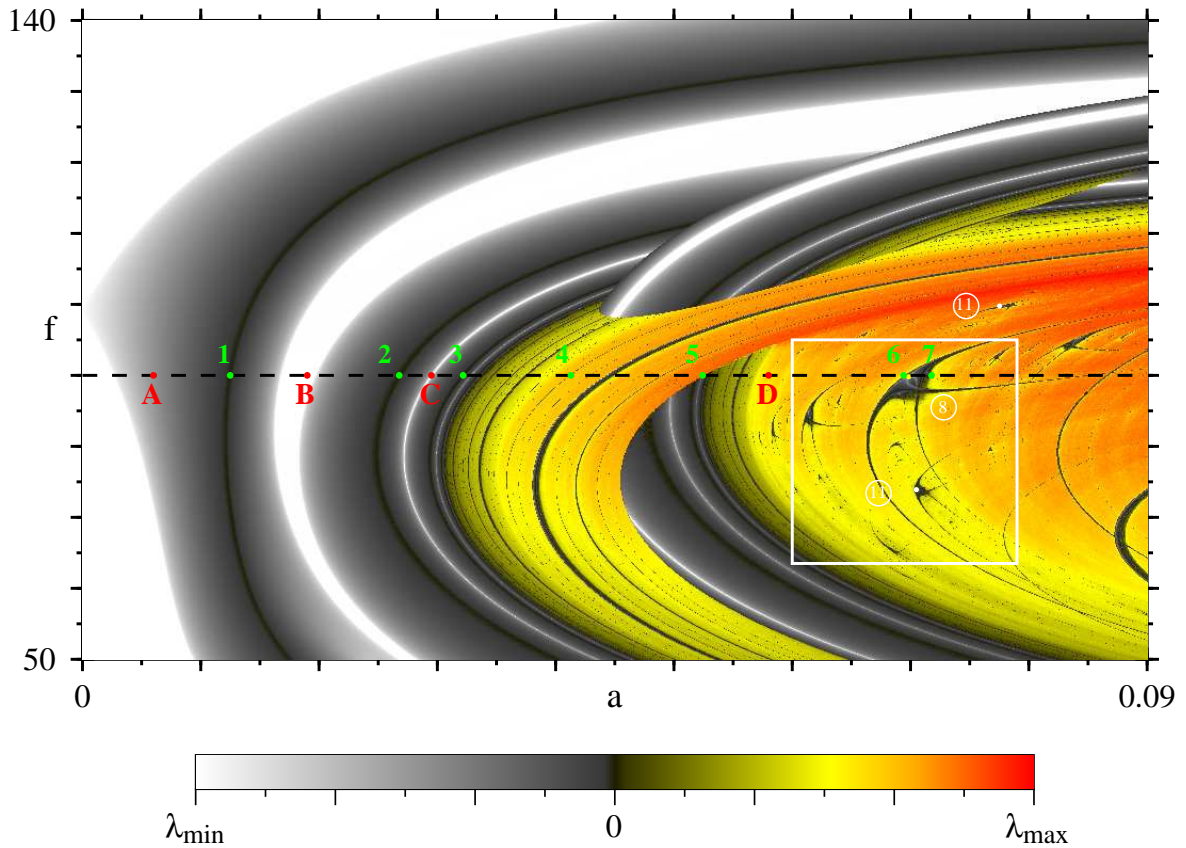


Figura 2.5: (a) Diagrama de fase do laser de CO₂ com perdas moduladas em função da amplitude (a) e frequência (f) da modulação. As cores são proporcionais aos expoentes de Lyapunov, sendo que um gradiente entre branco-cinza denotam regiões de oscilações periódicas e um gradiente amarelo-vermelho denotam regiões de oscilações caóticas, com o preto colocado no centro da escala denotando os expoentes nulos. Os valores máximos e mínimos dos expoentes são: $\lambda_{max} = 75ks^{-1}$ e $\lambda_{min} = -150ks^{-1}$. As frequências estão em kHz. A frequência das oscilações de relaxação é $f_{RO} = 49.7kHz$.

$f = 90kHz$. Aqui o intervalo $a = [0, 0.09]$ foi dividido em 600 partes e pode ser visualizado como uma linha do diagrama de fase bidimensional que iremos mostrar mais adiante. Como o sistema de equações 2.1 com a modulação paramétrica dada pela equação 2.9 forma um sistema bidimensional não-autônomo, as integrações numéricas e o cálculo dos expoentes foram realizados com o usual procedimento de extender-se o espaço de fases introduzindo uma nova variável de maneira a transformar o sistema em autônomo. O espectro de expoentes de Lyapunov é dado pelo conjunto de três expoentes relativos às três direções do espaço de fases, sendo que um dos expoentes, que está associado com a

direção temporal, é sempre zero. Na figura 2.4 os três expoentes λ_1 , λ_2 e λ_3 aparecem ordenados do maior para o menor, respectivamente. Na construção dos diagramas foi utilizado o maior expoente não nulo, ou seja o expoente nulo e o terceiro expoente são descartados.

A figura 2.5 mostra o diagrama de fase que obtemos computando o espectro de expoentes para 600×600 valores de parâmetros igualmente espaçados no espaço $a \times f$ nos intervalos $a = [0, 0.09]$ e $f = [50, 140]$ kHz. Aqui tons de cinza foram utilizados para codificar a magnitude dos expoentes negativos, representando as regiões periódicas, e um gradiente vermelho-amarelo para codificar a magnitude dos expoentes positivos, representando as regiões caóticas. O zero foi colocado no centro da escala de cores e é indicado pelas tonalidades mais escuras, aproximando-se da cor preta. Branco denota os expoentes mais negativos e vermelho os mais positivos. Veja em detalhe a codificação da magnitude dos expoentes na escala de cores na parte inferior da figura 2.5. Assim, as regiões de tonalidades mais escuras (as linhas que passam pelos pontos 1-3 no diagrama de fase, por exemplo) denotam regiões onde os expoentes são aproximadamente zero, indicando onde curvas de bifurcações estão localizadas no diagrama. As curvas que passam pelos pontos 1, 2 e 3, por exemplo, são curvas onde ocorrem dobramentos de período. Essas curvas concordam com o trabalho de Goswami [61], que computou numericamente as primeiras curvas de bifurcações para esse modelo do laser na forma do oscilador de Toda.

O diagrama de fase na figura 2.5 mostra uma porção global do espaço de parâmetros $a \times f$. Nesse diagrama podemos discriminar entre uma extensa região onde ocorrem oscilações periódicas, representada pelo gradiente branco-cinza-preto, e uma grande região onde ocorrem oscilações caóticas, representada pelo gradiente vermelho-amarelo, conforme escala de cores dessa figura. É possível observar que existe um mínimo de amplitude a onde as bifurcações sub-harmônicas começam a ocorrer. Nessa figura também é interessante observar o contraste entre as cores denotando os expoentes mais negativos, mostrados na figura em branco, com regiões de expoentes não tão negativos, mostrados em cinza. É interessante observar essa conduta dos expoentes de Lyapunov próximos à frequência de 100 kHz, na região de período 1, para pequenos valores da amplitude a . Essa região

corresponde a uma modulação aplicada com uma frequência da ordem de duas vezes ao valor da frequência de oscilações de relaxação f_{RO} , ou seja, duas vezes o valor da frequência de oscilação natural do sistema.

A linha pontilhada destacada no diagrama da figura 2.5 refere-se às figuras 2.3 e 2.4 e corresponde a uma frequência de modulação fixa $f = 90\text{kHz}$. Os pontos 1-7 marcados no diagrama referem-se aos números 1-7 indicados no diagrama de bifurcações da figura 2.3. Conforme já mencionamos, os números 1, 2 e 3 são pontos onde ocorrem dobramentos de período. Entre os números 4 e 5 existe coexistência atratores. Em função de se poder associar apenas uma cor para um ponto no espaço de parâmetros, apenas um expoente é plotado, representando então, somente um dos atratores nas regiões multiestáveis. Isto explica a aparente descontinuidade na parte superior direita do diagrama onde um outro ramo de soluções é selecionado. Os pontos 6 e 7 denotam uma janela de periodicidade de período 8. As letras *A-D* referem-se às soluções para o espaço de fases do laser mostradas na figura 2.2.

No interior da região caótica podemos ter novamente oscilações periódicas estáveis no laser. Em um diagrama de bifurcações dependente de um parâmetro, como o da figura 2.3, essas oscilações periódicas correspondem às bem conhecidas janelas de periodicidade que tipicamente observamos para determinados intervalos do parâmetro de controle. A novidade teórica que apresentamos aqui neste capítulo e que pode ser observada no diagrama da figura 2.5, está na estrutura dessas regiões periódicas quando olhamos para a variação simultânea de dois parâmetros do sistema de equações diferenciais. Em uma situação mais simples, como por exemplo na parte da região caótica onde estão localizados os números 4 e 5 e que corresponde à região caótica que está relacionada com o desdobramento de bifurcações do ramo principal de soluções, é possível identificar regiões periódicas na forma de “tiras”. A situação mais interessante é o caso onde as janelas periódicas podem formar uma rede de infinitas estruturas de bifurcações auto-similares no espaço de dois parâmetros, conforme será discutido em detalhe na próxima seção. Essa situação pode ser observada na parte da região caótica onde é possível identificar diversas ilhas de estabilidade. Algumas dessas regiões de estabilidade estão destacadas pelos nú-

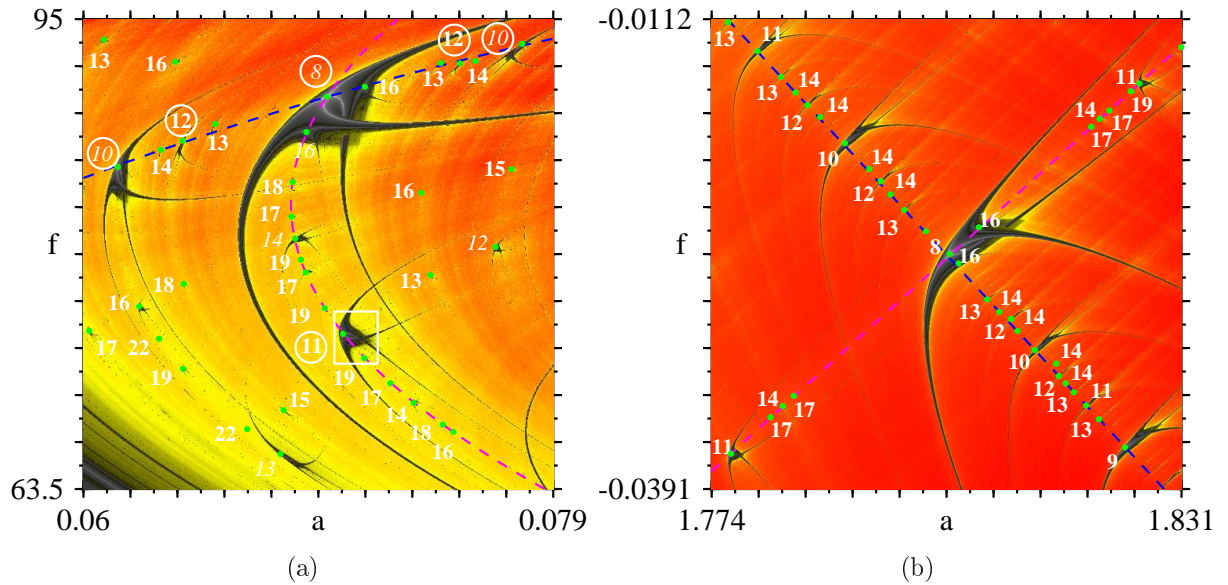


Figura 2.6: (a) Detalhes da estrutura de uma região caótica do laser de CO₂ em função dos parâmetros de modulação. (b) Estrutura do espaço de parâmetros do mapa de Hénon. Os pontos denotam a localização de diversas estruturas auto-similares enquanto os números indicam o período principal de cada uma delas.

meros com círculos, onde o número refere-se ao período da região associada. No caso da figura 2.5 destacamos uma região de período 8 e duas regiões de período 11. Na próxima seção investigamos em maior detalhe essas estruturas periódicas e fazemos uma comparação com um sistema dinâmico de tempo discreto onde essas estruturas foram estudadas previamente.

2.4 Auto-similaridades na região caótica

Na seção anterior mostramos uma porção global do espaço de parâmetros do laser de CO₂ com perdas moduladas. O espaço de parâmetros é caracterizado tipicamente por sucessivas curvas de bifurcações sub-harmônicas de soluções periódicas e extensas regiões onde ocorrem condutas caóticas. Dentro da região caótica descobrimos a existência de diversas ilhas de estabilidade onde ocorrem oscilações periódicas. Aqui investigamos essas regiões de periodicidade em maior detalhe.

A figura 2.6(a) mostra uma magnificação de uma porção da região caótica do laser

de CO₂ onde observamos diversas ilhas de estabilidade. Essa magnificação corresponde à caixa em destaque na figura 2.5. Aqui podemos observar que dentro de um largo domínio de parâmetros conduzindo à oscilações caóticas existe uma estrutura regular de janelas de parâmetros auto-similares contendo oscilações periódicas estáveis, caracterizadas por valores negativos dos expoentes de Lyapunov. Essas estruturas auto-similares foram chamadas de camarões (*shrimp*) por Gallas [30] e contém uma rica estrutura de bifurcações associada. Cada estrutura auto-similar contém um período principal que se desestabiliza via duplicação de período. O período principal sofre uma cascata infinita de dobramento de período em direções específicas do espaço de parâmetros, conduzindo a uma transição para o caos. Na figura 2.6(a) estão marcados os períodos principais de umas poucas estruturas auto-similares maiores, indicado pelo número próximo a elas. Essas estruturas aparecem infinitamente em diversos níveis de escala. Nos casos em que elas são muito pequenas para aparecerem na escala de parâmetros considerada, apenas um ponto denota sua localização. Na estrutura de período 8, o menor período encontrado dentro da região de parâmetros investigada, estão marcadas as duas regiões de período 16 correspondendo aos dois primeiros dobramentos em duas direções diferentes no espaço de parâmetros.

A fim de se fazer uma análise comparativa entre o espaço de parâmetros de mapas e fluxos, a figura 2.6(b) mostra um diagrama de fase construído através da computação dos expoentes de Lyapunov para o mapa de Hénon [75]:

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b y_t, \quad (2.10a)$$

$$y_{t+1} = x_t. \quad (2.10b)$$

O mapa de Hénon é um modelo bi-dimensional dependente de dois parâmetros a e b , onde a controla a não-linearidade e b a dissipatividade. Aqui consideramos uma porção do espaço de parâmetros (a, b) envolvendo um domínio de estabilidade de período 8. Essa região encontra-se no limite altamente dissipativo onde Pando *et al.* [76] encontrou que um modelo mais sofisticado do laser de CO₂ conduz qualitativamente como o mapa de Hénon. A figura 2.6(b) mostra que as estruturas auto-similares se organizam ao longo de específicas

direções no espaço de parâmetros, conforme descrito por Gallas [30]. Observe que, no caso do mapa do Hénon, as direções no espaço de parâmetros podem ser bem aproximadas por linhas retas. Já no caso do laser de CO₂, as direções contendo o alinhamento das estruturas periódicas são bem aproximadas por parábolas, na porção do espaço de parâmetros que estamos considerando aqui.

Uma questão interessante que analisamos em maior detalhe é em relação ao ordenamento das estruturas periódicas que aparecem alinhadas no espaço de parâmetros. Aqui encontramos que o ordenamento observado ao longo da diagonal principal da figura 2.6(b) para o mapa de Hénon, é o mesmo encontrado para o laser na direção contendo os números com círculos, na região superior da figura 2.6(a). Analogamente, a diagonal secundária da figura 2.6(b) mostra o mesmo ordenamento que o arco parbólico no meio da figura 2.6(a). Para facilitar a visualização, os alinhamentos considerados são indicados pelas retas e curvas pontilhadas em ambas as figuras. Cores similares das linhas pontilhadas nas duas figuras indicam as direções onde encontramos o mesmo ordenamento. Na figura 2.6(a) o arco parabólico central (cor magenta) é dado pela função $a \approx 2.809 \times 10^{-5} f^2 - 0.00464 f + 0.26012$ no intervalo $f = [63.5, 95]$, enquanto o arco parabólico na parte superior (cor laranja) é dado por $f \approx -6575 a^2 + 1405 a + 23.69$ no intervalo $a = [0.06, 0.079]$. Na figura 2.6(b) a reta na direção da diagonal principal (cor laranja) é dada por $b \approx -0.526 a + 0.923$, enquanto a reta na direção da diagonal secundária (cor magenta) é dada por $b \approx 0.443 a - 0.824$. Essas funções aproximam muito bem os alinhamentos das estruturas auto-similares nas respectivas porções consideradas do espaço de parâmetros.

A figura 2.7 mostra em detalhe duas estruturas auto-similares magnificadas da figura 2.6(a). Na figura 2.7(a) mostramos uma ampliação da estrutura de período 8. Esse foi o menor período que observamos dentro da região caótica, para os valores de parâmetros que analisamos. Os pontos marcam a região de período 8, que é o período principal associado com essa região de estabilidade, e os dois primeiros dobramentos de período que ocorrem em direções diferentes no espaço de parâmetros. Essas duas regiões estão denotadas pelo número 16, que é o valor do período após o dobramento. Note que, pela codificação

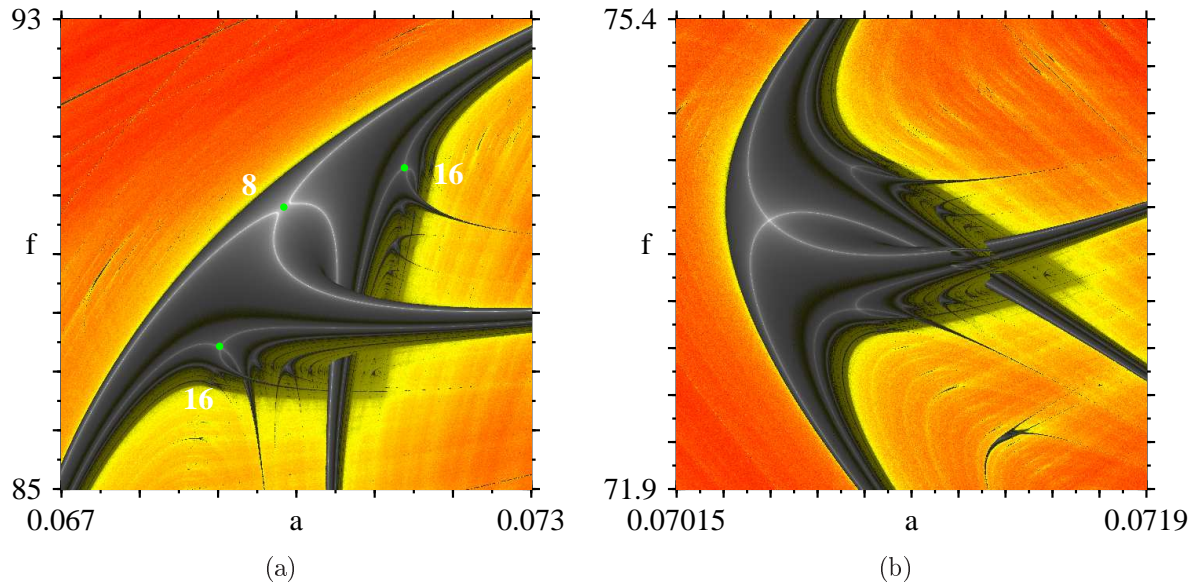


Figura 2.7: Detalhe de duas estruturas de estabilidade auto-similares que existem no interior da região caótica do laser de CO₂. (a) Ampliação da estrutura de período 8, mostrada na figura 2.6(a). Os números referem-se ao período de cada região. (b) Ampliação da estrutura de período 11, mostrada na caixa em destaque na figura 2.6(a).

de cores escolhida, podemos identificar facilmente onde ocorre a curva de bifurcação de dobramento de período no interior da estrutura de estabilidade. Cada região de período 16 sofre uma nova bifurcação de dobramento de período em outras direções do espaço de parâmetros, e assim sucessivamente até a transição para o caos. As curvas brancas que são possíveis de identificar no interior da região do período principal, que existem também no interior das regiões de períodos maiores, são os locais onde os expoentes de Lyapunov são mais negativos. Esses locais são análogos aos familiares locais superestáveis de sistemas dinâmicos de tempo discreto. Na figura 2.7(b) mostramos uma magnificação da caixa em destaque na figura 2.6(a), destacando uma estrutura auto-similar de período 11 com uma forma praticamente idêntica à forma canônica obtida no espaço de parâmetros do mapa quártico investigado por Gallas [32]. O mapa quártico é um sistema particularmente interessante para estudar esse tipo de estrutura complexa de estabilidade.

Na figura 2.8 ilustramos o sinal da intensidade do laser para pontos no espaço de parâmetros localizados no interior da estrutura auto-similar de período 8 mostrada na figura 2.7(a). Na figura 2.8(a) é mostrada a série temporal para a oscilação de período 8,

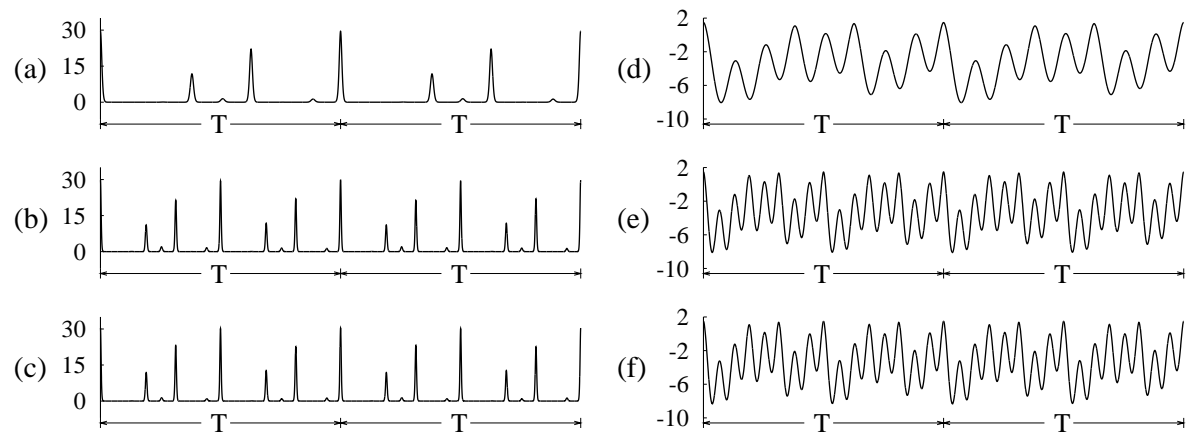


Figura 2.8: Séries temporais para a intensidade do laser referentes à estrutura de estabilidade mostrada na figura 2.7(a). Os valores de parâmetro (a, f) são: (a) (0.06984, 89.8), período 8. (b) (0.07138, 90.47), período 16. (c) (0.06902, 87.43), período 16. No lado direito, em (d)-(f), são mostrados os mesmos sinais de (a)-(c) em escala logarítmica, respectivamente. A intensidade é normalizada em relação ao seu valor estacionário. As frequências estão em kHz. $T = 1/f$.

correspondendo ao período principal dessa estrutura, enquanto nas figuras 2.8(b) e 2.8(c) são mostradas as séries temporais para as duas oscilações periódicas das regiões de período 16, destacadas na figura 2.7(a). Essas são duas regiões associadas ao dobramento do período 8, que é o período principal da estrutura auto-similar, em duas direções diferentes no espaço de parâmetros. Os sinais periódicos são caracterizados por sinais de grande intensidade inter espaçados por oscilações muito pequenas, como ocorre tipicamente nesses modelos de laser. Para uma identificação mais fácil da periodicidade das séries temporais, apresentamos os mesmos sinais considerados nas figuras 2.8(a)-2.8(c) em escala logarítmica nas figuras 2.8(d)-2.8(f).

Na figura 2.9 mostramos em detalhe o sinal de uma oscilação periódica da intensidade do laser correspondendo a uma estrutura de estabilidade de período 10. Diferentemente do que ocorre em sistemas dinâmicos de tempo discreto, onde o período da órbita é obtido diretamente da quantidade dos pontos que definem a órbita, em sistemas de tempo contínuo o sinal periódico varia continuamente no tempo. O sinal periódico tem um valor para o período de oscilação, que é o tempo necessário para se retornar a um mesmo ponto no espaço de fases, e tem também um determinado número de máximos locais contidos em

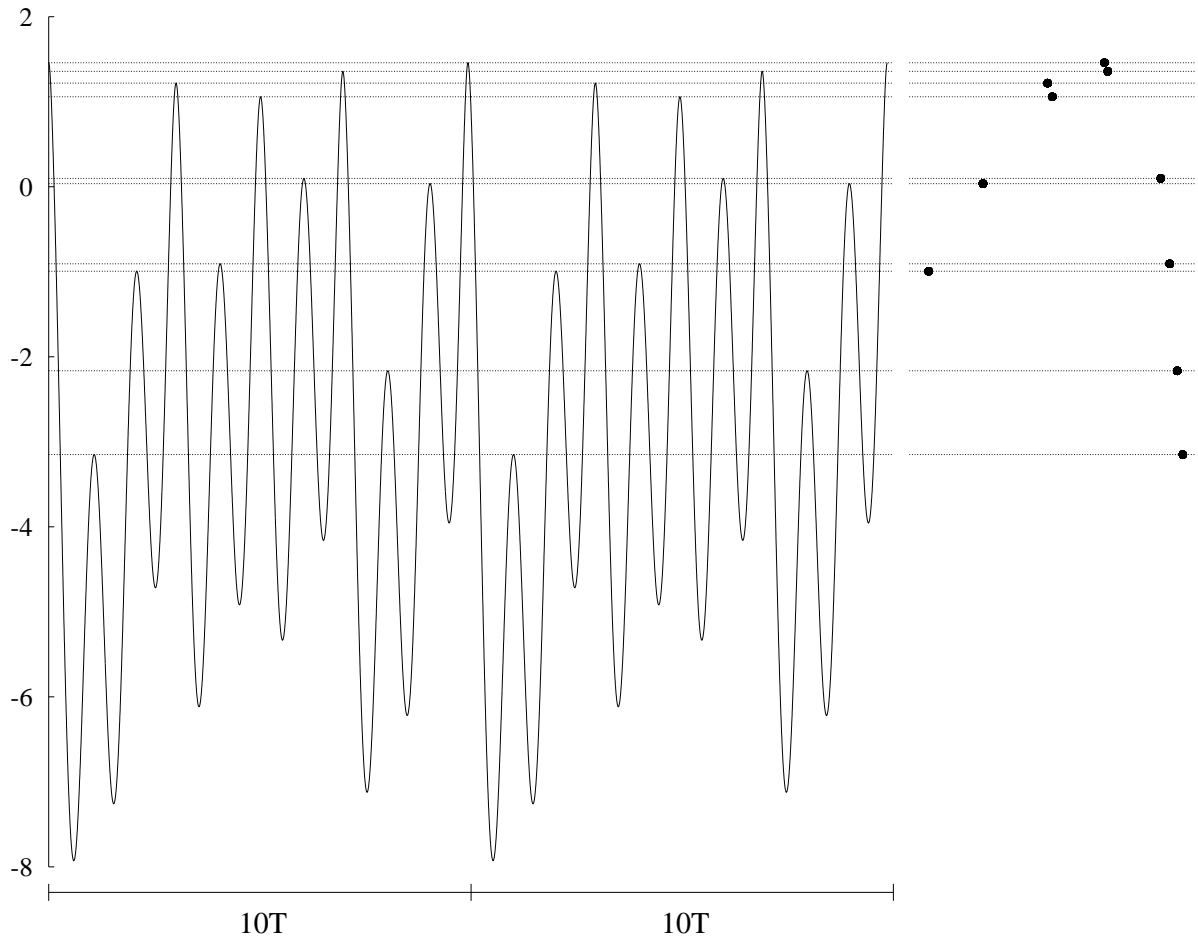


Figura 2.9: Oscilações periódicas do laser referente a uma estrutura de estabilidade de período 10, localizada em $(a, f) = (0.06139, 85.1\text{kHz})$. Na direita é mostrado o mapa de retorno dos máximos locais da série temporal.

um período completo de oscilação. Assim, temos duas grandezas que podem caracterizar a oscilação periódica. Uma é tempo gasto para executar uma oscilação periódica completa, que é um valor que varia continuamente, enquanto a outra é o número de máximos locais contidos em um período completo de oscilação de uma determinada variável, que varia de forma discreta. Como o sistema que estamos investigando é um sistema periodicamente forçado, o período das soluções periódicas são sempre múltiplos do período de forçamento. No caso exemplificado pela figura 2.9, o sinal periódico foi obtido para o conjunto de parâmetros $(a, f) = (0.06139, 85.1\text{kHz})$. Nesse caso o período da oscilação é $T = 1/f \approx 11.75\mu\text{s}$ e o número de máximos locais é 10. Ao lado da série temporal é ilustrado o mapa

de retorno obtido a partir dos máximos locais da oscilação periódica. Podemos observar que esses máximos podem ter diferenças muito pequenas entre si, o que poderia dificultar a determinação numérica. De fato, as dificuldades numéricas aumentam para períodos mais altos, ou seja, com uma grande quantidade de máximos locais. Nesse caso tempos transientes muito longos deveriam ser utilizados nas integrações numéricas para garantir uma determinação confiável do número de máximos locais contidos em um período de oscilação.

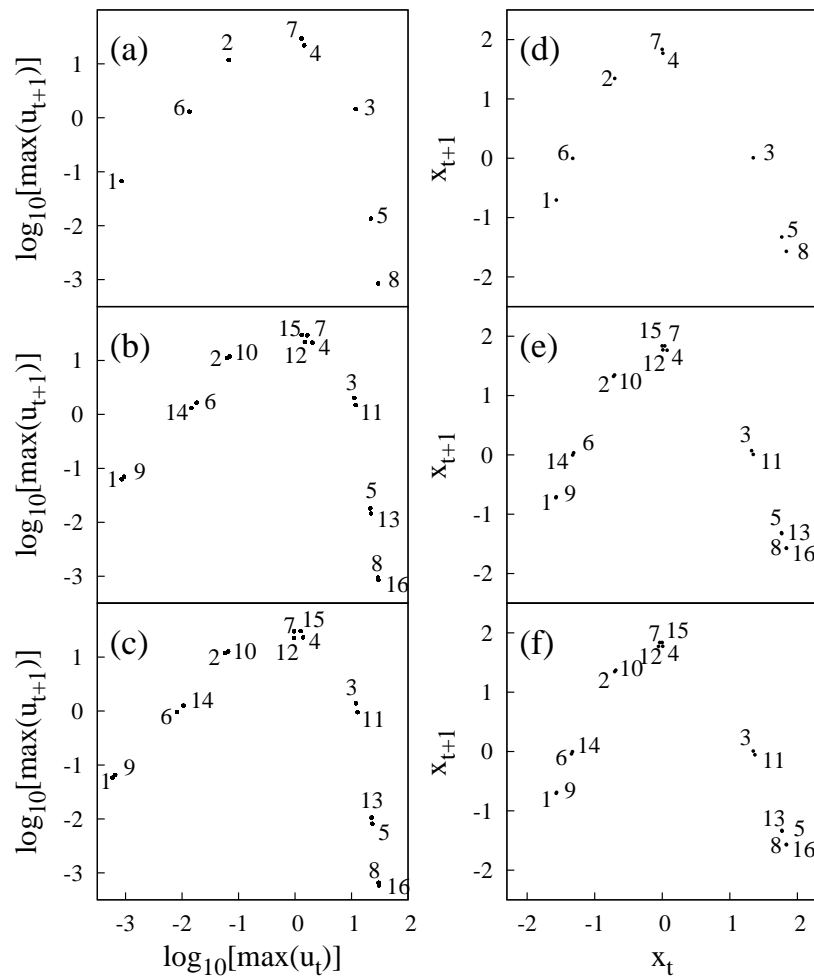


Figura 2.10: Comparação entre os mapas de retorno do laser (esquerda) e do mapa de Hénon (direita). Os parâmetros são: Laser: (a) $(a, f) = (0.06984, 89.8)$, período 8, (b) $(0.07138, 90.47)$, período 16, (c) $(0.06902, 87.43)$, período 16. As frequências estão em kHz. Hénon: (d) $(a, b) = (1.80287, -0.02514)$, período 8, (e) $(1.80395, -0.0257)$, período 16, (f) $(1.80642, -0.02356)$, período 16.

Além da grande concordância entre os espaços de parâmetros do laser de CO₂ e do mapa de Hénon, evidenciados na figura 2.6, encontramos também uma grande similaridade quando olhamos para o espaço de fase dos dois sistemas, conforme ilustra a figura 2.10. A figura 2.10 compara os mapas de retorno da intensidade do laser (esquerda) com as órbitas do mapa de Hénon (direita). Os mapas de retorno do laser foram construídos através da seqüência $u_l(t)$, $l = 1, 2, 3, \dots$ dos máximos locais de $u(t)$. Tanto o mapa de retorno do laser, mostrado na figura 2.10(a), quanto o mapa de retorno do mapa de Hénon, mostrado na figura 2.10(d), foram obtidos para a estrutura auto-similar de período 8. Aqui observamos que os mapas de retorno concordam muito bem, ou seja, a seqüência dos pontos da órbita de período 8 do mapa de Hénon é qualitativamente a mesma seqüência de picos que aparecem na série temporal da intensidade do laser. As figuras 2.10(b) e 2.10(c) mostram os mapas de retorno para os dois primeiros dobramentos de período da estrutura de período 8 para laser, enquanto as figuras 2.10(e) e 2.10(f) mostram o mesmo para o mapa de Hénon. Os dois dobramentos referentes às duas direções diferentes no espaço de parâmetros têm seqüências distintas de pontos no mapa de retorno. E aqui, novamente encontramos uma excelente concordância qualitativa entre o modelo do laser e o mapa de Hénon, visto que a ordem em que aparecem as seqüências de pontos da órbita do mapa de Hénon é a mesma ordem em que aparecem a seqüência de picos nas oscilações do laser, respectivamente para ambos os dobramentos. Assim, a simples iteração do mapa de Hénon, um sistema de tempo discreto, pode prever a ordem em que aparecem os picos da intensidade do modelo do laser de CO₂, um sistema de tempo contínuo.

Capítulo 3

Laser de semicondutor com injeção óptica

Este capítulo é baseado na publicação [77]. Aqui investigamos teoricamente o modelo de um laser de semicondutor de um só modo sujeito a uma injeção óptica monocromática externa, descrito pelas equações de taxa. Realizamos uma investigação do espaço de parâmetros desse modelo focando principalmente em uma região onde o laser exibe conduta caótica. Identificamos estruturas complexas de regiões de estabilidade que existem encaixadas em uma região caótica desse modelo. Reportamos, pela primeira vez para um sistema de equações diferenciais, a existência de acumulações de estruturas periódicas auto-similares seguindo uma rota de adição de período, com alternância de regimes caóticos e periódicos, num espaço de dois parâmetros. As estruturas auto-similares formam uma rede de regiões periódicas interconectadas e acumulam para determinadas fronteiras do espaço de parâmetros que denominamos horizonte de acumulações. Variando um terceiro parâmetro, o reforço da largura de linha (parâmetro α), identificamos uma outra seqüência de acumulações que existe em uma estrutura muito fina do espaço de parâmetros do laser de semicondutor.

3.1 Introdução

Lasers de semicondutores são sistemas físicos bastante interessantes. Além do interesse intrínscio da física envolvida na fabricação, modelagem e caracterização desses dispositivos, e do grande potencial para aplicações em física e engenharia, os lasers de semicondutores têm também despertado um grande interesse do ponto de vista de sistemas dinâmicos não-lineares.

Do ponto de vista dinâmico, os lasers de semicondutores são sistemas intrinsecamente estáveis. Entretanto, tais sistemas são facilmente desestabilizados quando submetidos a algum tipo de perturbação externa. Desde o início dos anos 80, quando Lang e Kobayashi [78] investigaram instabilidades geradas por reflexões do campo óptico, que produziam uma realimentação no sistema, lasers de semicondutores sujeitos à perturbações externas vêm sendo intensamente investigados. Vários tipos de perturbações aplicadas a esses lasers foram consideradas por diversos pesquisadores como, por exemplo, realimentação óptica com atraso, injeção óptica proveniente de uma ou mais fontes de luz, modulações de corrente ou realimentação optoeletrônica.

É bem conhecido que tais tipos de perturbações podem produzir uma grande variedade de condutas dinâmicas e fenômenos não-lineares. Recentemente Kane e Shore [79] e Ohtsubo [80] resumiram alguns desenvolvimentos que têm sido obtidos na investigação das propriedades dinâmicas de lasers de semicondutores sujeitos a alguns tipos de perturbações, do ponto de vista da dinâmica não-linear, e enfatizaram seu potencial para aplicações, principalmente na utilização de sinais caóticos para transmitir e codificar informações.

Um dos mecanismos largamente utilizados para induzir uma dinâmica complexa em lasers de semicondutores é a injeção óptica proveniente de uma fonte de luz externa. Desse modo, a dinâmica de um dos lasers é fortemente afetada pela luz injetada de uma fonte externa, freqüentemente um outro laser. Em geral três parâmetros podem ser diretamente controlados em um experimento real, atuando como parâmetros de controle. Esses parâmetros são a intensidade do campo injetado, a diferença de freqüência entre os dois lasers e a corrente de bombeamento que controla o ganho do laser. A grande maioria das

investigações são realizadas em função da intensidade do campo injetado e da diferença de frequência entre os lasers, mantendo-se a corrente de bombeamento fixa.

Matematicamente esse sistema pode ser modelado pelas equações de taxa para o laser de semicondutor modificadas de modo a incluir um termo referente ao campo injetado. Assim é possível descrever as principais características do comportamento dinâmico da intensidade do laser opticamente injetado através de um modelo de dimensionalidade muito baixa. Tal modelo teórico constitui um exemplo de um oscilador não-linear forçado e tem sido muito utilizado para estudar comportamentos não-lineares.

O laser de semicondutor com injeção óptica apresenta muitos comportamentos dinâmicos e uma fenomenologia não-linear muito rica em função dos parâmetros de injeção. Essa diversidade de fenômenos dinâmicos e a possibilidade de combinar estudos teóricos de caráter determinístico com resultados experimentais, e também devido ao potencial para aplicações, levaram esse sistema a uma extensiva investigação. Uma grande quantidade de trabalhos foi devotada para caracterizar e investigar esse sistema em função dos parâmetros de injeção, tanto do ponto de vista teórico e numérico, quanto do ponto de vista experimental.

Os trabalhos iniciais, no começo dos anos 80, focaram principalmente em fenômenos relacionados ao travamento de frequência [81, 82], isto é, na situação que o laser oscila na mesma frequência do sinal injetado ¹. No início dos anos 90, rotas de dobramento de período conduzindo à oscilações caóticas foram previstas teoricamente e detectadas experimentalmente em lasers de semicondutores [84, 85, 86, 87]. Uma série de trabalhos foi devotada para investigar dinâmica caótica, multiestabilidade, e outros fenômenos não-lineares. Esses estudos iniciais focaram em pequenas regiões do espaço de parâmetros, mostrando partes isoladas ou rotas particulares para o caos, usualmente considerando a variação de um parâmetro de controle.

Uma análise bastante extensa realizada no espaço dos dois parâmetros de injeção, utilizando métodos de continuação numérica, é sumarizada por Wieczorek *et al.* [88]. Tal trabalho busca dar uma visão unificada da complexidade dinâmica que existe no modelo

¹Outros trabalhos teóricos e experimentais, a respeito de instabilidade em lasers com sinal injetado, foram realizados para lasers a gás na década de 80. Veja, por exemplo, os trabalhos [68, 83].

descrito pelas equações de taxa do laser de semicondutor do ponto de vista da teoria de bifurcações².

Mais recentemente, alguns trabalhos investigaram teoricamente o laser de semicondutor através de simulação numérica direta das equações de taxa sobre regiões extensas do espaço de parâmetros de injeção. O trabalho de Hwang e Liu [91] apresentou mapeamentos caracterizando diferentes regimes dinâmicos e analisou o comportamento desses diagramas em função dos parâmetros intrínsecos do laser, ou seja, parâmetros que estão relacionados com as propriedades do material. Os trabalhos de Chlouverakis e Adams [38] e Fordell e Lindberg [39] apresentaram diagramas baseados na computação do maior expoente de Lyapunov, sendo que a referência [39] analisou a conduta dos diagramas para alguns valores diferentes da corrente de bombeamento. Nesses trabalhos já é possível identificar algumas regiões de estabilidade no interior das regiões caóticas, ou seja, a situação que vamos focar neste capítulo.

É importante mencionar que, apesar da simplicidade que existe em uma descrição baseada nas equações de taxa, uma concordância muito boa tem sido obtida em experimentos com lasers opticamente injetados. Um mapeamento experimental caracterizando a dinâmica do laser em função dos dois parâmetros de injeção foi obtido uma década atrás [92]. Outras investigações experimentais verificaram a existência de oscilações periódicas dentro da região caótica [93, 94] e reportaram um outro mapeamento no espaço dos parâmetros de injeção [94]. Todos esses resultados apresentam uma concordância qualitativa com o modelo teórico. Recentemente foi reportada uma concordância em nível quantitativo, onde diversas curvas de bifurcações de período mais baixos foram identificadas experimentalmente [95].

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção introduzimos o conjunto de equações diferenciais que modela o laser de semicondutor com injeção óptica que investigamos. Na seção 3.3 examinamos a estrutura de uma região caótica do laser de semicondutor e identificamos alguns tipos de estruturas de estabilidade que existem nessa região. Na seção 3.4 investigamos uma seqüência de regiões de estabilidade que acumulam

²Estudos no espaço de dois parâmetros em lasers com sinal injetado, do ponto de vista da teoria de bifurcações, também foram realizados nas referências [89, 90].

em determinadas fronteiras do espaço de parâmetros. Na seção 3.5 investigamos outros tipos de acumulações de regiões periódicas existentes no espaço de parâmetros do laser de semicondutor.

3.2 As equações de taxa

Para uma dedução das equações de taxa que descrevem o laser de semicondutor a partir da interação do campo eletromagnético com a matéria referimos o trabalho [65]. O laser de semicondutor é um laser da classe B e, assim, a polarização pode ser eliminada adiabaticamente de modo que sua dinâmica pode ser suficientemente bem descrita por duas equações diferenciais acopladas, uma para o campo elétrico e outra para a densidade de portadores (pares elétron-lacuna).

3.2.1 Laser operando livremente

As equações de taxa para o campo elétrico \hat{E} e a densidade de portadores N que descrevem um laser de semicondutor podem ser escritas como [65]:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{1}{2}[G(N) - \Gamma_E]\hat{E}, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dN}{dt} = J - \Gamma_N N - \text{Re}[G(N)]|\hat{E}|^2. \quad (3.1b)$$

Nas equações acima, J é a taxa de bombeamento, Γ_N é a taxa de perda da densidade de portadores devido a recombinação espontânea de elétrons e lacunas e Γ_E é a taxa de perdas dos fótons da cavidade. A quantidade $G(N)$ é uma função complexa e está relacionada ao ganho do material. Aqui utilizamos a forma de uma linearização dessa quantidade em relação ao ponto de operação do primeiro limiar do laser [65]

$$G(N) = \Gamma_E + (1 + i\alpha)\xi(N - N_{th}). \quad (3.2)$$

Na equação 3.2, α é o reforço da largura de linha e ξ é o coeficiente do ganho diferencial.

A densidade de portadores no limiar de operação do laser é dada por N_{th} . Assim, temos que o ganho no limiar é dado por $G(N_{th}) = \Gamma_E$.

O parâmetro α foi introduzido por Henry [96] e toma um papel muito importante na dinâmica de lasers de semicondutores. Do ponto de vista físico, esse parâmetro reflete principalmente as propriedades do material de um laser de semicondutor e quantifica quanto o índice de refração do meio laser muda com a população de inversão em uma certa frequência. Para lasers de estado sólido e lasers a gás esse parâmetro é praticamente nulo, podendo assumir valores entre 0 e 1, enquanto para a grande maioria dos lasers de semicondutores ele varia na faixa entre 1 e 10.

Substituindo a equação 3.2 no sistema de equações 3.1 e escrevendo o campo elétrico complexo como $\hat{E} = \bar{E}(t)e^{-i\phi(t)}$ obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{2}\xi(N - N_{th})\bar{E}, \quad (3.3a)$$

$$\frac{dN}{dt} = J - \Gamma_N N - [\Gamma_E + \xi(N - N_{th})]|\bar{E}|^2, \quad (3.3b)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha\xi(N - N_{th}). \quad (3.3c)$$

No sistema de equações 3.3 podemos observar que a fase $\phi(t)$ não aparece nas equações das variações temporais do campo elétrico (equação 3.3a) e da densidade de portadores (equação 3.3b). Como a fase apenas segue a densidade de portadores N dizemos que ela é uma variável escravizada, na terminologia da dinâmica não-linear. Esse desacoplamento da fase com as demais equações implica que a dinâmica do laser de semicondutor monomodo é governada essencialmente por duas equações diferenciais ordinárias acopladas. De fato, o laser de semicondutor operando livremente tem uma conduta dinâmica similar aos demais lasers da classe B, como o caso do laser de CO_2 que estudamos no capítulo 2.

De maneira análoga ao procedimento realizado no capítulo 2, vamos encontrar as soluções estacionárias para o campo elétrico E e densidade de portadores N . Isso é feito igualando-se os termos diferenciais a zero nas equações 3.3a e 3.3b, de onde obtemos as

seguintes soluções estacionárias para E e N :

$$\text{i) } E_s = 0, \quad N_s = \frac{J}{\Gamma_E}, \quad (3.4a)$$

$$\text{ii) } E_s = \sqrt{\frac{(J - \Gamma_N N_{th})}{\Gamma_E}}, \quad N_s = N_{th}. \quad (3.4b)$$

A solução 3.4a representa a solução trivial de operação do laser, isto é, sem fótons na cavidade e com bombeamento. A solução 3.4b representa a solução de operação não-trivial do laser. Essa solução só tem significado físico para $J > N_{th}\Gamma_N$. O valor $J_{th} = N_{th}\Gamma_N$ é o limiar do ganho que deve ser fornecido para haver ação laser.

Aplicando o procedimento usual de análise de estabilidade linear das soluções estacionárias para as soluções de operação não-trivial do laser, obtemos a seguinte equação característica:

$$\lambda^2 + \left(\frac{\xi(J - \Gamma_N N_{th})}{\Gamma_E} + \Gamma_N \right) \lambda + \xi(J - \Gamma_N N_{th}) = 0. \quad (3.5)$$

Os valores de λ que satisfazem a equação característica são:

$$\lambda_{1,2} = -\Gamma_R \pm \sqrt{\Gamma_R^2 - \omega_R^2} \quad (3.6)$$

onde

$$\Gamma_R = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi(J - \Gamma_N N_{th})}{\Gamma_E} + \Gamma_N \right) \quad (3.7)$$

e

$$\omega_R = \sqrt{\xi(J - \Gamma_N N_{th})}. \quad (3.8)$$

Para valores de parâmetros refletindo condições realísticas de operação do laser de semiconductor temos que $\omega_R^2 > \Gamma_R^2$, de modo que os autovalores na expressão 3.6 serão sempre complexos conjugados da forma $\lambda_{1,2} = -\Gamma_R \pm i\Omega_R$. Como a parte real do autovalor é negativa, as perturbações do estado estacionário decaem exponencialmente e as soluções estacionárias são estáveis. E também, como a parte imaginária é diferente de zero, esse decaimento será oscilatório. Essas oscilações são conhecidas como oscilações de relaxação do laser e são caracterizadas pela taxa de amortecimento Γ_R e a frequência angular $\Omega_R =$

$\sqrt{\omega_R^2 - \Gamma_R^2}$. Fisicamente, a oscilação de relaxação descreve o processo em que a energia contida dentro da cavidade do laser é trocada periodicamente com o número de fótons e o número de portadores (pares elétron-lacuna). Na prática, em condições realísticas de trabalho, $\omega_R \simeq \Omega_R$, mas essas quantidades serão diferentes para operações muito próximas ou distantes do limiar. É comum escrevermos ω_R em termos do valor estacionário da intensidade da forma

$$\omega_R = \sqrt{\xi \Gamma_E |E_0|^2}, \quad (3.9)$$

onde

$$|E_0|^2 = \frac{J - \Gamma_N N_{th}}{\Gamma_E}. \quad (3.10)$$

3.2.2 Injeção óptica externa

Na subseção anterior vimos que os lasers de semicondutores possuem uma dinâmica típica de lasers da classe B, apresentando um decaimento oscilatório para as soluções estacionárias do campo elétrico e densidade de portadores. Essas oscilações de relaxação podem ser excitadas por algum tipo de perturbação externa possibilitando uma grande variedade de condutas dinâmicas. Aqui consideramos o caso de uma injeção óptica monocromática externa proveniente de um outro laser. Essa configuração é geralmente chamada de configuração mestre-escravo, visto que a dinâmica de um dos lasers (escravo) é controlada pelos níveis de injeção de um outro laser (mestre).

A descrição do laser de semiconductor sujeito a uma injeção óptica é obtida adicionando-se um termo denotando o campo injetado na equação original do campo elétrico do laser operando livremente. Assim, reescrevemos o sistema 3.1 incluindo a injeção óptica na equação 3.1a da seguinte forma:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{1}{2}[(1 + i\alpha)\xi(N - N_{th})\hat{E} + \kappa E_{inj} e^{i\hat{\omega}t}], \quad (3.11)$$

$$\frac{dN}{dt} = J - \Gamma_N N - \text{Re}[G(N)]|\hat{E}|^2. \quad (3.12)$$

No sistema de equações acima, $\hat{\omega} = \omega_{inj} - \omega_0$ é a frequência de dessintonia (*frequency detuning*), isto é, a diferença entre as frequências dos dois lasers operando livremente

(sem acoplamento). Aqui ω_0 é a frequência do laser escravo e ω_{inj} a frequência do laser mestre. O coeficiente $\kappa = \sqrt{T}/\tau$ é a taxa do campo injetado, onde \sqrt{T} é o coeficiente de transmissão através de uma das faces do laser e τ é o tempo de percurso (*round-trip time*) do campo dentro da cavidade do laser. Maiores detalhes da inclusão do termo referente ao campo injetado interagindo com o campo elétrico presente na cavidade do laser podem ser encontrados em [97, p. 249]. De fato, a equação resultante aparece como uma modificação do modelo proposto por Lang e Kobayashi [78] no estudo de um laser de semiconductor com realimentação com atraso. Nesse caso, o termo extra do campo $E(t - \tau)$ devido à realimentação, no modelo original [78], é substituído pelo termo do campo injetado E_{inj} .

A seguir reescalamos algumas variáveis visando deixar o sistema de equações em uma forma adimensional, com magnitudes da ordem de $O(1)$ [98]. As novas variáveis são dadas por:

$$\tilde{E} = \frac{\hat{E}}{E_0}, \quad n = \frac{\xi(N - N_{th})}{\omega_R}, \quad \omega = \frac{\hat{\omega}}{\omega_R}, \quad t = \hat{t}\omega_R. \quad (3.13)$$

Em termos das variáveis reescaladas, as equações para o campo elétrico complexo e a densidade de portadores são escritas como:

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \frac{1}{2}(1 + i\alpha)n\tilde{E} + Ke^{i\omega t}, \quad (3.14a)$$

$$\frac{dn}{dt} = -2\Gamma n - (1 + 2Bn)(|\tilde{E}|^2 - 1), \quad (3.14b)$$

onde os novos parâmetros B , Γ e K introduzidos são dados por:

$$B = \frac{\omega_R}{2\Gamma_E}, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_N}{2\omega_R} + B, \quad K = \frac{\kappa E_{inj}}{\omega_R E_0}. \quad (3.15)$$

Do ponto de vista matemático, o sistema de equações 3.14 é um campo vetorial tridimensional não-autônomo por causa da sua dependência explícita do tempo, no lado direito da equação 3.14a. Introduzindo a diferença de fase $\eta(t) = \omega t - \phi(t)$, para eliminarmos a dependência temporal explícita, e escrevendo o campo elétrico complexo em coordenadas polares $E(t) = \tilde{E}(t)e^{-i\omega t} = r(t)e^{-i\eta(t)}$, as equações 3.14 podem ser reescritas

como:

$$\dot{r} = \frac{1}{2}nr + K \cos \eta, \quad (3.16a)$$

$$\dot{n} = -2\Gamma n - (1 + 2Bn)(r^2 - 1), \quad (3.16b)$$

$$\dot{\eta} = \omega - \frac{1}{2}\alpha n - K \frac{\text{sen}\eta}{r}, \quad (3.16c)$$

com a equação desacoplada para a fase do campo elétrico

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\alpha n + K \frac{\text{sen}\eta}{r}. \quad (3.17)$$

Como a fase ϕ não aparece em nenhuma das equações do sistema 3.16 precisamos apenas estudar a dinâmica no espaço de fases tri-dimensional (r, n, η) . O espaço de fases do sistema 3.16 é $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times (-\pi, \pi]$. Essa forma das equações em coordenadas polares para o laser opticamente injetado é bastante usual na literatura.

Alternativamente podemos escrever o sistema de equações 3.14 em termos do campo elétrico complexo $E = E_x + iE_y$ como

$$\dot{E}_x = \frac{1}{2}E_x n + \left(\omega - \frac{1}{2}\alpha n\right)E_y + K, \quad (3.18a)$$

$$\dot{E}_y = -\left(\omega - \frac{1}{2}\alpha n\right)E_x + \frac{1}{2}E_y n, \quad (3.18b)$$

$$\dot{n} = -2\Gamma n - (1 + 2Bn)(E_x^2 + E_y^2 - 1), \quad (3.18c)$$

ou, equivalentemente, da forma mais compacta

$$\dot{E} = K + \left(\frac{1}{2}(1 + i\alpha)n - i\omega\right)E, \quad (3.19a)$$

$$\dot{n} = -2\Gamma n - (1 + 2Bn)(|E|^2 - 1). \quad (3.19b)$$

O espaço de fases do sistema de equações 3.19 é \mathbf{R}^3 . Essa forma das equações do laser de semiconductor foi introduzida na referência [98]. Do ponto de vista de simulações numéricas é melhor trabalhar com as equações 3.19 do que com as equações 3.16. As equações 3.19 são a base de estudos em nossas análises neste capítulo. Nessas equações

reescaladas, E_x e E_y são a parte real e a parte imaginária do campo elétrico, respectivamente, e n é a densidade de portadores. O parâmetro α é o reforço da largura de linha. Os dois parâmetros de controle são a intensidade do campo injetado K e a frequência de dessintonia ω . Note que a corrente de bombeamento J , um parâmetro importante do ponto de vista experimental, visto que também pode ser ajustado, está incorporada ao parâmetro K através de E_0 e também aos parâmetros B e Γ através de ω_R , conforme equações 3.9, 3.10 e 3.15. Assim, aumentar K é equivalente a aumentar a intensidade da luz injetada ou diminuir a corrente de bombeamento. Entretanto não podemos diminuir J até o valor de limiar J_{th} porque o campo E_0 vai a zero e o parâmetro K não estaria bem definido. Nesse caso, quando $J < J_{th}$, ou quando J é variado, seria melhor usar as equações em sua forma não-escalada 3.11. Nas próximas seções investigamos o espaço de parâmetros das equações 3.19 com relação aos parâmetros de injeção.

3.3 Diagramas de fase para a região caótica

Nesta seção computamos diagramas de fase para o laser injetado e focamos em uma região caótica presente nesse sistema. Os diagramas de fase são computados pela integração direta do sistema de equações 3.19 e estimativa numérica dos expoentes de Lyapunov. Aqui utilizamos os valores de parâmetros $B = 0.0295$, $\Gamma = 0.0973$ e $\alpha = 2.6$, os quais modelam um laser real [95]. As equações 3.19 foram integradas utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo $h = 0.01$.

A figura 3.1(a) mostra o espaço de parâmetros (K, ω) que foi investigado na referência [95], comparando resultados teóricos e experimentais. As curvas mostradas nessa figura foram obtidas teoricamente das equações 3.19 por um método de continuação numérica, enquanto os pontos foram obtidos experimentalmente. Cada curva nessa figura corresponde a um tipo de bifurcação, ou seja, um tipo de mudança qualitativa no comportamento das soluções das equações. As cores estão associadas a tipos de bifurcações diferentes, onde são mostradas bifurcações de sela-nó (SN), Hopf (H), dobramento de período (PD), toro (T) e sela-nó de órbitas periódicas (SL).

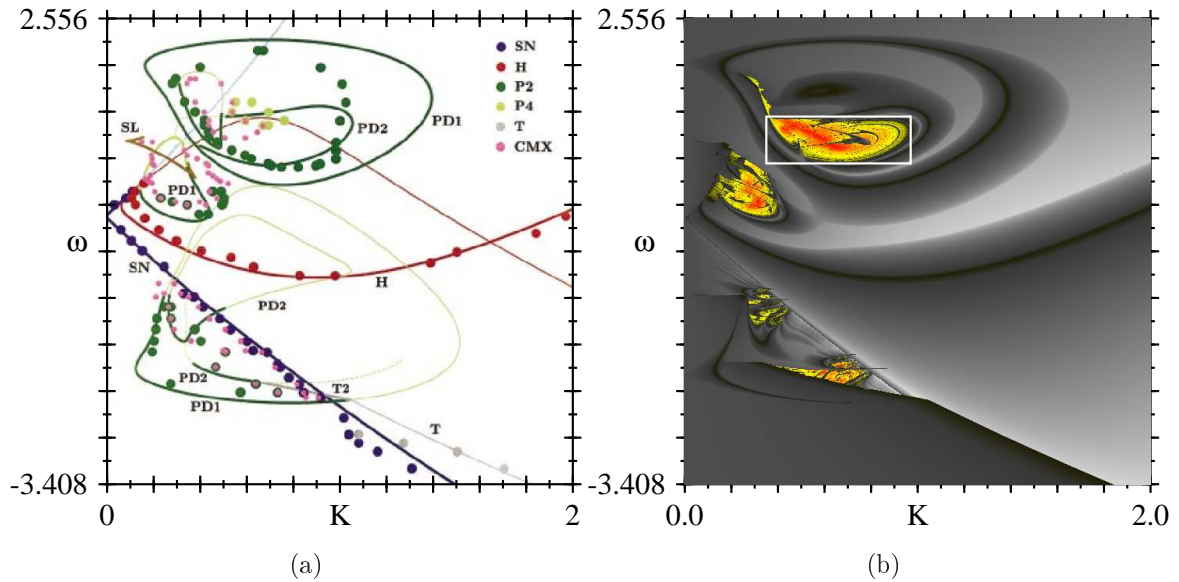


Figura 3.1: (a) Diagrama de bifurcação obtido por continuação numérica sobreposto com um mapeamento da estabilidade do laser medido experimentalmente em função da intensidade de injeção K e frequência *detuning* ω . Reproduzido de Wicczorek *et al.* [95]. (b) Diagrama de fase computado para a região mostrada em (a) utilizando nossa metodologia.

A figura 3.1(b) mostra o diagrama de fase que produzimos com a metodologia que desenvolvemos nesta tese, para o mesmo intervalo de parâmetros da figura 3.1(a). Aqui foi designado um gradiente entre branco-cinza-preto para os expoentes negativos, identificando as regiões de órbitas periódicas e um gradiente entre preto-amarelo-vermelho para os expoentes positivos, identificando regiões com órbitas caóticas. O branco denota expoentes mais negativos e o vermelho os expoentes mais positivos, sendo que o preto refere-se ao expoente zero e é colocado no centro da escala. Uma escala de cores com as magnitudes dos expoentes está incluída na figura 3.2.

Comparando as figuras 3.1(a) e 3.1(b) observamos que os resultados que obtivemos através do cálculo dos expoentes de Lyapunov concordam precisamente com os resultados obtidos pelo método de continuação numérica. Diversas curvas de bifurcações mostradas na figura 3.1(a) podem ser identificadas no nosso diagrama de fase da figura 3.1(b) em função da codificação de cores escolhida, em particular pela localização do expoente de valor zero (cor preta). Compare, por exemplo, as curvas de bifurcações de Hopf, sela-nó, dobramentos de período e toro da figura 3.1(a) com a figura 3.1(b). Entretanto, algumas

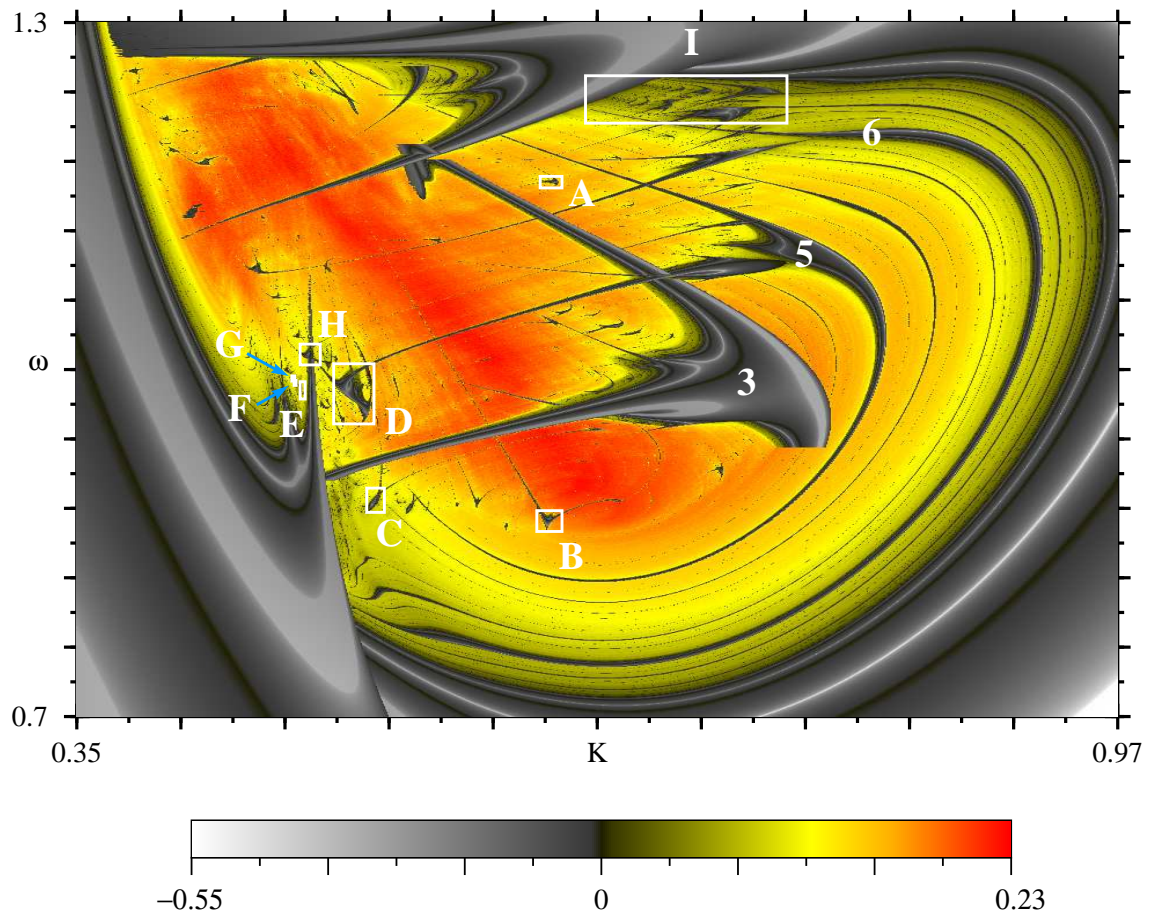


Figura 3.2: (c) Ampliação de uma região caótica do laser de semiconductor da região de frequência de dessintonia positiva, destacada na figura 3.1(b).

curvas mostradas na figura 3.1(a) não são mostradas no nosso diagrama da figura 3.1(b). Isso deve-se essencialmente a dois fatores: (i) curvas de bifurcações de objetos instáveis e (ii) regiões com multiestabilidade. Como o diagrama de fase da figura 3.1(b) é obtido pela integração direta do sistema de equações diferenciais, somente soluções estáveis são identificadas. Desse modo, as curvas de bifurcações referentes às soluções instáveis, mostradas em linhas mais finas na figura 3.1(a), não aparecem no diagrama da figura 3.1(b). O outro fator refere-se à multiestabilidade visto que, como nossos diagramas são baseados em colorização de áreas e identificamos apenas um atrator para cada ponto do espaço de parâmetros, somente uma das soluções possíveis é plotada, perdendo-se informações em regiões que eventualmente possam ter mais de um atrator. Isso não ocorre em relação à figura 3.1(a) que é obtida pela computação de curvas no espaço de parâmetros, sendo então

possível utilizar uma sobreposição dessas curvas e mostrar os contornos de diferentes tipos de soluções nas regiões multiestáveis. Entretanto, uma clara vantagem do nosso diagrama da figura 3.1(b) é poder observar-se as regiões caóticas, que não são identificadas pelos métodos numéricos da figura 3.1(a). Na figura 3.1(b) observamos quatro regiões caóticas, onde duas estão localizadas para frequência de dessintonia positiva e duas para frequência de dessintonia negativa.

A figura 3.2 apresenta uma ampliação da região caótica em destaque na figura 3.1(b). A região de caos é mostrada em amarelo-vermelho, onde o vermelho denota regiões de maior magnitude dos expoentes de Lyapunov. Em meio ao caos, em tons de cinza, é possível observar diversas regiões de estabilidade periódica. Os números que aparecem na figura 3.2 denotam a quantidade de picos (máximos locais) contidos em um período de oscilação da intensidade do laser. Por exemplo, a maior região periódica que aparece encaixada na região caótica é uma região de estabilidade de período 3. De uma maneira geral, no caso do laser de semiconductor, observamos uma complexidade muito maior em relação às regiões periódicas encaixadas na fase caótica do que no caso do laser de CO_2 com perdas moduladas, que analisamos no capítulo 2. Na região do espaço de parâmetros que investigamos para o laser de CO_2 , todas as regiões de estabilidade em meio ao caos tinham o mesmo tipo de estrutura auto-similar. Já no caso do laser de semiconductor, existem diversas regiões de estabilidade com muitas formas diferentes. Um exemplo disto é apresentado na próxima figura.

A figura 3.3 mostra formas típicas de regiões de estabilidade periódica que encontramos encaixadas nas fases caóticas do laser de semiconductor. A figura 3.3(a) é uma magnificação da caixa pequena denotada por A na figura 3.2 e mostra o mesmo tipo de estrutura auto-similar que encontramos no laser de CO_2 e discutimos no capítulo 2. As figuras 3.3(b) e 3.3(c) são magnificações das caixas pequenas denotadas por B e C na figura 3.2, respectivamente, e mostram outros tipos de estruturas auto-similares. Várias dessas estruturas existem na parte inferior da região caótica mostrada na figura 3.2 e apresentam a mesma forma das estruturas encontradas recentemente por Endler e Gallas [100] em um sistema dinâmico de tempo discreto sem pontos críticos.

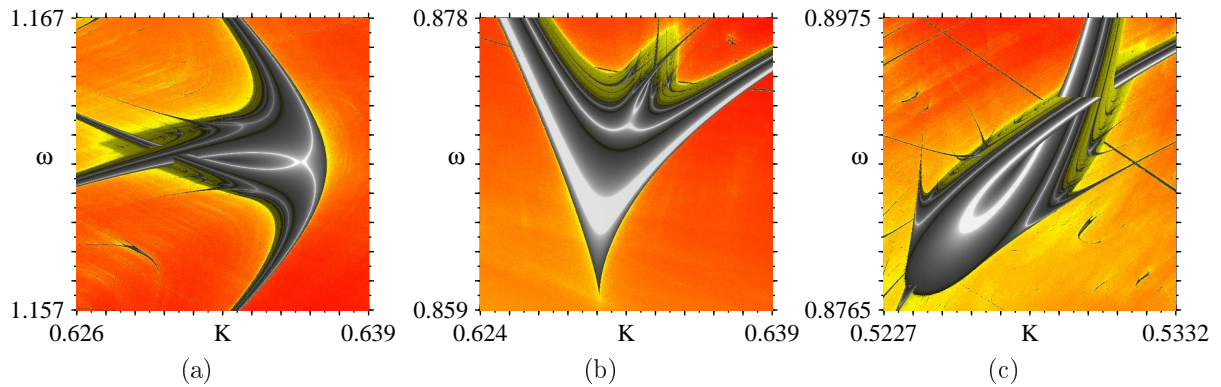


Figura 3.3: (a)-(c): Ampliações das caixas pequenas *A-C* destacadas na figura 3.2 mostrando formas típicas de estruturas de bifurcações auto-similares com oscilações periódicas estáveis encontradas nas fases caóticas do laser de semiconductor.

Além dessas formas bastante regulares, existem também regiões notavelmente complicadas encaixadas nas fases caóticas do laser de semiconductor. Tais regiões são formadas por uma estrutura complicada de domínios de estabilidade interconectados e caracterizam-se por formas irregulares no espaço de parâmetros. Em muitas situações ocorrem superposições de partes desses domínios de estabilidade, resultando em porções do espaço de parâmetros com ocorrência de multiestabilidade. A figura 3.4 ilustra regiões com formas bastante irregulares e complicadas no espaço de parâmetros. A figura 3.4(a) é uma ampliação da caixa maior denotada por *D*, na figura 3.2, enquanto as figuras 3.4(b), 3.4(c) e 3.4(d) são ampliações das caixas pequenas *E*, *F* e *G*, mostrando uma grande complexidade em uma estrutura muito fina do espaço de parâmetros.

A figura 3.5 ilustra uma situação típica que ocorre nas fases caóticas do laser de semiconductor. Tal situação é a sobreposição de determinadas partes de estruturas de estabilidade, ocorrendo multiestabilidade para determinadas áreas de parâmetros. As figuras 3.5(a) e 3.5(b) mostram uma mesma porção do espaço de parâmetros, porém enfatizando dois domínios de estabilidade diferentes que coexistem nessa região. As figuras 3.5(a) e 3.5(b) foram produzidas verrendo-se o espaço de parâmetros de uma maneira conveniente, em direções diferentes, e “seguindo-se o atrator”. Dessa maneira, em geral, é possível manter-se tanto quanto possível em um mesmo “plano” de soluções, de maneira a evidenciar as diferentes regiões quando a multiestabilidade está presente. De fato, a

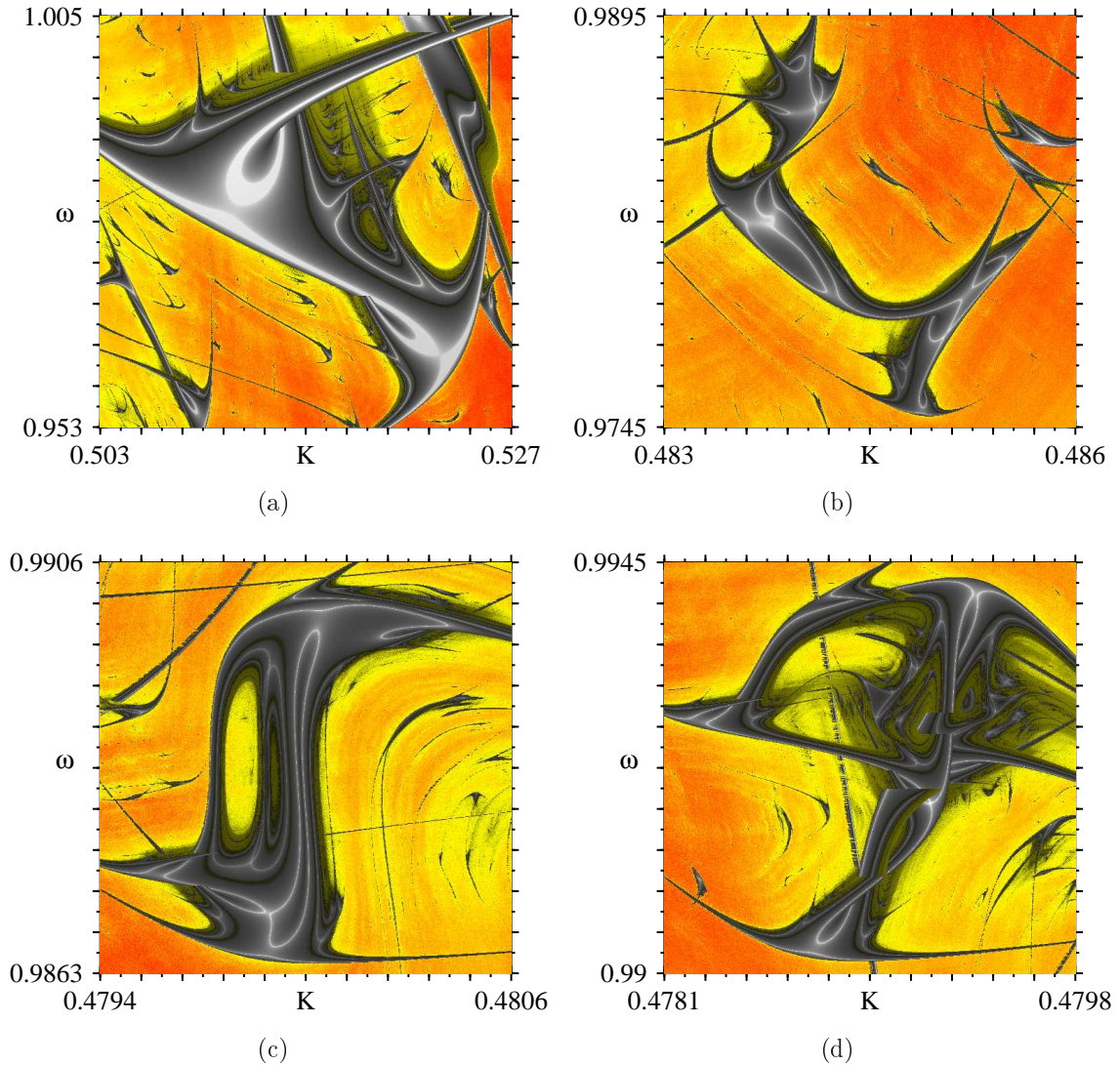


Figura 3.4: Formas complexas de domínios periódicos encaixados no interior da região caótica do laser de semiconductor. As figuras (a), (b), (c) e (d) são ampliações das caixas *D*, *E*, *F* e *G*, respectivamente, destacadas na figura 3.2.

simples análise dos diagramas sugerem onde outras regiões de multiestabilidade poderiam ser observadas. Note, por exemplo, que bem no canto inferior direito da figura 3.5(a) (ou da figura 3.5(b)), existe uma região fina periódica que também poderia ser plotada de maneira contínua, resultando em uma sobreposição às regiões que estão plotadas. Podemos considerar o prolongamento dessa estrutura e encontrar uma região onde pelo menos quatro “planos” de soluções coexistem. Isso porque, se observarmos com atenção a figura 3.5(a), existe uma cúspide na região de estabilidade em evidência, resultando em

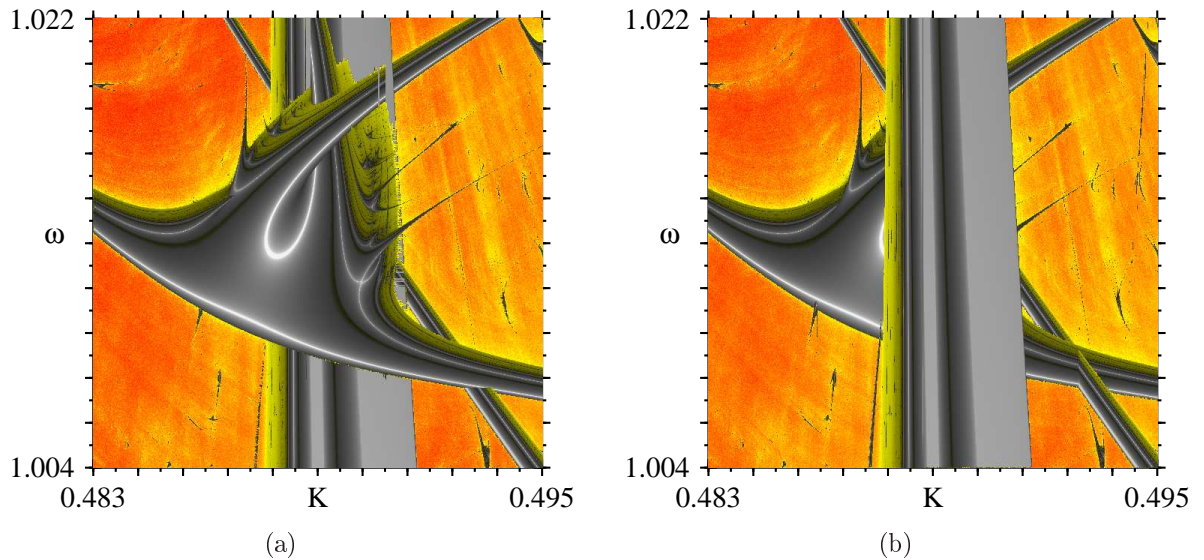


Figura 3.5: Magnificações das caixas pequenas denotadas por D e E na Fig. 3.2 ilustrando regiões de estabilidade que existem no interior das fases caóticas no espaço de parâmetros do laser de semiconductor com (a) formas complexas e (b) e (c) multiestabilidade. Note que (b) e (c) denotam a mesma região do espaço de parâmetros, porém enfatizando os diferentes domínios de estabilidade que coexistem nessa região.

um cruzamento de planos. Assim, é possível ter a indicação de uma pequena área do espaço de parâmetros onde quatro atratores diferentes deveriam existir. Uma situação similar, mostrando uma região do espaço de parâmetros onde quatro atratores coexistem, foi mostrada na referência [99].

De um modo geral, encontramos porções do espaço de parâmetros estruturadas de uma maneira bastante complicada, na região caótica investigada do laser de semiconductor. Por outro lado, também existem porções do espaço de parâmetros que estão estruturadas de uma maneira bastante regular no interior da região caótica. Esse é o caso da caixa denotada pela letra *I*, na figura 3.2, que será discutido separadamente na próxima seção.

3.4 Acumulações dentro da fase caótica

Nesta seção mostramos a existência de acumulações de estruturas auto-similares com adição de período dentro da fase caótica do laser de semiconductor e previamente não conhecidas. A fase caótica do laser é perfurada por seqüências infinitas de cascatas de

adição de período que convergem para curvas aparentemente simples, as quais denominamos *horizonte de acumulações*. Tais acumulações ocorrem recorrentemente no espaço de parâmetros em diversos níveis de escala.

A figura 3.6(a) mostra acumulações de estruturas auto-similares dentro da fase caótica no espaço de parâmetros do laser. Os números indicam a quantidade de picos existentes em um período de oscilação da intensidade. Podemos observar, por exemplo, diversas seqüências de estruturas auto-similares interconectadas formando uma rede e convergindo para uma linha no espaço de parâmetros, fronteira com uma região de período 4, denotada por A . As duas linhas pontilhadas passando pelos “corpos” de regiões de periodicidade ilustram seqüências individuais de cascatas de adição de período. Extensões dos “corpos” das estruturas auto-similares acumulam em direção à linha marcada por B , sendo que as linhas A e B unem-se no vértice denotado por V .

A figura 3.6(b) mostra em destaque uma região de período 10. Essa região também tem uma forma diferente das estruturas que mostramos no capítulo 2. Essa forma é aparentemente mais complexa, visto que contém no seu interior três “curvas” locais de expoentes mais negativos (as linhas brancas que quase se tocam, no interior da região de período 10). Entretanto, como ainda podemos observar nessa figura, ocorre uma “divisão aparente” dessa estrutura de período 10, dando origem a duas outras estruturas bem separadas com a forma típica de um camarão. Cada estrutura segue uma cascata individual de adição de período $10 \rightarrow 14 \rightarrow 18 \rightarrow \dots$ acumulando na linha A . A figura 3.6(c) mostra uma situação similar ao que ocorre na figura 3.6(b), mas agora para a região de período 16, que dividi-se dando origem a duas cascatas individuais de adição de período com a seqüência $16 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$ e acumulando também na linha A .

A figura 3.6(d) mostra uma região, próxima à zona de acumulação, ilustrando outras duas seqüências de estruturas periódicas. Essas duas seqüências estão localizadas em uma região entre as duas seqüências que mencionamos anteriormente. Aqui podemos observar uma compressão das estruturas auto-similares a medida que se aproximam da região para onde estão acumulando. Observamos ainda nessa figura, que considera uma região no espaço de parâmetros mais próxima à zona de acumulação, um nível maior de

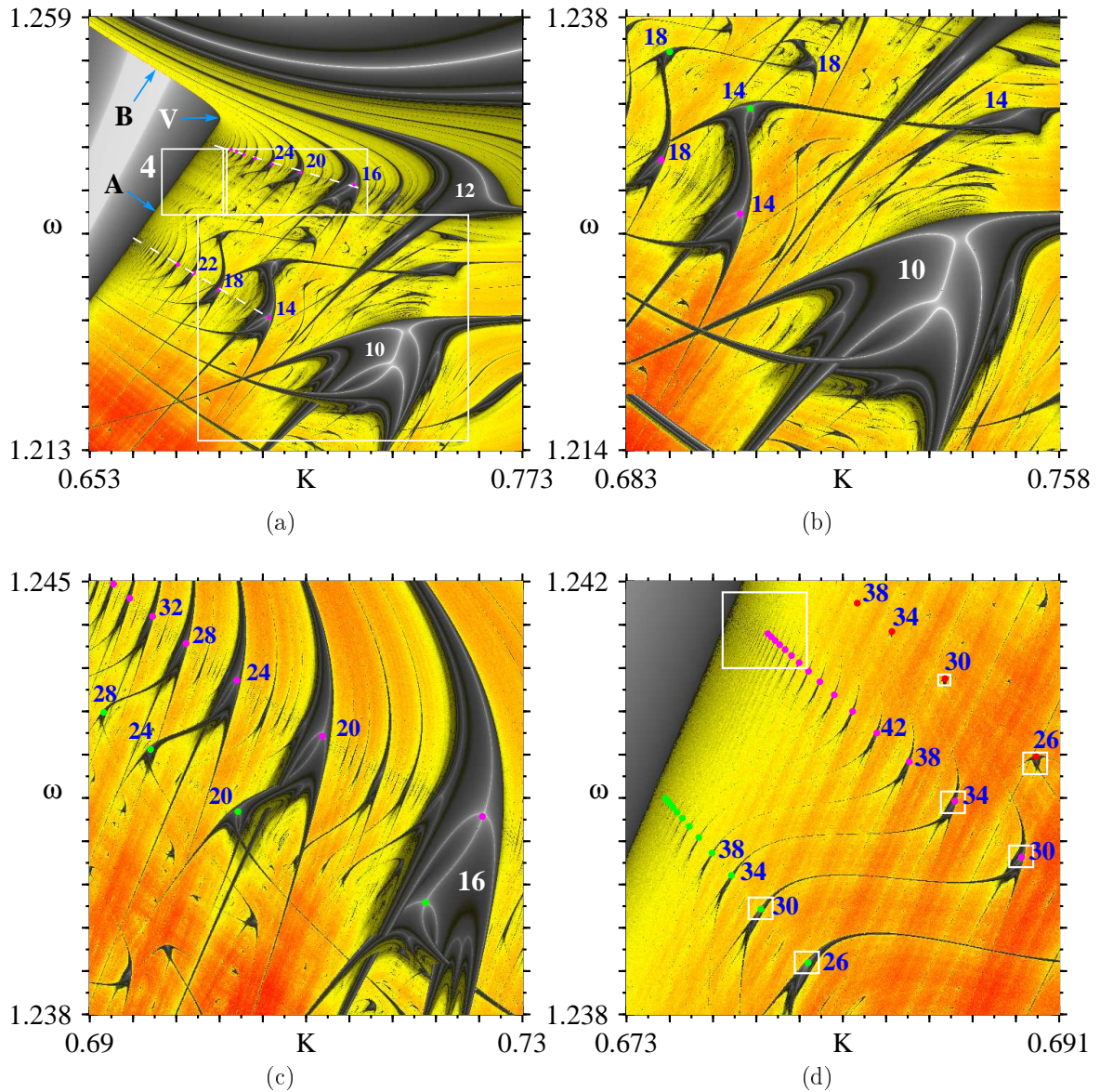


Figura 3.6: Acumulações de estruturas auto-similares contendo oscilações periódicas estáveis dentro da região caótica do laser de semiconductor. Os números referem-se ao número de picos da intensidade do laser em um período de oscilação. (a) Sequências de estruturas periódicas convergindo para a linha denotada por A formando um *horizonte de acumulação*. As extensões das estruturas periódicas convergem em direção a linha B . As curvas A e B unem-se no vértice V . (b) Magnificação da caixa maior de (a) destacando a separação da estrutura de período 10 em duas cascatas distintas. (c) Similar a (b) para a estrutura de período 16. (d) Magnificação da caixa menor de (a) mostrando outras seqüências de estruturas periódicas próximas à região de acumulação.

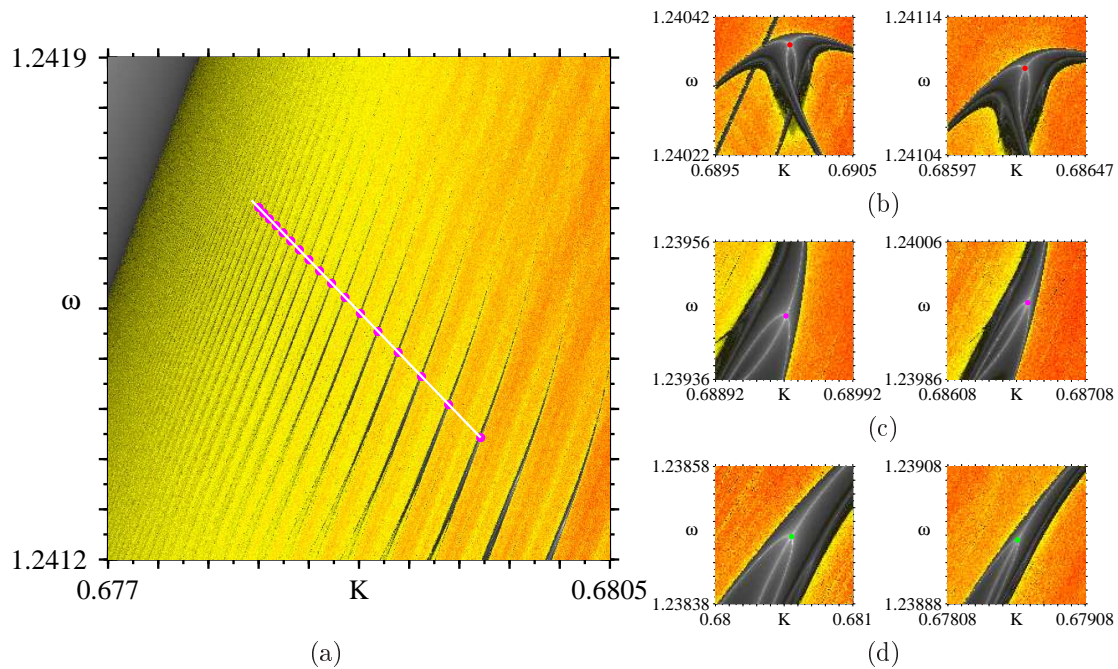


Figura 3.7: (a) Magnificação da caixa maior da figura 3.6(d) ilustrando uma região muito próxima à zona de acumulação. (b), (c) e (d) Magnificação das caixas menores da figura 3.6(d) ilustrando duas estruturas auto-similares de cada seqüência. Os pontos coloridos demarcam o cruzamento dos expoentes mais negativos e as cores referem-se à figura 3.7.

auto-similaridade entre as estruturas periódicas das seqüências que estão acumulando. Ou, em outras palavras, a auto-similaridade entre as diferentes estruturas periódicas vai diminuindo nas regiões mais distantes à zona de acumulação.

A figura 3.7 mostra uma magnificação muito próxima ao horizonte de acumulação. Aqui podemos observar que os pontos aproximam-se de uma reta com uma excelente aproximação. Todos os pontos contidos na reta denotam aproximadamente o cruzamento das curvas de expoentes mais negativos, conforme ilustram as ampliações 3.7(b), 3.7(c) e 3.7(d) de duas estruturas auto-similares para cada uma das três seqüências diferentes que aparecem denotadas pelos pontos coloridos. É interessante observar que o modelo de equações 3.19 depende de 5 parâmetros e então podemos imaginar uma estrutura muito complicada no espaço de 5 dimensões. Mas aqui, próximo a região de acumulação, o alinhamento das estruturas reduz-se a uma direção bem específica do espaço de parâmetros, formando uma linha reta.

A tabela 3.1 mostra o período da intensidade que computamos para 24 pontos no es-

paço de parâmetros para uma das seqüências que estão acumulando, iniciando no período $I = 30$. Os pontos ilustrados na tabela 3.1 referem-se à seqüência mostrada na figura 3.6(d), destacada em lilás, e cuja continuação é magnificada na figura 3.7(a). Realizamos sucessivas magnificações para as estruturas auto-similares dessa seqüência e determinamos os pontos (K, ω) que estão localizados aproximadamente na região do cruzamento dos locais de expoentes mais negativos, de maneira análoga à situação ilustrada nas figuras 3.7(b), 3.7(c) e 3.7(d). Na última coluna da tabela 3.1 mostramos o valor das sucessivas razões das distâncias entre dois pontos adjacentes pertencentes a seqüência que está acumulando. A distância entre os dois pontos é dada por $d_n = \sqrt{(K_{n+1} - K_n)^2 + (\omega_{n+1} - \omega_n)^2}$ e a razão entre as distâncias é dada por $\delta = d_n/d_{n+1}$. Na tabela 3.1 podemos observar que a razão entre as distâncias sucessivas vai diminuindo a medida que avançamos para os períodos maiores. A tendência é de que no limite de $n = \infty$ essa razão se aproximará cada vez mais para o valor 1. Isso pode ser confirmado por cálculos numéricos para valores de períodos maiores neste sistema ou em mapeamentos discretos onde tais acumulações também existem e é muito mais fácil computarmos os períodos maiores, do ponto de vista computacional. E ainda, essa situação pode ser comparada com estudos realizados em sistemas de tempo contínuo [101] ou discreto [102] onde foi investigado a adição de período e escalas considerando-se a variação de um parâmetro do sistema.

A figura 3.8 ilustra o que ocorre no espaço de fase do laser ao longo das acumulações que mostramos no espaço de parâmetros. Aqui são mostrados diagramas de bifurcações ao longo da linha pontilhada superior mostrada na figura 3.6(a), ou seja, cada diagrama foi obtido pela variação simultânea dos dois parâmetros de injeção do laser K e ω . São mostrados quatro diagramas, um para cada variável dinâmica E_x, E_y, n , que aparecem nas equações 3.19, mais a intensidade do laser dada por $I \equiv E_x^2 + E_y^2$. Nessa figura observamos que, dependendo da variável dinâmica tomada, ocorrem diferentes números de picos em um período de oscilação de cada variável. Isso significa que não podemos arbitrariamente rotular cada estrutura periódica pelo número de picos contidos em uma oscilação periódica de uma série temporal como sendo o seu “período”, sem fazer referência a qual variável estamos nos referindo.

Tabela 3.1: Número de máximos relativos contidos em um período de oscilação da intensidade do laser $[N_{max}(I)]$ para diversos pontos (K, ω) pertencentes à seqüência de acumulação mostrada na figura 3.7(a). Na direita mostramos as sucessivas razões $\delta = \frac{d_n}{d_{n+1}}$ computadas para essa seqüência, onde d_n é a distância linear entre dois pontos no espaço de parâmetros.

n	$N_{max}(I)$	K	ω	δ
1	30	0.689433000	1.239452500	
2	34	0.686662000	1.239971700	1.458879
3	38	0.684764000	1.240335000	1.404386
4	42	0.683413900	1.240600800	1.343350
5	46	0.682409100	1.240799800	1.312314
6	50	0.681643800	1.240953300	1.277769
7	54	0.681045000	1.241074100	1.256061
8	58	0.680568500	1.241171400	1.230490
9	62	0.680181200	1.241250200	1.219313
10	66	0.679863700	1.241315500	1.197682
11	70	0.679598600	1.241370000	1.186689
12	74	0.679375200	1.241415900	1.179760
13	78	0.679185900	1.241455100	1.163479
14	82	0.679023200	1.241488800	1.156431
15	86	0.678882500	1.241517900	1.149538
16	90	0.678760100	1.241543200	1.142265
17	94	0.678652980	1.241565520	1.134873
18	98	0.678558572	1.241585098	1.129669
19	102	0.678475030	1.241602570	1.122829
20	106	0.678400610	1.241618050	1.119234
21	110	0.678334120	1.241631890	1.113082
22	114	0.678274380	1.241644300	1.112665
23	118	0.678220708	1.241655544	1.104648
24	122	0.678172120	1.241665720	

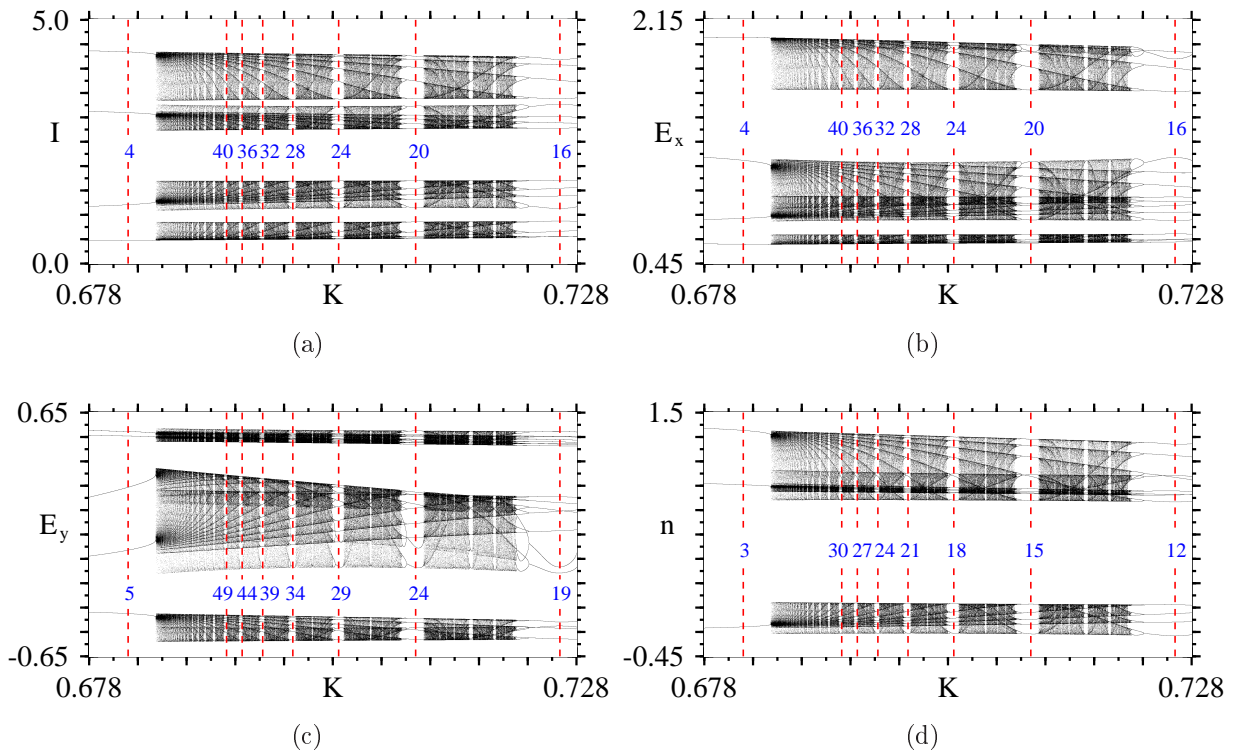


Figura 3.8: Diagramas de bifurcações obtidos ao longo da linha pontilhada superior da figura 3.6. Os valores de ω são dados por $\omega(K) = -0.112685K + 1.32286$, enquanto K é variado no intervalo $[0.678, 0.728]$. Os diagramas mostram que as seqüências de adição de período dependem da variável do laser. Os números referem-se à quantidade de picos existentes em uma oscilação periódica de cada variável.

A figura 3.8(a) mostra o diagrama de bifurcações para a intensidade do laser. Aqui observamos uma cascata de adição de período através da seqüência $16 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$. O diagrama de bifurcações representa, de fato, uma situação particular de variação dos parâmetros ao longo de uma direção específica. Assim, estruturas periódicas complicadas existentes no espaço de parâmetros estão representadas neles através das conhecidas janelas periódicas. Encontramos tipicamente o seguinte resultado em relação às acumulações das janelas periódicas nos diagramas de bifurcações ao longo da direção que contém uma seqüência de estruturas auto-similares acumulando em uma determinada região de periodicidade menor: o incremento observado na seqüência de adição de período das janelas periódicas tem o mesmo valor do período da região periódica para a qual a cascata está acumulando. Isso é verificado observando-se a figura 3.8. No caso da figura 3.8(a)

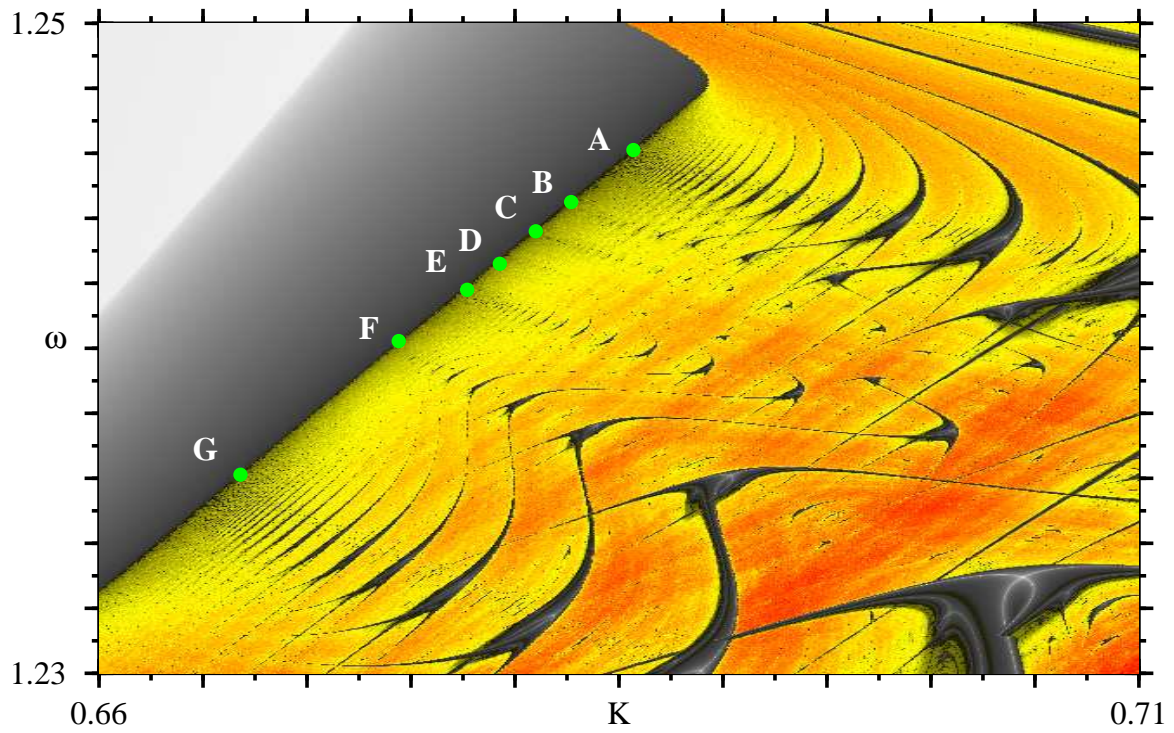


Figura 3.9: Detalhe de várias seqüências de estruturas periódicas acumulando em um horizonte de acumulação. Os pontos A,...,G marcam a localização de 7 seqüências distintas.

observa-se uma seqüência específica de janelas periódicas, que representam o número de picos da intensidade do laser contidos em um período da oscilação, incrementando com o valor 4 e “acumulando” em uma janela de período 4. Esse é o caso também para as demais variáveis. Para a componente E_x do campo elétrico o número de picos contidos em cada oscilação periódica é o mesmo da intensidade, para a região de parâmetros que investigamos. Para a componente E_y observamos uma seqüência de janelas que adicionam 5 picos em cada oscilação acumulando para uma região de período 5, enquanto para a população n observamos uma seqüência que adicionam 3 picos em cada oscilação acumulando para uma região de período 3.

A figura 3.9 ilustra em maiores detalhes a região que denominamos *horizonte de acumulações*. Aqui podemos observar melhor a organização regular de estruturas auto-similares que estão acumulando em uma fronteira do espaço do parâmetro. De um lado da fronteira temos uma região periódica, enquanto do outro lado temos a região caótica. O período

da solução da grande região periódica, que aparece no canto superior esquerdo da figura 3.9 depende da variável que estamos analisando, assim como o período de cada estrutura periódica, conforme vimos na figura 3.8. Na figura 3.9 é possível reconhecer diversas seqüências de regiões de periodicidade que estão acumulando em direção ao horizonte de acumulações. Ao longo da fronteira, destacamos os pontos $A-G$ que referem-se a sete seqüências distintas de estruturas periódicas acumulando. Muitas dessas seqüências de estruturas aparecem interconectadas por regiões finas de parâmetros formando uma rede. Cada seqüência refere-se a uma rota específica de adição de período.

As acumulações de estruturas periódicas no espaço de dois parâmetros, seguindo rotas de adição de período encaixadas nas fases caóticas, ocorrem também em muitos outros modelos de equações diferenciais. No apêndice A, baseado na referência [103], mostramos acumulações similares às que analisamos aqui para outros modelos de equações diferenciais. E ainda, outros tipos de seqüências de regiões periódicas e acumulações, seguindo rotas de adição de período em direções específicas do espaço de parâmetros, podem existir em equações diferenciais. Um exemplo dessa situação é mostrada na próxima seção, para o modelo do laser de semicondutor que estamos considerando neste capítulo.

3.5 Outras acumulações em lasers com injeção óptica

Nesta seção mostramos outros tipos de acumulações de estruturas periódicas que ocorrem no espaço de parâmetros do laser de semicondutor. Um outro tipo de acumulação de órbitas periódicas que ocorre no modelo descrito pelas equações 3.19 foi reportado por Krauskopf e Wiczorek [104]. Eles estudaram o sistema de equações 3.19 com $B = 0.015$ e $\Gamma = 0.035$, e variaram o parâmetro α de zero, que é o caso dos lasers de CO_2 e de estado sólido, para valores maiores do que 1, que é o caso dos lasers de semicondutores. Com isso eles identificaram que para $\alpha = 0$, existem regiões no espaço de parâmetros, associadas a órbitas periódicas, que acumulam na vizinhança de uma região onde ocorrem simultaneamente uma bifurcação sela-nó e uma bifurcação de Hopf. As sucessivas regiões acumulando levam a uma rota específica de adição de período.

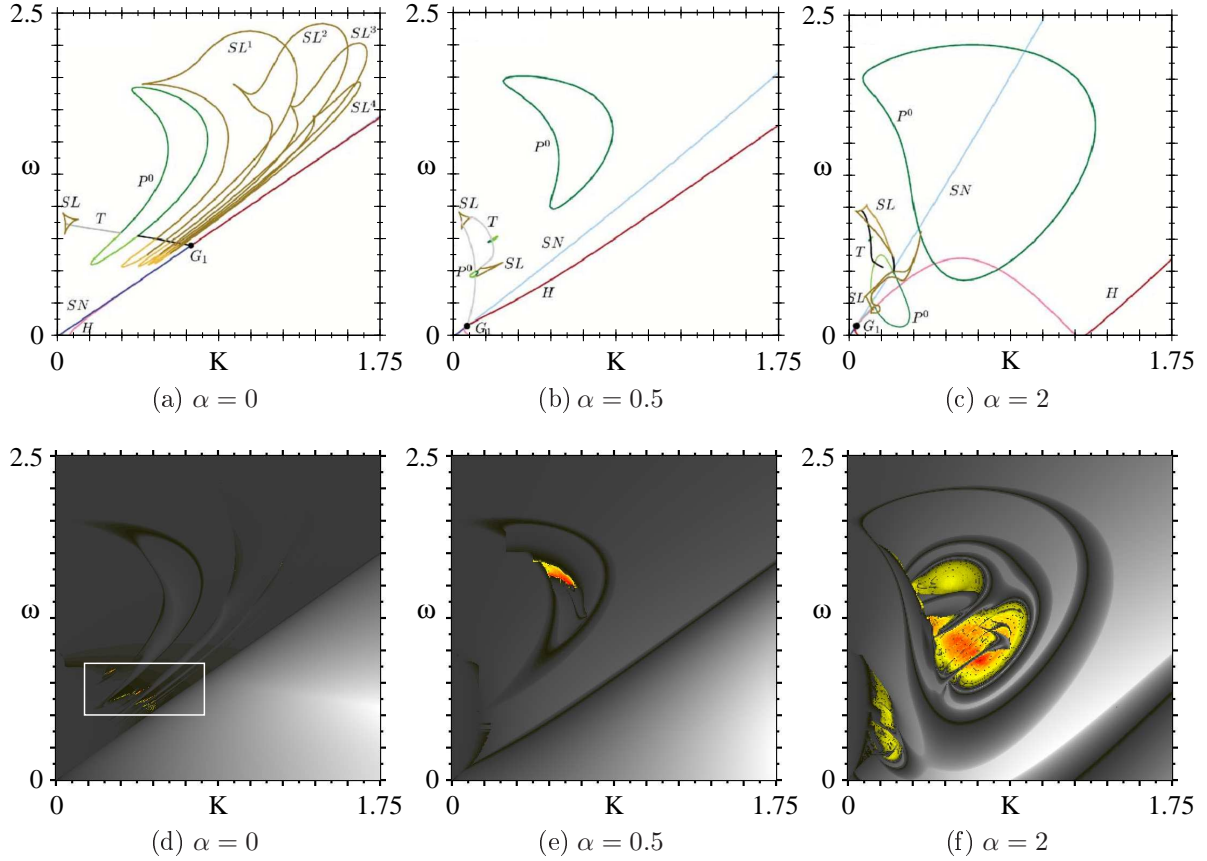


Figura 3.10: (a)-(c) Desaparecimento das regiões acumulando no espaço (K, ω) conforme aumenta-se o parâmetro α , reproduzido de Krauskopf e Wiczorek [104]. (d)-(f) Diagramas de fase computados pela metodologia que desenvolvemos nesta tese para as mesmas regiões mostradas em (a)-(c) computadas por continuação numérica.

As figuras 3.10(a)-3.10(c) são reproduzidas do trabalho de Krauskopf e Wiczorek [104] e ilustram os principais resultados obtidos por eles. A figura 3.10(a) mostra as sucessivas regiões onde existem órbitas periódicas, denotadas por SL^n , acumulando na vizinhança do ponto de codimensão dois G_1 , onde as curvas de bifurcação de Hopf e bifurcação sela-nó se interceptam. Quando α assume valores maiores do que zero, as regiões que acumulavam no espaço de parâmetros desaparecem, conforme é ilustrado pelas figuras 3.10(b) e 3.10(c). Essa situação levou os autores referidos acima a argumentarem que esse fato explicava porque rotas de adição de período nunca haviam sido encontradas em lasers de semicondutores. Entretanto, rotas de adição de período existem em lasers de semicondutores dentro da região caótica, conforme já mostramos na seção anterior.

As figuras 3.10(d)-3.10(f) mostram os diagramas de fase que computamos para as mesmas regiões consideradas nas figuras 3.10(a)-3.10(c). Nem todas regiões que estão acumulando e aparecem na figura 3.10(a) são reproduzidas no diagrama da figura 3.10(d). Isso ocorre devido à multiestabilidade existente nessa região, visto que as soluções que estão acumulando coexistem com uma solução que é a continuação da solução do laser operando livremente (conhecida como *running phase solution*). As acumulações mostradas na figura 3.10(a) ou 3.10(d) são bem diferentes das acumulações que descrevemos na seção 3.4. As acumulações da figura 3.10(d) envolvem uma bifurcação sela-nó-Hopf, enquanto as acumulações mostradas na seção 3.4 não estão conectadas a essa bifurcação. As acumulações da figura 3.10(d) ocorrem em direção a uma região de travamento (ponto fixo), enquanto as acumulações mostradas na seção 3.4 ocorrem em direção a uma região de um ciclo limite. Além disto, as acumulações que descrevemos na seção 3.4 envolvem uma alternância de soluções caóticas e periódicas, enquanto as acumulações da figura 3.10(d) não.

O principal resultado desta seção é mostrado na figura 3.11. A figura 3.11(a) foi reproduzida da referência [104] e mostra em maiores detalhes as acumulações próximas ao local onde elas estão acumulando, ou seja, na vizinhança do ponto de codimensão dois G_1 . Essa é uma região de bastante complexidade no espaço de parâmetros, com muitos detalhes e curvas de bifurcações. Essa situação pode ser melhor observada pelo diagrama que computamos pela metodologia que desenvolvemos. A figura 3.11(b) é um diagrama de fase que computamos para a mesma região mostrada na figura 3.11(a). Aqui podemos observar as regiões caóticas (em amarelo) que não são mostradas na figura 3.11(a), além de muitos outros detalhes em maior resolução. A figura 3.11(c) é uma magnificação da região em destaque na figura 3.11(b) e apresenta regularidades que existem em uma estrutura muito fina do espaço de parâmetros.

Assim, no interior das regiões que estão acumulando descritas na referência [104], existem outras acumulações formadas por regiões de travamento de frequência em meio a regiões de quasiperiodicidade e caos, que também existem nessa região. As regiões periódicas seguem uma rota de adição de período em uma direção específica do espaço de

parâmetros. Aqui podemos observar que o incremento do período das estruturas periódicas que estão acumulando é o mesmo valor do período da região para a qual elas estão acumulando. Ou seja, esse resultado é análogo ao resultado que obtivemos na seção 3.4 quando investigamos as acumulações de estruturas periódicas dentro da região caótica. A figura 3.11(d) mostra em grande detalhe as regiões de travamento, na forma de lín-

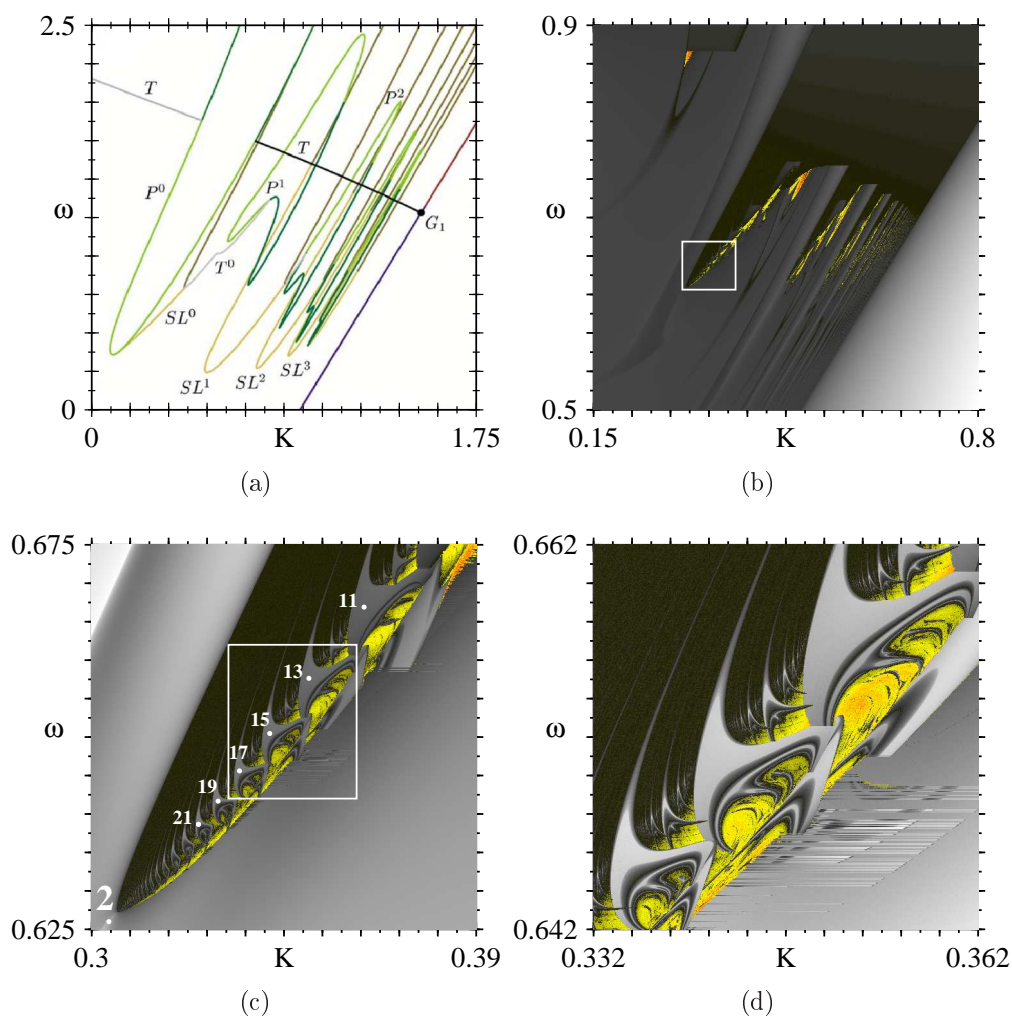


Figura 3.11: (a) Detalhe das regiões SL^n acumulando próximo ao ponto G_1 , reproduzido de Krauskopf e Wieczorek [104]. (b) Diagrama de fase para a região considerada em (a). (c) Ampliação da caixa em destaque em (b), mostrando uma estrutura de línguas de periodicidades encaixadas em uma região com quasiperiodicidade (região mais escura) e caos (amarelo). As línguas seguem uma seqüência de adição de período ao longo da direção que contém os pontos $A-F$, indicando uma acumulação dessas estruturas. (d) Ampliação da caixa destacad em (c), mostrando em maiores detalhes as línguas de periodicidade.

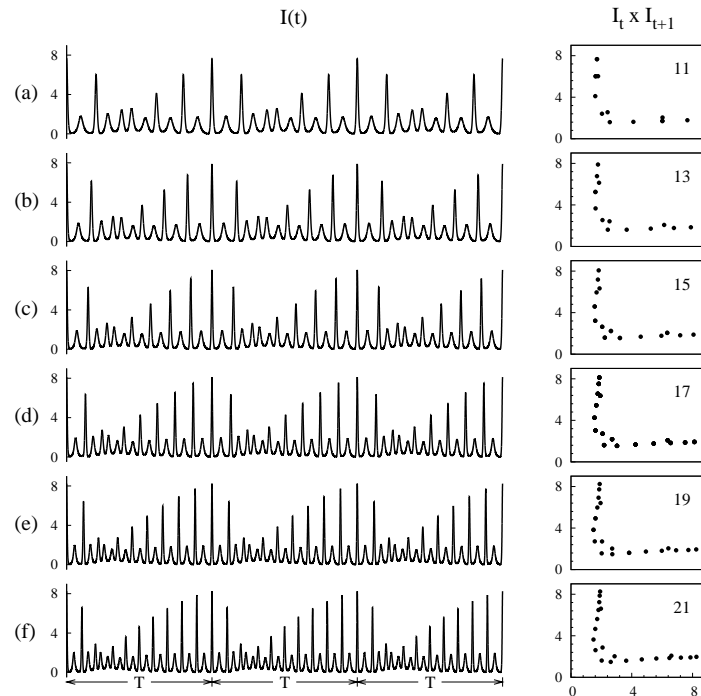


Figura 3.12: Esquerda: Séries temporais para a intensidade do laser para as regiões marcadas por pontos no diagrama de fase da figura 3.11(c), correspondendo a uma seqüência de estruturas periódicas acumulando. O valor de T (não mostrado) é diferente para cada série. Direita: Mapas de retorno da intensidade do laser, para cada respectiva série temporal mostrada à esquerda, ilustrando a cascata de adição de período $11 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow \dots$

guas, que tipicamente encontramos em sistemas exibindo competição de duas frequências, como por exemplo o mapa do círculo [4]. As discontinuidades nas cores que aparecem no quadrante inferior direito, nessa figura, são devido à multiestabilidade existente nessa região.

A figura 3.12 ilustra no espaço de fase as regularidades que encontramos dentro das regiões SL^n . Aqui são mostradas as séries temporais para valores de parâmetros de injeção ao longo de uma seqüência de regiões periódicas que estão marcadas pelos pontos na figura 3.11(c). São mostrados três períodos de oscilação para cada série temporal. Os números indicam o número de picos contidos em um período de oscilação da intensidade do laser. As regularidades são evidenciadas também pelos mapas de retorno computados para as séries temporais da intensidade do laser, os quais estão mostrados ao lado das respectivas séries, na coluna do lado direito da figura 3.12.

Capítulo 4

Circuito eletrônico simétrico

Este capítulo é baseado na referência [105]. Aqui investigamos o modelo de um circuito eletrônico cujas equações possuem uma simetria com relação à origem. Mostramos que existem, encaixadas na região caótica, infinitas espirais formadas por estruturas auto-similares exibindo alternadamente dois tipos de oscilações periódicas, simétricas e assimétricas, refletindo as propriedades de simetria existentes no sistema. As espirais estão hierarquicamente organizadas e ao longo delas o período de oscilação aumenta continuamente sem limites. O número de máximos locais contidos em um período de oscilação varia de uma forma bastante regular ao longo das espirais, e dependem da variável do sistema que estamos considerando. Diagramas de bifurcações cortando as espirais em direções específicas no espaço de parâmetros levam às conhecidas cascatas de adição de período com alternância de janelas caóticas e periódicas. Mostramos também a existência de estruturas auto-similares de bifurcações no espaço de dois parâmetros onde a órbita principal desestabiliza-se via uma bifurcação de quebra de simetria e identificamos seqüências de adição de período que existem encaixadas em sua estrutura interna.

4.1 O modelo

O modelo que investigamos aqui é de um circuito eletrônico e foi introduzido por Nishio *et al.* [106]. Esse circuito praticamente não foi explorado na literatura. A figura

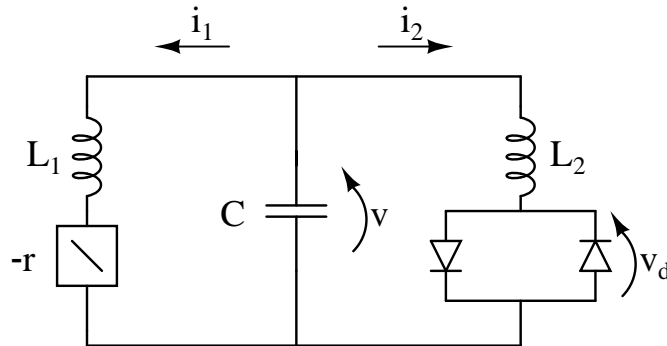


Figura 4.1: Diagrama esquemático do circuito eletrônico simétrico, onde L_1 e L_2 são indutores, C um capacitor, $-r$ uma resistência linear negativa e v_d é a queda de tensão no elemento não-linear constituído por dois diodos.

4.1 mostra um diagrama esquemático desse circuito que consiste de dois indutores, um capacitor, uma resistência linear negativa e uma resistência não-linear consistindo de dois diodos. A resistência linear negativa é feita usando-se a região linear do conversor de impedância negativa feito por um amplificador operacional. As correntes i_1 e i_2 e a queda de tensão v no capacitor C representados na figura 4.1 são as variáveis dinâmicas do sistema.

A dinâmica interessante que esse circuito apresenta é devido a não-linearidade da resistência constituída pelos dois diodos. Essa resistência não-linear possui uma curva característica $I - V$ que é bem aproximada por uma função linear por partes consistindo de três segmentos

$$v_d(i_2) = \frac{r_d}{2} \left(\left| i_2 + \frac{V}{r_d} \right| - \left| i_2 - \frac{V}{r_d} \right| \right), \quad (4.1)$$

onde r_d denota a resistência do diodo quando ele está desligado. A figura 4.2 mostra a forma da curva característica $I - V$ dada pela função 4.1 que relaciona a queda de tensão nos diodos em função da corrente i_2 que passa por eles. Quando $i_2 > V/r_d$ (ou $i_2 < -V/r_d$) temos que $v_d(i_2)$ é uma função constante igual a V (ou $-V$). Quando $|i_2| < V/r_d$ temos que $v_d(i_2) = r_d i_2$, ou seja, é uma reta cuja inclinação é dada pelo valor da resistência r_d .

As variações temporais das correntes i_1 , i_2 e da queda de tensão v no circuito mostrado na figura 4.1 são descritas pelo seguinte sistema de equações diferenciais autônomo:

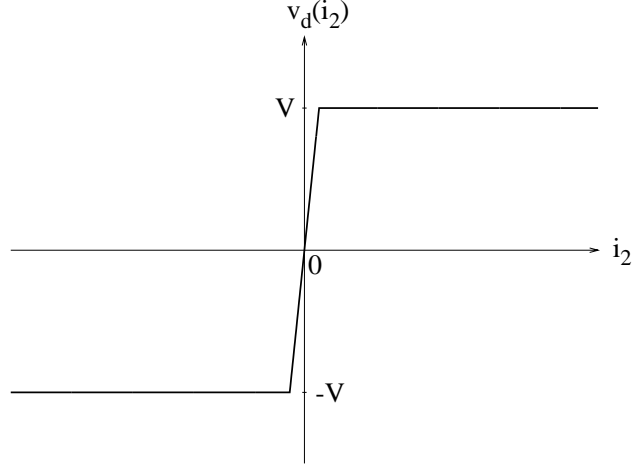


Figura 4.2: Curva característica $I - V$ para o elemento não-linear do circuito eletrônico mostrado na figura 4.1.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = v + ri_1, \quad (4.2a)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = v - v_d(i_2), \quad (4.2b)$$

$$C \frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2. \quad (4.2c)$$

Fazendo-se a mudança de variáveis tal que

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{\frac{C}{L_1}} V x, & i_2 &= \frac{\sqrt{L_1 C}}{L_2} V y, & v &= V z, & t &= \sqrt{L_1 C} \tau, \\ r \sqrt{\frac{C}{L_1}} &= \alpha, & \frac{L_1}{L_2} &= \beta, & r_d \frac{\sqrt{L_1 C}}{L_2} &= \gamma, & \text{"."} &= \frac{d}{d\tau}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

o sistema 4.2 é normalizado para:

$$\dot{x} = \alpha x + z, \quad (4.4a)$$

$$\dot{y} = z - f(y), \quad (4.4b)$$

$$\dot{z} = -x - \beta y, \quad (4.4c)$$

onde,

$$f(y) = \frac{\gamma}{2} \left(\left| y + \frac{1}{\gamma} \right| - \left| y - \frac{1}{\gamma} \right| \right). \quad (4.5)$$

A função dada por 4.5 representa a não-linearidade do sistema. Assim, o sistema de equações 4.4 compõe um sistema de equações diferenciais de terceira ordem, autônomo, linear por partes. Na próxima seção investigamos uma porção da região caótica do espaço de parâmetros (α, β) desse sistema.

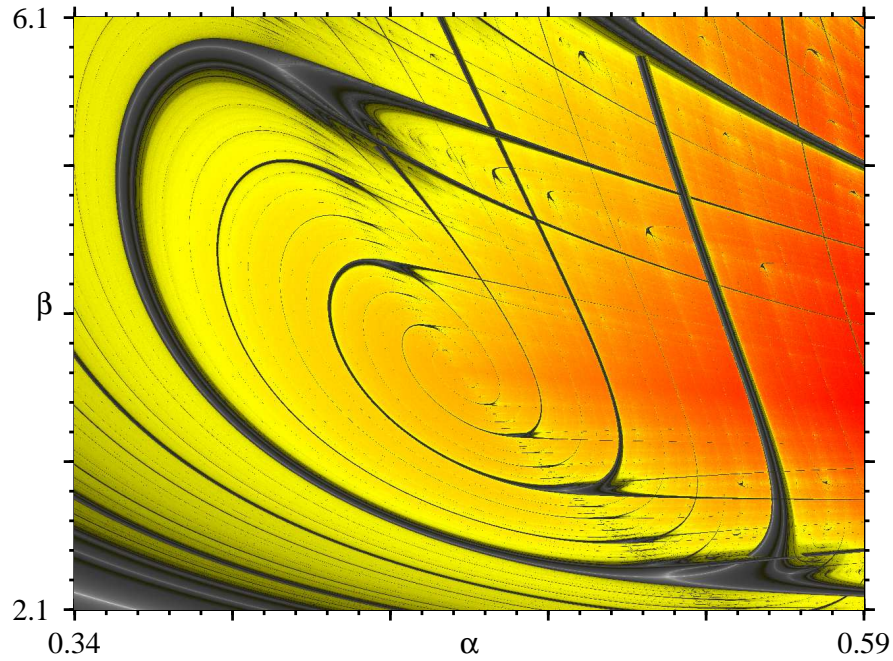
4.2 Espirais e hierarquia

Nesta seção descrevemos uma porção do espaço de parâmetros do sistema de equações 4.4. O sistema de equações 4.4 foi integrado numericamente com o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo $h = 0.005$. Em algumas situações, que serão mencionadas, utilizamos $h = 0.001$. Os parâmetros α e β foram variados nas simulações numéricas e o parâmetro γ foi mantido fixo. Aqui utilizamos $\gamma = 470$, ou seja, um valor que foi utilizado na referência [106]. Os expoentes de Lyapunov foram computados e codificados em cores da maneira usual que descrevemos na seção 1.3.

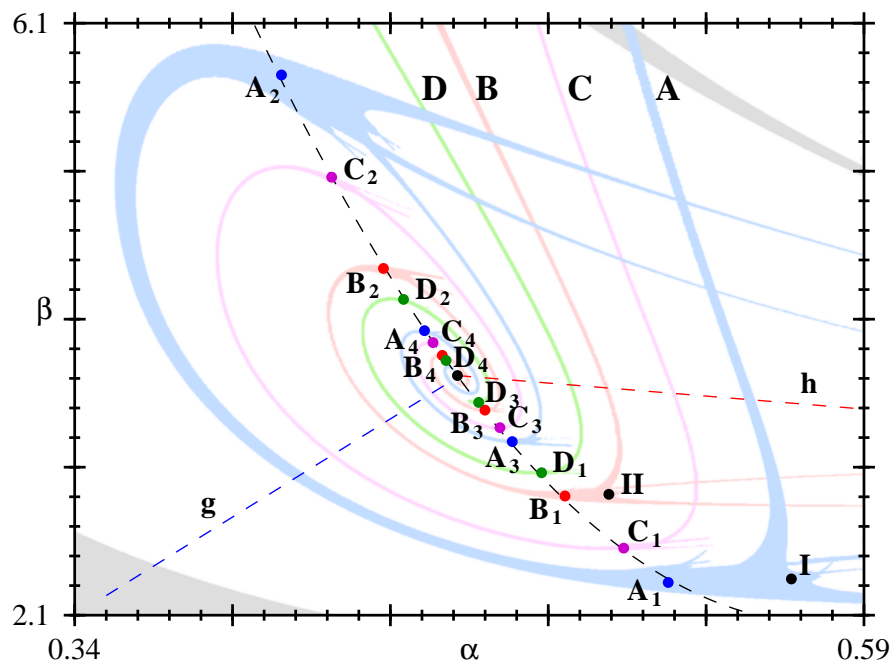
A figura 4.3(a) mostra o diagrama de fase baseado no espectro de expoentes de Lyapunov. No espaço de parâmetros desse sistema, encontramos uma organização muito regular formada por infinitas espirais auto-similares, contendo oscilações periódicas estáveis, aninhadas e encaixadas na fase caótica. Cada espiral é formada por uma conexão de estruturas de bifurcações auto-similares do tipo camarão que convergem para o foco da espiral. O foco da espiral foi estimado numericamente e o valor aproximado que obtivemos foi:

$$\mathcal{F} = (\alpha_f, \beta_f) = (0.4612 \dots, 3.7191 \dots). \quad (4.6)$$

Assim como as espirais aparecem recorrentemente, em diversos níveis de escalas, possivelmente preenchendo densamente o espaço de parâmetros, as estruturas auto-similares contidas em cada espiral também aparecem recorrentemente ao longo das espirais, a medida que nos aproximamos do foco \mathcal{F} .



(a)



(b)

Figura 4.3: (a) Diagrama de fase mostrando uma organização regular de regiões de estabilidade em forma de espirais auto-similares (regiões mais escuras) encaixada na fase caótica (amarelo-vermelho). (b) Diagrama esquemático destacando quatro espirais, *A* (azul), *B* (vermelho-claro), *C* (magenta) e *D* (verde) e quatro pontos marcados em cada uma. Os pontos *I* e *II* são discutidos na seção 4.3.

A figura 4.3(b) mostra esquematicamente quatro espirais distintas, destacadas por cores diferentes e pelas letras A , B , C e D . Denotamos pelos nomes A_1, \dots, A_4 , B_1, \dots, B_4 , C_1, \dots, C_4 e D_1, \dots, D_4 as quatro maiores estruturas auto-similares em cada uma das quatro espirais. Os pontos denotam o cruzamento dos locais de expoentes mais negativos e foram obtidos de uma maneira aproximada através de ampliações de cada uma das estruturas auto-similares destacadas. Tais pontos localizam-se ao longo de uma direção específica no espaço de parâmetros que é bem aproximada por um arco parabólico, representado pela curva preta pontilhada na figura 4.3(b). Fazendo o ajuste dos pontos A_i, B_i, C_i, D_i para $i = 1, 2, 3, 4$, junto com o foco \mathcal{F} , de tal modo que passe pelo foco, encontramos uma expressão aproximada para essa direção de alinhamento:

$$\beta = 124.5875 \alpha^2 - 143.7802 \alpha + 43.5301. \quad (4.7)$$

A figura 4.3(b) contém outras duas direções distintas:

$$\text{Linha } h: \quad \beta = -1.7604 \alpha + 4.5310, \quad (4.8)$$

$$\text{Linha } g: \quad \beta = 13.3912 \alpha - 2.4569. \quad (4.9)$$

A linha h denota a localização de uma linha homoclínica [16]. Computamos essa linha de uma maneira aproximada, através da análise dos mapas de retorno para uma seqüência de pontos na vizinhança dessa região. A figura 4.4 ilustra os mapas de retorno da série temporal $x(t)$ para três pontos no espaço de parâmetros, localizados abaixo, sobre e acima da linha h . Consideramos que um ponto faz parte da linha h quando o mapa de retorno “toca” o ponto $(x_t, x_{t+1}) = (0, 0)$, conforme ilustra a figura 4.4(b). Assim, identificamos alguns pontos que pertencem a essa linha e, ao realizarmos o ajuste desses pontos, encontramos que essa direção é bem aproximada por uma reta, cuja equação é dada pela expressão 4.8. Ao investigarmos a evolução desses pontos, utilizando sempre o mesmo critério, indo em direção ao centro da espiral, determinamos a localização do foco \mathcal{F} . Observamos que para pontos abaixo da linha h a curva formada pelos retornos dos máximos da série temporal $x(t)$ tem uma aparência suave, conforme ilustra a figura 4.4(a),

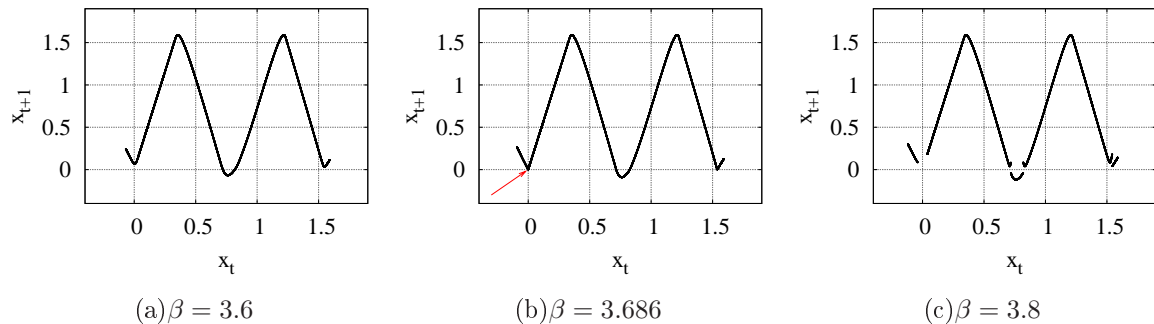


Figura 4.4: Mapas de retorno para a série temporal $x(t)$, para três valores de β , com $\alpha = 0.48$ fixado, ilustrando regiões abaixo (a), sobre (b) e acima (c) da linha h mostrada na figura 4.3(b). A seta em destaque em (b) ilustra o mapa de retorno “tocando” o ponto $(0, 0)$.

enquanto para pontos localizados acima da linha h os mapas de retornos têm uma forma mais complicada, conforme ilustra a figura 4.4(c). A linha g marca uma linha genérica do lado esquerdo do arco parabólico. Para qualquer linha g desse lado do arco encontramos a seqüência de bifurcações mais simples possível quando nos movemos para o (do) ponto focal \mathcal{F} .

Uma característica importante, que está refletida na estrutura de bifurcações e organização das espirais, é a propriedade de simetria que o sistema de equações 4.4 possui. O sistema de equações 4.4 é invariante sobre a transformação

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z). \quad (4.10)$$

Isso implica que se (x, y, z) é uma solução do sistema de equações 4.4, então $(-x, -y, -z)$ também é uma solução. Uma solução que é invariante sobre a transformação 4.10 é uma solução simétrica enquanto que uma solução que não é invariante é uma solução assimétrica. É comum também chamarmos as órbitas simétricas do tipo que referimos aqui de auto-simétricas, visto que, se aplicamos a transformação 4.10 para um ponto da órbita, recaímos na mesma órbita.

A figura 4.5 mostra oscilações periódicas que o sistema exhibe para as quatro estruturas auto-similares destacadas em cada espiral na figura 4.3. Aqui é possível observar os dois tipos de oscilações periódicas diferentes que existem na organização das espirais, simétricas

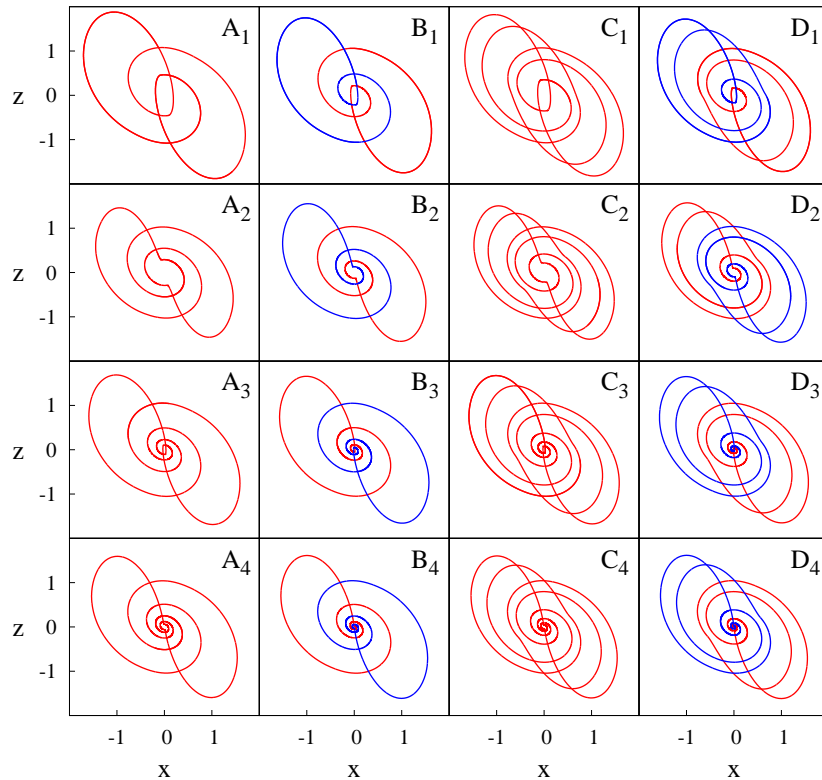


Figura 4.5: Projeções das órbitas no plano xz para os quatro pontos marcados na figura 4.3 em cada uma das quatro espirais A-D. As espirais A e C correspondem a órbitas simétricas e as espirais B e D correspondem a órbitas assimétricas. As órbitas iniciadas da condição inicial $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ estão em vermelho e as órbitas iniciadas da condição inicial $(-1, 0, 0)$ estão em azul.

e assimétricas. Os valores de parâmetros referentes às espirais A e C levam o sistema a exibir oscilações simétricas, de forma que aplicando a transformação 4.10 para uma órbita desse tipo recaímos na mesma órbita, conforme ilustram os painéis A_1, \dots, A_4 e C_1, \dots, C_4 na figura 4.5. Já os parâmetros associados com as espirais B e D levam o sistema a exibir oscilações assimétricas. Nesse caso, aplicando a transformação 4.10 para uma das órbitas assimétricas, obtemos uma *órbita-espelho*, ou seja, uma outra órbita assimétrica que está simetricamente localizada em relação à origem. As duas órbitas assimétricas sempre coexistem e são selecionadas pela condição inicial. As órbitas assimétricas estão ilustradas nos painéis B_1, \dots, B_4 e D_1, \dots, D_4 na figura 4.5, e são diferenciadas por cores diferentes. As órbitas iniciadas da condição inicial $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ estão em vermelho e as órbitas iniciadas da condição inicial $(-1, 0, 0)$ estão em azul.

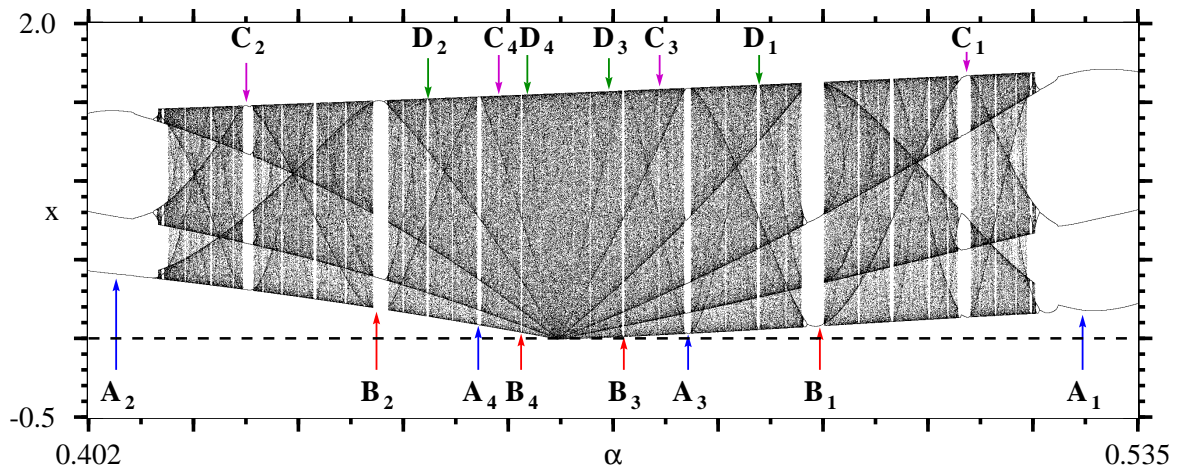


Figura 4.6: (a) Diagrama de bifurcações obtido ao longo da parábola que corta todas as espirais na figura 4.3 (b). Os labels A-D referem-se a essa figura.

Para compreendermos a estrutura e organização das órbitas periódicas ao longo das espirais, que estão encaixadas na região caótica, computamos um diagrama de bifurcações ao longo da parábola pontilhada mostrada na figura 4.3. Essa parábola corta as espirais passando pelo foco, o qual foi estimado numericamente. O diagrama de bifurcações é mostrado na figura 4.6, sendo que os pontos destacados nele referem-se às figuras 4.3 e 4.5. Nesse diagrama observamos que cortes como esse no espaço de parâmetros conduzem às familiares cascatas de adição de período com alternância de janelas periódicas e caóticas [107].

A tabela 4.1 ajuda a compreendermos melhor a organização das órbitas periódicas nas espirais da figura 4.3 e, conseqüentemente, das janelas periódicas no diagrama de bifurcações da figura 4.6. A tabela 4.1 mostra os valores de parâmetros α e β escolhidos, o valor do período da oscilação T e o número de máximos locais existentes em um período de oscilação para cada variável (x, y, z) do sistema para os 16 valores de parâmetros destacados pelas letras A_1, A_2, \dots, D_4 na figura 4.3 e figura 4.6. O período T é o tempo mínimo gasto para dar uma oscilação periódica completa e varia continuamente ao longo das espirais. O período T vai aumentando cada vez mais ao longo das espirais, a medida que avançamos em direção ao foco. Inspecionando a tabela 4.1 é possível observar que existe uma grande regularidade em relação ao número de máximos locais contidos em uma

Tabela 4.1: Número de máximos locais e período da oscilação (T) relativos às séries temporais para cada variável (x, y, z) das equações 4.4, para os 16 pontos (α, β) em destaque nas espirais da figura 4.3(b).

	α	β	x	y	z	T
A_1	0.52800	2.32100	3	3	3	15.965
A_2	0.40550	5.75000	3	5	5	21.030
A_3	0.47860	3.27290	5	5	5	28.355
A_4	0.45082	4.02240	5	7	7	34.450
B_1	0.49530	2.90520	2	2	2	11.040
B_2	0.43780	4.44300	2	3	3	13.920
B_3	0.46998	3.48562	3	3	3	17.360
B_4	0.45644	3.85528	3	4	4	20.490
C_1	0.51390	2.55300	5	5	5	28.000
C_2	0.42130	5.06010	5	7	7	34.020
C_3	0.47469	3.36707	7	7	7	40.805
C_4	0.45350	3.94198	7	9	9	47.125
D_1	0.48787	3.06250	3	3	3	17.195
D_2	0.44410	4.23406	3	4	4	20.305
D_3	0.46797	3.53768	4	4	4	23.615
D_4	0.45763	3.82081	4	5	5	26.805

oscilação periódica, a medida que se avança ao longo das espirais. O número de máximos incrementa de uma maneira regular e específica para cada tipo de espiral em relação ao tipo de órbita associada. Pela inspeção da tabela 4.1 podemos observar que para as espirais do tipo A e C, ou seja, as espirais contendo órbitas auto-simétricas, o incremento é de 2 máximos. Também podemos observar que as variáveis x , y e z incrementam de uma maneira diferente. Isto é, elas não incrementam todas na mesma posição do espaço de parâmetros. Já as espirais do tipo B e D, ou seja, as espirais contendo órbitas que não são auto-simétricas, o incremento é de 1 máximo ao longo das espirais. Aqui temos a mesma situação das outras espirais, ou seja, as variáveis não sofrem todas elas o incremento ao mesmo tempo.

As espirais A e B contêm as regiões periódicas de períodos menores e chamamos de espirais *primárias*. Da tabela 4.1 podemos observar mais claramente que o corte passando por todas as espirais, representado pela parábola pontilhada da figura 4.1, contém

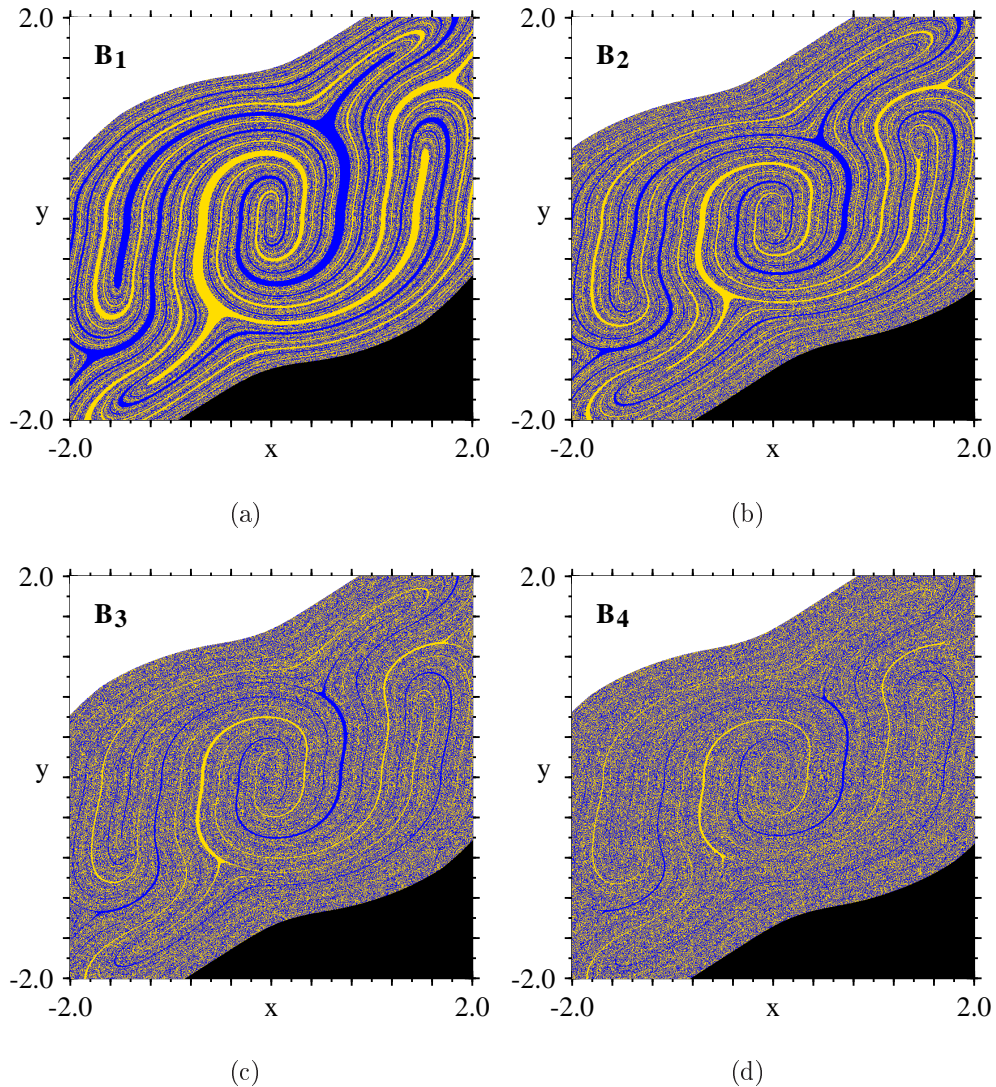


Figura 4.7: Bacias de atração para a seção $z = 0$ referente aos pontos B_1 - B_4 mostrados na figura 4.3(b) e 4.5. As cores amarelo e azul denotam as condições iniciais que levam o sistema a exibir conduta periódica enquanto que as cores preto e branco marcam as bacias de $\pm\infty$. A bacia B_4 foi computada com $h = 0.001$.

seqüências de adição de período referentes à organização das espirais no espaço de parâmetros. Por exemplo, seguindo-se a parábola pontilhada da figura 4.3, a partir da região de período menor da espiral A , podemos identificar a seguinte seqüência, olhando para os valores da tabela 4.1 $A_1 = 3 \rightarrow A_3 = 5 \rightarrow \dots$. Os próximos valores, que não estão representados na tabela 4.1 seriam: $A_5 = 7 \rightarrow A_7 = 9 \rightarrow A_9 = 11 \rightarrow \dots$, ou seja, uma seqüência de adição de período com incremento de 2 máximos. Em cortes de um

parâmetros, essa seqüência aparece como as janelas periódicas mostradas no diagrama de bifurcações 4.6. Chamamos essa seqüência de *seqüência primária* para as espirais que contém as órbitas simétricas. Da mesma maneira, para a espiral B temos a seqüência $B_1 = 2 \rightarrow B_3 = 3 \rightarrow B_5 = 4 \rightarrow B_7 = 5 \rightarrow \dots$ (note que apenas os dois primeiros pontos aparecem na tabela 4.1). Nesse caso temos uma *seqüência primária* para as espirais que contém órbitas assimétricas. No caso das órbitas assimétricas os incrementos são de 1 máximo.

No parágrafo anterior discutimos algumas seqüências de órbitas periódicas que aparecem na organização das espirais. Voltando ao diagrama de bifurcações da figura 4.6, é possível observar que, na região de parâmetros onde está o foco da espiral, o diagrama toca a linha pontilhada que passa pelo zero. No presente caso a origem é um dos pontos fixos desse sistema e o foco da espiral está relacionado com a presença de órbitas homoclínicas e o cenário conhecido como caos de Shilnikov [16, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115]. Ou seja, seqüências de órbitas periódicas estão associadas às órbitas homoclínicas presentes no sistema de equações. Pelo fato desse sistema possuir simetria, esperamos encontrar três órbitas homoclínicas [116] no centro da espiral associadas às espirais A e B , por exemplo. Isso significa que os dois tipos de espirais, com órbitas simétricas e assimétricas, “unem-se” no foco contendo três órbitas homoclínicas, as quais são referentes às duas órbitas assimétricas e uma órbita simétrica presentes nos dois tipos de espirais.

Uma outra situação que analisamos diz respeito às bacias de atração das órbitas periódicas visto que, em função da simetria do sistema, existe coexistência de soluções ao longo das espirais no espaço de parâmetros. A espiral B corresponde a uma região onde existe a coexistência de duas órbitas assimétricas. A figura 4.7 mostra quatro bacias de atração referente aos pontos B_1 , B_2 , B_3 e B_4 na figura 4.5 (b) computadas para a seção $z = 0$. Aqui encontramos que, a medida que avançamos ao longo das espirais, as bacias de atração vão ficando com uma estrutura cada vez mais fina. Isto significa que fica cada vez mais difícil de selecionar-se uma das duas órbitas que coexistem, precisando-se cada vez mais de uma precisão maior na escolha das condições iniciais. Da mesma maneira precisamos refinar o passo de integração, a medida que avançamos ao longo das espirais.

A bacia B_4 na figura 4.7 foi obtida utilizando-se um passo de integração $h = 0.001$. Note que os valores de parâmetros também vão ficando com uma estrutura cada vez mais fina, precisando-se também uma precisão cada vez maior na escolha dos parâmetros a medida que avançamos ao longo das espirais.

4.3 Camarão com quebra de simetria

Um ponto importante é como a simetria do sistema está refletida nas bifurcações no interior das estruturas auto-similares do tipo camarão. A figura 4.8 mostra as órbitas periódicas para os dois pontos do espaço de parâmetros denotados por I e II na figura 4.3. Os pontos I e II estão localizados no interior das estruturas de bifurcações auto-similares do tipo camarão em uma região que sempre foi referida como região de *dobramento de período*. Entretanto, como podemos observar na figura 4.6, a órbita representada pelo ponto I sofre uma bifurcação de *quebra de simetria* em relação à órbita principal relacionada com a espiral A . Assim, a órbita simétrica A_1 da figura 4.5 mantém-se estável até cruzar uma bifurcação de quebra de simetria, dando origem a um par de órbitas assimétricas, mostradas na figura 4.8. O ponto II na figura 4.8 ilustra a outra situação existente, onde a órbita principal (ilustrada por B_1 , na figura 4.3) perdeu sua estabilidade via duplicação

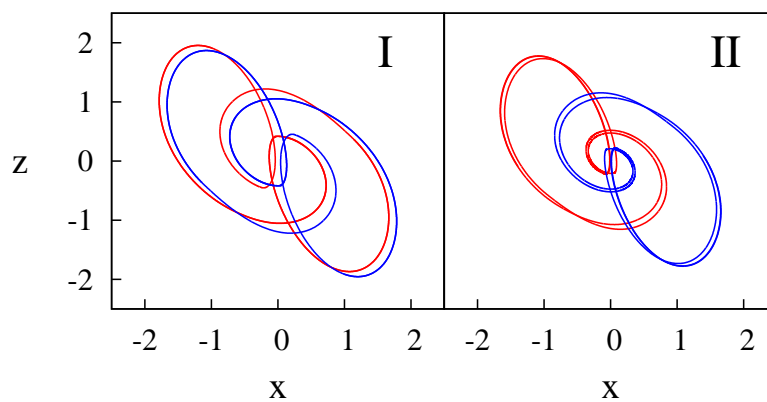


Figura 4.8: Projeções das órbitas no plano xz para os pontos I e II localizados na figura 4.3 (b) representando as bifurcações associadas com cada espiral. I representa uma bifurcação de quebra de simetria enquanto que II representa um dobramento de período.

de período. Essa nova situação está totalmente relacionada com as propriedades de simetria do sistema, visto que não seria possível uma órbita como a descrita em I duplicar o período como ocorre em II e ainda satisfazer as propriedades de simetria do sistema. De fato, em sistemas simétricos a órbita precisa primeiro quebrar a simetria para poder sofrer duplicação de período [117].

A figura 4.9(a) ilustra em detalhe a estrutura auto-similar de período 3 com quebra de simetria. Note a forma característica e estrutura similar ao mapa quaártico [32]. Na figura 4.9(b) mostramos as principais curvas de bifurcações dessa estrutura computadas com o programa AUTO [44]. As curvas vermelhas referem-se à bifurcações sela-nó, com multiplicador de Floquet $+1$, enquanto que as curvas azuis são bifurcações de quebra de simetria, também com multiplicador de Floquet $+1$. As curvas em azul são curvas de bifurcações onde ocorrem dobramentos de período e têm multiplicador de Floquet -1 . A figura 4.9(c) mostra uma acumulação de estruturas periódicas, no interior de uma estrutura de bifurcações auto-similar. Nessa acumulação observamos novamente uma alternância de estruturas de estabilidade no espaço de parâmetros contendo órbitas periódicas estáveis simétricas e assimétricas. Os pontos em verde referem-se a estruturas periódicas sem quebra de simetria enquanto que os pontos rosas referem-se a estruturas com quebra de simetria. Na figura 4.9(d) mostramos uma magnificação mais próxima a região de acumulação, denotando um *horizonte de acumulação*, conforme descrevemos no capítulo 3.

É interessante observar a organização das regiões periódicas que estão encaixadas dentro da estrutura auto-similar. No caso destacado nas figuras 4.9(c) e 4.9(d) identificamos apenas uma seqüência que também podemos chamar de uma *seqüência primária* de estruturas auto-similares. O menor período existente no interior da estrutura auto-similar é o período 9, ou seja, três vezes maior que o período principal. A região de período 9 contém órbitas simétricas. Assim é possível identificar a seguinte seqüência de adição de período de estruturas auto-similares contendo órbitas simétricas na região de período principal: $9 \rightarrow 15 \rightarrow 21 \rightarrow 27 \rightarrow \dots 3$. Analogamente é possível identificar uma seqüência com adição de período de estruturas auto-similares contendo órbitas assimétricas na região de

período principal: $6 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 15 \rightarrow \dots 3$. Ambas as seqüências estão acumulando para uma região de período 3, que nasce via uma bifurcação sela-nó, e que compões o período principal da estrutura auto-similar. Existem infinitamente muitas outras seqüências de acumulações de estruturas periódicas em escalas mais finas do espaço de parâmetros.

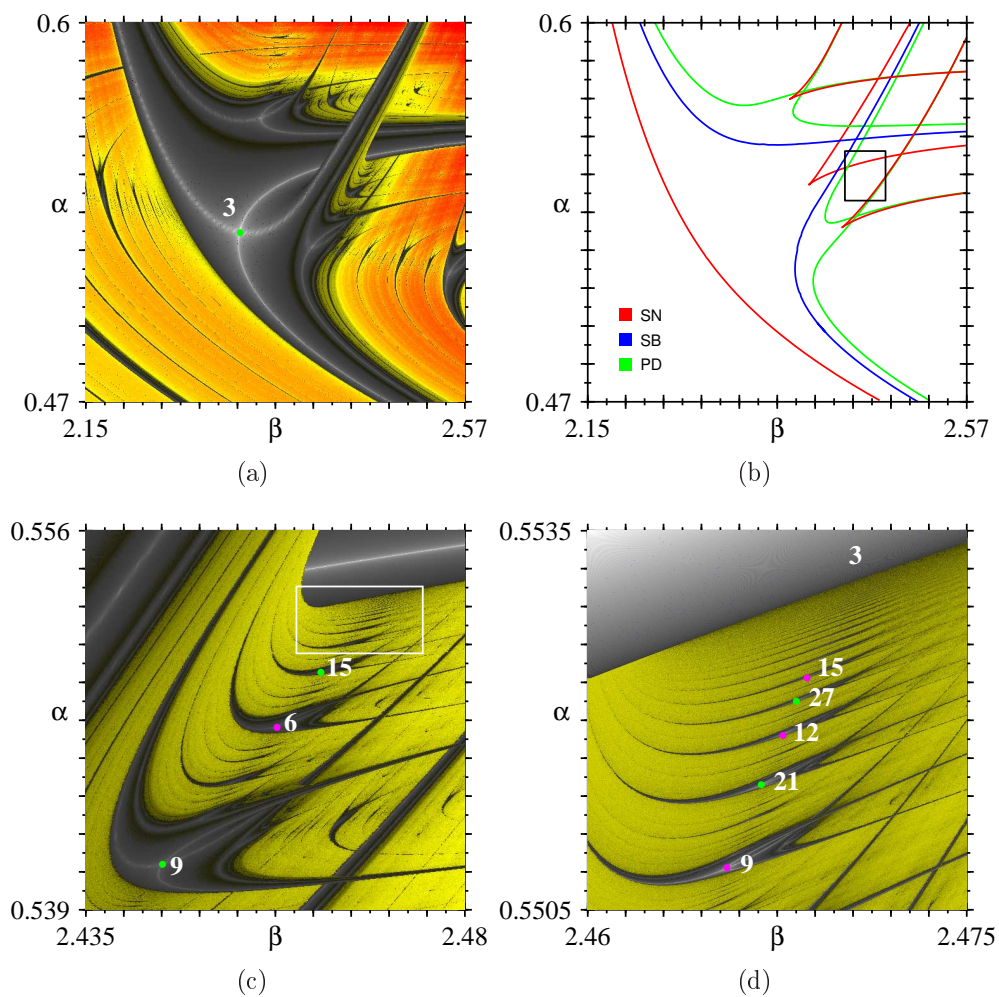


Figura 4.9: Detalhe de uma estrutura auto-similar com quebra de simetria. (a) Diagrama baseado no espectro de expoentes de Lyapunov. (b) Curvas de bifurcações computadas com o programa AUTO. SN refere-se a bifurcações sela-nó, SB quebra de simetria e PD duplicação de período. (c) Magnificação da pequena caixa em (b), mostrando uma seqüência de acumulações. (d) Magnificação da caixa em (c), mostrando a região próxima ao *horizonte de acumulação*. Os números referem-se ao número de máximos locais contidos em uma oscilação periódica da variável x .

Capítulo 5

Oscilador de Duffing

Este capítulo é baseado na publicação [118]. Neste capítulo investigamos uma região extensa do espaço de parâmetros do oscilador de Duffing em função da amplitude do forçamento externo e da taxa de amortecimento. Mostramos uma repetição periódica aproximada de toda a estrutura do espaço de parâmetros quando a amplitude da força cresce. Estas repetições incluem uma recorrência aproximada de todo conjunto de bifurcações encaixado nas fases caóticas quando a amplitude da força externa aumenta. A estrutura das regiões periódicas encaixadas nas fases caóticas incluem seqüências de estruturas auto-similares seguindo rotas de adição de período e também regiões periódicas bastante complexas.

5.1 A equação de Duffing

A equação de Duffing [119] pode ser visualizada como um caso especial de uma classe de osciladores do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = B \cos(\omega t), \quad (5.1)$$

onde variável x representa a coordenada da posição de uma partícula sujeita a um potencial $V(x)$. O parâmetro k controla a taxa de amortecimento da partícula e os parâmetros B e ω controlam a amplitude e a frequência da força externa periódica, respectivamente. Originalmente Duffing considerou diferentes formas da equação 5.1, sendo que todas elas

continham termos quárticos no potencial. Aqui consideramos o potencial $V(x) = \frac{x^4}{4}$ e fixamos $\omega = 1$. Dessa forma a equação 5.1 reduz-se a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t, \quad (5.2)$$

sendo que essa é certamente a forma mais simples dentre os modelos considerados originalmente por Duffing. Definindo $y \equiv \frac{dx}{dt}$ e $\Omega \equiv t$, podemos escrever a equação 5.2, que é uma equação diferencial de segunda ordem periodicamente forçada, no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\dot{y} = -ky - x^3 + B \cos \Omega, \quad (5.3a)$$

$$\dot{x} = y, \quad (5.3b)$$

$$\dot{\Omega} = 1. \quad (5.3c)$$

O sistema de equações 5.3 é invariante sobre a transformação

$$(x, y, t) \mapsto (-x, -y, t + \pi). \quad (5.4)$$

Soluções da equação 5.2, ou equivalentemente do sistema 5.3, exibindo condutas aperiódicas, que hoje conhecemos como caos determinístico, foram descobertas por Ueda em 1961, conforme discutido nas referências [9, 120]. Ueda realizou uma investigação bastante detalhada da equação 5.2, identificando diversas curvas de bifurcações e mapeando diferentes tipos de soluções no espaço de parâmetros. Entretanto ele concentrou sua análise no exterior das regiões caóticas, identificando alguns limites externos dessas regiões caóticas e alguns contornos referentes aos períodos mais baixos. Na próxima seção investigamos uma região extensa do espaço de parâmetros (B, k) .

5.2 Estrutura e similaridades no espaço de parâmetros

Uma análise considerando regiões extensas do espaço de parâmetros de equações diferenciais não-lineares pode apresentar diversos tipos de padrões regulares de bifurcações, recorrências e repetições. Muitos autores têm mostrado ou investigado características relacionadas a padrões de bifurcações repetidos no espaço de parâmetros do oscilador de Duffing [12, 121, 122, 123, 124, 125, 126] ou outros osciladores periodicamente forçados [13, 127, 128]. Tais estudos foram realizados principalmente seguindo-se o contorno de algumas curvas de bifurcações de soluções de períodos mais baixos, que tipicamente precedem as regiões caóticas. Entretanto não há nenhuma investigação detalhada incluindo as regiões caóticas presentes nesse modelo e da estrutura de bifurcações que existe encaixada nessas regiões. Alguns poucos trabalhos apenas denotaram de maneira simples alguns contornos mais externos das regiões caóticas [12]. Uma metodologia apropriada para a análise das regiões caóticas foi realizada por Gallas [33] que identificou seqüências de regiões caóticas no espaço de parâmetros do oscilador de Duffing pelo cálculo direto do maior expoente de Lyapunov. Nossos resultados corroboram muitos desses resultados anteriores e adicionalmente mostramos uma detalhada localização e estrutura interna das regiões caóticas e como elas recorrem no espaço de parâmetros quando a amplitude da força externa aumenta.

A figura 5.1 mostra evidências de uma repetição aproximada notável de toda a estrutura do espaço de parâmetros (B, k) da equação 5.2 em função do coeficiente de amortecimento k e amplitude da força externa B , para valores de parâmetros no intervalo $B = [0, 925]$ e $k = [0, 1]$. Para uma visualização melhor, e também uma comparação mais fácil, dividimos o plano de parâmetros em 3 partes dadas pelas figuras 5.1(a)-5.1(c). Note as diferenças entre as escalas da amplitude da força externa B em cada parte dessa figura.

As figuras 5.1(a)-5.1(c), bem como as demais figuras que denotam o espaço de parâmetros computados para o sistema de equações 5.3 neste capítulo, foram obtidas integrando-se o sistema de equações 5.3 utilizando-se o método de Runge Kutta de quarta ordem com passo fixo $h = 0.01$ e estimando-se numericamente os expoentes de Lyapunov. O espaço de parâmetros foi varrido horizontalmente da esquerda para a direita discretizado em

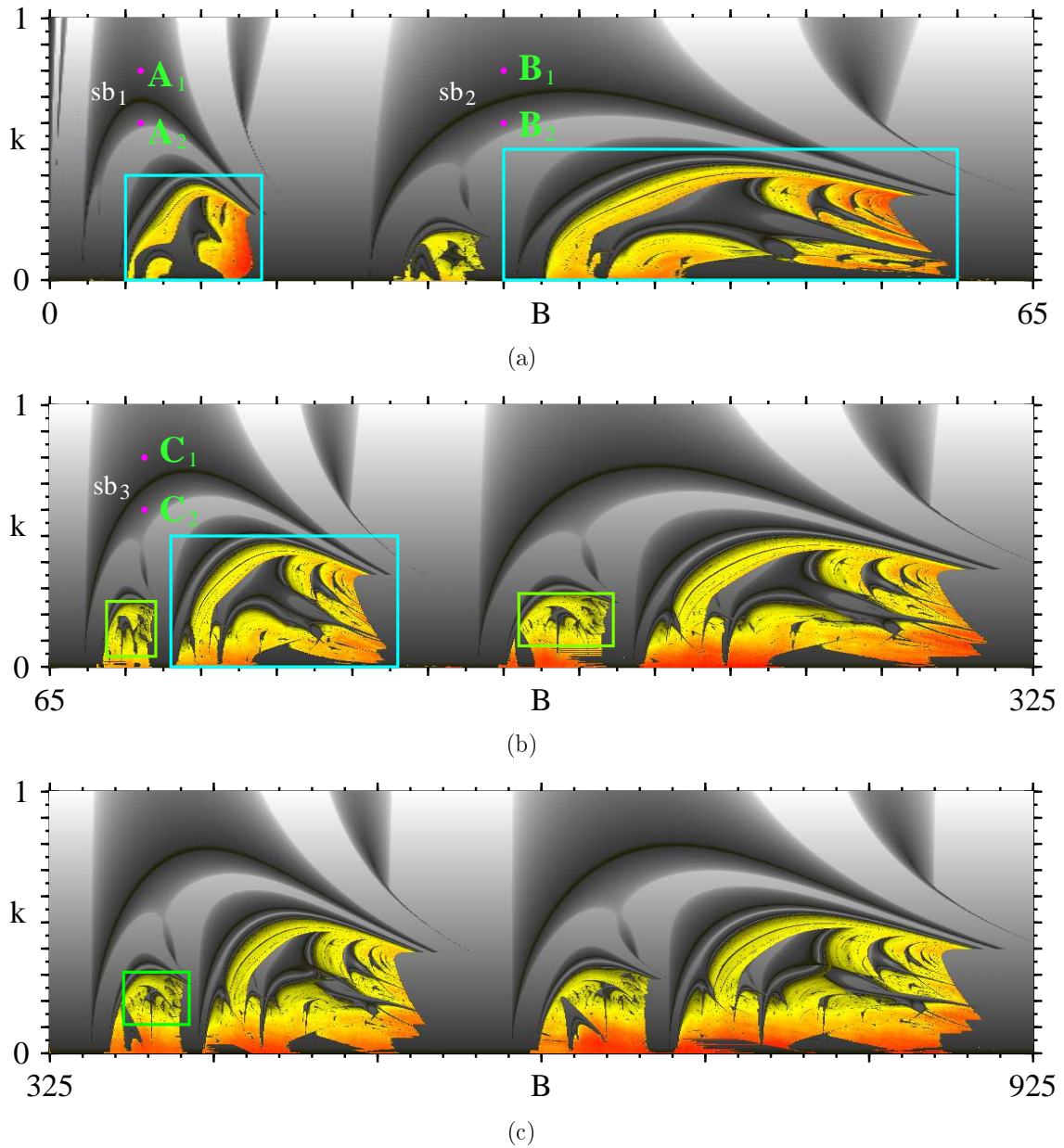


Figura 5.1: Seqüências de regiões caóticas que recorrem quando a amplitude da força externa B aumenta. As cores denotam as fases caóticas (expoentes positivos) enquanto escalas de cinza denotam oscilações periódicas (expoentes negativos). Vermelho denota expoentes com maior magnitude. Curvas pretas denotam locais de expoentes zero, indicando regiões onde bifurcações ocorrem. Os “labels” sb_1 , sb_2 e sb_3 marcam as três primeiras curvas onde bifurcações de quebra de simetria ocorrem. Os pontos A_1 , B_1 , ..., C_2 são discutidos no texto. As caixas em destaque são magnificadas e discutidas na próxima seção.

uma malha de 600x600 valores de parâmetros. Para cada nova linha horizontal iniciou-se sempre da condição inicial $(x, \dot{x}) \equiv (0.5, 0.1)$ escolhida arbitrariamente. Então aumentamos B , partindo desse valor inicial, e seguimos o atrator, ou seja, iniciamos cada cálculo adicional para o cálculo do expoente de Lyapunov do valor (x, \dot{x}) que estava na memória do computador quando a computação do valor anterior de B foi finalizada. Finalmente codificamos os valores dos expoentes computados conforme a metodologia usual descrita na seção 1.3. Embora com essa metodologia não temos informações a respeito da multiestabilidade que ocorre em muitas regiões do espaço de parâmetros, ainda assim é possível reconhecer regiões prováveis de ocorrência de multiestabilidade pela observação de certas descontinuidades nas cores das figuras.

A figura 5.1 mostra uma porção extensa do espaço de parâmetros do oscilador de Duffing onde é possível observar uma recorrência aproximada de toda a estrutura do espaço de parâmetros. É possível reconhecer regiões que são aproximadamente cópias isomórficas uma das outras. Tais similaridades incluem não apenas uma repetição de curvas de bifurcações, como é possível identificar observando-se as regiões denotadas pela cor preta (locus do expoente zero), mas também observando-se a recorrência dos padrões em diferentes gradientes de cinza representando os expoentes negativos (soluções periódicas) e as regiões em gradientes de amarelo-vermelho representando os expoentes positivos (soluções caóticas). Note que aqui falamos sempre em recorrência aproximada porque a estrutura de bifurcações e recorrência das fases caóticas não repetem-se exatamente iguais, como podemos inspecionar diretamente na figura 5.1, mas apenas mantém uma similaridade aproximada quando a amplitude da força externa aumenta. De fato, observamos que a similaridade entre regiões do espaço de parâmetros é maior a medida que o parâmetro B aumenta. Isso pode ser diretamente observado inspecionando-se as figuras 5.1(a)-5.1(c) e comparando-se a estrutura das regiões caóticas entre si. Note que, para a primeira região caótica, onde os valores de B são pequenos, o nível de similaridade é bem menor do que para as demais regiões.

De uma maneira geral, a estrutura do espaço de parâmetros que estudamos aqui possui a seguinte organização: para valores maiores do parâmetro k , não mostrados nessa figura,

o espaço de parâmetros é bastante regular formando uma grande região com oscilações periódicas e não contendo regiões caóticas. Isso foi verificado em simulações que realizamos até $k = 5$. Tipicamente, a medida que diminuimos o valor de k podemos entrar em regiões bastante complicadas no espaço de parâmetros contendo diversos tipos de bifurcações, regiões com multiestabilidade, transições para o caos e transições repentinas envolvendo soluções caóticas ou periódicas. Isso depende, evidentemente, da trajetória que seguimos no espaço de parâmetros. Bifurcações encontradas incluem quebra de simetria, dobramentos de período e bifurcações de sela-nó.

Para valores de k pequeno (< 0.1) observamos uma dificuldade muito maior em se seguir as soluções caóticas no espaço de parâmetros. Tais regiões contêm multiestabilidade e uma provável complexidade nas bacias de atração. Isso é deduzido pela inspeção das figuras para valores de k pequeno. Quando seguimos uma linha horizontal nessa região do espaço de parâmetros eventualmente observamos transições repentinas de uma cor denotando expoentes positivos para uma outra cor denotando expoentes negativos. Em geral o “locus” onde ocorrem essas transições não forma uma “curva suave” quando olhamos para o espaço dos dois parâmetros, como tipicamente encontramos para valores maiores de k . Tais transições são devido provavelmente a bacias de atração com uma estrutura muito fina, onde a condição inicial tomada do fim da integração do parâmetro anterior não está dentro da mesma bacia para o novo valor de parâmetro. Nesse caso uma análise mais cuidadosa nessa região deveria ser realizada utilizando-se passos de integração menores e uma resolução maior.

Da mesma maneira que observamos uma organização bastante regular quando olhamos para a estrutura de bifurcações no espaço de parâmetros, observamos grandes regularidades quando olhamos para o espaço de fases em função dos parâmetros de controle, em particular quando a amplitude da força externa aumenta para valores fixos da taxa de amortecimento. Alguns trabalhos anteriores foram dedicados a estudar o comportamento das soluções no espaço de fases do oscilador de Duffing em função do aumento da amplitude da força externa mantendo fixo o valor da frequência de forçamento. Por exemplo, a natureza das soluções da equação 5.2, para valores grandes da amplitude força

externa, foi investigada por Byat-Smith [129], considerando $k = 0.25$ e diversos valores de B próximos a 1000 (usando aqui a nossa notação para os parâmetros). Em um trabalho subsequente, Bya-Smith [130] reportou a natureza da evolução das soluções em função do aumento da amplitude da força externa para o oscilador de Duffing com potencial de poço duplo. Em particular ele mostrou que o sinal evolui de uma forma simples para oscilações mais complicadas, com a criação de sucessivos “loops” no espaço de fases, a medida que a amplitude da força externa cresce. Robinson [131] reportou padrões regulares para a evolução das soluções da equação 5.2, que recorrem sistematicamente quando a amplitude da força externa cresce. Ele reportou dados experimentais gerados por um circuito eletrônico não-linear, simulando a equação 5.2, e considerou grandes amplitudes da força externa. O intervalo de parâmetros acessíveis experimentalmente correspondia a $0 < k < 1$ e $0 < B < 5000$.

A figura 5.2 ilustra soluções no espaço de fases para diferentes pontos no espaço de parâmetros referentes às três primeiras grandes curvas de bifurcações que envolvem as primeiras regiões caóticas. Essas curvas correspondem a bifurcações de quebra de simetria, sendo que as três primeiras curvas estão denotadas pelos labels sb_1 , sb_2 e sb_3 (sb refere-se ao termo em inglês *symmetry-breaking*). Nessa figura podemos observar a evolução das soluções quando aumentamos a força externa, mantendo-se fixa a taxa de amortecimento para regiões acima e abaixo dessas curvas de bifurcações. Os pontos A_1 , B_1 e C_1 estão localizados acima das curvas de bifurcações em uma grande região periódica onde as soluções são simétricas. Os pontos A_2 , B_2 e C_2 estão localizados abaixo das curvas de bifurcações e possuem um par de soluções assimétricas coexistindo. Todas as soluções possuem período 2π , ou seja, o mesmo período da força externa. De fato, como estamos analisando casos em que a frequência externa é fixa, todo ponto no espaço de parâmetros levando a soluções periódicas terá soluções com períodos múltiplos de 2π .

Na figura 5.2(a) mostramos o espaço de fases (x, y) , na linha de cima, a série temporal $x(t)$, na linha do meio e a série temporal $y(t)$, na linha de baixo. São mostrados três períodos de oscilação para as duas séries temporais. Os pontos A_1 , B_1 e C_1 foram obtidos para um valor fixo da taxa de amortecimento onde os valores de parâmetros são dados

na descrição da figura 5.2(a). Observamos que a medida que aumentamos o valor da amplitude externa as soluções ficam mais complexas. Isso pode ser diretamente observado no espaço de fases (x, y) da figura 5.2(a), onde novos “loops” são gerados conforme a amplitude da força externa cresce. Nas séries temporais esse fenômeno é observado como a criação de novos picos ou máximos locais em cada período de oscilação conforme podemos diretamente observar nas séries de $x(t)$ e $y(t)$ nessa figura. No caso do ponto A_1 , $x(t)$ contém 1 máximo local e $y(t)$ contém 3 máximos locais em um período de oscilação. Para os casos dos pontos B_1 e C_1 , $x(t)$ contém 3 e 5 máximos locais enquanto $y(t)$ contém 5 e 7 máximos locais, respectivamente. Ou seja, observamos um incremento de 2 máximos locais a medida que aumentamos a força externa. Na figura 5.2(b) temos o mesmo tipo de situação que exemplificamos na figura 5.2(a), exceto que agora estamos numa região do espaço de parâmetros em que as órbitas da figura 5.2(a) sofreram uma bifurcação de quebra de simetria. Então temos duas órbitas assimétricas coexistindo e selecionadas dependendo da condição inicial. Na linha de cima da figura 5.2(b) as duas órbitas coexistentes no espaço de fases (x, y) estão representadas por cores diferentes, enquanto nas linhas do meio e de baixo, representando as séries temporais $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, apenas uma das duas soluções coexistentes são mostradas.

Um quadro análogo a este que reportamos aqui, porém no espaço de parâmetros (B, ω) , é discutido por Schmidt e Eilenberger [125] onde é apresentado um diagrama de curvas de bifurcações muito simples no espaço de parâmetros do oscilador de Duffing mostrando um padrão regular de repetições de curvas de bifurcações. Os padrões similares consistem em “tiras” no espaço de parâmetros, associadas com ressonâncias, onde cada tira contém uma estrutura de curvas de bifurcações. Apenas as curvas de bifurcações mais externas, que precedem as regiões caóticas, foram delimitadas. O quadro global é apresentado como ressonâncias $n=1, n=2, n=3, \dots$ que ocorrem sucessivamente quando a amplitude da força externa aumenta. Cada ressonância é caracterizada por um número fixo n de oscilações internas que ocorrem durante um período de forçamento.

Na próxima seção discutimos a maior novidade deste capítulo que são as recorrências das fases caóticas e da estrutura de bifurcações que existe encaixada nessas regiões.

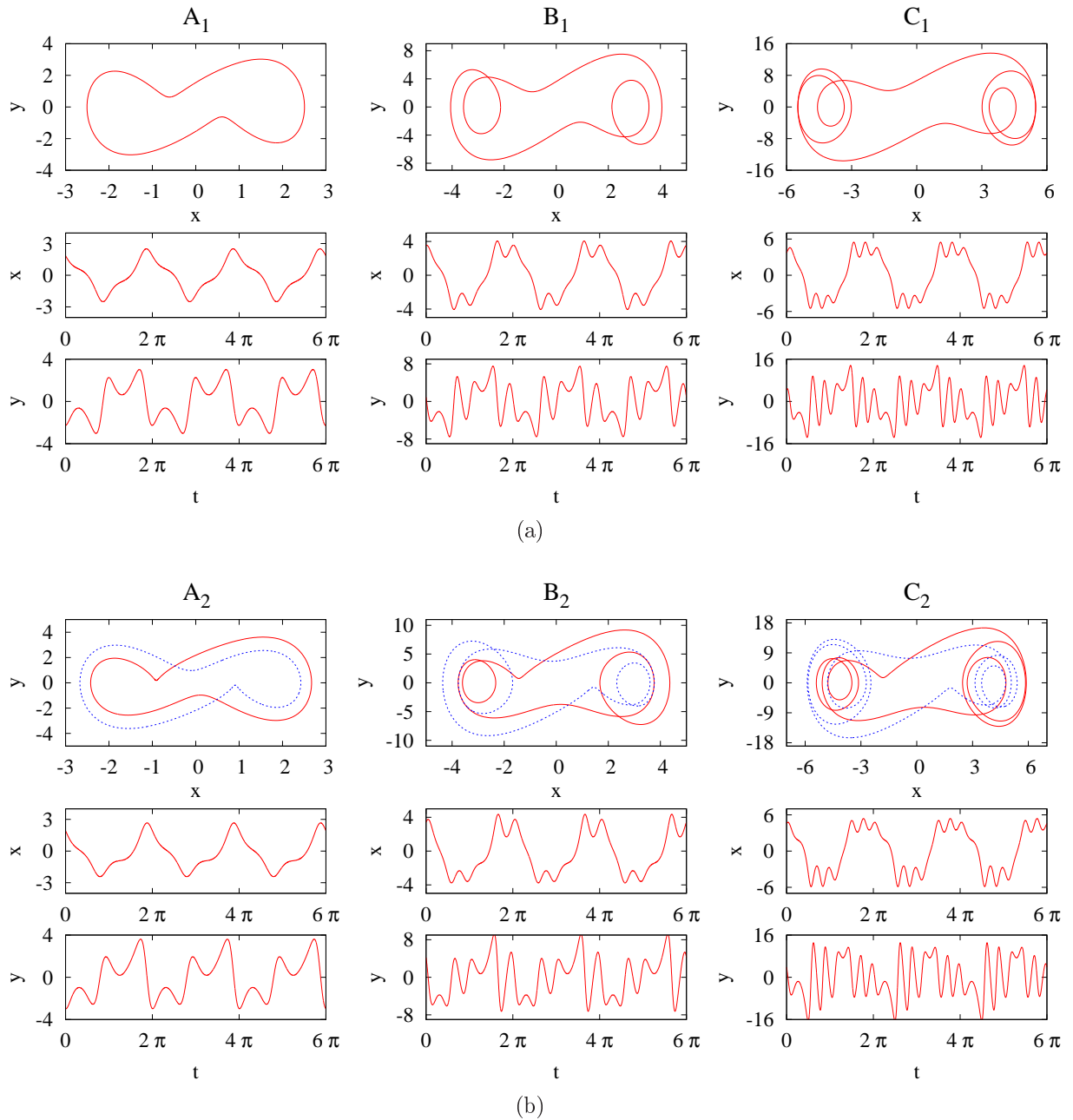


Figura 5.2: (a) Soluções no espaço de fases para os pontos A_1 - C_1 indicados na figura 5.1 ilustrando uma região onde ocorrem soluções simétricas; Linha de cima: Retrato de fases (x, y) ; Linha do meio: série temporal para $x(t)$; Linha de baixo: série temporal para $y(t)$. Os valores de parâmetros (B, K) são: $A_1 = (6, 0.8)$, $B_1 = (30, 0.8)$, $C_1 = (90, 0.8)$. (b) Soluções no espaço de fases para os pontos A_2 - C_2 ilustrando regiões no espaço de parâmetros após a quebra de simetria. Linha de cima: Retrato de fases (x, y) ; Linha do meio: série temporal para $x(t)$; Linha de baixo: série temporal para $y(t)$. Os valores de parâmetros (B, K) são: $A_2 = (6, 0.6)$, $B_2 = (30, 0.6)$, $C_2 = (90, 0.6)$.

5.3 Recorrências nas fases caóticas

Na seção anterior descrevemos as principais características associadas com a estrutura e recorrência de regiões no espaço de parâmetros através de uma vista ampla do espaço de parâmetros do oscilador de Duffing. Nesta seção apresentamos em grande detalhe a estrutura interna das regiões caóticas e como elas recorrem no espaço de parâmetros a medida que a força externa aumenta.

Na figura 5.1 já observamos que existe uma seqüência de regiões caóticas a medida que a amplitude da força externa cresce. Exceto para a região caótica sob a curva sb_1 , onde é possível observar apenas uma região caótica, podemos identificar duas regiões caóticas sob cada uma das demais curvas de bifurcações sb_2, sb_3 , e assim sucessivamente para as outras curvas que se seguem quando a amplitude da força externa aumenta. De uma maneira geral, a estrutura de bifurcações associadas com regiões periódicas que existem encaixadas nas fases caóticas do oscilador de Duffing é bastante complicada.

Na figura 5.3, na linha de cima, mostramos magnificações das três regiões caóticas que aparecem em destaque nas caixas azuis da figura 5.1. Em meio as fases caóticas é possível identificar uma grande região com período predominante $3 \times 2\pi$ e uma forma bastante irregular (a grande região cinza aproximadamente no meio da região caótica). Além dessa, muitas outras estruturas de períodos maiores existem encaixadas nessas fases caóticas. É possível observar diversas similaridades quando comparamos as figuras entre si, principalmente a medida que a amplitude do forçamento cresce. Tais similaridades ocorrem de fato em grandes níveis de detalhes, como é evidenciado pelas magnificações mostradas na linha de baixo, referentes às caixas em destaque na linha de cima. Aqui é possível observar diversos tipos de estruturas auto-similares encaixadas nas fases caóticas. Essas estruturas estão organizadas e alinhadas no espaço de parâmetros. Os pontos verdes marcam diversas estruturas que foram localizadas no espaço de parâmetros, sendo que muitas dessas estruturas são muito pequenas para observar-se na escala da figura. Nesse caso colocamos apenas o ponto que marca sua localização. Os números correspondem ao período da oscilação em múltiplos de 2π . É possível reconhecer uma recorrência quase isomórfica entre os domínios periódicos quando comparamos as três figuras entre si,

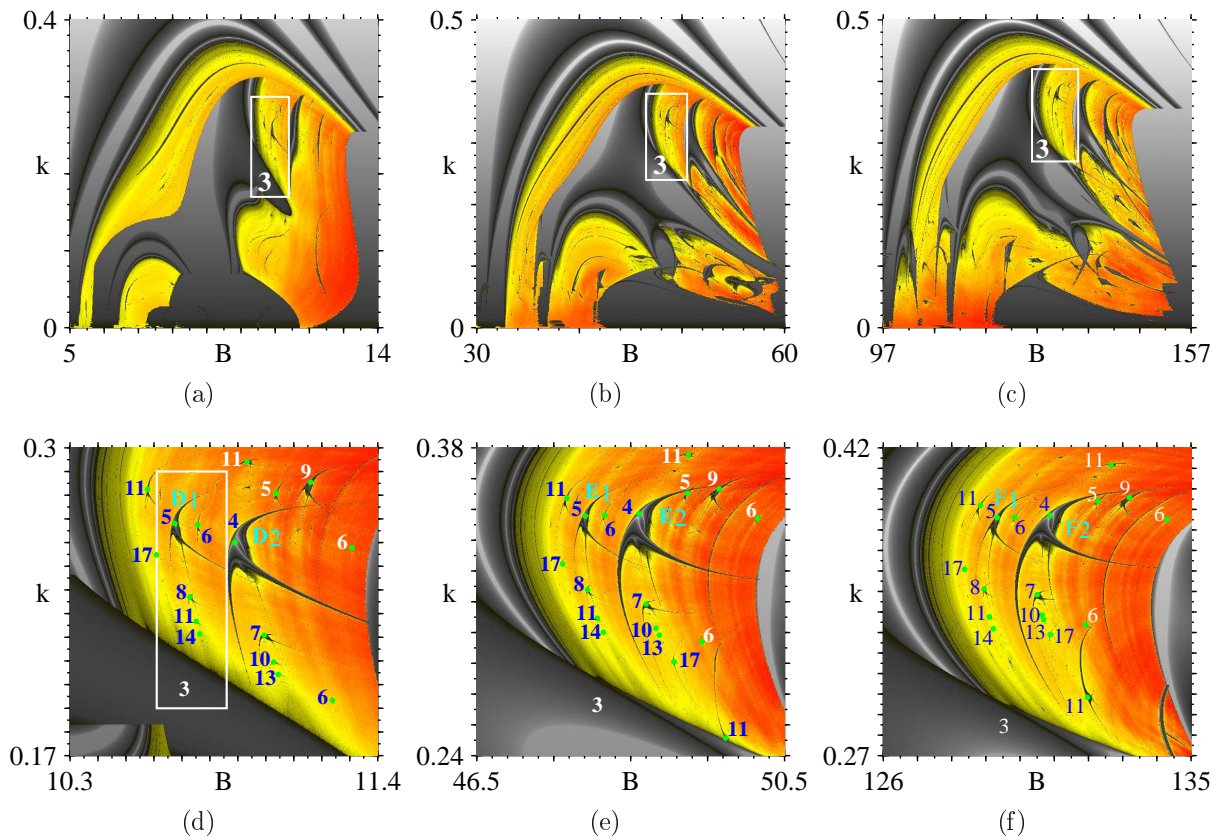


Figura 5.3: Detalhes das fases caóticas contidas dentro das caixas maiores em azul na figura 5.1 mostrando similaridades estruturais quando a amplitude da força externa B cresce. A linha de baixo mostra vistas magnificadas das caixas mostradas na linha de cima. As ilhas escuras são ilhas de periodicidade. Os números referem-se ao período das soluções em múltiplos de 2π , o período da força externa. Cascatas de adição de período distintas convergem na direção da grande região em tons de cinza contendo período 3, no canto inferior esquerdo. A linha de baixo ilustra a grande similaridade de toda a estrutura quando B cresce. Note as diferenças nas escalas.

ilustrando o grande nível de similaridade que existe quando a amplitude da força cresce.

A figura 5.4 mostra como são as recorrências das soluções periódicas no espaço de fases do oscilador de Duffing, referentes às estruturas periódicas encaixadas nas fases caóticas. Da mesma maneira que ocorria no caso anterior mostrado para as regiões que precediam as regiões caóticas, aqui observamos um incremento no número de máximos locais a medida que aumentamos a amplitude do forçamento. A figura 5.4(a) mostra as soluções no espaço de fases para as três ilhas de período $4 \times 2\pi$ referentes aos pontos D_1 , E_1 e F_1 mostradas na figura 5.3. Na linha de cima é mostrado o retrato de fases (x, y) enquanto na linha do

meio e de baixo são mostradas as séries temporais para $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Na série temporal de $x(t)$ o número de máximos locais são 11, 18 e 20 para os pontos D_1 , E_1 e F_1 , respectivamente. Para $y(t)$ temos 12, 20 e 28 máximos locais, respectivamente. Aqui observamos que todos os incrementos são de 8 máximos, exceto o primeiro caso que temos um incremento de 11 para 18 máximos. A figura 5.4(b) mostra as soluções para as ilhas de período $5 \times 2\pi$ denotadas pelos pontos D_2 , E_2 e F_2 na figura 5.3. Na linha de cima é mostrado o retrato de fases (x, y) enquanto na linha do meio e de baixo são mostradas as séries temporais para $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. Na série temporal de $x(t)$ o número de máximos locais são 14, 23 e 32 para os pontos D_2 , E_2 e F_2 , respectivamente. Para $y(t)$ temos 15, 25 e 35 máximos locais, respectivamente. Aqui observamos que os incrementos são de 9 máximos para as séries temporais de $x(t)$ e 10 máximos para as séries temporais de $y(t)$. Note que na figura 5.4(b) não está mostrada a outra solução que existe devido à simetria do problema.

Como observamos ainda na figura 5.3, existe uma diversidade de períodos maiores. Uma característica que ocorre nas fases caóticas são seqüências de ilhas com adição de período. Movendo-se do centro das ilhas de período 4 (identificadas pelos labels D_1 , E_1 e F_1) e período 5 (identificadas pelos labels D_2 , E_2 e F_2) é possível reconhecer duas seqüências de adição de período quando diminuimos k e aumentamos B :

$$4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow \dots \rightarrow 3,$$

$$5 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 14 \rightarrow \dots \rightarrow 3,$$

Podemos observar que o incremento do período é o mesmo valor do período da grande região periódica para qual a seqüência está acumulando, neste caso uma região de período 3. Observamos então uma situação análoga a que analisamos no capítulo 3.

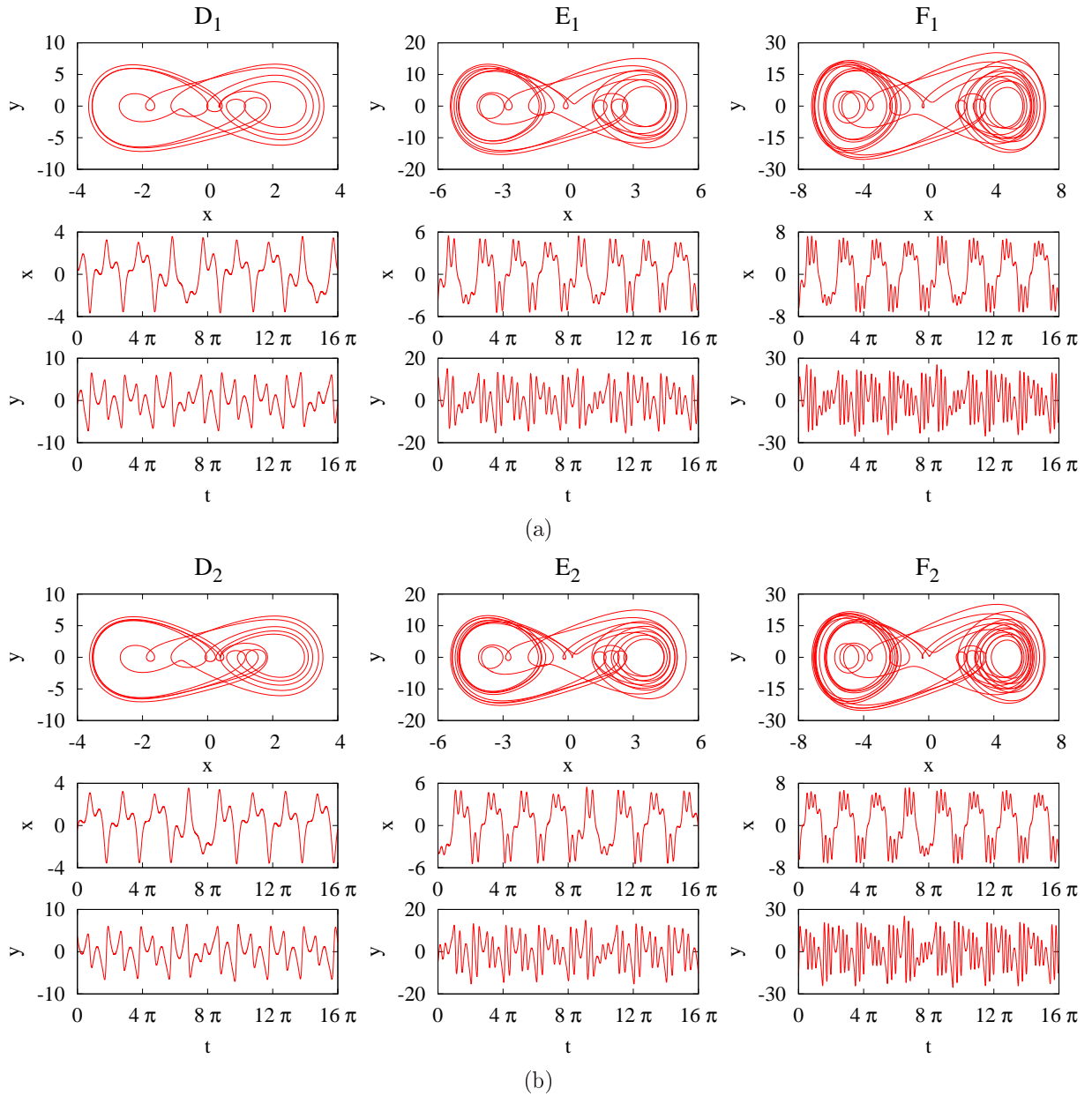


Figura 5.4: (a) Soluções no espaço de fases para os pontos D_1 , E_1 e F_1 da figura 5.3 correspondendo a três ilhas de período $4 \times 2\pi$. Linha de cima: Retrato de fases (x, y) ; Linha do meio: série temporal para $x(t)$; Linha de baixo: série temporal para $y(t)$. Os valores de parâmetros (B, K) são: $D_1 = (10.89, 0.26)$, $E_1 = (10.675, K = 0.268)$, $F_1 = (48.61, 0.35)$. (b) Espaço de fases para os pontos D_2 , E_2 e F_2 ilustrando as soluções periódicas das ilhas de período $5 \times 2\pi$. Linha de cima: Retrato de fases (x, y) ; Linha do meio: série temporal para $x(t)$; Linha de baixo: série temporal para $y(t)$. Os valores de parâmetros (B, K) são: $A_2 = (10.675, 0.268)$, $B_2 = (47.91, 0.349)$, $C_2 = (129.33, 0.386)$. Note que para cada solução existe uma outra solução de acordo com a simetria das euçções 5.3 que não estão mostradas aqui.

A figura 5.5 mostra uma magnificação da caixa em destaque na figura 5.3d, ilustrando a seqüência de adição de período iniciada pela ilha de período 5. Com exceção dos primeiros poucos períodos, todos os restantes aparecem perfeitamente alinhados em uma direção específica do espaço de parâmetros. Para a seqüência mostrada aqui essa direção é bem aproximada pela reta:

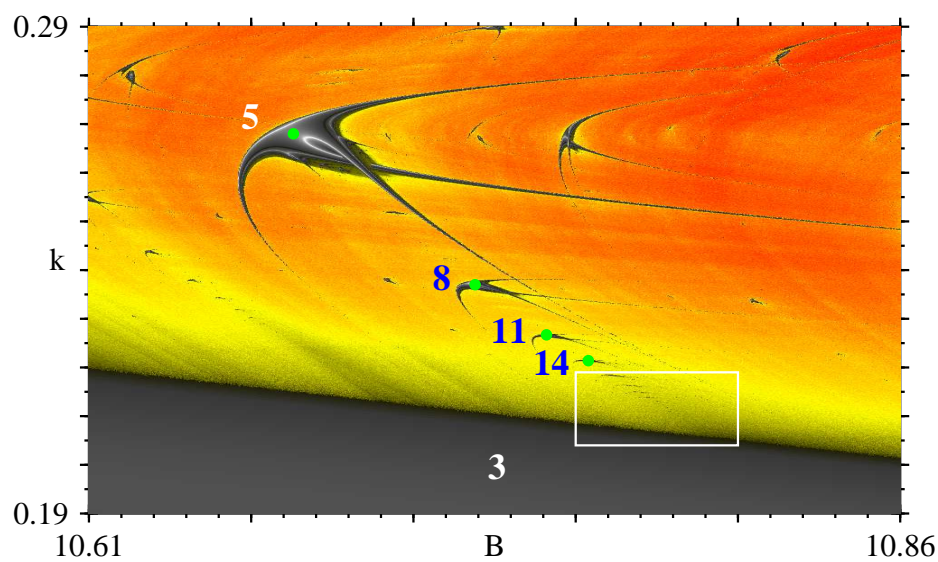
$$k = -0.3972 B + 4.4966.$$

Na figura 5.5b, a fronteira entre a fase caótica e a região de período 3 é dada aproximadamente pela reta:

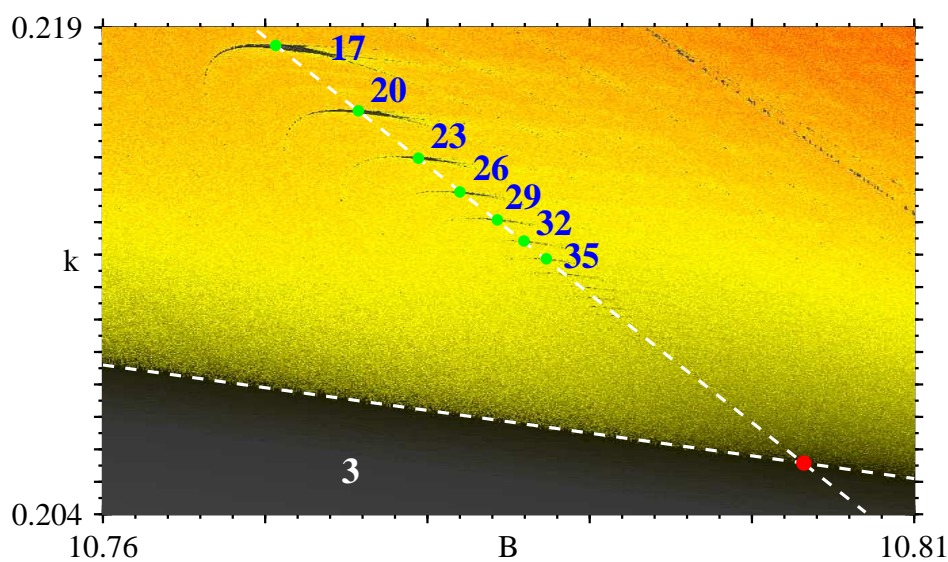
$$k = -0.0700 B + 0.9618.$$

Essas linhas se intersectam em $(B, k) \simeq (10.803, 0.2056)$, a localização aproximada do ponto de acumulação da cascata de adição de período. Esse ponto é indicado pelo ponto vermelho no canto inferior direito da figura 5.5b.

A figura 5.6 mostra magnificações de uma outra seqüência de regiões caóticas destacadas pelas caixas menores mostradas na figura 5.1. Essa seqüência ilustra quão complicado pode ser o conjunto de bifurcações encaixado nas fases caóticas, em fluxos vetoriais. Diversas regiões periódicas interconectadas, com formas extravagantes e regiões com multiestabilidade caracterizam essas fases caóticas. Aqui nessa região podemos observar a dificuldade de se falar em *ordenamento de janelas periódicas* quando providenciamos cortes em direções específicas do espaço de parâmetros através da análise de diagramas de bifurcações dependentes de um parâmetro. Porém, mesmo nessa região bastante complexa do espaço de parâmetros, é possível reconhecer uma similaridade estrutural e uma recorrência aproximada de todo o conjunto de bifurcações que existe encaixado nas fases caóticas quando a amplitude da força externa cresce.

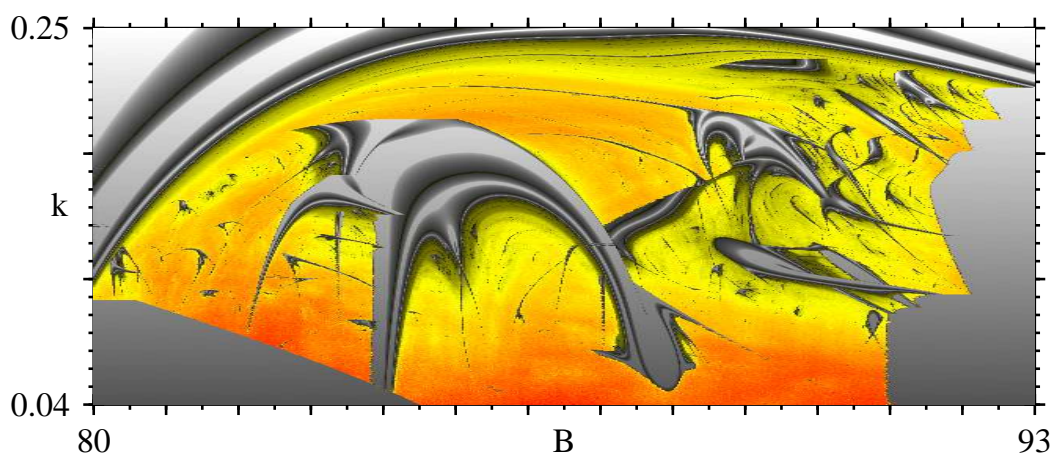


(a)

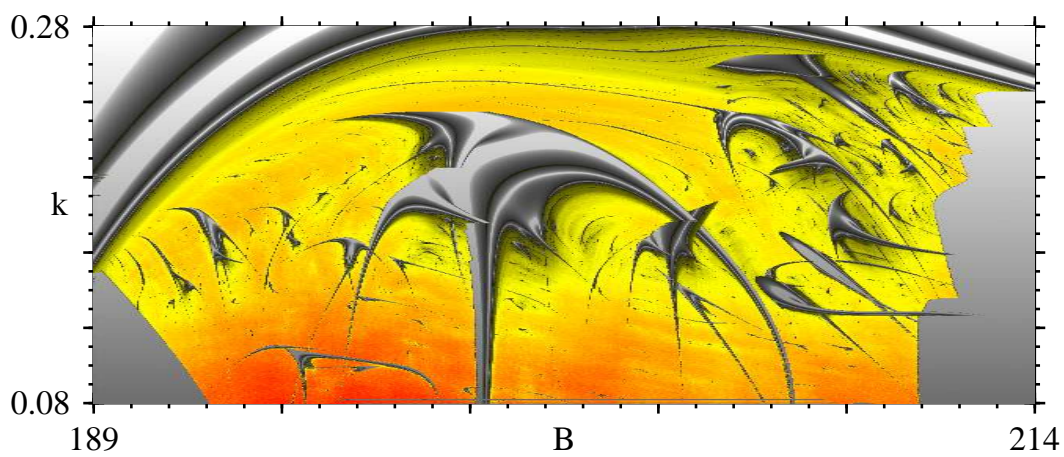


(b)

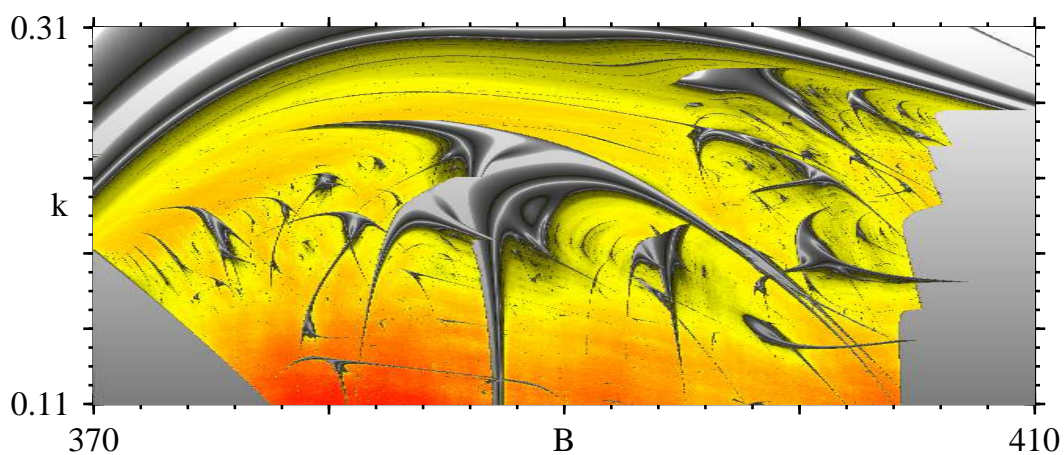
Figura 5.5: (Color online) (a) Magnificação do horizonte de acumulação visto nas figuras 5.3(a) e 5.3(d). Números denotam os períodos em múltiplos de 2π , o período da força externa. (b) Magnificação da caixa em (a). A cascata de adição de período indicada pelos pontos verdes acumula ao longo da linha reta pontilhada para o ponto vermelho do horizonte de acumulação, fronteira entre expoentes de Lyapunov positivo e negativo.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: (Color online) Magnificação das caixas verdes da figura 5.1 evidenciando um conjunto de bifurcações bastante complexo encaixado nas fases caóticas. Aqui também observamos uma similaridade estrutural aproximada quando B cresce. A estrutura interna dessa seqüência é bem distinta da seqüência mostrada na figura 5.3.

Capítulo 6

Considerações Finais

6.1 Conclusões

Neste trabalho analisamos o espaço de parâmetros de alguns modelos físicos dissipativos descritos por conjuntos de equações diferenciais não-lineares de baixa ordem. Investigamos em maiores detalhes um laser de CO_2 com perdas moduladas, um laser de semiconductor com injeção óptica, um circuito eletrônico simétrico e o oscilador de Duffing com amortecimento e forçamento externo.

Através da computação de diagramas de fase baseados no espectro de expoentes focamos a investigação em regiões do espaço de parâmetros com alta complexidade dinâmica, contendo as fases caóticas e regiões de períodos altos, e obtivemos uma descrição que é muito difícil de se obter com os usuais métodos de continuação numérica. Com a metodologia que desenvolvemos, mostramos que é possível extrair muitas informações referentes à estrutura de bifurcações que existe no espaço de parâmetros de equações diferenciais, em especial no interior das regiões caóticas.

De uma maneira geral constatamos que as regiões caóticas no espaço de parâmetros de equações diferenciais contém estruturas de estabilidade bastante complexas encaixadas, com diversas regiões de multiestabilidade e regiões periódicas interconectadas. Entretanto, tais regiões podem estar organizadas de uma maneira bastante regular, alinhadas em direções específicas no espaço de parâmetros, onde a adição de período toma um papel

fundamental, dando origem a diversas “famílias” de órbitas periódicas.

Nas investigações do laser de CO_2 mostramos a existência de infinitas estruturas periódicas auto-similares encaixadas nas regiões caóticas e alinhadas em direções específicas no espaço de parâmetros em um sistema dinâmico de tempo contínuo. Mostramos que o ordenamento ao longo de direções específicas no espaço de parâmetros é exatamente o mesmo ordenamento encontrado em um sistema de tempo discreto (mapa de Hénon).

No estudo de um laser de semicondutor com injeção óptica, identificamos acumulações de estruturas periódicas auto-similares no espaço de dois parâmetros encaixadas nas fases caóticas. As seqüências de regiões periódicas acumulam em certas fronteiras no espaço de parâmetros, as quais denominamos horizonte de acumulações, seguindo rotas de adição de período. Mostramos que o número de máximos relativos contidos em uma oscilação periódica das séries temporais para parâmetros dentro das estruturas auto-similares pode depender da variável que estamos considerando. Mostramos ainda que o fenômeno de acumulações de estruturas periódicas ocorre no espaço de parâmetros de diversos modelos de equações diferenciais ordinárias não-lineares (ver apêndice A).

Na investigação do modelo de um circuito eletrônico possuindo uma simetria com relação à origem, mostramos que o espaço de parâmetros contém infinitas espirais auto-similares encaixadas nas fases caóticas, exibindo alternadamente oscilações periódicas simétricas e assimétricas. O número de máximos locais de cada variável contidos em um período de oscilação do sistema varia de uma maneira regular ao longo das espirais e depende da variável que estamos considerando. O incremento dos máximos não ocorre na mesma posição do espaço de parâmetros. Mostramos ainda uma estrutura de bifurcação auto-similar, do tipo camarão, com quebra de simetria e identificamos uma seqüência de adição de período em sua estrutura interna.

Na investigação do espaço de parâmetros do oscilador de Duffing, mostramos uma recorrência aproximada de toda a estrutura de bifurcações que existe encaixada nas fases caóticas deste sistema. Mostramos também o quão complicada pode ser a estrutura de bifurcações encaixadas nas fases caóticas em sistemas de equações diferenciais.

6.2 Perspectivas

Nesta tese mostramos diversas organizações regulares no espaço de parâmetros dos sistemas investigados, formadas basicamente por seqüências de adição de período, encaixadas na região caótica, ao longo de direções específicas do espaço de parâmetros. Enquanto identificamos diversas seqüências principais de adição de período, seria interessante investigar o ordenamento completo das órbitas periódicas, ou seja, como são as seqüências para os períodos maiores que também existem encaixadas nas regiões caóticas.

Uma questão importante para investigar seria relacionar os resultados obtidos aqui com os fenômenos homoclínicos, ou seja, como as famílias de órbitas periódicas estão associadas ou relacionam-se com órbitas homoclínicas presente nos sistemas.

Um outro ponto interessante para abordar diz respeito a medidas quantitativas que pode-se realizar, tendo em vista as diversas organizações regulares de estruturas periódicas que reportamos no espaço de parâmetros dos sistemas estudados. Neste sentido seria interessante investigar uma série de propriedades métricas para diferentes modelos de equações diferenciais e fazer análises comparativas com modelos de tempo discreto, onde cálculos mais precisos podem ser obtidos.

Uma continuação natural deste trabalho é estender a análise dos diagramas de fase para o espaço tridimensional. Com uma conveniente plotagem é possível obter diagramas que mostrem a estrutura do espaço de parâmetros em três dimensões, possibilitando assim a investigação de fenômenos de codimensão maior. Outro ponto interessante para explorar futuramente é medir outras grandezas em porções extensas do espaço de parâmetros, como a periodicidade das séries temporais e o número de máximos locais das respectivas variáveis. Deste modo teremos um entendimento melhor de como as soluções das equações variam em função dos parâmetros. Diversos cálculos preliminares já foram obtidos nesta direção.

Do ponto de vista experimental, este trabalho motiva fortemente o interesse pela observação de diversas regularidades reportadas aqui. Muitas das regularidades que mostramos aqui ainda não foram comprovadas experimentalmente. As regularidades que mostramos são obtidas pela variação de dois parâmetros do sistema, enquanto a maioria das inves-

tigações experimentais são realizadas pela variação de um parâmetro somente. De um modo mais geral, mapeamentos da dinâmica através de grandes porções do espaço de parâmetros, incluindo regiões caóticas, é um desafio que poderia colocar em teste alguns dos modelos teóricos discutidos aqui.

Seria interessante investigar a conduta dos modelos teóricos quando adicionamos ruídos nos sistemas. Dessa maneira poderíamos caracterizar a robustez dos fenômenos que reportamos dentro das regiões caóticas na presença do ruído que é inerente a qualquer trabalho experimental.

Com relação a aplicações, ressaltamos ao longo dos últimos quinze anos têm havido grandes esforços no sentido de se utilizar sinais caóticos para aplicações baseado no fenômeno de sincronização caótica. O uso de ondas portadoras caóticas para transmitir ou codificar informações é um exemplo disso e muitos avanços foram obtidos em lasers [79, 80]. Assim, a análise de diagramas de fase para os modelos teóricos desses sistemas pode ser útil para compreendermos a estrutura das órbitas periódicas encaixadas dentro da região caótica e também para avaliar o impacto que estas estruturas periódicas poderiam ocasionar nesse tipo de aplicação.

Apêndice A

Acumulações em outros sistemas

Aqui neste apêndice mostramos que o fenômeno de acumulações de estruturas periódicas no espaço de dois parâmetros ocorre genericamente em muitos outros sistemas dinâmicos, de tempo contínuo ou tempo discreto. Na seção A.1 apresentamos diagramas de fase para uma série de sistemas físicos familiares descritos por equações diferenciais ordinárias. Todos esses sistemas contém uma complexa estrutura de órbitas periódicas encaixadas na fase caótica, com diversas acumulações de estruturas auto-similares. Os principais resultados desta seção foram baseados na publicação [103]. Na seção A.2 mostramos o espaço de parâmetros do mapa quártico e identificamos uma seqüência de acumulação com adição de período.

A.1 Sistemas de tempo contínuo

A figura A.1 mostra diagramas de fase para seis modelos físicos de tempo contínuo que investigamos. Os sistemas que investigamos foram um modelo de um circuito eletrônico autônomo, um modelo de uma reação química autônoma, um modelo químico periodicamente forçado, um laser de CO₂ com realimentação, o modelo de Rössler e o modelo de circulação atmosférica de Lorenz-84. As equações e os valores de parâmetros utilizados são descritos em cada subseção, a seguir.

A.1.1 Circuito eletrônico autônomo

Aqui investigamos uma modificação do circuito original de Van der Pol, proposto originalmente por Shinriki *et al.* [133]. Esse sistema consiste em um circuito eletrônico autônomo envolvendo um circuito ressonante e duas condutâncias não-lineares, uma positiva e outra negativa. Freire *et al.* [134] mostrou que esse circuito possui uma rica variedade de condutas dinâmicas. O circuito é descrito pelas equações:

$$C_0 \dot{x} = (a_1 - G_1)x - a_3x^3 + b_1(y - x) + b_3(y - x)^3, \quad (\text{A.1a})$$

$$C \dot{y} = -G_2y - z - b_1(y - x) - b_3(y - x)^3, \quad (\text{A.1b})$$

$$L \dot{z} = y, \quad (\text{A.1c})$$

onde os parâmetros de bifurcações mostrados na figura são $\mu = G_1 + b_1 - a_1$ and $\delta = G_2 + b_1$. Para as simulações das equações A.1a, consideramos os mesmos parâmetros usados por Freire *et al.* [134]: $C_0 = 4.7\text{nF}$, $C = 100\text{nF}$, $L = 110\text{mH}$, $a_1/\omega C = 0.1$, $a_3/\omega C = 6 \times 10^{-4}$, $b_1/\omega C = 0.016$ and $b_3/\omega C = 0.05$.

A figura A.1(a) apresenta o diagrama de fase em função dos parâmetros de bifurcação μ e δ , mostrando uma porção do espaço de parâmetros onde ocorre uma acumulação de estruturas auto-similares.

A.1.2 Osciladores químicos

Aqui investigamos dois modelos químicos. O primeiro modelo que consideramos descreve uma reação que obedece a cinética massa-ação [135]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(dx - fy - z + g) \\ \dot{y} &= y(x + sz - l) \\ \dot{z} &= \frac{1}{\epsilon}(x - az^3 + bz^2 - cz) \end{aligned}$$

Nós utilizamos os seguintes valores de parâmetros usados por Gaspard e Nicolis [16]: $a = 0.5$, $b = 3$, $c = 5$, $\epsilon = 0.01$, $f = 0.5$, $g = 0.6$, $s = 0.3$. Os parâmetros variados nas

simululações foram d e l .

A figura A.1(b) mostra o diagrama de fase computado para esse modelo. Encontramos uma disposição bem regular de estruturas auto-similares acumulando na direção de uma fronteira de acumulação.

O outro modelo que investigamos é um oscilador químico forçado periodicamente estudado por Vance e Ross [136] e Hou e Xin [137]. As equações que descrevem o modelo são:

$$\dot{x} = 1 - x - xDE(y) + p(t)(1 - x), \quad (\text{A.3a})$$

$$(1 + \epsilon) \dot{y} = -\beta y + BDE(y) - p(t)(y - \gamma), \quad (\text{A.3b})$$

onde

$$E(y) = \exp\left(\frac{y}{1 + \eta y}\right) \quad \text{and} \quad p(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau T_0}\right). \quad (\text{A.4})$$

Aqui, seguindo Vance e Ross [136] e Hou and Xin [137], também consideramos o ponto $P_2 = (j, T_c) = (0.8, 292)$ em que o sistema exhibe auto-oscilações com período $T_0 = 4.1627372$ na ausência do forçamento. Os demais parâmetros são: $\epsilon = 0.65$, $T^* = 885.843j + 11.02T_c/(2.7j + 11.02)$, $\eta = T^*/8827$, $D = 8.2365 \times 10^{10}e^{-1/\eta/j}$, $B = 271.46/(\eta T^*)$, $\beta = 1 + 4.08/j$. Os parâmetros de bifurcação são A e τ . A figura A.1(c) mostra o diagrama de fase computado para esse modelo.

A.1.3 Laser de CO₂ com realimentação

Aqui investigamos o modelo de um laser CO₂ com realimentação, conforme descrito por Pisarchik *et al.* [138]. O modelo é dado por um conjunto de seis equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\dot{x}_1 = k_0 x_1 (x_2 - 1 - k_1 \sin^2 x_6), \quad (\text{A.5a})$$

$$\dot{x}_2 = -\Gamma_1 x_2 - 2k_0 x_1 x_2 + \gamma x_3 + x_4 + P_0, \quad (\text{A.5b})$$

$$\dot{x}_3 = -\Gamma_1 x_3 + x_5 + \gamma x_2 + P_0, \quad (\text{A.5c})$$

$$\dot{x}_4 = -\Gamma_2 x_4 + \gamma x_5 + z x_2 + z P_0, \quad (\text{A.5d})$$

$$\dot{x}_5 = -\Gamma_2 x_5 + z x_3 + \gamma x_4 + z P_0, \quad (\text{A.5e})$$

$$\dot{x}_6 = -\beta x_6 + \beta B_0 - \beta f(x_1), \quad (\text{A.5f})$$

onde $f(x_1) = R x_1 / (1 + \alpha x_1)$ é a função de realimentação.

Nas simulações do sistema de equações A.5a, consideramos os mesmos valores de parâmetros utilizados por Pisarchik *et al.* [138], sendo $\Gamma_1 = 10.0643$, $\Gamma_2 = 1.0643$, $\alpha = 32.8767$, $\beta = 0.4286$, $k_0 = 28.5714$, $k_1 = 4.5556$, e $P_0 = 0.016$.

As integrações numéricas foram realizadas com $h = 0.25$ e foram utilizadas como condições iniciais os seguintes valores: $x_1 = 0.00056865689704$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.02850267447765$, $x_4 = 10.02936951361203$, $x_5 = 10.28515946674542$, $x_6 = 0$.

A figura A.1(d) mostra o diagrama de fase para uma região onde ocorre acumulações de estruturas auto-similares com adição de período.

A.1.4 Modelo de Rössler

Aqui investigamos o modelo introduzido por Rössler [139]:

$$\dot{x} = -y - z, \quad (\text{A.6a})$$

$$\dot{y} = x + ay, \quad (\text{A.6b})$$

$$\dot{z} = b + zx - zc. \quad (\text{A.6c})$$

Nas simulações foi mantido $a = 0.2$ constante, variando-se os parâmetros b e c . A figura A.1(e) mostra o diagrama de fase computado onde ocorre uma acumulação de estruturas auto-similares.

A.1.5 Modelo de Lorenz-84

Aqui investigamos o modelo de circulação atmosférica de baixa ordem de Lorenz-84 [140], dado pelas equações:

$$\dot{x} = -y^2 - z^2 - ax + aF, \quad (\text{A.7a})$$

$$\dot{y} = xy - y - bxz + G, \quad (\text{A.7b})$$

$$\dot{z} = bxy + xz - z. \quad (\text{A.7c})$$

Foram fixados os valores usuais utilizados no estudo desse modelo $a = 0.25$ and $b = 4$, enquanto que F e G foram variados nas simulações. A figura A.1(f) mostra uma seção do espaço de parâmetros desse modelo onde pode-se observar diversas acumulações de estruturas periódicas acumulando para outras estruturas periódicas que existem no interior da região caótica. Diagramas de fase investigando multiestabilidade presente nesse modelo foram reportados na referência [99].

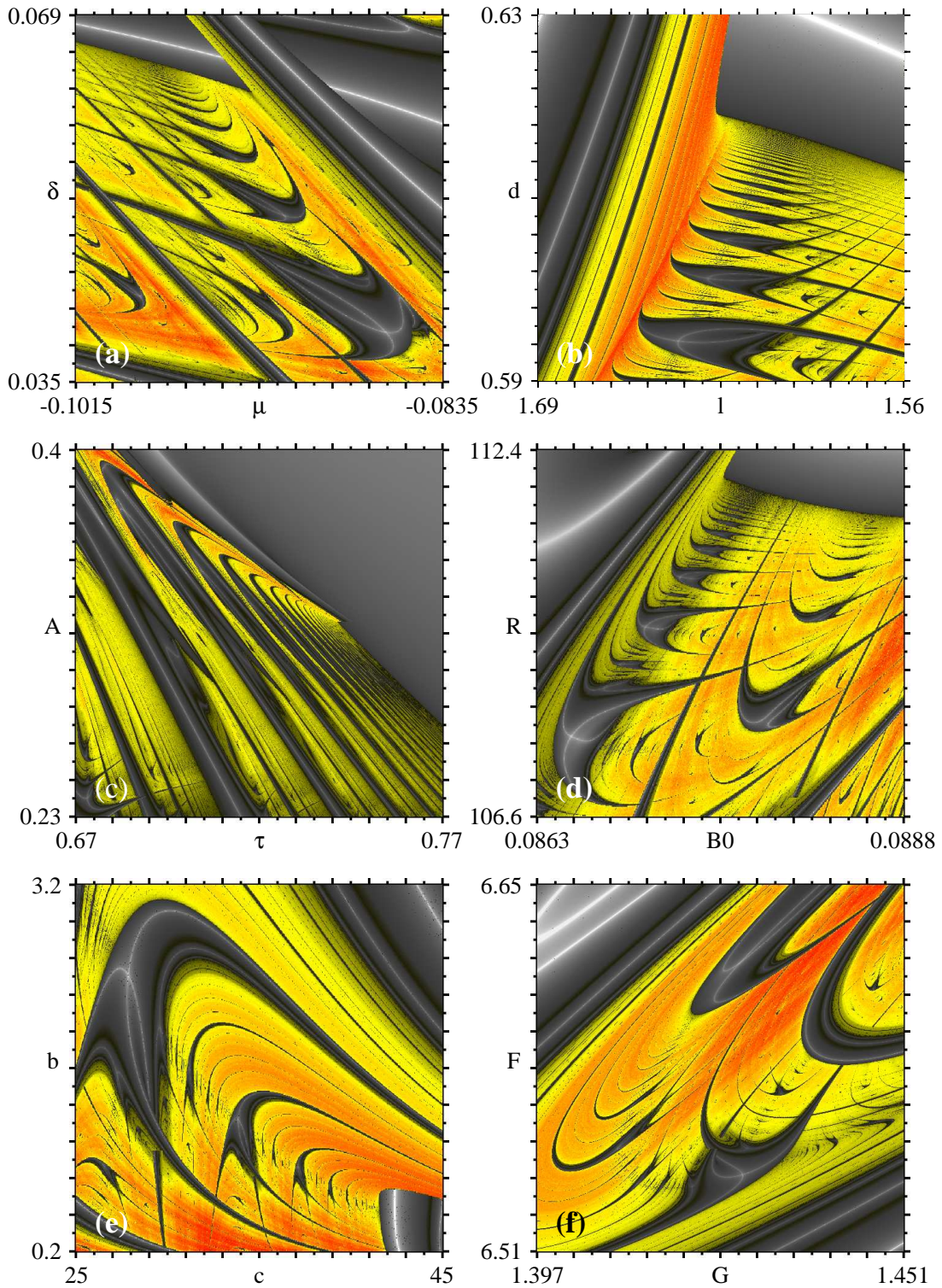


Figura A.1: Acumulações de estruturas periódicas em diagramas de fase de sistemas dinâmicos de tempo contínuo. (a) Circuito eletrônico autônomo. (b) Modelo químico cinético massa-ação. (c) Oscilador químico forçado. (d) Laser de CO_2 com realimentação. (e) Modelo de Rössler. (f) Modelo de circulação atmosférica de Lorenz-84.

A.2 Sistemas de tempo discreto

A.2.1 Mapa quártico

Nesta seção investigamos uma porção do espaço de parâmetros do mapa quártico [32]. Esse sistema é particularmente interessante para se estudar as propriedades das acumulações de estruturas auto-similares e o ordenamento das famílias de órbitas periódicas que existem encaixadas nas fases caóticas. Aqui apresentamos uma seqüência de estruturas auto-similares no espaço de parâmetros seguindo uma rota de adição de período e acumulando para uma região de período 1.

O mapa quártico é um mapa unidimensional dependente de dois parâmetros e é dado pela expressão:

$$x_{t+1} = (a - x_t^2)^2 - b \quad (\text{A.8})$$

A figura A.2 mostra o espaço de parâmetros (a, b) do mapa dado pela expressão A.8. No interior da região caótica existe uma organização complicada de órbitas periódicas encaixadas. O ponto que chamamos atenção aqui é uma seqüência particular de regiões periódicas seguindo uma rota de adição de período. Essa seqüência inicia na região de período 3, denotada pela cor verde na figura A.2(a), e segue uma rota de adição de período com incremento 1. A figura A.2(b) mostra uma magnificação da caixa em destaque na figura A.2(a), onde podemos observar em maiores detalhes a seqüência que está acumulando para uma região de período 1. Os números denotam o período da órbita periódica. Podemos observar que o valor do incremento do período na seqüência é o mesmo valor do período da região para qual as estruturas estão acumulando. Ocorre, portanto, uma situação análoga a que encontramos no caso do laser de semicondutor, no capítulo 3, onde denominamos a fronteira entre a região caótica e periódica de *horizonte de acumulação*. As figuras A.2(c) e A.2(d) apresentam magnificações próximas ao horizonte de acumulação e ilustram uma estrutura muito fina do espaço de parâmetros.

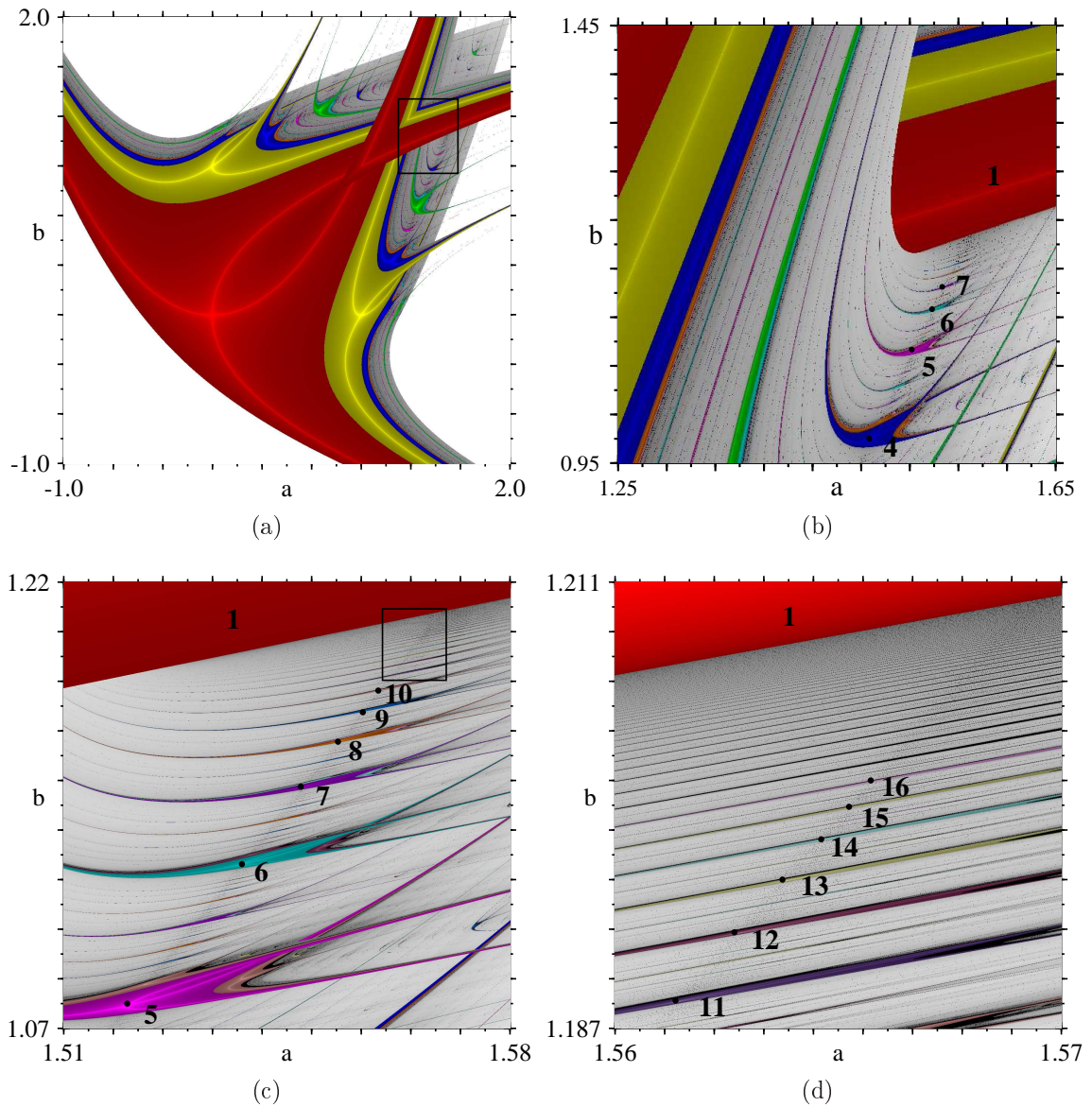


Figura A.2: (a) Vista global do espaço de parâmetros do mapa quártico. As cores denotam diferentes periodicidades. Os oito períodos mais baixos são: vermelho (período 1), amarelo (período 2), verde (período 3), azul (período 4), magenta (período 5), ciano (período 6), roxo (período 7) e laranja (período 8). Regiões caóticas são mostradas em escalas de cinza e o branco denota regiões de divergência. (b) Magnificação da caixa de (a) ilustrando a rota de adição de período. (c) Detalhe da seqüência acumulando em direção à região de período 1 e (d) Magnificação da caixa de (c). Os números denotam o período da órbita.

Apêndice B

Código fonte

Neste apêndice mostramos o código que desenvolvemos e utilizamos na para produzir as figuras dos espaços de parâmetros dos modelos de equações diferenciais que investigamos. Este código implementa a metodologia descrita na seção 1.3. Aqui também apresentamos as escalas de cores, que utilizamos para a confecção das figuras, e um exemplo de um arquivo de dados.

B.1 Codificação de cores

```
/* Programa: ParSpace.c (PS.c)
   Codifica os expoentes de Lyapunov em cores, de acordo com uma escala
   de cores selecionada, a partir de um arquivo de dados contendo
   valores de parâmetros e os expoentes de Lyapunov ordenados, do maior
   para o menor. Gera um arquivo de saída em EPS, contendo o bitmap
   associado. */

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define inches_X 3.0 /* tamanho horizontal */
#define inches_Y 3.0 /* tamanho vertical */
#define bits 8
#define origin_X 1.0
#define origin_Y 1.0
#define ncolor 205 /* numero de cores de metade da escala */
#define data_file "lyap_file.dat" /* arquivo de dados */
#define TOL_ZERO 0.005 /* valor de tolerancia para o expoente ZERO */
/* testa se o maior expoente satisfaz a tolerancia e utiliza o segundo */
```



```
#define COND if(fabs(lyap1)<TOL_ZERO) lyap1=lyap2
#define out_eps_file "saida.eps" /* arquivo de saida */

int pixels_X,pixels_Y;
int ppi_X,ppi_Y;
int colors[2*ncolor];
double hmin,hmax,vmin,vmax;
double conditions[2*ncolor];

void pass_comments(FILE *);
void load_conditions(void);
void load_colors(void);
int main(void){
    char c;
    int i=0,j,k,l;
    double par1,par2,lyap1,lyap2,lyap3;
    FILE *f1,*f2;

    load_conditions();
    load_colors();

    f1=fopen(out_eps_file, "w");
    fclose(f1);

    f2 = fopen(data_file,"r");
    pass_comments(f2);
    fscanf(f2,"%d %d",&pixels_X,&pixels_Y);
    fscanf(f2,"%lf %lf %lf %lf",&hmin,&hmax,&vmin,&vmax);

    ppi_X = (int)((float)pixels_X/inches_X);
    ppi_Y = (int)((float)pixels_Y/inches_Y);
    printf("%d %d\n",ppi_X,ppi_Y);

    f1=fopen(out_eps_file,"a");

    fprintf(f1,"%!PS-Adobe-2.0 EPSF-2.0\n");
    fprintf(f1,"%%%BoundingBox: %d %d %d %d\n",
            (int)(origin_X*72-50),(int)(origin_Y*72-30),
            (int)(origin_X*72+inches_X*72+30),
            (int)(origin_Y*72+inches_Y*72+30));
    fprintf(f1,"%%%Creator: PS.c\n");
    fprintf(f1,"%%%Title: saida.eps\n");
    fprintf(f1,"%%%EndComments\n");
```

```
fprintf(f1, "/inch { 72 mul } def\n");
fprintf(f1, "/picstr 1 string def\n");

fprintf(f1, " %f inch %f inch translate\n", origin_X, origin_Y);
fprintf(f1, " %f %f  scale\n", 72.0/(float)ppi_X, 72.0/(float)ppi_Y);
fprintf(f1, "\n");

fprintf(f1, "%d %d %d\n", pixels_X, pixels_Y, bits);
fprintf(f1, "[1 0 0 1 0 0]\n");
fprintf(f1, "{ currentfile picstr readhexstring pop }\n");
fprintf(f1, "false 3\n");
fprintf(f1, "colorimage\n");

printf("\nWriting PostScript file...\n");

for(j=1; j<=pixels_Y; j++){
    for(i=1; i<=pixels_X; i++){
        fscanf(f2, "%lf %lf %lf %lf %lf", &par1, &par2, &lyap1, &lyap2,
            &lyap3);
        if(lyap1==999.0) { /* valor substituindo eventual NAN */
            fprintf(f1, "00ffff"); /* atribui cor para eventual NAN */
            continue;
        }
        COND;
        if(lyap1<conditions[0]) fprintf(f1, "%.6x", colors[0]);
        else if(lyap1>=conditions[2*ncolor-1])
            fprintf(f1, "%.6x", colors[2*ncolor-1]);
        else {
            for(l=1; l<2*ncolor-1; l++){
                if(lyap1>=conditions[l-1] && lyap1<conditions[l]){
                    fprintf(f1, "%.6x", colors[l]);
                    break;
                }
            }
        }
        fprintf(f1, "\n");
    }
}

fclose(f2);

printf("Done: \"%s\" written!\n", out_eps_file);
fclose(f1);
```

```
f1=fopen(out_eps_file, "a");
fprintf(f1," showpage\n");
fprintf(f1,"\n");
fclose(f1);
}/* end main */
void pass_comments(FILE *f1)
/* passa os comentarios do arquivo de dados */
{
    int i;
    char c;

    while(1){
        c=getc(f1);
        if(c==' '||c=='\n') continue;
        if(c=='#') {
            while((c=getc(f1))!='\n') continue;
        }
        else break;
    }
    ungetc(c,f1);
    return;
}/* end pass_comments */
void load_conditions(void){
/* carrega os intervalos dos expoentes */
    int i,j,k;
    double inc1,inc2,v;
    double lyap_min,lyap_max;
    double par1,par2,lyap2,lyap3,lyap1;
    FILE *f1;
    int ccor;

    lyap_max = -1000000.0; /* valores de inicialização */
    lyap_min = 1000000.0;

    f1 = fopen(data_file,"r");
    pass_comments(f1);
    fscanf(f1,"%d %d",&pixels_X,&pixels_Y);
    fscanf(f1,"%lf %lf %lf %lf",&hmin,&hmax,&vmin,&vmax);

    for(j=1;j<=pixels_Y;j++){
        for(i=1;i<=pixels_X;i++){
            fscanf(f1,"%lf %lf %lf %lf %lf",&par1,&par2,&lyap1,&lyap2,&lyap3);
            COND;
            if(lyap1==999.0) continue;
        }
    }
}
```

```

        if(lyap1>lyap_max) lyap_max=lyap1;
        if(lyap1<lyap_min) lyap_min=lyap1;
    }
}
fclose(f1);
printf("lyap_min = %f \nlyap_max = %f\n",lyap_min,lyap_max);

inc1=fabs(lyap_min)/(ncolor-0.5);
inc2=fabs(lyap_max)/(ncolor-0.5);

v=lyap_min;
for(i=1;i<ncolor;i++){
    conditions[i-1]=v+inc1;
    v+=inc1;
}
conditions[ncolor-1]=0.0;
v=inc2/2;
conditions[ncolor]=v;
for(i=1;i<ncolor-1;i++){
    v+=inc2;
    conditions[ncolor+i]=v;
}
conditions[2*ncolor-1]=v;
}/* end load_conditions */
void load_colors(void){
/* le e carrega a escala de cores */
int i;
int icor;
FILE *f1;

f1=fopen("gray_yellow-red.txt","r");
for(i=0;i<2*ncolor;i++){
    fscanf(f1,"%6x",&icor);
    colors[i]=icor;
}
fclose(f1);
}/* end load_colors */

```

O programa mostrado acima deve ser utilizado com um arquivo de texto contendo a escala de cores desejada. As figuras que produzimos foram obtidas com as escalas de cores que confeccionamos e apresentamos a seguir. Para a escala contendo um gradiente de cinza e um gradiente amarelo-vermelho, deve-se utilizar um arquivo de texto, o qual

chamamos “gray_yellow-red.txt”, com a seguinte tabela de cores no formato RGB:

```
ffffff fefefe fd dfdf fcfcfc fbfbfb fafafa f9f9f9 f8f8f8 f7f7f7 f6f6f6
f5f5f5 f4f4f4 f3f3f3 f2f2f2 f1f1f1 f0f0f0 efefef eeeeee ededed ececec
ebebeb eaeaea e9e9e9 e8e8e8 e7e7e7 e6e6e6 e5e5e5 e4e4e4 e3e3e3 e2e2e2
e1e1e1 e0e0e0 dfdfdf dedede dddddd dcdcdc dbdbdb dadada d9d9d9 d8d8d8
d7d7d7 d6d6d6 d5d5d5 d4d4d4 d3d3d3 d2d2d2 d1d1d1 d0d0d0 cfcfcf cecece
cdcddc ccccc cbc bcb cacaca c9c9c9 c8c8c8 c7c7c7 c6c6c6 c5c5c5 c4c4c4
c3c3c3 c2c2c2 c1c1c1 c0c0c0 bfbfbf bebebe bdbdbd bcbcbc bbbbbb bababa
b9b9b9 b8b8b8 b7b7b7 b6b6b6 b5b5b5 b4b4b4 b3b3b3 b2b2b2 b1b1b1 b0b0b0
afafaf aeaeae adadad acacac ababab aaaaaa a9a9a9 a8a8a8 a7a7a7 a6a6a6
a5a5a5 a4a4a4 a3a3a3 a2a2a2 a1a1a1 a0a0a0 9f9f9f 9e9e9e 9d9d9d 9c9c9c
9b9b9b 9a9a9a 999999 989898 979797 969696 959595 949494 939393 929292
919191 909090 8f8f8f 8e8e8e 8d8d8d 8c8c8c 8b8b8b 8a8a8a 898989 888888
878787 868686 858585 848484 838383 828282 818181 808080 7f7f7f 7e7e7e
7d7d7d 7c7c7c 7b7b7b 7a7a7a 797979 787878 777777 767676 757575 747474
737373 727272 717171 707070 6f6f6f 6e6e6e 6d6d6d 6c6c6c 6b6b6b 6a6a6a
696969 686868 676767 666666 656565 646464 636363 626262 616161 606060
5f5f5f 5e5e5e 5d5d5d 5c5c5c 5b5b5b 5a5a5a 595959 585858 575757 565656
555555 545454 535353 525252 515151 505050 4f4f4f 4e4e4e 4d4d4d 4c4c4c
4b4b4b 4a4a4a 494949 484848 474747 464646 454545 444444 434343 424242
414141 404040 3f3f3f 3e3e3e 3d3d3d 3c3c3c 3b3b3b 3a3a3a 393939 383838
34342f 2f2f25 2a2a1b 252511 202007 1f1f00 242400 292900 2e2e00 333300
383800 3a3a00 3c3c00 3e3e00 404000 424200 444400 464600 484800 4a4a00
4c4c00 4e4e00 505000 525200 545400 565600 585800 5a5a00 5c5c00 5e5e00
606000 626200 646400 666600 686800 6a6a00 6c6c00 6e6e00 707000 727200
747400 767600 787800 7a7a00 7c7c00 7e7e00 808000 828200 848400 868600
888800 8a8a00 8c8c00 8e8e00 909000 929200 949400 969600 989800 9a9a00
9c9c00 9e9e00 a0a000 a2a200 a4a400 a6a600 a8a800 aaaa00 acac00 aeae00
b0b000 b2b200 b4b400 b6b600 b8b800 baba00 bcbcb0 bebe00 c0c000 c2c200
c4c400 c6c600 c8c800 caca00 cccc00 cece00 d0d000 d2d200 d4d400 d6d600
d8d800 dada00 dcdc00 dede00 e0e000 e2e200 e4e400 e6e600 e8e800 eaea00
ecec00 eeee00 f0f000 f2f200 f4f400 f6f600 f8f800 fafa00 fcfc00 fefe00
ffff00 fffd00 fffb00 fff900 fff700 fff500 fff300 fff100 ffef00 ffed00
ffeb00 ffe900 ffe700 ffe500 ffe300 ffe100 ffd000 ffd000 ffdb00 ffd900
ffd700 ffd500 ffd300 ffd100 ffcf00 ffc000 ffc000 ffc900 ffc700 ffc500
ffc300 ffc100 ffbf00 ffb000 ffb000 ffb900 ffb700 ffb500 ffb300 ffb100
ffaf00 ffac00 ffa900 ffa600 ffa300 ffa000 ff9d00 ff9a00 ff9700 ff9400
ff9100 ff8e00 ff8b00 ff8800 ff8500 ff8200 ff7f00 ff7c00 ff7b00 ff7800
ff7500 ff7200 ff6f00 ff6c00 ff6900 ff6600 ff6300 ff6000 ff5d00 ff5a00
ff5700 ff5400 ff5100 ff4e00 ff4b00 ff4800 ff4500 ff4200 ff3f00 ff3c00
ff3900 ff3600 ff3300 ff3000 ff2d00 ff2a00 ff2700 ff2400 ff2100 ff1e00
ff1b00 ff1800 ff1500 ff1200 ff0f00 ff0c00 ff0900 ff0600 ff0300 ff0000
```

A seguir apresentamos a escala “blue_green.txt”, que confeccionamos e utilizamos na referência [48]. Para utilizarmos essa escala de cores com o programa que fornecemos nesta seção, devemos atribuir o valor 250 para a variável *ncolor* e trocar o nome da escala de cores na subrotina *load_colors* para o nome do arquivo de texto referente a esta escala de cores.

```
0000ff 0001ff 0101fe 0102fe 0202fd 0203fd 0203fc 0304fc 0304fb 0305fb
0405fa 0405fa 0505f9 0506f9 0506f8 0606f8 0606f7 0706f7 0707f6 0707f6
0707f5 0807f5 0807f4 0908f4 0908f3 0909f3 090af3 090af2 0a0af2 0a0af1
0a0bf1 0b0bf0 0c0bf0 0c0aef 0c0bef 0c0bee 0c0bee 0d0bed 0d0bed 0d0cec
0d0cec 0d0ceb 0e0ceb 0e0cea 0e0dea 0e0de9 0e0de9 0e0de8 0f0de8 0f0de7
0f0ee7 0f0ee6 0f0ee6 100ee5 100ee5 100fe4 100fe4 100fe3 100fe3 110fe2
110fe2 1110e1 1110e1 1110e0 1210e0 1210df 1210df 1211de 1211de 1211dd
1311dd 1311dd 1311dc 1312dc 1312db 1312db 1412da 1412da 1412d9 1413d9
1413d8 1413d8 1513d7 1513d7 1513d6 1514d6 1514d5 1614d5 1614d4 1614d4
1614d3 1615d3 1615d2 1715d2 1715d1 1715d1 1715d0 1715d0 1815cf 1816cf
1816ce 1816ce 1816cd 1916cd 1917cc 1917cc 1917cb 1917cb 1a17ca 1a18ca
1a18c9 1a18c9 1a18c8 1a18c8 1b19c7 1b19c7 1b19c6 1b19c6 1b19c5 1b19c5
1c1ac4 1c1ac4 1c1ac3 1c1ac3 1c1ac2 1c1ac2 1d1bc1 1d1bc1 1d1bc0 1d1bc0
1d1bbf 1d1cbf 1d1cbe 1e1cbd 1e1cbc 1e1cbb 1e1cba 1e1db9 1e1db8 1f1db7
1f1db6 1f1db5 1f1db4 1f1eb3 1f1eb2 1f1eb1 201eb0 201eaf 2024ae 2023ad
2122ac 2122ab 2122aa 2122a9 2122a8 2222a7 2222a6 201ea5 2024a4 2023a3
2122a2 2122a1 2122a0 21229f 21229e 22229d 22229c 201e9b 20249a 202399
212298 212297 212296 212295 212294 222293 222392 222391 222390 22238f
22238e 22238d 23248c 23248b 23248a 232489 232488 232487 242586 242585
242584 242583 242582 242581 242580 25267f 25267e 25267d 25267c 25267b
25267a 252679 252778 262777 262776 262775 262774 262773 262771 262770
26286f 27286e 27286d 27286c 27286b 27286a 272869 272868 272867 272966
282965 282964 282963 282962 282961 282960 28295f 28295e 282a5d 292a5c
292a5b 292a5a 292a58 292a56 292a54 292a52 292a50 292a4e 292b4c 2a2b4a
2a2b47 2a2b44 2a2b41 2a2a3e 2a2b3b 2a2a38 2a2a35 292932 27272f 25252c
232323 222422 222622 222821 212a21 212c20 202e20 20301f 1f321f 1f341e
1f361e 1e381d 1e3a1d 1e3c1d 1d3e1c 1d401c 1d421c 1c441b 1c461b 1c471b
1c481b 1b491a 0b4a1a 1b4b1a 1b4c1a 1a4c19 1a4d19 1a4d19 1a4e19 194e18
194f18 184f18 185018 185017 185117 175117 175217 175216 175316 165316
165416 165415 165515 155515 155615 155614 155714 145714 145814 145813
145913 135913 135a13 135a12 135b12 125b12 125c12 125c11 125d11 115d11
115e11 115e10 115f10 105f10 106010 10600f 10610f 0f610f 0f620f 0f620e
0f630e 0e630e 0e640d 0e640c 0e650c 0d650c 0d660c 0d660b 0d670b 0c670b
0c680b 0c680b 0c690b 0b690b 0b6a0b 0b6a0a 0b6b0a 0a6b0a 0a6c0a 0a6c09
```

```

0a6d09 096d09 096e09 096e08 096f08 086f08 087008 087007 077107 077106
077206 067206 067306 067305 057405 057404 057504 047504 047604 047603
037703 037702 037802 027801 027901 017900 017a00 007b00 007c00 007d00
007e00 007f00 008000 008100 008200 008300 008400 008500 008600 008700
008800 008900 008a00 008b00 008c00 008d00 008e00 008f00 009000 009100
009200 009300 009400 009500 009600 009700 009800 009900 009a00 009b00
009c00 009d00 009e00 009f00 00a000 00a100 00a200 00a300 00a400 00a500
00a600 00a700 00a800 00a900 00aa00 00ab00 00ac00 00ad00 00ae00 00af00
00b000 00b100 00b200 00b300 00b400 00b500 00b600 00b700 00b800 00b900
00ba00 00bb00 00bc00 00bd00 00be00 00bf00 00c000 00c100 00c200 00c300
00c400 00c500 00c600 00c700 00c800 00c900 00ca00 00cb00 00cc00 00cd00
00ce00 00cf00 00d000 00d100 00d200 00d300 00d400 00d500 00d600 00d700
00d800 00d900 00da00 00db00 00dc00 00dd00 00de00 00df00 00e000 00e100
00e200 00e300 00e400 00e500 00e600 00e700 00e800 00e900 00ea00 00eb00
00ec00 00ed00 00ee00 00ef00 00f000 00f100 00f200 00f300 00f400 00f500
00f600 00f700 00f800 00f900 00fa00 00fb00 00fc00 00fd00 00fe00 00ff00

```

A seguir apresentamos um exemplo de um arquivo de dados que é utilizado com o programa “PS.c”, apresentado nesta seção. O exemplo que mostramos aqui é um pedaço do arquivo original que foi utilizado para fazer a figura 3.2. O arquivo de dados tem a seguinte estrutura. Um pequeno trecho comentado, iniciado pelo símbolo “#”, com as principais informações referentes ao modelo e valores utilizados nas integrações numéricas. Os comentários incluem, entre outras informações, os valores dos parâmetros que permaneceram fixados durante as integrações (α , B e Γ), o valor do passo de integração h , os valores do tempo transiente ($NTRANS$) e tempo de integração ($NINTEG$), o número de parâmetros da discretização horizontal e vertical do espaço de parâmetros (900×900), os valores máximos e mínimos dos dois parâmetros ativos (K e ω), que são variados nas simulações, os valores do incremento horizontal ($steph_par$) e vertical ($stepv_par$). Abaixo dos comentários, aparecem duas linhas que são lidas e utilizadas pelo programa “PS.c”. A seguir estão os dados das integrações numéricas, isto é, os dois valores de parâmetros que são variados, K e ω , e os três valores dos expoentes computados e ordenados, λ_1 , λ_2 e λ_3 , do maior para o menor.

```

#data file: semi001.dat
#source: laser_semi.f

#SEMICONDUCTOR LASER MODEL

```

```

#active parameters: K, omega
#alpha = 2.600000000000000
#B = 0.029500000000000
#Gamma = 0.097300000000000
#
#h = 0.01
#NTRANS = 35000
#NINTEG = 700000
#NPARH = 900
#NPARV = 900
#PARHMIN = 0.350000000000000
#PARHMAX = 0.970000000000000
#steph_par = 0.00068965517241
#PARVMIN = 0.700000000000000
#PARVMAX = 1.300000000000000
#stepv_par = 0.00066740823137

```

```

900 900
0.350000 0.970000 0.700000 1.300000

```

0.350000000000000	0.700000000000000	0.00055078	-0.31118993	-0.31205097
0.3506896551724	0.700000000000000	0.00025216	-0.31298820	-0.31302068
0.3513793103448	0.700000000000000	-0.00011752	-0.31306762	-0.31334933
0.3520689655172	0.700000000000000	0.00017796	-0.31380448	-0.31425081
0.3527586206897	0.700000000000000	0.00026065	-0.31415569	-0.31540791
0.3534482758621	0.700000000000000	-0.00042168	-0.31440276	-0.31516812
0.3541379310345	0.700000000000000	0.00021091	-0.31531218	-0.31619283
0.3548275862069	0.700000000000000	0.00021768	-0.31585239	-0.31618458
0.3555172413793	0.700000000000000	0.00035825	-0.31625688	-0.31688536
0.3562068965517	0.700000000000000	0.00029600	-0.31701157	-0.31723081
...
0.9637931034483	1.300000000000000	0.00012883	-0.24553525	-0.51604864
0.9644827586207	1.300000000000000	0.00010978	-0.25335076	-0.50882061
0.9651724137931	1.300000000000000	-0.00031881	-0.26209847	-0.49951014
0.9658620689655	1.300000000000000	0.00010450	-0.27267661	-0.48985244
0.9665517241380	1.300000000000000	0.00009192	-0.28342019	-0.47961300
0.9672413793104	1.300000000000000	-0.00021830	-0.29725562	-0.46627314
0.9679310344828	1.300000000000000	0.00024592	-0.31319795	-0.45055986
0.9686206896552	1.300000000000000	-0.00014183	-0.33662487	-0.42733891
0.9693103448276	1.300000000000000	0.00014284	-0.38190185	-0.38286799
0.970000000000000	1.300000000000000	-0.00025552	-0.38271372	-0.38277195

Referências

- [1] LORENZ, E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, v. 20, p. 130-141, 1963.
- [2] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. New York: Springer, 1983.
- [3] THOMPSON, J.M.T.; STEWART, H.B. *Nonlinear dynamics and chaos*. New York: Wiley, 2002.
- [4] HILBORN, R.C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. 2nd ed. Oxford: Oxford University, 2000.
- [5] STROGATZ, S.H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge MA: Westview, 2000.
- [6] ARGYRIS, J.; FAUST, G.; HAASE, M. *Die erforschung des chaos*. Zweite Auflage (2.ed.). Berlin: Springer, 2008.
- [7] KUZNETSOV, Yu.A. *Elements of applied bifurcation theory*. 3rd ed. New York: Springer, 2004.
- [8] KRAUSKOPF, B.; OSINGA, H.M.; GALAN-VIOQUE, J. (Ed.). *Numerical continuation methods for dynamical systems: path following and boundary value problems*. Dordrecht: Springer, 2007.
- [9] UEDA, Y.; com a assistência de ABRAHAM, R.H.; STEWART, H.B. *The Road to Chaos*. 2nd.ed. Santa Cruz: Aerial, 2001.

-
- [10] UEDA, Y. Steady motions exhibited by Duffing's equation: a picture book of regular and chaotic motions. In: HOLMES, P.J. (Ed.). *New approaches to nonlinear problems in dynamics*. Philadelphia: SIAM, 1980. p. 311-322.
- [11] HAO, B.L.; ZHANG, S.Y. Hierarchy of chaotic bands. *Journal of Statistical Physics*, v. 28, 769-792, 1982.
- [12] KAWAKAMI, H. Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters. *IEEE Transaction of Circuits and Systems*, v. 31, p. 248-260, 1984.
- [13] DING, E.J. Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator. *Physical Review A*, v. 36, p. 1488-1491, 1987.
- [14] METTIN, R.; PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. Bifurcation structure of the driven Van der Pol oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, p. 1529-1555, 1993.
- [15] FRASER, S.; KAPRAL, R. Analysis of flow histeresys by a one-dimensional map. *Physical Review A*, v. 25, p. 3223-3233, 1982.
- [16] GASPARD, P.; KAPRAL, R.; NICOLIS, G. Bifurcation phenomena near homoclinic systems - a two parameter analysis. *Journal of Statistical Physics*, v. 35, p. 697-727, 1984.
- [17] CHUA, L.O.; KOMURO, M.; MATSUMOTO, T. The double scroll family. *IEEE transactions on circuits and systems*, v. 33, 1072-1118, 1986.
- [18] GLASS, L.; PEREZ, P. Fine structure of phase locking. *Physical Review Letters*, v. 48, p. 1772-1775, 1982.
- [19] SCHELL, M.; FRASER, S.; KAPRAL, R. Subharmonic bifurcation in the sine map: An infinite hierarchy of cusp bistabilities. *Physical Review A*, v. 28, p. 373-378, 1983.

-
- [20] BÉLAIR, J.; GLASS, L. Universality and self-similarity in the bifurcations of circle maps. *Physica D*, v. 16, p. 143-154, 1985.
- [21] NARDONE, P.; MANDEL, P.; KAPRAL, R. Analysis of a delay-differential equation in optical bistability. *Physical Review A*, v. 33, p. 2465-2471, 1986.
- [22] MACKAY, R.S.; TRESSER, C. Transitions to topological chaos for circle maps. *Physica D*, v. 19, p. 206-237, 1986.
- [23] MACKAY, R.S.; TRESSER, C. Some flesh on the skeleton: the bifurcation structure of bimodal maps. *Physica D*, v. 27, 412-422, 1987.
- [24] RÖSSLER, J; KIWI, M.; HESS, B.; MARKUS, M. Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos. *Physical Review A*, v. 39, p. 5954-5960, 1989.
- [25] RINGLAND, J.; SCHELL, M. Universal geometry in the parameter plane of dissipative dynamical systems. *Europhysics Letters*, v. 12, p. 595-601, 1990.
- [26] RINGLAND, J.; SCHELL, M. Universal geometry in the parameter plane of dissipative dynamical systems. *Europhysics Letters*, v. 26, p. 637-638, 1994.
- [27] CARCASSES, J.P.; MIRA, C.; BOSCH, M.; SIMÓ, C.; TATJER, J.C. "Crossroad area-spring area" transition (I) Parameter plane representation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 1, p. 183-196, 1991.
- [28] DEWDNEY, A.K. Leaping into the Lyapunov space. *Scientific American*, v. 265, p. 178-180, 1991.
- [29] MILNOR, J. Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Mathematics*, v. 1, p. 5-24, 1992.
- [30] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of the Hénon map. *Physical Review Letters*, v. 70, p. 2714-2717, 1993.
- [31] KUZNETSOV, A.P.; KUZNETSOV, S.P.; SATAEV, I.R.; CHUA, L.O. Two-parameter study of transition to chaos in Chua's circuit: renormalization group,

- universality and scaling. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, p. 943-962, 1993.
- [32] GALLAS, J.A.C. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models. *Physica A*, v. 202, p. 196-223, 1994.
- [33] GALLAS, J.A.C. Structure of the parameter space of a ring cavity. *Applied Physics B*, v. 60, p. S203-S213, 1995.
- [34] KUBSTRUP, C.; MOSEKILDE, E. Bifurcation structure of an optical ring cavity. *Physica Scripta*, v. T67, p. 167-175, 1996.
- [35] HUNT, B.R.; GALLAS, J.A.C.; GREBOGI, C.; YORKE, J.A.; KOÇAK, H. Bifurcation rigidity. *Physica D*, v. 129, p. 35-56, 1999.
- [36] LORENZ, E.N. Compound windows of the Hénon-map. *Physica D*, v. 237, p. 1689-1704, 2008.
- [37] ZENI, A.; GALLAS, J.A.C. Lyapunov exponents for a Duffing oscillator. *Physica D*, v. 89, p. 71-82, 1995.
- [38] CHLOUVERAKIS, K.E.; ADAMS, M.J. Stability maps of injection-locked laser diodes using the largest Lyapunov exponent. *Optics Communications*, v. 216, p. 405-412, 2003.
- [39] FORDELL, T.; LINDBERG, A.M. Numerical stability maps of an optically injected semiconductor laser. *Optics Communications*, v. 242, p. 613-622, 2004.
- [40] ZOU, Y.; THIEL, M.; ROMANO, M.C.; KURTHS, J.; BI, Q. Shrimp structure and associated dynamics in parametrically excited oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 16, p. 3567-3579, 2006.
- [41] CASTRO, V.; MONTI, M.; PARDO, W.B.; WALKENSTEIN, J.A.; ROSA, E. Characterization of the Rössler system in parameter space. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 17, p. 965-973, 2007.

- [42] MARANHÃO, D.M.; BAPTISTA, M.S.; SARTORELLI, J.C.; CALDAS, I.L. Experimental observation of a complex periodic window. *Physical Review E*, v. 77, 037202:1-4, 2008.
- [43] ALBUQUERQUE, H.A.; RUBINGER, R.M.; RECH, P.C. Self-similar structures in a 2D parameter-space of an inductorless Chua's circuit. *Physics Letters A*, v. 372, p. 4793-4798, 2008.
- [44] DOEDEL, E.J.; PAFFENROTH, R.C.; CHAMPNEYS, A.R.; FAIRGRIVE, T.F.; KUZNETSOV, Yu.A.; OLDEMAN, B.E.; SANDSTEDTE, B e WANG, X. *Auto2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>, 1999.
- [45] KUZNETSOV, Yu.A.; LEVITIN, V.V. *Content: a multiplatform environment for continuation and bifurcation analysis of dynamical systems (software under development)*. <ftp://ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>, 1997.
- [46] DHOOGHE, A.; GOVAERTS, W.; KUZNETSOV, Yu.A. Matcont: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 29, p. 141-164, 2003.
- [47] WOLF, A.; SWIFT, J.B.; SWINNEY, H.L.; VASTANO, J.A. Determining Lyapunov exponents from a time-series. *Physica D*, v. 16, p. 285-317, 1985.
- [48] BONATTO, C.; GARREAU, J.C.; GALLAS, J.A.C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser. *Physical Review Letters*, v. 95, p. 143905:1-4, 2005.
- [49] ARECCHI, F.T.; MEUCCI, R.; PUCCIONI, G.P.; TREDICCE, J.R. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser, *Physical Review Letters*, v. 49, p. 1217-1220, 1982.
- [50] TREDICCE, J.R.; ARECCHI, F.T.; PUCCIONI, G.P.; POGGI, A.; DADOMSKI, W. Dynamic behaviour and onset of low-dimensional chaos in a modulated homoge-

- neously broadened single-mode laser - experiments and theory. *Physical Review A*, v. 34, p. 2073-2081, 1986.
- [51] SOLARI, H.G.; ESCHENAZI, E.; GILMORE, R.; TREDICCE, J.R. Influence of coexisting attractors on the dynamics of a laser system. *Optics Communications*, v. 64, p. 49-53, 1987.
- [52] GILMORE, R.; LEFRANC, M. *The topology of chaos, Alice in stretch and squeeze-land*. New York: Wiley, 2002.
- [53] GILMORE, R. Topological analysis of chaotic dynamical systems. *Reviews of Modern Physics*, v. 70, p. 1455-1529, 1998.
- [54] NARDUCCI, L.M.; ABRAHAM, N.B. *Laser physics and laser instabilities*. Singapore: World Scientific, 1988.
- [55] PUCCIONI, G.P.; POGGI, A.; GADOMSKI, W.; TREDICCE, J.R.; ARECCHI, F.T. Measurement of the formation and evolution of a strange attractor in a laser. *Physical Review Letters*, v. 55, p. 339-342, 1985.
- [56] MIDAVAINÉ, T.; DANGOISSE, D.; GLORIEUX, P. Observation of chaos in a frequency-modulated CO₂ laser. *Physical Review Letters*, v. 55, p. 1989-1992, 1985.
- [57] DANGOISSE, D.; GLORIEUX, P.; HENNEQUIN, D. Laser chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, v. 57, p. 2657-2660, 1986.
- [58] PISARCHIK, A.N.; GOSWAMI, B.K. Annihilation of one of the coexisting attractors in a bistable system. *Physical Review Letters*, v. 84, p. 1423-1426, 2000.
- [59] CHIZHEVSKY, V.N. Multistability in dynamical systems induced by weak periodic perturbations. *Physical Review E*, v. 64, p. 036223:1-4, 2001.
- [60] GOSWAMI, B.K. Analytical studies on the period doubling bifurcations from the harmonic solutions of the parameter modulated single mode two-level laser. *Physics Letters A*, v. 190, p. 279-284, 1994.

-
- [61] GOSWAMI, B.K. Self-similarity in the bifurcation structure involving period tripling, and a suggested generalization to period n-tupling. *Physics Letters A*, v. 245, 97-109, 1998.
- [62] OPPO G.L.; POLITI, A. Toda potential in laser equations. *Zeitschrift für physik B-condensed matter*, v. 59, p. 111-115, 1985.
- [63] HAKEN, H. *Laser light dynamics*. Amsterdam: North-Holand, 1986. v. 2.
- [64] MANDEL P. *Theoretical problems in cavity nonlinear optics*. New York: Cambridge University, 1997.
- [65] TARTWIJC, G.H.M.; AGRAWAL, G.P. Laser instabilities: a modern perspective. *Progress in Quantum Electronics*, v. 22, p. 43-122, 1998.
- [66] HAKEN, H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers. *Physics Letters A*, v. 53, p. 77-78, 1975.
- [67] LUGIATO, L.A.; MANDEL, P.; NARDUCCI, L.M. Adiabatic elimination in nonlinear dynamical systems. *Physical Review A*, v. 29, p. 1438-1452, 1984.
- [68] ARECCHI, F.T.; LIPPI, G.L.; PUCCIONI, G.P.; TREDICCE, J.R. Deterministic chaos in laser with injected signal. *Optics Communications*, v. 51, p. 308-314, 1984.
- [69] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. New York: Springer, 1990.
- [70] FERRARA, N.F.-; PRADO, C.P.C. *Caos uma introdução*. São Paulo: Edgar Blücher, 1994.
- [71] IVANOV, D.V.; KHANIN, Ya.I.; MATORIN, I.I.; PIKOVSKY, A.S. Chaos in a solid-state laser with periodically modulated losses. *Physics Letters A*, v. 89, p. 229-230, 1982.
- [72] FEIGENBAUM, M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *Journal of Statistical Physics*, v. 19, p. 25-52, 1978.

-
- [73] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, v. 48, p. 1507-1510, 1982.
- [74] SCHWARTZ, I.B. Infinite primary saddle-node bifurcation in periodically forced systems. *Physics Letters A*, v. 126, p. 411-418, 1988.
- [75] HÉNON, M. A two-dimensional mapping with strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, v. 50, p. 69-77, 1976.
- [76] PANDO L., C.L.; LUNA ACOSTA, G.A.; MEUCCI, R.; CIOFINI, M. Highly dissipative Hénon map behaviour in the four-level model of the CO₂ laser with modulated losses. *Physics Letters A*, v. 199, p. 191-198, 1995.
- [77] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Accumulation horizons and period adding in optically injected semiconductor lasers. *Physical Review E* v. 75, p. 055204:1-4, 2007.
- [78] LANG, R.; KOBAYASHI, K. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 16, p. 347-355, 1980.
- [79] KANE, D.M.; SHORE, K.A. (Ed.). *Unlocking dynamical diversity: optical feedback effects on semiconductor lasers*. New York: Springer, 2005.
- [80] OHTSUBO, J. *Semiconductor lasers: stability, instabilities and chaos*. New York: Springer, 2005.
- [81] LANG, R. Injection locking properties of a semiconductor laser. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 18, p. 976-983, 1982.
- [82] MORGENSEN, F.; OLESEN, H.; JACOBSEN, G. Locking conditions and stability properties for a semiconductor laser with external injection light. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 21, p. 784-793, 1985.
- [83] TREDICCE, J.R.; ARECCHI, F.T.; LIPPI, G.L.; PUCCIONI, G.P. Instabilities in lasers with an injected signal. *Journal of the Optical Society America B*, v. 2, p. 173-183, 1985.

-
- [84] SACHER, J.; BAUMS, D.; PANKNIN, P.; ELSÄSSER, W.; GÖBEL, E.O. Intensity instabilities of semiconductor lasers under current modulation, external light injection, and delayed feedback. *Physical Review A*, v. 45, p. 1893-1905, 1992.
- [85] LEE, E.K.; PANG, H.S.; PARK, J.D.; LEE, H. Bistability and chaos in an injection-locked semiconductor laser. *Physical Review A*, v. 47, p. 736-739, 1993.
- [86] LODI-ANNOVAZZI, V.; DONATI, S.; MANNA, M. Chaos and locking in semiconductor laser due to external injection. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 30, p. 1537-1541, 1994.
- [87] KOVANIS, V.; GAVRIELIDES, A.; SIMPSON, T.B.; LIU, J.M. Instabilities and chaos in optically injected semiconductor lasers. *Applied Physics Letters*, v. 67, p. 2780-2782, 1995.
- [88] WIECZOREK, S.; KRAUSKOPF, B.; SIMPSON, T.B.; LENSTRA, D. The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers. *Physics Reports*, v. 416, p. 1-128, 2005.
- [89] ZIMMERMANN, M.G.; NATIELLO, M.A.; SOLARI, H.G. Shilnikov-saddle-node interaction near a codimension-2 bifurcation: Laser with injected signal. *Physica D*, v. 109, p. 293-314, 1997.
- [90] MAYOL, C.; NATIELLO, M.; ZIMMERMANN, M.G. Resonance structure in a weakly detuned laser with injected signal. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 11, p. 2587-2605, 2001.
- [91] HWANG, S.K.; LIU, J.M. Dynamical characteristics of an optically injected semiconductor laser. *Optics Communications*, v. 183, p. 195-205, 2000.
- [92] SIMPSON, T.B.; LIU, J.M.; HUANG, K.F.; TAI, K. Nonlinear dynamics induced by external optical injection in semiconductor lasers. *Quantum and Semiclassical Optics*, v. 9, p. 765-784, 1997.

- [93] ERIKSSON, S.; LINDBERG, A.M. Periodic oscillation within the chaotic region in a semiconductor laser subjected to external optical injection. *Optics Letters*, v. 26, p. 142-144, 2001.
- [94] ERIKSSON, S.; LINDBERG, A.M. Observations on the dynamics of semiconductor lasers subjected to external optical injection. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, v. 4, p. 149-154, 2002.
- [95] WIECZOREK, S.; SIMPSON, T.B.; KRAUSKOPF, B.; LENSTRA, D. Global quantitative predictions of complex laser dynamics. *Physical Review E*, v. 65, p. 045207(R):1-4, 2002.
- [96] HENRY, C.H. Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 18, p. 259-264, 1982.
- [97] CHOW, W.W., KOCH, S.W., SARGENT III, M. *Semiconductor-laser physics*. New York: Springer, 1994.
- [98] WIECZOREK, S., KRAUSKOPF B., LENSTRA, D. A unifying view of bifurcations in a semiconductor laser subject to optical injection. *Optics Communications*, v. 172, p. 279-295, 1999.
- [99] FREIRE, J.G.; BONATTO, C.; DACAMARA, C.C.; GALLAS, J.A.C. Multistability, phase-diagrams and intransitivity in the Lorenz-84 low-order atmospheric circulation model. *Chaos*, aceito para publicação.
- [100] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Mandelbrot-like sets in dynamical systems with no critical points. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences Serie I-Mathematique*, v. 342, p. 681-684, 2006.
- [101] SANJUÁN, M.A.F. Symmetry-restoring crises, period-adding and chaotic transitions in the cubic Van der Pol oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 193, p. 863-875, 1996.

-
- [102] AVRUTIN, V.; SCHANZ, M. On the scaling properties of the period-increment scenario in dynamical systems. *Chaos Solitons and Fractals*, v. 11, p. 1945-1955, 2000.
- [103] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Accumulations boundaries: Codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric, and chemical oscillators. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, v. 366, p. 505-517, 2008.
- [104] KRAUSKOPF, B.; WIECZOREK, S. Accumulating regions of winding periodic orbits in optically driven lasers. *Physica D*, v. 173, p. 97-113, 2002.
- [105] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit, *Physical Review Letters*, v. 101, p. 054101:1-4, 2008.
- [106] NISHIO, Y.; INABA, N.; MORI, S.; SAITO, T. Rigorous analyses of windows in a symmetric circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 37, p. 473-487, 1990.
- [107] SWINNEY, H.L. Observation of order and chaos in nonlinear systems. *Physica D*, v. 7, p. 3-15, 1983.
- [108] SHILNIKOV, L.P. A case of the existence of a countable number of periodic motions. *Soviet Doklady*, v. 6, p. 163-166, 1965.
- [109] ARNEODO, A.; COULLET, P.; TRESSER, C. Oscillators with chaotic behaviour - an illustration of a theorem by Shilnikov. *Journal of Statistical Physics*, v. 27, p. 171-182, 1982.
- [110] TRESSER, C. About some theorems by Shilnikov, L.P. *Annales del Institute Henry Poincare-Physique Theorique*, v. 40, p. 441-461, 1984.
- [111] GLENDINNING, P.; SPARROW, C. Local and global behaviour near homoclinic orbits. *Journal of Statistical Physics*, v. 35, p. 645-697, 1984.

- [112] GASPARD, P.; WANG, X.J. Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far-equilibrium systems. *Journal of Statistical Physics*, v. 48, p. 151-199, 1987.
- [113] ARNÉODO, A.; ARGOUL, F.; ELEZGARAY, J.; RICHETTI, P. Homoclinic chaos in chemical systems. *Physica D*, v. 62, p. 134-169, 1993.
- [114] SILVA, C.P. Shil'nikov's theorem - a tutorial. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 40, p. 675-681, 1993.
- [115] MEDRANO-T., R.O.; BAPTISTA, M.S.; CALDAS, I.L. Basic structures of the Shilnikov homoclinic bifurcation scenario. *Chaos*, v. 15, p. 033112:1-10, 2005.
- [116] GLENDINNING, P. Bifurcations near homoclinic orbits with symmetry. *Physics Letters A*, v. 103, p. 163-166, 1984.
- [117] SWIFT, J.W.; WIESENFELD, K. Suppression of period doubling in symmetric systems. *Physical Review Letters*, v. 52, p. 705-708, 1984.
- [118] BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C.; UEDA, Y. Chaotic phases similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator. *Physical Review E*, v. 77, p. 026217:1-5, 2008.
- [119] DUFFING, G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, Sammlung Vieweg, Heft 41/42, (Vieweg, Braunschweig, 1918).
- [120] UEDA, Y. In: ABRAHAM, R.H.; UEDA, Y. (Ed.). *The chaos avant-garde: memories of the early days of chaos theory*. Singapore: World Scientific, 2000.
- [121] SATO, S.I.; SANO, M.; SAWADA, Y. Universal scaling property in bifurcation structure of Duffing and generalized Duffing equations. *Physical Review A*, v. 28, p. 1654-1658, 1983.
- [122] PARLITZ, U.; LAUTERBORN, W. Superstructure in the bifurcation set of the Duffing equation $\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = f\cos(\omega t)$. *Physics Letters A*, v. 107, p. 351-355, 1985.

- [123] PARLITZ, U. Common dynamical features of periodically driven strictly dissipative systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 3, p. 703-715, 1993.
- [124] GILMORE, R.; McCALLUM, J.W.L. Structure in the bifurcation diagram of the Duffing oscillator. *Physical Review E*, v. 51, p. 935-956, 1995.
- [125] SCHMIDT, K.; EILENBERGER, G. Poincaré maps of Duffing-type oscillators and their reduction to circle maps: II. methods and numerical results. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 31, p. 3903-3927, 1998.
- [126] KHAMMARI, H.; MIRA, C.; CARCASSES, P. Behavior of harmonics generated by a duffing type equation with a nonlinear damping. Part I. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 15, p. 3181-3221, 2005.
- [127] PARLITZ, U.; ENGLISCH, V.; SCHEFFCZYK, C.; LAUTERBORN, W. Bifurcation structures of bubble oscillators. *Journal of the acoustical society of America*, v. 88, p. 1061-1077, 1990.
- [128] SCHEFFCZYK, C.; PARLITZ, U.; KURZ, T. Comparison of bifurcation structures of driven dissipative nonlinear oscillators. *Physical Review A*, v. 43, p. 6495-6502, 1991.
- [129] BYATT-SMITH, J.G. Regular and chaotic solutions of Duffing equation for large forcing. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 37, p. 113-145, 1986.
- [130] BYATT-SMITH, J.G. 2π periodic solutions of Duffing's equation with negative stiffness. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, v. 47, p. 60-91, 1987.
- [131] ROBINSON, F.N.H. Experimental observation of the large-amplitude solutions of Duffing's and related equations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 42, p. 177-201, 1989.
- [132] EILENBERGER, G.; SCHMIDT, K. Poincaré maps of Duffing-type oscillators and their reduction to circle maps I - analytical results. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 25, p. 6335-6356, 1992.

-
- [133] SHINRIKI, M.; YAMAMOTO, M.; MORI, S. Multimode oscillations in a modified Van der Pol oscillator containing a positive nonlinear conductance. *Proceedings IEEE*, v. 69, p. 394-395, 1981.
- [134] FREIRE, E.; FRANQUELO, L.G.; ARACIL, J. Periodicity and chaos in an autonomous electronic system. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 31, p. 237-247, 1984.
- [135] GASPARD, P.; NICOLIS, G. What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?. *Journal of Statistical Physics*, v. 31, p. 499-519, 1983.
- [136] VANCE, W.; ROSS, J. A detailed study of a forced chemical oscillator: Arnold tongues and bifurcation sets. *Journal of Chemical Physics*, v. 91, p. 7654-7670, 1989.
- [137] HOU, Z.; XIN, H. Stochastic resonance in the presence or absence of external signal in the continuous stirred tank reactor system. *Journal of Chemical Physics*, v. 111, p. 721-723, 1999.
- [138] PISARCHIK, A.N.; MEUCCI, R.; ARECCHI, F.T. Theoretical and experimental study of discrete behaviour of Shilnikov chaos in a CO₂ laser. *European Physical Journal D*, v. 13, p. 385-391, 2001.
- [139] RÖSSLER, O.E. Equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, v. 57, p. 397-398, 1976.
- [140] LORENZ, E.N. Irregularity: a fundamental property of the atmosphere. *Tellus A*, v. 36, p. 98-110, 1984.

Publicações

Artigos

1. BONATTO, C.; GARREAU, J.C.; GALLAS J.A.C. Self-similarities in the frequency-amplitude space of a loss-modulated CO₂ laser, *Physical Review Letters* v. 95, p. 143905:1-4, 2005.
2. BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Accumulation horizons and period adding cascades in optically injected semiconductor lasers, *Physical Review E* v. 75, p. 055204(R):1-4, 2007.
3. BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Accumulation boundaries: Codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric, and chemical oscillators, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* v. 366, p. 505-517, 2008.
4. BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C.; UEDA, Y. Chaotic phase similarities and recurrences in a damped-driven Duffing oscillator, *Physical Review E* v. 77, p. 026217:1-5, 2008.
5. BONATTO, C.; GALLAS, J.A.C. Periodicity hub and nested spirals in the phase diagram of a simple resistive circuit, *Physical Review Letters*, v. 101, p. 054101:1-4, 2008.
6. FREIRE, J.G.; BONATTO, C.; DACAMARA, C.C.; GALLAS, J.A.C. Multistability, phase-diagrams and intransitivity in the Lorenz-84 low-order atmospheric circulation model, *Chaos*, aceito para publicação.

Conferências

1. MEDYFINOL - XIV Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics. *Waveform control of stability and multistability in loss-modulated CO₂ lasers*, La Serena, Chile, Dezembro de 2004 (apresentação de poster).
2. The 9th Experimental Chaos Conference. *Organization of stability domains in laser systems with modulation, feedback or optical injection*, São José dos Campos, Brazil, Maio de 2006 (apresentação de poster).
3. Third "Rio de la Plata" Workshop on Noise, Chaos, and Complexity in Lasers and Nonlinear Optics. *Phase diagrams and structure of chaotic phases in optically injected semiconductor lasers and other nonlinear system*, Punta del Este, Uruguay, Dezembro de 2007 (apresentação de poster).