

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE MODELOS SUBMALHA EM ELEMENTOS FINITOS

por

Carla Marques Xavier

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, fevereiro de 2008.

# ANÁLISE DE MODELOS SUBMALHA EM ELEMENTOS FINITOS

por

Carla Marques Xavier

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Adriane Prisco Petry

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Luiz Augusto Magalhães Endres

Prof. Dr. Sergio Viçosa Möller

Prof. Dr. Paulo Smith Schneider

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, fevereiro de 2008.

## AGRADECIMENTOS

A minha mãe Liane, que foi a primeira a me ensinar o valor do estudo e da busca pelo conhecimento e aperfeiçoamento pessoal.

Ao André, meu namorado, por seu amor, durante todos esses anos, por sua generosidade e pelo apoio nos momentos em que não pude dar-lhe a atenção que merece.

À Prof<sup>a</sup> Adriane Prisco Petry, pela orientação, companheirismo e confiança durante todo o meu curso de Mestrado. Agradeço a ela por ter acreditado na minha capacidade e por ter me feito acreditar também.

## RESUMO

A turbulência continua sendo, ainda hoje, um grande desafio para os pesquisadores, pois os escoamentos turbulentos são complexos e dependentes do tempo e do espaço.

A combinação entre Simulação de Grandes Escalas e Método de Elementos Finitos está provando ser de grande relevância à comunidade de Engenharia, no entanto, ainda são escassas as publicações que tratam dessa combinação.

Os objetivos desse trabalho são: analisar escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos partindo de um código computacional tridimensional apresentado por Petry, 2002; verificar o comportamento dos Modelos Submalha em problemas de simulação de escoamentos tridimensionais tomados como padrões para validação de modelos numéricos, tais como canal e canal com degrau; estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos.

Para alcançar esses objetivos são utilizados o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al., 1991. Para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico emprega-se a filtragem por elementos finitos independentes de Petry, 2002.

Na implementação do algoritmo é utilizado o Método dos Elementos Finitos e, para integrar as equações governantes, é usado o esquema de Taylor-Galerkin para a discretização no tempo e no espaço. O elemento finito de discretização do domínio computacional é o hexaedro linear.

Os resultados obtidos com Simulação de Grandes Escalas no modelo clássico de Smagorinsky e no modelo Dinâmico, tanto no canal quanto no canal com degrau, tiveram boa concordância com dados experimentais e com Simulação Numérica Direta, mas, principalmente no canal, o modelo Dinâmico mostrou melhor comportamento próximo à parede.

## ABSTRACT

Since the turbulent flows are complex and dependent on time and space, even today, turbulence is still a big challenge for researchers.

The combination of large-eddy simulation and the finite element method is confirmed to be of great relevance to the Engineering community, although publications in this area are still rare.

The main objectives in this paper are: to analyze the flow of viscous, incompressible and isothermal fluids, starting from the three-dimensional computing code presented by Petry, 2002; to check the subgrid scale models in problems of simulation of three-dimensional flows, taken as benchmarks for validation of numerical models, the flow through a rectangular cross-section channel and the backward-facing step; to study and to apply the large eddy simulation using the finite element method.

To reach these objectives, Smagorinsky's classical model is used, as well as the dynamic model of turbulent viscosity, initially proposed by Germano et al., 1991. The second filtering of the dynamic process is made through the independent finite elements proposed by Petry, 2002.

In the implementation of the algorithm, the finite element method is used and Taylor-Galerking scheme is used for discretization in time and space and to link governing equations. Linear hexahedral element is applied for the discretization of the computing domain.

The results from large-eddy simulation in the Smagorinsky classical model and in the Dynamic model, either in the channel or in the backward-facing model, are in good agreement with experimental data and with direct numerical simulation, although the Dynamic model showed better behavior next to the wall, mainly in the channel flow.

## ÍNDICE

1. Introdução .....	1
1.1. Turbulência .....	1
1.2. Modelagem da Turbulência.....	4
1.3. Objetivos, Metodologia e Organização .....	9
2. Formulação Matemática .....	11
2.1. Equações que governam o escoamento.....	11
2.2. Equações para Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos .....	15
2.3. Modelos de Turbulência Submalha .....	19
2.3.1. Modelo de Smagorinsky .....	21
2.3.2. Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta.....	22
2.4. Equações que governam o escoamento com Modelos Submalha de Smagorinsky e Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta.....	23
3. Modelagem Numérica e Aspectos Computacionais.....	25
3.1. Formulação de Elementos Finitos do Problema.....	25
3.1.1. Formulação de Resíduos Ponderados do Problema.....	27
3.1.2. Equações de Elementos Finitos do Problema.....	29
3.2. Esquema de Taylor-Galerkin.....	33
3.3. Segunda Filtragem .....	35
4. Resultados .....	40
4.1. Análise Tridimensional de Escoamento Turbulento em Canal .....	40
4.2. Análise Tridimensional de Escoamento Laminar e Turbulento sobre um Degrau.....	50
5. Conclusões .....	69
6. Referências bibliográficas.....	71

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Caracteres Romanos

$C$	velocidade de propagação do som no meio [m/s]
$C_s$	constante de Smagorinsky
$C(x,t)$	coeficiente do modelo Dinâmico
$C_{ij}$	termos cruzados de velocidades
$L_{ij}$	termos de Leonard
$Re$	Número de Reynolds [ $UL/v$ ]
$F$	freqüência [Hz]
$f_i$	componente das forças de campo na direção $i$ [ $N/m^3$ ]
$k_{SM}$	energia cinética submalha [ $m^2/s^2$ ]
$n_j$	cosseno diretor do vetor normal ao contorno considerado
$p$	pressão [ $N/m^2$ ]
$\bar{p}$	pressão, componente correspondente às grandes escalas [ $N/m^2$ ]
$p^*$	função peso para a pressão
$\bar{p}_{\sim}$	vetor de valores nodais da pressão
$p_{\sim}^*$	vetor de valores nodais da função peso de pressão
$t$	tempo [s]
$t_i$	valores prescritos das forças de superfície no contorno indicado [ $N/m^2$ ]
$v_i$	componente da velocidade na direção $i$ [m/s]
$\hat{v}_i$	valores prescritos da componente $i$ da velocidade no contorno
$\bar{v}_i$	componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção
$v'_i$	componente, correspondente às escalas submalha, do vetor de velocidade na direção
$V_i^*$	função peso para a velocidade
$\bar{v}_{\sim i}$	vetor de valores nodais da componente $i$ da velocidade
$v_{\sim i}^*$	vetor de valores nodais da componente $i$ da função peso de velocidade
$x_i$	coordenada na direção $i$ [m]

### Caracteres Gregos

$\Delta p$	variação da pressão [ $N/m^2$ ]
------------	---------------------------------

$\Delta t$	intervalo de tempo [s]
$\Delta \rho v_i$	variação de $\rho v_i$
$\bar{\Delta}$	escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas
$\langle \bar{\Delta} \rangle$	comprimento característico do segundo filtro, sendo $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$
$\Phi$	densidade espectral [(m/s) <sup>2</sup> /Hz]
$\Gamma$	contorno do domínio
$\Gamma_e$	contorno do elemento
$\Omega$	domínio do problema
$\Omega_e$	domínio do elemento
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\underset{\sim}{\phi}$	vetor de funções de interpolação para a velocidade
$\lambda$	coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido [Ns/m <sup>2</sup> ]
$\eta$	componente do sistema de coordenadas naturais
$\mu$	coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido [Ns/m <sup>2</sup> ]
$\nu$	viscosidade cinemática [m <sup>2</sup> /s]
$\nu_t$	viscosidade turbulenta [m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	massa específica do fluido [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_{ij}$	tensor de tensões [N/m <sup>2</sup> ]
$\xi$	componente do sistema de coordenadas naturais
$\underset{\sim}{\psi}$	vetor de funções de interpolação para a pressão
$\zeta$	componente do sistema de coordenadas naturais



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1.</b> Espectro de energia cinética turbulenta. ....	6
<b>Figura 1.2.</b> Espectro de energia, ilustrando as duas escalas que definem os dois filtros utilizados e a banda de frequência que serve à modelagem do processo de interação entre as escalas resolvidas e as escalas submalha.....	8
<b>Figura 2.1.</b> Forma da função filtro tipo "box". ....	17
<b>Figura 3.1.</b> Malha de elementos finitos. ....	26
<b>Figura 3.2.</b> Diferentes tipos de elementos finitos.....	26
<b>Figura 3.3.</b> Elemento independente em uma malha tridimensional. ....	36
<b>Figura 3.4.</b> Elemento hexaédrico de oito nós no espaço computacional e físico.....	37
<b>Figura 4.1.</b> Domínio computacional do problema. ....	41
<b>Figura 4.2.</b> Discretização do domínio computacional.....	42
<b>Figura 4.3.</b> Respectivamente:vetores de velocidade $u$ , campo de velocidade e campo de pressão.. ....	45
<b>Figura 4.4.</b> Campo de vorticidade $\omega_z$ . ....	46
<b>Figura 4.5.</b> Perfil de vorticidade.....	47
<b>Figura 4.6.</b> Perfil de velocidade $u$ .....	47
<b>Figura 4.7.</b> Tensão de Reynolds $u'v'$ .....	48
<b>Figura 4.8.</b> Espectros de frequência para as velocidades $u$ e $v$ . ....	49
<b>Figura 4.9.</b> Domínio computacional do problema .....	51
<b>Figura 4.10.</b> Detalhes da discretização do domínio computacional.....	52
<b>Figura 4.11.</b> Comprimento de recolamento determinado pela vorticidade média.....	54
<b>Figura 4.12.</b> Campo de velocidade instantânea $u$ , respectivamente, para $Re=100, 400, 2690, 5100$ e $10000$ .....	56
<b>Figura 4.13.</b> Campo de vorticidade instantânea $u$ , respectivamente, para $Re=100, 400, 2690, 5100$ e $10000$ .....	57
<b>Figura 4.14.</b> Campo de pressão instantânea $u$ , respectivamente, para $Re=100, 400, 2690, 5100$ e $10000$ .....	58
<b>Figura 4.15.</b> Isolinhas de função de corrente, respectivamente, para $Re=100, 400, 2690, 5100$ e $10000$ . ....	59
<b>Figura 4.16.</b> Vetores de velocidade $u$ , respectivamente, para $Re=100, 400, 2690, 5100$ e $10000$ .. ....	60
<b>Figura 4.17.</b> Solução para $Re = 10000$ , respectivamente, campo de velocidade $u$ média ( $u_{\min}=-26\text{m/s}$ , $u_{\max}=79\text{ m/s}$ ), campo de vorticidade média ( $\omega_{\min}=0\text{ s}^{-1}$ , $\omega_{\max}=892\text{ s}^{-1}$ ) e campo de pressão média ( $p_{\min}=-1458\text{ Pa}$ , $p_{\max}=431\text{ Pa}$ ).....	61

**Figura 4.18.** Solução para  $Re = 10000$ , respectivamente, vetores de velocidade  $u$  média e isolinhas de função de corrente média..... 62

**Figura 4.19.** Movimento Lagrangeano de partículas para  $Re = 5100$  e  $Re = 10000$ .. ..... 63

**Figura 4.20.** Secções de levantamento do perfil de velocidade média. Comparação com os dados de: DNS- Le et al., 1997; Experimental – Jovic & Driver, 1994; LES-2D – Abrunhosa, 2004..... 64

**Figura 4.21.** Perfis RMS de intensidade de turbulência e tensão cisalhante turbulenta. Comparação com os dados de: DNS- Le et al., 1997; Experimental – Jovic & Driver, 1994..... 65

**Figura 4.22.** Perfis de velocidade média  $u$ . Em  $x/h = 6$ , comparação com os dados de LES – Lima R. C., 2005..... 66

**Figura 4.23.** Perfis RMS de intensidade de turbulência e tensão cisalhante turbulenta. a)  $\frac{U_{rms}}{U_c}$ ; b)  $\frac{V_{rms}}{U_c}$ ; c)  $\frac{-\overline{u'v'}}{U_c^2}$  .....

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 4.1.</b> Parâmetros computacionais usados na simulação.....	44
<b>Tabela 4.2.</b> Propriedades médias do escoamento.....	45
<b>Tabela 4.3.</b> Parâmetros computacionais usado nas simulações.....	53
<b>Tabela 4.4.</b> Comprimento de recolamento $X_r/h$ em função do número de Reynolds.....	55

## **1. Introdução**

### **1.1 Turbulência**

A maioria dos escoamentos são turbulentos [Möller e Silvestrini, 2004; Silveira Neto, 2002], eles estão presentes em nossas vidas desde o sangue que escoar em nosso corpo até os escoamentos atmosféricos. Numerosos outros exemplos de escoamentos turbulentos encontram-se na Aeronáutica, Hidráulica, Engenharia Nuclear e Química, Oceanografia, Meteorologia, Astrofísica e Geofísica.

Silveira Neto, 2002, observa que desde Leonardo da Vinci (1510), os estudos neste domínio têm acontecido. Ele fez interpretações muito importantes com base apenas em observações visuais: a esteira de vórtices gerada à jusante de um obstáculo é composta por uma larga quantidade de frequências e de formas diversas.

Embora a turbulência esteja presente com frequência nas experiências do mundo real, e seja objeto de intensa pesquisa científica, não existe nem mesmo unanimidade em sua definição.

De acordo com Tennekes e Lumley, 1972, tudo o que se pode fazer no sentido de definir a turbulência é listar algumas das características principais dos escoamentos turbulentos, como: irregularidade, difusividade, associação a números de Reynolds elevados, tridimensionalidade das flutuações de vorticidade, dissipação, validade da hipótese do contínuo, e ser caracterizada pelas propriedades do escoamento, não pelas propriedades físicas do fluido.

Silveira Neto, 2002, por sua vez, apresenta as seguintes características como as mais importantes da turbulência: alta difusividade, rotacionalidade e tridimensionalidade, dissipação, validação da hipótese do contínuo, imprevisibilidade e associação a altos números de Reynolds, com um largo espectro de energia.

Um conceito mais atual trata da turbulência como um escoamento organizado com estruturas coerentes de várias escalas de comprimento. Segundo Lesieur, 1997, uma estrutura coerente pode ser conceituada como uma região do espaço onde, para um dado tempo, tem o mesmo tipo de organização, com relação a alguma quantidade do escoamento (exemplos: velocidade, vorticidade, pressão, massa específica, temperatura). Também caracteriza um vórtice coerente como uma região do espaço, onde a concentração de vorticidade é suficiente para que as trajetórias de fluido girem ao redor dele, mantém sua forma característica por um período maior do que o tempo de rotação local e é imprevisível. Neste sentido, um vórtice coerente é

uma estrutura coerente. Detalhes adicionais podem ser encontrados em Lesieur, 1997 e Möller e Silvestrini, 2004.

As duas referências acima ilustram a complexidade do assunto. Por isso a turbulência tem sido intensamente pesquisada no último século, como revela Silveira Neto, 2002.

Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar esses movimentos experimentalmente muito antes do que matematicamente [Fortuna, 2000]. Até mesmo porque, a descrição matemática desses movimentos só foi possível a partir do século XIX com as Equações de Navier-Stokes.

Apesar da única restrição, para a aplicação de tais equações, ser para meios contínuos, sua solução analítica torna-se extremamente complexa quando sujeitas a regiões arbitrárias com condições de contorno gerais, pois tratam-se de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares e os métodos matemáticos resolvem apenas formas muito simples de equações, dentro de contornos triviais.

Apesar dessas equações terem sido formuladas há mais de um século, não foi descoberta ainda uma forma universal de solução analítica exata de um problema de dinâmica dos fluidos a partir delas.

Do interesse em se resolver o problema numericamente, surgiu a Dinâmica dos Fluidos Computacional (*CFD – Computational Fluid Dynamics*), que trata da análise numérica dos escoamentos.

Löhner, 2001, cita diversas razões que levaram ao crescimento do interesse de cientistas e engenheiros a desenvolverem estudos nesta área:

- **necessidade de prever o comportamento de um determinado produto**, pois defeitos não visíveis podem causar falhas e ter um efeito devastador sobre o mesmo;
- **o custo de um experimento** pode ser muito alto, por exemplo, um teste subterrâneo de um artefato nuclear custaria, aproximadamente, US\$  $10^8$ ;
- **alguns experimentos podem ser proibitivos**, ou por não serem passíveis de reprodução em laboratório, ou por terem alto risco, como por exemplo situações biomédicas;
- **a introspecção** é uma das grandes vantagens do CFD, pois simulações numéricas oferecem mais informações sobre o escoamento do que os experimentos. Além disso, uma malha com  $2 \times 10^7$  pontos é equivalente a um experimento com  $2 \times 10^7$  sensores ou instrumentos de medida;
- **o avanço computacional**, pois, segundo Löhner, por volta de 1983 um problema com cerca de 1000 elementos finitos era considerado excessivamente grande, hoje um problema desta magnitude pode ser facilmente resolvido, mesmo num computador pessoal.

Apesar de todas essas vantagens apresentadas pelos procedimentos numéricos não se pode deixar de ressaltar a importância das análises teóricas (analítica) e dos métodos experimentais, pois têm crucial importância na validação de códigos numéricos.

Os principais métodos utilizados para simulação numérica de escoamentos de fluidos são: Métodos de Diferenças Finitas (FDM - *Finite Difference Method*); Método de Volumes Finitos (FVM - *Finite Volume Method*) e Métodos de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*).

O método de diferenças finitas tem sido usado para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor, o que pode ser observado pela grande quantidade de trabalhos na literatura especializada, existindo muitos códigos computacionais baseados no mesmo. Vários autores afirmam que uma limitação deste método está na discretização de domínios com complexidade geométrica, problema este que pode ser parcialmente solucionado pelo uso de malhas não-ortogonais.

Um método apresentado por Patankar (1980), denominado na literatura de método de volumes finitos (FVM - *Finite Volume Method*), constitui-se hoje em um dos principais métodos para análise numérica de escoamentos e transferência de calor. A característica principal deste método é a fácil interpretação física dos termos das equações em termos de fluxos, fontes e forças, devido ao fato da formulação resultante ser de natureza conservativa, uma vez que tal formulação é obtida através dos princípios de conservação.

Devido às dificuldades em se utilizar o método das diferenças finitas em geometrias complexas, o método de elementos finitos, inicialmente desenvolvido para análise estrutural, começou a ser aplicado para o caso de escoamentos, devido à sua grande versatilidade na discretização de domínios geometricamente complexos. O método tornou-se amplamente aceito a partir dos anos 60, quando foram iniciadas pesquisas em várias partes do mundo. Hoje se pode encontrar uma vasta literatura que trata da aplicação do método de elementos finitos em escoamentos de fluidos, como: Hughes, 1987; Franca e Frey, 1992; Reddy e Gartling, 1994; Popiolek, Awruch e Teixeira, 2006.

A aplicação de um método numérico também pode ser dividida em três etapas, as quais, na nomenclatura do método de elementos finitos, são: pré-processamento, processamento e pós-processamento.

Na etapa de pré-processamento, define-se a geometria ou domínio físico do problema; domínio este discretizado por algum tipo de elemento, constituindo a malha de elementos finitos. Nesta etapa podem ser definidas as propriedades físicas do fluido e demais parâmetros (condições de contorno e iniciais) necessários para a solução do problema.

Na fase de processamento, aplica-se um “*solver*” (termo usado na literatura para programas numéricos) baseado no modelo numérico para obtenção das grandezas de interesse (velocidade, pressão) em pontos do domínio denominados de nós dos elementos.

Na etapa de pós-processamento os resultados são analisados para se verificar a validade do modelo numérico ou para os propósitos para os quais se resolveu o problema. Técnicas de visualização gráfica, geralmente, são empregadas para análise dos resultados.

## **1.2 Modelagem da Turbulência**

Stull, 1988, observa que a utilização de simulações numéricas para a solução de problemas de escoamentos turbulentos tem uma dificuldade inerente, conhecida como *Problema de Fechamento*.

Esse problema decorre do fato do número de incógnitas presentes no sistema que descreve os escoamentos turbulentos ser maior que o número de equações. Está associado à característica de não linearidade da turbulência e surge a partir do momento em que as equações de Navier-Stokes são decompostas, de forma a se expressar o comportamento médio do escoamento separadamente de suas flutuações.

As novas incógnitas que surgem, que estão relacionadas às flutuações, precisam, de alguma forma, ser expressas em termos de variáveis, para as quais existam equações; de maneira a tornar o número de equações igual ao número de incógnitas. A este procedimento chama-se *Modelagem da Turbulência*.

A modelagem da turbulência é uma aproximação da natureza, na qual a equação que descreve o comportamento real de uma variável é substituída por uma aproximação, construída artificialmente.

De acordo com Wilcox, 2000, "um modelo ideal deve introduzir o mínimo em complexidade, enquanto captura a essência física relevante".

Por outro lado, como a turbulência é caracterizada como sendo um fenômeno inerentemente tridimensional e variável no tempo, uma enorme quantidade de informações é necessária para uma completa descrição de um escoamento turbulento. Assim, é esperado que quanto mais complexo seja o problema a ser resolvido, mais sofisticado deverá ser o método de solução a ser adotado. Logo, o requisito de simplicidade do modelo de turbulência será relativo à complexidade do problema a ser solucionado.

Os primeiros intentos de usar modelos de turbulência foram feitos por Kolmogorov, 1942 e Prandtl, 1945. Em ambos os trabalhos a turbulência foi caracterizada pela intensidade (definida pela energia de turbulência), que foi calculada usando uma equação diferencial, e a escala de turbulência (ou a frequência no caso de Kolmogorov, 1942). Os dois modelos fazem o uso do conceito de viscosidade turbulenta ("*eddy viscosity*").

Chou, 1945, eliminou as restrições dos trabalhos anteriores deduzindo as equações para as tensões de Reynolds e procurando mecanismos para modelar as mesmas.

Mais tarde, Rotta, 1951, estendeu o modelo de Chou. Os esforços foram descontinuados até a década de 60 devido à complexidade em tratar os modelos até então formulados.

Com o desenvolvimento da arquitetura dos computadores e dos algoritmos numéricos, houve uma retomada das pesquisas destinadas a formular modelos de escoamentos turbulentos.

Hoje, na modelagem da turbulência, três metodologias são mais usuais: *Simulação Numérica Direta* (DNS – Direct Numerical Simulation), *Equações Médias de Reynolds* (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes) e *Simulação de Grandes Escalas* (LES – Large Eddy Simulation).

A aproximação DNS que começou com Orszag e Patterson, 1972, exige uma malha suficientemente fina para poder resolver todas as escalas, o que acarreta num custo computacional muito alto, por isso essa metodologia somente é usada para baixos números de Reynolds.

Um largo espectro de energia é uma das mais importantes características de escoamentos turbulentos. A consequência imediata é que é muito difícil simular todas as escalas que o caracterizam, ou seja, o uso da metodologia DNS somente é possível para alguns poucos casos com baixos números de Reynolds e a grande maioria dos escoamentos é caracterizada por altos números de Reynolds.

As observações de Leonardo da Vinci (1510), já citado no item anterior, podem ser vistas como precursoras da técnica para a aproximação RANS, que é baseada na separação do valor instantâneo de uma variável específica em seu valor médio e em um valor flutuante, com relação ao valor médio. As componentes das tensões de Reynolds são originadas pelas substituições dos valores médios, mais os flutuantes das componentes de velocidade nas equações da conservação da quantidade de movimento. Como verificamos em Hinze, 1959; Schlichting, 1968 e Tennekes e Lumley, 1972.



As equações médias de Reynolds têm mais incógnitas do que equações e devido a isto é necessário usar um modelo de fechamento para definir as componentes das tensões de Reynolds.

Vários modelos têm sido empregados por diferentes autores, nas últimas três décadas e muitos destes modelos são descritos por Launder e Spalding, 1972 e 1974; Rodi, 1984 e Markatos, 1986, entre outros.

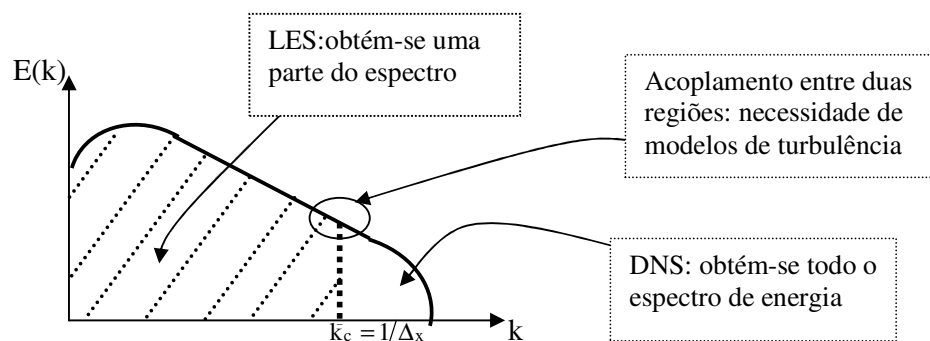
A metodologia RANS tem o custo computacional mais baixo do que a DNS, porém somente estruturas maiores são resolvidas e as condições de contorno não são tão simples de serem impostas.

A Simulação de Grandes Escalas (LES), inicialmente proposta por Smagorinsky, 1963, consiste em resolver diretamente as maiores estruturas turbulentas, que contêm a maior parte da energia; e modelar apenas as menores estruturas.

A metodologia LES baseia-se na premissa de que os movimentos nas menores escalas tendem a ser mais homogêneos e isotrópicos, conseqüentemente, menos afetados pelas condições de contorno. Assim, de acordo com Silveira Neto, 2002, pode-se esperar que a modelagem dessas escalas tenha um caráter universal, ou seja, uma menor dependência do tipo de escoamento que está sendo simulado.

A adoção dessa estratégia permite, portanto, simular escoamentos em números de Reynolds relativamente altos, a um custo computacional aceitável.

Entretanto, Silveira Neto, 2002, também observa que, mesmo a metodologia LES sendo mais eficiente do que a DNS do ponto de vista computacional, ela também necessita de malhas refinadas. Na Figura 1.1, ilustra-se o espectro de energia. Se todas as freqüências forem capturadas, explicitamente fala-se de Simulação Numérica Direta (DNS), em contraste com a metodologia LES com a qual se resolve apenas uma parte do espectro.



**Figura 1.1** – Espectro de energia cinética turbulenta. [Fonte: Silveira Neto, 2002].

Devido à interação com o escoamento principal, o movimento turbulento de grandes escalas é altamente influenciado pelas condições de contorno do escoamento. O escoamento principal tem muitas vezes uma direção preferencial, que é imposta ao movimento turbulento de grande escala. Esta característica torna o fenômeno turbulento altamente anisotrópico, sendo a intensidade das flutuações e as escalas de comprimento associadas dependentes da direção. No processo de cascata de energia, a sensibilidade à direção é reduzida. As grandes escalas de turbulência se distanciam das pequenas escalas nos escoamentos em que o número de Reynolds é suficientemente elevado e a sensibilidade direcional é totalmente perdida nas pequenas escalas, tornando o movimento turbulento de menor escala isotrópico. Este fenômeno, denominado *isotropia local*, onde o movimento dos grandes vórtices da turbulência é anisotrópico e o movimento de pequenos vórtices é isotrópico, é um conceito muito importante na modelagem da turbulência.

A principal diferença entre as metodologias LES e DNS está no conceito de *Filtragem*, pela qual se obtém a separação de escalas. Uma variável submetida à filtragem será composta de duas partes: *a filtrada*, referente às grandes escalas, resolvida diretamente durante a simulação; e a denominada *submalha*, não resolvida pela malha, que necessita ser modelada.

No processo de filtragem das equações de Navier-Stokes surgem termos não lineares, que contém grandezas para as quais não há equações explícitas e que necessitam, portanto, ser modelados. Entre esses termos há o chamado *Tensor de Tensões de Reynolds Submalha* ( $R_{ij}$ ).

A mais popular aproximação empregada como modelo submalha da LES tem sido o modelo proposto por Smagorinsky, 1963. Neste modelo as tensões de Reynolds submalha são aproximadas na forma de um processo de difusão por gradiente, fazendo analogia ao movimento molecular.

A representação da turbulência, nesse modelo, é feita por uma viscosidade turbulenta como uma propriedade local do fluido, quando, na realidade, a viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento.

Assim, de acordo com a observação de Markatos, 1986, o comprimento de mistura das pequenas escalas da turbulência é tratado de forma análoga ao livre caminho médio molecular, da teoria cinética dos gases. Essa descrição tem proporcionado bons resultados em simulações de escoamentos turbulentos em várias áreas da Engenharia.

Zang et al., 1993, observam que o modelo de Smagorinsky apresenta alguns inconvenientes como: a) necessita informar a constante  $C_s$ , a qual é dependente do escoamento; b) prevê um incorreto comportamento assintótico próximo à parede, ou em um escoamento

laminar; c) não permite a transferência de energia das pequenas escalas para as grandes escalas; d) assume que os eixos principais do tensor das tensões submalha são alinhados com os do tensor da taxa de deformação.

Silveira Neto, 2002, considera que as principais deficiências do modelo de Smagorinsky se manifestam na simulação de escoamentos em transição do regime laminar para o turbulento, e próximo à fronteiras sólidas, nos quais o uso de um valor constante para o coeficiente de Smagorinsky não produz bons resultados.

Atualmente pode-se encontrar uma vasta literatura que trata da aplicação da metodologia LES com modelo de Smagorinsky, como: Abrunhosa e Nieckele, 2005; Sampaio e Nieckele, 2006; Meyers e Sagaut, 2006; Leveque, Toschi, Shao e Bertoglio, 2007.

Devido à limitação da constante de Smagorinsky, várias alternativas têm sido propostas, como, por exemplo, as de Germano et al., 1991; Lilly, 1992; Zang et al., 1993; Vreman et al., 1994; Ghosal et al., 1995; Salvetti e Banerjee, 1995 e Meneveau et al., 1996; entre outros autores.

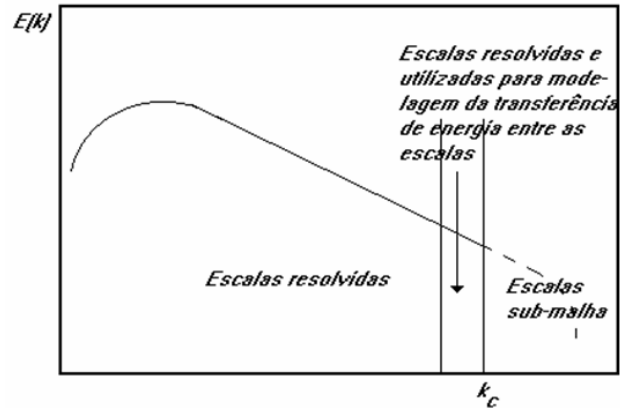
Uma importante proposta para superar essas dificuldades é a técnica de Modelagem Submalha Dinâmica, onde o coeficiente  $C_s$  é uma função que varia no tempo e no espaço.

Esse modelo é fundamentado em dois processos de filtragens, aplicados sucessivamente às equações de Navier-Stokes. O filtro ao nível de malha e o filtro teste geram, respectivamente, o tensor de escalas submalha e o tensor subteste, os quais são calculados explicitamente em função das grandes escalas (resolvidas com a metodologia LES).

Utilizando um modelo de viscosidade turbulenta para representar os tensores e uma identidade algébrica que os relaciona, Germano et al., 1991, definem uma expressão para o parâmetro  $C$ , em função do espaço e do tempo.

Em sua análise sobre a técnica de modelagem submalha dinâmica, Wilcox, 2000, destaca que as suas principais deficiências se apresentam quando ocorrem situações onde a viscosidade turbulenta assume valores negativos, implicando em transferência de energia cinética das escalas submalha para as maiores escalas, como mostra a figura 1.2.

Essa situação, na qual existe uma cascata inversa, é observada na realidade, e é referenciada na literatura internacional como *Backscatter*. A consequência desse fenômeno no modelo em questão é uma instabilidade numérica que leva à perda completa de energia cinética na escala submalha, comprometendo a acurácia das simulações.



**Figura 1.2** – Espectro de energia, ilustrando as duas escalas que definem os dois filtros utilizados e a banda de frequência que serve à modelagem do processo de interação entre as escalas resolvidas e as escalas submalha. [Fonte: Silveira Neto, 2002].

O modelo dinâmico apresenta algumas características inconvenientes, as quais têm sido revisadas através de contribuições de outros pesquisadores.

Lilly, 1992, para obter o parâmetro  $C$  de forma consistente, aplica o Método dos Mínimos Quadrados em substituição à contração aplicada por Germano et al., 1991. A partir de então, o modelo dinâmico de Germano et al., 1991, passa a ser utilizado com a modificação proposta por Lilly, 1992.

Essa modificação exige que os eixos principais das tensões submalha devam ser alinhados com o tensor da taxa de deformação, pois no caso contrário, causa uma excessiva transferência de energia das pequenas escalas para as grandes escalas ( $C$  negativo).

Zang et al., 1993, ameniza esse inconveniente que surge no modelo de Lilly, 1992, propondo um novo *Modelo Dinâmico Misto*, combinando linearmente o modelo dinâmico e o modelo de escalas de similaridade de Bardina (mostrado em Murakami, 1998).

O modelo dinâmico misto não requer o alinhamento dos eixos dos tensores de tensões turbulentas e de taxa de deformação.

Outras propostas foram feitas com o objetivo de superar o inconveniente causado pelas grandes flutuações no parâmetro  $C$ , que levam a instabilidades computacionais. A correção desse defeito com aplicação de um filtro de corte é a proposta de Nakayama e Vengadesan, 2002; Piomelli e Liu, 1995 e Sagaut et al., 1994.

Alternativas ao modelo dinâmico de escalas submalha podem ser encontradas em: Ghosal et al., 1995 – propõem um modelo dinâmico localizado; Salvetti e Banerjee, 1995 – apresentam um modelo dinâmico de dois parâmetros; Meneveau et al., 1996 – apresentam um modelo dinâmico Lagrangeano; Horiuti, 1997 – propõe modelo dinâmico submalha misto de

dois parâmetros (nova proposta à Salvetti e Banerjee); Krajnović e Davidson, 2001 – propõem um modelo submalha misto de uma equação; Tejada-Martinez e Jansen, 2006 – propõem modelo dinâmico submalha com parâmetro livre; e Yu et al., 2006 – propõem modelo submalha de difusividade turbulenta.

### **1.3 Objetivos, Metodologia e Organização**

Nos últimos anos, nos países desenvolvidos, o avanço dos computadores e o aumento das pesquisas, a respeito da Simulação de Grandes Escalas em escoamentos turbulentos, têm estimulado o interesse da indústria em aplicações dessa metodologia.

A combinação entre Simulação de Grandes Escalas e Método de Elementos Finitos está provando ser de grande relevância à comunidade de Engenharia, no entanto, ainda são escassas as publicações que tratam dessa combinação.

Os objetivos desse trabalho são: analisar escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos partindo de um código computacional tridimensional apresentado por Petry, 2002; verificar o comportamento dos Modelos Submalha em problemas de simulação de escoamentos tridimensionais tomados como padrões para validação de modelos numéricos, tais como canal e canal com degrau; estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos.

Para alcançar esses objetivos são utilizados o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al., 1991. Para o processo de segunda filtragem do modelo dinâmico emprega-se a filtragem por elementos finitos independentes de Petry, 2002.

Na implementação do algoritmo é utilizado o Método dos Elementos Finitos e, para integrar as equações governantes, é usado o esquema de Taylor-Galerkin para a discretização no tempo e no espaço. O elemento finito de discretização do domínio computacional é o hexaedro linear.

No capítulo 2, é apresentada a formulação matemática das equações governantes e no capítulo 3 a modelagem numérica.

Para a análise do comportamento dos modelos submalha de Smagorinsky e Dinâmico, no capítulo 4, são apresentados resultados de aplicações envolvendo escoamentos turbulentos em canal e em canal com degrau.

No capítulo 5 são apresentadas as conclusões relativas aos temas abordados na presente dissertação e algumas sugestões para trabalhos futuros, os quais considera-se ser

importante para a continuidade dos assuntos aqui estudados. No último capítulo, são apresentadas as referências bibliográficas que foram consultadas.

Os procedimentos desenvolvidos são implementados na linguagem FORTRAN 90/95. Softwares gráficos são utilizados para o tratamento e apresentações dos dados das soluções numéricas.

As simulações numéricas das aplicações foram processadas no supercomputador CRAY Y-MP / SunFire X2200, do Centro Nacional de Supercomputação da Região Sul, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (CESUP-RS/UFRGS) e os pré-processamentos e os pós-processamentos foram executados em um microcomputador Celeron M LV, 1600 MHz.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

### 2.1 Equações que Governam o escoamento

Os escoamentos turbulentos podem ser representados matematicamente pelas Equações de Navier-Stokes.

Considerando-se as hipóteses de escoamento tridimensional, transiente e isotérmico, as equações que governam o problema são:

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento (Balanço de Forças):

$$\frac{D\rho v_i}{Dt} - \frac{\partial(\sigma_{ij} - \rho \hat{\delta}_{ij})}{\partial x_j} = f_i \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

Equação de Conservação de Massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.2)$$

Com as condições de contorno:

$$v_i = \hat{v}_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (2.3)$$

$$(\sigma_{ij} - \rho \hat{\delta}_{ij})n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (2.4)$$

e condições iniciais:

$$v_i = \hat{v}_{i0} \quad \text{em } t = 0, \Omega \quad (2.5)$$

$$p = \hat{p}_0 \quad \text{em } t = 0, \Omega \quad (2.6)$$

Para um fluido newtoniano, é válida a seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (2.7)$$

Onde:

$\frac{D(\bullet)}{Dt}$  → derivada total

$\rho$  → massa específica do fluido

$v_i$  → componente da velocidade na direção  $i$

$x_i$  → coordenada na direção  $i$

$p$  – pressão

$f_i$  - componente das forças de campo na direção  $i$

$\delta_{ij}$  - delta de Kronecker

$\hat{v}_i$  - valores prescritos da velocidade  $i$  no contorno indicado

$n_j$  - cosseno diretor do vetor normal ao contorno

$t_i$  - valores prescritos das forças de superfície no contorno

$\sigma_{ij}$  - forças de superfície (tangenciais e normais ao volume de controle)

$\mu$  - coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido

$\lambda$  - coeficiente de viscosidade volumétrica do fluido

Reescrevendo as equações (2.1) e (2.2), substituindo a equação constitutiva (2.7) e expandindo a derivada total, estas passam a ser:

Equação de Conservação de Quantidade de Movimento (Balanço de Forças):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.8)

Equação de Conservação de Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.9)

Adicionando as condições de contorno (2.3) e (2.4) e as condições iniciais (2.5) e (2.6) às equações acima e considerando a equação (2.7) reescreve-se a condição de contorno (2.4):

$$\left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left[ \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + p \right] \delta_{ij} \right\} n_j = t_i$$

em  $\Gamma_t$  (2.10)

Considerando a equação (2.9), pode-se reescrever a equação (2.8) como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.11)

Os escoamentos a serem analisados neste trabalho são escoamentos incompressíveis. Nesses escoamentos verifica-se que a massa específica pode ser extraída dos termos derivados, visto que a mesma possui uma variação muito pouco significativa e, portanto, considerada nula [Fox e MacDonald, 1995].

Observa-se também que a hipótese de incompressibilidade é válida para escoamentos com baixos números de Mach ( $Ma \leq 0,3$ ), ou seja, velocidades nos escoamentos bem inferiores à velocidade do som no fluido.

Considerando, então, a massa específica constante, as equações 2.9 e 2.11, para o escoamento incompressível podem ser escritas como:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.12)



$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.13)

As equações acima são empregadas para a análise de escoamentos incompressíveis, entretanto para análise numérica desses escoamentos é necessário adotar algum esquema para superar complicações devidas a incompressibilidade, tais como o surgimento de modos espúrios de pressão, dificuldades de convergência e a ausência da variável de pressão na equação de conservação de massa (divergente nulo do campo de velocidades), resultando no aparecimento de zeros na diagonal principal da matriz de massa [Petry, 2002].

Neste trabalho considera-se um fluido quase-incompressível [Kawahara e Hirano, 1983], semelhante ao método de pseudo-compressibilidade [Chorin, 1980].

O uso da formulação de quase-incompressibilidade é bastante conveniente para a aplicação no método de elementos finitos, pois evita problemas de aparecimento de zeros na diagonal principal do sistema linear formado. Isso é devido ao termo de derivada da pressão no tempo, na equação da continuidade.

Para deduzir a equação de conservação de massa de um escoamento quase-incompressível considera-se a equação (2.9), e sendo [Schlichting, 1979]:

$$p = p(\rho) \quad (2.14)$$

logo:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.15)$$

Sendo a velocidade do som definida por:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = C^2 \quad (2.16)$$

logo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{C^2} \quad (2.17)$$

Substituindo (2.17) em (2.9) e multiplicando por  $C^2$ , obtém-se a equação de conservação de massa para escoamentos quase-incompressíveis na sua forma final:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.18)$$

Considerando-se a massa específica constante, multiplicando e dividindo a equação (2.11) pela massa específica, a equação de conservação da quantidade de movimento pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j) \right) + \frac{\lambda}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right) \delta_{ij} \right\} - f_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.19)

onde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , é a viscosidade cinemática do fluido.

A condição de contorno (2.10) também pode ser rerepresentada como:

$$\left\{ \left[ -p + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right] \delta_{ij} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (2.20)$$

As equações (2.18) e (2.19), juntamente com as condições de contorno (2.3) e (2.20) e condições iniciais (2.5) e (2.6), descrevem o escoamento de fluidos viscosos transientes, tridimensionais, quase-incompressíveis e isotérmicos.

Essas equações poderiam ser empregadas para análise de escoamentos turbulentos via metodologia DNS (Simulação Numérica Direta), entretanto, como já foi discutido anteriormente, a discretização espacial e temporal necessária para a análise de problemas práticos de engenharia por simulação direta ainda é superior à discretização possível nos computadores atuais. Conforme foi apresentado no capítulo 1, as alternativas à Simulação Direta para análise de um escoamento turbulento são o emprego das metodologias RANS (Equações Médias de Reynolds) ou LES (Simulação de Grandes Escalas).

Neste trabalho emprega-se a metodologia LES (Simulação de Grandes Escalas), tendo sido implementados dois modelos para representar os efeitos das escalas inferiores à resolução da malha, o Modelo de Smagorinski e um modelo de viscosidade turbulenta [Germano et al., 1991; Lilly, 1992]. As equações empregadas serão apresentadas nos próximos parágrafos.

## 2.2 Equações para Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos Turbulentos

Uma das propriedades mais marcantes da turbulência nos fluidos é a multiplicidade de escalas de comprimento e de tempo que a caracteriza. O primeiro passo para a aplicação da metodologia de Simulação de Grandes Escalas consiste exatamente na separação destas escalas, através de um processo de filtragem. Neste contexto, uma variável  $f$  limitada pode ser decomposta em uma componente representativa das grandes escalas  $\bar{f}$  e uma componente submalha  $f'$ , como segue:

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.21)$$

A operação de filtragem serve para diminuir escalas na ordem da largura do filtro, denotada por  $\Delta$ . A largura é uma característica do comprimento do filtro [Tejada-Martinez, 2002].

As variáveis de interesse ficam filtradas da seguinte forma:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (2.22)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.23)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (2.24)$$

Ao assumir a hipótese de que a massa específica é constante, tem-se  $\rho' = 0$  e portanto:

$$\rho = \bar{\rho} \quad (2.25)$$

É importante ressaltar que, apesar da semelhança na notação, o processo de filtragem realizado em LES (Simulação de Grandes Escalas) é diferente da filtragem realizada na hipótese da média temporal de Reynolds.

A figura 2.1 ilustra a função filtro "box" utilizada neste trabalho.

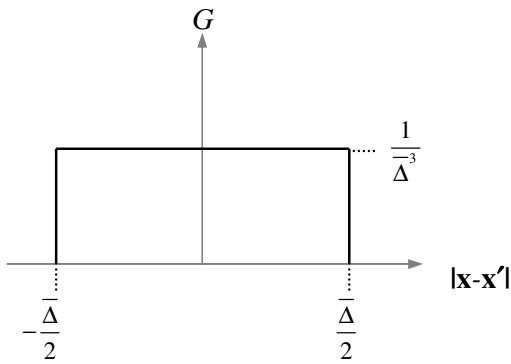
Leonard, 1974, define a operação de filtragem como uma convolução entre a variável de campo e a função filtro. Os valores filtrados são obtidos a partir do operador mostrados na equação que segue:

$$\bar{f}(x) = \int G(x - x') f(x') dx' \quad (2.26)$$

Sendo  $G$  uma função filtro, por exemplo a função filtro "box", definida como:

$$G(x - x') = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i} & , \text{ para } |x_i - x'_i| < \frac{\Delta_i}{2} \\ 0 & , \text{ para } |x_i - x'_i| > \frac{\Delta_i}{2} \end{cases} \quad (2.27)$$

onde  $\Delta_i$  é a dimensão do filtro na direção  $i$ , e  $n$  corresponde ao número de dimensões.



**Figura 2.1** Forma da função filtro tipo "box" [Fonte: Júnior, J.A.A.O., 2006];

A operação de filtragem possui as seguintes propriedades:

$$\overline{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} \quad (2.28)$$

$$\overline{\frac{\partial g}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial t} \quad (2.29)$$

$$\overline{\bar{g}f'} \neq \bar{g}f' \quad (2.30)$$

$$\overline{\bar{g}f} \neq \bar{g}f \quad (2.31)$$

$$\overline{gf'} \neq 0 \quad (2.32)$$

Procedendo a filtragem das equações (2.18) e (2.19) e considerando (2.22), (2.23) e (2.28) à (2.32) obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v_i v_j}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] + \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho (L_{ij} + C_{ij} + \overline{v'_i v'_j}) \right\} - f_i = 0 \end{aligned}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.34)$$

Sendo:

$\bar{v}_i \rightarrow$  componente, correspondente às grandes escalas, do vetor de velocidade na direção  $x_i$ .

$\bar{p} \rightarrow$  pressão, componente correspondente às grandes escalas.

$v'_i \rightarrow$  componente, correspondente às escalas submalha, do vetor de velocidade na direção  $x_i$ .

$L_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}} - \bar{v}_i \bar{v}_j \rightarrow$  termos de Leonard.

$C_{ij} = \overline{\overline{v_i v'_j}} + \overline{\overline{v'_i v_j}} \rightarrow$  termos cruzados.

$\overline{v'_i v'_j} \rightarrow$  tensor de Reynolds submalha.

Observa-se que os termos não-lineares, após a aplicação da operação de filtro, podem ser escritos como:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{\overline{v_i v_j}} + \overline{\overline{v_i v'_j}} + \overline{\overline{v'_i v_j}} + \overline{v'_i v'_j} \quad (2.35)$$

Os termos cruzados e de Leonard podem ser modelados seguindo a idéia de Clark et al., 1979, que sugerem expressar a soma desses termos como uma expansão em série de Taylor do campo de velocidade filtrado.

Conseqüentemente, os valores filtrados dos termos não-lineares podem ser aproximados por:

$$\overline{v_i v_j} \approx \bar{v}_i \bar{v}_j + L_{ij} + C_{ij} + \overline{v'_i v'_j} \quad (2.36)$$

sendo:

$$C_{ij} + L_{ij} = \frac{\Delta_k^2}{2\gamma} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \quad (2.37)$$

Segundo Findikakis e Street, 1982, os termos  $L_{ij}$  e  $C_{ij}$  podem ser desprezados. Então as equações (2.34) e (2.20), ficam respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] - \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + \overline{v'_i v'_j} \right\} - \bar{f}_i = 0$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$  (2.38)

$$\left\{ \left[ -\bar{p} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + \nu \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_v \quad (2.39)$$

As equações (2.33) e (2.38) juntamente com as condições de contorno (2.3) e (2.39) e condições iniciais (2.5) e (2.6), governam o escoamento turbulento, isotérmico e quase-incompressível de um fluido newtoniano. O termo  $\overline{v'_i v'_j}$  é resultado do movimento das escalas inferiores à resolução de malha e deve ser modelado.

### 2.3 Modelos de Turbulência Submalha

Os modelos submalha são utilizados para representar a influência das escalas não-resolvidas (movimentos submalha) sobre as escalas resolvidas.

Piomelli, 1999, observa que a elaboração de um modelo submalha ideal ainda é um desafio para os estudiosos de turbulência e, principalmente, para os numericistas que desenvolvem a simulação de grandes escalas. As características desejadas para tal modelo é que ele seja capaz de prever corretamente a dissipação geral de energia no escoamento, que seja capaz de se anular em escoamentos laminares, que dependa fortemente das menores escalas

resolvidas (mais do que do espectro completo de movimentos) e que preveja precisamente a troca local de energia entre as escalas resolvidas e as modeladas.

A modelagem clássica da turbulência apóia-se nas equações médias de Reynolds. Uma das primeiras tentativas de modelar as tensões de Reynolds é atribuída ao matemático francês Boussinesq em 1877, que, analisando um escoamento tridimensional cisalhante, estabeleceu uma analogia entre as tensões de Reynolds e as tensões viscosas:

$$\tau_{xy} = \overline{u'v'} = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.40)$$

sendo  $\mu_t$  a *viscosidade turbulenta*. É interessante ressaltar que, neste caso, enquanto a viscosidade dinâmica ou absoluta  $\mu$  é uma propriedade do fluido, a viscosidade turbulenta,  $\mu_t$ , é uma propriedade do escoamento, podendo variar no tempo e no espaço.

Embora a modelagem submalha não seja fundamentada necessariamente sobre o conceito de viscosidade turbulenta (hipótese de Boussinesq), esta aproximação tem sido utilizada na maior parte dos estudos já realizados, os quais expressam o tensor de Reynolds submalha, em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, como segue

$$-\overline{v_i'v_j'} = 2\nu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3} k_{sm} \delta_{ij} \quad (2.41)$$

sendo que  $\overline{S_{ij}}$  depende das escalas resolvidas explicitamente e é definido por:

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.42)$$

Logo:

$$-\overline{v_i'v_j'} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_{sm} \delta_{ij} \quad (2.43)$$

onde  $k_{sm}$  é a energia cinética turbulenta submalha e  $k_{sm} = \frac{1}{2} \overline{v_i'v_i'}$  e  $\nu_t$  é a viscosidade turbulenta, calculada de acordo com o modelo, conforme será descrito a seguir.

Entretanto esta expressão foi obtida da expressão original de Boussinesq (2.40), então:

$$-\overline{v_i'v_j'} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.44)$$

O termo contendo energia cinética submalha foi introduzido para compatibilizar o modelo com a equação de conservação de massa dos escoamentos incompressíveis [Hinze, 1975], pois, empregando a equação (2.44), obtém-se a seguinte expressão:

$$-\overline{v_i'v_i'} = 2\nu_t \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} \quad (2.45)$$

Na equação acima o termo do lado direito é nulo para um escoamento incompressível (equação (2.12)), enquanto o lado esquerdo somente será nulo caso não existam escalas submalha, pois representa o dobro da energia cinética submalha  $k_{sm}$ . Para compatibilizar o modelo com a condição de incompressibilidade foi incluída na equação (2.44) o termo que inclui  $k_{sm}$ , resultando na equação (2.41).

Porém, neste trabalho, não é utilizada a equação (2.12) para a continuidade, mas a (2.18) que representa a conservação de massa para escoamentos quase-incompressíveis. Neste caso a expressão do lado direito de (2.45) não se anula e não existe incompatibilidade da equação (2.45) com a continuidade. Para as equações que descrevem o escoamento quase-incompressível, o modelo de viscosidade turbulenta adequado é a expressão original de Boussinesq (2.44).

### 2.3.1 Modelo de Smagorinsky

Um dos mais importantes modelos para o cálculo das tensões de Reynolds submalha é o modelo de Smagorinsky, proposto pelo próprio meteorologista em 1963, para calcular as grandes estruturas encontradas em escoamentos atmosféricos. Em sua essência, este modelo baseia-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, por intermédio do qual a produção de tensões turbulentas submalha,  $\mathcal{P}$ , é considerada igual à taxa de dissipação,  $\epsilon$ , isto é:



$$\mathcal{P} = \varepsilon \quad (2.46)$$

Assume-se ainda que a viscosidade turbulenta para as escalas submalha, é definida como:

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \quad (2.47)$$

onde  $\bar{\Delta}$  é uma escala associada com o filtro utilizado para definir o campo de grandes escalas e neste trabalho calculada por:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^3 \Delta x_i} \quad (2.48)$$

$C_s$  é a constante de Smagorinsky assumindo valores entre 0,1 e 0,22 e  $|\bar{S}|$  é o módulo do tensor taxa de cisalhamento calculado por

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (2.49)$$

Apesar das desvantagens apontadas na secção 1.2 , o modelo de Smagorinsky tornou-se o modelo mais popular em simulação de grandes escalas (Rodi et al., 1997) e tem sido aplicado a muitas situações, talvez pela sua simplicidade, por ser robusto numericamente e ser livre de instabilidades numéricas.

### 2.3.2 Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta

A modelagem submalha convencional envolve uma constante de proporcionalidade ad-hoc imposta. O que impõe uma limitação no que diz respeito à análise de escoamentos em transição e nas regiões próximas às paredes. A determinação dinâmica de uma função de proporcionalidade no cálculo de viscosidade turbulenta pode representar avanços importantes.

Neste trabalho é implementado o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta proposto por Germano et al., 1991 e modificado por Lilly, 1992. O tensor de Reynolds submalha também é aproximado pela equação (2.44), contudo a viscosidade turbulenta é definida como:

$$\nu_t = C(x, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (2.50)$$

onde  $C(x,t)$  é o coeficiente dinâmico que varia em função das condições locais do escoamento. O cálculo de  $C(x,t)$  é definido pela seguinte expressão:

$$C(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}} \quad (2.51)$$

onde os termos  $L_{ij}$ ,  $M_{ij}$  são definidos como:

$$L_{ij} = \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle - \langle \bar{v}_i \rangle \langle \bar{v}_j \rangle \quad \text{e} \quad M_{ij} = \langle \bar{\Delta} \rangle^2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle - \langle \bar{\Delta}^2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle \quad (2.52)$$

onde:

$$\langle \bar{S}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle \bar{v}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{v}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad \langle \langle \bar{S} \rangle \rangle = \sqrt{2 \langle \bar{S}_{ij} \rangle \langle \bar{S}_{ij} \rangle} \quad (2.53)$$

O comprimento característico do segundo filtro  $\langle \bar{\Delta} \rangle$  é maior que o comprimento característico do filtro ao nível de malha  $\bar{\Delta}$  ( $\langle \bar{\Delta} \rangle > \bar{\Delta}$ ).

Nas equações acima (2.50 a 2.53) a barra sobreposta indica o primeiro processo de filtragem (filtro ao nível de malha) e o símbolo  $\langle \rangle$  refere-se ao segundo processo de filtragem, ou seja, o filtro teste. Mais adiante será discutido o processo de segunda filtragem onde se utiliza o processo proposto por Petry, 2002.

## 2.4 Equações que Governam o Escoamento Turbulento empregando Modelo Submalha de Smagorinsky e Modelo Dinâmico de Viscosidade Turbulenta

As equações que governam o problema são escritas em sua forma final nesta secção. A *equação de conservação de massa*, apenas repetindo a equação (2.33), escreve-se como:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.54)$$

A *equação de conservação de quantidade de movimento* (Balanço de Forças), (2.38) substituindo as tensões de Reynolds submalha pela equação (2.44), pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) + \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] - \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \right\} - \bar{f}_i = 0$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.55)$$

Com as condições de contorno (2.3) e (2.39), esta última considerando também a equação (2.44), pode ser expressa como:

$$\left\{ \left[ -\bar{p} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} n_j = t_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (2.56)$$

e as condições iniciais estão definidas pelas equações (2.5) e (2.6).

Por ter empregado a equação (2.44), adequada à formulação de escoamentos quase-incompressíveis, em lugar da expressão usual para escoamentos incompressíveis, equação (2.43), a pressão nessas equações não é a pressão modificada. Apenas quando a (2.43) é empregada o termo da pressão na equação de conservação da quantidade de movimento é modificado e passa a incluir a energia cinética submalha.

O fechamento deste sistema de equações é feito através do Modelo de Smagorinsky, conforme a equação (2.47) ou do Modelo Dinâmico descrito pelas equações (2.50) a (2.53).

O próximo capítulo apresenta as equações acima discretizadas no tempo e no espaço, através do esquema de Taylor-Galerkin. Descrevem-se, ainda, alguns aspectos relevantes do processo computacional, assim como a metodologia proposta e empregada para o processo da segunda filtragem do modelo dinâmico submalha.

### **3. MODELAGEM NUMÉRICA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS**

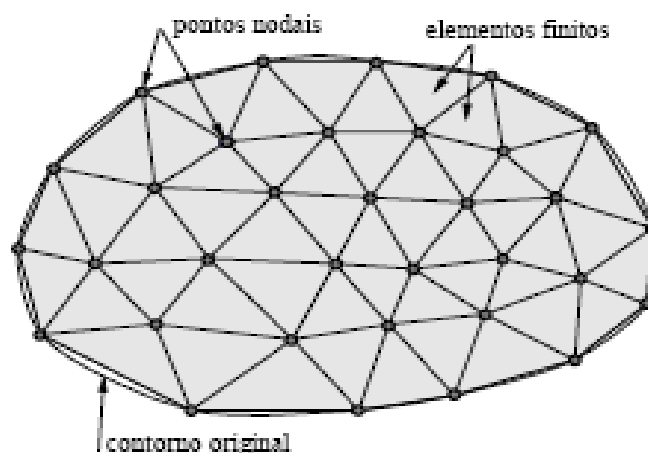
O método empregado para a solução do sistema de equações apresentado no capítulo 2 é o Método de Elementos Finitos. Para obter o sistema de equações algébricas a ser resolvido, procede-se a discretização das derivadas temporais através da expansão destas em série de Taylor, incluindo os termos de segunda ordem. Para a discretização espacial aplica-se o Método de Galerkin Clássico [Reddy e Gartling, 1994]. Objetivando reduzir o tempo de processamento, adota-se a integração reduzida das matrizes de elementos, utilizando expressões analíticas das funções de interpolação do elemento hexaédrico trilinear [Burbridge, 1999; Gresho et al., 1984]. Este esquema é conhecido como Taylor-Galerkin [Donea, 1984], e foi utilizado por Azevedo, 1999, para a simulação de escoamentos laminares tridimensionais com interação fluido-estrutura.

### 3.1 Formulação de Elementos Finitos do Problema

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em um método numérico aproximado para análise de diversos fenômenos físicos que ocorrem em meios contínuos, e que são descritos através de equações diferenciais parciais, com determinadas condições de contorno (Problemas de Valor de Contorno), e possivelmente com condições iniciais (para problemas variáveis no tempo). O MEF é bastante genérico, e pode ser aplicado na solução de inúmeros problemas da engenharia.

A idéia principal do Método dos Elementos Finitos consiste em se dividir o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometria simples (formato triangular, quadrilateral, cúbico, etc.), conforme ilustra esquematicamente a Figura 3.1.

Esta idéia é bastante utilizada na engenharia, onde usualmente tenta-se resolver um problema complexo, subdividindo-o em uma série de problemas mais simples. Logo, trata-se de um procedimento intuitivo para os engenheiros.



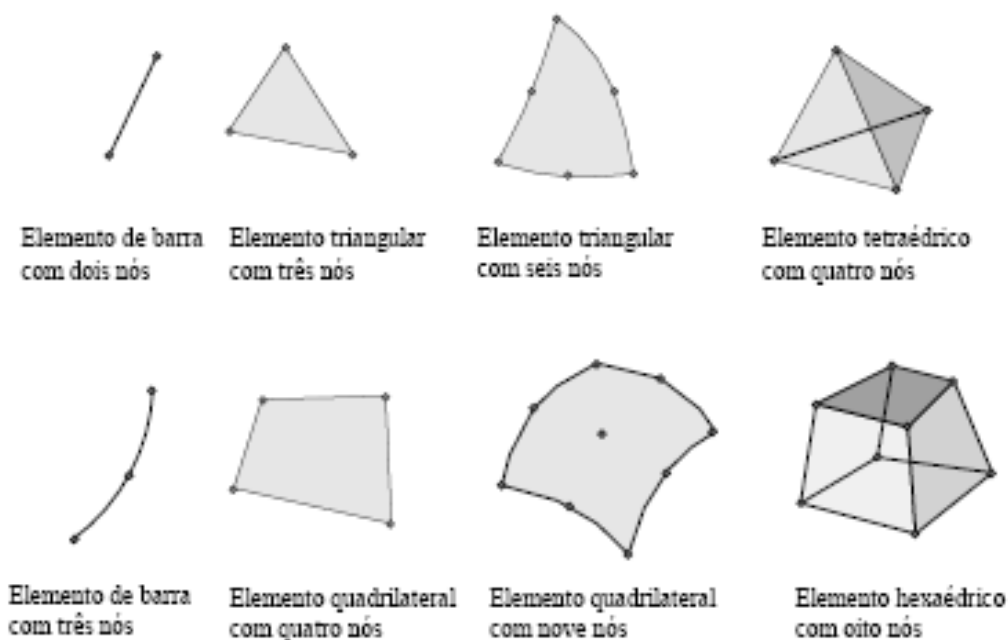
**Figura 3.1** – Malha de Elementos Finitos (para problema plano), [ Souza R. M., 2003].

Devido ao fato das sub-regiões apresentarem dimensões finitas, estas sub-regiões são chamadas “elementos finitos”.

Os elementos finitos utilizados na discretização (subdivisão) do domínio do problema são conectados entre si através de determinados pontos, denominados nós ou pontos nodais, conforme indica a Figura 3.1. Ao conjunto de elementos finitos e pontos nodais, dá-se, usualmente o nome de malha de elementos finitos.

Diversos tipos de elementos finitos já foram desenvolvidos. Estes apresentam formas geométricas diversas (por exemplo, triangular, quadrilateral, cúbico, etc) em função do

tipo e da dimensão do problema (uni, bi, ou tridimensional). A Figura 3.2 apresenta a geometria de vários tipos de elementos finitos.



**Figura 3.2** – Diferentes tipos de elementos finitos, [ Souza R. M., 2003].

A precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, e do tamanho e tipo dos elementos presentes na malha. Um dos aspectos mais importantes do MEF diz respeito a sua convergência. Mesmo sendo um método aproximado, pode-se demonstrar que em uma malha consistente, à medida que o tamanho dos elementos finitos tende a zero, e conseqüentemente, a quantidade de nós tende a infinito, a solução obtida converge para a solução exata do problema. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número de elementos em uma determinada malha, mais precisos serão os resultados da análise.

Os passos principais da análise por elementos finitos de um problema são resumidos por Reddy e Gartling, 1994, como:

1 – Pré-Processamento: Discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos, geração da malha de elementos finitos (definir as coordenadas dos nós que compõem a malha e as conectividades que definem os elementos, não podendo haver sobreposição dos domínios dos elementos).

2 – Formulação de Resíduos Ponderados ou Forma Fraca das equações diferenciais a serem analisadas.

3 – Desenvolvimento das equações de elementos finitos do problema a partir da formulação de resíduos ponderados ou forma fraca do problema.

4 – Montagem (*assembly*) das equações em termos de elemento para obter o sistema global de equações algébricas (sobre todo o domínio).

5 – Imposição das condições de contorno.

6 – Solução das equações.

7 – Pós-Processamento dos resultados.

Os próximos parágrafos apresentam a dedução do modelo de elementos finitos do problema, itens 2 e 3, partindo da formulação matemática definida pelas equações governantes (2.54) e (2.55); condições de contorno (2.3) e (2.56) e condições iniciais (2.5) e (2.6), com fechamento através dos modelos submalha de Smagorinsky (2.47) e dinâmico (2.50).

### 3.1.1 Formulação de Resíduos Ponderados do Problema

As equações de elementos finitos são deduzidas a partir de uma formulação variacional ou de resíduos ponderados do problema. A formulação de resíduos ponderados do escoamento quase-incompressível, isotérmico, turbulento, transiente, pode ser obtida, partindo das equações governantes (2.54) e (2.55), multiplicando pelas funções peso de velocidade e de pressão e integrando sobre o domínio de um elemento, resultando nas equações (3.1) e (3.2).

→ Conservação de Massa:

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} p^* C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j) d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

→ Conservação de Quantidade de Movimento (Balanço de Forças):

$$\int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_i) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] - \frac{\lambda}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \right] \delta_{ij} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \bar{f}_i d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

onde:

$v_i^*$  → função peso para a velocidade, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

$p^*$  → função peso para a pressão, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno.

Para reduzir a exigência de diferenciação das funções de aproximação (também referidas como funções de interpolação) faz-se a integração por partes do termo viscoso:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} d\Omega = \\
 & = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \left\{ (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} v_i^* (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Integrando por partes também o termo em  $\lambda$  e o termo do gradiente de pressão, chega-se à forma fraca das equações para o escoamento quase-incompressível (3.4).

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega} v_i^* \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_j) \right] d\Omega + \\
 & + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{v}_k) \delta_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i} \bar{p} d\Omega - \int_{\Omega} v_i^* \bar{f}_i d\Omega = \int_{\Gamma} v_i^* \left\{ \bar{p} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial (\rho \bar{v}_k)}{\partial x_k} + (v + v_t) \left[ \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j)}{\partial x_i} \right] \right\} n_j d\Gamma
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

### 3.1.2 Equações de Elementos Finitos do Problema

Para obter a equação de elementos finitos emprega-se a técnica clássica de Galerkin [Reddy e Gartling, 1994; Hughes, 1987] às equações (3.1) e (3.4), que representam a formulação de resíduos ponderados do problema. O método de Galerkin consiste em utilizar as mesmas funções de aproximação para a função peso e para as variáveis do problema.



Considerando o domínio do elemento, substituem-se as variáveis e as funções peso por aproximações, combinações lineares das funções de interpolação do elemento multiplicadas por parâmetros (valores nodais das funções a serem aproximadas):

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_i(x, y) &= \phi(x, y) \bar{v}_i \\
 v_i^*(x, y) &= \phi(x, y) v_i^* \\
 \bar{p}(x, y) &= \psi(x, y) \bar{p} \\
 p^*(x, y) &= \psi(x, y) p^*
 \end{aligned}
 \quad \text{em } \Omega_e \quad (3.5)$$

Sendo:

$\phi$  → vetor de funções de interpolação para a velocidade;

$\bar{v}_i$  → vetor de valores nodais da componente i da velocidade;

$v_i^*$  → vetor de valores nodais da componente i da função peso de velocidade;

$\psi$  → vetor de funções de interpolação para a pressão;

$\bar{p}$  → vetor de valores nodais da pressão;

$p^*$  → vetor de valores nodais da função peso de pressão;

$\Omega_e$  → domínio do elemento;

Obtêm-se as equações ao nível de elemento:

$$\int_{\Omega_e} \psi^T p^* \frac{\partial(\psi p)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_e} \psi^T p^* C^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi \rho v_j) d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_e} \phi^T v_i^* \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega_e} \phi^T v_i^* \phi \bar{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi^T \rho \bar{v}_i) d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi \rho \bar{v}_i) d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T v_i^*}{\partial x_j} (v + v_t) \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \rho \bar{v}_j) d\Omega + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T v_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi \rho \bar{v}_k) \delta_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T v_i^*}{\partial x_i} \psi p d\Omega - \\
 & - \int_{\Omega_e} \phi^T v_i^* \bar{f}_i d\Omega = \int_{\Gamma_e} \phi v_i^* S_i d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde:

$$\int_{\Gamma_e} \phi \mathbf{v}_i^* \left\{ \psi \mathbf{p} \delta_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial(\phi \rho \bar{v}_{-k})}{\partial x_k} + (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left[ \frac{\partial(\phi \rho \bar{v}_{-i})}{\partial x_j} + \frac{\partial(\phi \rho \bar{v}_{-j})}{\partial x_i} \right] \right\} \mathbf{n}_j d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \phi \mathbf{v}_i^* S_i d\Gamma$$

$\Gamma_e \rightarrow$  contorno do elemento.

Isolando as funções peso e considerando sua arbitrariedade, obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} (\psi^T \psi) d\Omega \dot{\bar{p}} + C^2 \int_{\Omega_e} \psi^T \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \rho \bar{v}_{-j} = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \phi^T \phi d\Omega \left( \rho \dot{\bar{v}}_i \right) + \int_{\Omega_e} \phi^T \phi \bar{v}_j \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} d\Omega (\rho \bar{v}_{-i}) + \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \right] (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) (\rho \bar{v}_{-i}) + \\ & \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \right] (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) (\rho \bar{v}_{-j}) + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Omega (\rho \bar{v}_{-k}) \delta_{ij} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \psi d\Omega \bar{p} - \int_{\Omega_e} \phi^T d\Omega \bar{f}_i = \int_{\Gamma_e} \phi S_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo que o ponto de cima da variável indica derivada em relação ao tempo.

A equação (3.9) pode escrever-se como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \phi^T \phi d\Omega \left( \rho \dot{\bar{v}}_i \right) + \int_{\Omega_e} \phi^T \phi \bar{v}_j \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} d\Omega (\rho \bar{v}_{-i}) + \mathbf{v} \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \rho \bar{v}_{-i} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \rho \bar{v}_{-j} \right] + \\ & + \frac{\lambda}{\rho} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d\Omega (\rho \bar{v}_{-k}) \delta_{ij} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \psi d\Omega \bar{p} - \int_{\Omega_e} \phi^T d\Omega \bar{f}_i + \\ & + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} (\mathbf{v}_t) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \rho \bar{v}_{-i} + \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} (\mathbf{v}_t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \rho \bar{v}_{-j} = \int_{\Gamma_e} \phi S_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.10)$$

Empregando as aproximações dadas em (3.5), obtemos a expressão de  $\bar{S}$ , para cálculo da viscosidade turbulenta, em termos das variáveis nodais:

$$\bar{S} = \left\{ \begin{aligned} & 2 \left\{ \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} (\rho v_{-1}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} (\rho v_{-2}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3} (\rho v_{-3}) \right]^2 \right\} + \\ & + 2 \left\{ \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} (\rho v_{-1}) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} (\rho v_{-2}) \right] + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3} (\rho v_{-1}) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} (\rho v_{-3}) \right] + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} (\rho v_{-3}) \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3} (\rho v_{-2}) \right] \right\} + \\ & + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} (\rho v_{-1}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} (\rho v_{-2}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3} (\rho v_{-1}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} (\rho v_{-3}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_3} (\rho v_{-2}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} (\rho v_{-3}) \right]^2 \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Escrevem-se as equações (3.8) e (3.10) de forma compacta:

$$\underline{M}_p \dot{\bar{p}} + \underline{G}_j^T (\rho \bar{v}_{-j}) = 0 \quad (3.12)$$

$$\underline{M}_v \left( \rho \dot{\bar{v}}_i \right) + \underline{A}_j (\rho \bar{v}_{-j}) + \underline{D}_{ij} (\rho \bar{v}_{-j}) - \underline{G}_i \bar{p} = \underline{F}_i \quad (3.13)$$

onde as matrizes de elementos são:

$$\underline{M}_p = \int_{\Omega_e} \underline{\Psi}^T \underline{\Psi} d\Omega \quad ; \quad \underline{M}_v = \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{\phi} d\Omega \quad ; \quad \underline{A}_j = \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T \underline{\nabla}_j \underline{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega$$

$$\underline{G}_i = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \underline{\Psi} d\Omega \quad ; \quad \underline{G}_j^T = C^2 \int_{\Omega_e} \underline{\Psi}^T \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\Omega \quad ; \quad \underline{F}_i = \int_{\Omega_e} \underline{\phi}^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma_e} \underline{\phi}^T S_i d\Gamma$$

$$\underline{D}_{ii} = \int_{\Omega_e} \left( 2(v + v_t) + \frac{\lambda}{\rho} \right) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} (v + v_t) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) d\Omega$$

para  $i=1, k=2,3$ ; para  $i=2, k=3,1$ ; para  $i=3, k=1,2$

$$\mathbf{D}_{ij} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \left( \frac{\lambda}{\tilde{\rho}} \right) \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad ; \quad \text{para } i \neq j \quad (3.14)$$

As funções  $\phi$  e  $\Psi$  são funções de interpolação, sendo usualmente  $\Psi$  de ordem inferior a  $\phi$ . No caso dos hexaedros trilineares,  $\phi$  é função linear e  $\Psi$  é constante no domínio do elemento.

### 3.2 Esquema de Taylor-Galerkin

Para obter as equações discretizadas também no tempo, faz-se a expansão em série de Taylor das derivadas temporais das equações de elementos finitos que governam o problema (3.12) e (3.13), até os termos de segunda ordem. Este esquema foi empregado por Donea, 1984. Deduções mais detalhadas da discretização temporal por série de Taylor, podem ser encontradas em Gonzalez, 1993 e Azevedo, 1999.

Expandindo-se a  $\bar{p}$  em série de Taylor, tem-se:

$$\Delta \bar{p} = \bar{p}^{\bar{n}+1} - \bar{p}^{\bar{n}} = \Delta t \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} \right) + \dots \quad (3.15)$$

Considerando (3.12) e (3.15), é possível obter a expressão:

$$\mathbf{M}_{\tilde{D}p} \Delta \bar{p}_{\tilde{k}+1}^{-n+1} = -\Delta t \left\{ \left[ \mathbf{G}_j^T \left( \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}_j \right)^n \right] + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{G}_j^T \left( \Delta \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}_j \right)_k^{n+1} \right] \right\} - \left( \mathbf{M}_{\tilde{p}} - \mathbf{M}_{\tilde{D}p} \right) \Delta \bar{p}_{\tilde{k}}^{-n+1} \quad (3.16)$$

A matriz  $\mathbf{M}_{\tilde{D}p}$  é a matriz de massa da pressão discreta, ou diagonalizada, empregada para evitar a inversão de uma matriz consistente. No caso de hexaedros trilineares, com  $\Psi$  constante no elemento, as matrizes de massa de pressão consistente e discreta são idênticas e se transformam no volume do elemento. Neste caso o último termo da equação (3.16) se anula.

O mesmo processo de expansão de  $\bar{\rho}_{\tilde{v}_i}$  em série de Taylor e considerando a equação (3.13), conduz a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\tilde{D}} \Delta(\bar{\rho}_{\tilde{v}_i})_{k+1}^{n+1} = & -\Delta t \left\{ \left[ \mathbf{A}_j(\bar{\rho}_{\tilde{v}_i}) + \mathbf{D}_{ij}(\bar{\rho}_{\tilde{v}_j}) - \mathbf{G}_i \bar{\mathbf{p}} \right]^n - \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}_{\tilde{v}_i}^n + \mathbf{F}_{\tilde{v}_i}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right\} - \\ & - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \mathbf{A}_j(\Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_i}) + \mathbf{D}_{ij}(\Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_j}) - \mathbf{G}_i \Delta \bar{\mathbf{p}} + \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{M}_{\tilde{v}} - \mathbf{M}_{\tilde{D}}) \Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_i} \right\}_k^{n+1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{M}_{\tilde{D}}$  é a matriz de massa de velocidade,  $\mathbf{M}_{\tilde{v}}$ , diagonalizada.

Nas expressões (3.15) a (3.17), o índice n refere-se ao passo de tempo, enquanto k está relacionado ao número da iteração,  $\Delta p$  é a variação da pressão e  $\Delta \rho_{\tilde{v}_i}$  é a variação de  $\rho_{\tilde{v}_i}$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Desta forma tem-se:

$$[\Delta(\rho_{\tilde{v}_i})]_{k+1}^{n+1} = -\Delta t \mathbf{M}_{\tilde{D}}^{-1} \left\{ \mathbf{S}_{\tilde{v}}^n + \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\tilde{v}_k}^{n+1} \right\} \quad (3.18)$$

$$[\Delta p]_{k+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t C^2}{\text{volume}} \left\{ \mathbf{T}^n + \frac{1}{2} \mathbf{Q}_k^{n+1} \right\} \quad (3.19)$$

(i, j, k = 1, 2, 3) em  $\Omega$

sendo:

$$\mathbf{S}_{\tilde{v}}^n = \left[ \mathbf{A}(\bar{\rho}_{\tilde{v}_i}) + \mathbf{D}_{ij}(\bar{\rho}_{\tilde{v}_j}) - \mathbf{G}_j \bar{\mathbf{p}} \right]^n \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R}_{\tilde{v}_k}^{n+1} = \left[ \mathbf{A}(\Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_i}) + \mathbf{D}_{ij}(\Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_j}) - \mathbf{G}_i \Delta \bar{\mathbf{p}} - (\mathbf{M}_{\tilde{D}} - \mathbf{M}_{\tilde{v}}) \Delta \bar{\rho}_{\tilde{v}_i} \right]_k^{n+1} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{T}_{\tilde{v}}^n = \mathbf{G}_j^T(\bar{\rho}_{\tilde{v}_j})^n \quad (3.22)$$

$$\tilde{Q}_k^{n+1} = G_j^T \left( \Delta \rho \tilde{v}_j \right)_k^{n+1} \quad (3.23)$$

O campo de velocidades e pressões atualizadas é então obtido calculando-se:

$$(\rho v_i)_{n+1} = (\rho v_i)_n + \Delta(\rho v_i)_{n+1}^{k+1} \quad (3.24)$$

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_{n+1}^{k+1} \quad (3.25)$$

para cada nó da malha de elementos finitos.

O esquema é condicionalmente estável e o intervalo de tempo de integração deve respeitar a seguinte restrição:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i(\min)}{C + V} \quad (3.26)$$

sendo  $\Delta x_i(\min)$  a menor dimensão de elementos da malha,  $C$  é a velocidade de propagação do som no meio e  $V$  uma velocidade de referência.

### 3.3 Segunda Filtragem

O modelo de viscosidade turbulenta submalha de Smagorinsky apresenta como maior limitação a dificuldade de representar corretamente, com uma constante única, diferentes campos de escoamento turbulento, tais como recirculação, recolamento e escoamento próximo à parede.

Uma alternativa ao modelo de Smagorinsky é o modelo dinâmico de viscosidade turbulenta, proposto por Germano et al., 1991 e modificado por Lilly, 1992. Nesse modelo o coeficiente é calculado de acordo com a evolução do escoamento, sendo uma função do tempo e do espaço.

A equação (2.51) define o coeficiente dinâmico  $C(x,t)$ . Este depende do uso de dois filtros de diferentes comprimentos característicos. A primeira filtragem é considerada

aplicada quando se realiza a discretização das equações. O primeiro filtro (filtro ao nível de malha) tem dimensão característica relacionada às dimensões dos elementos da malha.

Para o segundo processo de filtragem (filtro teste) emprega-se um filtro com dimensão característica maior que o primeiro filtro. Baseado nestes dois níveis de escala, os modelos dinâmicos usam informações das menores escalas resolvidas (situadas entre os dois filtros) para calcular o coeficiente dinâmico.

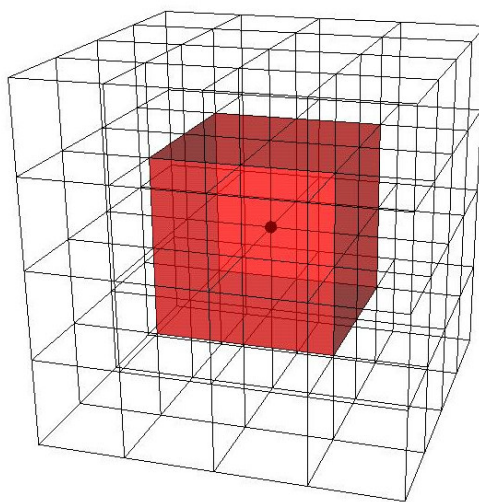
Para o processo de segunda filtragem muitas propostas têm sido apresentadas.

Findikakis e Street, 1982 e Oshima, et al., 1996, apresentam uma expansão em série de Taylor. Padilla e Silveira Neto, 2004, analisam a influência de diferentes tipos de filtros.

A proposta para a segunda filtragem apresentada neste trabalho é referida como *segunda filtragem por elementos finitos independentes*, que foi apresentada por Petry, 2002.

Um exemplo de elemento independente em malha tridimensional é o vermelho apresentado na figura 3.3.

O processo consiste em construir elementos em torno de cada nó da malha, definido por nós vizinhos ao nó de interesse e empregar as funções de interpolação lineares do elemento para efetuar o processo de segunda filtragem. Desta forma, emprega-se uma interpolação linear dos valores calculados nos pontos vizinhos da malha, para obter o valor filtrado no ponto de interesse.



**Figura 3.3** – Elemento independente em uma malha tridimensional, [Petry, 2002].

Para gerar esse conjunto de elementos independentes foi utilizado o algoritmo apresentado por Petry, 2002.

Considerando o elemento hexaédrico de oito nós, representado no espaço físico  $(x_1, x_2, x_3)$  e no espaço computacional  $(\xi, \eta, \zeta)$  na figura 3.4, com funções de interpolação lineares dadas por:

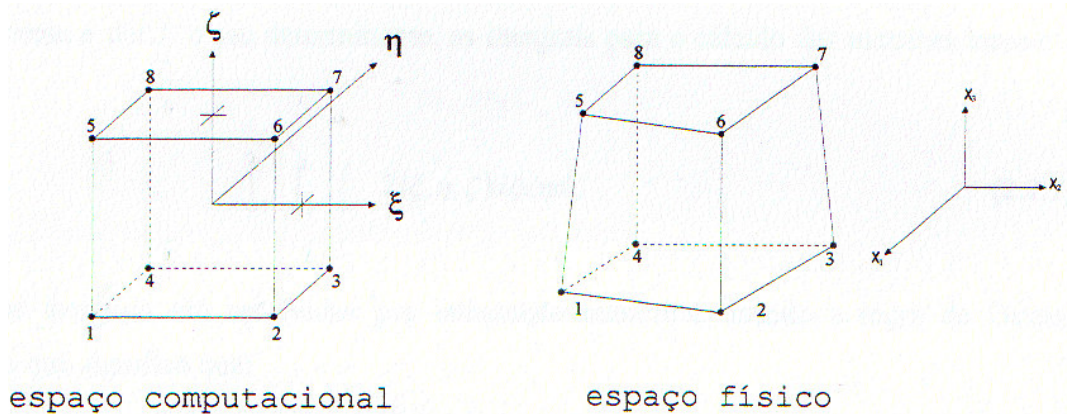
$$\phi_\alpha(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_\alpha \xi)(1 + \eta_\alpha \eta)(1 + \zeta_\alpha \zeta) \quad (\alpha=1, \dots, 8) \quad (3.27)$$

onde  $\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha$  são as coordenadas do nó  $\alpha$  do elemento no sistema de eixos referencial  $\xi, \eta$  e  $\zeta$ , dadas por:

$$\underline{\xi}^T = \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\} \quad (3.28)$$

$$\underline{\eta}^T = \{-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1\} \quad (3.29)$$

$$\underline{\zeta}^T = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\} \quad (3.30)$$



**Figura 3.4** – Elemento hexaédrico de oito nós no espaço computacional e físico, [Petry, 2002].

As coordenadas de um ponto I qualquer no interior do elemento podem ser calculadas pela seguinte transformação de coordenadas:

$$(x_i)_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_\alpha(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) x_{i\alpha} \quad (3.31)$$

onde:

$(x_i)_I \rightarrow$  coordenada de um ponto I qualquer no interior do elemento ( $i=1,2,3$ )

$x_{i\alpha} \rightarrow$  coordenada  $i$  do nó  $\alpha$  que define o elemento ( $\alpha=1,2,3,4,5,6,7,8$ )



$\phi_\alpha(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \rightarrow$  função de interpolação do nó  $\alpha$ , avaliada no ponto I, com coordenadas naturais  $(\xi_I, \eta_I, \zeta_I)$ .

Esta é a transformação usual empregada em elementos finitos.

Então, dispõem-se das conectividades dos elementos independentes e das coordenadas naturais de todos os nós da malha, relativas ao seu elemento independente.

A etapa incluída no algoritmo principal de solução consiste em avaliar as quantidades:

$$\langle \bar{v}_i \rangle, \langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle \text{ e } \langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle$$

utilizando as funções de interpolação do elemento e as coordenadas naturais de cada nó no interior do elemento independente associado a ele da seguinte forma

$$\langle \bar{v}_i \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_\alpha(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_{i\alpha} \quad (3.32)$$

$$\langle \bar{v}_i \bar{v}_j \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_\alpha(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) \bar{v}_i \bar{v}_{j\alpha} \quad (3.33)$$

$$\langle \bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} \rangle_I = \sum_{\alpha=1}^8 \phi_\alpha(\xi_I, \eta_I, \zeta_I) (\bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij} )_\alpha \quad (3.34)$$

Empregando esta interpolação os valores dos nós vizinhos são ponderados, através de uma interpolação linear, na obtenção do valor filtrado de acordo com a distância dos mesmos ao nó I.

Para avaliar as quantidades é necessário calcular os valores de  $\bar{v}_i \bar{v}_j$  e  $\bar{\Delta}^2 | \bar{S}_{ij} | \bar{S}_{ij}$  para os nós que compõem o elemento independente. No programa implementado, estes valores são calculados para todos os nós da malha e armazenados para utilização na solução das equações (2.51) e (2.53).

A dimensão característica do primeiro filtro é avaliada como a raiz cúbica dos volumes dos elementos da malha:

$$\bar{\Delta} = \sqrt[3]{\text{Vol}_e} \quad (3.35)$$

A dimensão característica do segundo filtro é calculada analogamente como sendo a raiz cúbica dos elementos independentes:

$$\langle \bar{\Delta} \rangle_I = \sqrt[3]{\text{Volume}(E_I)} \quad (3.36)$$

Avaliadas as expressões relativas ao segundo processo de filtragem, finalmente pode-se calcular  $C(x,t)$  segundo a equação (2.51) para cada nó da malha.

Este coeficiente será empregado para o cálculo da viscosidade turbulenta, segundo a equação (2.50). Sendo a viscosidade turbulenta avaliada ao nível de elemento, e os valores do coeficiente dinâmico definidos para os nós da malha, o valor empregado para cada elemento é a média dos valores de  $C(x,t)$  para os nós que compõem os elementos da malha original. Isto equivale a uma interpolação dos valores de  $C$  para o centro do elemento. Este procedimento está de acordo com o adotado por outros autores como Oshima et al., 1996, Zang et al., 1993, Breuer e Rodi, 1994, que empregam médias do coeficiente dinâmico para evitar que as variações bruscas, tanto espaciais como temporais, sejam fontes de instabilidades na solução.

Neste trabalho adotou-se um limite, também adotado por Zang et al., 1993, para a viscosidade turbulenta negativa, como sendo:

$$v + v_t \geq 0 \quad (3.37)$$

Outra verificação que teve de ser adotada foi que, quando o denominador da expressão para cálculo de  $C(x,t)$  se anula, assume-se  $C(x,t)=0$  (lembrando que esse valor é relacionado ao nó e que o valor empregado para cálculo da viscosidade turbulenta é a média dos valores nodais do elemento).

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Análise Tridimensional de escoamento Turbulento em Canal Retangular

O escoamento tridimensional em canal foi escolhido para verificar o comportamento dos modelos submalha devido à grande quantidade de dados experimentais e teóricos que estão disponíveis na literatura.

Kim et al., 1987, citam que escoamentos em canais vêm sendo estudados extensivamente com o intuito de aumentar o conhecimento sobre os mecanismos dos escoamentos turbulentos na presença de fronteiras sólidas. Uma das vantagens apontadas por esses autores é a simplicidade geométrica do canal, que favorece estudos tanto experimentais quanto teóricos.

Deardoff, 1970, realizou um trabalho pioneiro na simulação numérica de um escoamento turbulento em um canal tridimensional, empregando simulação de grandes escalas (LES). Foram adotadas condições de contorno periódicas ao longo das direções  $x$  (longitudinal) e  $z$  (lateral), um procedimento que passou a ser largamente empregado em simulações de escoamentos turbulentos em canais. Nas paredes do canal foram utilizadas condições de contorno que impõem a lei da parede, ao invés das condições de não deslizamento ( $u = 0$ ) e impenetrabilidade ( $v = 0$ ).

No estudo de Kim et al., 1987, foi realizada a simulação do escoamento em um canal tridimensional em baixo número de Reynolds ( $Re_c=3300$ ), empregando-se simulação numérica direta (DNS). Os resultados desse trabalho vêm sendo freqüentemente utilizados como referência em estudos de turbulência próxima a paredes. Foram adotadas condições de contorno periódicas ao longo das direções  $x$  e  $z$ . Nas paredes, foram adotadas as condições de não deslizamento e impenetrabilidade. As simulações foram limitadas à condição de baixo número de Reynolds por limitações na capacidade computacional disponível.

Hughes et al., 2001, simularam numericamente escoamentos em um canal turbulento com números de Reynolds baixos ( $Re_\tau=180$ ) em duas e três dimensões, e moderados ( $Re_\tau=395$ ) em duas dimensões, empregando LES com a formulação multiescala variacional. O método baseia-se no conceito de separação do movimento em grandes e pequenas escalas resolvidas, e pequenas escalas não resolvidas. O efeito das pequenas escalas não resolvidas nas equações das pequenas escalas resolvidas é modelado por um termo de viscosidade turbulenta. Nas equações das grandes escalas, entretanto, o efeito das pequenas escalas não resolvidas é omitido. Nesse trabalho destacam-se as afirmações dos autores de que em LES os seguintes procedimentos são inviáveis para a simulação de escoamentos turbulentos com fronteiras sólidas:

emprego de um coeficiente de Smagorinsky constante; não utilização de uma função de atenuação para a região próxima à parede; e uso das equações de Navier-Stokes sem nenhum tipo de modelo que represente o efeito das menores escalas não resolvidas pela malha.

Abrunhosa, 2003, observa que em malhas não uniformes, onde existem significativas concentrações dos pontos nodais sobre a parede, a solução não convergiu satisfatoriamente devido a uma maior influência dos pontos nodais mais afastados, referente aos termos difusivos. Em face dessas dificuldades e como as operações de filtragem e derivação não comutam exatamente em malhas não uniformes acopladas aos filtros tradicionais (Ghosal & Moin, 1995; Ghosal, 1996; Kravchenko & Moin, 1997; Vasilyev et al., 1998; Moin, 2002; Marsden et al., 2002), esse autor optou por utilizar somente malhas uniformes na resolução dos escoamentos com a técnica de grandes escalas.

O problema a ser resolvido é o escoamento turbulento completamente desenvolvido, incompressível, em regime permanente e homogêneo na direção axial ( $x$ ) e na direção transversal ( $z$ ). As predições foram comparadas à simulação direta de Kim et al. (1987), aos dados experimentais de Nishino & Kasagi (Gavrillakis, 1992) e aos dados em LES de Abrunhosa, 2003. A geometria e o sistema de coordenadas são mostrados na fig. 4.1.

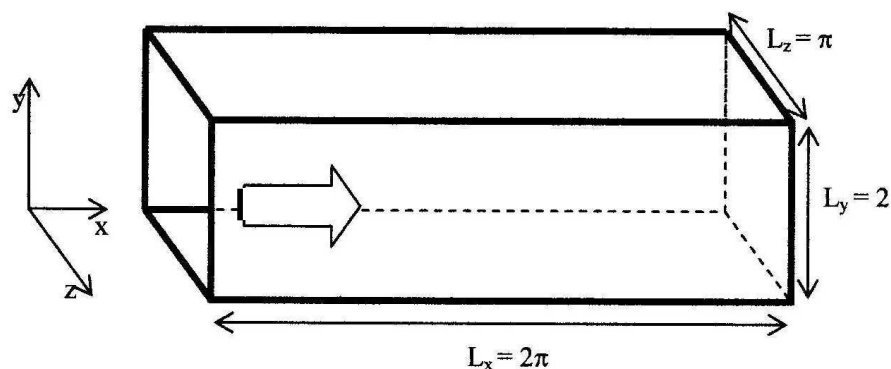


Figura 4.1 – Domínio computacional do problema.

O domínio computacional foi discretizado com uma malha uniforme contendo 78141 nós e 72000 elementos hexaédricos, como se pode visualizar na figura 4.2.

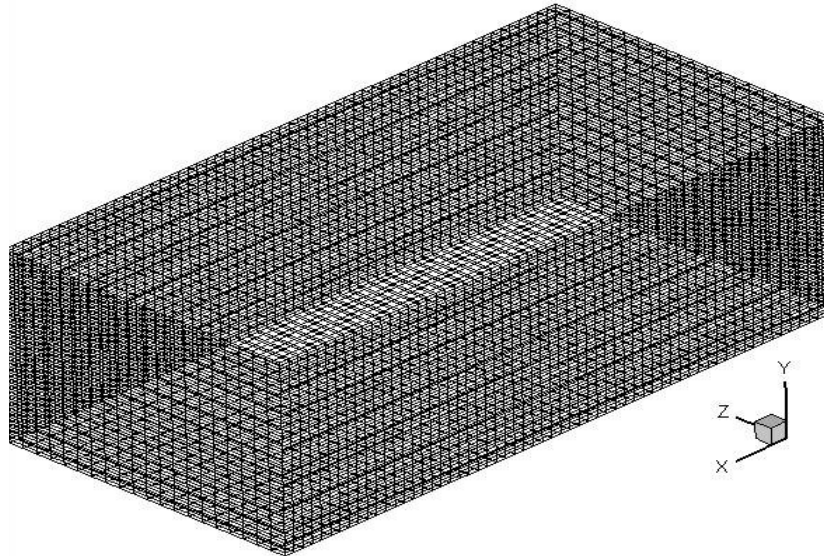


Figura 4.2 – Discretização do domínio computacional.

Como condições de contorno na entrada adotou-se um perfil turbulento de velocidade, completamente desenvolvido ( $v_1=V(y)$ ,  $v_2=0$ ) e condição de não-deslizamento ( $v_1=v_2=v_3=0$ ) prescrita nas paredes superior e inferior. Na saída do canal existem condições de contorno naturais ( $t_1=t_2=t_3=0$ ) (equação 2.56). As condições iniciais usadas são  $v_1=50,49$  m/s,  $v_2=v_3=p=0$ .

É importante observar que, diferentemente do procedimento normal adotado em simulações numéricas de escoamentos turbulentos em canais com DNS ou LES, as condições de contorno nas direções x e z não são periódicas.

Kim et al., 1987, definem os números de Reynolds e outras relações para caracterizar o escoamento como sendo:

$$\begin{aligned}
Re_c &= \frac{U \cdot \delta}{\nu}, & Re_m &= \frac{2 \cdot \delta \cdot U_m}{\nu}, & Re_\tau &= \frac{U_\tau \cdot \delta}{\nu}, \\
U_m &= \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \bar{u} \, dy, & U_\tau &= \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
y^+ &= \frac{y \cdot U_\tau}{\nu}, & u^+ &= \frac{U}{U_\tau}, & \nu &= \frac{\mu}{\rho}, \\
C_f &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_m^2}, & C_{fo} &= \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_c^2}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde:

$Re_c$  – Número de Reynolds baseado na metade da altura do canal e na velocidade no eixo central

$Re_m$  – Número de Reynolds baseado na velocidade volumétrica

$Re_\tau$  - Número de Reynolds baseado na velocidade de fricção

$U_c$  – Velocidade no eixo central

$U_m$  – Velocidade volumétrica

$U_\tau$  - Velocidade de fricção

$\delta$  - Metade da altura do canal

$y^+$  – Distância adimensional à parede

$u^+$  - Escala de velocidade de fricção adimensional

$\tau_w$  – Tensão de cisalhamento na parede

$\mu$  - Coeficiente de viscosidade absoluto

$C_f$  – Coeficiente de atrito superficial com base em  $U_m$

$C_{fo}$  – Coeficiente de atrito superficial com base em  $U_c$

Para que se possa avaliar o nível de resolução da malha na região próxima à superfície, utiliza-se a escala de comprimento adimensional da camada limite  $y^+$  e a escala de velocidade de fricção adimensional  $u^+$ . Nesta simulação o primeiro ponto adjacente à parede do canal está a uma distância correspondente a  $y^+ = 6$  que é cerca de 120 vezes maior que o requisito de resolução mínima para a Simulação Numérica Direta de Kim et al., 1987, com  $y^+ = 0,05$ .

Segundo Wilcox, 1998, para valores de  $y^+$  até 5, o ponto em questão encontra-se na subcamada viscosa. Assim sendo, valores de  $y^+$ , para o primeiro ponto acima da fronteira

sólida, menores que o referido limite, indicam que estamos capturando de maneira satisfatória a subcamada viscosa. Uma das características da subcamada viscosa é o fato das grandezas  $y^+$  e  $u^+$  terem o mesmo valor.

Conclui-se então, que uma malha com resolução próxima à superfície sólida que forneça valores de  $y^+$  e  $u^+$  iguais, possui resolução suficiente para capturar a camada limite sem perda de quantidade de movimento por aproximar parte da subcamada logarítmica por uma reta.

Na tabela 4.1 são apresentados os parâmetros de configuração utilizados na presente simulação.

**Tabela 4.1** - Parâmetros computacionais usados na simulação.

Malha ( x, y, z) - Uniforme		60 x 60 x 20
Domínio Computacional ( $L_x, L_y, L_z$ )		$2\pi$ m - 2 m - $\pi$ m
Número total de nós da malha		78141
Número total de elementos da malha		72000
$\rho$		1,188 kg/m <sup>3</sup>
$\mu$		0,0181764 kg/m.s
$Re_c$		3300
$Re_\tau$		180
$Re_m$		5600
$U_c$		50,49 m/s
$U_m$		42,84 m/s
$U_\tau$		2,754 m/s
Modelo de Smagorinsky $C_s = 0,44$	Passo de Tempo(s)	$7,5 \times 10^{-6}$ s
	Tempo de CPU (h)	325
Modelo Dinâmico	Passo de Tempo(s)	$7,5 \times 10^{-6}$ s
	Tempo de CPU (h)	343
	Número de nós em que o denominador da expressão de $C(x,t)$ se anula	51463 (66%)
	Número de elementos com viscosidade turbulenta negativa limitada	0

Abrunhosa, 2003, realizou diversos testes de ajuste do parâmetro  $C_s$  com o objetivo de ajustar as estatísticas da velocidade axial, tensão na parede e otimização da simulação em canal tridimensional. Deste modo chegou ao valor final de  $C_s$  como sendo 0,44.

Kim et al., 1987, calcularam médias de variáveis do escoamento em sua simulação numérica do escoamento em um canal em baixo número de Reynolds e as comparou com resultados experimentais obtidos por Dean, 1978, e consideraram que os resultados numéricos tiveram boa concordância com os valores experimentais.

As propriedades médias previstas pelo modelo de Smagorinsky são comparadas com os resultados da simulação direta de Kim et al., 1987, na tabela 4.2.

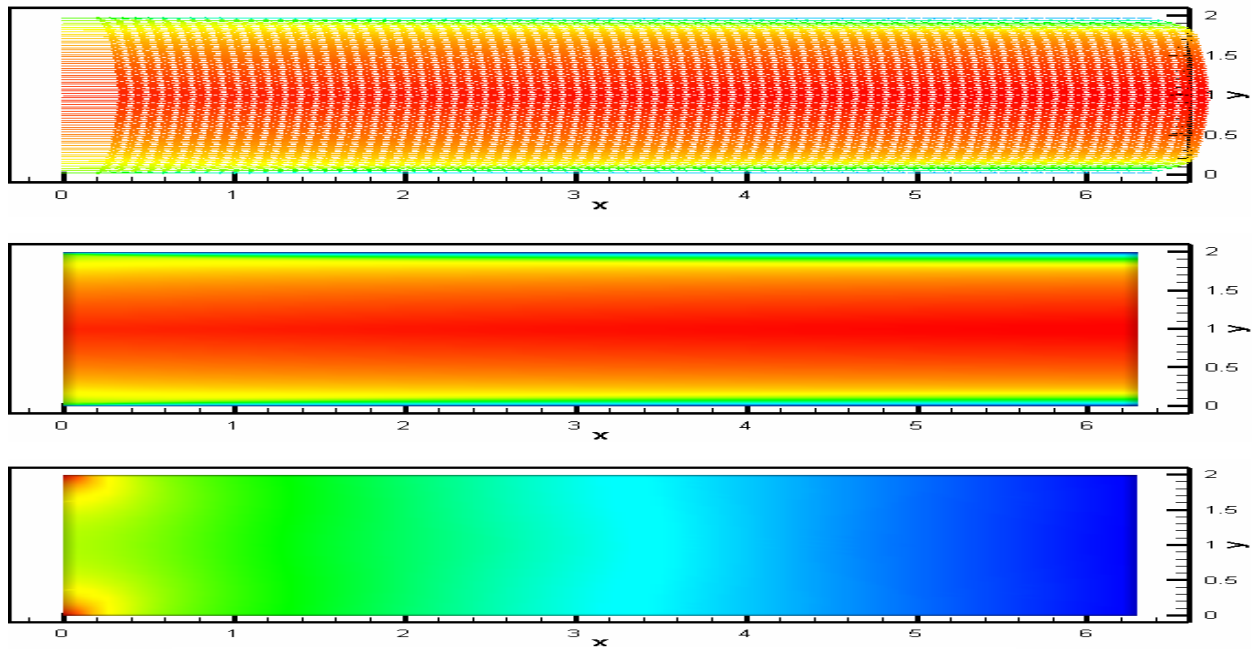
**Tabela 4.2** - Propriedades médias do escoamento.

Propriedades Médias	Modelo Smagorinsky	DNS-Kim et al., 1987
$Re_c$	3300	3300
$Re_\tau$	180	180
$Re_m$	5600	5600
$U_c/U_m$	1,178	1,16
$U_m/U_\tau$	15,55	15,63
$U_c/U_\tau$	18,33	18,20
$C_f$	$8,26 \cdot 10^{-3}$	$8,18 \cdot 10^{-3}$
$C_{fo}$	$5,95 \cdot 10^{-3}$	$6,04 \cdot 10^{-3}$

Da análise da tabela 4.2 verifica-se que a simulação apresentou resultados médios bem próximos dos previstos pela simulação direta.

Na figura 4.3 são apresentados os vetores de velocidade, o campo de velocidade e o campo de pressão para o problema resolvido com o modelo dinâmico. Notam-se perturbações provenientes dos modelos de turbulência utilizados nos cantos superior e inferior, do lado esquerdo, no campo de pressão.





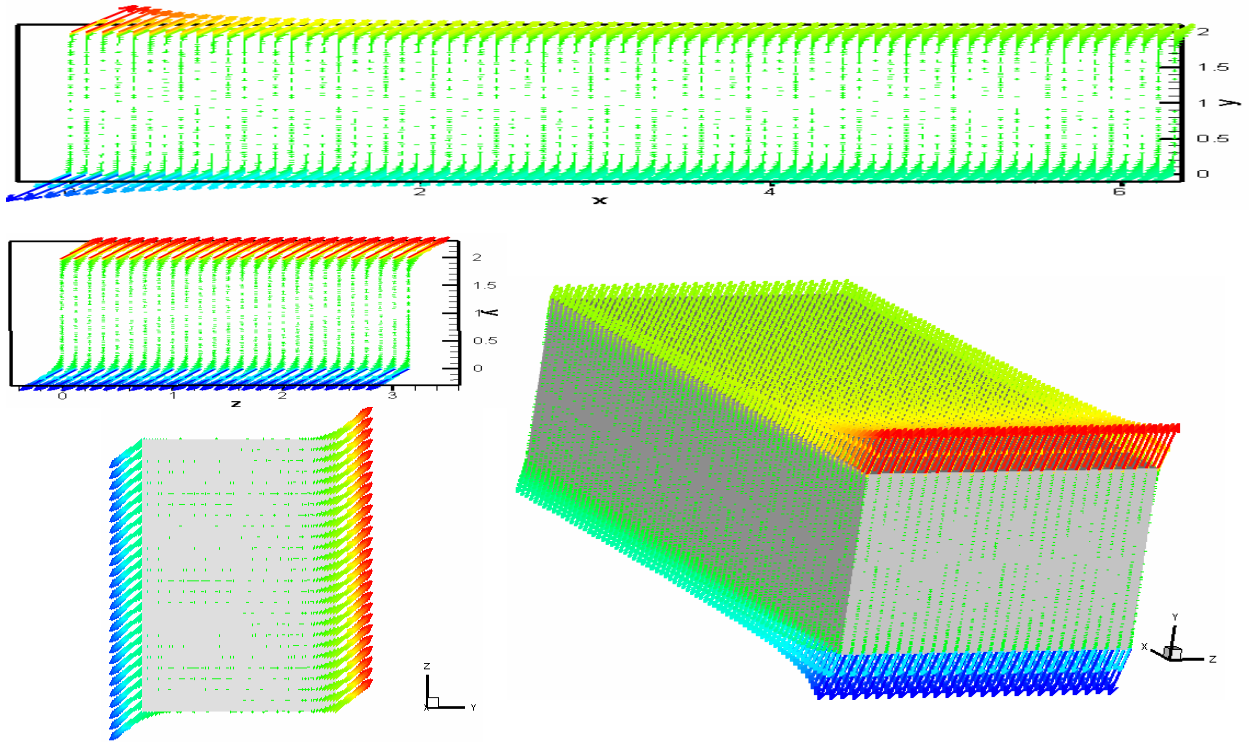
**Figura 4.3** – Respectivamente: Vetores de velocidade  $u$ , campo de velocidade e campo de pressão. ( $x$  e  $y$  em metros)

A componente do vetor vorticidade:

$$\omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

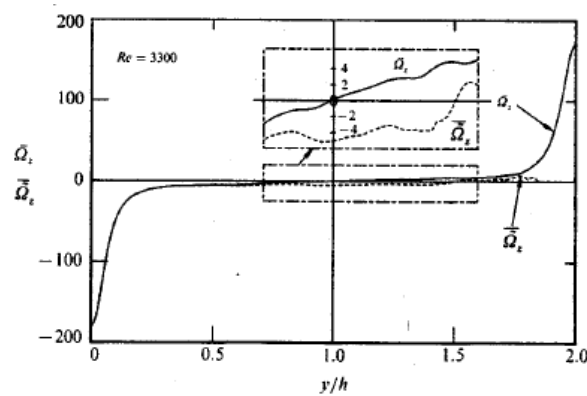
é mostrada na figura 4.4. Nessa figura são apresentadas três vistas do campo de  $\omega_z$  e esses resultados foram comparados qualitativamente com os resultados de Antonia et al., 1992.

Verifica-se que o valor desse componente do vetor de vorticidade torna-se significativo somente na região da parede.



**Figura 4.4** – Campo de vorticidade  $\omega_z$ .

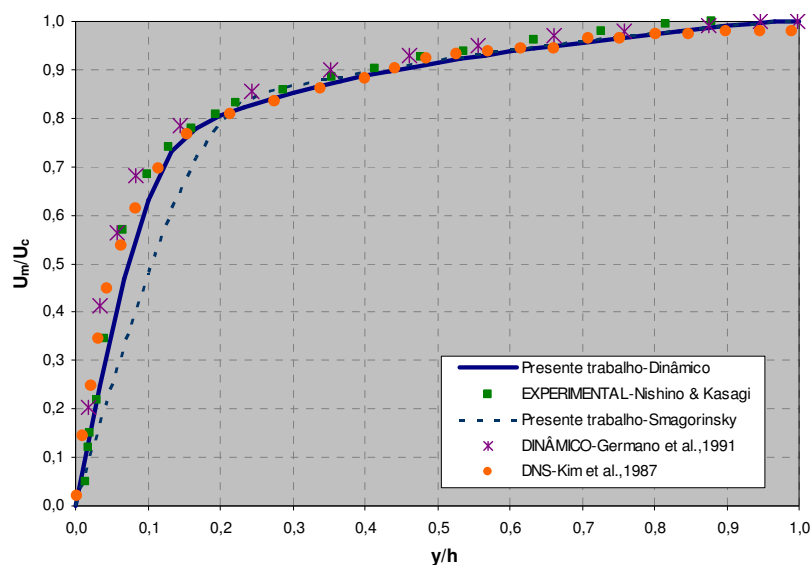
Antonia et al., 1992, publicaram um estudo sobre os efeitos do número de Reynolds no escoamento turbulento completamente desenvolvido em canal. Foram realizadas observações experimentais e simulação numérica direta do referido escoamento para o mesmo número de Reynolds utilizado neste trabalho. O perfil de vorticidade  $\Omega$  predito por Antonia et al., 1992 é apresentado na figura 4.5, e comparado aos resultados da figura 4.4. Observa-se uma boa concordância entre os resultados.



**Figura 4.5** – Perfil de vorticidade. [Antonia et al., 1992]

Na figura 4.6 são comparados os perfis de velocidade preditos nas simulações com os resultados experimentais de Nishino & Kasagi (Gavrillakis, 1992), resultados de simulação direta de Kim et al., 1987 e resultados de Germano et al., 1991.

De um modo geral, pode-se dizer que os resultados da simulação com modelo dinâmico concordam melhor com os dados experimentais, de simulação direta e com os obtidos por Germano et al., 1991. Observa-se que os resultados da simulação com modelo de Smagorinsky próximos à parede ( $0 < y/h < 0,2$ ), onde  $h = 2\delta$ , estão mais afastados dos resultados dos dados experimentais e de simulação direta.

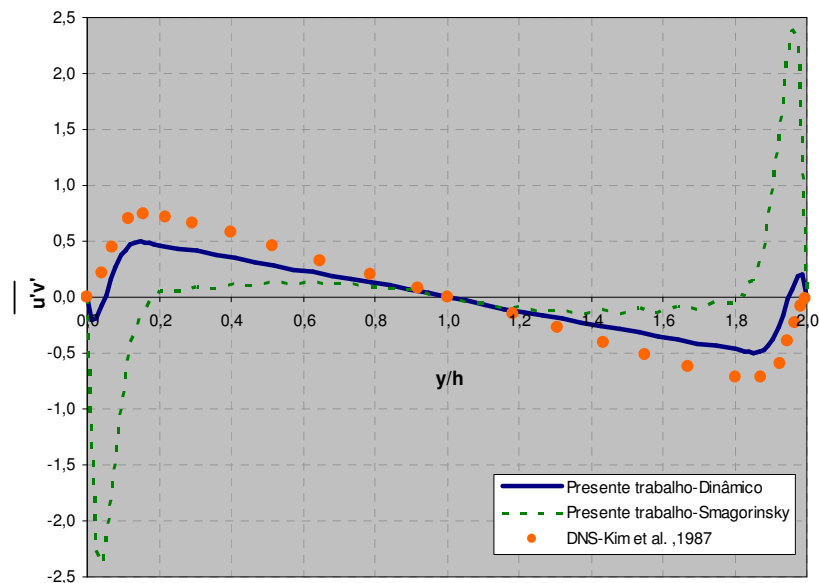


**Figura 4.6** – Perfil de velocidade u.

Germano et al., 1991, ao simular o mesmo canal, observam que, em geral, os resultados do modelo dinâmico são mais exatos que os resultados do modelo de Smagorinsky.

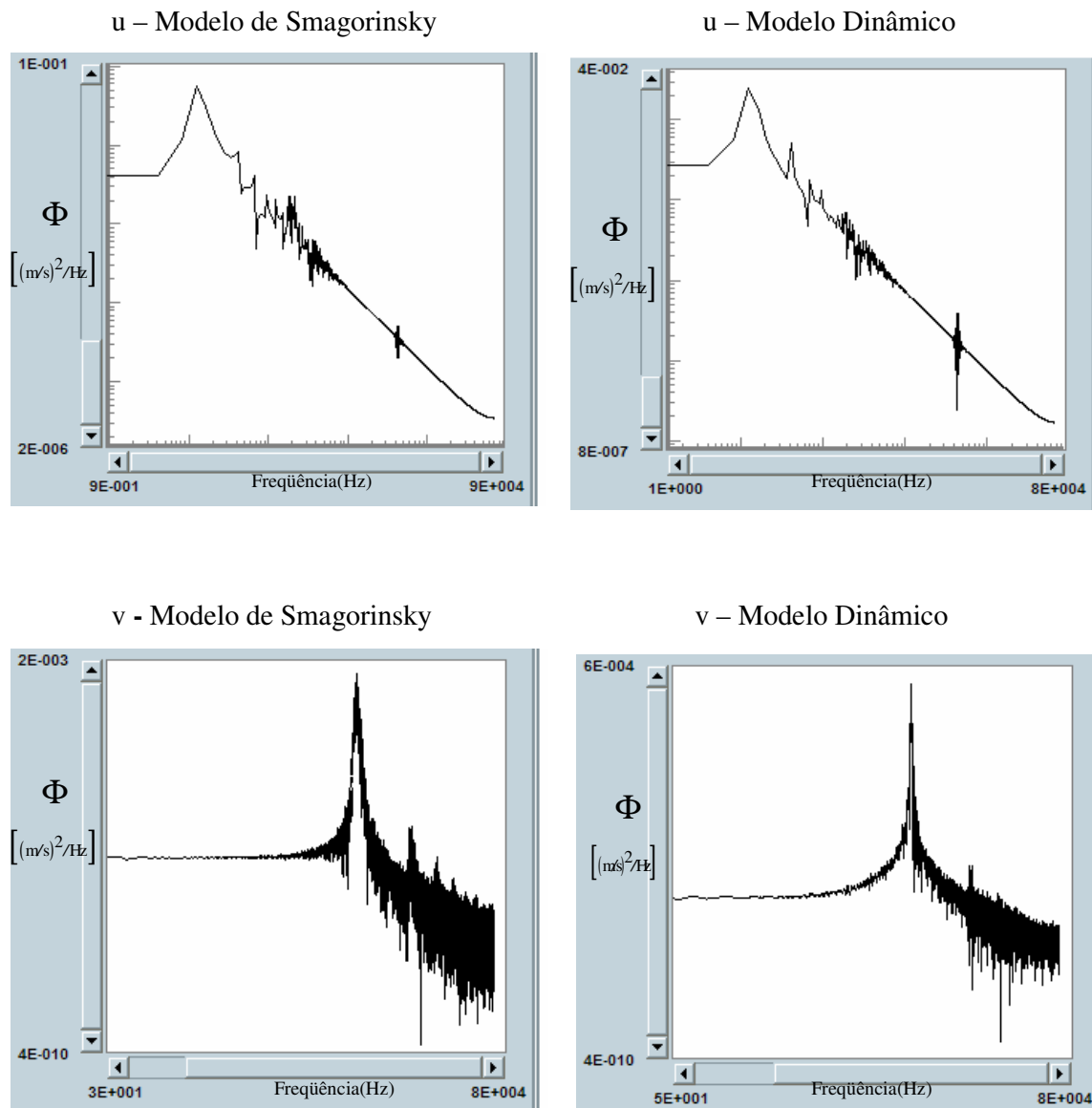
A tensão de Reynolds ( $\overline{u'v'}$ ) predita pelos modelos é comparada com o resultado da simulação direta de Kim et al., 1987, na figura 4.7. Verifica-se que o modelo dinâmico concorda melhor com os resultados da simulação direta do que os resultados do modelo de Smagorinsky. Observa-se que nas regiões próximas à parede os dois modelos superestimam a tensão de Reynolds.

Meneveau & Katz, 2000, observam que o modelo submalha de Smagorinsky possui algumas limitações. Por exemplo, o modelo superestima a tensão cisalhante submalha na região da parede. Nessa região, a tensão cisalhante submalha deveria ir para zero como  $y^2$ , contudo a tensão predita pelo modelo, com o coeficiente constante, permanece finita na parede, devido ao cisalhamento. O modelo é assim muito dissipativo e requer funções empíricas de amortecimento na parede.



**Figura 4.7** – Tensão de Reynolds  $\overline{u'v'}$ .

Resultados dos espectros de frequência para as velocidades  $u$  e  $v$ , com os modelos de Smagorinsky e Dinâmico, calculados de acordo com os procedimentos descritos por Möller, 2000, são apresentados na figura 4.8. O comprimento da série é de  $2^{15}$  (32768) pontos, o tempo total de registro é de 0,24 segundos e para melhor visualização os gráficos estão em escala logarítmica.



**Figura 4.8** – Espectros de frequência para as velocidades u e v.

Observam-se as frequências dominantes em: 10 Hz (velocidade u, nos dois modelos) e 4000 Hz (velocidade v, nos dois modelos). As diferenças estão nas magnitudes ( $\Phi[(m/s)^2/Hz]$ ) das frequências: 0,06 (u – Modelo de Smagorinsky); 0,03 (u – Modelo Dinâmico); 0,001 (v - Modelo de Smagorinsky) e 0,0003 (v – Modelo Dinâmico). As magnitudes de frequência são menores, nos quatro gráficos, com o modelo Dinâmico.

Não existe isotropia no escoamento, pois os espectros de  $u$  e  $v$  mostram-se bastante distintos. Isso acontece porque o movimento turbulento de grandes escalas é altamente influenciado pelas condições de contorno do escoamento, devido à interação com o escoamento principal, que tem muitas vezes uma direção preferencial, que é imposta ao movimento turbulento de grande escala. Essa característica torna o fenômeno turbulento altamente anisotrópico, sendo a intensidade das flutuações e as escalas de comprimento associadas, dependentes da direção.

## **4.2 Análise Tridimensional de Escoamento Turbulento em Degrau**

A escolha desse problema foi motivada por apresentar em seu escoamento alto grau de complexidade, apesar de sua simplicidade geométrica.

Os fenômenos presentes de camada limite em desenvolvimento, zona de recirculação, descolamento e recolamento do escoamento após o degrau, mostrados na figura 4.8, tornam o problema adequado ao objetivo de avaliar o comportamento dos modelos submalha de Smagorinsky e Dinâmico. Além disso, existe na literatura uma série de simulações numéricas e experimentais, proporcionando assim a possibilidade de comparar os resultados.

Um dos trabalhos mais citados na literatura, sobre o escoamento numa expansão, é o de Kim et al., 1978, que fizeram simulações numéricas e experimentais, mostrando toda a complexidade inerente aos processos de descolamento, recolamento e de redensolvimento da camada limite hidrodinâmica a jusante do degrau.

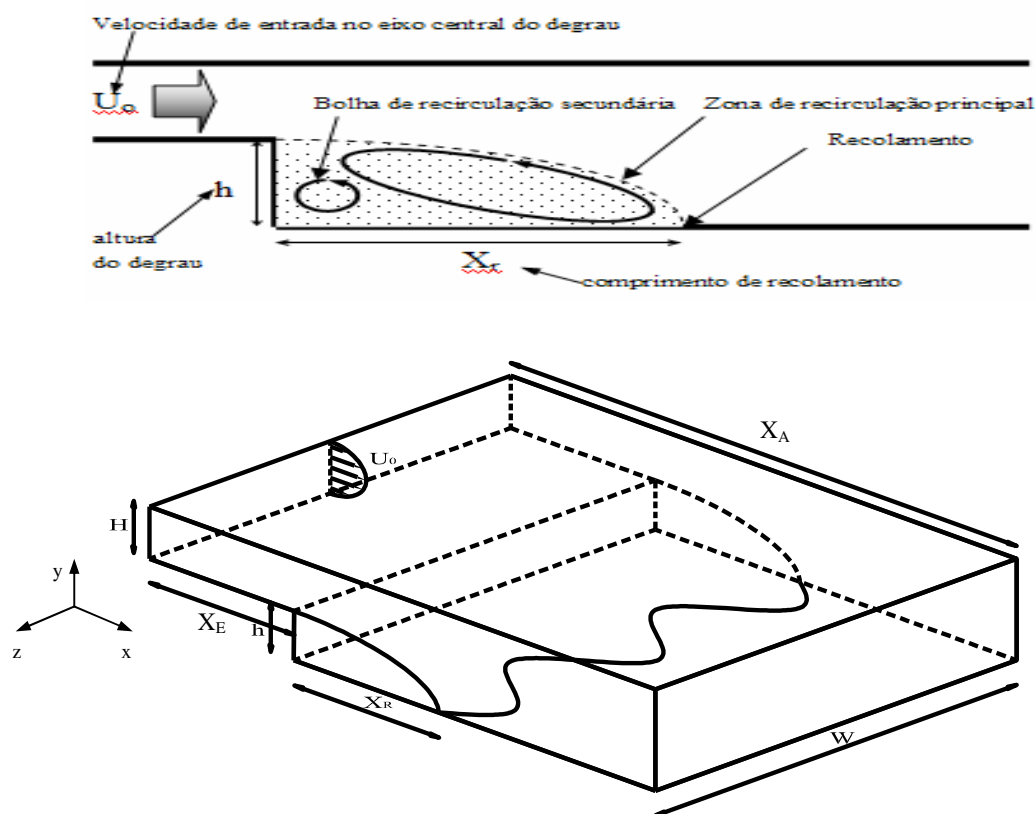
Armaly et al., 1983, também é outro trabalho bastante citado na literatura. Esses autores apresentam resultados experimentais para escoamentos laminares, transicionais e turbulentos, com o número de Reynolds variando de 70 a 8000 e observam que o comprimento de separação se altera radicalmente com o número de Reynolds. Três regimes são claramente identificados: laminar ( $Re_D < 1200$ ), de transição ( $1200 < Re_D < 6600$ ) e turbulento ( $Re_D > 6600$ ).

Friedrich e Arnal, 1990, estudaram o escoamento no interior dessa geometria para altos números de Reynolds ( $1,65 \cdot 10^5$ ). Os cálculos foram executados com malha uniforme e os resultados tratados estatisticamente apresentaram uma boa coerência.

Silveira Neto et al., 1993, fizeram uma análise minuciosa de estruturas turbulentas tridimensionais que se desenvolvem nesse tipo de escoamento, utilizando como ferramentas as metodologias de simulação numérica direta e de grandes escalas.

Jovic & Driver, 1994, caracterizaram, através de ensaios em túnel de vento e velocimetria laser Doppler, o escoamento para o número de Reynolds 5100. Os dados foram gerados para validar a simulação numérica direta de Le et al., 1997, que também servirão de base de comparação para resultados obtidos no presente trabalho.

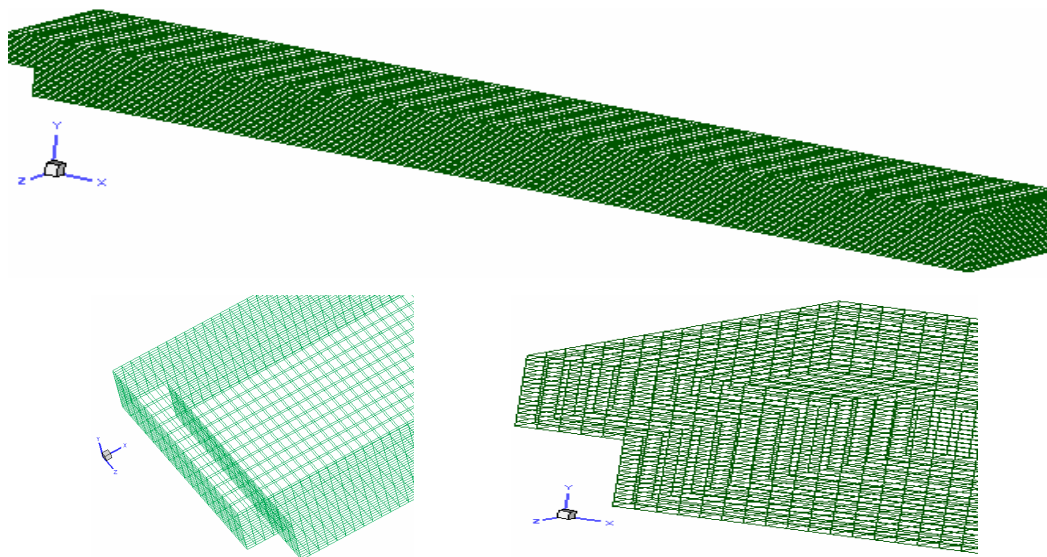
O domínio computacional utilizado nas simulações deste trabalho, mostrado esquematicamente na figura 4.9, tem largura  $w = 5$  m, altura do canal na entrada  $H = 1$  m, altura do degrau  $h = 0,94$  m, comprimento à montante do degrau  $X_E = 1$  m, comprimento total  $X_A = 31$  m, velocidade de entrada no eixo central  $U_o = 75$  m/s.



**Figura 4.9** – Domínio computacional do problema.

O domínio computacional foi discretizado com uma malha uniforme contendo 83589 nós e 75680 elementos hexaédricos. A região que antecede o degrau possui 5 elementos

na horizontal (x), 16 elementos na vertical (y) e 16 elementos na profundidade (z). Após o degrau, os elementos foram distribuídos em 150 elementos na horizontal (x), 31 elementos na vertical (y) e 16 elementos na profundidade (z), como se pode visualizar na figura 4.10.



**Figura 4.10** – Detalhes da discretização do domínio computacional.

Como condições de contorno na entrada adotou-se um perfil parabólico para as simulações com número de Reynolds iguais a 100 e 400 e um perfil turbulento de velocidade para as simulações com números de Reynolds iguais a 2690, 5100 e 10000, completamente desenvolvido ( $v_1=V(y)$ ,  $v_2=0$ ) e condição de não-deslizamento ( $v_1=v_2=v_3=0$ ) prescrita nas paredes superior e inferior. Na saída do canal existem condições de contorno naturais ( $t_1=t_2=t_3=0$ ) (equação 2.56). As condições iniciais usadas são  $v_1=75$  m/s,  $v_2=v_3=p=0$ . Nas simulações seguintes empregou-se o último campo de pressões e velocidades calculado para o número de Reynolds anterior.

Armaly et al., 1983, define o número de Reynolds para este problema, como sendo:

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu} \quad (4.3)$$

onde U é a velocidade média do perfil de velocidades na entrada do canal,  $U = \frac{2}{3} \cdot U_{\text{máx}}$ ; D representa o diâmetro hidráulico do canal que antecede o degrau, dado por  $D = 2 \cdot H$ ; e  $\nu$  corresponde à viscosidade cinemática do fluido. Para as diferentes simulações o número de Reynolds é calculado em função de  $\nu$ , já que U e D são mantidos constantes.

Nessas simulações o primeiro ponto adjacente à parede está a uma distância



correspondente a  $y^+ = 15$  que é cerca de 50 vezes maior que o requisito de resolução mínima para a Simulação Numérica Direta de Le et al., 1997, com  $y^+ = 0,3$ .

O parâmetro  $C_s$  com valores de 0,16 a 0,23 (Meneveau & Katz, 2000; Lesieur & Metais, 1996; Piomelli, 1999) foi considerado, na prática, como valores excessivos (Silvestrini, 2000; Hartel & Kleiser, 1998). O valor mais comumente usado nas simulações numéricas tem sido  $C_s = 0,1$  (Lesieur & Metais, 1996; Hartel & Kleiser, 1998)

Na tabela 4.3 são apresentados os parâmetros de configuração utilizados nas simulações realizadas nesse trabalho. O passo de tempo para o modelo Dinâmico em  $Re = 5100$  teve que ser diminuído, pois não apresentou bons resultados com o mesmo passo de tempo usado para o modelo de Smagorinsky.

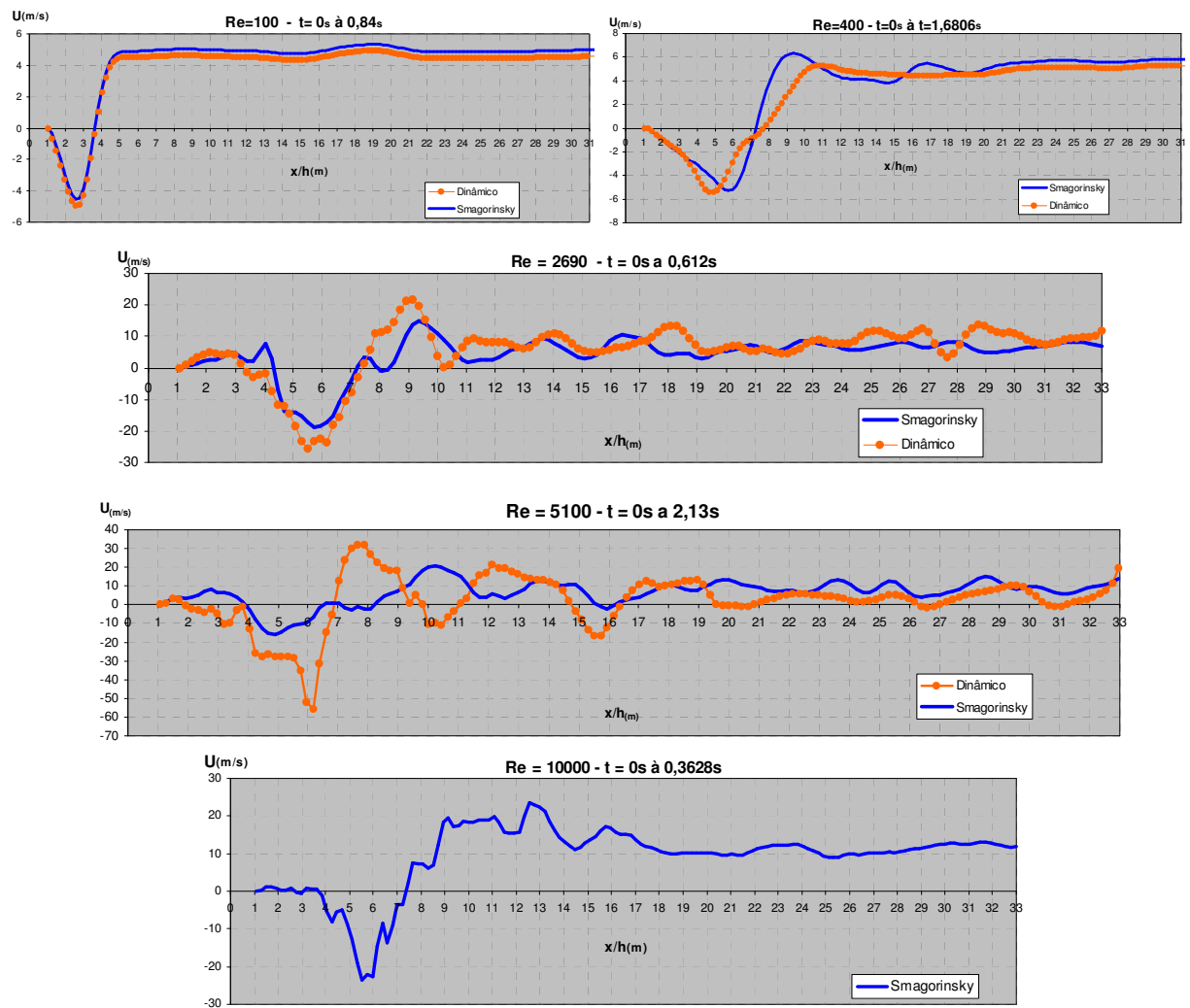
**Tabela 4.3** - Parâmetros computacionais usados nas simulações.

$\rho = 1,188 \text{ kg/m}^3$						
Número de Reynolds		100	400	2690	5100	10000
$\mu$ (kg/m.s)		1,188	0,297	0,044	0,023	0,012
Modelo Smagorinsky $C_s = 0,1$	Passo de Tempo (s)	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$
	Tempo de CPU (h)	100	131	156	335 (2,12s)	840
Modelo Dinâmico	Passo de Tempo (s)	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	-
	Tempo de CPU (h)	105	144	165	280 (1,36s)	-
	Número de nós em que o denominador da expressão $C(x,t)$ se anula	3767 (4,5%)	1190 (1,4%)	15 (0,02%)	18 (0,02%)	-
	Número de elementos com viscosidade turbulenta negativa limitada	-	-	295 (0,4%)	4216 (5,6%)	-

O comprimento de recolamento é o resultado mais importante no escoamento sobre o degrau. É uma medida única que acumula todas as influências e interações de diferentes zonas do escoamento. O método utilizado para medir o comprimento de recolamento  $X_r$  foi o da localização do ponto de velocidade média nula no primeiro ponto nodal acima da parede.

A figura 4.11 mostra o comportamento da velocidade média axial  $u$  no primeiro ponto acima da parede inferior, nos diferentes números de Reynolds simulados e entre os intervalos de tempo apresentados. As velocidades médias foram calculadas com os resultados de 20 registros.

Os resultados obtidos para a relação entre  $X_r/h$  e o número de Reynolds, juntamente com os valores apresentados por Armaly et al., 1983, Le et al., 1997, Jovic e Driver, 1994 e Kim et al., 1980, estão na tabela 4.4.



**Figura 4.11** – Comprimento de recolamento determinado pela velocidade média.

Armaly et al., 1983, estudaram o efeito do número de Reynolds no valor do comprimento de recolamento ( $X_r$ ). Eles encontraram a seguinte relação:  $X_r$  aumenta com o número de Reynolds até  $Re \approx 1200$ , então diminui no regime de transição  $1200 < Re < 6600$  e permanece relativamente constante quando o regime é turbulento  $Re > 6600$ .

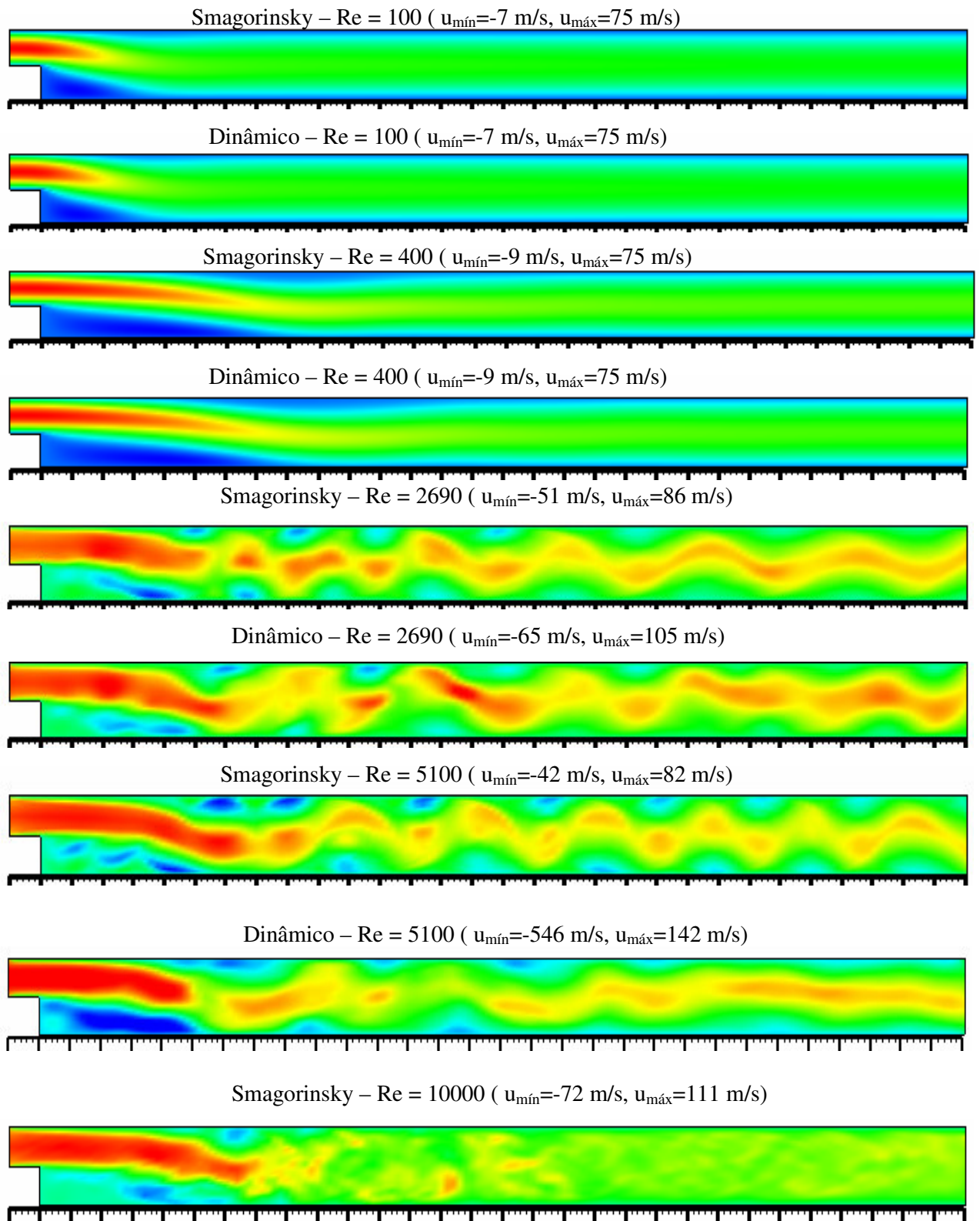
**Tabela 4.4** - Comprimento de recolamento  $X_r/h$  em função do número de Reynolds.

<b><math>X_r/h \times Re</math></b>				
Número de Reynolds	Modelo Smagorinsky	Modelo Dinâmico	DNS	Experimental
100	2,98	3,19	-	3,0 – Armaly et al., 1983
400	7,23	7,66	-	8,0 – Armaly et al., 1983
2690	7,02	7,45	-	11,5 - Armaly et al., 1983
5100	6,60	6,90	6,28 – Le et al., 1997	6,0±0,15 – Jovic e Driver, 1994 6,7 – Armaly et al., 1983
10000	7,45	-	-	7±1 – Kim et al., 1980

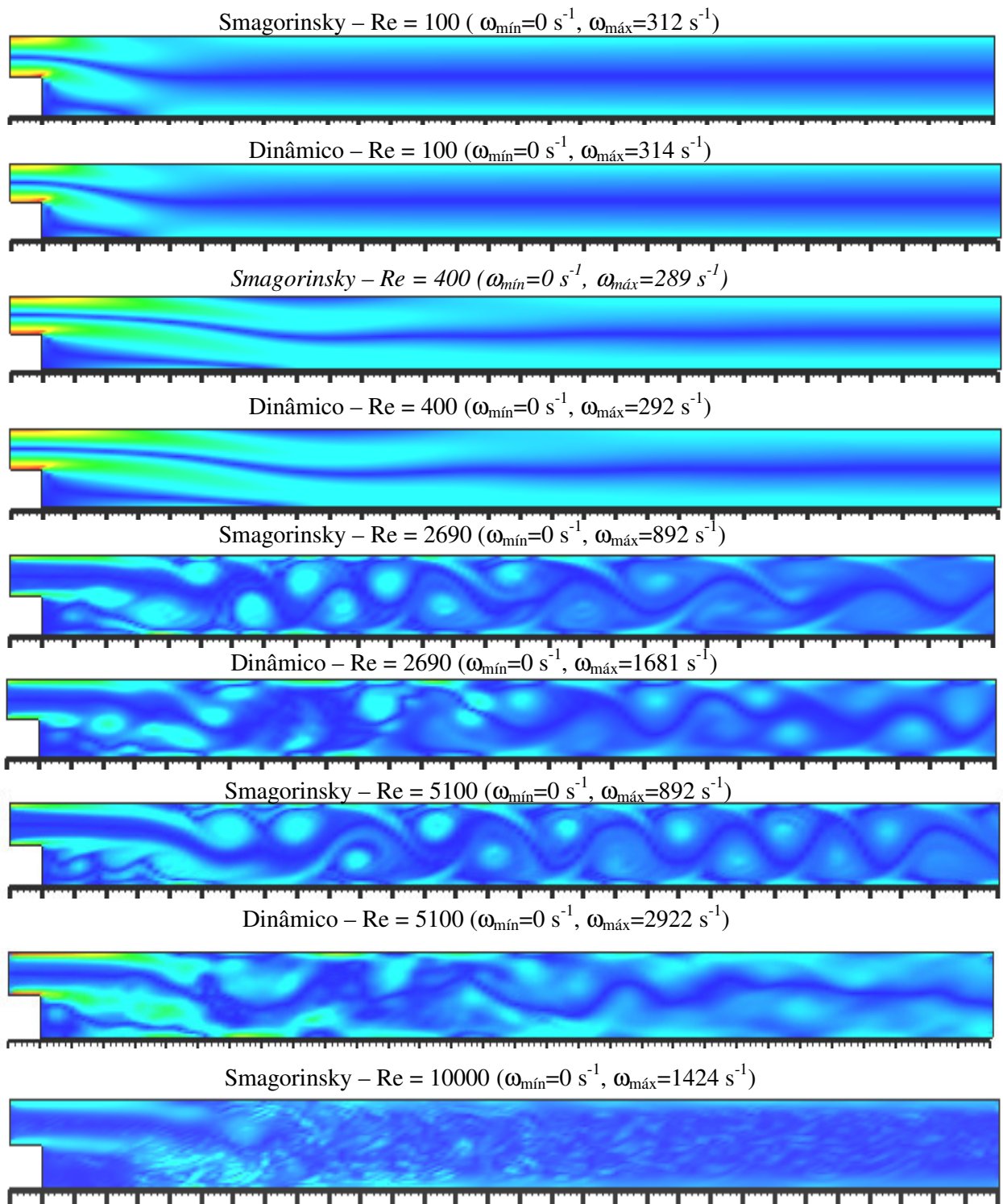
Verifica-se que as soluções deste trabalho, as soluções experimentais e as de simulação direta estão bem próximas, com a exceção de  $Re = 2690$ , onde a simulação de grandes escalas subavaliou a extensão da região de recirculação, obtendo um prematuro recolamento, além de ser este número de Reynolds fortemente dependente da tridimensionalidade do escoamento, por estar na região de transição. Comparando-se os dois modelos de turbulência, em relação ao comprimento de recolamento, nota-se que os resultados do modelo de Smagorinsky são inferiores aos do modelo Dinâmico, o que se deve ao modelo de Smagorinsky ser mais dissipativo que o Dinâmico.

Os campos de velocidade, de vorticidade e de pressão, no plano central do degrau, para os diferentes números de Reynolds e empregando os modelos de Smagorinsky e Dinâmico, podem ser observados nas figuras 4.12 a 4.14. Os resultados são apresentados sempre para o último instante de tempo resolvido.

Para  $Re = 5100$  (Dinâmico) e  $Re = 10000$  os resultados apresentados não são conclusivos, pois como os passos de tempo de integração são muito baixos ( $\Delta t = 1.10^{-6}s$  e  $\Delta t = 8.10^{-7}s$ ), é necessário obter resultados de um período mais longo de tempo, que não foi possível realizar devido aos prazos deste trabalho.



**Figura 4.12** – Campo de velocidade instantânea  $u$ , respectivamente, para  $Re = 100, 400, 2690, 5100$  e  $10000$ .



**Figura 4.13** – Campo de vorticidade instantânea, respectivamente, para  $Re = 100, 400, 2690, 5100$  e  $10000$ .

Smagorinsky – Re = 100 (  $p_{\text{mín}}=24$  Pa,  $p_{\text{máx}}=3784$  Pa)



Dinâmico – Re = 100 (  $p_{\text{mín}}=24$  Pa,  $p_{\text{máx}}=3756$  Pa)



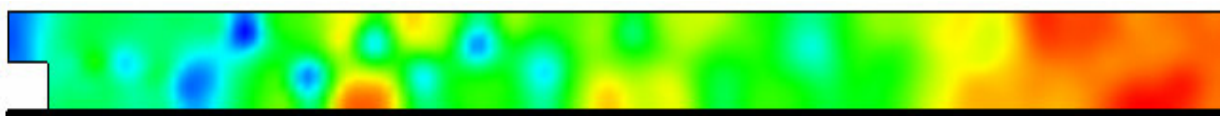
Smagorinsky – Re = 400 (  $p_{\text{mín}}=-657$  Pa,  $p_{\text{máx}}=1117$  Pa)



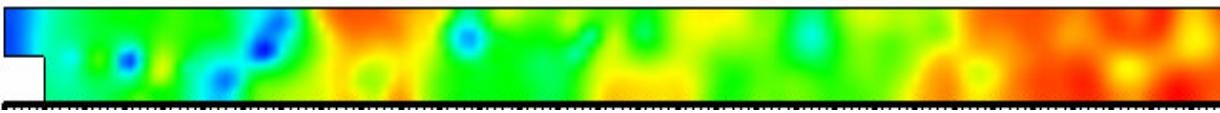
Dinâmico – Re = 400 (  $p_{\text{mín}}=-505$  Pa,  $p_{\text{máx}}=256$  Pa)



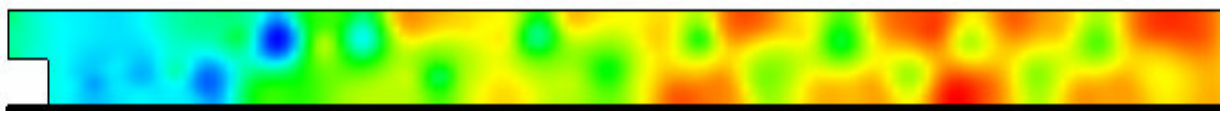
Smagorinsky – Re = 2690 (  $p_{\text{mín}}=-4204$  Pa,  $p_{\text{máx}}=428$  Pa)



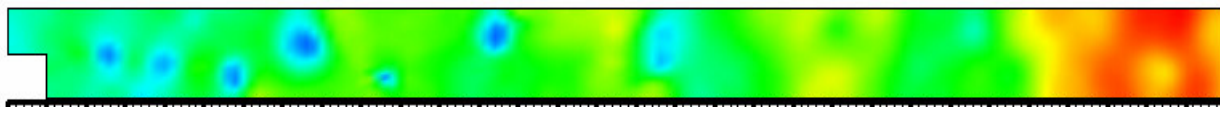
Dinâmico – Re = 2690 (  $p_{\text{mín}}=-4668$  Pa,  $p_{\text{máx}}=326$  Pa)



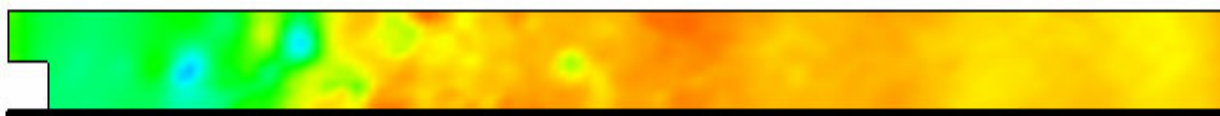
Smagorinsky – Re = 5100 (  $p_{\text{mín}}=-3404$  Pa,  $p_{\text{máx}}=1121$  Pa)



Dinâmico – Re = 5100 (  $p_{\text{mín}}=-5921$  Pa,  $p_{\text{máx}}=14112$  Pa)



Smagorinsky – Re = 10000 (  $p_{\text{mín}}=-3050$  Pa,  $p_{\text{máx}}=651$  Pa)

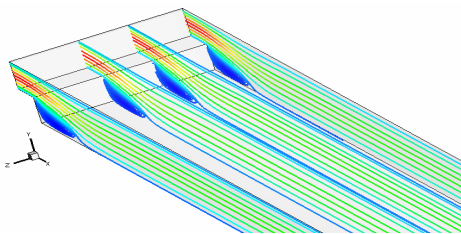


**Figura 4.14** – Campo de pressão instantânea, respectivamente, para Re = 100, 400, 2690, 5100 e 10000.

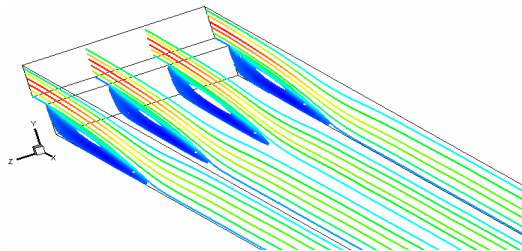
Na figura 4.14 observa-se que as pressões para  $Re = 100$ , nos modelos de Smagorinsky e Dinâmico, apresentam um comportamento diferente dos demais números de Reynolds porque trata-se de uma condição inicial do escoamento, já que nas simulações seguintes empregou-se o último campo de pressões e velocidades calculado para o número de Reynolds anterior.

As isolinhas de função de corrente e os vetores de velocidade dos escoamentos, para os diferentes números de Reynolds, empregando os modelos de Smagorinsky e Dinâmico, podem ser observados nas figuras 4.15 e 4.16.

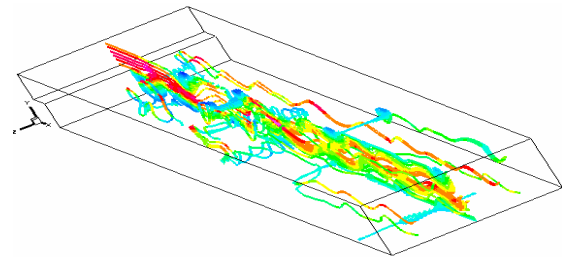
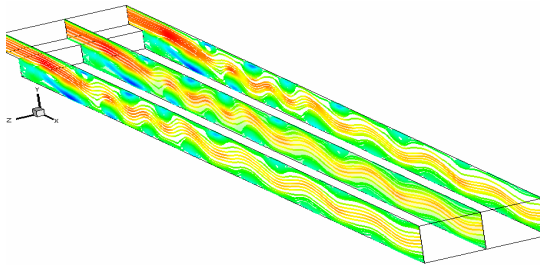
Re = 100 (Dinâmico)



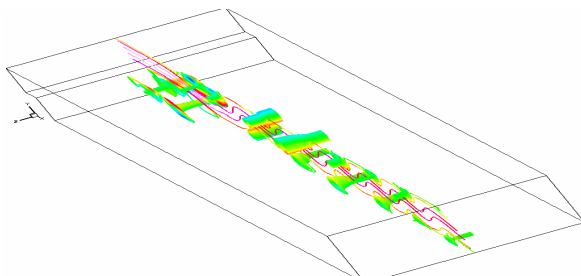
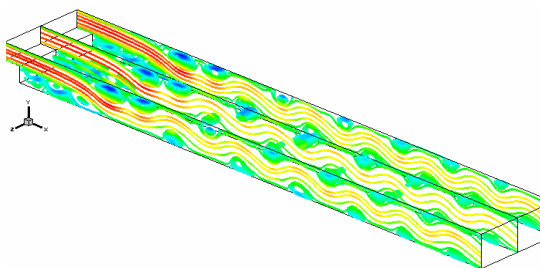
Re = 400 (Dinâmico)



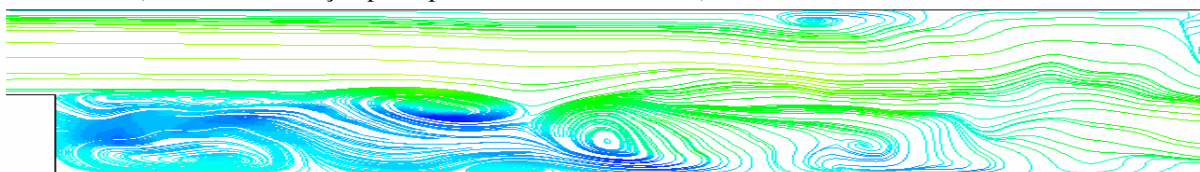
Re = 2690 (Dinâmico)



Re = 5100 (Smagorinsky)



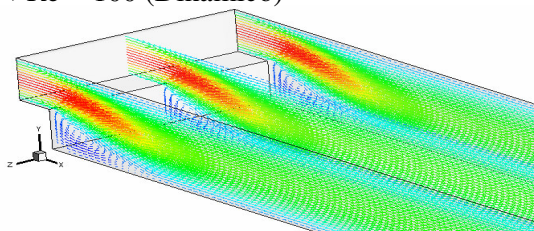
Re = 10000 (zona de recirculação principal no instante  $t=0,1074$  s)



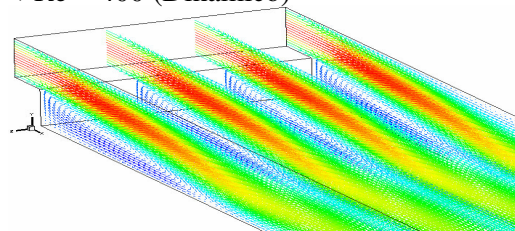
**Figura 4.15** – Isolinhas de função de corrente, respectivamente, para  $Re = 100, 400, 2690, 5100$  e  $10000$ .



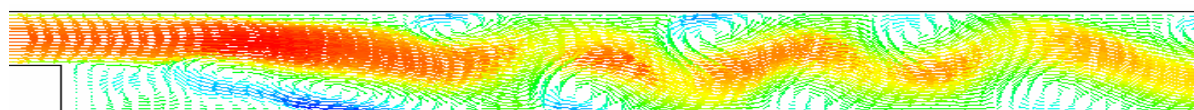
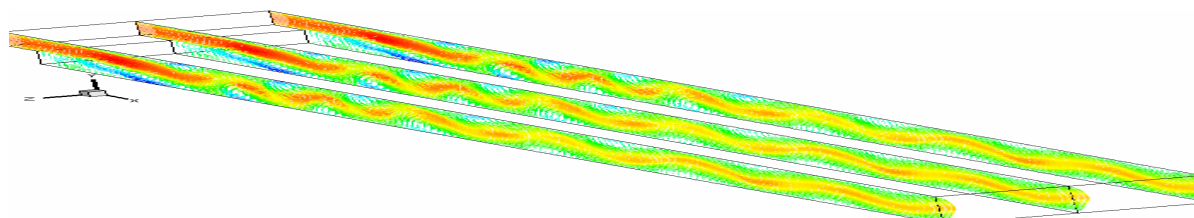
$\Rightarrow Re = 100$  (Dinâmico)



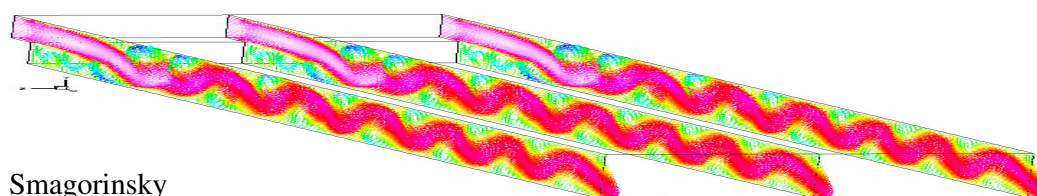
$\Rightarrow Re = 400$  (Dinâmico)



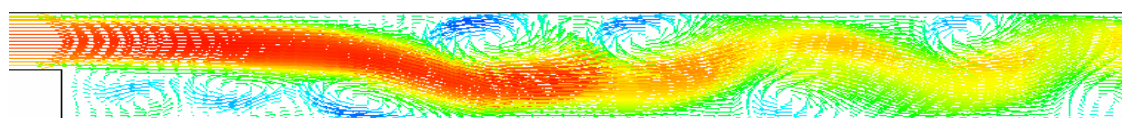
$\Rightarrow Re = 2690$  (Dinâmico)



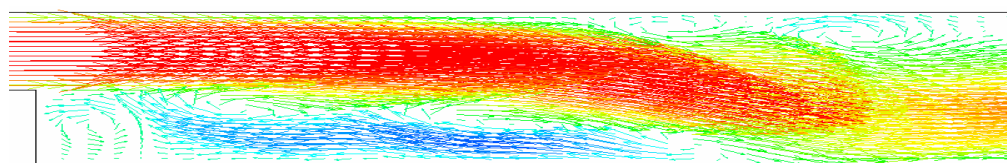
$\Rightarrow Re = 5100$



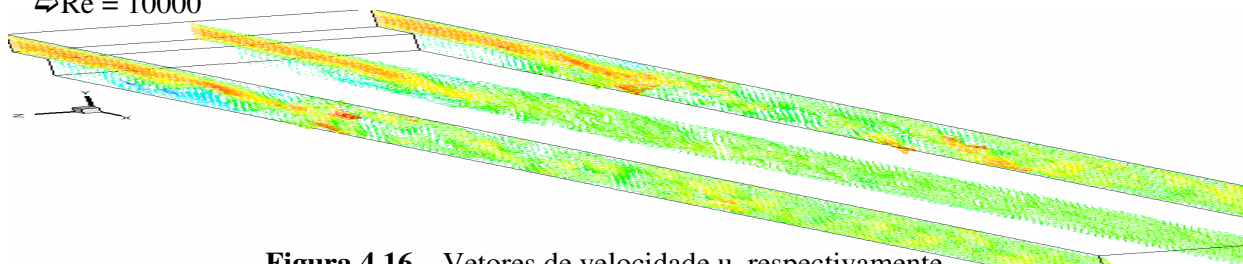
Smagorinsky



Dinâmico



$\Rightarrow Re = 10000$



**Figura 4.16** – Vetores de velocidade  $u$ , respectivamente, para  $Re = 100, 400, 2690, 5100$  e  $10000$ .

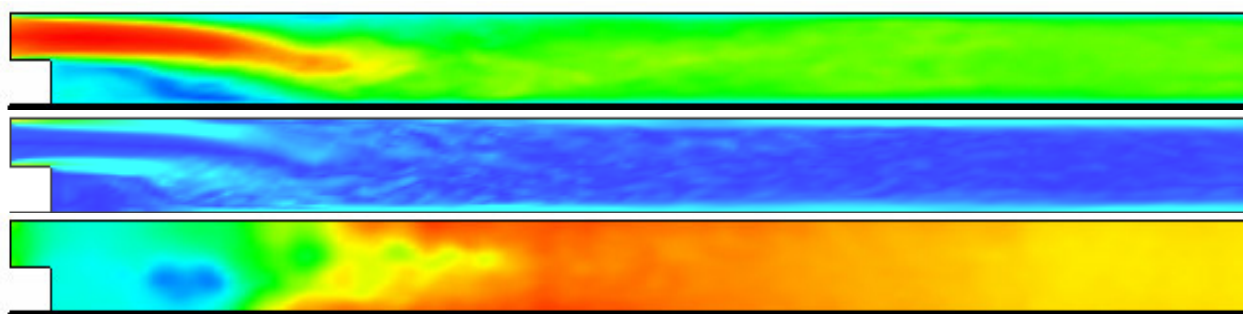


Observa-se que os resultados para  $Re = 100$  e  $Re = 400$  são muito semelhantes, tendo pequena influência do modelo submalha adotado. Está de acordo com o esperado para baixos números de Reynolds. No regime turbulento notam-se as diferenças entre os dois modelos submalha principalmente nos campos de velocidade e vorticidade.

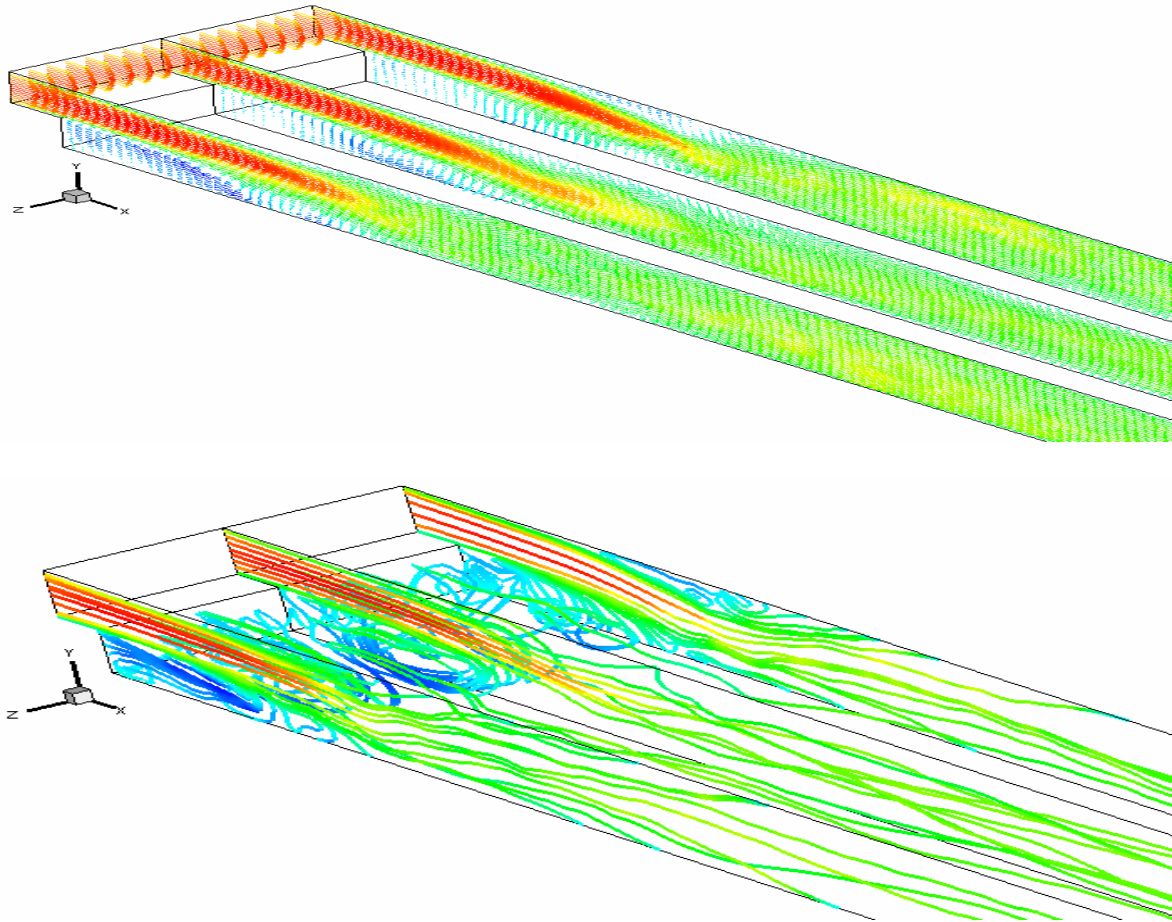
O aparecimento de vórtices secundários na parede superior do degrau é uma consequência do gradiente de pressão adversa, provocado pela mudança de direção do escoamento, devido à expansão do degrau. Armaly et al., 1983, observa que o vórtice secundário se faz presente num intervalo de  $400 < Re < 6600$ . Nas figuras 4.12, 4.13, 4.15 e 4.16 observam-se esses vórtices secundários em números de Reynolds de 2690, 5100 e também em 10000, este último não concordando com a observação anterior de Armaly et al., 1983.

Na figura 4.15 nota-se a presença de efeitos tridimensionais nas isolinhas de função de corrente para os casos simulados em regime turbulento ( $Re = 2690, 5100$  e  $10000$ ), estando com a forma esperada devido ao movimento do fluido no sentido do eixo  $z$ . Esses efeitos são mais comportados no modelo de Smagorinsky do que no modelo Dinâmico pelo fato do modelo Dinâmico descrever melhor esse movimento e ser menos dissipativo do que o modelo de Smagorinsky.

Na simulação com  $Re = 10000$  verifica-se a dificuldade de visualizar os resultados mostrados nas figuras 4.12 a 4.16. Dessa necessidade, nas figuras 4.17 e 4.18 são mostrados os resultados médios, que permitem amortecer pequenas perturbações originadas por desprendimento de vórtices e/ou separação, que ocorrem ao longo das paredes. É importante observar que devido à grande redução do passo de tempo de integração nessa simulação, o tempo de processamento cresceu, o que inviabilizou a obtenção de um resultado em um período mais longo que o atual.



**Figura 4.17** – Solução para  $Re = 10000$ , respectivamente, campo de velocidade  $u$  média ( $u_{\min}=-26$  m/s,  $u_{\max}=79$  m/s), campo de vorticidade média ( $\omega_{\min}=0$  s<sup>-1</sup>,  $\omega_{\max}=892$  s<sup>-1</sup>) e campo de pressão média ( $p_{\min}=-1458$  Pa,  $p_{\max}=431$  Pa).

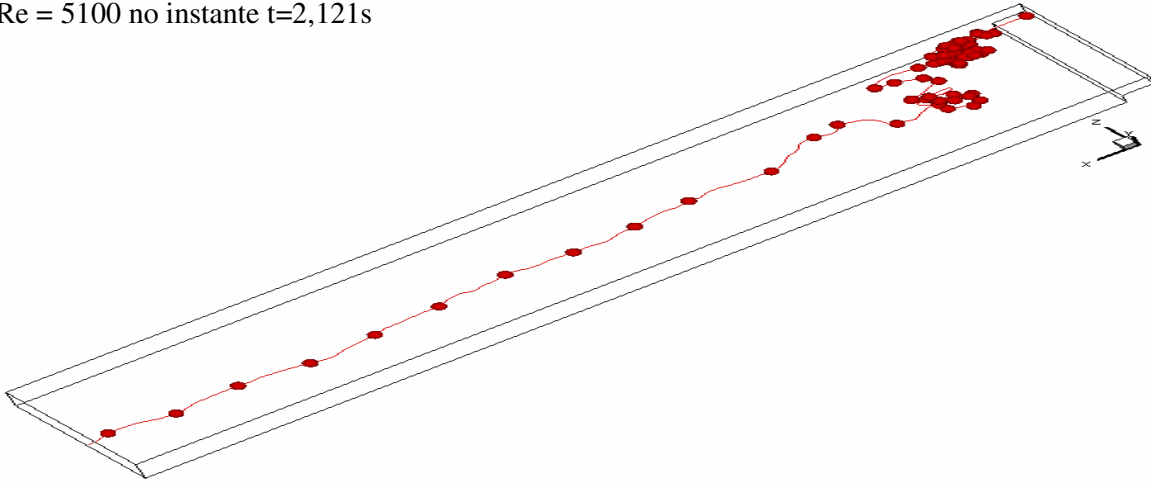


**Figura 4.18** – Solução para  $Re = 10000$ , respectivamente, vetores de velocidade  $u$  média e isolinhas de função de corrente média.

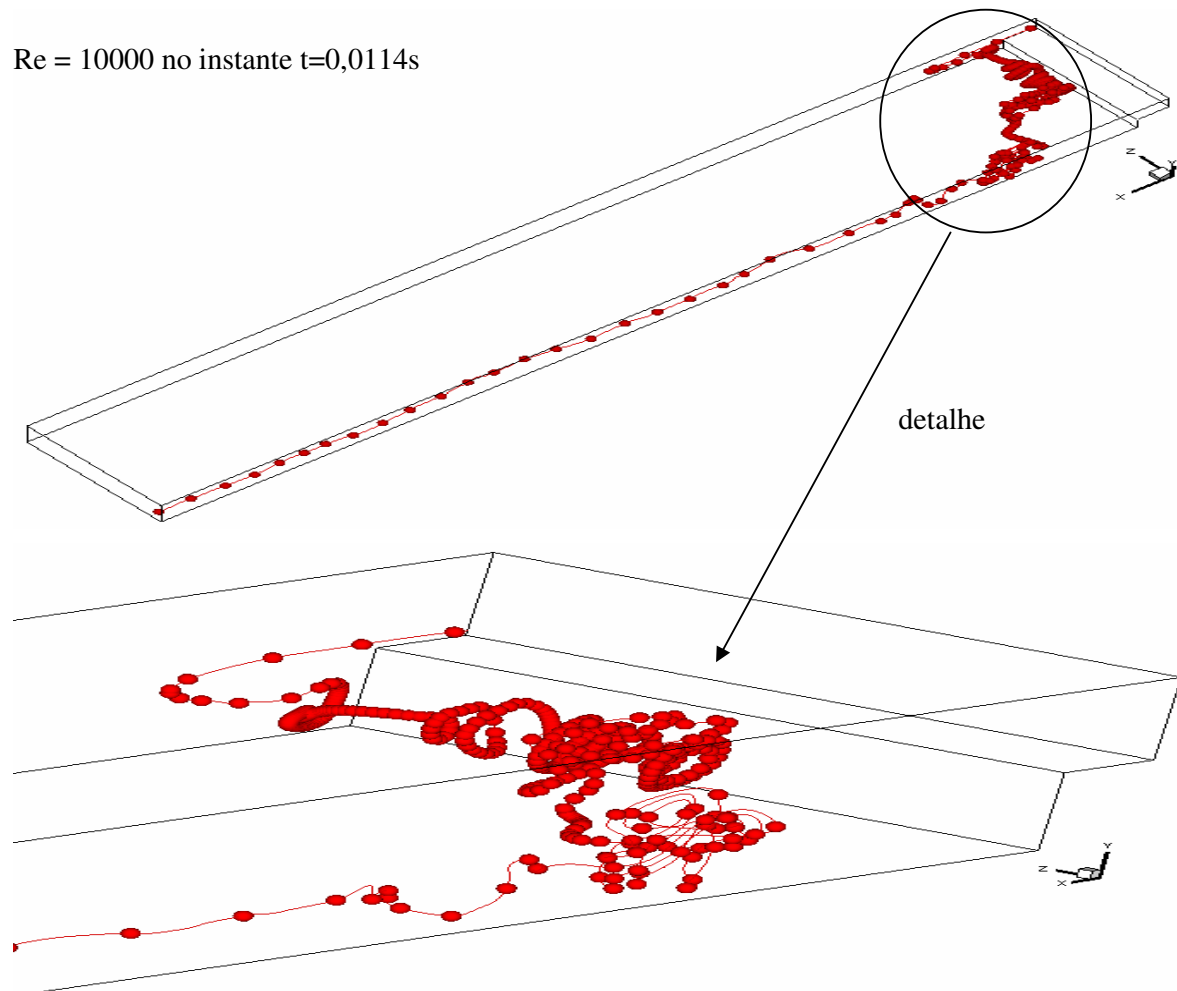
O movimento Lagrangeano de partículas posicionadas próximas ao plano da parede é observado na figura 4.19.

Williams, P.T., Baker, A.J., 1997, observam que esta representação gráfica revela um retrato fascinante de estruturas de escoamento tridimensionais muito complexas e mostra o efeito de parede sobre o movimento do fluido. As partículas têm movimento tridimensional segundo uma espiral irregular e em direção à face de simetria. Esse movimento é produzido pela presença da parede e gera a tridimensionalidade do escoamento, sendo, como se observa, mais forte e complexo em  $Re = 10000$ .

Re = 5100 no instante t=2,121s



Re = 10000 no instante t=0,0114s

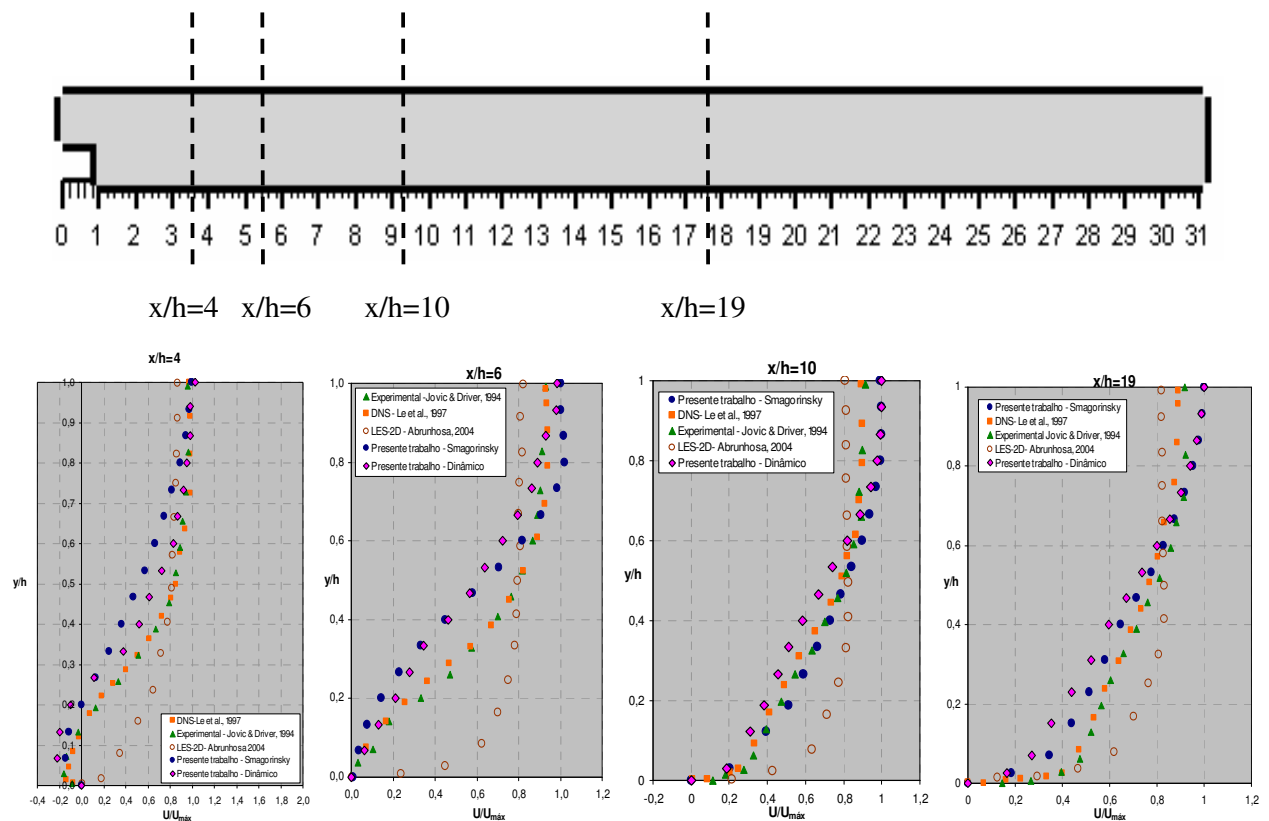


**Figura 4.19** – Movimento Lagrangeano de partículas para Re = 5100 e Re = 10000.

Os perfis médios, de velocidade axial  $u$ , resultantes das simulações com  $Re = 5100$  são apresentados na figura 4.20. Foram avaliadas quatro regiões de interesse, em  $x/h = 4$ ,  $x/h = 6$ ,  $x/h = 10$  e  $x/h = 19$ , considerando a coordenada  $x$  iniciando no degrau. Essas regiões estão em posições, respectivamente, antes do recolamento, sobre o recolamento, depois do recolamento e afastada do recolamento (ver figura 4.20).

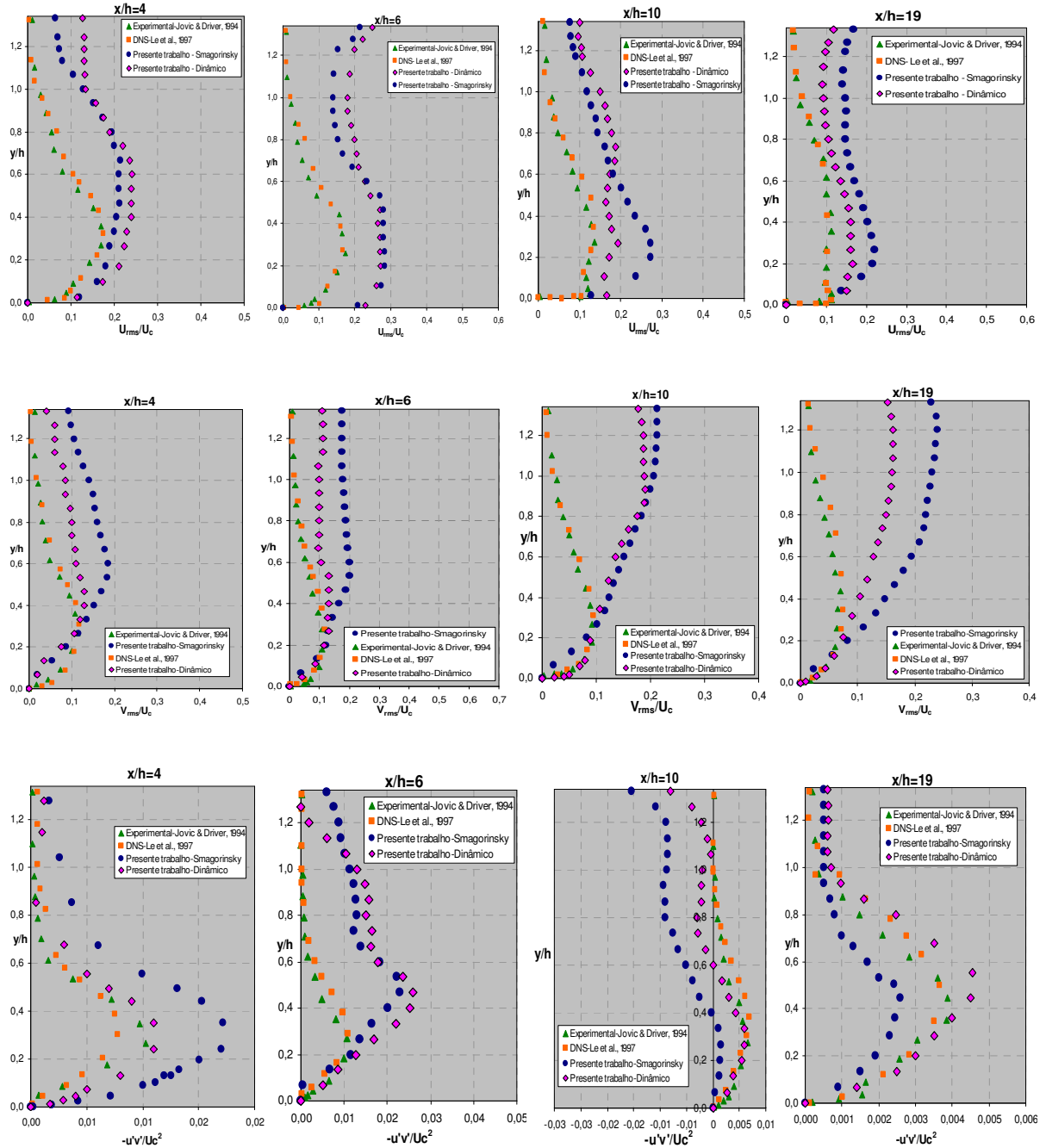
É importante observar que Le et al., 1997 e Jovic & Driver, 1994, trabalharam com um degrau de dimensões diferentes das deste trabalho (altura de entrada  $5H$  e altura do degrau  $H$ ), mas estes foram os únicos dados encontrados na literatura com a publicação desses perfis. Para uma melhor concordância entre os dados o ideal seria construir um degrau idêntico ao que esses autores fizeram, mas devido ao grande tempo de processamento requerido no presente trabalho optou-se por fazer a comparação com os dados desses autores fazendo essa ressalva.

Da análise da figura 4.20, nas diversas posições, verifica-se que, de um modo geral, e também junto à parede ( $y/h < 0,2$ ), os modelos reproduziram bem o comportamento da simulação direta e dos dados experimentais.



**Figura 4.20** – Secções de levantamento do perfil de velocidade média. Comparação com os dados de: DNS- Le et al., 1997; Experimental – Jovic & Driver, 1994; LES-2D – Abrunhosa, 2004.

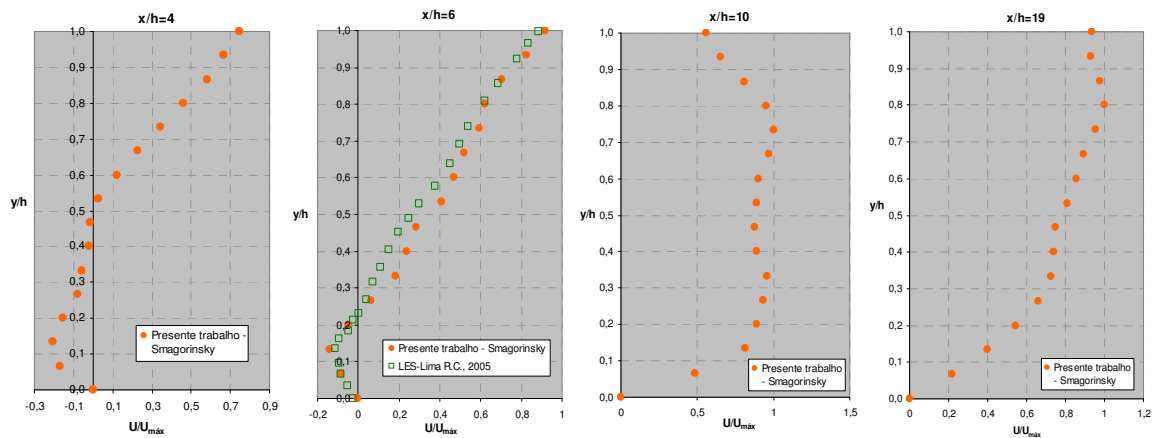
Os perfis de intensidade de turbulência longitudinais e verticais ( $\sqrt{u'^2}, \sqrt{v'^2}$ ) e o perfil de tensão cisalhante turbulenta ( $-\overline{u'v'}$ ) resultantes das simulações com  $Re = 5100$  são apresentados na figura 4.21.



**Figura 4.21** – Perfis de intensidade de turbulência e tensão cisalhante turbulenta. Comparação com os dados de: DNS- Le et al., 1997; Experimental – Jovic & Driver, 1994.

Da figura 4.21 observa-se que os dois modelos predizem maiores perfis de intensidade de turbulência  $U_{rms}$  do que a simulação direta e os dados experimentais. Em  $x/h = 6$  os modelos reproduzem qualitativamente os perfis da simulação direta e dos dados experimentais. Para a intensidade de turbulência  $V_{rms}$  nota-se que para  $y/h > 0,2$  os modelos predizem maiores perfis, já para  $y/h < 0,2$  os dois modelos concordam bem com a simulação direta e com os dados experimentais, sendo que o modelo Dinâmico apresentou melhores resultados do que o modelo de Smagorinsky. Os perfis de tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{u'v'})$ , de um modo geral, foram bem reproduzidos qualitativamente pelos dois modelos, com exceção de  $x/h = 6$ . Mais uma vez observa-se o melhor desempenho do modelo Dinâmico em relação aos dados da simulação direta e dados experimentais.

Os perfis médios, de velocidade axial  $u$ , resultantes das simulações com  $Re = 10000$  são apresentados na figura 4.22.

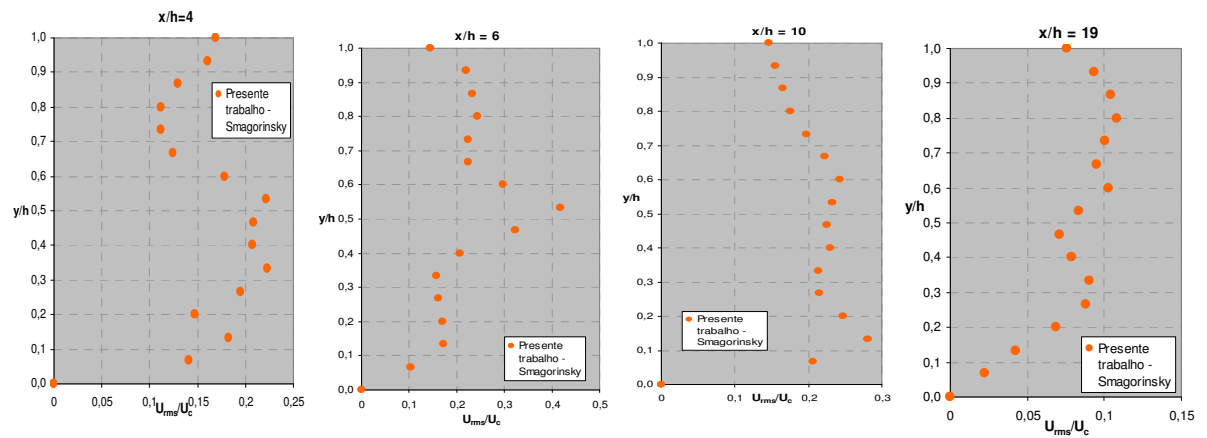


**Figura 4.22** – Perfis de velocidade média  $u$ .

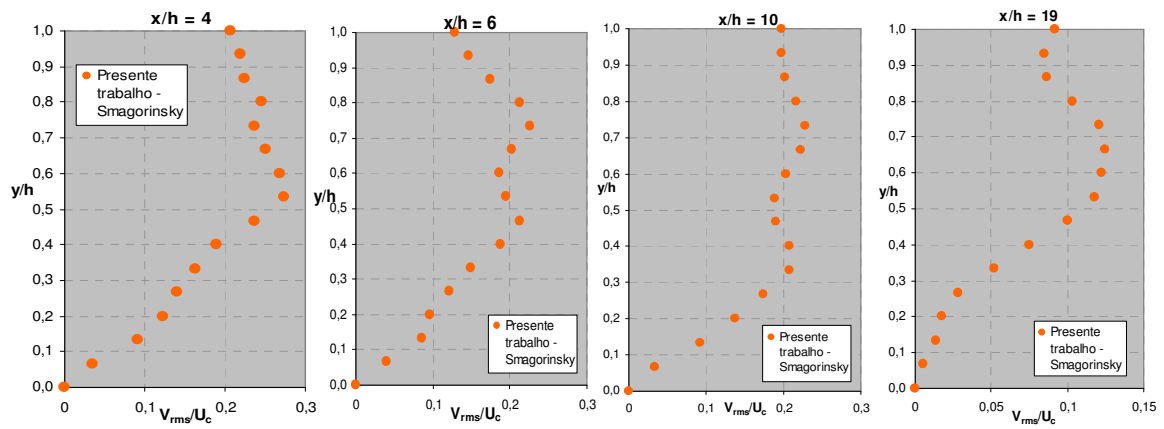
Em  $x/h = 6$ , comparação com os dados de LES – Lima R. C., 2005.

Os perfis de intensidade de turbulência longitudinais e verticais  $(\sqrt{u'^2}, \sqrt{v'^2})$  e o perfil de tensão cisalhante turbulenta  $(\overline{u'v'})$  resultantes das simulações com  $Re = 10000$  são apresentados na figura 4.23.

a)



b)



c)

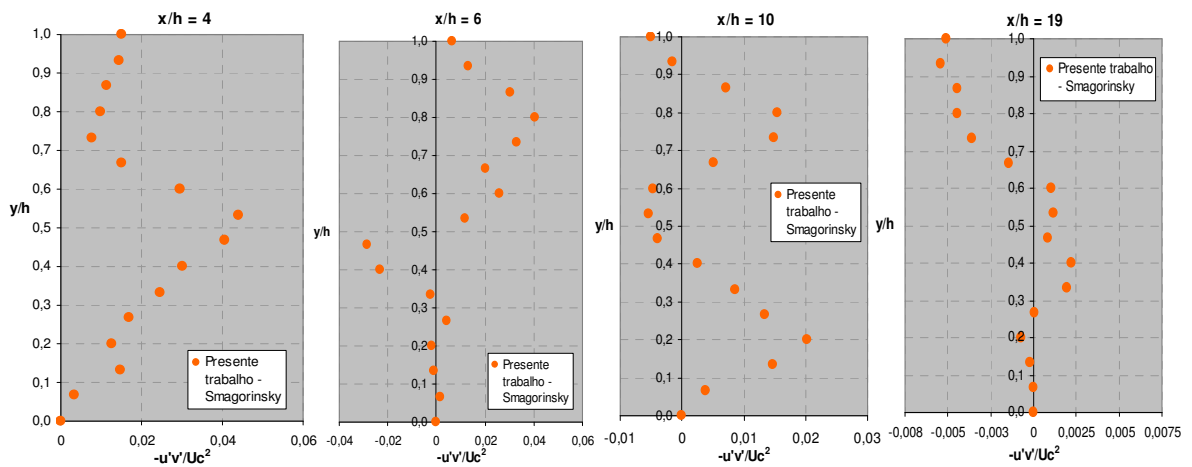


Figura 4.23 – Perfis de intensidade de turbulência e tensão cisalhante turbulenta.

$$a) \frac{U_{rms}}{U_c}; \quad b) \frac{V_{rms}}{U_c}; \quad c) \frac{-\overline{u'v'}}{U_c^2}$$

Na figura 4.22, o perfil em  $x/h = 6$ , foi comparado ao de Lima R.C., 2005. A autora fez simulações em LES com Transferência de Calor e Massa por um Método de Elementos Finitos de Subdomínio com secções de levantamento de perfil em  $x/h = 0$ ,  $x/h = 6$ ,  $x/h = 12$  e  $x/h = 21$  e com as medidas do degrau em  $2h$  para altura de entrada e  $h$  para altura do degrau. Portanto, na única comparação possível (apenas para  $x/h=6$ ), os resultados se apresentaram em boa concordância com os de Lima R.C., 2005, fazendo-se a ressalva de que com este número de Reynolds é o único trabalho encontrado na literatura com a publicação desses perfis médios.



## 5. CONCLUSÕES

Os objetivos do presente trabalho eram: analisar escoamentos de fluidos viscosos, incompressíveis e isotérmicos partindo de um código computacional tridimensional apresentado por Petry, 2002; verificar o comportamento dos Modelos Submalha em problemas de simulação de escoamentos tridimensionais tomados como padrões para validação de modelos numéricos, tais como canal e canal com degrau; estudar e aplicar a simulação de grandes escalas no âmbito do método de elementos finitos.

Os modelos submalha escolhidos foram o modelo clássico de Smagorinsky e o modelo Dinâmico de viscosidade turbulenta, inicialmente proposto por Germano et al., 1991, em que para a segunda filtragem, do modelo Dinâmico, foi empregada a filtragem por elementos finitos independentes de Petry, 2002.

O esquema de Taylor–Galerkin foi usado, na integração das equações governantes, para a discretização no tempo e no espaço. O elemento finito de discretização do domínio computacional foi o hexaédrico linear de oito nós e a hipótese de quase-incompressibilidade foi assumida com o objetivo de aproximar mais o modelo da realidade física, onde velocidades de propagação do som infinitas não são encontradas.

Para a análise do comportamento dos modelos submalha de Smagorinsky e Dinâmico, foram estudados os escoamentos turbulentos em um canal e em um canal com degrau.

O escoamento em canal foi escolhido devido à grande quantidade de dados experimentais, computacionais e analíticos que são encontrados na literatura e também devido à simplicidade na geometria para um escoamento com separação e recolamento.

Os resultados das simulações de escoamento em canal apresentaram-se em boa concordância com as referências numéricas e experimentais consultadas. O modelo Dinâmico apresentou melhor desempenho do que o modelo de Smagorinsky e foi confirmado que o modelo de Smagorinsky superestima a tensão de Reynolds ( $\overline{u'v'}$ ) na região da parede.

Nos resultados dos espectros para as velocidades  $u$  e  $v$ , com os modelos de Smagorinsky e Dinâmico, observa-se que as magnitudes de frequência são menores com o modelo Dinâmico e que não existe isotropia no escoamento em canal, pois os espectros de  $u$  e  $v$  mostram-se bastante distintos, o que caracteriza o fenômeno turbulento como altamente anisotrópico.

Os resultados das simulações de escoamentos sobre o degrau para diferentes números de Reynolds também apresentaram-se compatíveis com as referências numéricas e experimentais consultadas.

O modelo Dinâmico teve bom desempenho no escoamento sobre o degrau mas apresentou grande instabilidade numérica e dificuldade na convergência da simulação com  $Re = 5100$ . A análise qualitativa, com este número de Reynolds, mostrou melhores resultados para o modelo de Smagorinsky, porém a análise dos perfis de velocidade média, de intensidades de turbulência e tensão cisalhante turbulenta, mostrou que o modelo Dinâmico teve melhor desempenho, principalmente junto à parede inferior do canal com degrau.

Na observação do movimento Lagrangeano de partículas posicionadas próximas ao plano da parede do degrau, confirmou-se a tridimensionalidade da turbulência, bem como, os comprimentos de recolamento obtidos com as simulações em degrau, com os dois modelos, foram coerentes com os dados numéricos e experimentais consultados.

Os seguintes temas são dados como sugestões de próximos trabalhos: simulação de casos com maior complexidade geométrica com malhas mais complexas e maiores níveis de refinamento, acoplamento de um gerador de malhas no código utilizado para refinamento da malha em tempo de processamento e finalmente a seqüência deste trabalho, no curso de doutorado, que será a implementação de um novo modelo submalha de turbulência.

A grande redução no passo de tempo de integração à medida que o número de Reynolds aumentava acarretou em grandes tempos de processamento e inviabilizou a construção de uma malha mais refinada para o canal e para o canal com degrau, que traria melhorias na análise desses escoamentos.

Em síntese, a principal contribuição deste trabalho é a de destacar que um modelo de turbulência, além de ser numericamente eficaz, deve descrever a realidade física dos fenômenos envolvidos, o que ficou comprovado, principalmente, com os bons resultados obtidos nas simulações com o canal.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abba, A., Cercignami, C., Valdetaro, L., 2003. "Analysis of subgrid scale models". **J. Comp. Math. Appl.** 46, 521–535.
- Abrunhosa, J.D.M., 2003. "**Simulação de escoamento turbulento complexo com modelagem clássica e de grandes escalas**". Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Abrunhosa, J.D.M. e Nieckele, A.O., 2005 . "Simulação de Grandes Escalas de Escoamento Turbulento de Baixo Reynolds em Duto de Seção Quadrada". In: **CILAMCE 26st Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Guarapari. ABMEC.
- Antonia, R.A., Teitel, M., Kim, J., and Browse, L. W. B., 1992. "Low-Reynolds-number effects in a fully developed turbulent channel flow", **J. Fluid mech.**, vol. 236, pp. 579-605;
- Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B., 1983. "Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow", **Journal of Fluid Mechanics**, v. 127, pp. 473-496.
- Azevedo, R. L. 1999. "**Análise de Problemas de Interação Fluido-Estrutura usando o Método de Elementos Finitos com um Acoplamento Monolítico**". Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Bardina, J., 1989. "Toward a General Turbulence Model", **AIAA 20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference**, p 1-10, Buffalo, NY.
- Bardina, J. , Ferziger, J., H., and Reynolds, W., C., 1980, "Improved subgrid models for large eddy simulation", **American Institute of Aeronautics and Astronautics, Fluid and Plasma Dynamics Conference**, 13th, Snowmass, Colo, AIAA paper 80-1357;

- Boussinesq, J., 1877. "Essai sur la Théorie des Aux Courantes", **Mem. Présentés Acad. Sci.**, v. 23, p. 46.
- Breuer, M., Rodi, W., 1994. "Large Eddy Simulation of Turbulent Flow through a Straight Square Duct and 180° Bend", **Direct and Large Eddy Simulation I**, p.273-285, P.R. Voke et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Burbridge, H. P., 1999. "**O esquema explícito de Taylor-Galerkin na simulação numérica de escoamentos compressíveis tridimensionais utilizando elementos finitos hexaédricos de oito nós**". Tese de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Chorin, A.J., 1967. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems". **J. Comput. Phys.** 2,12-26.
- Chou, P.Y., 1945. "On the Velocity Correlations and the Solution of the Equations of Turbulent Fluctuation", **Quart. Appl. Math.**, v. 3, p. 38.
- Clark, R.A.; Ferziger, J.H.; Reynolds, W.C., 1979. "Evaluation of Sub-Grid Scale Turbulence Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow", **Journal of Fluid Mechanics**, V 91, n1, p 1-16.
- Dean, R.B., 1978. "Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow", **Journal of Fluids Eng. Trans. ASME**, v. 100, pp. 215-223.
- Deardorff, J., W., 1970. "A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers". **J. Fluid Mech.**, vol. 41, 453-480
- Donea, J, 1984. "A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problems", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v 20, pp 101-119.
- Findikakis, A.N. and Street, R.L., 1982. "Mathematical Description of Turbulent Flows", **Journal of Hydraulics Division, ASCE**, V108, N<sup>o</sup>.HY8, paper 17265, p887-903.

- Fortuna, A. O., 2002. “**Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações**”. Editora da Universidade de São Paulo – Edusp, São Paulo-SP.
- Fox, R.W. e McDonald, A.T., 2001. “**Introdução à Mecânica dos Fluidos**”, LTC Editora, Rio de Janeiro.
- Franca, L., Frey, S. L., 1992. “Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations”. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 99, pp. 209-233.
- Friedrich, R. & Arnal, M., 1990. “Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass-Filtered Navier-Stokes equations”. **J. Wind Engng Indust. Aerodyn**, 35, 101-128.
- Gavrillakis, S., 1992, “Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct”, **J. Fluid Mech.**, vol. 244, pp. 101-129.
- Germano, M. Piomelli, U., Moin, P. Cabot, W.H., 1991. “A dynamic sub-grid-scale eddy viscosity model”, **Physics of Fluids**, A3 (7), 1760-1765.
- Ghosal, S., 1996. “An analysis of numerical errors in large eddy simulations of turbulence”, **Journal of Computational Physics**, 125, pp. 187-206;
- Ghosal, S., and MOIN, P., 1995. “The basic equations for the large eddy simulations of turbulent flows in complex geometry”. **Journal of Computational Physics**, 118, pp. 24-37;
- Ghosal S, Lund TS, Moin P, Akselvoll K., 1995. “A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows”. **Journal of Fluid Mechanics**, 286:229.
- González, L.A.S., 1993. “**Análise de Escoamentos de Fluidos Quase-incompressíveis e de Vibrações Induzidas em Objetos Imersos**”, Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS Brasil.

- Gresho, P. M. ; Chan, S. T. ; Lee, R. L., Upson G. D., 1984. "A Modified Finite Element Method for Solving the Time Dependent, Incompressible Navier - Stokes Equations". Part I : Theory. **Int.. J. for Num. Meth. in Fluids**, V. 4, pp 557-598.
- Härtel, C., and Kleiser, L., 1998, "Analysis and modeling of subgrid-scale motions in near-wall turbulence", **J Fluid Mech.**, vol. 356, pp. 327-352.
- Hinze, J.O., 1975. "**Turbulence**", McGraw-Hill, New York.
- Horiuti K., 1997. "A new dynamic two-parameter mixed model for large-eddy simulation". **Physics of Fluids**, 9, 3443.
- Hughes, T. J. R., 1987. "**The Finite Element Method**", Prentice-Hall, New Jersey.
- Hughes, T.J.R., Oberai, A.A., Mazzei, L., 2001. "Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flows by the Variational Multiscale Method", **Physics of Fluids**, v. 13, n. 6, pp. 1784-1799.
- Jovic, S., and Driver, D., 1994. "Backward-facing step measurement at low Reynolds number". **NASA Tech. Mem. 108870**.
- Júnior, J.A.A.O., 2006. "**Desenvolvimento de um sistema de dinâmica de fluido computacional empregando o método dos elementos finitos e técnicas de alto desempenho**". Tese de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Kawahara, M., Hirano, H.,1983. "A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme". **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, V.3, pp.137-163.
- Kim, J., Kline, S. J., Johnston, J. P., 1978. "Investigation of Separation and Reattachment of a Turbulent Shear Layer: Flow over a Backward-Facing Step". **Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University**, Rept. MD-37.

- Kim, J., Kline, S.J., and, Johnston, J. P., 1980. "Investigation of a reattaching shear layer: flow over a backward facing step", **ASME J. Fluids Eng.**, Vol. 102, pp. 302-308.
- Kim, J., Moin, P., and Moser, R., 1987. "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", **J. Fluid Mech.**, vol. 177, pp. 133-166.
- Kolmogorov, A.N., 1942. "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid", **Akad. Nauk. USSR, Ser. Phys.**, v. 6, pp. 56-58.
- Krajnovic, S. and Davidson, L., 2001. "A Mixed One-Equation Subgrid Model for Large-Eddy Simulation", **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Vol. 23, No. 4, pp. 413-425.
- Kravchenko, A., G., and Moin, P., 1997. "On the effects of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows", **Journal of Computational physics**, 131, pp. 310-322.
- Launder, B.E. e Spalding, D.B., 1972. "**Lectures in Mathematical Models of Turbulence**", Academic Press, Londres.
- Launder, B.E. e Spalding, D.B., 1974. "The Numerical Computation of Turbulent Flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.3, p.269-289.
- Le, H., Moin, P., and Kim, J., 1997. "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward facing step", **J. Fluid Mech.**, vol. 330, pp.349-374.
- Leonard, A., 1974. "Energy Cascade in Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows", **Advances in Geophysics**, 18A, p.237-248.
- Lesieur, M., and Métais, O., 1996. "New trends in large eddy simulations of turbulence", **Annual Rev. Fluid Mech.**, 28, pp. 45-82.
- Lesieur, M., 1997. "**Turbulence in Fluids**", Third Edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- Leveque E., Toschi F., Shao L. and Bertoglio J.P., 2007. "Shear-Improved Smagorinsky Model for Large-Eddy Simulation of Wall-Bounded Turbulent Flows", **Journal Fluid Mechanics** v.570 , 491.
- Lilly, D.K., 1992. "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method", **Physics of Fluids**, A4 (3), 633-635.
- Lima, R.C., 2005. "**Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio**". Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
- Löhner, R., 2001. "**Applied computational fluid dynamics techniques – An introduction based on finite element methods**". School of Computational Sciences, George Mason University Fairfax, Virgínia, USA, 1 p.
- Markatos, N.C., 1986. "The Mathematical Modelling of Turbulent Flows", **Applied Math. Modelling**, v 10, p 190- 220.
- Marsden, A., L., Vasilyev, O., V., and Moin, P., 2002. "Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes", **Journal of Computational Physics**, 175, pp. 584-603.
- Meneveau, C., and Katz, J., 2000. "Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation", **Annual Rev. Fluid Mech.**, 32, pp. 1-32.
- Meneveau, C., Lund, T.; Cabot, W. H., 1996. "A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence". **Journal Fluid Mechanics**, vol.319, p.353-385.
- Meyers J, Sagaut P., 2006. "On the model coefficients for the standard and the variational multi-scale Smagorinsky model" , **Journal of Fluid Mechanics**, v.569, 287-319
- Moin, P., 2002. "Advances in large eddy simulation methodology for complex flows", **International Journal Heat and Fluid Flow** 23, pp. 710-720.



- Möller, S. V., 2003 . “Experimentação em Turbulência”. In: Aristeu da Silveira Neto; Sérgio Said Mansur. (Org.). **Turbulência**. Rio de Janeiro: ABCM, , v. 2, p. 207-243.
- Möller, S. V.; Silvestrini, J. H., 2004. “Turbulência: fundamentos”, In: Sergio Viçosa Möller; Jorge Hugo Silvestrini. (Org.). **Turbulência**. Rio de Janeiro: ABCM, v. 4, p. 1-32.
- Murakami,S., 1998. “Overview of turbulence models applied in CWE-1997”, **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, vol.74-76, p.1-24, Elsevier Science Publishers.
- Nakayama A., Vengadesan, S. N., 2002. “On the influence of numerical schemes and subgrid-stress models on large eddy simulation of turbulent flow past a square cylinder”. **Int. J. Numer. Methods Fluids** 38:227–253.
- Nishino, K., Kasagi, N., 1989. “Turbulence statistics measurement in a two-dimensional channel flow using a three-dimensional particle tracking velocimeter”, in: **Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows, Stanford University**, August 21-23.
- Orszag, S., A., and Patterson, G., S., 1972. “Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence”, **Physics Fluids Letter** 28, pp. 76-79.
- Oshima, M., Kobayashi, T., Taniguchi, N., Tsubokura, M., 1996. “Development of Filtering Operation for Dynamic SGS Model Using Finite Element Method”. **The Second ERCOFTAC Workshop on Direct and Large Eddy Simulation**. Septembre 16-19, Grenoble, França.
- Padilla, E. L. M. ; Silveira Neto, A., 2003. “Influência de diferentes tipos de filtros para modelagem dinâmica em Simulação de Grandes Escalas”. In: **XXXIV Inberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE**, Ouro Preto. UFOP, v. 1. p. 1-10.

- Petry, A.P., 2002. “**Análise Numérica de Escoamentos Turbulentos Tridimensionais Empregando o Método de Elementos Finitos e Simulação de Grandes Escalas**”, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PROMEC), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.
- Piomelli, U., 1999. “Large-Eddy Simulation: Achievements and Challenges”, **Progress in Aerospace Sciences**, vol. 35, pp. 335-362.
- Piomelli, U.; Liu, J., 1995. “Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model”. **Phys. Fluids** 7 (4) 839-848.
- Popiolek, T. L., Awruch, A.M. e Teixeira, P.R.F., 2006. “Finite element analysis of laminar and turbulent flows using LES and sub-grid scale models”, **Applied Mathematical Modelling**, v. 30, pp 177-199.
- Prandtl, L., 1945. “Uber ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz”, **Nacr. Akad. Wiss. Gottingen, Math-Phys. Kl.**, pp. 6-19.
- Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. “**The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**”, CRC Press.
- Rodi, W., 1980. “**Turbulence Model and their Application in Hidraulics - A State of Art Review**” - Institute für Hydromechanik and Sonderforschungsbereich 80, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Federal Republic of Germany.
- Rodi, W., Ferziger, J, Breuer, M, and Pourquié, M., 1997, “Status of large eddy simulation: results of a workshop”, **Journal of Fluids Engineering**, vol. 119, pp. 248-262.
- Rotta, J., C., 1951. “Statistics theoric nichthomogener turbulenz”, **Z. Physics**, vol. 129, pp. 547.
- Sagaut, P., Troff, B., Lê, T.H., Loc, T.P., 1994. “Two-dimensional simulations with subgrid-scale models for separated flow”, **Direct and Large-Eddy Simulation 1**, P. Voke and L. Kleiser and J-P Chollet eds., Kluwer Academic Publishers, pp. 109-121.

- Salveti MV, Banerjee S., 1995. "A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulation". **Physics and Fluids**, 7:2831.
- Sampaio, L. E. B. ; Nieckele, A. O., 2006. "Large Eddy Simulations of the Long Recirculation Bubbles Formed in Thin Flat Plates at Shallow Incidence". In: **Escola de Primavera de Transição e Turbulência**, 2006, Rio de Janeiro. ABCM.
- Schlichting, H., 1968. "**Boundary Layer Theory**", McGraw-Hill, New York.
- Silveira Neto, A., 2002. "Fundamentos da turbulência nos fluidos", In: UFSC. (Org.). **Anais da III Escola de Primavera Transição e Turbulência**. 1 ed. Florianópolis: UFSC, v. 1, p. 1-52.
- Silveira Neto, A., Grand, D., Métais, O. e Lesieur, M., 1993. "A Numerical Investigation of the Coherent Vortices in Turbulence Behind a Backward-Facing Step", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 256, pp. 1-25.
- Silvestrini, J., H., 2000. "Simulação numérica direta e de grandes escalas de escoamentos transicionais e turbulentos", **Segunda escola de turbulência**, Uberlândia, MG, Brasil, pp. 148-219.
- Smagorinsky, J., 1963. "General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment", **Monthly Weather Reviews**, v. 91, pp. 99-164.
- Souza, R. M., 2003. "O Método de Elementos Finitos aplicado ao Problema de Condução de Calor", **Universidade Federal do Pará**.
- Stull, R. B., 1988. "**An Introduction to Boundary Layer Meteorology**". The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- Tejada-Martínez, A. E., 2002. "**Dynamic subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of turbulent flows with a stabilized finite element method**". *PhD Thesis*, Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, 158 p.

- Tejada-Martínez A.E. and Jansen, K.E., 2006. "A parameter-free dynamic subgrid-scale model for large-eddy simulation of turbulent flows", **Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.**, 195:2919-2938.
- Tenekes, H. Lumley, J.L., 1972. "**A First Course in Turbulence**", MIT Press.
- Vasilyev, O., V., Lund, T., S., and Moin, P., 1998. "A general class of commutative filters for LES in complex geometries", **Journal Computational Physics** 146, pp. 82-104.
- Vreman B., Geurts B., Kuerten H., 1994. "On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model". **Physics of Fluids**, vol.6, p.4057-4059.
- Wilcox, D. C., 2000. "**Turbulence Modeling for CFD**", DCW Industries, California.
- Williams, P.T., Baker, A.J., 1997. "Numerical Simulations of Laminar Flow over a 3D Backward-Facing Step", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.24, pp. 1159-1183.
- Yu Guo, Chun-Xiao Xu, Guixiang Cui, Zhaoshun Zhang and Liang Shao, 2007. "Large eddy simulation of scalar turbulence using a new subgrid eddy diffusivity model", **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Volume 28, Issue 2, Pages 268-274.
- Zang, Y., Street, R. L., Koseff, J. R., 1993. "A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and its Application to Turbulent Recirculating Flows". **Physics of Fluids**, A, v. 5, n. 12, pp. 3186-3196.