

UM MODELO MATEMÁTICO TRIDIMENSIONAL EM  
REGIME TRANSIENTE PARA ESTUDO DE CIRCU  
LAÇÃO EM ÁGUAS RASAS

CHRISTIANE BRISOLARA DE FREITAS

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

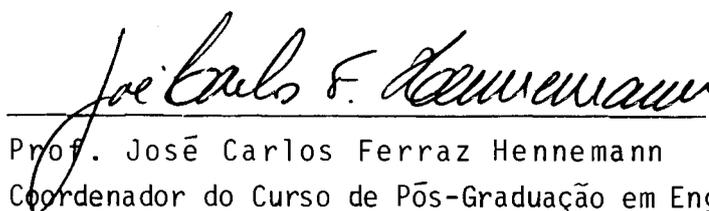
Porto Alegre

Dezembro de 1985

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



Prof. Armando Miguel Awruch  
Orientador



Prof. José Carlos Ferraz Hennemann  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

BANCA EXAMINADORA

Prof. Armando Miguel Awruch (Orientador)  
Ph.D. pela COPPE/UFRJ

Prof. Nelton Fernandes Bonilha  
M.Sc. pelo CPGEC/UFRJ

Prof. Paulo Antonio Corsetti  
M.Sc. pela COPPE/UFRJ

A meus pais  
e irmãos

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Armando Miguel Awruch por sua experiência transmitida e pela sua segura orientação.

Ao professor José Carlos Ferraz Hennemann, coordenador do curso de Pós-Graduação, e na sua pessoa aos demais professores deste curso.

Ao professor Henrique Jorge Brodbeck por sua valiosa colaboração na parte computacional.

Ao Conselho Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e à Coordenação do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

Aos amigos e colegas pelo incentivo e colaboração e a todos aqueles que de alguma maneira ajudaram na realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	01/04
CAPÍTULO I	
MODELO MATEMÁTICO DE SIMULAÇÃO DA CIRCULAÇÃO NUM SISTEMA DE ÁGUAS RASAS .....	05
1.1 - Introdução .....	05
1.2 - Equações governantes do movimento do fluido .....	05/12
1.3 - Condições de Contorno .....	12/14
1.4 - Resumo das equações que governam o movimento do fluido .....	15
CAPÍTULO II	
FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O MODELO DE CIRCULAÇÃO TRIDIMENSIONAL EM ÁGUAS RASAS .....	16
2.1 - Introdução .....	16
2.2 - Esquema computacional do método de elementos finitos .....	16
2.3 - Aplicação do método de elementos finitos nas equações que governam o problema .....	16/27
2.4 - Integração no tempo da equação que governa o problema .....	27/30
2.5 - Estudo do tipo de elemento e das funções de interpolação .....	30/41
2.6 - Sistema de coordenadas natural - Matriz Jacobiana .....	41

2.6.1 - Introdução .....	41
2.6.2 - A matriz jacobiana .....	41/44
2.7 - Integração numérica - Quadratura de Gauss .....	44/45

### CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, COM UM NOVO SISTEMA DE COORDENADAS, PARA O MODELO DE CIRCULAÇÃO TRIDIMENSIONAL EM ÁGUAS RASAS .....	46
3.1 - Introdução .....	46
3.2 - Um novo sistema de coordenadas .....	46/51
3.3 - Aplicação do método de elementos finitos nas equações que governam o problema, levando em conta o novo sistema de coordenadas .....	51/64
3.4 - Condições de contorno .....	64/65

### CAPÍTULO IV

ASPECTOS COMPUTACIONAIS E APLICAÇÕES DO MODELO .....	66
4.1 - Generalidades .....	66
4.2 - Fórmula de recorrência final .....	66/71
4.3 - Aspectos computacionais .....	72/73
4.4 - Aplicações do modelo .....	73/80

### CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	81
5.1 - Conclusões .....	81/82
5.2 - Sugestões .....	82

### APÊNDICE

ALTERNATIVAS PARA A SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CIRCULAÇÃO TRANSIENTE EM SISTEMAS HOMOGÊNEOS OU ESTRATIFICADOS COM A UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....	83/95
--	-------

BIBLIOGRAFIA ..... 96/102

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático para o estudo da circulação transiente em sistemas de águas rasas e a sua implementação no sistema HYDRO que é uma linguagem orientada para Hidrodinâmica, desenvolvida pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS.

O modelo visa descrever o fluxo em sistemas hídricos (lagos, estuários, rios) devido ao efeito de marés, ventos e rotação terrestre.

A solução das equações que governam o problema se obtém empregando o método de elementos finitos.

A particularidade deste modelo é a de tentar simular as características tridimensionais do movimento do fluido, podendo-se então determinar o perfil de velocidades

## ABSTRACT

The objective of this work is to present a mathematical model for the study of transient circulation in "shallow" water systems and its implementation in the HYDRO system, which is an oriented language for computational hydrodynamic developed by the Postgraduation Course in Civil Engineering at UFRGS.

This mathematical model aims to describe the flow in hydric systems (lakes, estuaries, rivers) induced by tidal effects, wind actions and earth movements.

The solution of the equations that govern the problem is obtained through the use of the finite element method.

One of the most important features of this model is its possibility to simulate the threedimensional characteristic of the flow, so that the velocity profile can be determined.

## INTRODUÇÃO

Tendo em vista o avanço populacional, o desenvolvimento de nossas cidades através do crescimento de seus parques industriais bem como o elevado custo de certas obras de engenharia onde determinadas ações, tais como as marés e os ventos têm grande incidência durante e depois de sua execução, torna-se imprescindível o conhecimento do movimento de nossos mananciais hidráulicos através de suas velocidades, assim como também as variações do nível de água. De posse destes dados pode-se então, estudar e planificar o abastecimento das cidades, o controle dos despejos industriais e domésticos e obter informações sobre o nível de poluição melhorando assim a qualidade de vida e assegurando às gerações futuras a sobrevivência de rios, lagos e estuários.

Muito se tem feito neste sentido. Primeiramente foram os modelos físicos com o inconveniente de sua construção e com os problemas de escala. Depois com o advento do computador eletrônico os modelos matemáticos começaram cada vez mais a ocupar um lugar de destaque e atualmente com a crescente massificação dos computadores a modelação matemática pode inclusive ser bastante sofisticada.

O comportamento de um sistema de águas rasas é definido por um sistema de equações às derivadas parciais, e no sentido de solucionar estas equações muitas soluções numéricas têm sido empregadas, sendo que os dois métodos mais usuais são os das diferenças finitas e o dos elementos finitos.

Tradicionalmente, o método das diferenças finitas foi usado para cálculos de fluxos por efeito de marés e ventos por muitos pesquisadores e engenheiros (por exemplo ref. [13], [28] ),

com dificuldades para satisfazer plenamente as condições de contorno e de compor um programa em termos gerais.

Para suprir estas faltas, o método de elementos finitos, que tem sido usado com grande sucesso na análise estrutural, foi aplicado para o estudo do fluxo em águas rasas por muitos pesquisadores (por exemplo ref. [8], [17], [38]) embora WEARE [42] tenha indicado que os modelos de elementos finitos empregados até esta data apresentavam desvantagens em tempo de processamento e armazenamento computacional em relação ao método das diferenças finitas.

Ainda assim, as pesquisas continuaram e trabalhos posteriores indicam que as dificuldades foram ou podem ser superadas [3],[11], [27].

Aperfeiçoaram-se os esquemas de integração no tempo fazendo com que não seja preciso iterações e triangularizando a matriz dos coeficientes uma só vez em todo o processo. Aliando-se a estes progressos as inúmeras vantagens do método dos elementos finitos tais como:

- as facilidades computacionais em tratar os contornos irregulares;
- a generalidade de um programa de análise de elementos finitos, que permite abordar um número ilimitado de problemas;
- as de poderem ser facilmente consideradas as amplas variações que aparecem nas propriedades físicas dos fluidos; consagram esta técnica como de inestimável valor em problemas hidrodinâmicos.

No presente trabalho desenvolve-se um modelo matemático tridimensional em regime transiente para estudo de circulação em águas rasas, usando a técnica de elementos finitos. Este modelo visa descrever o fluxo em sistemas hídricos tais como lagos, estuários e rios devido ao efeito de marés, ventos e rotação terrestre. A particularidade deste modelo é a de tentar simular as características tridimensionais do movimento do fluido, podendo-se então determinar o perfil de velocidades.

Sua implementação é feita no sistema HYDRO [1], que é uma linguagem orientada para hidrodinâmica computacional, desenvolvido pelo curso de pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre (Brasil).

Porque a implementação de um modelo tridimensional?

Na grande maioria de trabalhos pesquisados em que foram desenvolvidos modelos em elementos finitos bidimensionais, encontrou-se como sugestão, por ser mais conveniente, a montagem de um modelo tridimensional.

Através de uma breve revisão bibliográfica do assunto constatou-se que os modelos tridimensionais começaram a ser pesquisados a partir da década de 1970, utilizando-se o método das diferenças finitas (por exemplo ref. [18], [37], [29], [26]). Posteriormente realizou-se estes modelos usando o método de elementos finitos e que serão vistos com mais detalhes num apêndice deste trabalho.

Os modelos matemáticos para o estudo do fluxo, comumente são baseados numa integração vertical das equações diferenciais de movimento e continuidade. Em verdade, a estrutura vertical da circulação não é considerada. Este procedimento pode ser suficiente para muitos propósitos, porém quando ocorre uma considerável circulação que envolve o transporte de areias e materiais dissolvidos, este processo não pode ser reproduzido por equações integradas verticalmente, então requerem o desenvolvimento de modelos tridimensionais.

As vantagens dos modelos tridimensionais para a descrição de uma circulação com respeito a uma integração na profundidade (modelos bidimensionais) é evidente. O uso de um modelo tridimensional nos dará velocidades em função de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , isto nos fornecerá um perfil de velocidades mais real, ao invés de ser adotada uma distribuição de velocidades logarítmica, a qual é irreal no caso de uma circulação gerada por ventos.

Os modelos tridimensionais também são indicados para que a aceleração vertical não seja negligenciada num fluxo estratificado, que é simulado como resultado de diferentes densidades.

Muitos modelos tridimensionais nos últimos anos tem sido desenvolvidos por pesquisadores. Num apêndice, no final deste trabalho, apresenta-se uma revisão bibliográfica destes principais modelos.

O modelo proposto neste trabalho, é um modelo matemático tridimensional resolvido pelo método de elementos finitos.

Em geral, devido a diversos fatores, o fluxo em siste-

mas como estuários ou lagos é turbulento. Sendo o fenômeno da turbulência extremamente complexo em que operam muitos fatores, uma descrição física ou um tratamento matemático perfeito deste processo se torna impossível de ser realizado completamente até os dias de hoje.

Neste trabalho o coeficiente de viscosidade turbulenta é considerado como um valor constante, valor este arbitrário, empírico, embasado em valores comumente usados.

Obtém-se um perfil de velocidades levando-se em consideração a rotação terrestre através do parâmetro de coriolis e a descrição do fluxo através dos efeitos causados pelas marés e pelos ventos.

Este trabalho consta de cinco capítulos e de um apêndice de que estão divididos da seguinte maneira:

- No Capítulo I se deduz as equações governantes do movimento do fluido.

- No Capítulo II se aplica o método dos resíduos ponderados nas equações de águas rasas para colocá-las em uma forma integral, e a partir daí, se desenvolve uma formulação matemática empregando a técnica de elementos finitos. Neste capítulo são apresentadas as funções de interpolação para o elemento escolhido bem como o esquema de integração no tempo da equação que governa o problema.

- No Capítulo III é apresentado a formulação do método de elementos finitos, com um novo sistema de coordenadas, para o modelo proposto.

- No Capítulo IV se aplica o modelo proposto através de alguns exemplos, bem como as características de utilização do sistema HYDRO [1]. A solução computacional foi realizada no computador BURROUGHS B-6700 do Centro de Processamento de Dados da UFRGS, e a linguagem utilizada foi o EXTENDED ALGOL B-6700.

- No Capítulo V são apresentadas conclusões mostrando o desempenho do modelo proposto, assim como sugestões para os próximos trabalhos que futuramente poderão vir a ser desenvolvidos nesta área.

- E finalizando um apêndice sobre uma breve revisão bibliográfica onde são apresentados os principais modelos tridimensionais que utilizam para solução o método de elementos finitos.

# 1 - MODELO MATEMÁTICO DE SIMULAÇÃO DA CIRCULAÇÃO TRIDIMENSIONAL EM SISTEMAS DE ÁGUAS RASAS.

## 1.1 - Introdução

Todo problema que envolve simulação da circulação em águas rasas, "Shallow Water" na terminologia inglesa, pode ser expresso por meio de equações diferenciais que governam o sistema mais as condições de contorno.

## 1.2 - Equações Governantes do Movimento do Fluido

Assumindo que o fluxo é basicamente horizontal, o que implica em supor que existe uma distribuição hidrostática de pressões, as equações que governam o movimento de um fluido num sistema são as seguintes:

I - Equações da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) + f \rho v + \frac{\partial P}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vv) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw) - f_{\rho u} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (1.2.3)$$

II - Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.2.4)$$

onde:

$u, v, w$  são as componentes das velocidades nas direções dos eixos  $x, y, z$ , respectivamente;  $\rho$  é a massa específica do fluido;  $g$  a aceleração da gravidade;  $P$  é a pressão;  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}$  são as tensões normais e de cisalhamento;  $f$  é o coeficiente de Coriolis.

As duas primeiras equações são equações de quantidade de movimento. A terceira equação de movimento é substituída pela hipótese de distribuição hidrostática de pressão. A última é a equação da continuidade.

Supondo que  $\rho$  é constante e integrando a equação (1.2.3) se obtêm:

$$P = \int_z^{\eta} \rho g \, dz = \rho g (\eta - z) + P_{atm} \quad (1.2.5)$$

sendo que  $P_{atm}$  é a pressão atmosférica;  $\eta$  é a elevação da superfície livre em relação ao nível médio e aparece na figura abaixo.

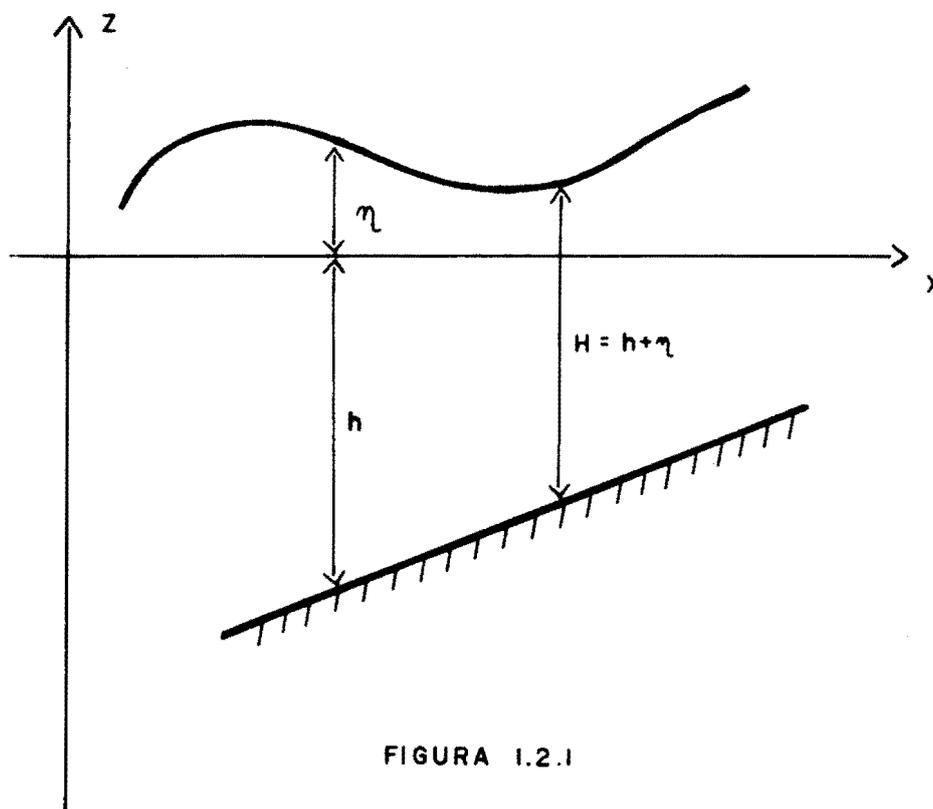


FIGURA 1.2.1

Num fluxo turbulento, as velocidades instantâneas  $u$ ,  $v$  e  $w$  vem dadas por:

$$\begin{aligned} u &= \langle u \rangle + u' \\ v &= \langle v \rangle + v' \\ w &= \langle w \rangle + w' \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

onde  $\langle u \rangle$  é a velocidade média de um ponto e  $u'$  a flutuação em torno de  $\langle u \rangle$ ,  $u'$  é também denominada velocidade instantânea de agitação, sendo que:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt$$

$$\begin{aligned}\langle v \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T v \, dt \\ \langle w \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T w \, dt\end{aligned}\quad (1.2.7)$$

onde  $T$  é um intervalo de tempo no qual a vazão se mantém constante.

Da mesma forma, pode escrever-se que:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \langle \tau_{ij} \rangle + \tau'_{ij} \\ p &= \langle p \rangle + p' \\ \rho &= \langle \rho \rangle + \rho'\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

Definidos os valores médios locais, as médias das flutuações devem ser nulas, ou seja:

$$\begin{aligned}\int_0^T \rho' \, dt = 0; \quad \int_0^T \tau'_{ij} \, dt = 0; \quad \int_0^T p' \, dt = 0; \\ \int_0^T u' \, dt = 0; \quad \int_0^T v' \, dt = 0; \quad \int_0^T w' \, dt = 0;\end{aligned}\quad (1.2.9)$$

De (1.2.6) se deduz que

$$\begin{aligned}uu &= \langle u \rangle \langle u \rangle + \langle u \rangle u' + u' \langle u \rangle + u' u' \\ uv &= \langle u \rangle \langle v \rangle + \langle u \rangle v' + u' \langle v \rangle + u' v' \\ uw &= \langle u \rangle \langle w \rangle + \langle u \rangle w' + u' \langle w \rangle + u' w'\end{aligned}\quad (1.2.10)$$

Tomando a média de (1.2.10), levando em conta (1.2.9) obtêm-se

$$\begin{aligned}\langle uu \rangle &= \langle u \rangle \langle u \rangle + \langle u' u' \rangle \\ \langle uv \rangle &= \langle u \rangle \langle v \rangle + \langle u' v' \rangle \\ \langle uw \rangle &= \langle u \rangle \langle w \rangle + \langle u' w' \rangle\end{aligned}\quad (1.2.11)$$

Considerando  $\rho = \text{cte}$ , e as expressões de (1.2.5) a (1.2.11) obtêm-se o seguinte sistema de equações depois de tomar a média no sistema constituído das equações de (1.2.1) a (1.2.4).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_{xx}}{\rho} - \langle u'u' \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{xy}}{\rho} - \langle u'v' \rangle \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{xz}}{\rho} - \langle u'w' \rangle \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tau_{xy}}{\rho} - \langle v'u' \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{yy}}{\rho} - \langle v'v' \rangle \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\tau_{yz}}{\rho} - \langle v'w' \rangle \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2.14)$$

onde  $u, v, w$  e  $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são valores médios e o símbolo  $\langle \rangle$  foi eliminado por conveniência.

De acordo à fórmula de Newton, pode deduzir-se que

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.15)$$

onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica ( $\nu = \mu/\rho$  é a viscosidade cinemática), e depende do fluido.

fazendo

$$\begin{aligned} - \langle u'u' \rangle &= \frac{\bar{\tau}_{xx}}{\rho} \\ - \langle u'v' \rangle &= - \langle v'u' \rangle = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\rho} = \frac{\bar{\tau}_{yx}}{\rho} \\ - \langle u'w' \rangle &= \frac{\bar{\tau}_{xz}}{\rho} \\ - \langle v'v' \rangle &= \frac{\bar{\tau}_{yy}}{\rho} \end{aligned}$$

$$- \langle v'w' \rangle = - \langle w'v' \rangle = \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\rho} = \frac{\bar{\tau}_{zy}}{\rho} \quad (1.2.16)$$

As  $\bar{\tau}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) são chamadas tensões de Reynolds e representam a forma tangencial média por unidade de superfície paralela ao fluxo devido a turbulência.

Usualmente se faz

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho \epsilon \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

onde  $\epsilon$  é o coeficiente de viscosidade mecânica, molar ou turbulenta, também é conhecido como fator de turbulência.  $\epsilon$  depende do fluxo e não do fluido.

Como o efeito de  $\tau_{ij}$  é muito pequeno em relação ao de  $\bar{\tau}_{ij}$ , são considerados somente os efeitos da turbulência.

Consideram-se os seguintes casos:

1 - Assume-se que  $\epsilon = \text{cte}$  em todo o sistema, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} &= \rho \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &+ \rho \epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \epsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &= \rho \epsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho \epsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \rho \epsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \rho \epsilon \Delta^2 u \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

pois:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta^2 u$$

onde  $\Delta^2$  é o laplaciano da função.  
da mesma forma:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} = \rho \epsilon \Lambda^2 v \quad (1.2.18)$$

2 - Assume-se que  $\epsilon_H \neq \epsilon_v$ , ou seja que são diferentes os coeficientes de viscosidade mecânica ou turbulenta no sentido horizontal e vertical, então:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + \rho \epsilon_H \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ & + \rho \epsilon_H \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \epsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ & = \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + \rho \epsilon_v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

da mesma forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} = \rho \epsilon_H \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho \epsilon_H \frac{\partial}{\partial y} \\ & \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho \epsilon_v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\ & + \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \epsilon_v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

levando em conta que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \quad (1.2.21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \quad (1.2.22)$$

póis:  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  e chamando  $c$  a relação  $\epsilon_v/\epsilon_H$ , ou se  
 ja  $c = \frac{\epsilon_v}{\epsilon_H}$  (1.2.23)

As expressões (1.2.19) e (1.2.20) podem então ser escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} = \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \quad (1.2.24)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} = \rho \epsilon_H \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \quad (1.2.25)$$

3 - Assume-se que o coeficiente de turbulência horizontal  $\bar{\epsilon}$  é constante e o vertical  $\bar{\epsilon}$  é uma função de  $z$ , ou seja  $\epsilon_v = \epsilon_v(z)$  então:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} = \rho \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + [c(z) - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \rho \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} \quad (1.2.26)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} = \rho \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + [c(z) - 1] \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \rho \frac{\partial \epsilon_v}{\partial z} \quad (1.2.27)$$

### 1.3 - Condições de contorno

As condições de contorno são as seguintes.

Na superfície.

$$-w(\eta) + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

$$P(\eta) = P_{atm} = 0 \quad (1.3.1)$$

Nos contornos "sólidos".

$$u = v = w = 0 \quad \text{em } S_1 \quad (1.3.2)$$

Nos contornos "abertos".

$$\eta = \bar{\eta}(t) \quad [ \bar{\eta}(t) = \text{Função prescrita} ] \quad \text{em } S_2 \quad (1.3.3)$$

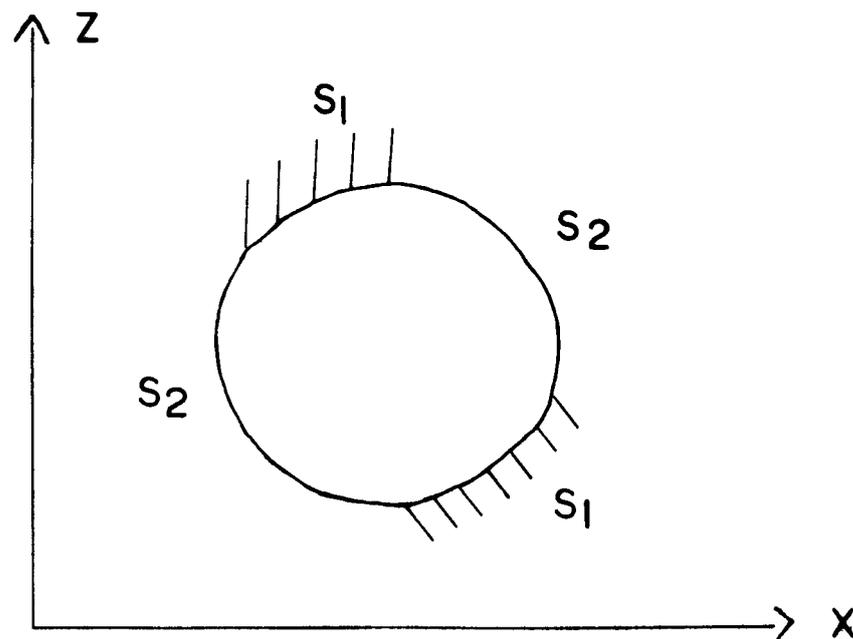


FIGURA 1.3.1

a) CONDIÇÃO DE CONTORNO "TERRA" ( $S_1$ )

b) CONDIÇÃO DE CONTORNO "ÁGUA" ( $S_2$ )

Quando se leva em conta a ação do vento, se faz:

$$\varepsilon_v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z = \eta} = \frac{\tau_x^s}{\rho}$$

$$\varepsilon_v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z = \eta} = \frac{\tau_y^s}{\rho} \quad (1.3.4)$$

onde  $\tau_x^s$  e  $\tau_y^s$  são as tensões tangenciais na superfície, provocadas pelo vento. Usualmente:

$$\tau_x^s = \gamma^2 \rho a V^2 \cos \theta$$

$$\tau_y^s = \gamma^2 \rho a V^2 \sin \theta \quad (1.3.5)$$

onde  $\gamma^2$  é um coeficiente de tensão do vento,  $\rho a$  a massa específica do ar,  $V$  a velocidade do vento e  $\theta$  o ângulo que a direção do vento forma com o sentido positivo do eixo  $\vec{x}$ .

Como  $\tau_x^s$  e  $\tau_y^s$  aparecem divididos por  $\rho$ , se pode fazer que  $K = \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho}$ , em geral  $K$  varia entre  $2,5 \times 10^{-6}$  e  $4,0 \times 10^{-6}$ . Usualmente se adota  $K = 3,2 \times 10^{-6}$ .

#### 1.4 - Resumo das equações que governam o movimento do fluido.

Resumindo, as equações que governam o movimento tridimensional do fluido são as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \epsilon_H \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_V \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_V \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \epsilon_H \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_V \frac{\partial v}{\partial z} + \epsilon_V \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_s = 0 \quad (1.4.4)$$

onde:

as duas primeiras são as equações da quantidade de movimento, a terceira equação é da continuidade considerando o fluido incompressível e a última é a condição de contorno cinemática na superfície.

## 2 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA O MO- DELO DE CIRCULAÇÃO TRIDIMENSIONAL EM ÁGUAS RASAS.

### 2.1 - Introdução

O método de elementos finitos é uma técnica largamente utilizada na solução de problemas matemáticos e físicos. Foi primeiramente desenvolvida para a mecânica dos sólidos, tornando-se uma ferramenta de vital importância na análise estrutural. A aplicação do método de elementos finitos à mecânica dos fluidos e a hidrodinâmica é relativamente recente, entretanto uma significativa literatura e uma larga utilização a consagram como técnica de inestimável valor.

### 2.2 - Esquema computacional do método de elementos finitos.

- a) Idealização e discretização do contínuo;
- b) Cálculo das matrizes do elemento;
- c) Montagem das equações que governam o problema;
- d) Aplicação das condições de contorno;
- e) Solução do sistema de equações;
- f) Apartir das variáveis obtidas na solução calcular, se for necessário, resultados secundários.

### 2.3 - Aplicação do método de elementos finitos nas equações que governam o problema.

Para levar as equações que governam o problema, apresentadas no Capítulo I, à uma forma integral usa-se o método dos resíduos ponderados em relação a  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \eta$ , que são quantidades arbitrárias. Então se tem:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + f v + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \right. \\ \left. - \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] \right\} \delta u \, d\Omega - \\ - \int_{S_z} \left( \frac{\tau_x^s}{\rho} - \epsilon_v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta u \, dx dy = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - f u + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \right. \\ \left. - \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] \right\} \delta v \, d\Omega - \\ - \int_{S_z} \left( \frac{\tau_y^s}{\rho} - \epsilon_v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v \, dx dy = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta w \, d\Omega = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u (\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v (\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} - w (\eta) \right] \delta \eta \, d\Omega = 0 \quad (2.3.4)$$

onde  $c = \frac{\epsilon_v}{\epsilon_H}$

Supondo uma função  $a = a(x, y, z)$ , e lembrando a fórmula de integração por partes, se tem que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 a(x, y, z)}{\partial x^2} \delta a \, dx dy dz = \int_{S_x} \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial x} \delta a \, dy dz - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial \delta a}{\partial x} \, dx dy dz \quad (2.3.5)$$

Integrando por partes os "termos viscosos", e levando em conta a expressão (2.3.5) se tem que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} \delta u + v \frac{\partial u}{\partial y} \delta u + w \frac{\partial u}{\partial z} \delta u + f v \delta u + \right. \\
 & + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta u + \epsilon_H \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \right. \\
 & + (c-1) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \left. \right] \left. \right\} d\Omega - \epsilon_H \int_{S_x} \frac{\partial u}{\partial x} \delta u ds_x - \\
 & - \epsilon_H \int_{S_y} \frac{\partial u}{\partial y} \delta u ds_y - \epsilon_H \int_{S_z} c \frac{\partial u}{\partial z} \delta u ds_z - \\
 & - \int_{S_z} \left( \frac{\tau_x^s}{\rho \epsilon_H} - c \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta u ds_z - \\
 & - \epsilon_H \int_{S_x} (c-1) \frac{\partial w}{\partial z} \delta u ds_x = 0 \quad (2.3.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + u \frac{\partial v}{\partial x} \delta v + v \frac{\partial v}{\partial y} \delta v + w \frac{\partial v}{\partial z} \delta v - f u \delta v + \right. \\
 & + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta v + \epsilon_H \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \right. \\
 & + (c-1) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \left. \right] \left. \right\} d\Omega - \epsilon_H \int_{S_x} \frac{\partial v}{\partial x} \delta v ds_x - \\
 & - \epsilon_H \int_{S_y} \frac{\partial v}{\partial y} \delta v ds_y - \epsilon_H \int_{S_z} c \frac{\partial v}{\partial z} \delta v ds_z - \\
 & - \int_{S_z} \left( \frac{\tau_y^s}{\rho \epsilon_H} - c \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v ds_z - \\
 & - \epsilon_H \int_{S_y} (c-1) \frac{\partial w}{\partial z} \delta v ds_y = 0 \quad (2.3.7)
 \end{aligned}$$

Os "termos viscosos", introduzem no modelo os efeitos da turbulência.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \delta w + \frac{\partial v}{\partial y} \delta w + \frac{\partial w}{\partial z} \delta w \right) d\Omega = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \eta + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta \eta - \right. \\ \left. - w(\eta) \delta \eta \right] d\Omega = 0 \quad (2.3.9)$$

sendo que:

$ds_x = dydz$ ;  $ds_y = dx dz$ ;  $ds_z = dx dy$ ,  $\Omega$  é o domínio do sistema em questão.

As integrais de contorno são condições naturais nos contornos "ABERTOS" ( $S_2$ ) e nulas nos contornos "SÓLIDOS" ( $S_1$ ).

Para introduzir o método de elementos finitos utilizam-se as seguintes expansões para as incógnitas, uma vez que o domínio foi discretizado com elementos de "n" nós:

$$u = \underline{\phi}^T \underline{u}^n; \quad v = \underline{\phi}^T \underline{v}^n; \quad w = \underline{\phi}^T \underline{w}^n; \quad \eta = \underline{\phi}^T \underline{\eta}^{n'} \quad (2.3.10)$$

onde  $\phi = \phi(x, y, z)$  são as funções de interpolação, o superíndice T indica transposição de matriz, o til indica matriz ou vetor (neste caso trata-se de vetores) e  $\underline{u}^n$ ,  $\underline{v}^n$ ,  $\underline{w}^n$ ,  $\underline{\eta}^{n'}$  são os vetores que contêm os valores nodais de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $\eta$ . Mais adiante representa-se a derivada em relação ao tempo com um ponto acima.

As funções de interpolação para  $\eta(x, y, t)$  são diferentes das funções das outras incógnitas já que  $\eta$  é independente de  $z$  ( $n'$  são os nós onde existem as incógnitas  $\eta$ ).

Introduzindo (2.3.10) em (2.3.6) e lembrando a arbitrariedade de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \eta$  obtêm-se:

$$\left[ \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega \right] \dot{\underline{u}}^n + \left\{ \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) (\underline{\phi}^T \underline{u}^n) d\Omega \right] + \right. \\ \left. + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) (\underline{\phi}^T \underline{v}^n) d\Omega \right] + \right. \\ \left. + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) (\underline{\phi}^T \underline{w}^n) d\Omega \right] \right\} \underline{u}^n +$$

$$\begin{aligned}
& + [ f \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega ] \underline{v}^n + [ g \int_{\Omega} (\underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x}) d\Omega ] \underline{v}^{n'} + \\
& + \{ \epsilon_H \int_{\Omega} [ ( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} ) + ( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} ) + \\
& + c ( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} ) ] d\Omega \} u^n + \\
& + [ \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) ( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} ) d\Omega ] w^n - \\
& - \int_{S_Z} ( \frac{\tau_X^S}{\rho} \underline{\phi}^T ) ds_Z = \underline{0} \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

Em uma forma compacta a (2.3.11) pode ser escrita da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
\underline{M}' \underline{\dot{u}}^n + (\underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z) \underline{u}^n + \underline{C} \underline{v}^n + \underline{G}_x \underline{v}^{n'} + \underline{F} \underline{u}^n + \\
+ \underline{N}_x \underline{w}^n - \underline{P}_x^{n'} = \underline{0} \quad (2.3.12)
\end{aligned}$$

onde:

$$\underline{M}' = \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega$$

$$\underline{A}_x = \int_{\Omega} ( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} ) ( \underline{\phi}^T \underline{u}^n ) d\Omega$$

$$\underline{A}_y = \int_{\Omega} ( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} ) ( \underline{\phi}^T \underline{v}^n ) d\Omega$$

$$\underline{A}_z = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \left( \underline{\phi}^T \underline{w}^n \right) d\Omega$$

$$\underline{C} = f \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \underline{\phi}^T \right) d\Omega$$

$$\underline{G}_x = g \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\underline{F} = \epsilon_H \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \right] d\Omega$$

$$\underline{N}_x = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{P}_x^{n'} = \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} v^2 \cos \theta \int_{s_z} \underline{\phi}'^T ds_z$$

Da mesma forma, introduzindo (2.3.10) em (2.3.7) obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \underline{\phi}^T \right) d\Omega \right] \dot{v}^n + \left\{ \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \left( \underline{\phi}^T \underline{u}^n \right) d\Omega \right] + \right. \\ & + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}^T \underline{v}^n \right) d\Omega \right] + \\ & \left. + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \left( \underline{\phi}^T \underline{w}^n \right) d\Omega \right] \right\} \underline{v}^n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ f \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega \right] \underline{u}^n + \left[ g \int_{\Omega} (\underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y}) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} + \\
& + \left\{ \epsilon_H \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \right] d\Omega \right\} \underline{v}^n + \\
& + \left[ \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega \right] \underline{w}^n - \int_{s_z} \left( \frac{\tau_y^s}{\rho} \underline{\phi}^T \right) ds_z = 0
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Em forma compacta a (2.3.13) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\underline{M}' \underline{\dot{v}}^n + (\underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z) \underline{v}^n - \underline{C} \underline{u}^n + \underline{G}_y \underline{\eta}^{n'} + \\
+ \underline{F} \underline{v}^n + \underline{N}_y \underline{w}^n - \underline{p}_y^{n'} = 0
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

onde:

$$\underline{M}' = \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega$$

$$\underline{A}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) (\underline{\phi}^T \underline{u}^n) d\Omega$$

$$\underline{A}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) (\underline{\phi}^T \underline{v}^n) d\Omega$$

$$\underline{A}_z = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) (\underline{\phi}^T \underline{w}^n) d\Omega$$

$$\underline{C} = f \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega$$

$$\underline{G}_y = g \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\underline{F} = \epsilon_H \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) + c \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) \right] d\Omega$$

$$\underline{N}_y = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$p_y^{n'} = \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} v^2 \text{Sen } \theta \int_{s_z} \underline{\phi}'^T ds_z$$

Introduzindo (2.3.10) em (2.3.8), obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) d\Omega \right] \underline{u}^n + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) d\Omega \right] \underline{v}^n + \\ & + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega \right] \underline{w}^n = \underline{0} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

ou em forma compacta

$$\underline{L}_x \underline{u}^n + \underline{L}_y \underline{v}^n + \underline{L}_z \underline{w}^n = \underline{0} \quad (2.3.16)$$

onde:

$$\underline{L}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\underline{L}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\underline{L}_z = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

Também introduzindo (2.3.10) em (2.3.9) se obtêm que

$$\left[ \int_{\Omega} (\underline{\phi}' \underline{\phi}'^T) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \right) (\underline{\phi}'^T \underline{u}^n(n)) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{v}^n(\eta) \right) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} - \\
& - \left[ \int_{\Omega} \underline{\phi}' \left( \underline{\phi}'^T \underline{w}^n(\eta) \right) d\Omega \right] = \underline{0}
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

ou em forma compacta

$$\underline{M}'' \dot{\underline{\eta}}^{n'} + (\underline{B}_x + \underline{B}_y) \underline{\eta}^{n'} - \underline{R} = \underline{0} \tag{2.3.18}$$

onde:

$$\underline{M}'' = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \underline{\phi}'^T \right) d\Omega$$

$$\underline{B}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{u}^n(\eta) \right) d\Omega$$

$$\underline{B}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{v}^n(\eta) \right) d\Omega$$

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{\phi}' \left( \underline{\phi}'^T \underline{w}^n(\eta) \right) d\Omega$$

Juntando (2.3.12), (2.3.14), (2.3.16) e (2.3.18) a equação matricial para um elemento  $\bar{e}$  a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}' & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}' & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{M}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{u}}^n \\ \underline{\dot{v}}^n \\ \underline{\dot{w}}^n \\ \underline{\dot{\eta}}^{n'} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F} & \underline{C} & \underline{N}_x & \underline{G}_x \\ - \underline{C} & \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F} & \underline{N}_y & \underline{G}_y \\ \underline{L}_x & \underline{L}_y & \underline{L}_z & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{B}_x + \underline{B}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{w}^n \\ \underline{\eta}^{n'} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{p}_x^{n'} \\ \underline{p}_y^{n'} \\ \underline{0} \\ \underline{R}(w(\eta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (2.3.19)$$

ou em forma compacta

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{K}(x) \underline{X} + \underline{P}_1(x) = \underline{0} \quad (2.3.20)$$

Na expressão (2.3.19) os termos lineares e não lineares podem ser separados em duas matrizes  $\underline{K}_1$  e  $\underline{K}_2(x)$  respectivamente.

Neste caso tem-se

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + [ \underline{K}_1 + \underline{K}_2(x) ] \underline{X} + \underline{P}_1(x) = \underline{0} \quad (2.3.21)$$

onde:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}' & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}' & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}'' \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{N}}_x & \underline{\underline{G}}_x \\ -\underline{\underline{C}} & \underline{\underline{F}} & \underline{\underline{N}}_y & \underline{\underline{G}}_y \\ \underline{\underline{L}}_x & \underline{\underline{L}}_y & \underline{\underline{L}}_z & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_2(x) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_x + \underline{\underline{A}}_y + \underline{\underline{A}}_z & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{A}}_x + \underline{\underline{A}}_y + \underline{\underline{A}}_z & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{B}}_x + \underline{\underline{B}}_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}_1(x) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_x^{n'} \\ \underline{\underline{P}}_y^{n'} \\ \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{R}}(w(n)) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{u}}}^n \\ \dot{\underline{\underline{v}}}^n \\ \dot{\underline{\underline{w}}}^n \\ \dot{\underline{\underline{p}}}^n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{X}} = \begin{bmatrix} \underline{u}^n \\ \underline{v}^n \\ \underline{w}^n \\ \underline{\eta}^n \end{bmatrix}$$

onde  $\underline{M}$  representa a matriz de massa para um elemento;  $\underline{K}_1$  é a matriz dos termos lineares;  $\underline{K}_2(x)$  é a matriz dos termos não lineares;  $\underline{\dot{X}}$  representa o vetor das derivadas da velocidade,  $\underline{X}$  indica o vetor das incógnitas;  $\underline{P}_1(x)$  é o vetor de cargas, onde  $\underline{P}_x^{n'}$  e  $\underline{P}_y^{n'}$  são devidos aos efeitos de vento e são tem alguns elementos não nulos.

#### 2.4 - Integração no tempo da equação que governa o problema (discretizada através de elementos finitos)

Depois de formar as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}_1$ ,  $\underline{K}_2$  e o vetor  $\underline{P}_1$  para cada elemento, devem seguir-se os seguintes passos:

- a) Montar as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}_1$ ,  $\underline{K}_2$  e o vetor  $\underline{P}_1$  para todos os elementos do sistema;
- b) Integrar no tempo a equação resultante;
- c) Aplicar as condições de contorno;
- d) Resolver o sistema de equações com a fórmula de recorrência obtida em (b);

Para integrar no tempo, a equação resultante é:

$$\underline{M} \underline{\dot{X}} + \underline{K}_1 \underline{X} + \underline{K}_2(x) \underline{X} + \underline{P}_1(x) = \underline{0} \quad (2.4.1)$$

sendo:

$$\underline{M} \dot{\underline{X}}_{\underline{t}} + \underline{K}_1 \underline{X}_{\underline{t}} + \underline{K}_2 (X_{\underline{t}}) \underline{X}_{\underline{t}} + \underline{P}_1 (X_{\underline{t}}) = \underline{0} \quad (2.4.1.a)$$

e

$$\begin{aligned} \underline{M} \dot{\underline{X}}_{\underline{t}+\Delta t} + \underline{K}_1 \underline{X}_{\underline{t}+\Delta t} + \underline{K}_2 (X_{\underline{t}+\Delta t}) \underline{X}_{\underline{t}+\Delta t} + \underline{P}_1 (X_{\underline{t}+\Delta t}) &= \\ = \underline{0} & \end{aligned} \quad (2.4.1.b)$$

Utiliza-se o método de diferenças finitas (regra trapezoidal) assumindo que

$$\frac{\underline{X}_{\underline{t}+\Delta t} - \underline{X}_{\underline{t}}}{\Delta t} = \frac{\dot{\underline{X}}_{\underline{t}+\Delta t} + \dot{\underline{X}}_{\underline{t}}}{2} \quad (2.4.2)$$

de onde

$$\dot{\underline{X}}_{\underline{t}+\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (\underline{X}_{\underline{t}+\Delta t} - \underline{X}_{\underline{t}}) - \dot{\underline{X}}_{\underline{t}} \quad (2.4.3)$$

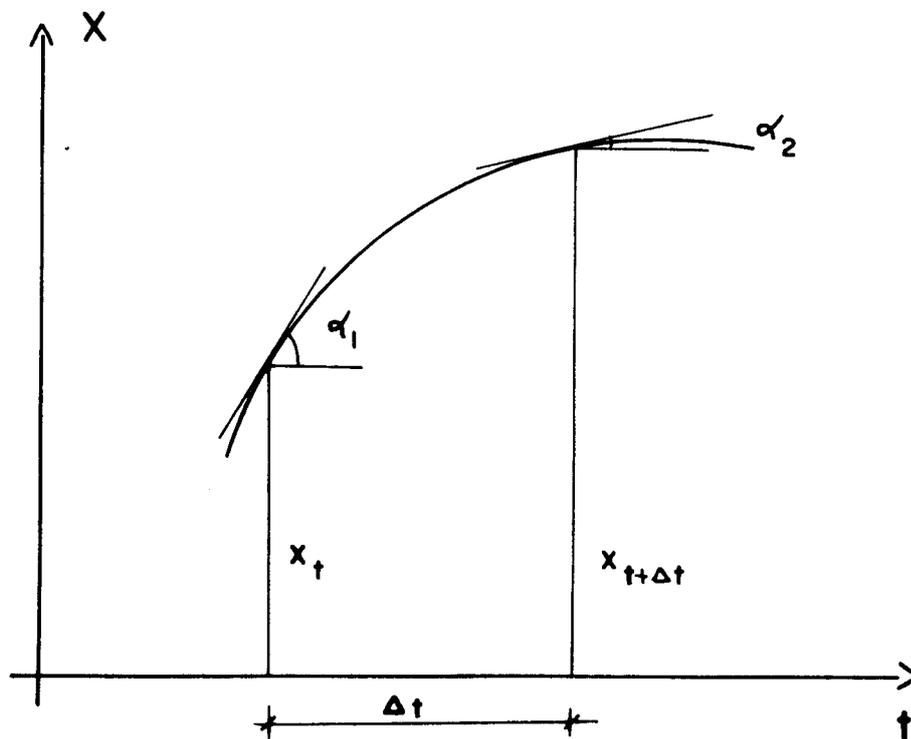


FIGURA 2.4.1

Introduzindo (2.4.3) em (2.4.1.b) e levando em conta (2.4.1.a) obtêm-se a seguinte fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K}_1 + \underline{K}_2 (X_{t+\Delta t}) \right] X_{t+\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \right. \\ & \left. - \underline{K}_1 - \underline{K}_2 (X_t) \right] X_t - \left[ \underline{P}_1 (X_t) + \underline{P}_1 (X_{t+\Delta t}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Como no membro da esquerda, a matriz dos coeficientes depende de  $X_{t+\Delta t}$ , deve ser modificada em cada intervalo de tempo. Isto implica em ter que decompor a matriz dos coeficientes muitas vezes, o que significa um aumento considerável do tempo de processamento.

Para evitar isto e decompor a matriz dos coeficientes uma só vez em todo o processo se emprega o seguinte esquema.

Se toma a equação (2.4.4) para o intervalo  $t+\Delta t$  e  $t+2\Delta t$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K}_1 + \underline{K}_2 (X_{t+2\Delta t}) \right] X_{t+2\Delta t} = \\ & = \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K}_1 - \underline{K}_2 (X_{t+\Delta t}) \right] X_{t+\Delta t} - \left[ \underline{P}_1 (X_{t+\Delta t}) + \right. \\ & \left. + \underline{P}_1 (X_{t+2\Delta t}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Somando membro a membro (2.4.4) e (2.4.5) e passando  $\underline{K}_2 (X_{t+\Delta t}) X_{t+\Delta t}$  e  $\underline{K}_2 (X_{t+2\Delta t}) X_{t+2\Delta t}$  ao segundo membro se obtêm:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K}_1 \right] X_{t+2\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K}_1 \right] X_t - 2\underline{K}_1 X_{t+\Delta t} - \\ & - \{ \underline{K}_2 (X_t) X_t + 2 \underline{K}_2 (X_{t+\Delta t}) X_{t+\Delta t} + \underline{K}_2 (X_{t+2\Delta t}) X_{t+2\Delta t} \} - \\ & - \underline{P}_1 (X_t) - 2 \underline{P}_1 (X_{t+\Delta t}) - \underline{P}_1 (X_{t+2\Delta t}) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Ao termo entre chaves pode aplicar-se o desenvolvimento de Taylor para o primeiro e o terceiro termo, expandindo em torno de  $t+\Delta t$  e desprezando termos de segunda ordem. Então tem-se que

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_2 (X_t) \tilde{X}_t + \tilde{K}_2 (X_{t+2\Delta t}) \tilde{X}_{t+2\Delta t} = \\ & = 2 \tilde{K}_2 (X_t) \tilde{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Juntando (2.4.6) e (2.4.7), obtêm-se a fórmula de recorrência final

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} + \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_{t+2\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} - \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_t - \\ & - 2 \tilde{K}_1 \tilde{X}_{t+\Delta t} - 4 \tilde{K}_2 (X_{t+\Delta t}) \tilde{X}_{t+\Delta t} - \{ \tilde{P}_1 (X_t) + \\ & + 2 \tilde{P}_1 (X_{t+\Delta t}) + \tilde{P}_1 (X_{t+2\Delta t}) \} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Neste esquema, não são requeridas iterações. Mostra-se eficiente em termos de tempo de processamento, embora seja necessário tomar intervalos de tempo iguais para manter estacionária a matriz do membro esquerdo.

O esquema está balanceado em  $t+\Delta t$  e tem um só passo, tem o inconveniente de que não é auto-iniciável, ou seja que para iniciar o processo é necessário conhecer

$$\tilde{X}_0 \quad \text{e} \quad \tilde{X}_{\Delta t}$$

## 2.5 - Estudo do tipo de elemento e das funções de interpolação.

Primeiramente foi realizado uma análise do elemento e das funções de interpolação para um problema bidimensional e de-

pois foi extrapolado para um problema tridimensional que é o objetivo deste trabalho.

Supõe-se a seguinte situação

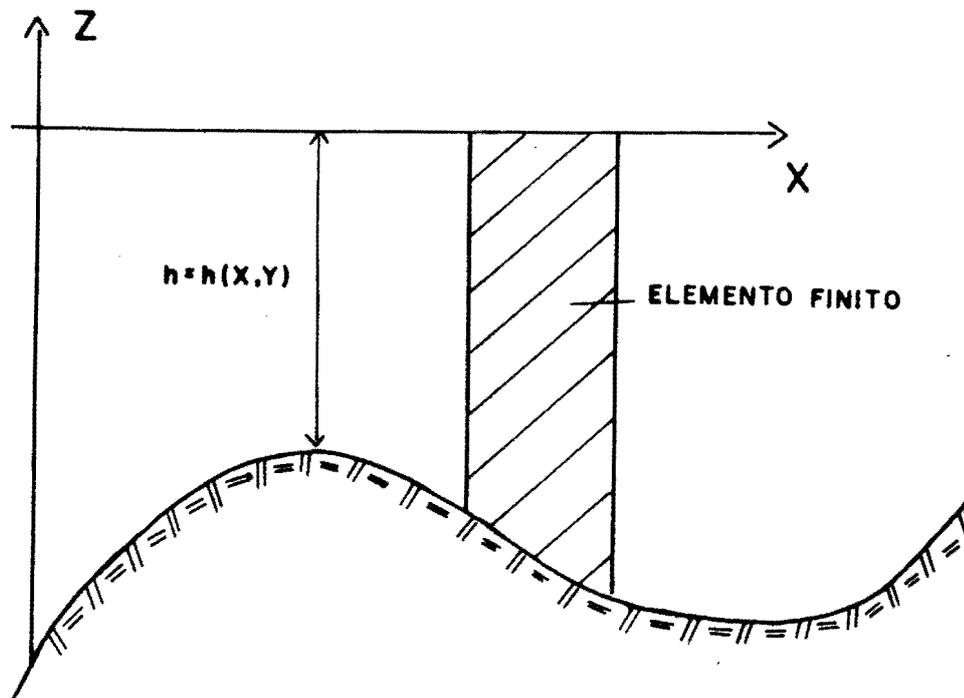


FIGURA 2.5.1

onde assume-se:

- 1) Funções de interpolação lineares para as coordenadas;
- 2) Funções de interpolação lineares no sentido horizontal para as incógnitas;
- 3) Funções de interpolação cúbicas, no sentido vertical para as incógnitas.

Então, pelas hipóteses anteriores não se trata de um elemento isoparamétrico em que a variação das funções de interpolação das incógnitas é a mesma variação das funções de interpolação da geometria, este tipo de elemento é subparamétrico em que a variação das funções de interpolação das incógnitas é maior do que a variação das funções de interpolação da geometria.

O elemento da figura (2.5.1) pode ser analisado da seguinte forma

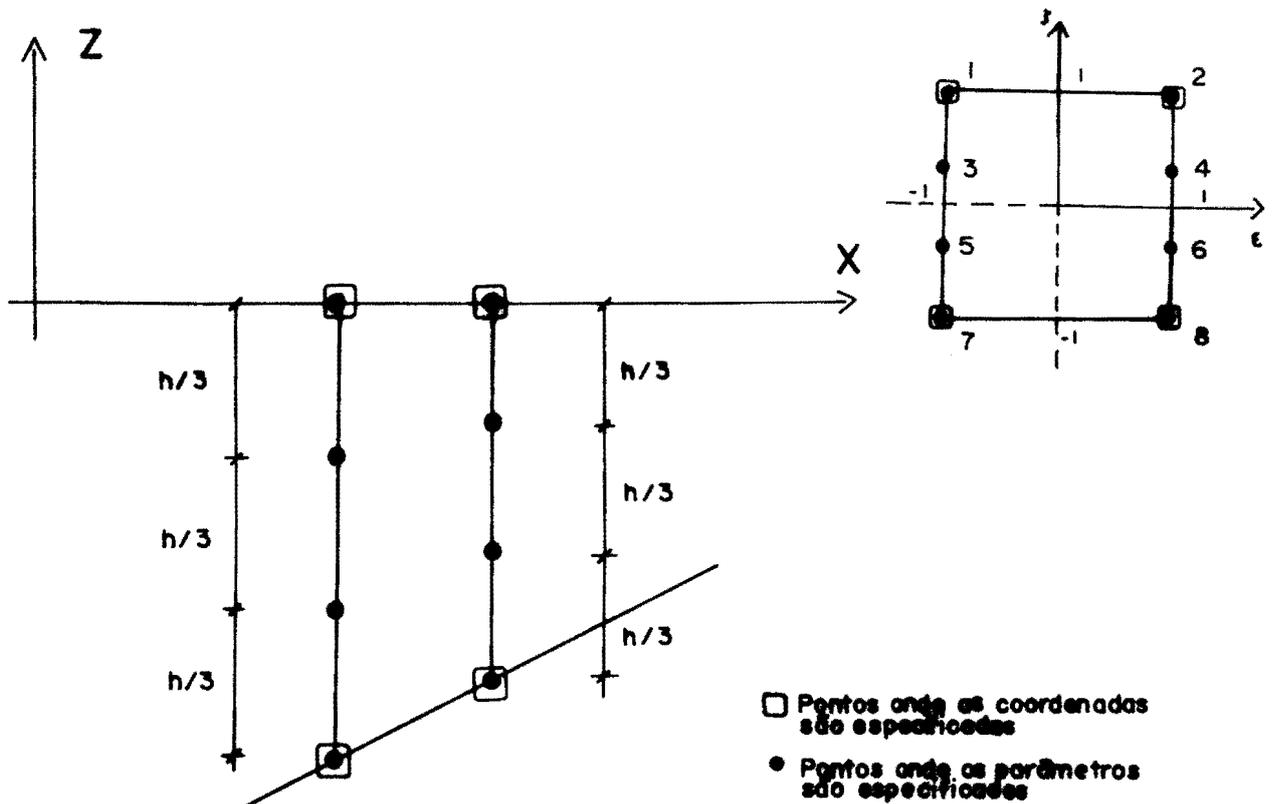


FIGURA 2.5.2

Para as coordenadas consideram-se os nós 1,2,7,8 e as funções de interpolação são as seguintes:

$$X_1 = \frac{1}{4} (1-\epsilon) (1 + \zeta) = X_1 (\epsilon, \zeta)$$

$$X_2 = \frac{1}{4} (1+\epsilon) (1 + \zeta) = X_2 (\epsilon, \zeta)$$

$$X_7 = \frac{1}{4} (1-\epsilon) (1 - \zeta) = X_7 (\epsilon, \zeta)$$

$$X_8 = \frac{1}{4} (1+\epsilon) (1 - \zeta) = X_8 (\epsilon, \zeta) \quad (2.5.1)$$

Para as incógnitas usam-se as funções lineares seguintes, no sentido horizontal

$$\Phi_1 (\epsilon) = \frac{1}{2} (1 - \epsilon)$$

$$\Phi_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) \quad (2.5.2)$$

E no sentido vertical, as seguintes funções.

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{1 + \zeta}{2}$$

$$\Psi_2(\zeta) = -\frac{9}{8} (\zeta^2 - 1)$$

$$\Psi_3(\zeta) = \frac{27}{8} \zeta (\zeta^2 - 1) \quad (2.5.3)$$

que são propostas na ref. [35].

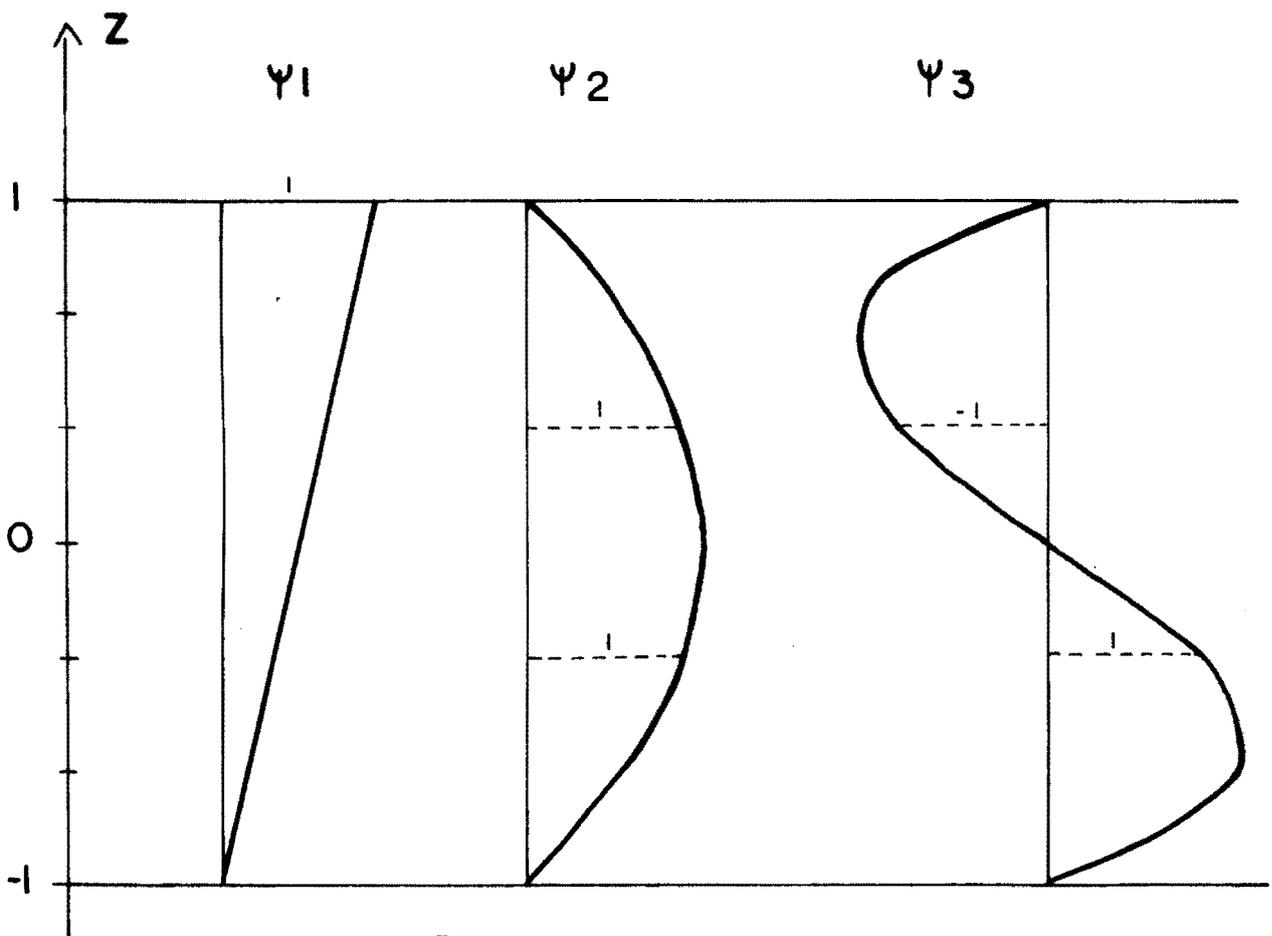


FIGURA 2.5.3

Analisando agora um parâmetro qualquer  $\mu = \mu(\varepsilon, \zeta)$

Para  $\zeta = 1$ , tem-se que  $\Psi_1(\zeta) = 1$  e  $\Psi_2(\zeta) = \Psi_3(\zeta) = 0$ , então fica:

$$\mu(\varepsilon, 1) = \phi_1(\varepsilon) \mu_1 + \phi_2(\varepsilon) \mu_2 \quad (2.5.4)$$

Para  $\varepsilon = -1$  (ou seja com  $\phi_1(\varepsilon) = 1$  e  $\phi_2(\varepsilon) = 0$ ), a variação se  $\mu(-1, \zeta)$  não pode ser colocada na forma

$$\mu(-1, \zeta) = \Psi_1(\zeta) \mu_1 + \Psi_2(\zeta) \mu_3 + \Psi_3(\zeta) \mu_5 \quad (2.5.5)$$

pois se  $\zeta = \frac{1}{3}$  (ou seja no n $\bar{o}$  3) tem-se:

$$\mu\left(-1, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \mu_1 + \mu_3 - \mu_5 \quad (2.5.6)$$

quando se sabe que  $\mu\left(-1, \frac{1}{3}\right) = \mu_3$ , da mesma forma, se  $\zeta = -\frac{1}{3}$

(ou seja no n $\bar{o}$  5) tem-se:

$$\mu\left(-1, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 \quad (2.5.7)$$

quando se sabe que  $\mu\left(-1, -\frac{1}{3}\right) = \mu_5$ .

Então, levando em conta as considerações anteriores, se faz

$$\mu(-1, \zeta) = \Psi_1(\zeta) \mu_1 + \Psi_2(\zeta) A_1 + \Psi_3(\zeta) A_2 \quad (2.5.8)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são parâmetros a determinar.

Para  $\zeta = \frac{1}{3}$  e  $\zeta = -\frac{1}{3}$  respectivamente se tem (sempre com  $\varepsilon = -1$ )

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{2}{3} \mu_1 + A_1 - A_2 \\ \mu_5 &= \frac{1}{3} \mu_1 + A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

De (2.5.9) obtêm-se que

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} ( - \mu_1 + \mu_3 + \mu_5 ) \\ A_2 &= \frac{1}{2} ( \frac{\mu_1}{3} - \mu_3 + \mu_5 ) \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Introduzindo (2.5.10) em (2.5.8) obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mu (-1, \zeta) &= [ \psi_1 (\zeta) - \frac{1}{2} \psi_2 (\zeta) + \frac{1}{6} \psi_3 (\zeta) ] \mu_1 + \\ &+ \frac{1}{2} [ \psi_2 (\zeta) - \psi_3 (\zeta) ] \mu_3 + \frac{1}{2} [ \psi_2 (\zeta) + \psi_3 (\zeta) ] \mu_5 = \\ &= \alpha_1 (\zeta) \mu_1 + \alpha_2 (\zeta) \mu_3 + \alpha_3 (\zeta) \mu_5 \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Da mesma forma

$$\mu (1, \zeta) = \alpha_1 (\zeta) \mu_2 + \alpha_2 (\zeta) \mu_4 + \alpha_3 (\zeta) \mu_6 \quad (2.5.12)$$

Fazendo

$$\zeta = 1, \zeta = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \zeta = -\frac{1}{3} \quad \text{tem-se:}$$

$$\begin{aligned} \mu (\varepsilon, 1) &= \Phi_1 (\varepsilon) \mu_1 + \Phi_2 (\varepsilon) \mu_2 \\ \mu (\varepsilon, \frac{1}{3}) &= \Phi_1 (\varepsilon) \mu_3 + \Phi_2 (\varepsilon) \mu_4 \\ \mu (\varepsilon, -\frac{1}{3}) &= \Phi_1 (\varepsilon) \mu_5 + \Phi_2 (\varepsilon) \mu_6 \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Juntando (2.5.11), (2.5.12) e (2.5.13) tem-se:

$$\begin{aligned} \mu (\varepsilon, \zeta) &= \Phi_1 (\varepsilon) \alpha_1 (\zeta) \mu_1 + \Phi_2 (\varepsilon) \alpha_1 (\zeta) \mu_2 + \\ &+ \Phi_1 (\varepsilon) \alpha_2 (\zeta) \mu_3 + \Phi_2 (\varepsilon) \alpha_2 (\zeta) \mu_4 + \Phi_1 (\varepsilon) \alpha_3 (\zeta) \mu_5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \phi_2(\epsilon) \alpha_3(\zeta) \mu_6 &= \phi_1 \mu_1 + \phi_2 \mu_2 + \phi_3 \mu_3 + \phi_4 \mu_4 + \\
 + \phi_5 \mu_5 + \phi_6 \mu_6 &= \sum_{i=1}^6 \phi_i \mu_i
 \end{aligned}
 \quad (2.5.14)$$

onde

$$\phi_i = \phi_i(\epsilon, \zeta)$$

Análise do elemento e das funções de forma para um problema tridimensional.

CASO I:

Agora o elemento é o seguinte:

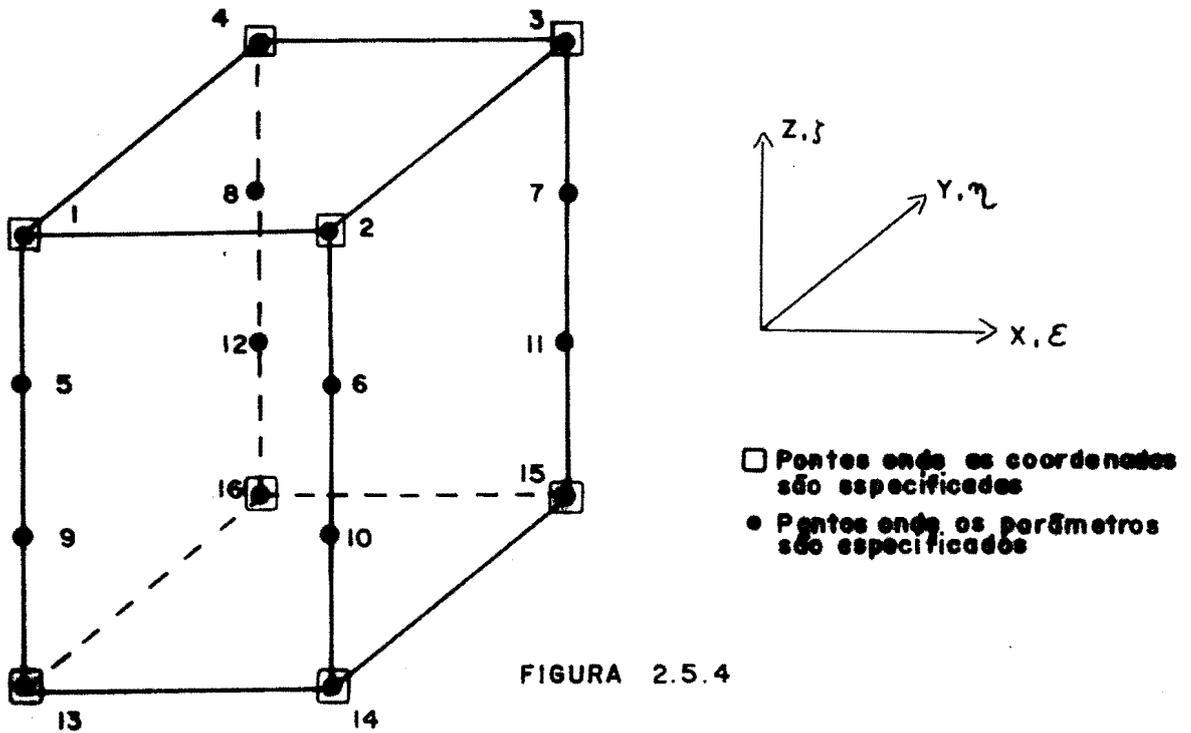


FIGURA 2.5.4

Para as coordenadas consideram-se as seguintes funções de forma:

$$\chi_1(\epsilon, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 - \epsilon) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$\chi_2(\epsilon, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \epsilon) (1 - \eta) (1 + \zeta)$$

$$\chi_3(\epsilon, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \epsilon) (1 + \eta) (1 + \zeta)$$

$$\begin{aligned}
\chi_4 (\varepsilon, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \varepsilon) (1 + \eta) (1 + \zeta) \\
\chi_{13} (\varepsilon, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \varepsilon) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\
\chi_{14} (\varepsilon, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \varepsilon) (1 - \eta) (1 - \zeta) \\
\chi_{15} (\varepsilon, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 + \varepsilon) (1 + \eta) (1 - \zeta) \\
\chi_{16} (\varepsilon, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8} (1 - \varepsilon) (1 + \eta) (1 - \zeta) \quad (2.5.15)
\end{aligned}$$

Para as incógnitas usam-se as seguintes funções lineares, no sentido horizontal.

$$\begin{aligned}
\Phi_1 (\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \varepsilon) (1 - \eta) \\
\Phi_2 (\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \varepsilon) (1 - \eta) \\
\Phi_3 (\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \varepsilon) (1 + \eta) \\
\Phi_4 (\varepsilon, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \varepsilon) (1 + \eta) \quad (2.5.16)
\end{aligned}$$

E no sentido vertical as funções cúbicas dadas na expressão (2.5.3).

Fazendo uma análise exatamente igual ao que foi realizado para o elemento bidimensional, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu (-1, -1, \zeta) &= \alpha_1 (\zeta) \mu_1 + \alpha_2 (\zeta) \mu_5 + \alpha_3 (\zeta) \mu_9 \\
\mu (1, -1, \zeta) &= \alpha_1 (\zeta) \mu_2 + \alpha_2 (\zeta) \mu_6 + \alpha_3 (\zeta) \mu_{10} \\
\mu (1, 1, \zeta) &= \alpha_1 (\zeta) \mu_3 + \alpha_2 (\zeta) \mu_7 + \alpha_3 (\zeta) \mu_{11} \\
\mu (-1, 1, \zeta) &= \alpha_1 (\zeta) \mu_4 + \alpha_2 (\zeta) \mu_8 + \alpha_3 (\zeta) \mu_{12} \quad (2.5.17)
\end{aligned}$$

onde

$$\alpha_1(\zeta) = \left[ \psi_1(\zeta) - \frac{1}{2} \psi_2(\zeta) + \frac{1}{6} \psi_3(\zeta) \right]$$

$$\alpha_2(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ \psi_2(\zeta) - \psi_3(\zeta) \right]$$

$$\alpha_3(\zeta) = \frac{1}{2} \left[ \psi_2(\zeta) + \psi_3(\zeta) \right]$$

Fazendo  $\zeta = 1$ ,  $\zeta = \frac{1}{3}$  e  $\zeta = -\frac{1}{3}$  obtêm-se:

$$\mu(\varepsilon, \eta, 1) = \phi_1(\varepsilon, \eta) \mu_1 + \phi_2(\varepsilon, \eta) \mu_2 + \phi_3(\varepsilon, \eta) \mu_3 +$$

$$+ \phi_4(\varepsilon, \eta) \mu_4$$

$$\mu\left(\varepsilon, \eta, \frac{1}{3}\right) = \phi_1(\varepsilon, \eta) \mu_5 + \phi_2(\varepsilon, \eta) \mu_6 + \phi_3(\varepsilon, \eta) \mu_7 +$$

$$+ \phi_4(\varepsilon, \eta) \mu_8$$

$$\mu\left(\varepsilon, \eta, -\frac{1}{3}\right) = \phi_1(\varepsilon, \eta) \mu_9 + \phi_2(\varepsilon, \eta) \mu_{10} +$$

$$+ \phi_3(\varepsilon, \eta) \mu_{11} + \phi_4(\varepsilon, \eta) \mu_{12} \quad (2.5.18)$$

Juntando (2.5.17) e (2.5.18) obtêm-se:

$$\mu(\varepsilon, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{12} \phi_i(\varepsilon, \eta, \zeta) \mu_i \quad (2.5.19)$$

onde:

$$\phi_1 = \phi_1 \alpha_1; \quad \phi_2 = \phi_2 \alpha_1; \quad \phi_3 = \phi_3 \alpha_1; \quad \phi_4 = \phi_4 \alpha_1;$$

$$\phi_5 = \phi_1 \alpha_2; \quad \phi_6 = \phi_2 \alpha_2; \quad \phi_7 = \phi_3 \alpha_2; \quad \phi_8 = \phi_4 \alpha_2;$$

$$\phi_9 = \phi_1 \alpha_3; \quad \phi_{10} = \phi_2 \alpha_3; \quad \phi_{11} = \phi_3 \alpha_3; \quad \phi_{12} = \phi_4 \alpha_3;$$

$$(2.5.20)$$

As funções  $\phi_j(\epsilon, \eta)$  vem dadas pela expressão (2.5.16) e as  $\alpha_j$  dadas pela (2.5.11) são as seguintes:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\zeta) &= \frac{1}{16} (9\zeta^3 + 9\zeta^2 - \zeta - 1) \\ \alpha_2(\zeta) &= \frac{9}{16} (-3\zeta^3 - \zeta^2 + 3\zeta + 1) \\ \alpha_3(\zeta) &= \frac{9}{16} (3\zeta^3 - \zeta^2 - 3\zeta + 1)\end{aligned}\quad (2.5.21)$$

As funções  $\phi_j(\epsilon, \eta)$  são iguais as  $\phi^i$  incluídas nas expressões (2.3.11) a (2.3.20).

CASO II:

Sendo o elemento tridimensional da seguinte forma:

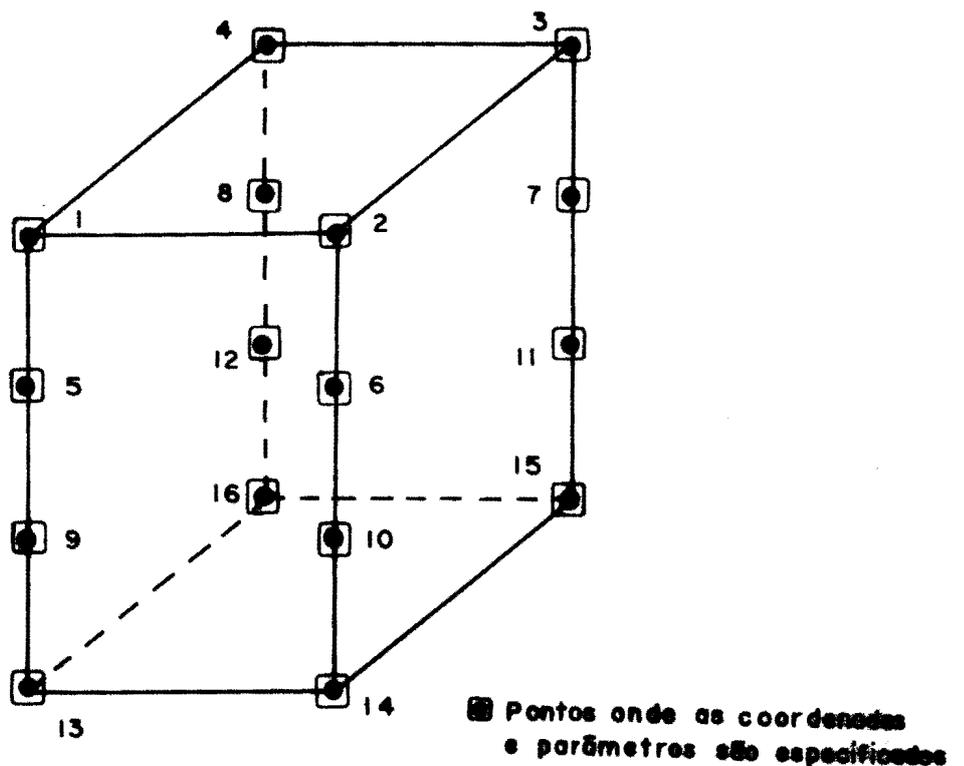


FIGURA 2.5.5

Descreve-se a geometria do elemento com as mesmas funções de interpolação que são usadas para as incógnitas, tornando assim o elemento anteriormente subparamétrico em um elemento isoparamétrico.

Optando-se por este último para a implementação final, por ser o elemento isoparamétrico de mais fácil manipulação e os resultados obtidos com os dois tipos de elementos foram coincidentes.

Considera-se, então para as coordenadas as funções de forma de (2.5.20) ao invés das funções de (2.5.15) onde são adicionadas  $\phi_{13}$ ,  $\phi_{14}$ ,  $\phi_{15}$  e  $\phi_{16}$ .

sendo

$$\alpha_4(\zeta) = \frac{1}{16} (-9\zeta^3 + 9\zeta^2 + \zeta - 1) \quad (2.5.22)$$

As funções (2.5.20) para as coordenadas tornam-se então:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1 \alpha_1; \quad \phi_2 = \phi_2 \alpha_1; \quad \phi_3 = \phi_3 \alpha_1; \quad \phi_4 = \phi_4 \alpha_1; \\ \phi_5 &= \phi_1 \alpha_2; \quad \phi_6 = \phi_2 \alpha_2; \quad \phi_7 = \phi_3 \alpha_2; \quad \phi_8 = \phi_4 \alpha_2; \\ \phi_9 &= \phi_1 \alpha_3; \quad \phi_{10} = \phi_2 \alpha_3; \quad \phi_{11} = \phi_3 \alpha_3; \quad \phi_{12} = \phi_4 \alpha_3; \\ \phi_{13} &= \phi_1 \alpha_4; \quad \phi_{14} = \phi_2 \alpha_4; \quad \phi_{15} = \phi_3 \alpha_4; \quad \phi_{16} = \phi_4 \alpha_4; \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

Sendo como anteriormente as funções  $\phi_i$  ( $\epsilon, \eta$ ) dadas em (2.5.16) e as  $\alpha_i$  ( $\zeta$ ) em (2.5.21) e (2.5.22).

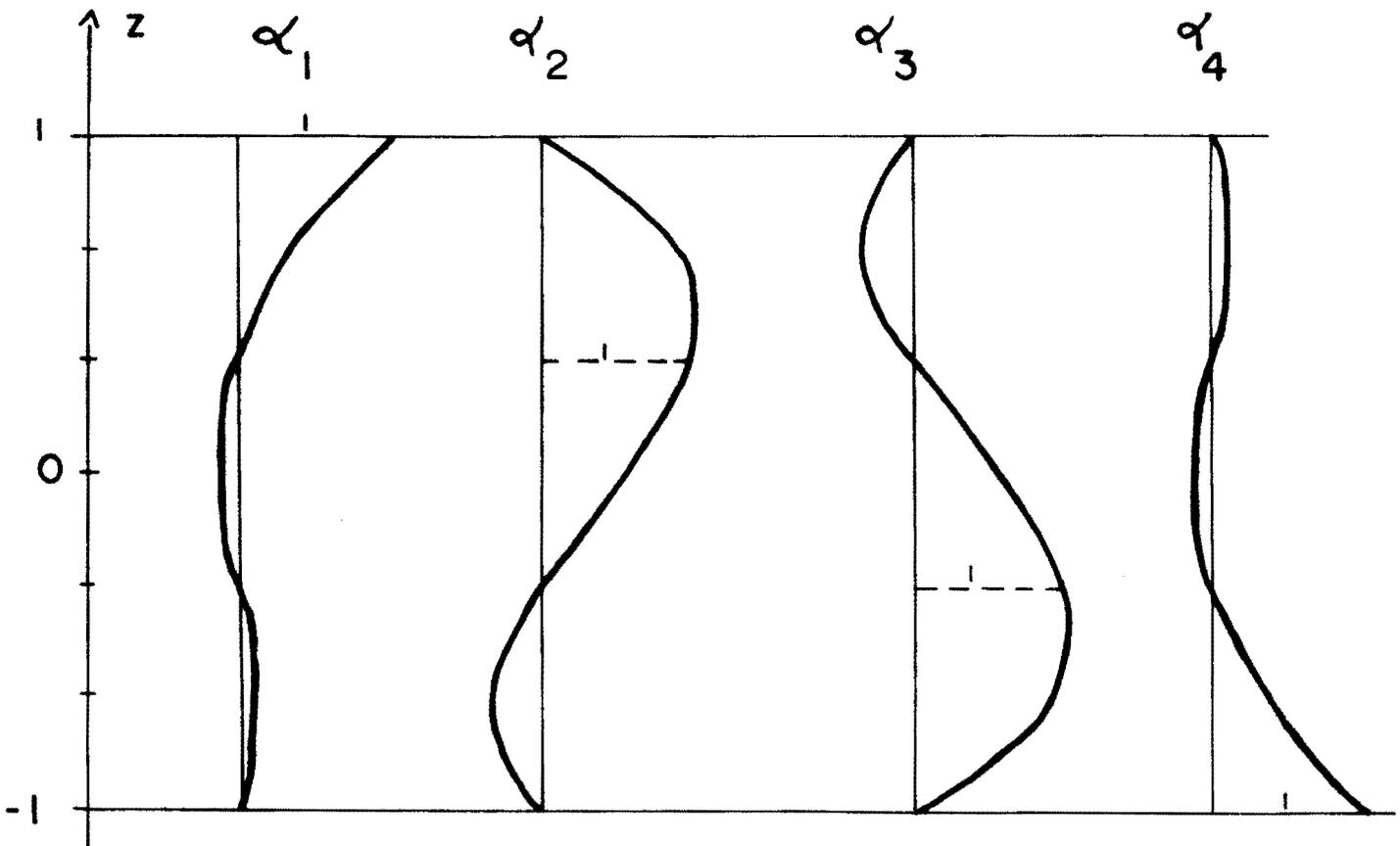


FIGURA 2.5.6 - Funções de forma no sentido vertical

## 2.6 - Sistema de coordenadas natural - Matriz Jacobiana.

### 2.6.1 - Introdução

O uso do sistema de coordenadas natural é extremamente vantajoso para elementos bi e tridimensionais onde os contornos podem ser deformados.

A função de forma  $\phi$  é definida em termos de  $\epsilon, \eta$  e  $\zeta$  que são coordenadas locais variáveis.

### 2.6.2 - A Matriz Jacobiana

Sejam  $x, y$  e  $z$  as coordenadas globais e  $\epsilon, \eta$  e  $\zeta$  as coor

denadas locais. Sabe-se que as derivadas de qualquer das  $\phi_i(\epsilon, \eta, \zeta)$  de (2.5.23) podem calcular-se da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 12) \quad (2.6.2.1)$$

onde  $[J]$  é a matriz jacobiana e vem dada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} & \frac{\partial y}{\partial \epsilon} & \frac{\partial z}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.6.2.2)$$

As coordenadas  $x, y, z$  são expandidas, usando as funções de interpolação expressas em (2.5.16), (2.5.21) e (2.5.22), na forma

$$x = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{x}^n ; \quad y = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{y}^n ; \quad z = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{z}^n ; \quad (2.6.2.3)$$

onde o superíndice "n" indica os valores nodais das coordenadas.

Introduzindo (2.6.2.3) em (2.6.2.2) obtêm-se:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \epsilon} \tilde{x}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \epsilon} \tilde{y}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \epsilon} \tilde{z}^n \\ \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \tilde{x}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \tilde{y}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \tilde{z}^n \\ \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \tilde{x}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \tilde{y}^n & \frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \tilde{z}^n \end{bmatrix} \quad (2.6.2.4)$$

As  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \epsilon}$ ,  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \eta}$  e  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}$  são obtidas a partir de (2.5.16), (2.5.21) e (2.5.22).

As  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial y}$  e  $\frac{\partial \phi(\epsilon, \eta, \zeta)}{\partial z}$  são calculadas através de (2.6.2.1).

Sendo que  $[J]^{-1}$  pode se obter através de (2.6.2.4); o vetor  $\phi$  tem por componentes todas as  $\phi_i$ . As derivadas em relação a  $x$ ,  $y$ , e  $z$  aparecem nas integrais que surgem da formulação do método dos resíduos ponderados, como estas integrais são realizadas no volume do elemento, o volume diferencial  $d\Omega = dx dy dz$  pode ser levado em termos de  $d\epsilon d\eta d\zeta$  fazendo

$$dx dy dz = \det [J] d\epsilon d\eta d\zeta \quad (2.6.2.5)$$

onde  $\det [J]$  é o determinante da matriz jacobiana dada por (2.6.2.4).

As integrais obtidas a partir da aplicação do método dos resíduos ponderados podem ser escritos na seguintes forma

$$\iiint_{\Omega} g(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\epsilon, \eta, \zeta) \det [J] d\epsilon d\eta d\zeta \quad (2.6.2.6)$$

onde a função  $f(\epsilon, \eta, \zeta)$  é função dos  $\phi_i(\epsilon, \eta, \zeta)$  dadas em (2.5.16) (2.5.21) e (2.5.22), de suas derivadas primeiras (calculadas em (2.6.2.1) e do determinante da matriz jacobiana.

A integral do segundo membro de (2.6.2.6) deve ser calculada usando a integração numérica, e o método mais empregado nestes casos é o da quadratura de Gauss.

## 2.7 - Integração numérica - Quadratura de Gauss.

Na integração numérica emprega-se a fórmula de integração de Gauss, para um domínio tridimensional se tem

$$I = \iiint f(\epsilon, \eta, \zeta) \det [J] d\epsilon d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k f(\epsilon_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (2.7.1)$$

onde as  $w_i$ ,  $w_j$  e  $w_k$  são as funções de "peso", as  $\epsilon_i$ ,  $\eta_j$ , e  $\zeta_k$  são pontos especificados do domínio e "n" o número de pontos adotados. Se  $f(\epsilon)$  é um polinômio com "n" pontos se obtém a integral exata se o grau de  $f(\epsilon)$  é de  $2n - 1$ .

Na formulação do método de elementos finitos, a integral com polinômio de mais alto grau é

$$\iiint_{\Omega} \underline{\phi} \underline{\phi}^T d_{\Omega} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\phi}(\epsilon, \eta, \zeta) \underline{\phi}^T(\epsilon, \eta, \zeta) \det [J] d\epsilon d\eta d\zeta \quad (2.7.2)$$

onde o superíndice T indica transposição e  $\underline{\phi}(\epsilon, \eta, \zeta) \underline{\phi}^T(\epsilon, \eta, \zeta) \det [J] = f(\epsilon, \eta, \zeta)$ .

Fixando  $\zeta$ , por exemplo  $\zeta = 1$ , a função  $f(\epsilon, \eta, \zeta)$  passa a ser uma função de  $\epsilon$  e  $\eta$  somente; as funções  $\alpha_i(\zeta)$  (com  $i = 1, 2, 3$ ) tomam valores constantes (no caso que  $\zeta = 1$ , resulta  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ) e a integral fica

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\phi}(\epsilon, \eta) \underline{\phi}^T(\epsilon, \eta) \det [J] d\epsilon d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(\epsilon, \eta) d\epsilon d\eta \quad (2.7.3)$$

onde as  $\phi_i(\epsilon, \eta)$  componentes de  $\Phi(\epsilon, \eta)$  estão dadas em (2.5.16). A função  $q(\epsilon, \eta)$  é cúbica (o  $\det [J]$  é de 1ª ordem) e são necessários 2 pontos de integração em cada direção (num total de 4 pontos), para poder calcular exatamente a integral (2.7.3).

A função  $f(\epsilon, \eta, \zeta)$  é de grau 7 e então, no sentido vertical, são necessários 4 pontos para poder calcular exatamente a integral (2.7.2).

Então, resumindo são tomados 2 pontos nas direções  $\epsilon$  e  $\eta$  e 4 pontos na de  $\zeta$  dando um total de 16 pontos de integração por elemento.

### 3 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, COM UM NOVO SISTEMA DE COORDENADAS, PARA O MODELO DE CIRCULAÇÃO TRIDIMENSIONAL EM ÁGUAS RASAS.

#### 3.1 - Introdução

A formulação do método de elementos finitos, no sistema de coordenadas anteriores, não apresentou resultados satisfatórios, principalmente em problemas com declividades bastantes acentuadas no fundo. E como no sentido vertical existe uma variação da profundidade em forma permanente é conveniente fazer uma transformação de coordenadas, tal como é recomendado na ref [24].

#### 3.2 - Um novo sistema de coordenadas.

Como já foi visto, nos capítulos anteriores, as equações que governam o problema supondo  $\rho = \text{cte}$  são as seguintes:

##### I - Equações de movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} -$$

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (3.2.3)$$

II - Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.4)$$

III - Condição cinemática na superfície

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - w|_{z=\eta} = 0 \quad (3.2.5)$$

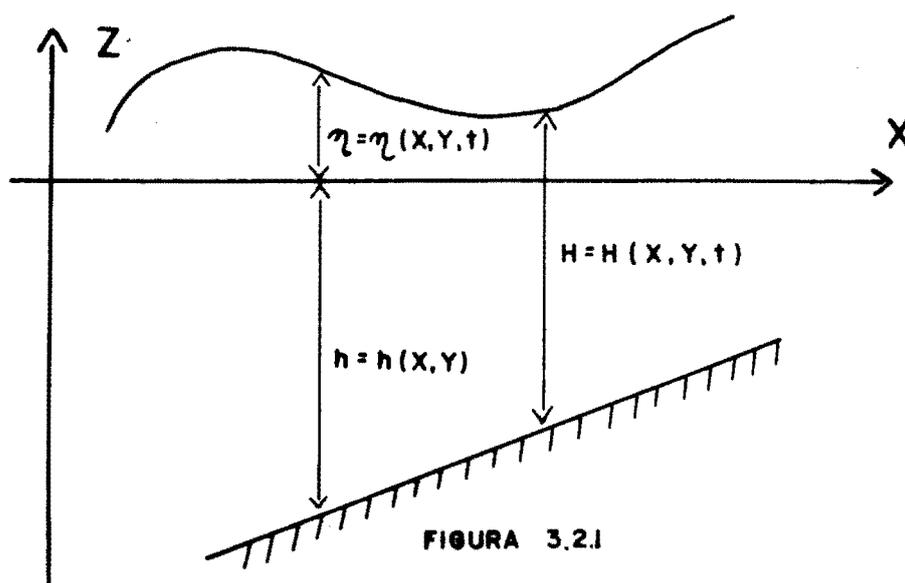
Como existe uma variação de profundidade em forma permanente é conveniente fazer uma transformação de coordenadas no sentido vertical, dando assim um outro enfoque ao problema.

Esta transformação vem dada por:

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = \frac{z+h}{(h+\eta)} = \frac{z+h}{H}; \quad (3.2.6)$$

$$0 \leq z' \leq 1$$

Onde as novas variáveis aparecem na figura abaixo.



Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial x} &= \left[ H \frac{\partial(z+h)}{\partial x} - z + h \frac{\partial H}{\partial x} \right] \frac{1}{H^2} = \\ &= \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial h}{\partial x} - z' \frac{\partial H}{\partial x} \right] = \frac{1}{H} \left[ (1-z') \frac{\partial h}{\partial x} - z' \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{1}{H} S_x \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

onde:  $S_x = (1-z') \frac{\partial h}{\partial x} - z' \frac{\partial \eta}{\partial x}$

De forma similar obtêm-se

$$\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{1}{H} S_y \quad (3.2.8)$$

onde:  $S_y = (1-z') \frac{\partial h}{\partial y} - z' \frac{\partial \eta}{\partial y}$

Finalmente

$$\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{H} \quad (3.2.9)$$

Agora então, a derivada de uma variável qualquer  $a(x, y, z, t)$  pode ser expressa em função do novo sistema de referência, ficando:

$$a) \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} + \left( \frac{1}{H} S_x \right) \frac{\partial a}{\partial z} \quad (3.2.10)$$

sendo:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{1}{H} S_x;$$

$$b) \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} + \left( \frac{1}{H} S_y \right) \frac{\partial a}{\partial z} \quad (3.2.11)$$

sendo:

$$\frac{\partial x'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{1}{H} S_y;$$

$$c) \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z} \left( \frac{1}{H} \right) \quad (3.2.12)$$

sendo:

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{H} ;$$

Levando em conta as equações acima, a (3.2.3) fica:

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g H = 0 \quad P = \rho g H (1 - z') \quad (3.2.13)$$

Por outro lado se tem que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial x} \quad (3.2.14)$$

onde:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g (1 - z') \frac{\partial H}{\partial x} - \rho g H \frac{\partial z'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \rho g H$$

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{1}{H} S_x$$

Então:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g \left[ (1 - z') \frac{\partial H}{\partial x} - S_x - S_x \right] = g \frac{\partial \eta}{\partial x} - g S_x \quad (3.2.15)$$

Da mesma forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial y} - g S_y \quad (3.2.16)$$

Os termos convectivos ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial x} \right) + \\
+ v \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial y} \right) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial z} \right) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \\
+ v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{1}{H} (uS_x + vS_y) \frac{\partial u}{\partial z} &\quad (3.2.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \\
+ \frac{w}{H} \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{1}{H} (uS_x + vS_y) \frac{\partial v}{\partial z} &\quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

Na equação da continuidade se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z'} + \\
+ \frac{1}{H} (S_x \frac{\partial u}{\partial z'} + S_y \frac{\partial v}{\partial z'}) &= 0 \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

Introduzindo (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17), (3.2.18) e (3.2.19) nas equações que governam o problema, e fazendo  $x = x'$ ,  $y = y'$  e  $z = z'$  nas mesmas para facilitar a notação tem-se:

I - Equações de movimento

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\
+ f v + \frac{1}{H} (uS_x + vS_y) \frac{\partial u}{\partial z} - gS_x + \text{"TERMOS VISCOSOS"} &= \\
= 0 &\quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{H} \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu +$$

$$+ \frac{1}{H} (uS_x + vS_y) \frac{\partial v}{\partial z} - gS_y + \text{" TERMOS VISCOSOS" } = 0 \quad (3.2.21)$$

II - Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{H} (S_x \frac{\partial u}{\partial z} + S_y \frac{\partial v}{\partial z}) = 0 \quad (3.2.22)$$

III - Condição cinemática na superfície.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_s = 0 \quad (3.2.23)$$

onde  $u_s$ ,  $v_s$  e  $w_s$  são tomados em  $z' = 1$

Os "TERMOS VISCOSOS" que introduzem no modelo o efeito da turbulência são analisados quando as equações são colocadas na forma integral e se diminui a ordem de derivação das incógnitas através da integração por partes desses termos.

3.3 - Aplicação do método de elementos finitos nas equações que governam o problema, levando em conta o novo sistema de coordenadas.

Como já foi visto no capítulo I os "TERMOS VISCOSOS" são os seguintes:

$$\begin{aligned} \text{"TERMOS VISCOSOS"} &= \\ &= \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] \end{aligned}$$

para a 1ª equação de movimento. (3.3.1.a)

$$\text{"TERMOS VISCOSOS"} =$$

$$= \epsilon_H \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (c-1) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right]$$

para a 2ª equação de movimento.

(3.3.1.b)

Levando agora as equações que governam o problema a uma forma integral, ponderando em relação a  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  e  $\delta \eta$  (que são quantidades arbitrárias), utilizando para isto o método dos resíduos ponderados, integrando por partes os "TERMOS VISCOSOS" e lembrando que com o novo sistema de coordenadas.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial \delta u}{\partial z}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \delta u + u \frac{\partial u}{\partial x} \delta u + v \frac{\partial u}{\partial y} \delta u + \frac{w}{H} \frac{\partial u}{\partial z} \delta u + \\ & + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta u + f v \delta u + \frac{1}{H} u S_x \frac{\partial u}{\partial z} \delta u + \\ & + \frac{1}{H} v S_y \frac{\partial u}{\partial z} \delta u - g S_x \delta u + \epsilon_H \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + c \frac{1}{H^2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + (c-1) \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \\ & + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \\ & + (c-1) \frac{1}{H^2} S_x \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{1}{H^2} S_x^2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{H^2} S_y^2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \delta u}{\partial z} ] \} d\Omega + \epsilon_H [ - \int_{A_x} [ \frac{\partial u}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial u}{\partial z} ] \delta u d_{A_x} - \int_{A_y} [ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial u}{\partial z} ] \delta u d_{A_y} - \\
& - \int_{A_z} c \frac{1}{H} \frac{\partial u}{\partial z} \delta u d_{A_z} - \int_{A_x} (c-1) \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \delta u d_{A_x} - \\
& - \int_{A_z} ( \frac{\tau_{x^s}}{\rho H \epsilon_H} - \frac{c}{H} \frac{\partial u}{\partial z} ) \delta u d_{A_z} ] = 0
\end{aligned}
\tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + u \frac{\partial v}{\partial x} \delta v + v \frac{\partial v}{\partial y} \delta v + \frac{w}{H} \frac{\partial v}{\partial z} \delta v + \\
& + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta v - f u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H} u S_x \frac{\partial v}{\partial z} \delta v + \frac{1}{H} v S_y \frac{\partial v}{\partial z} \delta v - \\
& - g S_y \delta v + \epsilon_H [ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + c \frac{1}{H^2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \\
& + (c-1) \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \\
& + (c-1) \frac{1}{H^2} S_y \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{1}{H^2} S_x^2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{1}{H^2} S_y^2 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \delta v}{\partial z} ] d\Omega + \\
& + \epsilon_H [ - \int_{A_x} ( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial v}{\partial z} ) S_v d_{A_x} - \int_{A_z} ( \frac{\partial v}{\partial y} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial v}{\partial z} ) \delta v d_{Ay} - \int_{Az} c \frac{1}{H} \frac{\partial v}{\partial z} \delta v d_{Az} - \\
& - \int_{Ay} (c-1) \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \delta v d_{Ay} - \int_{Az} \left( \frac{\tau y^s}{H \rho \epsilon_H} - \right. \\
& \left. - \frac{c}{H} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta v d_{Az} ] = 0 \tag{3.3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta w + \frac{\partial v}{\partial y} \delta w + \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} \delta w + \right. \\
& \left. + \frac{1}{H} S_x \frac{\partial u}{\partial z} \delta w + \frac{1}{H} S_y \frac{\partial v}{\partial z} \delta w \right] d\Omega = 0 \tag{3.3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \eta + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \eta + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \delta \eta - \right. \\
& \left. - w(\eta) \delta \eta \right] d\Omega = 0 \tag{3.3.5}
\end{aligned}$$

sendo que:

$$d_{Ax} = dy dz; \quad d_{Ay} = dx dz; \quad d_{Az} = dx dy;$$

Como foi realizado anteriormente, a expansão para as incôgnitas é a seguinte:

$$u = \underline{\phi}^T \underline{u}^n; \quad v = \underline{\phi}^T \underline{v}^n; \quad w = \underline{\phi}^T \underline{w}^n; \quad \eta = \underline{\phi}'^T \underline{\eta}^{n'} \tag{3.3.6}$$

onde:  $n = 12$  e  $n' = 4$

Introduzindo (3.3.6) em (3.3.2) e lembrando a arbitrariedade de  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , e  $\delta \eta$  obtêm-se:

(3.3.7)

$$\begin{aligned}
\tilde{0} = & \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{z^H}{1} \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{z^H}{1} \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{\lambda e}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \nu_f H_3 \right] + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{x e}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{H}{1} \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{m} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{z^H}{1} (1-c) \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{\lambda e}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{H}{1} \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{x e}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{H}{1} \nu_f H_3 \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{m} \left[ \text{VP} \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{x e}{\tilde{\phi}} \right) \frac{H}{1} (1-c) \nu_f H_3 \right] + \tilde{u} \tilde{n} \left\{ \text{VP} \left[ \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{ze}{\tilde{\phi}} \right) \frac{z^H}{1} c + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{\lambda e}{\tilde{\phi}} \frac{\lambda e}{\tilde{\phi}} \right) + \left( \frac{x e}{\tilde{\phi}} \frac{x e}{\tilde{\phi}} \right) \right] \right\} H_3 + \left[ \text{VP} \frac{\tilde{\phi}}{1} \gamma_S \nu_f \delta \right] - \\
& - \tilde{u} \tilde{n} \left[ \left( \tilde{u} \tilde{\lambda} \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{H}{1} \nu_f \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \tilde{u} \tilde{n} \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \gamma_S \frac{H}{1} \nu_f \right] + \\
& + \tilde{u} \tilde{\lambda} \left[ \text{VP} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \nu_f \delta \right] + \tilde{u} \tilde{u} \left[ \text{VP} \left( \frac{x e}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \nu_f \delta \right] \\
& + \tilde{u} \tilde{n} \left\{ \left[ \text{VP} \left( \tilde{u} \tilde{m} \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \left( \frac{ze}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \frac{H}{1} \nu_f \right] + \left[ \text{VP} \left( \tilde{u} \tilde{\lambda} \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \left( \frac{\lambda e}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \nu_f \right] + \right. \\
& + \left. \left[ \text{VP} \left( \tilde{u} \tilde{n} \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \left( \frac{x e}{\tilde{\phi}} \frac{\sim}{\tilde{\phi}} \right) \nu_f \right] \right\} + \tilde{u} \tilde{n} \left[ \text{VP} \left( \frac{\tilde{\phi}}{1} \right) \nu_f \right]
\end{aligned}$$

Em uma forma compacta a (3.3.7) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \underline{M}' \dot{\underline{u}}^n &+ (\underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z) \underline{u}^n + \underline{C} \underline{v}^n + \underline{D}_x \underline{u}^n + \\
 &+ \underline{D}_y \underline{u}^n + \underline{G}_x \underline{\eta}^{n'} + (\underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z) \underline{u}^n + (\underline{E}_1 + \\
 &+ \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \underline{E}_4 + \underline{E}_5 + \underline{E}_6) \underline{u}^n + \underline{N}_x \underline{w}^n + \\
 &+ \underline{I}_x \underline{w}^n - \underline{P}_x - \underline{P}_x^{n'} = 0
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

onde:

$$\underline{M}' = \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega$$

$$\underline{A}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) (\underline{\phi}^T \underline{u}^n) d\Omega$$

$$\underline{A}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) (\underline{\phi}^T \underline{v}^n) d\Omega$$

$$\underline{A}_z = \int_{\Omega} \frac{1}{H} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) (\underline{\phi}^T \underline{w}^n) d\Omega$$

$$\underline{C} = f \int_{\Omega} (\underline{\phi} \underline{\phi}^T) d\Omega$$

$$\underline{D}_x = \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_x \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) (\underline{\phi}^T \underline{u}^n) d\Omega$$

$$\underline{D}_y = \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_y \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) (\underline{\phi}^T \underline{v}^n) d\Omega$$

$$\underline{G}_x = g \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\underline{F}_x = \epsilon_H \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\underline{F}_y = \epsilon_H \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\underline{F}_z = \epsilon_H \int_{\Omega} c \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_1 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_x \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_2 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_y \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_3 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_x \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_4 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H} S_y \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_5 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H^2} S_x^2 \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{E}_6 = \epsilon_H \int_{\Omega} \frac{1}{H^2} S_y^2 \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{N}_x = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{T}_x = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) S_x \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{P}_x = g \int_{\Omega} S_x \underline{\phi}^T d\Omega$$

$$\underline{p}_x^{n'} = \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} v^2 \cos \theta \int_{Az} \frac{1}{H} \underline{\phi}'^T d_{Az}$$

$S_x$ ,  $S_y$  e  $H$  podem ser expandidos da seguinte forma, lembrando que  $H = h + \eta$  tem-se que:

$$H = \underline{\phi}'^T \underline{H}^{n'}; \quad h = \underline{\phi}'^T \underline{h}^{n'}; \quad \eta = \underline{\phi}'^T \underline{\eta}^{n'};$$

$$S_x = (1 - \underline{\phi}^T \underline{z}^n) \left( \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \underline{h}^{n'} \right) - (\underline{\phi}^T \underline{z}^n) \left( \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \underline{\eta}^{n'} \right);$$

$$S_y = (1 - \underline{\phi}^T \underline{z}^n) \left( \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \underline{h}^{n'} \right) - (\underline{\phi}^T \underline{z}^n) \left( \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \underline{\eta}^{n'} \right);$$

As funções de interpolação  $\phi$  e  $\phi'$  que aparecem, bem como todas as variáveis não identificadas possuem o mesmo significado que tinham no capítulo II.

Da mesma forma, introduzindo (3.3.6) em (3.3.3), em uma forma reduzida obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \underline{M}' \underline{\dot{u}}^n + (\underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z) \underline{v}^n - \underline{C} \underline{u}^n + \underline{D}_x \underline{v}^n + \\ & + \underline{D}_y \underline{v}^n + \underline{G}_y \underline{\eta}^{n'} + (\underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z) \underline{v}^n + (\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \\ & + \underline{E}_4 + \underline{E}_5 + \underline{E}_6) \underline{v}^n + \underline{N}_y \underline{w}^n + \underline{T}_y \underline{w}^n - \underline{P}_y - \underline{p}_y^{n'} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

onde:

$$\underline{G}_y = g \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$\underline{N}_y = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) \frac{1}{H} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{T}_y = \epsilon_H \int_{\Omega} (c-1) S_y \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} \right) d\Omega$$

$$\underline{P}_y = g \int_{\Omega} S_y \underline{\phi}^T d\Omega$$

$$\underline{p}_y^{n'} = \frac{\gamma^2 \rho a}{\rho} v^2 \text{sen } \theta \int_{A_z} \frac{1}{H} \underline{\phi}^T dA_z$$

Introduzindo (3.3.6) em (3.3.4), obtêm-se depois de multiplicar toda a equação por H:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} H \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} d\Omega \right] \underline{u}^n + \left[ \int_{\Omega} H \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} d\Omega \right] \underline{v}^n + \\ & + \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega \right] \underline{w}^n + \left[ \int_{\Omega} S_x \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega \right] \underline{u}^n + \\ & + \left[ \int_{\Omega} S_y \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega \right] \underline{v}^n = \underline{0} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

ou em forma compacta pode escrever-se, lembrando que  $H = h + \eta$

$$\begin{aligned} & (\underline{L}_x + \underline{R}_x + \underline{R}_{z1}) \underline{u}^n + (\underline{L}_y + \underline{R}_y + \underline{R}_{z2}) \underline{v}^n + \\ & + \underline{L}_z \underline{w}^n = \underline{0} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

onde:

$$\underline{L}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) \left( \underline{\phi}^T h^{n'} \right) d\Omega$$

$$\underline{R}_x = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial x} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{\eta}^{n'} \right) d\Omega$$

$$\underline{R}_{z1} = \int_{\Omega} S_x \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega$$

$$\underline{L}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{h}^{n'} \right) d\Omega$$

$$\underline{R}_y = \int_{\Omega} \left( \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{\eta}^{n'} \right) d\Omega$$

$$\underline{R}_{z2} = \int_{\Omega} S_y \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega$$

$$\underline{L}_z = \int_{\Omega} \underline{\phi} \frac{\partial \underline{\phi}^T}{\partial z} d\Omega$$

Também introduzindo (3.3.6) em (3.3.5) se obtém que:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \underline{\phi}'^T \right) d\Omega \right] \dot{\underline{\eta}}^{n'} + \\ & + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial x} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{u}^n(\eta) \right) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} + \\ & + \left[ \int_{\Omega} \left( \underline{\phi}' \frac{\partial \underline{\phi}'^T}{\partial y} \right) \left( \underline{\phi}'^T \underline{v}^n(\eta) \right) d\Omega \right] \underline{\eta}^{n'} - \\ & - \left[ \int_{\Omega} \underline{\phi}' \left( \underline{\phi}'^T \underline{w}^n(\eta) \right) d\Omega \right] = \underline{0} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

ou em forma compacta, igual a equação (2.3.18) do sistema anterior se tem que:

$$\underline{M}' \dot{\underline{\eta}}^{n'} + (\underline{B}_x + \underline{B}_y) \underline{\eta}^{n'} - \underline{R} = \underline{0} \quad (3.3.13)$$

Como foi feito anteriormente, juntando as equações (3.3.8), (3.3.9), (3.3.11) e (3.3.13) a equação matricial para um

elemento  $\bar{e}$  a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{M}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^n \\ \bar{v}^n \\ \bar{w}^n \\ \bar{\rho}^n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{array}{r}
 + \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z + \underline{D}_x + \underline{D}_y + \underline{E}_{uv} & \underline{C} & \underline{N}_x + \underline{T}_x & \underline{G}_x \\
 - \underline{C} & \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z + \underline{D}_x + \underline{D}_y + \underline{E}_{uv} & \underline{N}_y + \underline{T}_y & \underline{G}_y \\
 \underline{L}_x + \underline{R}_x + \underline{R}_{z1} & \underline{L}_y + \underline{R}_y + \underline{R}_{z2} & \underline{L}_z & \underline{0} \\
 \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{B}_x + \underline{B}_y
 \end{array} \right]
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \left[ \begin{array}{c}
 \underline{u}^n \\
 \underline{v}^n \\
 \underline{w}^n \\
 \underline{m}^{n'}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{p}_x + \underline{p}_x^{n'} \\ \underline{p}_y + \underline{p}_y^{n'} \\ \underline{0} \\ \underline{R}(w(\eta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.3.14)$$

ou em forma compacta

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + \underline{K}(X) \underline{X} + \underline{P}_1(X) = \underline{0} \quad (3.3.15)$$

Da mesma forma separa-se os termos lineares e os não lineares em duas matrizes distintas  $\underline{K}_1$  e  $\underline{K}_2(X)$ .

Então se tem que:

$$\underline{M} \dot{\underline{X}} + [ \underline{K}_1 + \underline{K}_2(X) ] \underline{X} + \underline{P}_1(X) = \underline{0} \quad (3.3.16)$$

onde:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} \underline{F}_x + \underline{F}_y & \underline{C} & \underline{0} & \underline{G}_x \\ -\underline{C} & \underline{F}_x + \underline{F}_y & \underline{0} & \underline{G}_y \\ \underline{L}_x & \underline{L}_y & \underline{L}_z & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

$$K_2(X) = \begin{bmatrix} \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F}_z + \underline{D}_x + \underline{D}_y + \underline{E}_{uv} & \underline{0} & \underline{N}_x + \underline{T}_x & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z + \underline{F}_z + \underline{D}_x + \underline{D}_y + \underline{E}_{uv} & \underline{N}_y + \underline{T}_y & \underline{0} \\ \underline{R}_x + \underline{R}_{z1} & \underline{R}_y + \underline{R}_{z2} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{B}_x + \underline{B}_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{E}_{uv} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \underline{E}_4 + \underline{E}_5 + \underline{E}_6$$

### 3.4 - Condições de Contorno

As condições de contorno são:

- Na superfície

$$- w(\eta) + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + v(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (3.4.1)$$

Quando se leva em conta a ação do vento, se faz

$$\epsilon_v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\tau_x^S}{\rho H} \quad (3.4.2)$$

$$\epsilon_v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \frac{\tau_y^S}{\rho H} \quad (3.4.3)$$

- Nos contornos "sólidos"

$$u = v = w = 0 \quad (3.4.4)$$

- Nos contornos "abertos"

$$\eta = \bar{\eta}(t) \quad (\bar{\eta}(t): \text{função prescrita}) \quad (3.4.5)$$

## 4 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS E APLICAÇÕES DO MODELO

### 4.1 - Generalidades

O modelo proposto é implementado no sistema HYDRO [1], e para tal utiliza-se os comandos do referido sistema na entrada de dados bem como para o seu controle. A solução computacional realiza-se no computador BURROUGHS B-6700 do Centro de Processamento de Dados da U.F.R.G.S. e a linguagem utilizada é o EXTENDED ALGOL B-6700.

### 4.2 - Fórmula de recorrência final

A fórmula de recorrência final pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} + \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_{t+2\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} - \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_t - \\ & - 2 \tilde{K}_1 \tilde{X}_{t+\Delta t} - 4 \tilde{K}_2 (\tilde{X}_{t+\Delta t}) \tilde{X}_{t+\Delta t} - \\ & - \left\{ \tilde{P}_1 (\tilde{X}_t) + 2 \tilde{P}_1 (\tilde{X}_{t+\Delta t}) + \tilde{P}_1 (\tilde{X}_{t+2\Delta t}) \right\} \quad (4.2.1) \end{aligned}$$

Como este esquema não é autoiniciável, ou seja que para iniciar o processo é necessário conhecer  $\tilde{X}_t$  e  $\tilde{X}_{t+\Delta t}$ , então

a equação (4.2.1) é dividida em dois passos, o primeiro passo só é executado no primeiro intervalo de tempo, e o segundo passo é executado em todos os demais intervalos de tempo.

As expressões para cada um dos dois passos são as seguintes:

1º Passo:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} + \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_{t+\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} - \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_t - 2 \tilde{K}_2 (X_t) \tilde{X}_t - \{ \tilde{P}_1(X_t) + \tilde{P}_1(X_{t+\Delta t}) \} \quad (4.2.2)$$

2º Passo:

$$\left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} + \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_{t+2\Delta t} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \tilde{M} - \tilde{K}_1 \right] \tilde{X}_t - 2 \tilde{K}_1 \tilde{X}_{t+\Delta t} - 4 \tilde{K}_2 (X_{t+\Delta t}) \tilde{X}_{t+\Delta t} - \{ \tilde{P}_1(X_t) + 2 \tilde{P}_1(X_{t+\Delta t}) + \tilde{P}_1(X_{t+2\Delta t}) \} \quad (4.2.3)$$

Para confeccionar o programa que resolve as expressões (4.2.2) e (4.2.3) cumpre-se as seguintes etapas:

1 - Controle e entrada de dados.

Na entrada de dados bem como no controle usa-se os comandos do sistema HYDRO [1].

2 - Formação da matriz do membro esquerdo para cada elemento.

- 3 - Montagem da matriz global  $(\frac{2}{\Delta t} \underline{M} + \underline{K}_1)$ , para todos os elementos.
- 4 - Aplicação das condições de contorno na matriz global.
- 5 - Aplicação do vetor "SKYLINE" na matriz global.
- 6 - Decomposição da matriz global.
- 7 - Leitura das condições iniciais.
- 8 - Impressão das condições iniciais.
- 9 - Começo da integração no tempo.
- 10 - No primeiro intervalo de tempo, cálculo de  $[-2\underline{K}_2(\underline{X}_t)\underline{X}_t]$  e a montagem de  $(\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K}_1)$  que já foi calculado anteriormente.
- 11 - Cálculo do vetor de cargas  $[-\underline{P}_1(\underline{X}_t) - \underline{P}_1(\underline{X}_{t+\Delta t})]$
- 12 - Nos demais intervalos de tempo, cálculo de  $(-2\underline{K}_1 \underline{X}_{t+\Delta t})$ ,  $[-4\underline{K}_2(\underline{X}_{t+\Delta t})\underline{X}_{t+\Delta t}]$  e a montagem de  $(\frac{2}{\Delta t} \underline{M} - \underline{K}_1)$  que já foi calculado anteriormente.
- 13 - Cálculo do vetor de cargas que agora é  $[-\underline{P}_1(\underline{X}_t) - 2\underline{P}_1(\underline{X}_{t+\Delta t}) - \underline{P}_1(\underline{X}_{t+2\Delta t})]$ .
- 14 - Aplicação das condições de contorno ao vetor de cargas.

15 - Processo de substituição inversa (retrosubstituição) para calcular  $\tilde{x}_{t+2\Delta t}^K$ . Resolução do sistema.

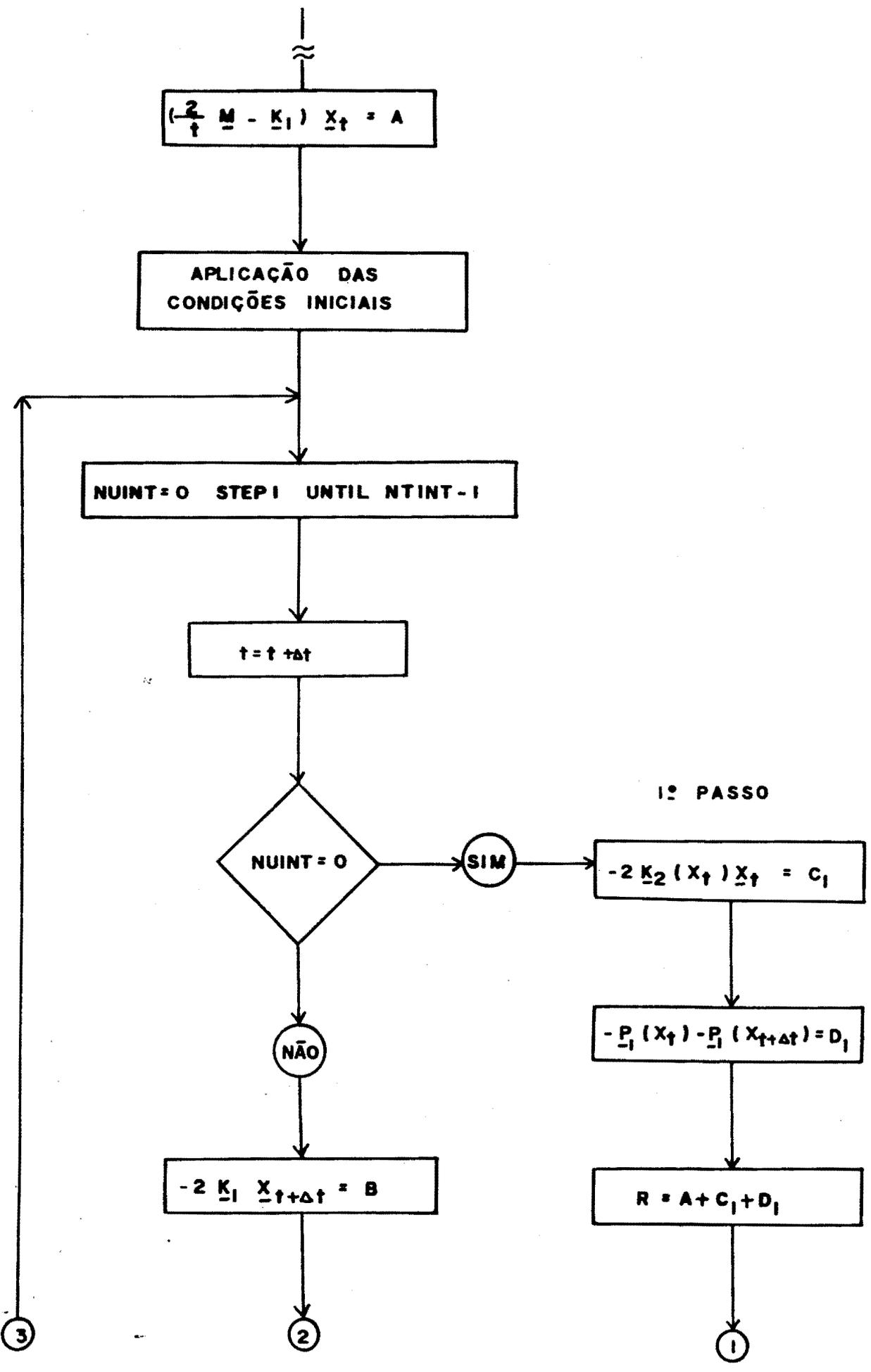
$$16 - \text{Fazer } \tilde{x}_{t+\Delta t}^{K+1} = \tilde{x}_{t+2\Delta t}^K$$

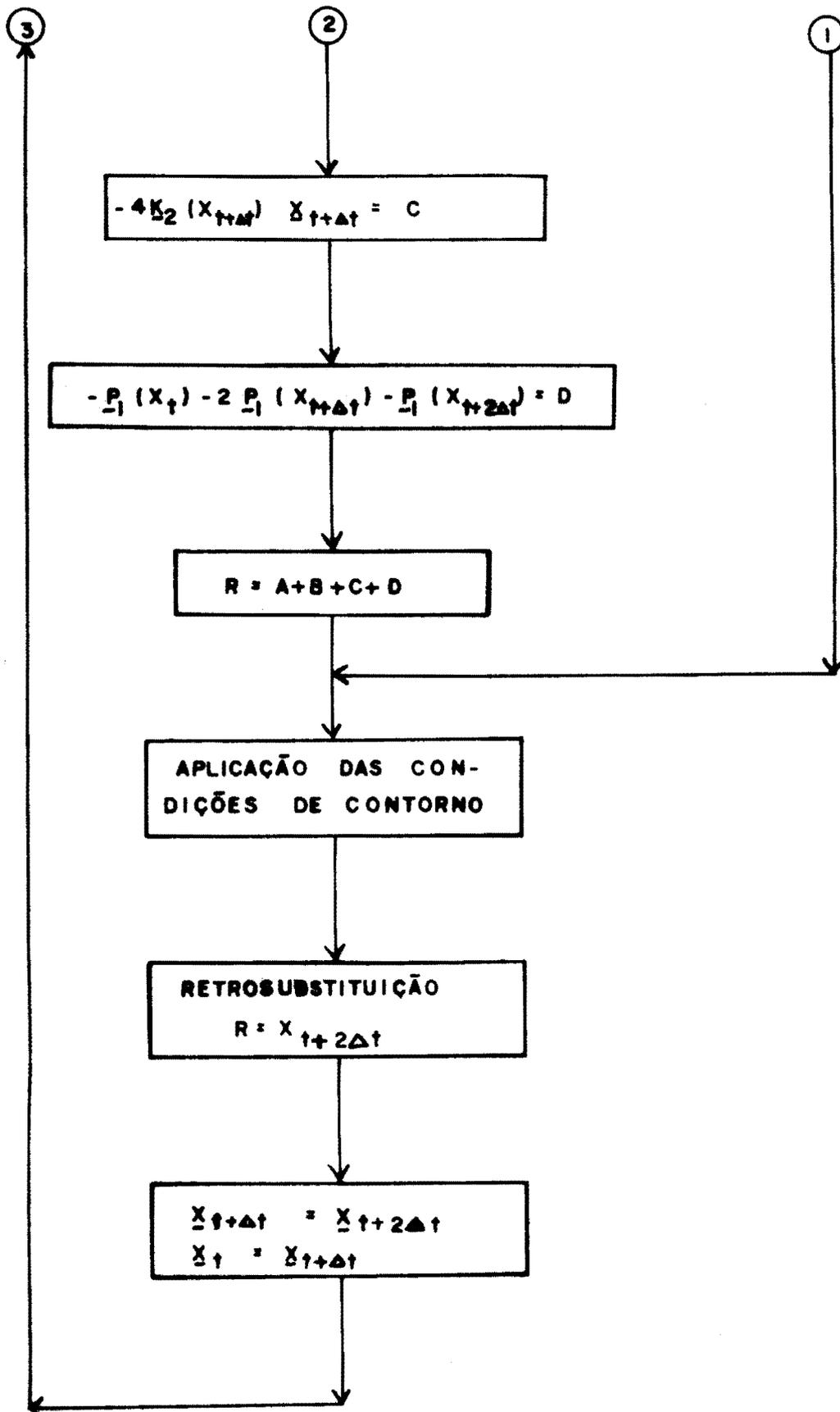
$$\tilde{x}_t^{K+1} = \tilde{x}_{t+\Delta t}^K$$

17 - Impressão dos resultados de cada intervalo.

18 - Retornar a etapa 12 até o número total de intervalos.

A matriz  $(\frac{2}{\Delta t} M + K_1)$  é uma matriz banda não simétrica que é decomposta uma só vez em todo o processo, isto é vantajoso quanto ao tempo de processamento em relação a um esquema que tenha que modificar o membro esquerdo da expressão em cada intervalo de tempo.





NUINT é o número do intervalo de tempo

NTINT é o número total de intervalos de tempo

### 4.3 - Aspectos Computacionais

Os dados de entrada que devem ser fornecidos são os seguintes:

1 - Coordenadas dos nós ( $x, y, z$ ) através do comando NODAL COORDINATES.

2 - A conectividade de cada elemento (nós que incidem em cada elemento) através do comando ELEMENT CONNECTIVITIES.

3 - Constantes do problema (aceleração da gravidade e coeficiente de tensão do vento, este último somente é fornecido quando existe vento) através dos comandos GRAVITY e WIND respectivamente.

4 - Propriedades de cada elemento através do comando ELEMENT ATTRIBUTES.

Devem ser dados: a viscosidade turbulenta no sentido vertical  $\epsilon_v$  e a relação entre  $\epsilon_v$  e  $\epsilon_H$  onde  $\epsilon_H$  é a viscosidade turbulenta no sentido horizontal, através dos comandos VISCOSITY e "c" respectivamente.

Quando for considerado os efeitos da rotação terrestre deve ser fornecido o coeficiente de Coriolis através do comando CORIOLIS.

5 - Quando existir vento usa-se o comando WIND EFFECTS onde deve ser fornecido a velocidade do vento e o ângulo de incidência através dos comandos "V" e "T<sub>1</sub>" respectivamente.

6 - O intervalo de tempo e quantos intervalos se deseja através do comando TIME INTERVALS.

7 - Valores prescritos das incógnitas através do comando PRESCRIBED UNKNOWNNS.

8 - Os valores iniciais através do comando INITIAL VALUES

9 - O tipo de elemento usado, que é identificado por "TRID16".

10 - Se for desejado a impressão das coordenadas e conectividades dos elementos usa-se então o comando PRINT.

11 - O comando de análise do problema que é CIRCULATION MODEL 7 e a indicação de que se deseja ou não os termos convectivos e de quantos em quantos intervalos se deseja a impressão.

Em cada intervalo de tempo o programa imprime para cada nó  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  que são as velocidades nas direções x, y e z, respectivamente. Para os nós superiores ou seja os nós da superfície livre imprime ainda WAVE, MEAN LEVEL e HEIGHT que são respectivamente a onda da superfície livre  $\eta$ , o nível médio  $h$  e a altura total  $H$  onde  $H = h + \eta$ .

#### 4.4 - Aplicações do modelo

O modelo é aplicado em dois exemplos que são mostrados a seguir:

##### Exemplo I:

Aplica-se o modelo em um canal retangular com uma profundidade uniforme de 50m, um comprimento de 50.000 m e uma largura de 5.000 m.

O canal é então discretizado com 10 elementos, num total de 88 nós, sendo que o comprimento de cada elemento é igual a 5.000 m.

Neste exemplo se estuda a ação do vento introduzindo-o

com uma velocidade de 10 m/seg.

As seguintes condições de contorno foram utilizadas:

- Nos contornos "sólidos" laterais:

$$u \neq 0$$

$$v = 0$$

$$w \neq 0$$

- Nos contornos correspondentes aos extremos:

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w \neq 0$$

- No fundo

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

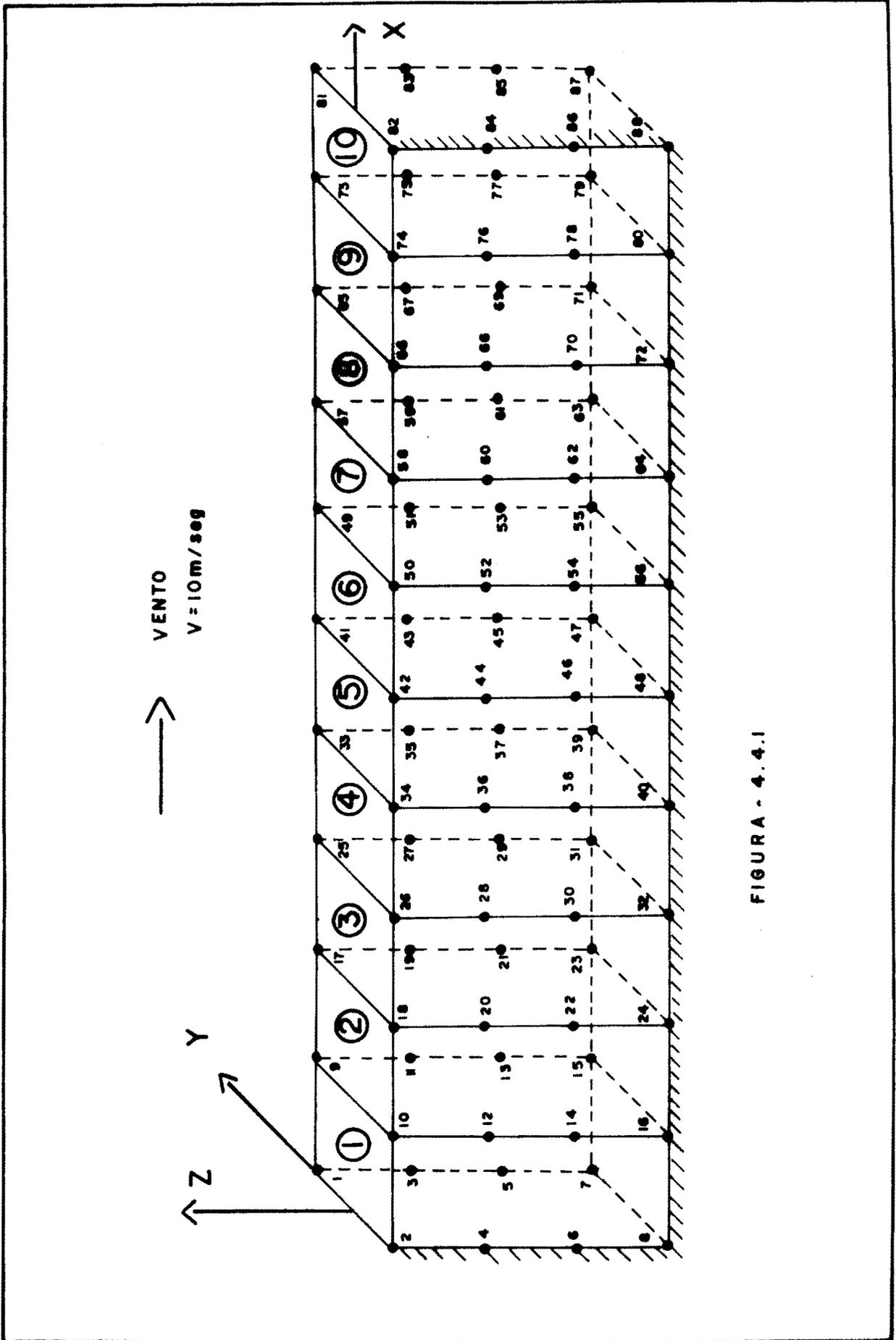


FIGURA - 4.4.1

A simulação com o modelo apresentou as seguintes ten  
dências:

-  $\epsilon_H$  ou seja o coeficiente de viscosidade turbulenta ho  
rizontal pouco ou quase nenhuma influência tem quanto a estabi-  
lidade do esquema de solução.

- Constatou-se também que o problema é extremamente sen-  
sível a  $\epsilon_V$  ou seja que o coeficiente de viscosidade turbulenta  
vertical é um dado da maior importância.

- Quando  $\epsilon_V$  é constante, valores grandes de  $\epsilon_V$  provo-  
cam uma instabilidade profunda no esquema numérico, e quanto  
mais próximo de zero estiver o coeficiente de viscosidade turbu-  
lenta vertical melhor é a estabilidade do esquema.

- Utilizou-se o critério de COURANT - FRIEDRICHS - LEVY  
onde:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{gh}}$$

para a discretização espacial no sentido horizontal e se adicio-  
na a este critério uma condição para a discretização vertical

$$\Delta z^2 \geq 2 \epsilon_V \Delta t$$

levando em conta que este é um critério adequado no método das  
diferenças finitas, estas limitações podem ter influenciado.

#### Exemplo II:

Um canal com uma barreira submarina fechado num extre-  
mo, onde se tenta simular o movimento do fluido por ação de uma  
oscilação forçada devido por exemplo a ação da maré; o canal que  
é indicado na figura (4.4.2) apresenta as seguintes caracterís-  
ticas geométricas:

comprimento = 92.000 m

largura = 4.600 m

profundidade máxima = 50 m

profundidade mínima = 20 m

base da barreira submarina = 36.800 m

topo da barreira submarina = 9.200 m

e ainda

número de elementos = 12

número de nós = 104

com as seguintes condições de contorno:

- Em  $x = 0$ ,  $z = 0$

$$\bar{\eta}(t) = a \operatorname{sen} (\omega t - \beta)$$

$$a = 0,00014$$

$$\omega = 0,00014$$

$$\beta = 0$$

$$\bar{w}(t) = \frac{\partial \bar{\eta}(t)}{\partial t} = a \omega \cos (\omega t - \beta) =$$

$$= a \omega \operatorname{sen} (\omega t - \beta_1)$$

$$a = 1$$

$$\omega = 0,00014$$

$$\beta_1 = - 1,57$$

- Nos contornos "sólidos" laterais

$$u \neq 0$$

$$v = 0$$

$$w \neq 0$$

- Nos contornos correspondentes ao extremo fechado

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

- No fundo

$$u = 0$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$

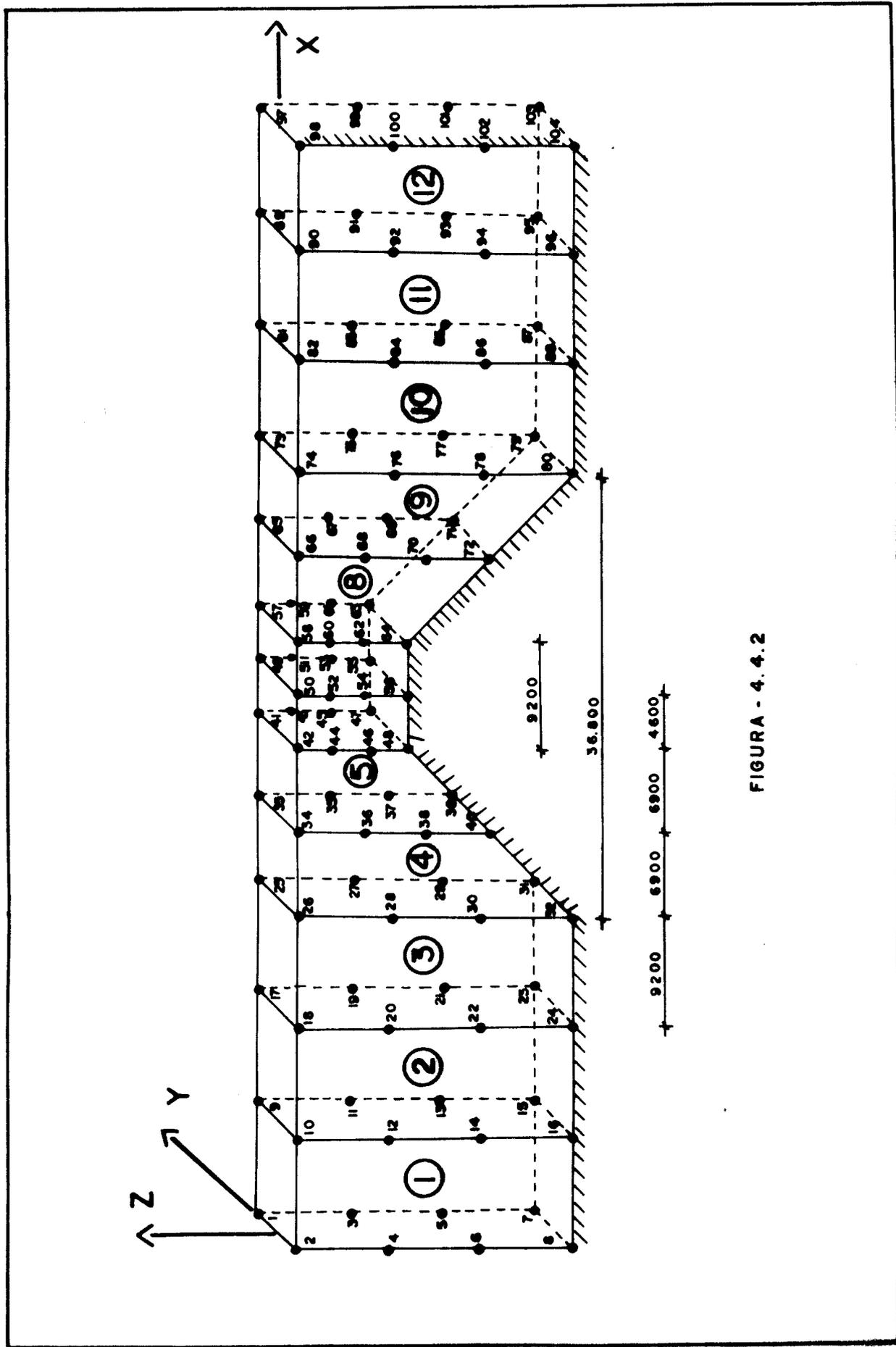


FIGURA - 4. 4. 2

O que se constatou neste exemplo, além do já visto no exemplo anterior foi que:

- A discretização com 12 elementos é uma discretização bastante pobre para um problema deste tipo. Com tudo, dificuldades de ordem computacional obrigaram a trabalhar com esta discretização.

- A variação da profundidade em função da barreira submarina altera bastante o problema, fazendo com que o efeito de  $\epsilon_v$ , admitido como um valor constante, não traduza a realidade.

## 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

### 5.1 - Conclusões

Este trabalho é apenas um estudo preliminar que visa servir de base para futuros desenvolvimentos.

A resolução numérica do problema é extremamente difícil e muitos de seus aspectos merecem ser minuciosamente estudados.

Uma maior ênfase foi dada ao aspecto teórico uma vez que os resultados das aplicações numéricas em geral não foram de muito boa qualidade.

Um dos maiores problemas surgidos durante a implementação do modelo foi quanto ao armazenamento computacional, haja vista que o elemento possui 16 nós num total de 40 incógnitas, com uma integração numérica que necessita de 16 pontos de integração, sendo que muitas vezes foi preferível armazenar certas variáveis do que calculá-las cada vez que necessárias, o que aumentaria consideravelmente o tempo de processamento. Em virtude disso não foi possível discretizar com um número maior de elementos o que seria mais razoável, pois isto implicaria num custo excessivo ou a capacidade de armazenamento seria superada.

O tratamento dado a turbulência através dos coeficientes de viscosidade turbulenta vertical e horizontal esperam por uma melhor modelação. É um campo passível ainda de muita pesquisa.

Existe ainda muita coisa a se fazer no estudo de modelos tridimensionais em regime transiente para a simulação da circulação em águas rasas. O que dificultou bastante a pesquisa foi a capacidade de armazenamento do computador bem como o tempo de processamento exigido na implementação de um modelo deste tipo.

## 5.2 - Sugestões

Como sugestões para continuar estas pesquisas, podem-se mencionar as seguintes:

- Considerar o coeficiente de viscosidade turbulenta vertical bem como o coeficiente de viscosidade turbulenta horizontal como dados variáveis em cada intervalo de tempo (para isto se recomenda a leitura da ref. [23]), de forma que as mesmas sejam funções do campo de velocidade e do tamanho dos elementos.

- Discretizar com um número maior de elementos para se ter uma resposta mais fiel, e para isto deveria se tentar uma solução "out of core".

- Como outro fator condicionante é o tamanho do intervalo de tempo, se pesquisar um critério para que as limitações impostas sejam mais adequadas ao método de elementos finitos.

- O tempo de processamento pode também ser reduzido introduzindo as condições de contorno nas matrizes a nível de elemento.

- Quanto as funções de interpolação, recomenda-se como sugere TRÖSCH [39] usar funções de interpolação quadráticas para a velocidade no sentido horizontal e lineares para os termos de pressão.

## APENDICE

Sobre uma breve revisão bibliográfica onde são apresentados os principais modelos tridimensionais que utilizam para solução o método de elementos finitos.

As equações que governam o problema tridimensional podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v + \\
 & + \epsilon_H \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_V \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \\
 & \left. + \epsilon_V \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u + \\
 & + \epsilon_H \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_V \frac{\partial v}{\partial z} + \right. \\
 & \left. + \epsilon_V \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \eta}{\partial y} - w_s = 0 \quad (4)$$

onde

$u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$  são as componentes da velocidade do fluido;  $\eta(x, y, t)$  é a elevação da superfície livre em relação ao nível médio;  $f$  é o coeficiente de Coriolis; o subíndice "s" indica valores tomados na superfície;  $\epsilon_H = \epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_v = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz}$  são as viscosidades turbulentas.

As duas primeiras são as equações de quantidade de movimento, a terceira é a equação da continuidade e a última é a condição de contorno cinemática na superfície. As equações (1) e (2) foram obtidas supondo, além de uma distribuição hidrostática de pressões, uma aproximação de Boussinesq para as tensões de Reynolds.

As condições de contorno são:

a) nos contornos sólidos:

$$u = v = w = 0 \quad (5)$$

b) na superfície:

$$\epsilon_v = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{sx}}{\rho} \quad \epsilon_v = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{sy}}{\rho} \quad (6)$$

onde  $\tau_{sx}$  e  $\tau_{sy}$  são as tensões de cisalhamento provocadas pelo vento e  $\rho$  é a massa específica.

c) nos contornos abertos:

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(t) \quad (7)$$

onde  $\bar{\eta}(t)$  é um valor prescrito.

O pesquisador Jürgen Sündermann [35] resolve a versão bidimensional das equações anteriores (com  $v(x, y, z, t)$  e  $\epsilon_H = 0$ ). Na horizontal utiliza funções de interpolação para as incógnitas lineares e na vertical propõe as seguintes funções.

$$\phi_1 = 1 + \lambda$$

$$\phi_2 = -\frac{9}{2} \lambda (1 + \lambda)$$

$$\phi_3 = 27 \lambda \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \lambda + \lambda^2 \right) \quad (8)$$

onde  $\lambda = z/h$  sendo "h" a profundidade.

A representação gráfica destas funções podem ser observadas na figura abaixo.

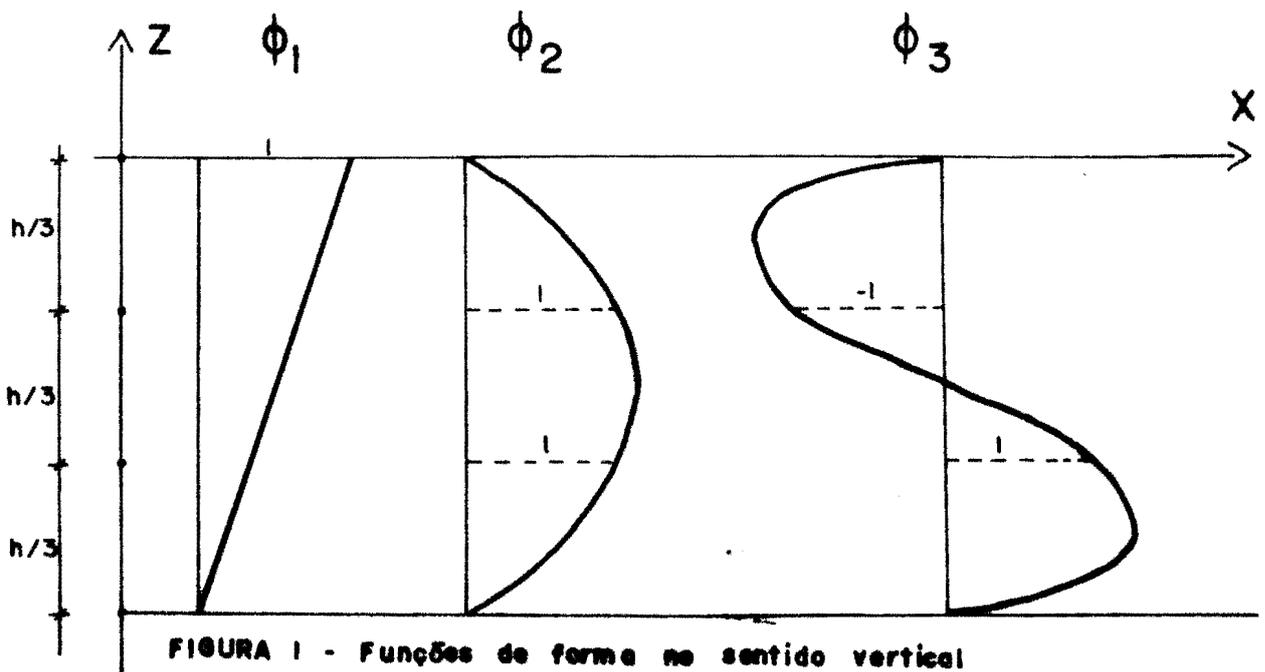


FIGURA 1 - Funções de forma no sentido vertical

Para a integração no tempo foi utilizado o seguinte esquema

$$f(t) = \sum_{n=1}^2 \phi^{(n)}(t) f^{(n)} \quad (9)$$

onde

$$\phi^{(1)}(t) = 1 - \theta \quad \text{e} \quad \phi^{(2)}(t) = \theta \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

As conclusões chegadas pelo pesquisador testando um canal com uma barreira submarina, canal este que também é objeto de teste para o modelo proposto neste trabalho, são as seguintes:

- Para valores grandes de  $\epsilon_v$  como  $\epsilon_v = 1000 \text{ cm}^2/\text{seg}$  e  $\theta = 1$ , o fluxo parece similar ao de um escoamento potencial, quando é de se esperar a existência de vórtices atrás da barreira.

- Valores menores de  $\epsilon_v$  como  $\epsilon_v = 200 \text{ cm}^2/\text{seg}$  e  $\theta = 1$  aparecem os vórtices, porém os resultados não são coincidentes com os do fluxo real.

- Para  $\epsilon_v = 200 \text{ cm}^2/\text{seg}$  e  $\theta = 1/2$  surgem instabilidades por profundas mudanças da direção do fluxo em nós adjacentes da malha de elementos finitos.

Resultou conveniente se adotar um  $\theta$  com um valor em torno de  $1/2$ , para incluir uma pequena difusividade numérica, visando com isto melhorar a estabilidade do sistema. As instabilidades surgiram em função dos termos não lineares. Como é conhecido  $\theta = 1/2$  em problemas lineares produz condições estáveis e corresponde ao esquema trapezoidal;  $\theta = 2/3$  corresponde ao esquema de Galerkin com funções de interpolação lineares.

Christopher Koutitas e Brian O'Connon [25] propõem um modelo tridimensional usando para isto o método dos passos fracionários, permitindo assim separar o operador diferencial em duas partes, a primeira que está confinada ao domínio cujos ei-

xos de referência são  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  e a segunda confinada ao domínio cujo eixo de referência é  $\vec{z}$ . Sendo então possível resolver o problema combinando elementos unidimensionais com elementos bidimensionais.

As incógnitas do problema que são  $u$ ,  $v$  e  $\eta$ , haja vista que se considerar  $w(x, y, z, t) = 0$ , são calculadas segundo o seguinte esquema de integração no tempo

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{15em}}^{\downarrow} \\
 u^n, v^n \rightarrow \eta^{n+1/2} \rightarrow u^{n+1}, v^{n+1} \rightarrow \eta^{n+3/2} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}^{\uparrow}
 \end{array}$$

onde "n" é o índice do tempo, tal que  $t_n = n\Delta t$  (sendo  $\Delta t$  o intervalo de tempo).

Tanto para o domínio  $xy$  como para o domínio  $z$  usam-se funções de interpolação lineares.

As equações de movimento são integradas usando o método dos passos fracionários. A primeira equação fica dividida da seguinte forma:

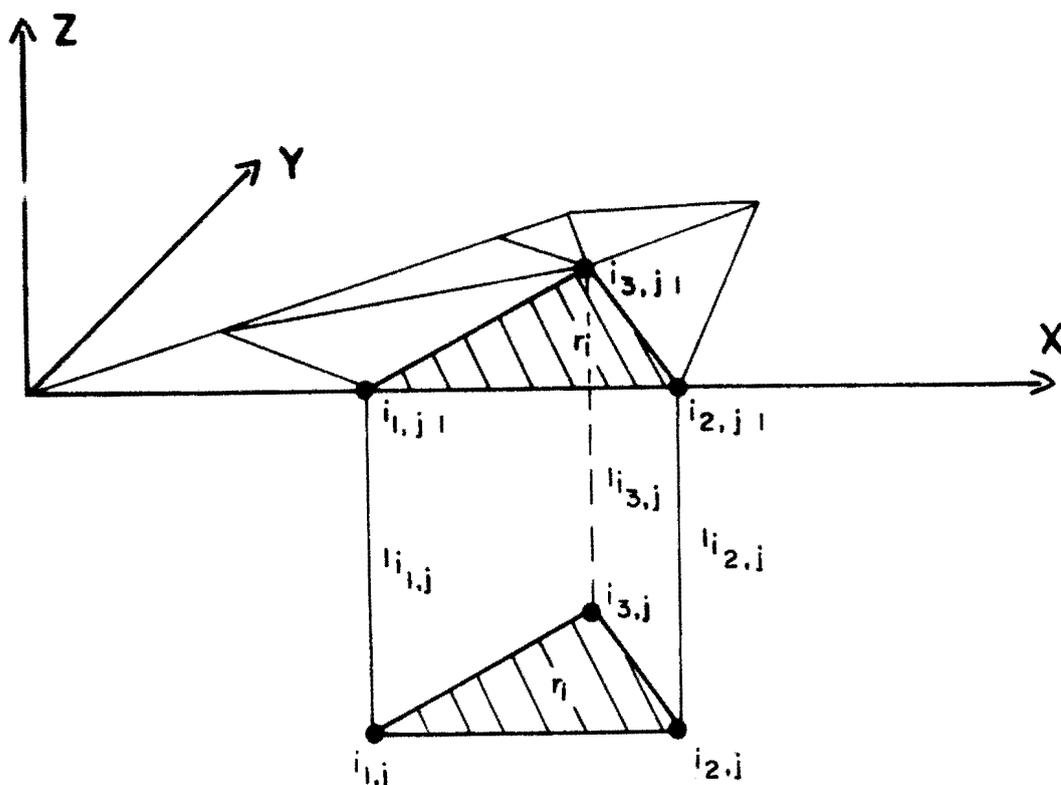
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} - \\
 &- g \frac{\partial \eta^{n+1/2}}{\partial x} - f v
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[ \epsilon_v \frac{\partial}{\partial z} (u^n + u^{n+1}) \right] \quad (11)$$

De maneira similar procede-se para a outra equação de movimento.  $u^*$  é um valor fictício intermediário que é eliminado

quando se considerar as duas expressões acima juntas.

O esquema da primeira equação é explícito e somente aparecem derivadas em relação a  $x$ ,  $y$  e  $t$ , o que permite a utilização de elementos bidimensionais, entretanto o esquema da segunda equação é implícito e só possui derivadas em relação a  $z$  e  $t$ , o que permite a utilização de elementos unidimensionais em cada linha vertical que passa pelo nós dos elementos bidimensionais.



**FIGURA 2 - Discretização horizontal e vertical**

Este modelo apresenta a vantagem de substituir elementos tridimensionais por elementos uni e bidimensionais, o que parece conveniente em termos computacionais. Entretanto, a utilização de funções de interpolação lineares, exige um maior número de elementos para se ter um perfil de velocidades próximo da realidade. Para se obter resultados mais adequados da circulação vertical resultaria interessante introduzir a componente vertical da velocidade  $w(x, y, z, t)$ .

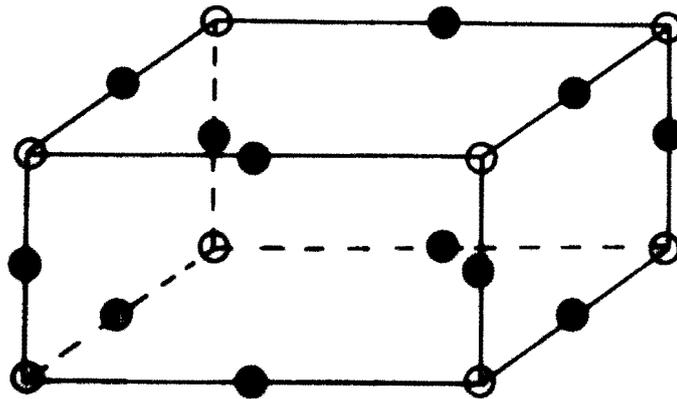
J. Trösch [39] propõe elementos tridimensionais para a solução das seguintes equações.

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho K_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (13)$$

onde  $K_i = (-fv_2, fv_1, -g)$ ,  $t_{ij}$  são as tensões que incluem o efeito do vento e da viscosidade turbulenta.

As incógnitas  $v_i(x_i, t)$  e  $P(x_i, t)$  são discretizadas com funções de interpolação quadráticas e lineares respectivamente. O elemento tridimensional é apresentado na figura abaixo.



**FIGURA 3 - Elemento tridimensional**  
 ○ Incógnitas  $V_i, P$   
 ● Incógnitas  $V_i$

Como cada elemento possui 68 incógnitas e a matriz global não é simétrica, tornou-se necessário empregar uma rotina de solução especial. É empregada uma solução frontal "out of core" baseada em Hood [20]. O tempo de processamento pode também ser

reduzido introduzindo as condições de contorno nas matrizes a nível de elemento.

A discretização no tempo é calculada com uma aproximação de diferenças finitas, assim se  $f$  é uma incógnita se faz.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{t+\Delta t} - f^t}{\Delta t} \quad e$$

$$f^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (f^{t+\Delta t} + f^t) \quad (14)$$

resultando daí um esquema implícito.

A principal vantagem deste modelo é que tanto em águas rasas como em águas profundas pode-se simular o fluxo. Apresenta porém dificuldades em relação ao tempo de processamento e de armazenamento.

Os modelos acima citados são modelos não estratificados, existem uma série de modelos estratificados que são em geral uma extensão dos modelos bidimensionais que surgem ao integrar na vertical as equações que governam o problema.

#### MODELOS ESTRATIFICADOS

Nos modelos estratificados é conveniente introduzir um sistema de referência no sentido vertical, tal que o nível  $L_K$  é definido como

$$L_K = - K h (x, y) / b \quad K = 1, 2, \dots, b \quad (15)$$

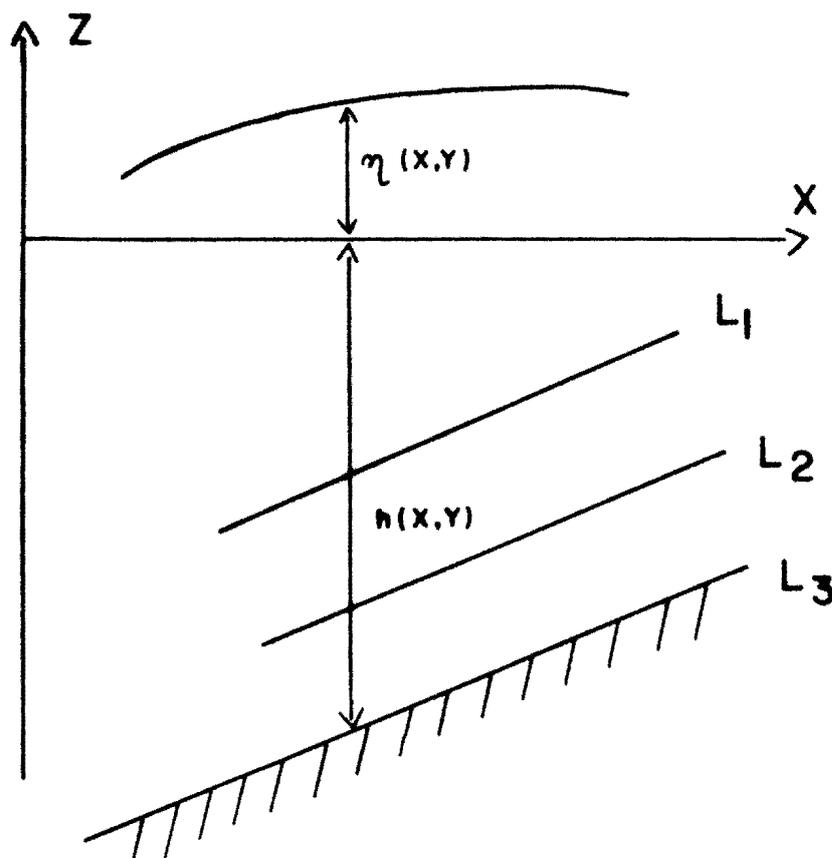


FIGURA 4 - Definição dos níveis  $L_K$  ( $K=1,2,3$ )

Para um nível intermediário "K", a equação da continuidade integrada verticalmente na camada cuja espessura é

$$h_K = L_K - L_{K-1} \quad \text{fica:}$$

$$\begin{aligned}
 w(L_K) = & - \sum_{i=1}^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (h_i v_i) \right] + \\
 & + u(L_K) \frac{\partial L_K}{\partial x} + v(L_K) \frac{\partial L_K}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{16}$$

A equação de movimento no sentido "x" integrada verticalmente para a mesma camada, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{Du_k}{Dt} + \frac{w_k}{2h_k} [(u_k + u_{k-1}) - (u_{k+1} + u_k)] + \\ + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p_k}{\partial x} + f v_k = \frac{1}{\rho_k h_k} [ h_k \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx_k} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy_k} \right) + ( \tau_{xk}^s - \tau_{xk}^i ) ] \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $Du_k/Dt$  inclui a derivada local e os termos convectivos, sendo que as componentes das velocidades que aparecem foram obtidas integrando na vertical entre  $L_k$  e  $L_{k-1}$ .  $\tau_{xx_k}$  e  $\tau_{xy_k}$  são as tensões originadas pela turbulência e podem ser escritas em função do coeficiente de viscosidade turbulenta  $\epsilon_H$  e das derivadas das componentes das velocidades.  $\tau_{xk}^s$  e  $\tau_{xk}^i$  são as tensões de cisalhamento interfaciais no nível superior e inferior do estrato respectivamente, e são modeladas de acordo com uma lei de fricção quadrática,  $\tau_{xk}^s$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tau_{xk}^s = \frac{c}{2h_k^2} (\rho_{k-1} + \rho_k) (u_{k-1} - u_k) \Delta VK \quad (18)$$

onde "c" é um coeficiente de fricção e

$$\Delta VK = [(u_{k-1} - u_k)^2 + (v_{k-1} - v_k)^2]^{1/2} \quad (19)$$

A expressão de  $\tau^i_{x_k}$  é similar a equação (18)

$\tau^s_{x_1}$  corresponde à tensão na superfície originada pelo vento e pode ser colocada em função da velocidade e da direção do vento;  $\tau^i_{x_b}$  corresponde à tensão no fundo e pode ser colocada em função do quadrado da velocidade na última camada e do inverso do quadrado do coeficiente de Chezy.

Assume-se que a terceira equação de movimento se reduz a hipótese de distribuição hidrostática de pressões. Para o nível "K" se tem

$$P_k = \rho_1 g (\eta - L_1) + \sum_{m=2}^{k=1} \rho_m g (L_{m-1} - L_m) + \rho_k g (L_{k-1} - z) \quad (20)$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade.

O gradiente de pressões no sentido "x" tem a seguinte fórmula de recorrência:

$$\frac{\partial P_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} P_{k-1} - g (\rho_k - \rho_{k-1}) \frac{K-1}{b} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gh}{2b} \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho_{k-1} + \frac{\partial}{\partial x} \rho_k \right) \quad (21)$$

No sentido de "y", as equações (17) e (21) tem uma forma similar.

Assume-se que a (17) é válida para o nível  $h_k/z$ .

A aplicação do método de elementos finitos às equações de movimento e continuidade conduz a um sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem do tipo

$$M_{ij} \dot{V}_j + A_{ij1} V_i V_j + B_{ij} V_j + C_{ij} P_j + D_i = 0 \quad (22)$$

$$M_{ij} \dot{\eta}_j + E_{ij} V_j = 0 \quad (23)$$

H.P. Wang [41] propõe a utilização da matriz de massa discretizada no lugar da consistente; isto significa que, para um triângulo se tem

$$M_{ij} = \int_A \phi_i \phi_j^T dA = \frac{A}{12} \quad M'_{ij} \cong \frac{A}{3} \quad M''_{ij}$$

$$M'_{ij} = 2, \quad M''_{ij} = 1 \quad (i=j) \quad (24)$$

$$M'_{ij} = 1, \quad M''_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

onde  $\phi$  são as funções de interpolação e  $A$  é a área do elemento. Em problemas simples esta aproximação deu bons resultados além de poupar 50% em armazenamento e evitar a inversão da matriz. Para integrar no tempo H.P. Wang resolve sucessivamente as equações (22) e (23), dando lugar a um esquema explícito.

Na ref. [41] as ondas curtas perturbadoras e as instabilidades devidas a não linearidade, são combatidas através de um processo de "suavização" adotando para um valor nodal e de uma certa incógnita "f" o valor  $f^*$  tal que

$$f^* = \alpha f + (1 - \alpha) \left[ \sum_{i=1}^n f_i \frac{A_i}{x_i} \right] / \left[ \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x_i} \right] \quad (25)$$

onde "n" é o número de elementos que rodeia o ponto nodal considerado, cujas áreas são  $A_i$  e cujas distâncias aos centróides são dadas por  $x_i$ , sendo  $f_i$  o valor da incógnita no centróide;  $\alpha$  é um coeficiente próximo da unidade (Wang recomenda  $\alpha = 0,98$ ). Levando

em conta que esta técnica se deteriora quando são incluídas nos contornos os termos convectivos, é conveniente eliminá-los. Em relação a  $\epsilon_H$ , valores pequenos não proporcionam a "suavização" necessária e valores muito grandes produzem instabilidades.

M. Kawahara et alii [21] aplicam um esquema explícito de dois passos para integrar as equações (22) e (23), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij} v_j^{n+1/2} &= \bar{M}_{ij} v_j^n - \frac{\Delta t}{2} F_i^n \\ & \text{1º PASSO} \\ \bar{M}_{ij} \eta_j^{n+1/2} &= \tilde{M}_{ij} \eta_j^n - \frac{\Delta t}{2} G_i^n \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij} v_j^{n+1} &= \bar{M}_{ij} v_j^n - \Delta t F_i^{n+1/2} \\ & \text{2º PASSO} \\ \bar{M}_{ij} \eta_j^{n+1} &= \tilde{M}_{ij} \eta_j^n - \Delta t G_i^{n+1/2} \end{aligned} \quad (27)$$

onde "n" é o n-ésimo ponto no eixo do tempo.  $\bar{M}_{ij}$  é a matriz de massa discreta e  $\tilde{M}_{ij}$  é uma combinação linear das matrizes de massa consistente e discreta

$$\tilde{M}_{ij} = e \bar{M}_{ij} + (1 - e) M_{ij} \quad (28)$$

A justificativa deste esquema pode achar-se na referência [22].

## BIBLIOGRAFIA

- 1 . AWRUCH, A.M. Manual do usuário - HYDRO: uma linguagem orientada para fenômenos de transporte, de massa, transferência de calor e hidráulica. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1983. 149p.
- 2 . \_\_\_\_\_. Simulação numérica de um fluxo estratificado não estacionário. Trabalho apresentado no 5º Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, 1984. 19p.
- 3 . \_\_\_\_\_. Sobre a solução das equações de águas rasas com modelos de elementos finitos. Trabalho apresentado no 2º Colóquio Brasil-Venezuela de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 1981. 16p.
- 4 . \_\_\_\_\_. Un modelo matemático para estudio del movimiento de águas "poco profundas" en regimen no permanente. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1976. 141f. Diss. maestr.
- 5 . BALLOFFET, A.; GOTELLI, L.M.; MEOLI, G.A. Hidráulica 2.ed. Buenos Aires, Ediar, 1952-55. 2v.
- 6 . BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J., eds. The finite element technique. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1975. 410p.

- 7 . BREBBIA, C.A. & SMITH, S. Solution of Navier Stokes equations for transient incompressible flow. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 1., Princeton, 1976. Proceedings... London, Pentech Press, 1977. Cap.4, p.205.30.
- 8 . BONILHA, N.F. Circulação em lagos: um modelo matemático simplificado aplicado ao rio Guaíba e Lagoa dos Patos. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1974. 60f. Diss. maestr.
- 9 . CHOW, Ven Te. Open-channel hydraulics. Tokyo, Mcgraw-Hill Kogakusha, 1959. 680p.
- 10 . CONNOR, J.J. & BREBBIA, C.A. Finite element techniques for fluid flow. London, Newnes-Butterworths, 1977. 310p.
- 11 . DAVIES, A. 3-D model with dept varying eddy viscosity Birkenhead Merseyside, Institute of Ocean Sciences, 1977.
- 12 . DESAI, C.S. Elementary finite element method. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1979. 434p.
- 13 . DRONKERS, J.J. Tidal computations for rivers, coastal areas, and seas. Journal of the Hydraulic Division, ASCE, 95(1):29-77, Jan.1969.
- 14 . EBELING, H. Berechnung der vertikalstruktur wind-und gezeitenerzeugter strömungen nach der methode der finiten element. Hannover, Technische Universität Hannover, 1976. Diss.

- 15 . FRIEDRICH, H. Preliminary results from a numerical multilayer model for the circulation in the North Atlantic. Deutsche Hydrographische Zeitschrift, Hamburg, 23:4, 1970.
- 16 . GALLAGHER, R.H. Finite element lake circulation and thermal analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW PROBLEMS, Swansea, 1974. Finite elements in fluids: viscous flow and hydrodynamics. London, Johan Wiley, 1975. v.1, p.119-31.
- 17 . GROTKOP, G. Finite element analysis of long-period water waves. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2(2):147-57, May 1973.
- 18 . HEAPS, N.S. On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges. Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege (serie 6), 1:143-80, 1971.
- 19 . HOLZ, K.P. & WITHUM, D. Finite element applications for transient processes in estuaries. In: U.S.-GERMANY SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENT METHODS, Cambridge, 1976. Formulations and computational algorithms un finite element analysis. /s.l.p./, MIT, 1977. p.917-57.
- 20 . HOOD, P. Frontal solution program for unsymmetric matrices. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10(2):379-99, 1976.
- 21 . KAWAHARA, M.; KOBAYASHI, M.; NAKATA, K. A three-dimensional multiple level finite element method considering variable water density. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN FLOW PROBLEMS, 3., Banff, Alberta, 1980. Finite elements in fluids. Chichester, John Wiley, 1982. v.4, p.129-56.

- 22 . KAWAHARA, M. et alii. Selective lumping finite element method for shallow water flow. International Journal for Numerical Methods in fluids, 2(1):89-112, 1982.
- 23 . KELLY, D.W. et alii. A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(11):1705-11, Nov.1980.
- 24 . KING, I.P. A three dimensional finite element model for stratified flow. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENT METHODS IN FLOW PROBLEMS, 4., Tokyo, 1982. Finite element flow analysis. University of Tokyo Press/ North-Holland, 1982. p.513-20.
- 25 . KOUTITAS, C. & O'CONNOR, B. Finite element - fractional steps solution of the 3-D coastal circulation model. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 3., Lafayette, 1980. Proceedings... Lafayette, School of Engineering of the University of Mississippi, 1980. Cap.5, p.64-7.
- 26 . LAEVASTU, T. A multilayer hydrodynamical numerical model. Monterey, Cal., Environmental Prediction Research Facility, Naval Postgraduate School, 1974.
- 27 . LAIBRE; J.P. Finite element analysis of depth varying flow on lakes and coastal regions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 3., Lafayette, 1980. Proceedings... Lafayette, School of Engineering of the University of Mississippi, 1980. Cap.5, p.72-91.
- 28 . LEENDERTSE, J.J. Aspects of the computational model for long period water wave propagations. Santa Monica, Cal., The Rand Corporation, 1967.

- 29 . LEENDERTSE, J.J.; ALEXANDER, R.C.; LIV. S.K. A three dimensional model for estuaries and coastal seas. In: \_\_\_\_\_. Principles of computation. Santa Monica, Cal. The Rand Corporation, 1973. v.1.
- 30 . NEVES, E.T. Curso de hidráulica. 7.ed. Porto Alegre, Globo, 1982. 577p.
- 31 . RUSSELL, G.E. Hydraulics. 5.ed. Henry Holf, 1949. 468p.
- 32 . SIGNORINI, S.R. A three dimensional numerical model of circulation and diffusion - advection processes for estuarine and coastal application by finite element method. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW PROBLEMS, 4., Tokyo, 1982. Finite element flow analysis. University of Tokyo Press/ North-Holland, 1982. p.603-10.
- 33 . SMITH, T. & TAKHAR, G. On the calculation of width averaged flow due to long wave in open channels. Journal of Hydraulic Research, 14(4), 1979.
- 34 . SUNDERMANN, J. The application of finite element and finite difference in hydrodynamical numerical methods. In: U.S.-GERMANY SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENT METHODS, Cambridge, 1976. Formulations and computational algorithms in finite element analysis. /s.1.p./ MIT, 1977. p.986-1011.
- 35 . \_\_\_\_\_. Computation of barotropic tides by the finite element method. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENTS IN WATER RESOURCES, 1., Princeton, 1976. Proceedings;.. London, Pentech Press, 1977. Cap.4, p.51-67.

- 36 . \_\_\_\_\_. Die hydrodynamisch-numerische berechnung der vertikalkonstruktion von bewegungsvorgängen in künden und becken. Mitteilungen. Institut für Meereskunde. Universität Hamburg, n.19, 1971.
- 37 . \_\_\_\_\_. A three dimensional model of homogeneous estuary In: Proceedings of the Coastal Engineering Conference, ACSE, 1976. Cap.136, p.2337-56.
- 38 . TAYLOR, C. & DAVIS, L.M. Tidal propagation and dispersion in estuaries. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE FINITE ELEMENT METHOD IN FLOW PROBLEMS, Swasea, 1974. Finite elements in fluids: viscous flow and hydrodynamics. London, John Wiley, 1975. v.1, p.95-118.
- 39 . TRÖSCH, J. Threedimensional finite elements for the calculation of circulations in a deep lake. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON FINITE ELEMENT METHODS IN FLOW PROBLEMS, 4., Tokyo, 1982. Finite elements flow analysis. University of Tokyo Press/North-Holland, 1982. p.529-34.
- 40 . VALLENTINE, H.R. Applied hydrodynamics. 2.ed. London, Butterworths, 1969. 296p.
- 41 . WANG, H.P. Multi-leveled finite element hydrodynamic model of Block Island Sound. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FINITE ELEMENT IN WATER RESOURCES, 1., Princeton, 1976. Proceedings ... London, Pentech Press, 1977. Cap.4, p.69-93.
- 42 . WEARE, T.J. Finite element method or finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations? Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7(3):351-7, Mar. 1976.

- 43 . YANENKO, N.N. The method of fractional steps. Berlin, Springer, 1971. 160p.
- 44 . ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971. 521p.

- 43 . YANENKO, N.N. The method of fractional steps. Berlin, Springer, 1971. 160p.
- 44 . ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971. 521p.