Probabilidades advindas de redes quânticas de spins

Autor: Jader Eckert Brasil
Orientador: Artur Oscar Lopes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Introdução

O modelo do Ising quantico é um modelo matemático para o ferromagnetismo em mecânica estatística quântica. O modelo representa a estatistica de um dipolo magnético para um spin descrito pelos estados 1 e -1 associados a um certo Hamiltoniano H. Observar um estado do spin implica em analisar os autovalores de um operador autoadjunto L. Estaremos interessados em considerar um caso específico desse modelo, considerando o estado KMS associado ao Hamiltoniano $H = \sigma_x \otimes \sigma_x$, onde $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma das matrízes de Pauli, sobre a rede quântica de spins $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes ...$ para um observável (fixado) da forma $L \otimes L \otimes ... \otimes L$, onde $L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, com temperatura zero.
Então podemos obter uma definição natural para uma probabilidade estacionária μ sobre o espaço de Bernoulli $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Nosso estudo está concentrado em encontrar as propriedades da probabilidade μ.

Encontrando a Probabilidade μ

Considerando $H : (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \longrightarrow (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ definimos H_n, agindo em $(\mathbb{C}^2)^n = (\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes ... \otimes \mathbb{C}^2)$, por:

$$H_n = \sum_{j=0}^{n-2} I^{\otimes j} \otimes H \otimes I^{\otimes (n-j-2)}.$$

Seja $\beta = \frac{1}{T}$ onde T é a temperatura, definimos o estado KMS associado a H por:

$$\rho_\omega = \frac{1}{Tr(e^{-\beta H_n})} e^{-\beta H_n}$$

Fixamos $L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ uma matriz autoadjunta de autovalores reais λ_1, λ_2 associados a ψ_1,ψ_2 uma base ortonormal de autovetores de L.
Então, o C^*-estado ω, dado por:

$$\omega(L_1 \otimes L_2 \otimes ... \otimes L_n) = Tr(\rho_\omega [L_1 \otimes L_2 \otimes ... \otimes L_n]),$$

irá determinar de forma natural uma probabilidade μ_n no espaço de Bernoulli $\{1, 2\}^n$ via

$$\mu_n(j_1, j_2, ..., j_n) = \omega(P_{\psi_{j_1}}, P_{\psi_{j_2}}, ..., P_{\psi_{j_n}}),$$

onde P_ψ é o operador de projeção sobre $\psi \in \mathbb{C}^2$ onde $|\psi| = 1$. Então, a probabilidade μ sobre $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ é obtida via Teorema da Extensão de Kolmogorov.

Propriedades de μ

É importante o fato de que consideramos os operadores autoadjuntos da forma:

$$L = \begin{pmatrix} cos^2(\theta) - sin^2(\theta) & 2cos(\theta)sin(\theta) \\ 2cos(\theta)sin(\theta) & sin^2(\theta) - cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

com $\theta \in (0, \pi/2)$ e os correspondentes observáveis associados $C_n = C = L^{\otimes n}$. Seus autovalores são $\psi_1 = (cos(\theta), sin(\theta))$ e $\psi_2 = (-sin(\theta), cos(\theta))$ que são ortonormais e tem autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Vale lembrar também que estamos interessados no caso em que a temperatura tende a zero, para isso basta fazermos $\beta \to \infty$. Com essas premissas em *[1]* são obtidas varias propriedades de μ_n, além de mostrar que ela é estacionária. Ainda pode se mostrar que vale o Princípio dos Grandes Desvios para uma certa classe de funções. Nossa futura investigação é no sentido de obter resultados análogos aos descritos acima para uma classe mais geral de Hamiltonianos H.

Referências

[1] LOPES, Artur O.; MENGUE, Jairo K.; MOHR, Joana. Large Deviations for Quantum Spin probabilities at temperature zero. arXiv preprint arXiv:1505.01305, 2015.

[2] LOPES, Artur O. INTRODUÇÃO A MATEMÁTICA DA MECÂNICA QUÂNTICA. Disponível em: http://mat.ufrgs.br/∼alopes/hom/livroquantum.pdf

[3] BÉNY, Cédric; RICHTER, Florian. Algebraic approach to quantum theory: a finite-dimensional guide. arXiv preprint arXiv:1505.03106, 2015.