

115f3

DIMENSIONAMENTO DE PILARES  
ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO.

JOSÉ MILTON DE ARAÚJO

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

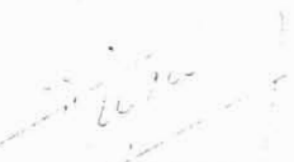
Porto Alegre  
Novembro de 1984

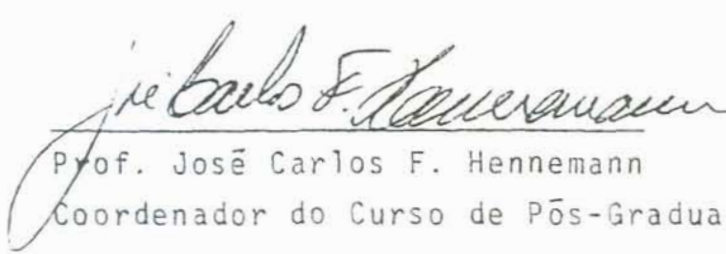
17-17  
1984 07 18 13.45 2.40  
1984 12

ENG  
1981/11871-5 31 043.016 00  
1988/07018

ESCOLA DE ENGENHARIA BIBLIOTECA		LIVRO
N.º CHAMADA 5 (24.074.6.04 40 043) 123 a		
N.º REG. 17817	DATA 18/07/85	ORIGEM D
FOR. Pg-EC		
FUNDO	DATA 13/06/1985	PREÇO R\$ 25.000
Obs.		

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Pablo Gaston Bignón  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. José Carlos F. Hennemann  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil

A meus pais e minha irmã.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Pablo Gastón Bignon pela orientação deste trabalho.

À colega Maria de Lourdes Silva Viana pela grande colaboração prestada.

Ao Professor Nelton Fernantes Bonilha pelas sugestões recebidas.

Aos coordenadores do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, José Serafim Gomes Franco e José Carlos Ferraz Hennemann pelo apoio recebido.

À Carmen Luiza Z. Rodrigues pela confecção dos originais desta dissertação.

À Juliana Zart Bonilha pela preparação das referências bibliográficas.

A todos que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO.....	9
2.1. Considerações gerais.....	9
2.2. Hipóteses fundamentais.....	10
2.3. Diagramas tensão-deformação dos materiais.....	11
2.3.1. Concreto à compressão.....	11
2.3.2. Diagramas tensão-deformação do aço.....	13
2.4. Estado limite último.....	15
2.4.1. Ruína por ruptura de uma seção.....	15
2.4.2. Instabilidade do equilíbrio.....	17
2.5. Relações momento fletor-esforço normal-curvatura.....	18
2.5.1. Solicitações internas e externas.....	18
2.5.2. Algoritmos para resolver o sistema de equações não-lineares.....	23
2.5.2.1. Algoritmo com rigidez constante.....	23
2.5.2.2. Algoritmo com rigidez secante.....	30
2.5.2.3. Algoritmo com rigidez tangente.....	31
2.5.3. Ruptura da seção.....	33
2.6. Cálculo de deslocamentos em pilares de concreto armado.....	35
2.7. Fluência segundo o CEB/78.....	40
2.7.1. Hipóteses e definições básicas.....	40
2.7.2. Coeficiente de fluência.....	41
2.7.3. Idade corrigida.....	43
2.8. Retração segundo o CEB/78.....	47
2.9. Implementação computacional para as deformações diferidas do concreto.....	49

2.9.1. Inclusão da fluência.....	49
2.9.2. Inclusão da retração.....	51
2.9.3. História de carga.....	52
2.9.4. Integração no tempo.....	53
2.10. Pilar com engastamento elástico simétrico.....	57
3. DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO..	61
3.1. O problema do dimensionamento.....	61
3.2. Prescrições da NB-1/78.....	63
3.3. Processos simplificados de dimensionamento de pilares.....	73
3.3.1. Processo simplificado da NB-1.....	73
3.3.2. Processo simplificado do CEB.....	76
3.3.3. Processo simplificado da ACI.....	77
3.3.4. Processo simplificado da DIN.....	79
3.4. Sistematização computacional para o dimensionamento..	80
3.4.1. Relação carregamento de ruína - armadura.....	80
3.4.2. Dimensionamento baseado no desequilíbrio.....	84
3.4.3. Processo alternativo de dimensionamento.....	87
3.5. Dimensionamento para cargas de longa duração.....	90
3.5.1. Coeficiente de fluência do concreto.....	90
3.5.2. Retração do concreto.....	93
3.5.3. História de carga.....	94
3.6. Inclusão simplificada da fluência do concreto.....	95
3.7. Críticas à norma brasileira.....	95
4. ANÁLISE NUMÉRICA.....	98
4.1. Considerações gerais.....	98
4.2. Exemplos experimentais.....	98
4.2.1. Dimensionamento para cargas de curta duração.....	98
4.2.2. Dimensionamento para cargas de longa duração.....	101
4.2.3. Resposta de um pilar sob carga de curta duração....	103
4.2.4. Resposta de um pilar sob carga de longa duração....	103
4.3. Pilar com carregamento excêntrico assimétrico.....	105

4.4. Processos simplificados de dimensionamento.....	108
4.5. Inclusão simplificada da fluência do concreto.....	111
4.6. Importância das deformações diferidas do concreto....	112
4.7. Coeficiente de segurança.....	113
4.8. Engastamento elástico.....	114
4.8.1. Influência do grau de engastamento.....	114
4.8.2. Análise clássica.....	116
5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	119
APÊNDICE - RELAÇÕES MOMENTO FLETOR-ESFORÇO NORMAL-CURVATURA PARA SEÇÕES RETANGULARES.....	121
BIBLIOGRAFIA.....	134
ANEXO - TABELAS PARA DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO.....	139



## LISTA DE SÍMBOLOS

### 1. Letras Romanas Maiúsculas

- $A_c$  - área da seção transversal de concreto
- $A_s$  - área da seção transversal da armadura
- $E_c$  - módulo de deformação longitudinal do concreto, tangente na origem
- $E_s$  - módulo de elasticidade do aço
- $F_d$  - força normal de cálculo
- $G$  - rigidez de mola
- $I_c$  - momento de inércia centroidal da seção de concreto
- $I_s$  - momento de inércia da armadura, em relação ao centro de gravidade da seção de concreto
- $K$  - rigidez à flexão
- $M$  - momento fletor
- $M_d$  - momento fletor de cálculo
- $M_u$  - momento fletor último
- $N$  - esforço normal
- $N_d$  - esforço normal de cálculo
- $N_u$  - esforço normal último
- $P$  - força axial
- $P_{cr}$  - carga crítica
- $P_e$  - carga de Euler
- $P_u$  - carga de ruína
- $R_{cc}$  - resultante de compressão no concreto
- $R_s$  - resultante de tensões no aço

T - temperatura

W - deslocamento transversal do pilar

## 2. Letras Romanas Minúsculas

a - parâmetro geométrico da seção transversal

b - largura da seção transversal

c - distância do centro de gravidade da seção de concreto às bordas

d - altura útil da seção transversal

d' - cobrimento da armadura

e - excentricidade da força normal

$f_c$  - resistência à compressão do concreto

$f_{cd}$  - resistência de cálculo do concreto à compressão

$f_{ck}$  - resistência característica do concreto à compressão

$f_y$  - resistência à tração do aço

$f_{yd}$  - resistência de cálculo do aço à tração

$f_{yk}$  - resistência característica do aço à tração

h - altura total da seção transversal da peça

$h_0$  - espessura fictícia

l - comprimento do pilar

n' - número de camadas de armadura na seção transversal

q - carga transversal ao eixo do pilar

r - índice de rigidez

t - tempo; idade do concreto

u - perímetro da seção transversal em contato com a atmosfera

x - distância da linha neutra à borda mais comprimida da seção

z - distância da resultante de compressão no concreto à borda menos comprimida da seção

### 3. Letras Gregas Maiúsculas

$\Delta$  - variação

$\phi$  - função de fluência; coeficiente de redução de capacidade

### 4. Letras Gregas Minúsculas

$\alpha$  - coeficiente dependente do tipo de cimento

$\beta_d$  - desenvolvimento da deformação elástica diferida

$\beta_f$  - desenvolvimento da plasticidade diferida

$\beta_0$  - coeficiente de rigidez da mola

$\beta_s$  - desenvolvimento da retração ao longo do tempo

$\gamma$  - coeficiente de segurança

$\delta$  - fator de amplificação de momentos; desequilíbrio relativo

$\delta P$  - incremento de carga

$\epsilon$  - deformação específica

$\epsilon_c$  - deformação no concreto

$\epsilon_{cc}$  - deformação de fluência do concreto

$\epsilon_{cs}$  - deformação de retração do concreto

$\epsilon_{yd}$  - deformação de escoamento de cálculo do aço

$\epsilon_{yk}$  - deformação de escoamento característica do aço

$\epsilon_s$  - deformação no aço

$\epsilon_{s0}$  - coeficiente básico de retração

$\theta$  - rotação

$\lambda$  - índice de esbeltez; coeficiente

$\mu$  - momento fletor reduzido

$\nu$  - esforço normal reduzido

$\rho$  - taxa geométrica de armadura

$\sigma_c$  - tensão no concreto

$\sigma_s$  - tensão no aço

- $\phi$  - coeficiente de fluência
- $\phi_d$  - coeficiente de elasticidade diferida
- $\phi_f$  - coeficiente de plasticidade diferida
- $\chi$  - curvatura
- $\chi_u$  - curvatura última
- $\omega$  - taxa mecânica de armadura

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, sob cargas de curta e longa duração, baseado numa análise realística das deformações do mesmo. Apresenta-se três algoritmos numéricos para a obtenção das relações momento fletor-esforço normal-curvatura de uma seção arbitrária de concreto armado, sob flexo-compressão normal. Inclue-se as deformações específicas de fluência e retração do concreto na análise, através de uma alteração nas referidas relações.

Apresenta-se alguns critérios de normas, relativos ao dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado e uma comparação dos mesmos, entre si e com o algoritmo numérico desenvolvido. Considerações da NB-1/78 relativas ao projeto de pilares são analisadas, verificando o nível da precisão obtida. Um procedimento simplificado para a inclusão da fluência do concreto no dimensionamento, proposto pelo CEB, é testado e uma solução para pilares de concreto armado com engastamento elástico simétrico é apresentada, para verificar o nível do erro cometido ao se estender o conceito de comprimento de flambagem a pilares de concreto armado. Uma série de exemplos experimentais são apresentados, onde a solução numérica para o dimensionamento tem sua precisão verificada.

Diversas tabelas foram desenvolvidas para o dimensionamento de pilares esbeltos com seção transversal retangular e armadura simétrica. Todo o estudo é restrito ao caso de flexo-compressão normal.

## SUMMARY

The object of this thesis is to dimension slender RC columns under short-term and sustained loads, based on a realistic analysis of the strains present. Three numerical algorithms are presented to obtain the bending moment-normal force-curvature relations for an arbitrary RC section under normal bending-compression. Specific strains due to creep and shrinkage of the concrete are included in the analysis through an alteration in the above relations.

Criteria for dimensioning slender RC columns are presented together with a comparison between themselves and with the numerical algorithm developed. The code of practice NB-1/78 relative to the design of columns is analysed, verifying the degree of precision. A simplified procedure for the inclusion of creep of concrete in the dimensioning, proposed by the CEB, is tested and a solution for RC columns with a symmetric elastic restraint is presented to verify the error committed on extending the concept of buckling length to RC columns. A series of experimental examples are presented where the numerical solution for the dimensions is verified.

Several tables were developed for dimensioning slender columns with rectangular section and symmetric reinforcement. The study is restricted to the case of normal bending - compression.

## 1. INTRODUÇÃO

O primeiro estudo dos efeitos não-lineares geométricos na estabilidade de barras esbeltas carregadas axialmente, foi realizado por Leonard Euler<sup>(38)</sup> em meados do século dezoito. Analisando uma barra constituída por um material elástico linear, submetida a uma carga axial de compressão, Euler concluiu que, para valores da carga abaixo de um certo limite, o equilíbrio da barra era estável e, além desse limite o equilíbrio era instável.

Admitindo a hipótese de pequenos deslocamentos e, como consequência, adotando a expressão simplificada para a curvatura, o equilíbrio de uma barra elástica linear submetida a carga axial constante e carregamento transversal genérico, fica garantido através de uma equação diferencial linear não-homogênea de quarta ordem<sup>(1,8,39)</sup>. Se a rigidez à flexão da barra é constante, a solução da equação diferencial para uma dada distribuição da carga transversal, pode ser facilmente encontrada.

Devido aos deslocamentos transversais, o momento fletor solicitante numa seção genérica da barra deformada fica aumentado em relação ao momento na barra indeformada. Conclui-se então que os esforços solicitantes ficam modificados em função da alteração na geometria da barra. Isto gera um tipo de não-linearidade que é denominada NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA, e a teoria que inclui tais efeitos é comumente mencionada como TEORIA DE SEGUNDA ORDEM, sendo a teoria que estuda o equilíbrio no sistema indeformado, TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM.

Na teoria de segunda ordem não se aplica o PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO<sup>(40)</sup>, ou seja, não se pode somar os deslocamentos devidos a carregamentos diferentes, para se obter os deslocamentos devidos a um carregamento total igual à soma dos anteriores.

Analisando uma barra com carregamento transversal genérico, observa-se que para valores crescentes da carga axial

de compressão, existe sempre uma configuração deformada de equilíbrio estável, até que atingido um certo valor crítico da carga axial, os deslocamentos transversais tornam-se infinitamente grandes e o equilíbrio instável. O fenômeno é conhecido de forma genérica por INSTABILIDADE DO EQUILÍBRIO.

Admitindo agora que a barra sô esteja carregada com a carga axial, a equação diferencial de equilíbrio reduz-se a uma equação diferencial homogênea. Para valores da carga axial de compressão abaixo do valor crítico, a barra inicialmente reta, permanece nessa configuração e o equilíbrio é estável. Para valores da carga maiores que a carga crítica existem duas configurações possíveis de equilíbrio; uma reta instável e outra deformada estável. O fenômeno é conhecido por FLAMBAGEM, sendo o mesmo um caso particular de instabilidade do equilíbrio para barras submetidas apenas a cargas axiais de compressão. A carga para a qual ocorre a instabilidade do equilíbrio e também a flambagem é, para uma barra bi-rotulada, conhecida como carga de Euler.

Se a barra for constituída por um material não-linear, elástico ou não, a equação diferencial de equilíbrio deduzida para o caso linear, permanece válida, desde que a rigidez à flexão possa ser corretamente avaliada. O concreto armado é um material nessas condições, isto é, não existe linearidade entre tensões e deformações, uma vez que o aço e o concreto apresentam comportamentos não-lineares. A esse tipo de não-linearidade denomina-se NÃO-LINEARIDADE FÍSICA.

A grande dificuldade em se resolver a equação diferencial para o concreto armado, consiste na determinação da rigidez à flexão. Diversos parâmetros, como o comportamento mecânico dos materiais, as propriedades reológicas do concreto e o grau de sollicitação, influenciam na rigidez e não se consegue correlacioná-la de forma analítica com os mesmos.

O diagrama tensão-deformação do concreto obtido experimentalmente, depende de vários fatores<sup>(33)</sup>, entre os principais, a resistência do concreto, sua idade quando do carregamento, modo de colocação da carga, duração do carregamento, forma da seção transversal e posição da linha neutra.



A grande variabilidade na forma desse diagrama, impõe a necessidade da adoção de curvas simplificadas capazes de representar, ao menos de forma aproximada, o comportamento do concreto. Diversos diagramas tensão-deformação para o concreto têm sido sugeridos em normas e em trabalhos de pesquisa. Assim é que a Norma Brasileira para Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado - NB-1/78<sup>(4)</sup> adota o diagrama parábola-retângulo e a norma alemã DIN 1045<sup>(22)</sup> admite, além desse, um diagrama bilinear. Desayi e Krishnan<sup>(26)</sup> propõem um diagrama com módulo de deformação na origem pré-fixado, enquanto a curva de Saenz<sup>(26)</sup> permite a livre escolha do valor desse módulo, ambos os diagramas incluindo a descarga que ocorre no concreto após se ter atingido a máxima tensão.

Para o aço, em geral, admite-se para carregamento monótono crescente, um comportamento elastoplástico perfeito, não existindo grandes variações desse modelo.

O concreto contido entre as fissuras da zona tracionada de um pilar de concreto armado, contribui para o aumento da rigidez à flexão. Um procedimento teórico-empírico para incluir essa contribuição é sugerido por Rao e Subrahmanyam<sup>(29)</sup>.

A redução da resistência do concreto sob cargas permanentemente aplicadas, EFEITO RUSCH<sup>(30,31)</sup>, a fluência e a retração<sup>(26,27,37)</sup>, alteram a rigidez da barra e, conseqüentemente, a análise para cargas de longa duração. A rigidez depende ainda da quantidade de armação e do próprio grau de sollicitação. Para um dado valor do esforço normal, a rigidez é tanto menor quanto maior for o momento fletor.

Uma outra dificuldade que surge, é que a equação diferencial anteriormente citada, é deduzida admitindo-se um material ideal que tem um comportamento elástico linear perfeito, isto é, não existe limitação para as deformações do material. O concreto e o aço apresentam, ao contrário, um valor limite para a deformação, a partir do qual ocorre a ruptura. Assim, pode acontecer que um pilar de concreto armado atinja a ruína por ruptura, para uma carga menor do que aquela que corresponderia teoricamente à instabilidade. A princípio não se pode dizer se a ruína ocorrerá por ruptura ou por instabilidade, uma

vez que vários parâmetros influenciam no tipo de ruína<sup>(22)</sup>, como as características mecânicas e reológicas dos materiais, a quantidade de armação, o carregamento, a esbeltez, a geometria do pilar e as condições de contorno. Mantidos constantes todos os demais parâmetros, pode-se dizer, em geral, que um pilar esbelto entra em ruína por instabilidade e um pilar curto por ruptura. Entretanto, devido ao grande número de fatores que influenciam a análise, não se tem um limite de esbeltez fixado capaz de definir o tipo de ruína.

Vale ainda ressaltar que o fenômeno de flambagem, como conceituado anteriormente, não ocorre em um pilar de concreto armado, uma vez que mesmo que a carga axial seja perfeitamente centrada, há necessidade da consideração de uma excentricidade acidental<sup>(4)</sup>, para levar em conta a incerteza da localização da força normal e o possível desvio do eixo da peça durante a construção, em relação à posição prevista no projeto. Assim, o que ocorre é a instabilidade do equilíbrio, sendo usual encontrar-se nos textos sobre concreto armado a denominação flambagem, apesar de conceitualmente errada.

Tendo em vista todos os fatores envolvidos no comportamento do concreto armado, uma solução direta da equação diferencial de equilíbrio torna-se inviável. Devido a tais dificuldades, durante muito tempo o problema da verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado, foi resolvido através de fórmulas empíricas, sem uma análise teórica racional dos efeitos não-lineares.

Com o advento dos computadores digitais e do método dos elementos finitos<sup>(42)</sup>, um grande avanço se deu na análise não-linear. Diversos algoritmos numéricos têm sido estudados; iterativos, incrementais ou a combinação de ambos. Processos iterativos e incrementais são aplicados igualmente para os dois tipos de não-linearidades, embora quando as equações constitutivas são dadas em forma incremental, estes últimos tornam-se indispensáveis<sup>(7)</sup>.

Em se tratando de pilares hiperestáticos, o método dos elementos finitos constitui um instrumento extremamente útil na análise. Um estudo de pilares de concreto armado com seção transversal e distribuição da armadura arbitrárias, variã

3

veis ao longo do eixo e, com condições de contorno genéricas, é apresentado por Campos F.<sup>(6)</sup>. A solução é obtida através do método dos elementos finitos, empregando um algoritmo que usa a matriz de rigidez tangente e outro que usa a matriz de rigidez secante. Bignon<sup>(5)</sup> apresenta uma solução numérica para pórticos planos de concreto armado, que pode também ser usada para pilares esbeltos.

Para pilares isostáticos, a solução torna-se menos complexa, uma vez que os esforços solicitantes em cada seção transversal são conhecidos para uma certa configuração deformada do mesmo. Um processo iterativo de aproximações sucessivas pode ser utilizado para verificar a estabilidade<sup>(19,36)</sup> e, associando-se ao mesmo um procedimento incremental, pode-se determinar a curva carga-deslocamento para o pilar. Neste procedimento a análise é feita tomando-se várias seções ao longo do eixo do pilar e, em cada iteração, calculando-se a curvatura das seções para valores conhecidos do momento fletor e do esforço normal. Uma dupla integração das curvaturas, resulta nos deslocamentos transversais do eixo do pilar, alterando os momentos fletores, e o processo é repetido até a convergência dos deslocamentos. A instabilidade do equilíbrio fica detectada quando iterações sucessivas mostrarem uma divergência nos deslocamentos. A grande vantagem do algoritmo é que o carregamento pode ser genérico e a seção transversal do pilar pode variar de forma qualquer ao longo do seu eixo, inclusive a armadura.

A determinação da curvatura de uma seção de concreto armado na presença de um momento fletor associado a um esforço normal, para a utilização no procedimento de aproximações sucessivas, é realizada iterativamente. Diversos algoritmos têm sido utilizados para encontrar a curvatura da seção que satisfaz o equilíbrio entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes<sup>(13,18,23,25)</sup>. A ruptura da seção fica caracterizada quando, para um dado valor do momento fletor e esforço normal, não se consegue uma distribuição de tensões capaz de garantir o equilíbrio. A inclusão das deformações diferidas do concreto pode ser feita em alternativas diferentes. Vários algoritmos considerando a teoria linear ou não-linear da fluência<sup>(9,12,17,20,24)</sup> têm sido testados com bons resultados.

Enfim, apesar de toda a complexidade do material, com a utilização de processos numéricos consegue-se de forma bastante precisa, analisar um pilar de concreto armado incluindo as duas não-linearidades, a física e a geométrica. A comparação dos resultados obtidos numericamente com dados experimentais disponíveis, mostra ser a análise não-linear o caminho que deve ser seguido no estudo de estruturas de concreto armado.

Por outro lado, apesar de se dispor hoje de processos numéricos de análise relativamente precisos, os métodos utilizados no dimensionamento de pilares de concreto armado não seguem, em geral, a mesma regra. A grande dificuldade em se incluir no dimensionamento as duas não-linearidades, decorre do fato de existirem mais incógnitas que equações disponíveis. No problema de análise, o número de incógnitas é igual ao número de equações disponíveis para garantir o equilíbrio entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. Isto se dá, porque toda a geometria de uma seção genérica do pilar é conhecida "a priori". No problema de dimensionamento surge mais uma incógnita, a armadura necessária para que o equilíbrio seja possível.

Os atuais critérios de dimensionamento exigem que o carregamento de projeto seja um carregamento último para a estrutura, admitindo que os materiais trabalhem com uma resistência minorada com o objetivo de limitar a tensão nos mesmos. Assim sendo, deve-se encontrar uma armadura de tal forma que as cargas de projeto coincidam com o carregamento de ruína.

A maior dificuldade consiste na inclusão da não-linearidade geométrica. A não-linearidade física pode ser, de uma forma razoavelmente precisa, incluída no processo de dimensionamento, desde que a não-linearidade geométrica não esteja presente. Assim é que o dimensionamento de seções de concreto armado submetidas a flexo-compressão já é resolvido há bastante tempo por vários procedimentos<sup>(21,33)</sup>. Dentre os diversos processos para esse dimensionamento, o mais notável é sem dúvida o de Silva Jr.<sup>(35)</sup>, que fez todo o desenvolvimento para seções retangulares e circulares. Modesto dos Santos<sup>(33)</sup> estendeu o estudo a seções de forma qualquer, apresentando inclusive inúmeras tabelas para o dimensionamento.

Entretanto, quando se tenta incluir a não-linearidade

geométrica simultaneamente à física, o problema fica indeterminado, pois não se pode calcular os deslocamentos transversais do eixo do pilar, se não se conhece sua armadura. Assim, surgiram processos simplificados que tentam resolver o problema em duas etapas. Inicialmente elimina-se a não-linearidade física e o problema é resolvido como se o material fosse elástico linear<sup>(34)</sup>. Resultam então os deslocamentos transversais do eixo do pilar que serão considerados como excentricidades adicionais de segunda ordem. Essas excentricidades irão majorar os momentos fletores de primeira ordem devido à presença da carga axial e, com os esforços majorados, faz-se o dimensionamento à flexo-compressão utilizando os diagramas tensão-deformação para os materiais.

Dois grandes problemas surgem nos processos simplificados. O primeiro deles é que para se calcular os deslocamentos transversais do pilar, é necessário conhecer a rigidez à flexão de cada seção ao longo do seu eixo e, se ainda não se conhece a armadura, não é possível determinar tal rigidez. Além disso, a rigidez varia ao longo do eixo do pilar e, no cálculo elástico linear efetuado, é admitido que a mesma é constante. O segundo problema é que quando se transfere a solução para dimensionamento à flexo-compressão, impõe-se sempre a condição de ruína por ruptura, que pode não ser o caso.

Diversos processos simplificados propostos por autores e mesmo em normas, para incluir a não-linearidade geométrica, encontram-se amplamente divulgados na literatura<sup>(14,15,32,41)</sup>.

Neste trabalho apresenta-se uma sistematização para o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, incluindo as duas não-linearidades simultaneamente, além das deformações diferidas do concreto.

O processo iterativo de aproximações sucessivas para a análise de pilares esbeltos de concreto armado, é descrito para uma situação geral de carregamento e geometria do pilar. Três algoritmos são utilizados para a obtenção das relações momento fletor-esforço normal-curvatura de uma seção arbitrária de concreto armado, porém com um eixo de simetria, contido no plano de carga, uma vez que o trabalho é restrito ao caso de flexão normal. Apresenta-se também, a formulação para o cálculo

lo das deformações diferidas do concreto, segundo o CEB/78 e um algoritmo para a inclusão das mesmas na análise.

Faz-se uma análise da variação de parâmetros para determinar a influência que certos fatores têm na armadura. Compara-se ainda, os processos simplificados de dimensionamento de algumas normas, com os resultados obtidos numericamente. Um procedimento aproximado para a inclusão da fluência do concreto é testado, e uma solução simplificada para pilares com engastamento elástico é utilizada para verificar o nível do erro cometido ao se estender o conceito de comprimento de flambagem a pilares de concreto armado. Apresenta-se ainda uma série de resultados experimentais, onde a solução numérica tem sua precisão constatada. Em anexo, encontram-se tabelas para o dimensionamento de pilares com seção transversal retangular.

## 2. ANÁLISE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

### 2.1. Considerações gerais

A análise de pilares esbeltos de concreto armado, com a inclusão das não-linearidades física e geométrica, requer um grande número de cálculos numéricos e só é viável através da utilização de computadores digitais. As propriedades particulares do concreto, como a fissuração, a fluência e a retração, bem como as equações constitutivas para o concreto e o aço, nem sempre tão simples, aumentam a complexidade da análise. O surgimento do tempo como uma nova variável quando se estende a análise a cargas de longa duração e, a própria característica dos processos de análise, iterativos e incrementais, ampliam cada vez mais o trabalho computacional requerido.

Neste trabalho restringe-se o estudo a pilares isostáticos, com seção transversal possuindo um eixo de simetria coincidente com o plano da flexão, ou seja, analisa-se apenas o caso de flexão normal. A seção transversal pode, de maneira geral, variar ao longo do eixo do pilar e o carregamento pode ser qualquer, desde que seja mantida a condição de flexão normal. O carregamento pode variar ao longo do tempo, porém de forma monótona a fim de se garantir a condição de carregamento estático. A não-linearidade física da estrutura é incluída através dos diagramas tensão-deformação não-lineares para o aço e o concreto, e a não-linearidade geométrica através de um processo iterativo de aproximações sucessivas, onde em cada iteração os deslocamentos transversais do eixo do pilar são calculados. As deformações específicas de fluência e retração são calculadas conforme procedimento do CEB/78<sup>(11)</sup>. As deformações por cisalhamento são desprezadas, de modo que a única deformação a se considerar é aquela no sentido longitudinal da peça.

Como o objetivo deste trabalho é o dimensionamento de

pilares, adota-se para os materiais dois diagramas tensão-deformação, um característico e outro de cálculo. Quando se deseja calcular os deslocamentos transversais do eixo do pilar trabalha-se com os diagramas característicos, resultando daí deslocamentos característicos. Para a verificação da ruptura da seção mais solicitada utiliza-se os diagramas de cálculo, que são da mesma forma que os característicos, apenas com as resistências dos materiais reduzidas, ou seja, com as resistências de cálculo. Assim, impõe-se a condição que a máxima tensão nos materiais não seja superior às resistências de cálculo. Já para o cálculo dos deslocamentos, trabalha-se com resistências características e não com resistências de cálculo, pois se assim se fizesse, resultariam deslocamentos majorados e os momentos fletores de segunda ordem ficariam majorados duas vezes, já que as cargas axiais são, como as demais, cargas de projeto.

## 2.2. Hipóteses fundamentais

As principais hipóteses admitidas na análise podem ser resumidas na seguinte forma:

### 1 - Hipótese das seções planas

Admite-se que as seções transversais ao eixo do pilar, inicialmente planas, permanecem planas e normais ao eixo deformado e que essa condição é cumprida até a ruptura, desprezando-se consequentemente as deformações por cisalhamento.

### 2 - Aderência entre o concreto e o aço

Existe aderência perfeita entre o concreto e o aço até as proximidades da ruptura, de forma que as armaduras experimentam as mesmas deformações que o concreto que lhes é adjacente.

### 3 - Contribuição do concreto nos esforços de tração

A colaboração do concreto tracionado na resistência da peça, para cargas de serviço, pode ser de importância significativa. Admite-se porém, que a resistência à tração do concreto é nula e despreza-se também a contribuição do concreto entre fissuras, de forma que todo o esforço de tração é absorvido pelas armaduras. Na situação de ruptura, essa hipótese não traz erros



significativos, conforme comparação com resultados experimentais.

#### 4 - Encurtamentos permitidos ao concreto

Admite-se que a ruptura seja alcançada quando o encurtamento específico máximo em seções parcialmente comprimidas atinja 3,5‰. Em seções totalmente comprimidas, a ruptura fica caracterizada quando a deformação na fibra situada a uma distância de 3/7 da altura total da seção da peça, medida a partir da borda mais comprimida, atinge o valor 2‰.

#### 5 - Alongamento permitido ao aço

O alongamento específico máximo permitido às armaduras de tração é de 10‰, a fim de se prevenir contra deformações plásticas excessivas. Para as armaduras de compressão o encurtamento específico fica limitado ao máximo para o concreto que lhes é adjacente.

#### 6 - Pequenos deslocamentos

Admite-se que os deslocamentos transversais  $W$  do eixo do pilar sejam pequenos em relação ao seu comprimento  $l$  e as cargas são conservativas. Sendo assim, a curvatura média  $\chi$  das seções do pilar pode ser calculada pela expressão aproximada (2.2.1), onde  $x$  é medido ao longo do eixo indeformado, e o esforço normal se mantém praticamente constante, independente das deformações do pilar.

$$\chi = \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \quad (2.2.1)$$

### 2.3. Diagramas tensão-deformação dos materiais

#### 2.3.1. Concreto à compressão

Adota-se para o concreto em compressão o diagrama parábola-retângulo proposto pela NB-1/78<sup>(4)</sup>. Este diagrama é composto de uma parábola do segundo grau que passa pela origem e tem seu vértice no ponto de abscissa 2‰ e de uma reta entre

as deformações 2‰ e 3,5‰, tangente à parábola e paralela ao eixo das abcissas. A ordenada máxima do diagrama é igual a  $0,85f_{ck}$  se se trata do cálculo de deslocamentos do pilar e  $0,85f_{cd}$  se se trata da verificação da ruptura. A equação da parábola é dada por (2.3.1) onde  $f_c$  será igual a  $f_{ck}$  ou  $f_{cd}$  dependendo do objetivo.

$$\sigma_c = 0,85 f_c \left[ 10^3 \varepsilon_c - \frac{10^6}{4} \varepsilon_c^2 \right] \quad (2.3.1)$$

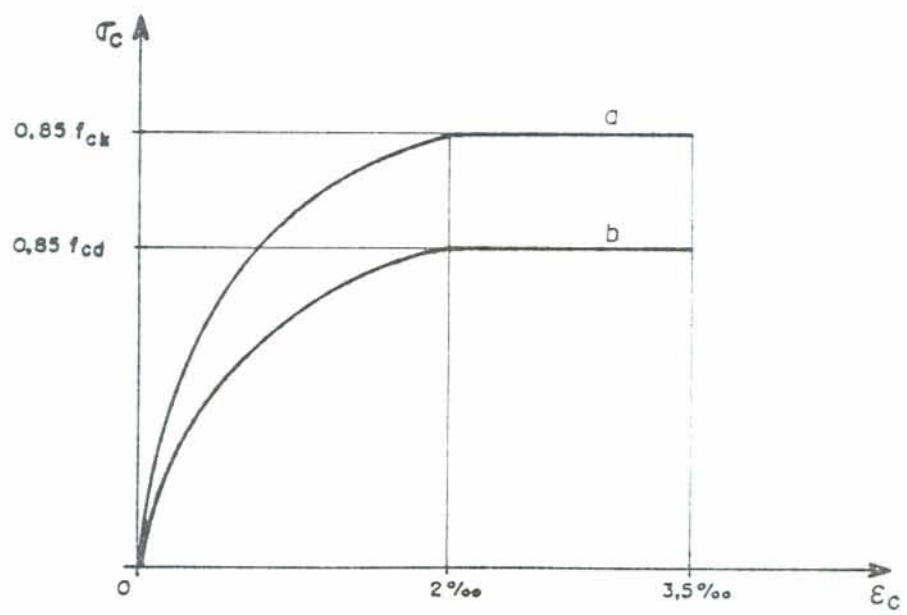


FIGURA 2.3.1 - Diagramas tensão-deformação do concreto à compressão. a) diagrama para o cálculo de deslocamentos; b) diagrama para a verificação da ruptura.

O fator 0,85 representa a redução da resistência do concreto sob cargas de longa duração, Efeito Rüsck<sup>(31)</sup>.

A resistência de cálculo  $f_{cd}$  é obtida da resistência característica  $f_{ck}$  através de

$$f_{cd} = f_{ck} / 1,4 \quad (2.3.2)$$

O módulo de deformação longitudinal do concreto  $\bar{e}$  é dado, em função da resistência média à compressão  $f_{cj}$  na idade  $j$  dias, por

$$E_c = 6600 \sqrt{f_{cj}} \text{ , MPa} \quad (2.3.3)$$

onde

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ , MPa} \quad (2.3.4)$$

### 2.3.2. Diagramas tensão-deformação do aço

O diagrama tensão-deformação para os aços classe A, adotado pela NB-1/78 é o diagrama típico de um material elasto-plástico perfeito, como na figura 2.3.2.

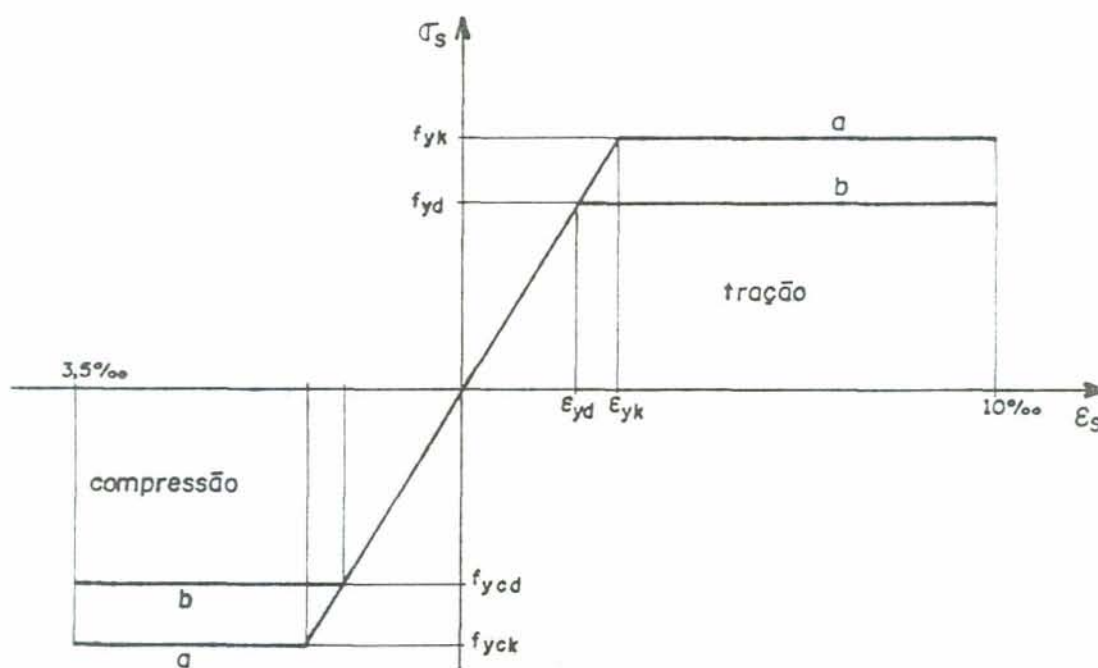


FIGURA 2.3.2 - Diagramas tensão-deformação do aço classe A.  
 a) diagrama para o cálculo de deslocamentos;  
 b) diagrama para a verificação da ruptura.

O alongamento específico máximo permitido  $\bar{\epsilon}$  é de 10‰ para evitar deformações plásticas excessivas, enquanto o encurtamento específico máximo  $\bar{\epsilon}$  é de 3,5‰, por ser este o máximo permitido para o concreto em compressão.

Se o objetivo é calcular os deslocamentos transversais do eixo do pilar, utiliza-se o diagrama a, enquanto para a verificação da ruptura o diagrama usado é o b.

Na ausência de resultados experimentais do aço à compressão, a NB-1 permite que se adote  $f_{yck} = f_{yk}$ .

As resistências de cálculo  $f_{yd}$  e  $f_{ycd}$  são obtidas das resistências características  $f_{yk}$  e  $f_{yck}$  por

$$f_{yd} = f_{yk}/1,15 \quad ; \quad f_{ycd} = f_{yck}/1,15 \quad . \quad (2.3.5)$$

As deformações específicas de escoamento  $\epsilon_{yd}$  e  $\epsilon_{yk}$  são dadas por (2.3.6) onde o módulo de elasticidade do aço é  $E_s = 2,1 \times 10^5$  MPa.

$$\epsilon_{yd} = f_{yd}/E_s \quad ; \quad \epsilon_{yk} = f_{yk}/E_s \quad . \quad (2.3.6)$$

Para os aços classe B, a NB-1 propõe o diagrama da figura 2.3.3, sendo usado o diagrama a para o cálculo de deslocamentos e o b para a verificação da ruptura.

A equação do trecho curvo dos diagramas, no caso de tração, é dada por (2.3.7) onde  $f_y$  será igual a  $f_{yd}$  se se tratar da verificação da ruptura e igual a  $f_{yk}$  para o cálculo dos deslocamentos. Para o caso de compressão a equação é a mesma, apenas devendo-se trabalhar com valores absolutos das tensões, resultando o valor absoluto das deformações.

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \frac{1}{45} \left[ \frac{\sigma_s}{f_y} - 0,7 \right]^2 \quad . \quad (2.3.7)$$

As deformações específicas de escoamento são dadas por (2.3.6) acrescidas do valor 2‰.

As demais observações são idênticas às feitas para o aço classe A.

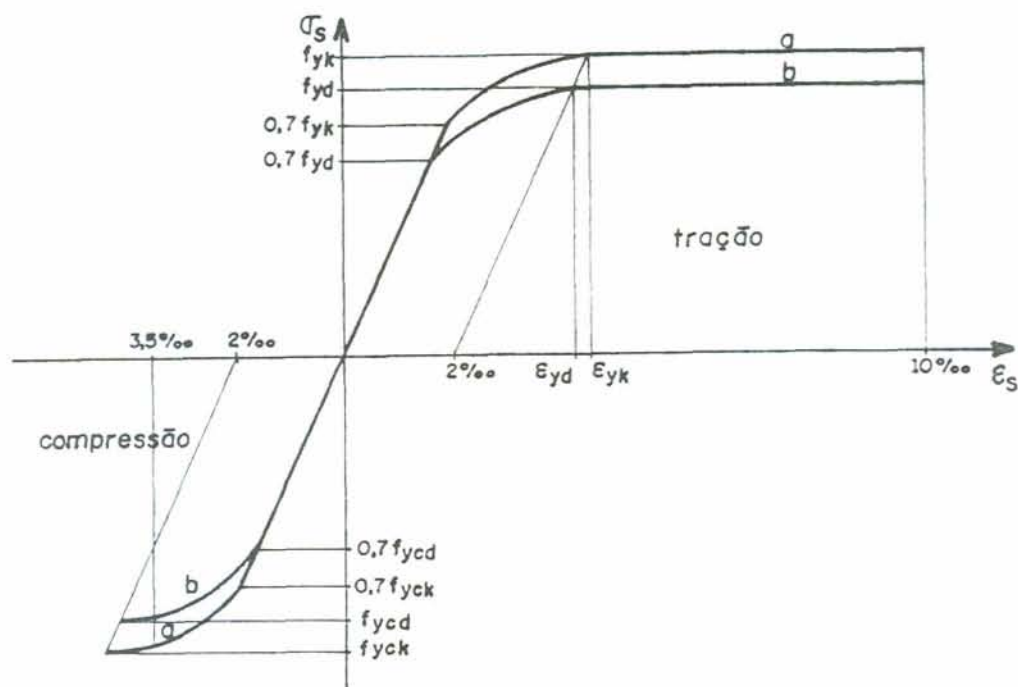


FIGURA 2.3.3 - Diagramas tensão-deformação para o aço classe B.

## 2.4. Estado limite último

Uma estrutura de concreto armado pode atingir a ruína de duas maneiras diferentes, dependendo da geometria e do carregamento aplicado. A ruína pode se dar por esgotamento da capacidade resistente, denominada ruína por ruptura, ou pode se dar por instabilidade do equilíbrio.

### 2.4.1. Ruína por ruptura de uma seção

A ruptura de uma seção transversal ao eixo do pilar é alcançada, quando para um dado par de esforços solicitantes, momento fletor e esforço normal, não se consegue encontrar uma distribuição de tensões capaz de garantir o equilíbrio entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. A ruptura pode ocorrer tanto pelo esmagamento do concreto, como por uma deformação considerada excessiva da armadura. Esse é o tipo de ruína característico de pilares curtos.

A curva relacionando uma carga axial excêntrica  $P$  atuante sobre um pilar curto com o deslocamento transversal  $W$  numa seção ao longo do seu eixo, é mostrada na figura 2.4.1.

A ruptura de uma seção transversal de concreto armado submetida a um momento fletor e um esforço normal, se dá, de acordo com a NB-1, quando a distribuição de deformações na mesma se enquadrar em um dos domínios da figura 2.4.2.

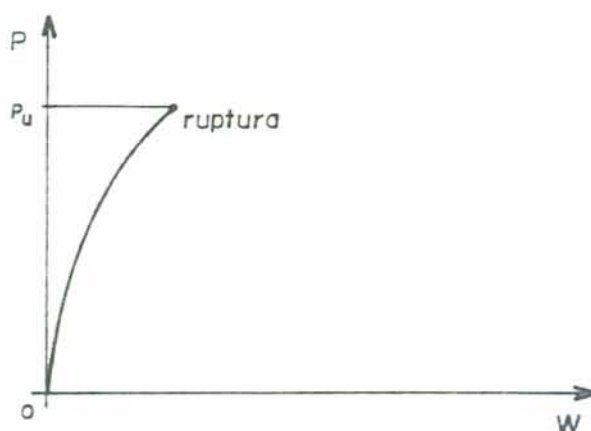


FIGURA 2.4.1 - Curva carga-deslocamento para um pilar curto.

Os domínios são definidos na forma seguinte:

- reta a - tração uniforme;
- domínio 1 - tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2 - flexão simples ou composta, sem ruptura e compressão do concreto;
- domínio 3 - flexão simples ou composta com ruptura e compressão do concreto e com escoamento do aço;
- domínio 4 - flexão simples ou composta com ruptura e compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento;
- domínio 4a - flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5 - compressão não uniforme, sem tração;
- reta b - compressão uniforme.

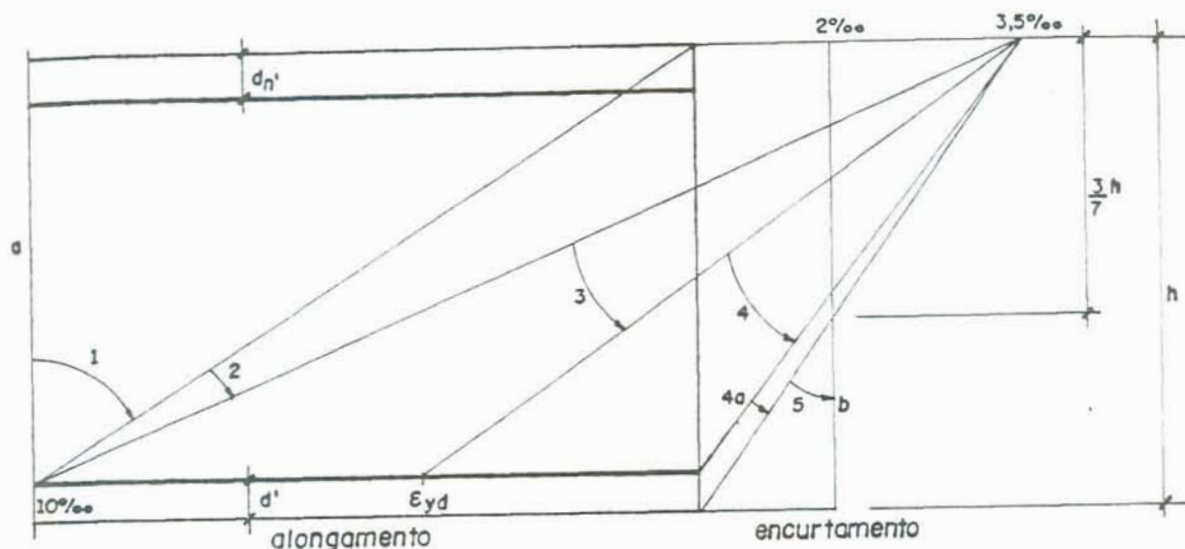


FIGURA 2.4.2 - Domínios de dimensionamento.

#### 2.4.2. Instabilidade do equilíbrio

Este tipo de ruína é característico de pilares esbeltos. Acrescentando carga ao pilar, os deslocamentos transversais do seu eixo crescem até que, atingido um valor crítico da carga, o equilíbrio torna-se instável. Na figura 2.4.3 mostra-se uma curva relacionando a carga axial excêntrica  $P$  com o deslocamento transversal  $W$  em uma seção ao longo do eixo do pilar. Observa-se que atingida a carga crítica, o equilíbrio só é possível se houver uma redução na mesma, o que caracteriza o trecho de equilíbrio instável da curva.

Atinge-se a instabilidade sem haver o esgotamento da capacidade resistente da seção. A seção ainda é capaz de absorver esforços, porém a taxa de crescimento dos esforços resistentes é menor que a taxa de crescimento dos esforços solicitantes. Evidentemente que com o crescimento dos deslocamentos transversais crescem também os momentos fletores de segunda ordem e, após a instabilidade, ocorrerá a ruptura da seção. Porém o estado limite foi alcançado por instabilidade do equilíbrio e não por ruptura.

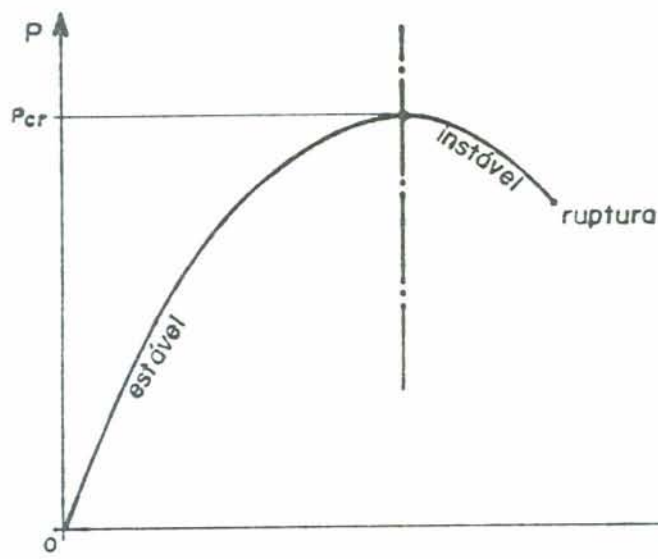


FIGURA 2.4.3 - Estado limite por instabilidade do equilíbrio.

## 2.5. Relações momento fletor-esforço normal-curvatura

### 2.5.1. Solicitações internas e externas

Para o cálculo dos deslocamentos transversais ao eixo do pilar, necessita-se conhecer a curvatura  $\chi$  de uma seção transversal genérica do mesmo, para um dado par de esforço normal  $N_d$  e momento fletor  $M_d$  que solicitam a seção. Para isto necessita-se conhecer as relações momento fletor-esforço normal-curvatura, abreviadamente relações  $M-N-\chi$  para um tipo dado de seção. A geometria da seção, bem como a disposição e quantidade de armadura são conhecidas "a priori".

Deduz-se aqui essas relações para uma seção de forma qualquer, porém apresentando um eixo de simetria coincidente com o plano de atuação do momento fletor, como na figura 2.5.1.

A seção em estudo possui  $n'$  camadas de armadura dispostas simetricamente em relação ao plano de atuação do momento fletor. As camadas são numeradas a partir da camada mais próxima da borda tracionada pela aplicação exclusiva do momento fletor. Na figura 2.5.1,  $n'$  é a camada mais próxima da borda mais encurtada.



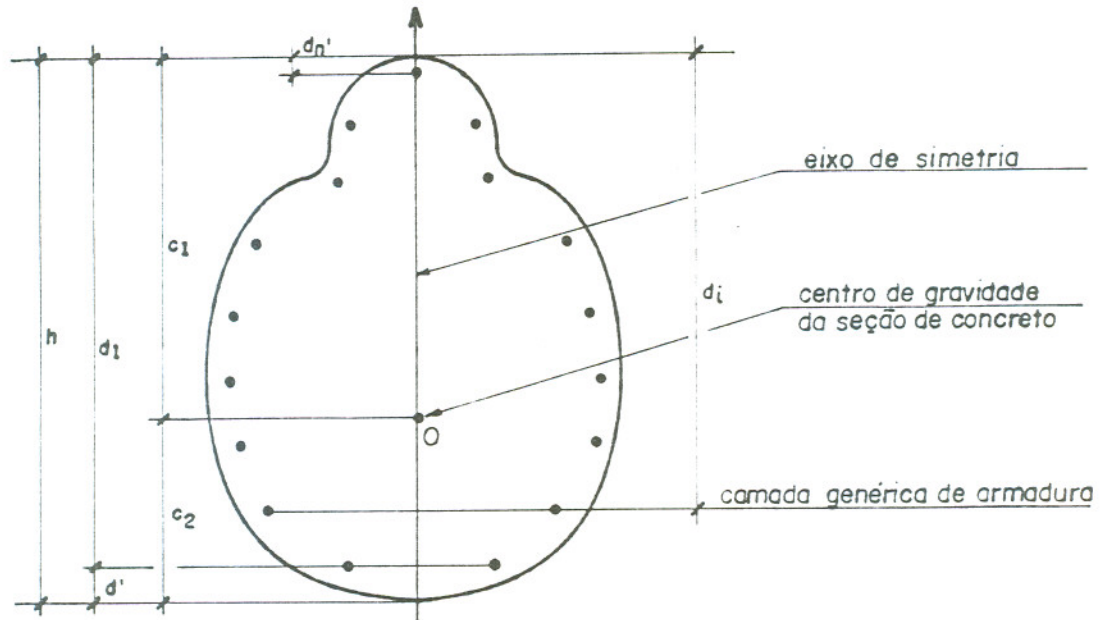


FIGURA 2.5.1 - Seção genérica de concreto armado, com um eixo de simetria.

Com a aplicação do momento fletor  $M_D$  e do esforço normal  $N_D$ , a distribuição de deformações na seção é a linear mostrada na figura 2.5.2, onde  $x$  é a distância da borda mais comprimida à linha neutra. Convencionou-se como sendo positivas as deformações de compressão.

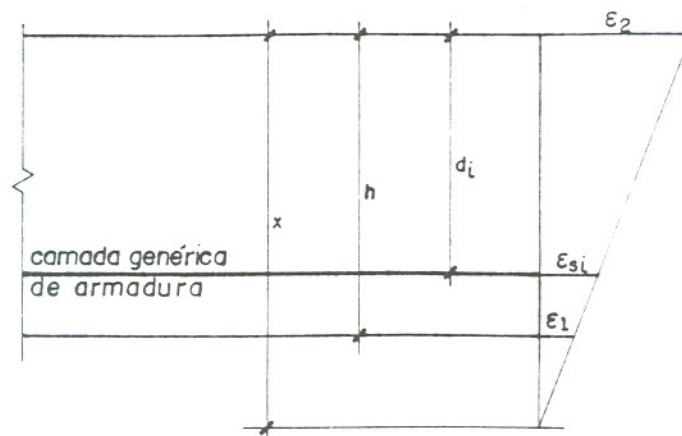


FIGURA 2.5.2 - Distribuição linear de deformações na seção transversal.

A curvatura  $\chi$  da seção  $\bar{e}$  é dada por

$$\chi = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h} \quad (2.5.1)$$

Conhecidas  $\chi$  e  $x$ , as deformações em toda a seção ficam perfeitamente determinadas. Na figura 2.5.3 mostra-se a deformação  $\epsilon$  em uma fibra genérica situada a uma distância  $y$  da linha neutra.

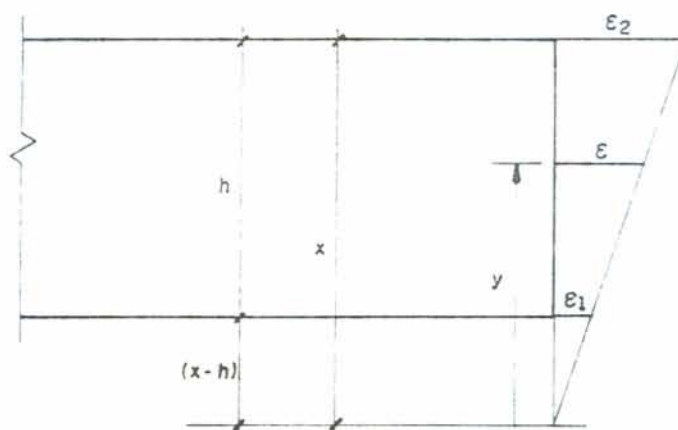


FIGURA 2.5.3 - Deformação em uma fibra genérica da seção.

Pela figura verifica-se que

$$\frac{\epsilon}{y} = \frac{\epsilon_2}{x} = \frac{\epsilon_1}{x-h} \quad (2.5.2)$$

ou

$$\frac{\epsilon}{y} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h} \quad (2.5.3)$$

e introduzindo a definição da curvatura  $\chi$  dada em (2.5.1), resulta finalmente

$$\varepsilon = \chi y \quad . \quad (2.5.4)$$

Observa-se que a deformação dada por (2.5.4) depende de  $\chi$  e  $x$  pois necessita-se conhecer  $x$  para se medir  $y$  a partir da linha neutra.

Para uma camada genérica de armadura, figura 2.5.2, a deformação  $\varepsilon_{si}$  é

$$\varepsilon_{si} = \chi (x - d_i) \quad . \quad (2.5.5)$$

Com as deformações e os diagramas tensão-deformação dos materiais, encontra-se as tensões nas diversas fibras de concreto e nas camadas de armadura da seção. É importante observar que deve-se usar os diagramas tensão-deformação característicos para os materiais, uma vez que a curvatura  $\chi$  será utilizada para o cálculo dos deslocamentos transversais do pilar.

Integrando-se as tensões na seção, obtêm-se as resultantes de tensões no concreto,  $R_{cc}$  e nas diversas camadas de armadura, genericamente  $R_{si}$  para a camada  $i$ . Uma vez que as deformações dependem de  $x$  e  $\chi$ , essas resultantes também são funções de  $x$  e  $\chi$ .

$$R_{cc} = R_{cc} (x, \chi) \quad . \quad (2.5.6)$$

$$R_{si} = A_{si} \sigma_{si} (x, \chi) \quad , \quad (2.5.7)$$

onde

$A_{si}$  - área de aço na camada genérica  $i$ ;

$\sigma_{si}$  - tensão na armadura da camada  $i$ .

Na figura 2.5.4 apresenta-se as resultantes de tensões bem como o momento fletor  $M_d$  e o esforço normal  $N_d$  que atua no centro de gravidade da seção de concreto.

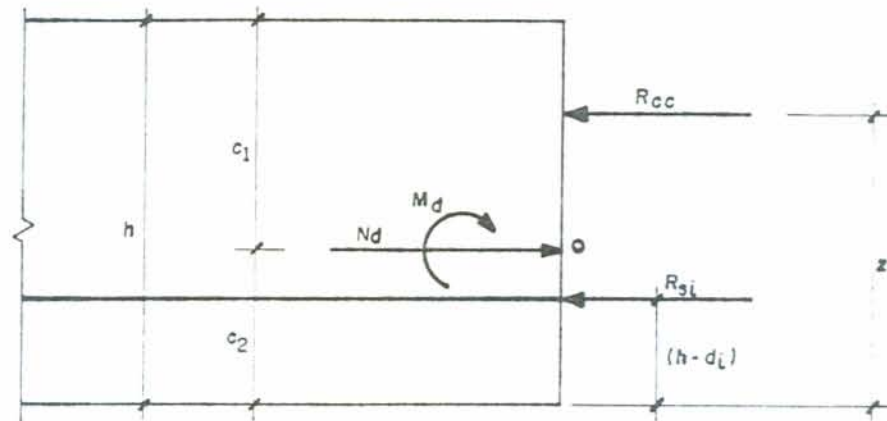


FIGURA 2.5.4 - Resultante de tensões e solicitações externas.

A distância  $z$  da resultante de compressão no concreto à borda menos comprimida da seção, também é função de  $x$  e  $\chi$ , ou seja

$$z = z(x, \chi) \quad . \quad (2.5.8)$$

As deformações da seção, caracterizadas pelas incógnitas  $x$  e  $\chi$ , devem ser tais que haja equilíbrio entre as solicitações e os esforços resistentes.

Aplicando as duas equações de equilíbrio da estática vem

a - soma de forças igual a zero

$$N_d - R_{cc}(x, \chi) - \sum_{i=1}^{n'} A_{si} \sigma_{si}(x, \chi) = 0 \quad , \quad (2.5.9)$$

b - soma de momentos igual a zero

$$M_d = R_{cc}(x, \chi) z(x, \chi) + \sum_{i=1}^{n'} A_{si} (h - d_i) \sigma_{si}(x, \chi) - N_d c_2 \quad . \quad (2.5.10)$$

As equações (2.5.9) e (2.5.10) constituem um siste-

ma de duas equações algébricas não-lineares a duas incógnitas,  $x$  e  $X$ . A solução do sistema é realizada iterativamente, uma vez que não se consegue uma expressão analítica para as incógnitas, devido à complexidade das funções não-lineares.

Para seções usuais como a retangular e a circular, as equações (2.5.9) e (2.5.10) podem ser colocadas em forma adimensional através da definição de momento fletor e esforço normal reduzidos. No apêndice apresenta-se esse desenvolvimento para seções retangulares.

Diversos algoritmos têm sido utilizados para resolver o sistema não-linear. Apresenta-se a seguir três algoritmos capazes de resolver o problema.

### 2.5.2. Algoritmos para resolver o sistema de equações não-lineares

#### 2.5.2.1. Algoritmo com rigidez constante

Para um valor fixado de  $x$ , a equação (2.5.10) relaciona diretamente o momento fletor  $M_d$  com a curvatura  $X$  da seção, na presença de um esforço normal constante  $N_d$ . Essa relação entre momento fletor e curvatura para esforço normal constante, tem a forma apresentada na figura 2.5.5. A relação é não-linear e a ruptura da seção ocorre no ponto  $(X_u, M_u)$  quando é esgotada a capacidade da seção de absorver momento fletor, na presença do esforço normal  $N_d$ .

Os três algoritmos aqui apresentados consistem basicamente no mesmo procedimento de solução, variando apenas o número de iterações necessárias à convergência. Neles necessita-se conhecer um valor pré-estabelecido da curvatura com o qual a equação (2.5.9) fornece a incógnita  $x$  e a equação (2.5.10), uma primeira aproximação do momento fletor. Incrementa-se a curvatura e repete-se o processo até ajustar a equação (2.5.10) dentro de uma ordem de precisão fixada. Com isso impõe-se a condição de esforço normal solicitante igual ao esforço normal resistente por (2.5.9) e, analogamente, para o momento fletor por (2.5.10). A condição de ruptura será verificada na seção seguinte.

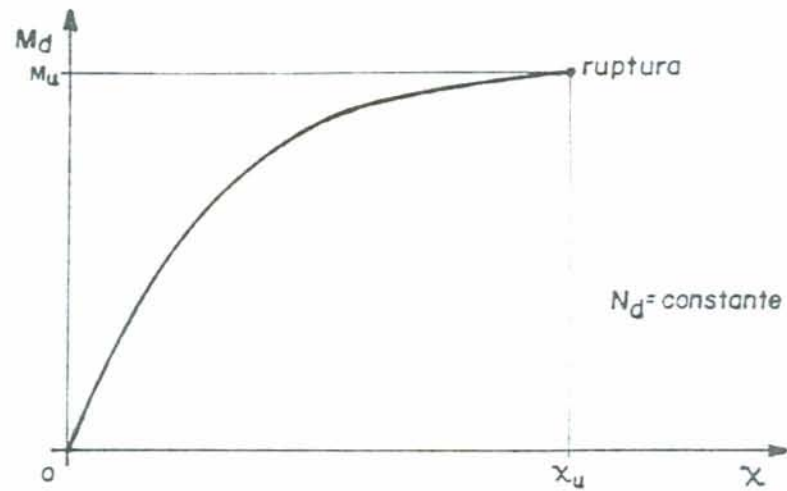


FIGURA 2.5.5 - Relação momento fletor-curvatura para esforço normal constante.

Na figura 2.5.6 apresenta-se a relação momento fletor-curvatura para esforço normal constante  $N_d$ , onde  $M_d$  é o momento fletor solicitante na seção.

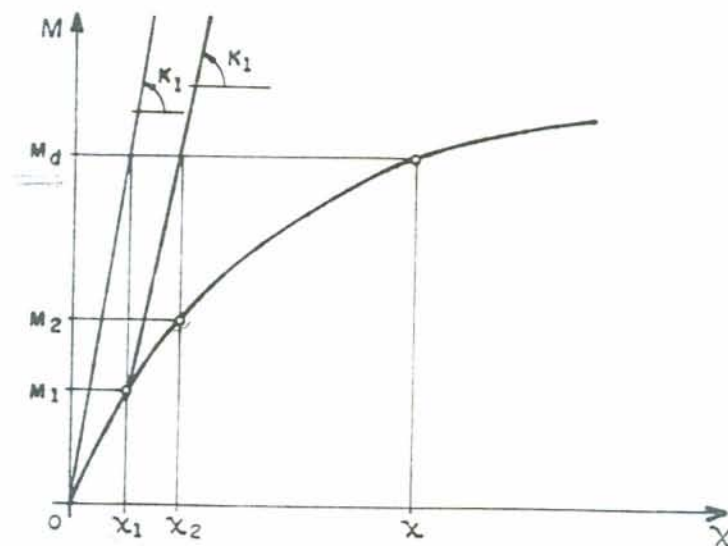


FIGURA 2.5.6 - Algoritmo com rigidez constante.

Inicializa-se o processo com a rigidez à flexão  $K_1$  da seção não fissurada de concreto armado

$$K_1 = E_c I_c + E_s \sum_{i=1}^{n'} I_{si} \quad (2.5.11)$$

onde

- $E_c$  - módulo de deformação longitudinal do concreto, na origem do diagrama tensão-deformação;
- $I_c$  - momento de inércia da seção de concreto em relação ao baricentro da seção homogeneizada;
- $E_s$  - módulo de elasticidade do aço;
- $I_{si}$  - momento de inércia da camada genérica  $i$  de armadura, em relação ao baricentro da seção homogeneizada.

Com a rigidez  $K_1$  determina-se a primeira aproximação para a curvatura  $\chi_1$  dada por,

$$\chi_1 = \frac{M_d}{K_1} \quad (2.5.12)$$

Conhecida  $\chi_1$ , a equação (2.5.9) é uma função  $f(x)$  de uma única variável  $x$ , para a qual deseja-se encontrar a raiz. Pode-se resolver esse problema pelo algoritmo da bissecante, desde que se conheça um intervalo  $[x_i, x_s]$  no qual se encontra a raiz. Na figura 2.5.7 apresenta-se o processo da bissecante, onde  $f_i$  e  $f_s$  são os valores da função  $f(x)$ , equação (2.5.9), nos extremos do intervalo.

Determina-se a primeira aproximação  $x_1$  a partir da interseção da reta que une os pontos  $(x_i, f_i)$  e  $(x_s, f_s)$  com o eixo das abcissas e calcula-se  $f_1 = f(x_1)$ . Repete-se o processo com o novo intervalo  $[x_1, x_s]$  para determinar a segunda aproximação  $x_2$  e assim sucessivamente, até que em uma iteração genérica  $j$  o valor absoluto de  $f_j$  seja menor que uma

tolerância estipulada. Adota-se o valor de  $x$  obtido nesta iteração como um valor aproximado da raiz.

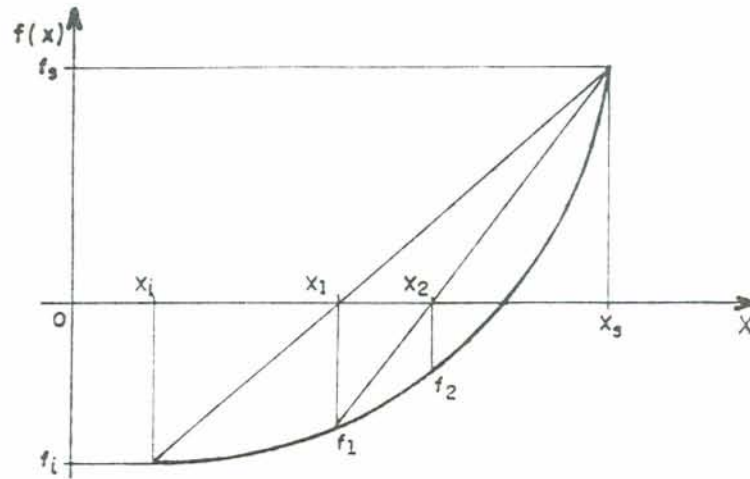


FIGURA 2.5.7 - Algoritmo da bissecante.

Os limites  $x_i$  e  $x_s$  do intervalo são obtidos da seguinte maneira:

1 - limite  $x_i$

Na determinação de  $x_i$ , deve-se limitar a deformação na armadura mais tracionada em 10‰.

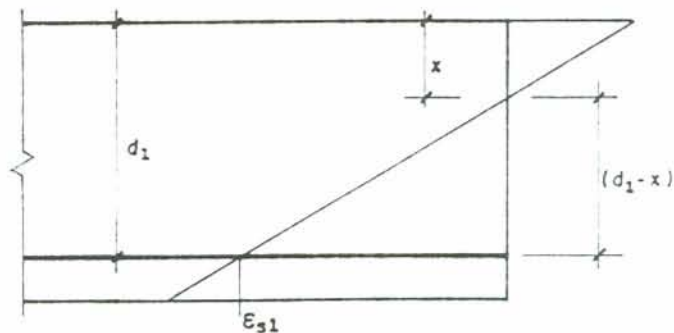


FIGURA 2.5.8 - Determinação de  $x_i$ .

Observando a figura 2.5.8 e a equação (2.5.4), verifica-se que

$$\epsilon_{s1} = X_1 (d_1 - x) \quad (2.5.13)$$



Impondo a condição  $\epsilon_{s1} \leq 10\text{‰}$  resulta

$$x \geq d_1 - \frac{0,01}{\chi_1} \quad (2.5.14)$$

Dependendo do valor de  $\chi_1$ , o segundo termo da desigualdade (2.5.14) pode ser negativo. Assim, o limite  $x_i$  deve ser o maior dos valores

$$x_i \geq \begin{cases} d_1 - \frac{0,01}{\chi_1} \\ 0 \end{cases} \quad (2.5.15)$$

## 2 - limite $x_s$

Para a determinação de  $x_s$ , a deformação no concreto deve ser limitada. Podem ocorrer dois casos distintos dependendo do valor da curvatura  $\chi_1$ . No limite entre esses dois casos, a deformação da borda menos comprimida da seção é nula, isto é, limite entre os domínios 4a e 5 da figura 2.4.2. A situação é apresentada na figura 2.5.9.

De acordo com a figura 2.5.9 e a equação (2.5.1), a curvatura  $\chi_{lim}$  correspondente pode ser determinada por

$$\chi_{lim} = \frac{0,0035}{h} \quad (2.5.16)$$

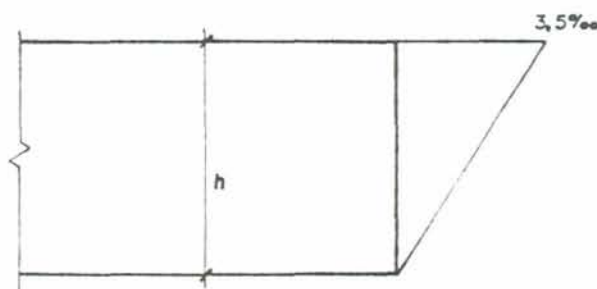


FIGURA 2.5.9 - Limite entre os domínios 4a e 5.

Então se  $\chi_1 \geq \chi_{lim}$  deve-se limitar a deformação na borda mais comprimida em  $3,5\text{‰}$  e, se  $\chi_1 < \chi_{lim}$ , a deformação na fibra situada a  $3/7$  da altura da seção, medida a partir da

borda mais comprimida da mesma, deve ser limitada em  $2\text{‰}$ .

caso a)  $x_1 \geq x_{1\text{lim}}$

A deformação  $\varepsilon_2$  na borda mais comprimida  $\bar{\varepsilon}$ , como  $\bar{\varepsilon}$  mostrado na figura 2.5.3 e na equação (2.5.4),

$$\varepsilon_2 = x_1 x \quad (2.5.17)$$

Impondo a condição  $\varepsilon_2 \leq 3,5\text{‰}$  resulta

$$x \leq \frac{0,0035}{x_1} \quad (2.5.18)$$

caso b)  $x_1 < x_{1\text{lim}}$

Nesse caso a deformação  $\varepsilon_0$  na fibra a  $3/7$  da altura da seção, medida a partir da borda mais comprimida, deve ser limitada em  $2\text{‰}$ .

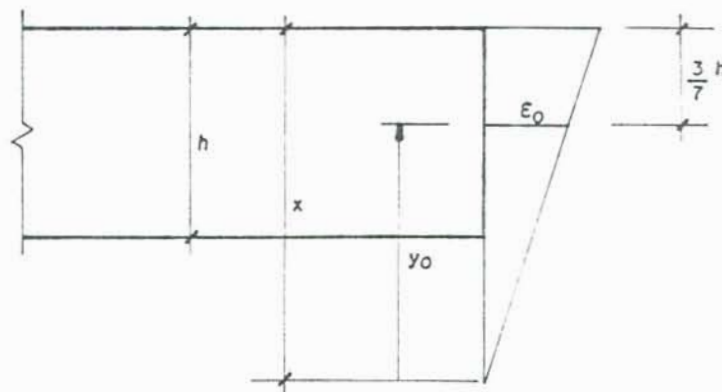


FIGURA 2.5.10 - Deformação  $\varepsilon_0$  na fibra a  $3h/7$  da borda mais encurtada.

Pela figura 2.5.10 verifica-se que

$$y_0 = x - \frac{3}{7} h \quad (2.5.19)$$

e substituindo  $y_0$  em (2.5.4) a deformação  $\varepsilon_0$  é dada por

$$\varepsilon_0 = x_1 \left[ x - \frac{3}{7} h \right] . \quad (2.5.20)$$

Fazendo  $\varepsilon_0 \leq 2\text{‰}$  resulta

$$x \leq \frac{0,002}{x_1} + \frac{3}{7} h . \quad (2.5.21)$$

Finalmente o limite  $x_s$  será, conforme o caso:

$$x_s = \frac{0,0035}{x_1} , \quad \text{se } x_1 \geq x_{1\text{lim}} ; \quad (2.5.22)$$

$$x_s = \frac{0,002}{x_1} + \frac{3}{7} h , \quad \text{se } x_1 < x_{1\text{lim}} .$$

Encontrada a incôgnita  $x$  correspondente à primeira aproximação  $x_1$  da curvatura, calcula-se diretamente de (2.5.10) o momento  $M_1$  e fica determinado o primeiro ponto na curva momento fletor-curvatura da figura 2.5.6.

Em seguida determina-se a nova aproximação  $x_2$  para a curvatura, figura 2.5.6, como

$$x_2 = x_1 + \frac{M_d - M_1}{K_1} . \quad (2.5.23)$$

Com  $x_2$  repete-se o processo para se determinar  $M_2$  e o segundo ponto na curva momento fletor-curvatura. A convergência final será satisfeita quando em uma iteração  $j$ , ficarem atendidas as condições

$$\left| \frac{M_d - M_j}{M_j} \right| < \text{tolerância} ; \quad (2.5.24)$$

$$\left| \frac{x_j - x_{j-1}}{x_j} \right| < \text{tolerância} . \quad (2.5.25)$$

Esse algoritmo em geral requer um número grande de iterações, principalmente se o momento fletor solicitante é próximo do momento de ruptura da seção e com isto, o tempo de processamento computacional pode ser muito alto. Dos três algoritmos apresentados nesta seção, esse é o menos eficiente sob tal ponto de vista, porém a convergência é razoavelmente segura, sem problemas de instabilidade numérica.

#### 2.5.2.2. Algoritmo com rigidez secante

O fundamento do processo é o mesmo do algoritmo anterior. Incrementa-se a curvatura da seção, encontra-se a raiz da equação (2.5.9) e calcula-se por (2.5.10) o momento fletor correspondente. A diferença consiste no grau de avanço no iterativo correspondente à curvatura  $\chi$  da seção. A rigidez é alterada em cada iteração através da secante à curva momento fletor-curvatura para esforço normal constante, como é mostrado na figura 2.5.11.

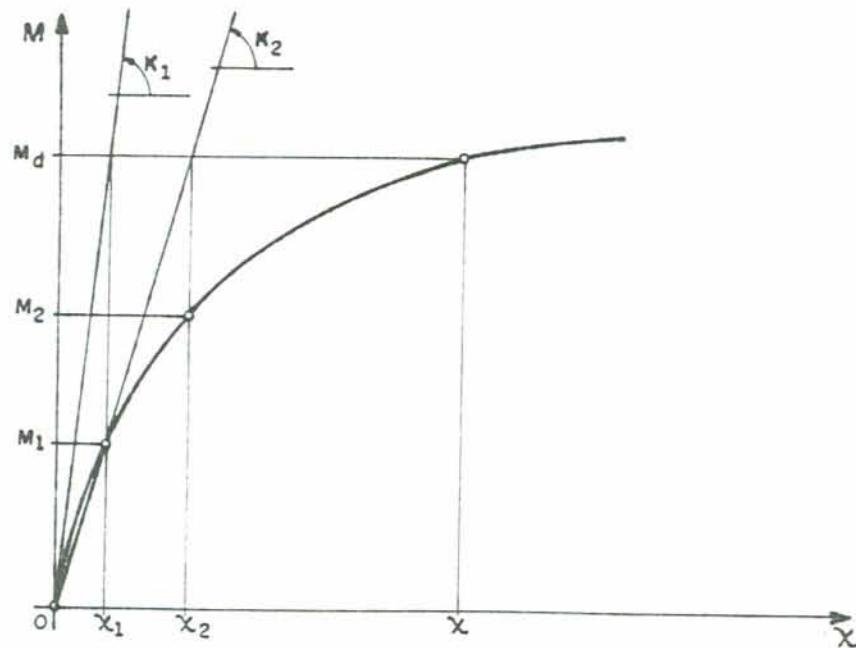


FIGURA 2.5.11 - Algoritmo com rigidez secante

Inicializa-se o processo com a mesma rigidez  $K_1$  da seção não fissurada, dada por (2.5.11), e determina-se o primeiro ponto  $(x_1, M_1)$  na curva. A rigidez  $K_2$  para a próxima iteração será determinada pela secante à curva ligando a origem ao ponto  $(x_1, M_1)$  como

$$K_2 = \frac{M_1}{x_1} \quad (2.5.26)$$

A curvatura  $x_2$  nessa iteração será dada por (2.5.27) e no restante o processo é idêntico ao anterior.

$$x_2 = \frac{M_d}{K_2} \quad (2.5.27)$$

Esse algoritmo requer em geral um menor número de iterações que o anterior, reduzindo com isto, o tempo de processamento computacional e não apresenta problemas de instabilidade numérica. Se o momento fletor é próximo do momento de ruptura da seção, esse algoritmo, como o anterior, mostra-se ineficiente por exigir um número significativo de iterações até a convergência.

### 2.5.2.3. Algoritmo com rigidez tangente

A diferença desse para o algoritmo de rigidez secante é que aqui procura-se acompanhar a curva momento fletor-curvatura, determinando-se valores aproximados da tangente à mesma nos diversos pontos. Na figura 2.5.12 encontra-se indicada a determinação da rigidez tangente.

Em duas iterações sucessivas tem-se determinados os pontos  $(x_{j-1}, M_{j-1})$  e  $(x_j, M_j)$  na curva momento fletor-curvatura. A rigidez  $K_{j+1}$  na iteração seguinte é determinada pela reta que liga esses pontos, a qual corresponde a uma paralela à tangente à curva em um ponto intermediário como

$$K_{j+1} = \frac{M_j - M_{j-1}}{X_j - X_{j-1}} \quad (2.5.28)$$

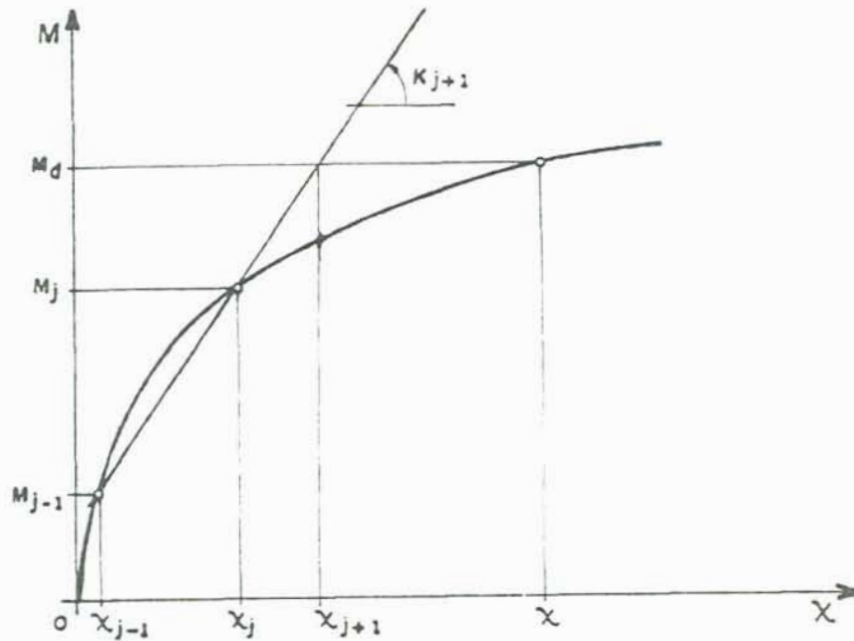


FIGURA 2.5.12 - Algoritmo com rigidez tangente.

A aproximação seguinte para a curvatura  $X_{j+1}$  será,

$$X_{j+1} = \frac{M_d - M_j}{K_{j+1}} + X_j \quad (2.5.29)$$

No restante, o processo é idêntico aos anteriores, apresentando porém, uma redução sensível no número de iterações requeridas para a convergência. Esse algoritmo no entanto, apresenta problemas de instabilidade numérica quando o momento fletor solicitante é próximo do momento de ruptura. Pode ocorrer que nas proximidades da ruptura, a curva momento fletor-curvatura tende a ficar paralela ao eixo das curvaturas, e, com isto, a rigidez tangente  $K_{j+1}$  calculada em

(2.5.28), muito próxima de zero. Resulta então, em (2.5.29), um problema numérico que antes inexistia. Na figura 2.5.13 apresenta-se o caso em questão.

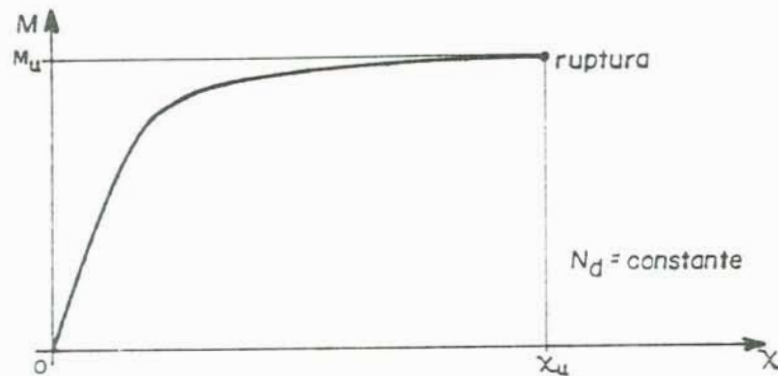


FIGURA 2.5.13 - Curva momento fletor-curvatura para esforço normal constante, com rigidez tangente aproximadamente nula nas proximidades da ruptura.

Para se evitar o problema numérico mencionado, basta limitar a rigidez  $K_{j+1}$  a um valor mínimo de segurança.

### 2.5.3. Ruptura da seção

A ruptura da seção da figura 2.5.1 deve ser determinada, como visto, utilizando-se os diagramas tensão-deformação de cálculo para os materiais. Interessa saber se, para um dado par de esforços solicitantes, a seção entra ou não em ruptura com as resistências de cálculo dos materiais. Mais precisamente, necessita-se conhecer o maior momento fletor que se pode aplicar à seção, na presença de um esforço normal constante, sem que a mesma entre em ruptura.

A seção da figura 2.5.1 entrará em ruptura com infinitos pares de esforço normal e momento fletor. Isto pode ser visualizado através de um diagrama de interação, como na figura 2.5.14.

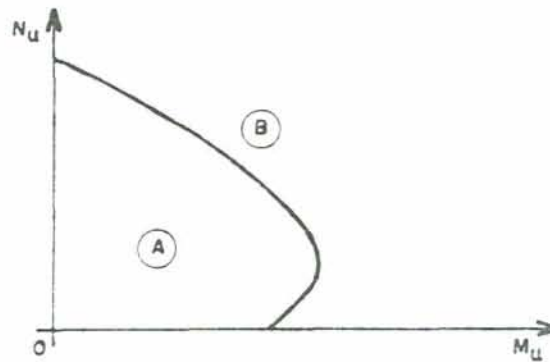


FIGURA 2.5.14 - Diagrama de interação momento fletor-esforço normal últimos.

Pontos situados na região A do diagrama, caracterizam uma situação equilibrada entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. Pontos na região B representam solicitações as quais a seção não é capaz de suportar. A curva limite entre as duas regiões corresponde aos infinitos pares de esforços solicitantes que levam a seção à ruína.

A determinação do momento fletor de ruína para um valor fixado do esforço normal, também é feita através das equações (2.5.9) e (2.5.10), porém adotando-se os diagramas tensão-deformação de cálculo para os materiais e, com o procedimento que se segue.

Com a equação (2.5.9) deseja-se encontrar a incógnita  $x$  tal que o esforço normal solicitante  $N_d$  esteja equilibrado pelo esforço normal resistente, porém na ruptura. A ruptura se dá quando as deformações da seção se enquadrarem em um dos domínios de dimensionamento da figura 2.4.2. Como este trabalho trata de flexo-compressão, o domínio 1 deve ser eliminado. Então deseja-se encontrar a incógnita  $x$  em um dos domínios, do 2 ao 5, de forma que haja equilíbrio do esforço normal. Para isto, pode-se utilizar o processo da bissecante, admitindo que o intervalo no qual encontra-se a solução  $x$  é  $[0, \infty)$ . Utiliza-se o algoritmo mostrado na figura 2.5.7. A curvatura  $\chi$  da seção para um valor de  $x$  é conhecida, pois no diagrama da figura 2.4.2, existe sempre uma deformação fixada para cada domínio. A curvatura  $\chi$  da seção na ruptura depende,



portanto, apenas de  $x$ . Caso a solução  $x$  não seja encontrada no processo da bissecante, significa que a seção não é capaz de absorver o esforço normal  $N_d$ , o que caracteriza a ruptura.

Encontrada a raiz  $x$  da equação (2.5.9), a equação (2.5.10) fornece diretamente o momento fletor de ruptura  $M_u$  da seção.

## 2.6. Cálculo de deslocamentos em pilares de concreto armado

A análise completa de um pilar esbelto de concreto armado requer o cálculo dos deslocamentos transversais do seu eixo, uma vez que esses deslocamentos alteram os momentos fletores solicitantes nas diversas seções do pilar e, consequentemente, sua capacidade de carga. Essa alteração no valor dos esforços solicitantes em função dos deslocamentos é o que é denominada não-linearidade geométrica. A não-linearidade física concernente ao material concreto armado, foi considerada anteriormente quando da adoção de diagramas tensão-deformação não-lineares para o concreto e para o aço. Uma vez que esses diagramas são utilizados na obtenção das relações momento fletor-esforço normal-curvatura, a não-linearidade física fica incluída finalmente nessas relações. Elas serão utilizadas para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, através de um procedimento iterativo de aproximações sucessivas desses deslocamentos. O aumento dos momentos fletores devido aos deslocamentos transversais exige a comparação dos momentos solicitantes com o momento de ruptura da seção. Com isso ficam respeitadas as deformações limites para o aço e para o concreto e o critério de ruptura, através dos domínios de dimensionamento da NB-1. O estado limite último por ruptura é caracterizado quando, em uma seção transversal do pilar, o momento fletor solicitante atinge o momento de ruptura.

Na figura 2.6.1 mostra-se um pilar isostático sob flexão normal, submetido a um carregamento genérico.

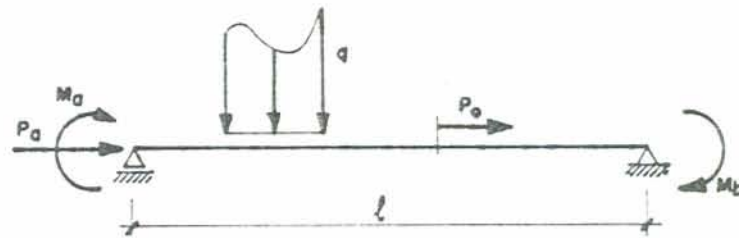
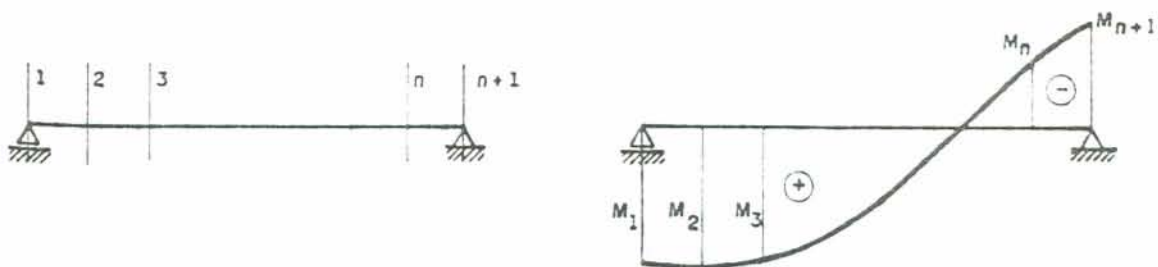


FIGURA 2.6.1 - Pilar com carregamento genérico.

Para se proceder ao cálculo dos deslocamentos, divide-se o comprimento  $l$  do pilar em um número  $n$  de segmentos, de comprimentos iguais ou não, através das  $n+1$  seções transversais mostradas na figura 2.6.2-a. Uma vez que o pilar é isostático, os momentos fletores e esforços normais nas diversas seções podem ser obtidos diretamente por simples aplicação das equações de equilíbrio da estática. Esses são esforços solicitantes de primeira ordem, uma vez que foram obtidos na configuração indeformada da estrutura. Os esforços cortantes nas diversas seções não influenciam na análise, já que se está desprezando as deformações por cisalhamento. Na figura 2.6.2-b apresenta-se o diagrama de momentos fletores de primeira ordem, de uma forma simbólica, para um caso geral.

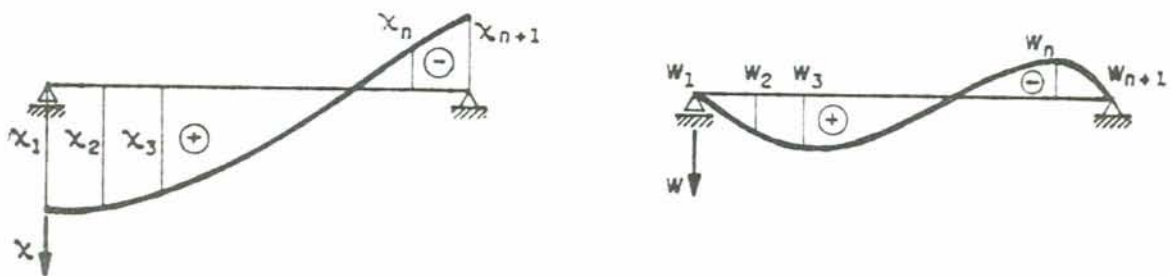


a - seções transversais ao eixo do pilar

b - momentos fletores de primeira ordem

FIGURA 2.6.2 - Seções transversais ao eixo do pilar e momentos fletores de primeira ordem.

A partir dos momentos fletores de primeira ordem e esforços normais nas diversas seções transversais, pode-se calcular as curvaturas destas seções através das relações momento fletor-esforço normal-curvatura. Com a hipótese de pequenos deslocamentos e a expressão aproximada para a curvatura, equação (2.2.1), verifica-se que os deslocamentos transversais  $W$  do eixo do pilar, podem ser calculados por uma dupla integração das curvaturas ao longo deste eixo e a aplicação posterior das condições geométricas de contorno. Na figura 2.6.3, encontra-se indicado o diagrama de curvaturas devido aos esforços de primeira ordem e os deslocamentos correspondentes.



a - curvaturas

b - deslocamentos

FIGURA 2.6.3 - Curvaturas e deslocamentos devidos aos esforços de primeira ordem.

Para o caso do pilar bi-rotulado da figura 2.6.1, as condições geométricas de contorno resumem-se em  $w_1 = 0$  e  $w_{n+1} = 0$ .

A integração das curvaturas para o cálculo dos deslocamentos pode ser feita ajustando-se uma curva, analiticamente expressa, ao diagrama de curvaturas da figura 2.6.3-a. Ajustes polinomiais podem, em geral, ser usados com relativa simplicidade. Quando, porém, ocorre uma descontinuidade no

diagrama de curvaturas, devida à existência de momentos ou cargas axiais concentradas ao longo do eixo do pilar, ou devida a uma variação brusca na geometria, o mais indicado é utilizar-se da analogia de Mohr para o cálculo dos deslocamentos.

Inicialmente inverte-se o diagrama de curvaturas e adota-se o mesmo como um carregamento fictício. Carrega-se o pilar com o carregamento fictício e os momentos fletores calculados para este sistema, serão os deslocamentos transversais do pilar.

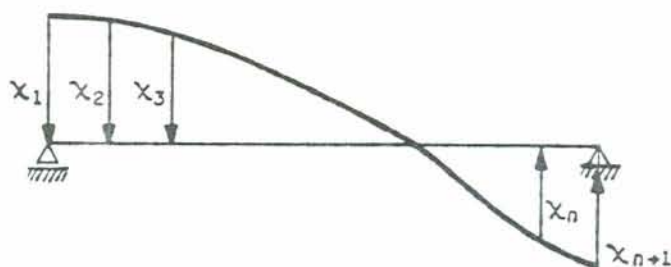


FIGURA 2.6.4 - Carregamento fictício da analogia de Mohr.

Devido aos deslocamentos transversais nas diversas seções do pilar, os momentos fletores ficam aumentados. Recalcula-se os novos momentos para esta configuração deformada, os quais são a soma dos momentos de primeira e segunda ordem. Determina-se as curvaturas para os novos momentos e procede-se a outra integração para encontrar os deslocamentos e assim sucessivamente até a convergência. A convergência dos deslocamentos é admitida quando em duas iterações sucessivas,  $j-1$  e  $j$ , é satisfeita a desigualdade (2.6.1) para todas as seções.

$$\left| \frac{W_j^i - W_{j-1}^i}{W_{j-1}^i} \right| < \text{tolerância} \quad (2.6.1)$$

$(i=1, n+1)$

A instabilidade estrutural é detectada quando, em

uma seção de referência, três iterações sucessivas mostram a divergência dos deslocamentos, ou seja, quando é atendida a desigualdade (2.6.2).

$$|W_j - W_{j-1}| > |W_{j-1} - W_{j-2}| \quad (2.6.2)$$

Com esta análise pode-se verificar se um pilar é estável ou não sob a ação de um carregamento dado. A convergência dos deslocamentos indica a estabilidade ou, em outras palavras, o pilar resiste ao carregamento dado. A instabilidade estrutural ou a ruptura significam que o pilar não resiste ao carregamento dado. Entretanto não fica caracterizado o carregamento de ruína do pilar. Um procedimento incremental pode ser empregado, juntamente com essa análise iterativa, para se obter a curva carga-deslocamento e o carregamento de ruína do pilar. Divide-se o carregamento da figura 2.6.1 por um fator inteiro  $m$ , de forma que todas as cargas guardem entre si a mesma relação de proporcionalidade.

O carregamento fracionado mostrando o perfil do carregamento real é apresentado na figura 2.6.5.

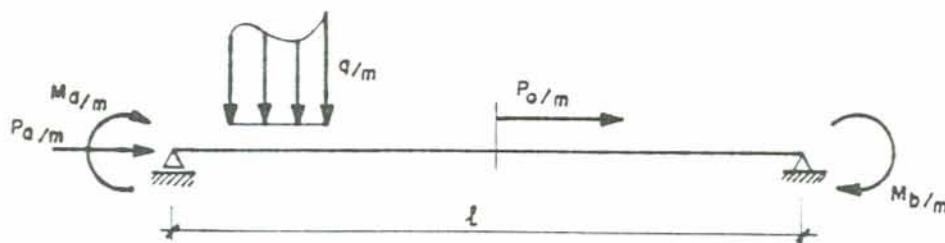


FIGURA 2.6.5 - Perfil do carregamento.

Numa primeira etapa de carga aplica-se ao pilar, na configuração indeformada, o carregamento da figura 2.6.5 e procede-se à análise iterativa até a convergência dos deslocamentos. Numa segunda etapa de carga aplica-se sobre o pilar

já deformado, um incremento de carga igual ao carregamento da figura 2.6.5. Assim, nesta etapa, o pilar estará com duas vezes o carregamento da figura 2.6.5. Repete-se a análise iterativa até a convergência dos deslocamentos e assim sucessivamente, até que em determinado nível de carga, ocorra a ruína do pilar.

## 2.7. Fluência segundo o CEB/78

### 2.7.1. Hipóteses e definições básicas

Apresenta-se aqui a formulação para o cálculo da deformação específica de fluência do concreto, segundo o Anexo e, do Boletim de Informação nº 124/125 do CEB/78<sup>(10,11)</sup>.

Na faixa das tensões de serviço, as deformações de fluência devidas a incrementos de tensões aplicados em instantes diferentes, são consideradas aditivas, hipótese da superposição. Resulta daí que a deformação de fluência sob tensão constante é proporcional a essa tensão.

A deformação de fluência  $\epsilon_{cc}(t, t_0)$  é definida pela relação

$$\epsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{c28}} \phi(t, t_0) ; \quad (2.7.1)$$

onde

$\epsilon_{cc}(t, t_0)$  - deformação de fluência no instante  $t$  para tensão aplicada no instante  $t_0$ ;

$\sigma_0$  - tensão constante aplicada no instante  $t_0$ ;

$E_{c28}$  - módulo de deformação inicial do concreto aos 28 dias de idade;

$\phi(t, t_0)$  - coeficiente de fluência.

A deformação total no instante  $t$  sob tensão constante  $\sigma_0$  é dada por

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t, t_0) = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}} \right]; \quad (2.7.2)$$

com  $E_c(t_0)$ , sendo o m\u00f3dulo de deforma\u00e7\u00e3o inicial na idade  $t_0$ .  
Segundo o CEB/78,  $E_c(t_0)$  pode ser tomado igual a

$$E_c(t_0) = 1,25 E_{cm}; \quad (2.7.3)$$

onde

$E_{cm}$  - m\u00f3dulo secante, determinado em fun\u00e7\u00e3o da resist\u00eancia m\u00e9dia  $f_{cm}(t_0)$  do concreto na idade  $t_0$ , corrigida conforme a se\u00e7\u00e3o 2.7.3.

A resist\u00eancia m\u00e9dia  $f_{cm}(t_0)$  pode ser estimada desde que seja conhecida numa idade qualquer, em geral aos 28 dias. Na figura 2.7.1 indica-se a varia\u00e7\u00e3o da resist\u00eancia do concreto com a idade. O m\u00f3dulo secante  $E_{cm}$  pode ser determinado em fun\u00e7\u00e3o da resist\u00eancia m\u00e9dia  $f_{cm}$  na forma

$$E_{cm} = 9,5 \sqrt[3]{f_{cm}}; \quad (2.7.4)$$

sendo  $E_{cm}$  em  $\text{KN/mm}^2$  e  $f_{cm}$  em  $\text{N/mm}^2$ .  
A fun\u00e7\u00e3o

$$\psi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}} \quad (2.7.5)$$

\u00e9 chamada fun\u00e7\u00e3o de flu\u00eancia.

De (2.7.2) e (2.7.5) resulta que

$$\varepsilon_{\text{tot}}(t, t_0) = \sigma_0 \psi(t, t_0). \quad (2.7.6)$$

### 2.7.2. Coefficiente de flu\u00eancia

O coeficiente de flu\u00eancia  $\psi(t, t_0)$  \u00e9 determinado,

segundo o CEB/78, pela expressão

$$\phi(t, t_0) = \beta_a(t_0) + \phi_d \beta_d(t-t_0) + \phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] ; \quad (2.7.7)$$

com

$$\beta_a(t_0) = 0,8 \left[ 1 - \frac{f_c(t_0)}{f_{c\infty}} \right] ; \quad (2.7.8)$$

onde a relação  $f_c(t_0)/f_{c\infty}$ , variação da resistência do concreto com a idade, é dada na figura 2.7.1, e

$\phi_d$  - coeficiente de elasticidade diferida, tomado igual a 0,4;

$\phi_f = \phi_{f1} \phi_{f2}$  - coeficiente de plasticidade diferida;

$\phi_{f1}$  - depende do meio ambiente, Tabela 2.1, coluna 3;

$\phi_{f2}$  - depende da espessura fictícia  $h_0$ , figura 2.7.2.

Define-se espessura fictícia da peça de concreto por

$$h_0 = \lambda \frac{2 A_c}{u} ; \quad (2.7.9)$$

onde

$\lambda$  - coeficiente dependente do meio ambiente, Tabela 2.1, coluna 5;

$A_c$  - área da seção de concreto;

$u$  - perímetro em contato com a atmosfera.

Além disso,

$\beta_d$  - função correspondente ao desenvolvimento ao longo do tempo da deformação elástica diferida, figura 2.7.3;

$\beta_f$  - função correspondente ao desenvolvimento ao longo do tempo da plasticidade diferida, figura 2.7.4, de



pendente da espessura fictícia  $h_0$ ;

$t$  - idade do concreto no instante considerado, corrigida de acordo com 2.7.3;

$t_0$  - idade do concreto no instante de aplicação da carga, corrigida de acordo com 2.7.3.

### 2.7.3. Idade corrigida

Para levar em conta os efeitos do tipo de cimento e da temperatura ambiente ao longo do endurecimento do concreto, se ela é sensivelmente diferente de  $20^{\circ}\text{C}$ , a idade real do concreto deve ser corrigida.

Considerando cada período de tempo real  $\Delta t_m$ , ao longo do qual a temperatura média diária se mantém constante e igual a  $T$ , a idade real  $t_m$  é substituída pela idade corrigida  $t$  dada por

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum_0^t [(T + 10) \Delta t_m] ; \quad (2.7.10)$$

onde

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{para os cimentos de endurecimento normal e lento;} \\ 2, & \text{para os cimentos de endurecimento rápido;} \\ 3, & \text{para os cimentos de endurecimento rápido e de alta resistência.} \end{cases}$$

$T$  - temperatura diária do concreto em graus centígrados;

$\Delta t_m$  - número de dias em que a temperatura média diária se manteve igual a  $T$ .

TABELA 2.1 - Coeficientes básicos de fluência e retração - CEB/78

1	2	3	4	5				
					UMIDADE RELATIVA	COEFICIENTES		COEFICIENTE $\lambda$
						$\phi_{f1}$	$\epsilon_{s1}$	
na água		0,8	-0,00010	30				
atmosfera muito úmida	90%	1,0	+0,00013	5				
exterior, em geral	70%	2,0	+0,00032	1,5				
atmosfera muito seca	40%	3,0	+0,00052	1				

- a)  $\epsilon_{s1}$  negativo - inchamento no lugar de retração.
- b) Os valores indicados para  $\phi_{f1}$  e  $\epsilon_{s1}$  referem-se a concretos de consistência plástica. Eles devem ser reduzidos ou aumentados de 25%, caso trate-se de concretos de consistência firme ou mole, respectivamente.

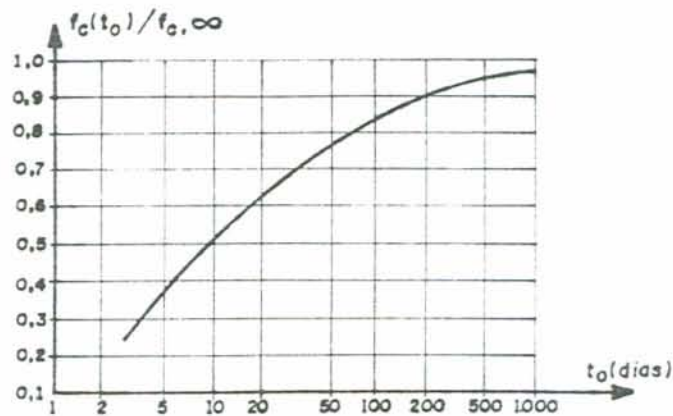


FIGURA 2.7.1 - Variação da resistência do concreto com a idade.

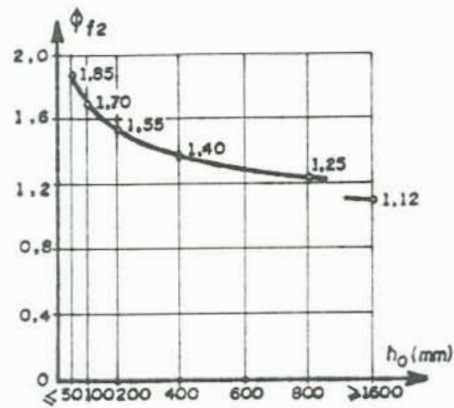


FIGURA 2.7.2 - Coeficiente  $\phi_{f2}$  - Influência da espessura fictícia  $h_0$  na fluência.

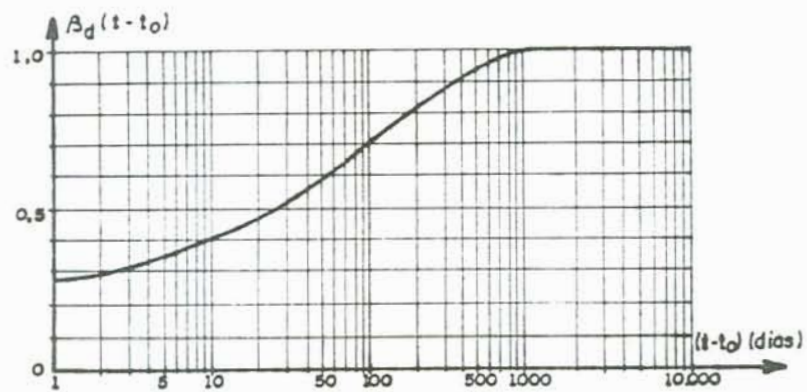


FIGURA 2.7.3 - Função  $\beta_d(t-t_0)$  - Desenvolvimento ao longo do tempo da deformação elástica diferida.

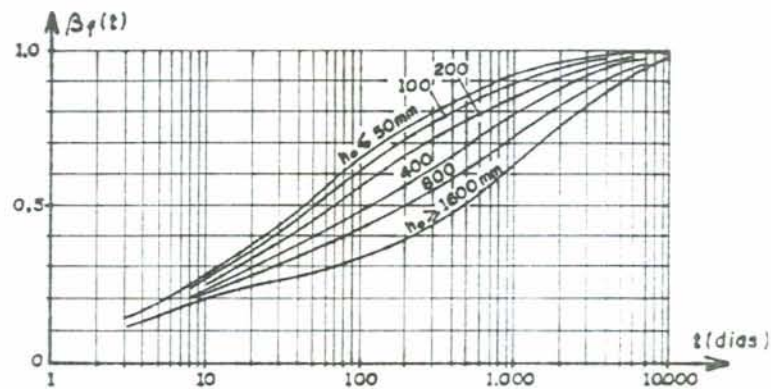


FIGURA 2.7.4 - Função  $\beta_f(t)$  - Desenvolvimento ao longo do tempo da deformação plástica diferida.

T. van Langendonck e A. Bugan<sup>(33)</sup> ajustaram funções às curvas das figuras 2.7.1 a 2.7.4, que são apresentadas pelas equações (2.7.11) a (2.7.15)

$$\frac{f_c(t_0)}{f_{c\infty}} = \frac{9t_0(t_0 + 42)}{(9t_0 + 40)(t_0 + 61)}, \quad t_0 \text{ em dias.} \quad (2.7.11)$$

$$\phi_{f_2} = \frac{42 + h_0}{20 + h_0}, \quad h_0 \text{ em cm.} \quad (2.7.12)$$

$$\beta_d(t-t_0) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}, \quad t \text{ e } t_0 \text{ em dias.} \quad (2.7.13)$$

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}, \quad t \text{ em dias e } t \geq 3. \quad (2.7.14)$$

sendo,

$$\begin{aligned} A &= 42h_0^3 - 350h_0^2 + 588h_0 + 113 \\ B &= 768h_0^3 - 3060h_0^2 + 3234h_0 - 23 \\ C &= -200h_0^3 + 13h_0^2 + 1090h_0 + 183 \\ D &= 7579h_0^3 - 31916h_0^2 + 35343h_0 + 1931 \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

onde  $h_0$  é a espessura fictícia em metros.

## 2.8. Retração segundo o CEB/78

O procedimento para o cálculo da deformação específica de retração apresentado aqui, também é o sugerido no Anexo e, do Boletim de Informação nº 124/125 do CEB/78.

A deformação relativa de retração que se desenvolve num intervalo de tempo  $(t-t_0)$  é dada por

$$\epsilon_{cs}(t, t_0) = \epsilon_{s0} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] ; \quad (2.8.1)$$

onde

$\epsilon_{cs}(t, t_0)$  - deformação específica de retração no intervalo de tempo  $t-t_0$ ;

$\epsilon_{s0} = \epsilon_{s1} \epsilon_{s2}$  - coeficiente básico da retração, sendo

$\epsilon_{s1}$  - dependente do meio ambiente, Tabela 2.1, coluna 4;

$\epsilon_{s2}$  - dependente da espessura fictícia  $h_0$ , figura 2.8.1;

$\beta_s$  - função correspondente ao desenvolvimento da retração ao longo do tempo, figura 2.8.2;

$t$  - idade do concreto no instante considerado, corrigida segundo 2.7.3, com  $\alpha = 1$  em todos os casos;

$t_0$  - idade do concreto no instante a partir do qual a influência da retração se faz sentir, corrigida de acordo com 2.7.3, com  $\alpha = 1$  em todos os casos.

As funções matemáticas para as curvas das figuras 2.8.1 e 2.8.2, também desenvolvidas por Langendonck e Bugan<sup>(33)</sup>, são dadas por (2.8.2) e (2.8.3).

$$\epsilon_{s2} = \frac{33 + 2 h_0}{20,8 + 3 h_0} , \quad h_0 \text{ em cm} ; \quad (2.8.2)$$

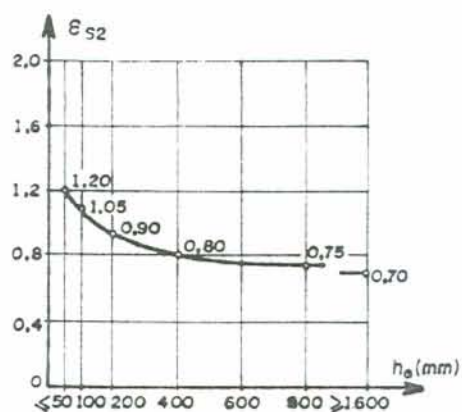


FIGURA 2.8.1 - Coeficiente  $\epsilon_{s2}$  - Influência da espessura fictícia  $h_0$  na retração.

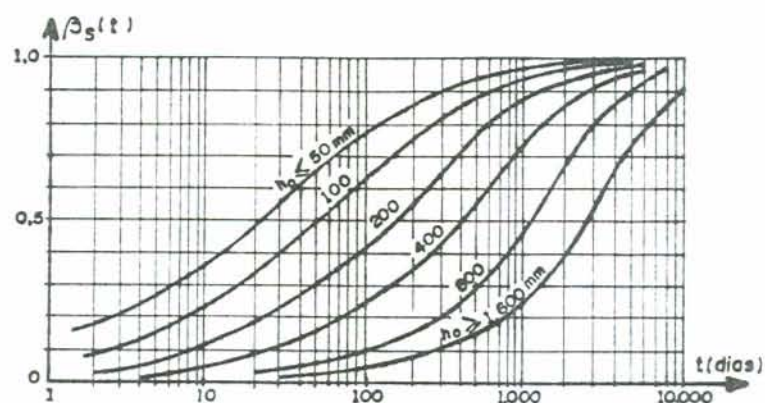


FIGURA 2.8.2 - Função  $\beta_s(t)$  - Desenvolvimento da retração ao longo do tempo.

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + 40 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + B \left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C \left(\frac{t}{100}\right)^2 + D \left(\frac{t}{100}\right) + E}, \quad t \text{ em dias} \quad (2.8.3)$$

e  $t \geq 3$  ;

onde

$$\begin{aligned} B &= 116 h_0^3 - 282 h_0^2 + 220 h_0 - 4,8 \\ C &= 2,5 h_0^3 - 8,8 h_0 + 40,7 \\ D &= -75 h_0^3 + 585 h_0^2 + 496 h_0 - 6,8 \\ E &= 2030 h_0^5 - 4940 h_0^4 + 2880 h_0^3 - 14,8 h_0^2 \\ &\quad + 10,7 h_0 - 0,52 \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

sendo  $h_0$  a espessura fictícia em metros.

## 2.9. Implementação computacional para as deformações diferenciadas do concreto

### 2.9.1. Inclusão da fluência

Para a inclusão da fluência do concreto no algoritmo de análise descrito na seção 2.6, seguiu-se a orientação do Manual de Flambagem do CEB<sup>(9)</sup> e de outros autores<sup>(16,17)</sup>. A consideração da fluência consiste simplesmente em se proceder a uma alteração no diagrama tensão-deformação do concreto, através de uma transformação afim de razão  $\phi(t, t_0)$ , paralelamente ao eixo das deformações. O novo diagrama tensão-deformação é mostrado na figura 2.9.1, onde  $f_c$  é tomado igual a  $f_{ck}$  ou  $f_{cd}$  caso trate-se do cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar ou da verificação da ruptura, respectivamente.

A equação do trecho parabólico entre a origem e a deformação 2‰ é dada por (2.9.1), onde  $\phi$  é o valor do coeficiente de fluência  $\phi(t, t_0)$  para um determinado instante  $t$ .

$$\sigma_c = 0,85 f_c \left[ \frac{10^3 \epsilon_c}{(1 + \phi)} - \frac{10^6 \epsilon_c^2}{4 (1 + \phi)^2} \right] \quad (2.9.1)$$

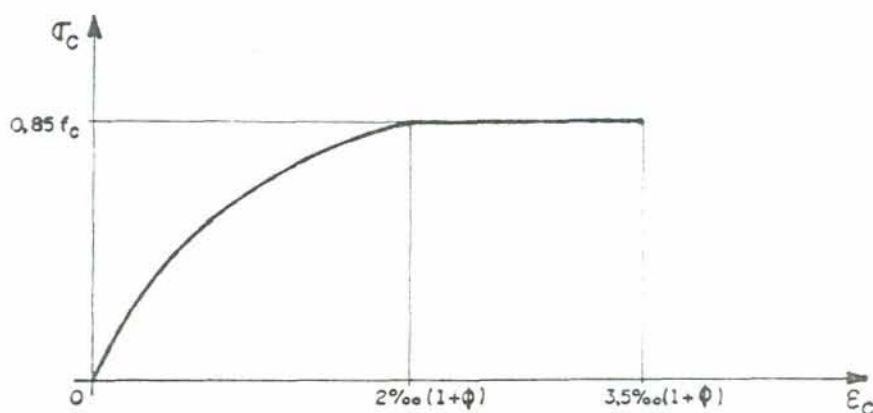


FIGURA 2.9.1 - Diagrama tensão-deformação do concreto no tempo. Consideração da fluência.

Devido à alteração procedida no diagrama tensão-deformação do concreto, há a necessidade de se alterar os domínios de dimensionamento da figura 2.4.2, uma vez que as deformações últimas para o concreto foram alteradas pela introdução do fator  $1 + \phi$ . Os domínios modificados para a inclusão da fluência do concreto são apresentados na figura 2.9.2.

Com o novo diagrama tensão-deformação para o concreto, função do tempo, pode-se obter as relações momento fletor-esforço normal-curvatura para a seção em estudo, em cada instante  $t$ , utilizando o mesmo procedimento já descrito. A ruptura da seção também é determinada como anteriormente, apenas com a utilização dos domínios de dimensionamento da figura 2.9.2.





Em ambas as parcelas ficam incluídos os efeitos da fluência do concreto, porém a retração só aparece na parcela  $R_{CCS}$ . Analogamente, a posição da resultante é composta de duas parcelas distintas. No apêndice, estas expressões encontram-se deduzidas para seções retangulares.

Uma vez que as relações momento fletor-esforço normal-curvatura dependem da resultante de compressão no concreto e de sua posição, a fluência e a retração ficam consequentemente incluídas nessas relações. A ruína por ruptura, através dos domínios de dimensionamento modificados da figura 2.9.2 e a instabilidade estrutural, através do cálculo de deslocamentos baseado nas relações M-N- $\chi$ , englobam finalmente os efeitos da fluência e retração do concreto.

### 2.9.3. História de carga

Quando se deseja comparar os resultados teóricos obtidos da análise com resultados experimentais obtidos em laboratório, a história real de carregamento da estrutura deve ser conhecida.

Em se tratando de projeto de uma estrutura de concreto armado, parte das cargas de serviço é de longa duração e parte de curta duração. A parcela de longa duração é constituída pela carga permanente e por parte da carga acidental, aquela parcela da carga acidental quase permanente. Uma história de carga simplificada, pode ser admitida como na figura 2.9.4, onde  $t_0$  é o instante correspondente ao início da utilização da estrutura e  $t_n$  o instante correspondente ao final das deformações diferidas do concreto. As cargas de longa duração  $P_g$ , atuam no pilar desde  $t_0$  até  $t_n$  e neste instante final, aplica-se um incremento de carga  $\delta P$  ao mesmo. O incremento  $\delta P$  é a parcela de curta duração do carregamento.

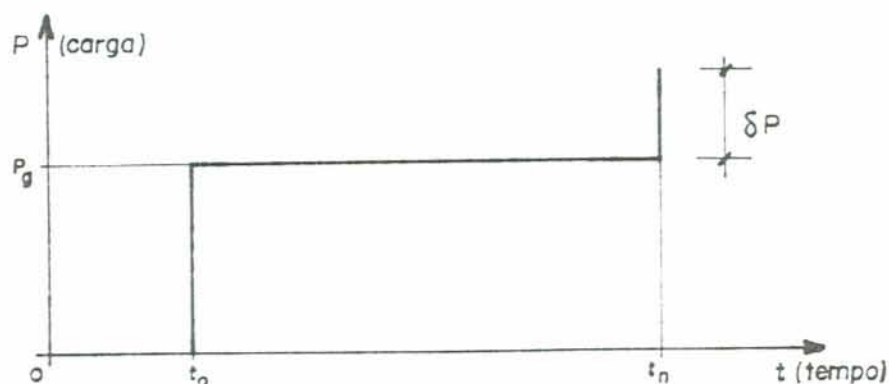


FIGURA 2.9.4 - História de carga simplificada.

#### 2.9.4 - Integração no tempo

Nos parágrafos anteriores, apresentou-se a forma utilizada para se considerar a fluência e a retração do concreto nas relações M-N-X e no critério de ruptura. Para cada instante  $t$  especificado, obtêm-se uma relação M-N-X diferente, uma vez que o diagrama tensão-deformação do concreto é variável com o tempo e a retração altera as deformações da seção de concreto armado. Na figura 2.9.5 apresenta-se um conjunto de relações M-N- $\chi$  obtidas para cada instante  $t$ .

Observa-se pela figura uma diminuição da rigidez com o passar do tempo. Com isto os deslocamentos serão incrementados no tempo, o que irá reduzir a capacidade de carga do pilar. Para se calcular os deslocamentos transversais do eixo do pilar e sua variação com o tempo, procede-se como se se gue, baseando-se na história de carga da figura 2.9.4.

Inicialmente carrega-se o pilar com as cargas de longa duração  $P_g$ , aplicadas no instante  $t_0$ . Trabalha-se com uma relação M-N-X de curta duração para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar. Esta relação é obtida com a resistência do concreto na idade  $t_0$ , que pode ser avaliada a partir de (2.7.11) desde que a mesma seja conhecida numa idade qualquer. Após a convergência dos deslocamentos, em uma seção genérica ao longo do eixo do pilar o momento fletor

é  $M_0$ , o esforço normal  $N_0$ , a curvatura  $X_0$  e o deslocamento transversal  $W_0$ .

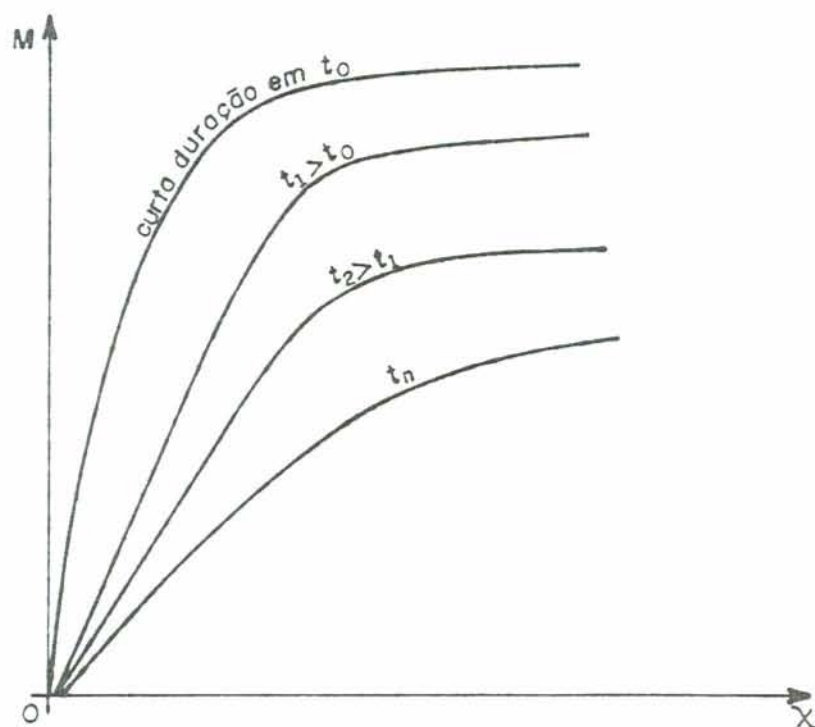


FIGURA 2.9.5 - Relações momento fletor-curvatura, com esforço normal constante, para diversos instantes.

Divide-se o intervalo  $[t_0, t_n]$  em  $n$  subintervalos  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ , ...,  $[t_{n-1}, t_n]$ . Uma subdivisão logaritmica pode ser usada<sup>(6)</sup>. Para o instante  $t_1$  obtém-se uma relação M-N-X com o coeficiente de fluência e a deformação específica de retração correspondentes. Admite-se que entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$ , os esforços solicitantes e os deslocamentos não se alteram. Entretanto, no instante  $t_1$ , a relação M-N-X é alterada devido à fluência e a retração que ocorrem no intervalo  $[t_0, t_1]$ . A estrutura fica menos rígida e não se encontra mais em equilíbrio. Com os esforços solicitantes obtidos no final da análise iterativa realizada para o instante  $t_0$ , repete-se o mesmo procedimento com a relação M-N-X cor

respondente ao instante  $t_1$  até a convergência dos deslocamentos. O momento fletor, o deslocamento e a curvatura na seção genérica ficam ampliados para  $M_1$ ,  $W_1$  e  $\chi_1$ , respectivamente. Considera-se que o esforço normal não sofre alteração, permanecendo com o valor  $N_0$ .

Novamente admite-se que entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , os esforços solicitantes e deslocamentos permanecem inalterados, repetindo-se a análise com estes esforços e as relações M-N-X para o instante  $t_2$ . Prossegue-se assim até o instante final  $t_n$ . Na figura 2.9.6 apresenta-se a variação do momento fletor em uma seção genérica, através das relações M-N-X, para diversos instantes considerados. Na figura,  $M_{1d}$  é o momento fletor de primeira ordem na seção em estudo.

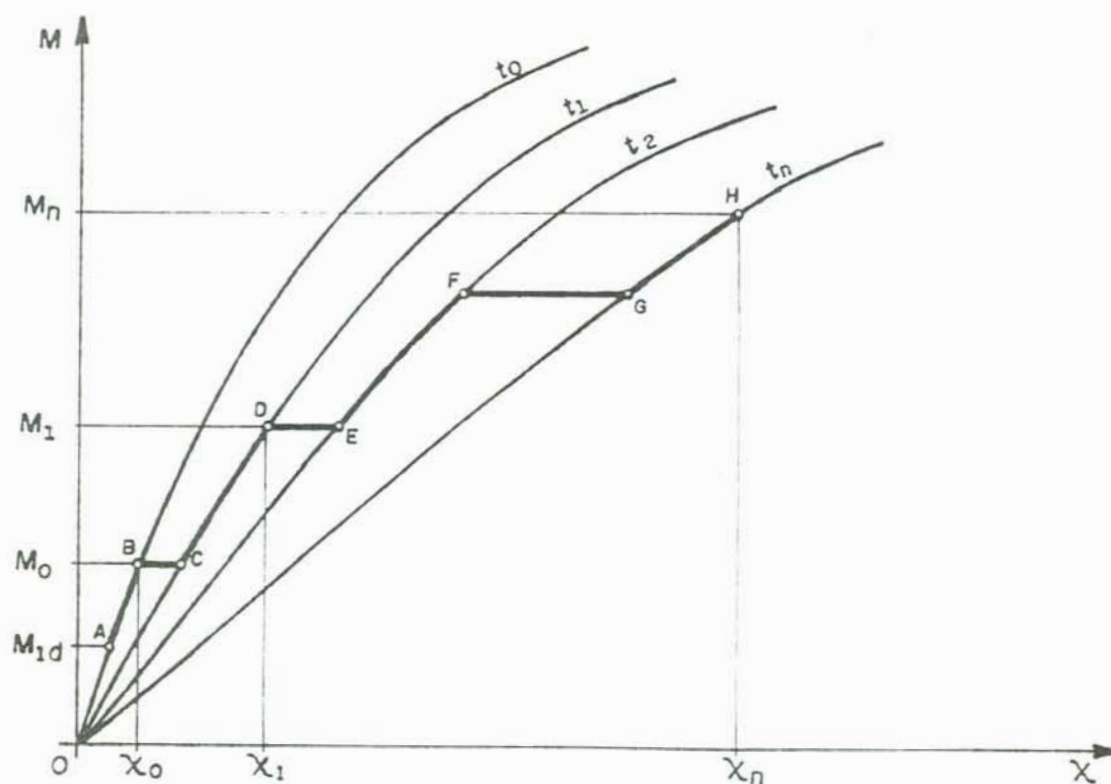


FIGURA 2.9.6 - Variação do momento fletor em uma seção genérica, devido às deformações diferidas.

Peia figura observa-se que se a análise fosse de primeira ordem, a convergência, na seção em estudo, corresponderia ao ponto A. A passagem do ponto A ao ponto B, com o crescimento do momento fletor de  $M_{1d}$  para  $M_0$ , deve-se à não-linearidade geométrica. De  $t_0$  a  $t_1$  admite-se que o momento fletor permanece constante, igual a  $M_0$ , porém ocorre um acrêscimo de curvatura devido às deformações diferidas do concreto, com a passagem do ponto B à posição C. De C a D, o momento fletor fica aumentado pela não-linearidade geométrica, passando para  $M_1$ , e a curvatura para  $\chi_1$ . Prosseguindo-se assim, as curvaturas na seção aumentam até a convergência final, no instante  $t_n$ , onde vale  $\chi_n$ .

A curvatura diferida total, devida à fluência e à retração entre os instantes  $t_0$  e  $t_n$ , é dada por

$$\chi_{dif} = \chi_n - \chi_0 \quad (2.9.4)$$

Esta curvatura, devida à fluência e à retração, deve ser calculada para todas as seções transversais do pilar. Ela é tomada como uma curvatura residual das seções.

Para o estágio final de carregamento de curta duração, o pilar será solicitado pela carga total. Trabalha-se agora com uma relação M-N-X sem incluir os efeitos da retração e da fluência, ou seja, com a mesma relação M-N-X adotada para cargas de curta duração. A curvatura obtida com essa relação M-N-X, para o carregamento total, deve-se adicionar a curvatura diferida  $\chi_{dif}$ , para o cálculo dos deslocamentos transversais ao eixo do pilar.

Neste estágio final, pode-se ainda considerar o endurecimento do concreto. A inclusão do endurecimento, pode ser feita tomando diretamente uma resistência majorada ou adotando um diagrama tensão-deformação modificado<sup>(17)</sup>, como o da figura 2.9.1, com a adoção de um valor negativo para  $\phi$ . O aumento da resistência do concreto com a idade pode ser obtido da figura 2.7.1.

A possibilidade de ruptura de uma seção do pilar deve ser verificada durante o período de carga constante, en-

tre  $t_0$  e  $t_n$ , ou no estágio final do carregamento de curta duração. Na passagem de um instante ao seguinte, com a queda brusca de rigidez, também deve ser verificada a ruptura. A instabilidade porê, sô deve ser admitida durante o carregamento constante, ou no estágio final de curta duração. O acrêscimo brusco dos deslocamentos que ocorre com a passagem de um instante ao outro, não deve ser considerado como instabilidade estrutural, pois na realidade a variação no tempo é contínua e não discreta como se está considerando.

## 2.10. Pilar com engastamento elástico simétrico

Nesta seção apresenta-se uma análise para pilares com engastamento elástico simétrico, baseada em um processo iterativo de aproximações sucessivas, onde em cada iteração realiza-se uma análise linear. O mesmo procedimento pode ser adotado para o caso de engastamento assimétrico. Uma solução similar, é sugerida no Manual de Flambagem do CEB/FIP<sup>(9)</sup>, para análise de pórticos de concreto armado, com algumas alterações.

Todo o estudo realizado neste trabalho restringe-se ao pilar da figura 2.10.1, submetido a uma carga axial  $P$  e momentos  $M_0$  aplicados nos apoios.

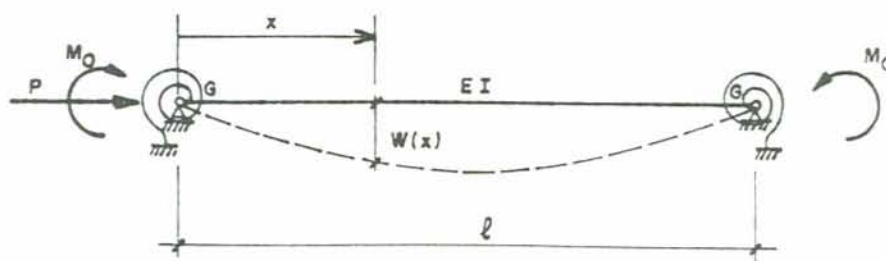


FIGURA 2.10.1 - Pilar com carregamento e engastamento elástico simétrico.

Admite-se que as molas são lineares, com rigidez  $\bar{a}$  rotação,  $G$ . Se o pilar for constituído de um material elástico linear, com rigidez  $\bar{a}$  flexão  $EI$ , a rigidez da mola pode ser relacionada com a anterior na forma

$$G = \beta_0 \frac{EI}{\ell}, \quad (2.10.1)$$

onde  $\beta_0$  é uma constante adimensional.

Para o caso elástico linear, a equação diferencial governando o equilíbrio do pilar<sup>(8)</sup> é dada por (2.10.2), quando a rigidez  $\bar{a}$  flexão  $EI$  é constante.

$$EI \frac{d^4 W}{dx^4} + P \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (2.10.2)$$

As condições de contorno a se aplicar na solução da equação diferencial, são

$$\begin{aligned} -EI W''(0) &= M_0 - G W'(0) ; \\ -EI W''(\ell) &= M_0 - G W'(\ell) ; \\ W(0) &= 0 ; \\ W(\ell) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10.3)$$

Resolvida a equação diferencial e aplicadas as condições de contorno, resulta a expressão para os deslocamentos transversais  $W$  do eixo do pilar

$$W(x) = A \operatorname{sen} \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{G\theta - M_0}{P} ; \quad (2.10.4)$$

onde

$$A = \frac{\theta}{\alpha} ; \quad B = \frac{M_0 - G\theta}{P} ; \quad \theta = \frac{-\alpha M_0 (\cos \alpha \ell - 1)}{P \operatorname{sen} \alpha \ell - \alpha G (\operatorname{sen} \alpha \ell - 1)} ;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} .$$



Em se tratando de concreto armado, a rigidez  $EI$  não é constante e a equação (2.10.4) não representa os deslocamentos transversais  $W$  do eixo do pilar. Admite-se entretanto, que esta seja uma boa aproximação da solução do problema, desde que se adote para a rigidez  $EI$  um valor médio.

Inicialmente admite-se para  $EI$  a rigidez à flexão da seção não-fissurada de concreto armado, dada por (2.5.11) e calcula-se a primeira aproximação  $W_1(x)$  para os deslocamentos pela equação (2.10.4). Com estes deslocamentos, o momento fletor  $M(x)$  em uma seção genérica ao longo do pilar é dado por

$$M(x) = M_0 + P W_1(x) - G W_1'(0) . \quad (2.10.5)$$

Divide-se o comprimento do pilar em  $n$  segmentos iguais, através das  $n+1$  seções transversais mostradas na figura 2.6.2-a, e calcula-se os momentos fletores em cada seção. Com o esforço normal  $P$  e o momento fletor em cada seção, calcula-se, através de um dos algoritmos apresentados em 2.5.2, as curvaturas das mesmas. A rigidez à flexão  $EI$  em cada seção, é obtida dividindo-se o momento fletor solicitante na mesma por sua curvatura correspondente. Obtêm-se assim, a variação da rigidez  $EI(x)$  ao longo do eixo do pilar. Calcula-se então a rigidez média  $EI_m$  pela equação (2.10.6).

$$EI_m = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} EI(x) dx . \quad (2.10.6)$$

A integral acima pode ser avaliada numericamente pelo processo de Simpson.

Com a rigidez média  $EI_m$ , procede-se a novo cálculo dos deslocamentos  $W_2(x)$  através de (2.10.4) e repete-se o procedimento até a convergência dos deslocamentos na seção central ao eixo do pilar. A instabilidade e a ruptura são detectadas da mesma forma que no processo de aproximações sucessivas descrito na seção 2.6.

Uma vez que se está substituindo uma distribuição variável de rigidez do pilar, por uma rigidez constante equivalente, precisa-se determinar numericamente um número mínimo de seções necessárias para que o erro seja tolerável. A comparação deste processo, para o caso de pilar bi-rotulado sem as molas, com o processo iterativo descrito em 2.6, mostrou que com a adoção de 7 seções transversais, o erro cometido é inferior a 1%, podendo portanto, ser considerado um processo alternativo de análise, para o caso em questão.

### 3. DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

#### 3.1. O problema do dimensionamento

O dimensionamento de uma seção de concreto armado submetida a uma solicitação de flexo-compressão, sō pode ser realizado iterativamente, atravēs de um processo de aproximações sucessivas, onde em cada iteraçāo procura-se igualar os esforços solicitantes aos resistentes<sup>(33)</sup>. O processo pode tornar-se trabalhoso e atē mesmo inviāvel sem a utilizaçāo de um computador digital, dependendo da geometria da seçāo e da disposiçāo das barras da armadura. Em geral, existe uma infinidade de soluçōes que satisfazem o equilībrio entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. Para tornar a soluçāo ũnica, hā a necessidade de se fixar de antemāo a disposiçāo e proporcionamento da armadura. Assim ē que para o caso clāssico de seçōes retangulares, submetidas a flexo-compressāo normal, com armaduras dispostas nos lados do retāngulo perpendiculares ao plano de atuaçāo do momento fletor, existem infinitas soluçōes com armaduras assimétricas, porē m existe uma ũnica soluçāo com armadura simétrica<sup>(33)</sup>.

O problema bāsico do dimensionamento, apesar das possīveis variantes de soluçāo, ē um sō: deseja-se encontrar a quantidade de armadura com uma disposiçāo prē-determinada, a ser adicionada ā seçāo de concreto, de forma que os esforços solicitantes igualem-se aos esforços resistentes no estado limite ũltimo. Resolve-se o problema baseando-se em algum critērio de ruptura da seçāo de concreto armado. O critērio de ruptura adotado pela NB-1/78 ē o mostrado na figura 2.4.2, atravēs dos domīnios de dimensionamento. Dividindo-se o problema em dois, caso de grande excentricidade e caso de pequena excentricidade<sup>(16,21)</sup>, ou resolvendo-o diretamente atravēs de zonas de dimensionamento<sup>(33,35)</sup>, pode-se hoje, com a utilizaçāo de um computador digital, dimensionar uma seçāo de concreto ar

mado de forma genérica, sob flexo-compressão normal, no estado limite último.

A dificuldade do dimensionamento fica profundamente ampliada quando se estende tal problema a pilares. Em se tratando de pilares de concreto armado, surge, além da não-linearidade física do material, também existente no caso de dimensionamento de seção, a não-linearidade geométrica ocasionada pelos deslocamentos transversais do seu eixo. Os deslocamentos aumentam os momentos fletores solicitantes e com isto, a armadura necessária para garantir o equilíbrio. Com o desconhecimento da armadura, pois esta é a incógnita, os deslocamentos não podem ser calculados, uma vez que a rigidez depende também da mesma. Conseqüentemente não se conhece os momentos fletores solicitantes e o problema fica aparentemente sem solução. Realmente não se consegue dimensionar um pilar de concreto armado a não ser por tentativas.

Assim, surgiram processos simplificados, com maior ou menor grau de aproximação, que eliminam as tentativas. Estes processos tratam as duas não-linearidades de maneira independente, em geral, considerando inicialmente a não-linearidade geométrica e em seguida, incluindo a física. A diferença básica entre eles consiste na forma de se incluir a não-linearidade geométrica no dimensionamento, como é mostrado a seguir.

#### a) Processo simplificado tipo 1

Neste processo, os efeitos não-lineares geométricos são incluídos, assumindo-se uma deformada para o eixo do pilar. Com isto, resulta uma excentricidade adicional que irá incrementar o momento fletor na seção crítica, a seção mais solicitada. Com o momento total, soma dos momentos de primeira e segunda ordem e com o esforço normal, dimensiona-se a seção à flexo-compressão. Esse é o processo simplificado permitido pela NB-1/78 e pelo CEB/FIP no seu Manual de Flambagem, como se apresenta na seção 3.3.

#### b) Processo simplificado tipo 2

Como alternativa ao processo anterior, pode-se admi

tir que o pilar é elástico linear e resolve-se a equação diferencial de equilíbrio para se encontrar o momento fletor máximo que atua nas seções ao longo do eixo do pilar. Esse momento máximo consiste de uma majoração do momento de primeira ordem na seção e, por isso, o processo é conhecido como Método do Momento Majorado. Com o momento majorado e o esforço normal, dimensiona-se a seção à flexo-compressão. Essa é a solução proposta pela norma americana ACI<sup>(2)</sup>.

A precisão dos dois processos fica restrita a condições particulares de carregamento e ao próprio valor do carregamento. Uma vez que a não-linearidade geométrica é incluída de forma aproximada, a imprecisão tende a aumentar com o aumento da esbeltez do pilar. Além disso, com a realização do dimensionamento à flexo-compressão da seção crítica, impõe-se a condição de ruína por ruptura, o que pode não ser o caso. A comparação desses processos simplificados entre si e com um algoritmo baseado na análise descrita no capítulo anterior, é apresentada no capítulo 4.

### 3.2. Prescrições da NB-1/78

Apresenta-se nesta seção as prescrições da NB-1/78 relativas ao dimensionamento de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal. A flexo-compressão oblíqua não é objeto deste trabalho, de forma que as prescrições relativas às mesmas serão ignoradas. O processo simplificado de dimensionamento de pilares moderadamente esbeltos, proposto nesta norma, é apresentado na seção seguinte juntamente com as proposições do CEB, ACI e norma DIN 1045.

#### a - Cálculo como viga contínua

Permite a NB-1 considerar-se as vigas da estrutura aporticada de edifícios como contínuas, sem ligações rígidas com os pilares, devendo-se respeitar certas observações relativas às mesmas. Em relação aos pilares, permite-se também certas simplificações para as estruturas de edifícios em que são atuam cargas previstas na NB-5<sup>(3)</sup> e em que não seja necessário

considerar a ação do vento. A consideração da ação do vento será exigida nas estruturas em que esta ação possa produzir efeitos estáticos ou dinâmicos importantes. De acordo com a NB-1, a ação do vento deve ser considerada obrigatoriamente no caso de estruturas com nós deslocáveis, nas quais a altura seja maior que 4 vezes a largura menor, ou em que, numa dada direção, o número de filas de pilares seja inferior a 4.

Nos pórticos deslocáveis, os nós são deslocáveis horizontalmente e o deslocamento horizontal é limitado apenas pela rigidez dos pórticos. Nos pórticos altos de vários andares, a estabilidade global pode ser facilmente posta em perigo pelos deslocamentos horizontais, pois a inclinação dos pilares ao longo de muitos andares provoca uma excentricidade crescente da carga total resultante. Levando-se em conta o grande risco a que os pilares de pórticos estão sujeitos devido à deslocabilidade do sistema, os sistemas deslocáveis devem ser evitados ao máximo no projeto e os pórticos devem ser fixados horizontalmente com o auxílio de lajes de piso, paredes estruturais de contraventamento, escadas, caixas de elevador, ou outra estrutura de contraventamento com rigidez suficiente para impedir a deslocabilidade. "Somente um engenheiro sem habilidade arcaria com as preocupações deixando para o proprietário os problemas de custos que surgem em sistemas de pórticos deslocáveis de vários andares"<sup>(22)</sup>.

O CEB<sup>(10)</sup> considera como sendo indeslocáveis, as estruturas apertadas para as quais as desigualdades (3.2.1) são atendidas.

$$\begin{aligned} \text{Se } n \leq 3 : h_{\text{tot}} \sqrt{F_v/E_{\text{cm}}J} &\leq 0,2 + 0,1 n ; \\ \text{se } n \geq 4 : h_{\text{tot}} \sqrt{F_v/E_{\text{cm}}J} &\leq 0,6 ; \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde

$n$  - número de andares;

$h_{\text{tot}}$  - altura total da estrutura, medida do topo da fundação ou de um nível indeformável;

$E_{cm} J$  - soma das rigidezes à flexão no estado não fissurado dos elementos verticais de contraventamento, na direção em consideração; quando a rigidez varia ao longo do comprimento do elemento, deve-se adotar uma rigidez equivalente;

$F_v$  - soma de todas as cargas verticais de serviço.

Dependendo do posicionamento na estrutura, os pilares de edifícios podem ser classificados em pilares intermediários, pilares de extremidade e pilares de canto. Nos pilares de canto a situação é de flexo-compressão oblíqua, não sendo portanto objeto deste trabalho.

De acordo com a NB-1 os pilares intermediários poderão ser calculados sem consideração dos momentos fletores a eles transmitidos pelas vigas. A situação de projeto é portanto a de compressão centrada. Entretanto a norma exige a consideração de uma excentricidade acidental  $e_a$ , para levar em conta a incerteza da localização da força normal e o possível desvio do eixo da peça durante a construção, em relação à posição prevista no projeto, dada pelo maior dos valores

$$\begin{aligned} e_a &= h/30 \\ e_a &= 2 \text{ cm} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde  $h$  é a maior dimensão da seção na direção em que se considera a excentricidade.

Assim, mesmo para os pilares intermediários, o dimensionamento deverá ser feito à flexo-compressão.

As reações das vigas contínuas de dois ou mais tramos, sobre os pilares, poderão ser calculadas, desde que o menor índice de rigidez  $I/l$  da viga, não seja inferior a 80% do maior, considerando-se cada tramo independente e livremente apoiado. Todavia se houver balanço, o efeito de suas cargas será calculado considerando-se a continuidade existente. De modo geral não se recomenda o emprego dessa permissão da NB-1 para vigas com número reduzido de tramos, nem para a avalia-

ção das cargas dos pilares que suportam os tramos de extremidade das vigas<sup>(16)</sup>.

Para os pilares de extremidade, os momentos fletores nos nós transmitidos pelas vigas, deverão obrigatoriamente ser considerados e poderão ser calculados pelas expressões (3.2.3) e (3.2.4).

$$M_{inf} = M_{eng} \frac{r_{inf}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{vig}} ; \quad (3.2.3)$$

$$M_{sup} = M_{eng} \frac{r_{sup}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{vig}} ; \quad (3.2.4)$$

onde

$M_{eng}$  = momento de engastamento perfeito;

$r=I/\ell$  = índice de rigidez.

Na figura 3.2.1-a esclarece-se a convenção adotada nas expressões (3.2.3) e (3.2.4).

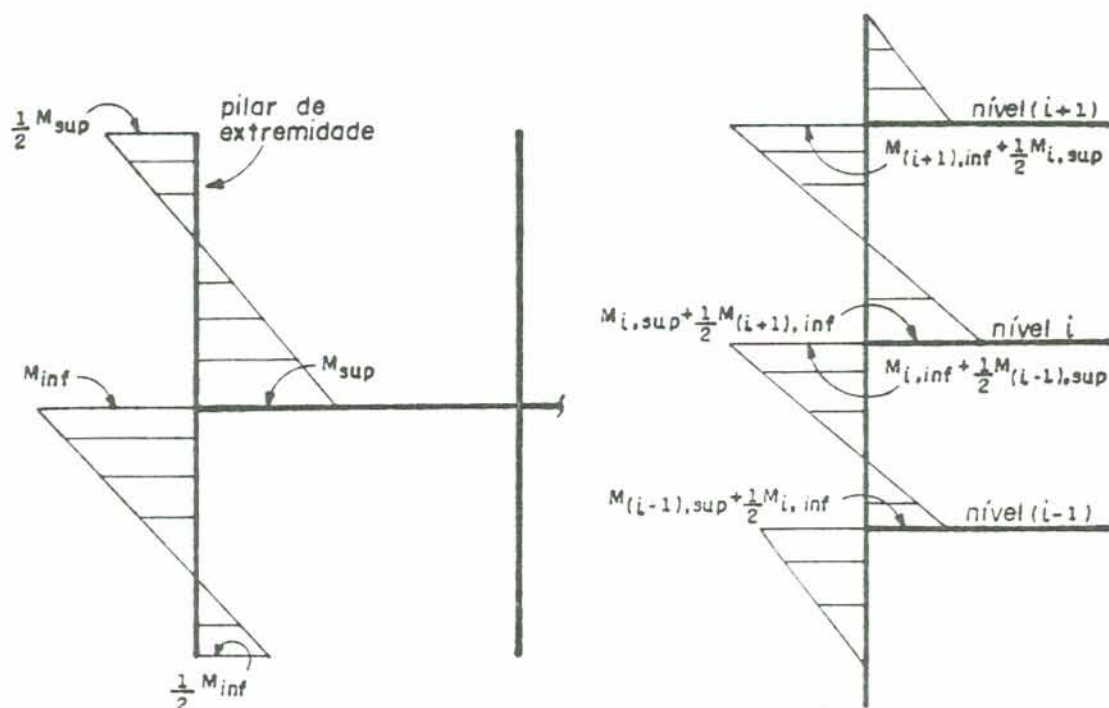
Segundo Fusco<sup>(16)</sup>, para as extremidades opostas, tanto do pilar inferior quanto do pilar superior, propagam-se momentos que, em geral, podem ser admitidos como metade do momento no nó em consideração, conforme é mostrado na figura 3.2.1-a. Assim, nos edifícios de vários andares, os momentos nos pilares são provenientes da superposição dos efeitos das vigas de diferentes níveis, figura 3.2.1-b. Por exemplo, para o pilar situado entre os níveis  $i$  e  $i+1$  os momentos finais são

$$M_{base} = M_{i,sup} + \frac{1}{2} M_{(i+1),inf} ; \quad (3.2.5)$$

$$M_{topo} = M_{(i+1),inf} + \frac{1}{2} M_{i,sup} ;$$

onde  $M_{i,sup}$  e  $M_{i+1,inf}$  são os momentos calculados pelas expressões (3.2.3) e (3.2.4).





a - momentos nos pilares-  
convenção;

b - efeito da superposição  
de pilares;

FIGURA 3.2.1 - Momentos nos pilares de extremidade.

Com relação à excentricidade acidental, permanece a mesma observação feita para o caso de pilares intermediários.

b - Esbeltez

O índice de esbeltez  $\lambda$  de um pilar é definido pela relação

$$\lambda = \frac{l_e}{i}, \quad (3.2.6)$$

onde

$l_e$  = comprimento de flambagem;

$i$  = raio de giração da seção geométrica da peça, sem consideração da armadura.

Nas estruturas de nós indeslocáveis, a NB-1 permite adotar-se para o comprimento de flambagem  $\lambda_e$  de um pilar, a distância entre os eixos das vigas entre as quais ele se situa. Essa hipótese consiste em assumir que os pilares são rotulados nos nós, estando a favor da segurança.

Na realidade, o comprimento de flambagem de um pilar depende da rigidez dos nós entre os quais ele se situa. Essa rigidez é função da rigidez das vigas e dos pilares que concorrem ao nó. Em geral adota-se para a rigidez  $EI$ , a seção transversal de concreto no Estádio I, sem consideração da armadura. A rigor a rigidez das vigas deveria ser calculada no Estádio II, o que diminui o grau de engastamento do pilar e aumenta o comprimento de flambagem<sup>(22)</sup>.

Para estruturas de nós indeslocáveis, o comprimento de flambagem  $\lambda_e$  dos pilares é sempre inferior ao seu comprimento real  $\lambda$  e depende do grau de engastamento do mesmo. O comprimento de flambagem pode ser determinado, admitindo-se que o pilar encontra-se engastado elasticamente nos apoios. As constantes de mola à rotação,  $G$ , devem ser calculadas considerando-se apenas as vigas que concorrem aos nós<sup>(22)</sup>. A rigidez  $G$  da mola pode ser relacionada com a rigidez  $EI$  do pilar por (3.2.7), onde  $\beta_0$  é uma grandeza adimensional.

$$G = \beta_0 \frac{EI}{\lambda} \quad (3.2.7)$$

Para o caso de engastamento elástico simétrico analisado no capítulo 2, o comprimento de flambagem é obtido através da equação<sup>(1)</sup>

$$\beta_0 \operatorname{tg} \frac{\alpha \lambda}{2} + \alpha \lambda = 0 \quad , \quad (3.2.8)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (3.2.9)$$

Pode-se utilizar o método de Newton-Raphson para encontrar a raiz  $\alpha$  da equação (3.2.8) e a carga de flambagem  $P_{cr}$  será dada por

$$P_{cr} = \alpha^2 EI \quad (3.2.10)$$

A carga de flambagem  $P_{cr}$  pode ser escrita na forma (3.2.11), onde o comprimento de flambagem  $\lambda_e$  é uma fração do comprimento real  $\lambda$  dado por (3.2.12).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\lambda_e^2} \quad (3.2.11)$$

$$\lambda_e = \alpha_e \lambda \quad (3.2.12)$$

Para o caso bi-rotulado,  $G = 0$  e  $\alpha_e = 1$  e para o caso bi-engastado,  $G = \infty$  e  $\alpha_e = 0,5$ . O comprimento de flambagem de um pilar de pórtico indeslocável varia, portanto, de  $0,5 \lambda$  a  $\lambda$ .

Para simplificar o trabalho de determinação do comprimento de flambagem de pilares com engastamento elástico, H. Kupfer<sup>(22)</sup> propõe fórmulas aproximadas com excelentes resultados. No caso de engastamento elástico simétrico, o comprimento de flambagem pode ser avaliado por

$$\lambda_e = \left[ \frac{1 + 0,205 \beta_0}{1 + 0,410 \beta_0} \right] \lambda \quad (3.2.13)$$

Para evitar a adoção de valores muito baixos para o comprimento de flambagem, o CEB limita  $\lambda_e$  em  $0,85 \lambda$ <sup>(10)</sup>.

Leonhardt<sup>(22)</sup> apresenta nomogramas para o cálculo do comprimento de flambagem de pilares de pórticos indeslocáveis com engastamento elástico assimétrico. A precisão da adoção deste conceito a pilares de concreto armado, será verificada no capítulo seguinte.

Em estruturas de nós deslocáveis, o comprimento de flambagem é maior que o comprimento real do pilar e deve ser determinado de acordo com as condições de extremidade do mesmo.

A NB-1 prescreve que, em nenhum caso, o índice de esbeltez  $\lambda$  do pilar poderá ultrapassar 200. Para índices de esbeltez não superiores a 40, pilares considerados curtos, os efeitos da não-linearidade geométrica podem ser desprezados. Se  $\lambda$  é maior que 140, a segurança deve ser demonstrada pelo processo exato que leva em consideração as relações momento fletor-esforço normal-curvatura, como o processo de aproximações sucessivas apresentado no capítulo anterior. Além disso, nesse caso, o coeficiente  $\gamma_f$  de majoração da força normal é dado por

$$\gamma_f = 1,4 + 0,01 (\lambda - 140) \quad . \quad (3.2.14)$$

Para índices de esbeltez entre 40 e 80, a NB-1 apresenta um processo simplificado para a inclusão da não-linearidade geométrica, descrito na seção seguinte.

Nos casos de índice de esbeltez menor ou igual a 140, o coeficiente de majoração das cargas, força normal e momento, é tomado igual a 1,4.

### c - Situações de projeto e de cálculo

Com relação à posição da força normal  $F_d$  em relação ao centro de gravidade da seção geométrica da peça, ela pode ser centrada ou excêntrica. Ainda nos dois casos pode existir ou não um momento fletor  $M_{0d}$  independente da força  $F_d$ . A força  $F_d$  pode ser excêntrica, por exemplo, no caso de redução da seção do pilar em determinado andar da estrutura. Na figura 3.2.2 apresenta-se os casos possíveis.

Quando a força  $F_d$  for suposta centrada com  $e_i = 0$ , o cálculo será feito separadamente nas duas direções principais da seção geométrica, sob a mesma força total, com as excentricidades acidentais  $e_{ax}$  e  $e_{ay}$ , não se somando as armadu-

ras. Dimensiona-se portanto para os momentos de primeira ordem  $M_{1d} = \pm F_d e_{ax}$  e  $M_{1d} = \pm F_d e_{ay}$ . Na figura 3.2.3-a ilustra-se as posições da força normal a serem consideradas no cálculo.

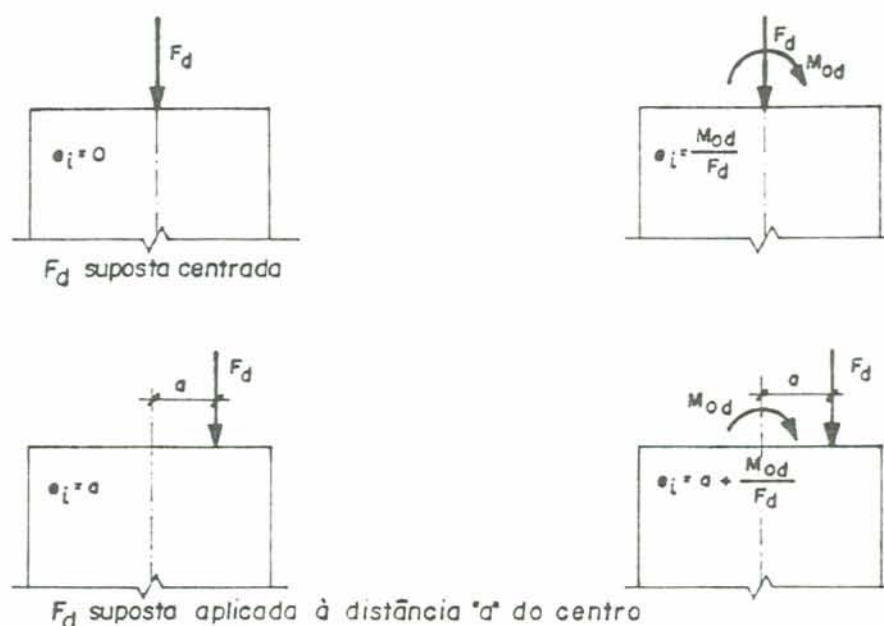


FIGURA 3.2.2 - Situações de projeto do pilar

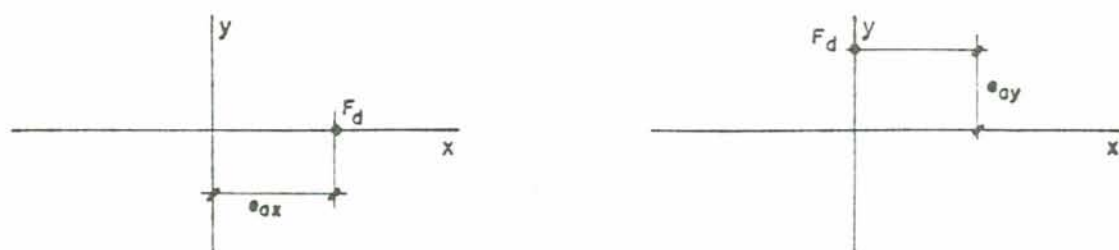
Se  $F_d$  for excêntrica, com excentricidade inicial  $e_i$ , e agir sobre um eixo principal, o cálculo far-se-á separadamente com dois momentos fletores, sob a mesma força total, sendo um momento normal  $M_{1d} = F_d (e_i \pm e_{ax})$  e um momento oblíquo  $M_{1d} = F_d \sqrt{e_i^2 + e_{ay}^2}$ , tomando-se  $e_{ay}$  no sentido mais desfavorável, para um lado ou outro do eixo. Permite-se entretanto, substituir o momento oblíquo por um momento normal  $M_{1d} = \pm F_d e_y$ , supondo-se  $F_d$  sobre o eixo  $y$  com a excentricidade  $e_y$  dada por

$$e_y = e_{ay}, \text{ se } e_i > 3 e_{ay};$$

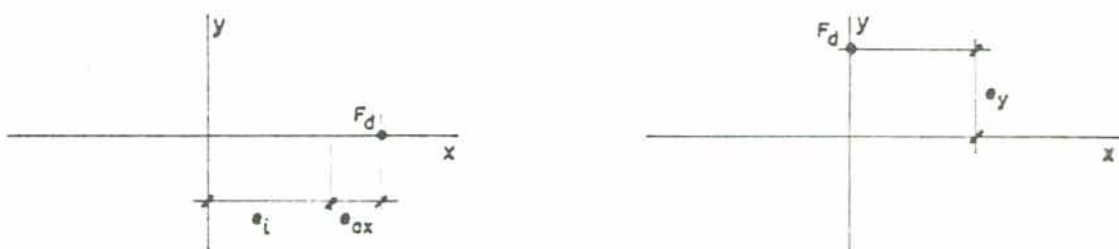
$$e_y = 1,6 e_{ay} - 0,2 e_i, \text{ se } e_{ay} \leq e_i \leq 3 e_{ay}; \quad (3.2.15)$$

$$e_y = e_{ay} + 0,4 e_i, \text{ se } 0 \leq e_i < e_{ay}.$$

Na figura 3.2.3-b apresenta-se as posições a serem consideradas nesse caso.



a - Caso em que  $e_i = 0$



b - Caso em que  $e_i \neq 0$

FIGURA 3.2.3 - Situações de cálculo do pilar.

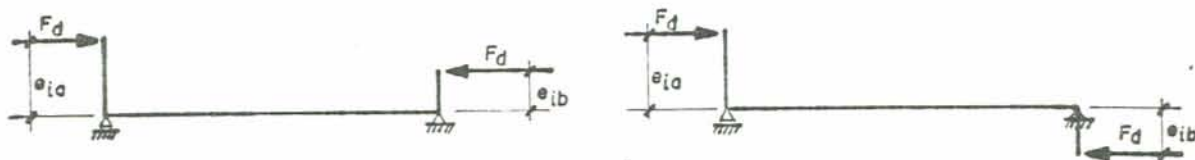
d - Pilar com excentricidades diferentes da carga nos apoios

A situação de projeto de um pilar pode ser, em alguns casos, como a mostrada na figura 3.2.4, onde as excentricidades iniciais da força normal  $F_d$  são diferentes nos dois apoios.

Nas estruturas de nós considerados indeslocáveis, a NB-1 permite que se adote para a situação da figura 3.2.4, uma situação de cálculo equivalente com excentricidade  $e_i$  constante e dada pelo maior dos valores (3.2.16) e (3.2.17), onde admite-se sempre que  $e_{ia}$  é positiva e maior que  $|e_{ib}|$  e  $e_{ib}$  é negativa se elas forem de sentidos opostos.

$$e_i = 0,6 e_{ia} + 0,4 e_{ib} \quad (3.2.16)$$

$$e_i = 0,4 e_{ia} \quad (3.2.17)$$



a - Excentricidades no mesmo sentido;

b - Excentricidades em sentidos opostos;

FIGURA 3.2.4 - Pilar carregado com excentricidades diferentes da força normal.

A essa excentricidade inicial equivalente deverá ser acrescentada a excentricidade acidental  $e_a$  e incluída a não-linearidade geométrica, se for o caso.

Além disso, deve-se dimensionar o pilar para a excentricidade  $e_{ia}$  acrescida da excentricidade acidental  $e_a$ , sem levar em consideração os efeitos não-lineares geométricos. A armadura a se adotar será a maior obtida nos dois casos. No capítulo 4 verifica-se a precisão desse modelo de cálculo através de uma série de exemplos numéricos.

### 3.3. Processo simplificados de dimensionamento de pilares

#### 3.3.1. Processo simplificado da NB-1

A NB-1 propõe um processo simplificado para incluir a não-linearidade geométrica no dimensionamento de pilares de concreto armado, quando o índice de esbeltez  $\lambda$  é maior que 40 e menor ou igual a 80. O processo restringe-se a barras retas com seção transversal simétrica constante, inclusive a armadura, e força normal também constante ao longo do seu comprimento.

Assume-se uma configuração deformada para o pilar e arbitra-se a curvatura última da seção mais solicitada. Na figura 3.3.1 apresenta-se o pilar na situação de cálculo, onde  $M_{1d}$  é o momento de primeira ordem obtido com as considerações da seção anterior e  $F_d$  é a força normal de cálculo.

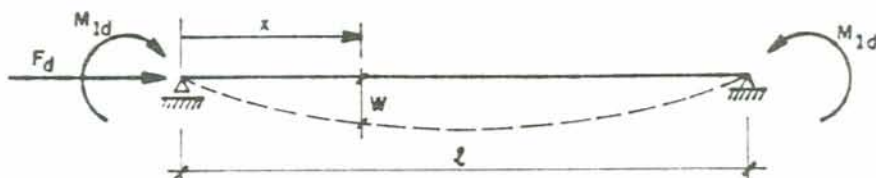


FIGURA 3.3.1 - Situação de cálculo para o pilar.

Admite-se para a deformada  $W$  do eixo do pilar, uma função contínua que cumpre as condições geométricas de contorno  $W(0) = 0$  e  $W(l) = 0$ , na forma

$$W(x) = W_{\max} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} . \quad (3.3.1)$$

Com a hipótese de pequenos deslocamentos e utilizando-se a expressão aproximada para a curvatura, resulta para as mesmas, a expressão

$$\chi = - \frac{\pi^2}{l^2} W_{\max} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} . \quad (3.3.2)$$

Cabe aqui salientar que a função assumida para os deslocamentos em (3.3.1), não cumpre as condições mecânicas de contorno. De fato, por (3.3.2) verifica-se serem nulas as curvaturas nos apoios, o que só seria real se os momentos aí também fossem nulos.

De acordo com (3.3.2) observa-se que a curvatura  $\chi_u$  na seção do meio do comprimento do pilar, é proporcional ao deslocamento transversal máximo  $W_{\max}$  que também ocorre nessa seção, isto é



$$\chi_u = - \frac{\eta^2}{\ell^2} W_{\bar{m}ax} \quad (3.3.3)$$

Assim, o deslocamento máximo  $W_{\bar{m}ax}$  pode ser calculado em função da curvatura  $\chi_u$  da seção mais solicitada, por

$$W_{\bar{m}ax} = \frac{\ell^2}{\eta^2} |\chi_u| \quad (3.3.4)$$

Para  $|\chi_u|$ , a NB-1 adota a expressão

$$|\chi_u| = \frac{0,0035 + f_{yd}/E_s}{(\nu + 0,5) h} ; \quad (3.3.5)$$

com

$$\nu + 0,5 \geq 1,0 ; \quad (3.3.6)$$

onde

$$\nu = \frac{F_d}{A_c f_{cd}} ; \quad (3.3.7)$$

sendo

$h$  = lado, paralelo à excentricidade acidental considerada, do retângulo circunscrito à seção;

$A_c$  = área da seção geométrica da peça.

Na realidade, a NB-1 adota uma expressão um pouco diferente de (3.3.4), apenas substituindo o denominador  $\eta^2$  por 10.

O deslocamento transversal  $W_{\bar{m}ax}$  será tomado como uma excentricidade de segunda ordem, gerando um momento de segunda ordem  $M_{2d}$ , dado por

$$M_{2d} = F_d W_{\bar{m}ax} \quad (3.3.8)$$

O dimensionamento do pilar recai no dimensionamento à flexo-compressão da seção mais solicitada, com a força normal  $F_d$  e com o momento fletor total  $M_d$ , dado por

$$M_d = M_{1d} + M_{2d} \quad (3.3.9)$$

O processo proposto é de aplicação fácil e imediata, uma vez que conhecido o momento fletor total de cálculo  $M_d$ , o dimensionamento recai no caso de pilares curtos, com índice de esbeltez  $\lambda$  menor que 40. O coeficiente  $\nu$  na expressão (3.3.5), tem por objetivo levar em conta o decréscimo da curvatura última de uma seção de concreto armado com o incremento do esforço normal. Entretanto tal redução não é suficiente e no caso de grandes valores da força normal  $F_d$ , a curvatura convencional adotada em (3.3.5) será maior que a curvatura real, ocasionando uma solução a favor da segurança, como mostrado através de exemplos no capítulo seguinte.

### 3.3.2. Processo simplificado do CEB

O processo simplificado proposto no Manual de Flambagem do CEB/FIP<sup>(9)</sup>, difere do processo da NB-1 apenas quanto ao valor adotado para a curvatura  $\chi_u$ . Segundo o CEB, a curvatura  $\chi_u$  para a utilização na equação (3.3.4) é dada por

$$|\chi_u| = \frac{0,0035 + f_{yd}/E_s}{h}, \text{ se } \nu_o \leq 0,5 \quad ; \quad (3.3.10)$$

$$|\chi_u| = \frac{0,0035 + f_{yd}/E_s}{2\nu_o h}, \text{ se } \nu_o > 0,5 \quad ;$$

onde

$$\nu_o = \frac{F_d}{0,85 A_c f_{cd}} \quad (3.3.11)$$

Entretanto para o cálculo das resistências de projeto dos materiais, as resistências minoradas do aço e do concreto, deve-se aplicar um fator de comportamento  $\gamma_n = 1,2$ . Assim as resistências de cálculo serão

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_n \gamma_c} ; \quad (3.3.12)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_n \gamma_s} ;$$

onde  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ , de acordo com o CEB, são iguais a 1,5 e 1,15, respectivamente.

### 3.3.3. Processo simplificado da ACI

O processo simplificado proposto pela ACI<sup>(2)</sup>, usualmente denominado método do momento majorado, é permitido para pilares com índices de esbeltez  $\lambda$  entre 22 e 100. Para pilares com índices de esbeltez inferiores a 22, despreza-se os efeitos não-lineares geométricos e o dimensionamento enquadra-se no caso de pilares curtos.

O processo é baseado na análise elástica linear do pilar da figura 3.3.1. Admitindo-se que o material é elástico linear, o deslocamento transversal máximo  $W_{m\bar{a}x}$ , que ocorre na seção do meio do comprimento do pilar<sup>(8)</sup>, é dado por

$$W_{m\bar{a}x} = \frac{M_{1d} \ell^2}{8 EI} \frac{2 (1 - \cos \Psi)}{\Psi^2 \cos \Psi} ; \quad (3.3.13)$$

onde

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F_d}{P_e}} ; \quad (3.3.14)$$

e  $P_e$  é a carga de flambagem de Euler dada por (3.3.15).

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{\lambda^2} \quad (3.3.15)$$

O momento total  $M_d$  na seção crítica é

$$M_d = M_{1d} + F_d W_{m\bar{a}x} \quad (3.3.16)$$

Substituindo (3.3.13), (3.3.14) e (3.3.15) em (3.3.16), resulta

$$M_d = M_{1d} \delta \quad ; \quad (3.3.17)$$

onde

$$\delta = \frac{1}{\cos \psi} \quad (3.3.18)$$

O fator  $\delta$  é denominado fator de amplificação e pode ser colocado simplificadamente na forma

$$\delta = \frac{1}{1 - \frac{F_d}{P_e}} \quad (3.3.19)$$

O fator de amplificação adotado pela ACI é dado por (3.3.20), onde  $\phi = 0,70$  é um fator de redução de capacidade.

$$\delta = \frac{1}{1 - \frac{F_d}{\phi P_e}} \quad (3.3.20)$$

Para o cálculo da rigidez  $EI$  pode-se adotar a expressão

$$EI = \frac{E_c I_c / 2,5}{1 + \beta_d} \quad ; \quad (3.3.21)$$

onde  $I_c$  é o momento de inércia centroidal da seção de concreto, sem inclusão da armadura.

O parâmetro  $\beta_d$  em (3.3.21), é a razão entre o momento devido às cargas de longa duração e o momento de projeto total.

Com o momento total  $M_d$  e a força normal  $F_d$ , dimensiona-se a seção à flexo-compressão, como no caso de pilares curtos.

O processo, em geral, tende a superestimar a armadura para valores da força normal significativos em relação a carga de flambagem de Euler. Para pequenos valores da força normal, os resultados são razoáveis como mostrado no capítulo 4.

#### 3.3.4. Processo simplificado da DIN

Segundo a norma DIN 1045<sup>(22)</sup>, os efeitos não-lineares geométricos podem ser desprezados em qualquer dos seguintes casos:

a)  $\lambda \leq 20$ .

b)  $e_1/h \geq 3,5$  se  $\lambda \leq 70$ , e

$$e_1/h \geq 3,5 \frac{\lambda}{70} \text{ se } \lambda > 70, \text{ onde } e_1 \text{ e } h \text{ são a excentricidade}$$

de primeira ordem e a dimensão da seção transversal na direção em consideração.

c)  $\lambda \leq 45$  para pilares internos de pórticos indeslocáveis regulares, quando o comprimento de flambagem for tomado igual à altura do andar.

d)  $\lambda \leq 45 - 25 \frac{M_1}{M_2}$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são os momentos de primeira

ordem nos apoios e  $|M_2| \geq |M_1|$ , no caso de peças comprimidas indeslocáveis engastadas elasticamente em ambas as extremidades e sem cargas transversais.

Quando a situação de cálculo não se enquadrar em um dos casos anteriores, os efeitos não-lineares geométricos devem ser incluídos. A norma apresenta um processo, para  $20 < \lambda \leq 70$ , que consiste na adoção de uma excentricidade adicional de segunda ordem, análogo aos processos da NB-1 e CEB. A excentricidade de segunda ordem  $e_2$  é dada por uma das expressões (3.3.22) a (3.3.24), em função da excentricidade inicial relativa  $e_1/h$  e do índice de esbeltez  $\lambda$ .

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{100} \sqrt{0,10 + \frac{e_1}{h}}, \quad \text{se } 0 \leq \frac{e_1}{h} < 0,30 ; \quad (3.3.22)$$

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{160}, \quad \text{se } 0,30 \leq \frac{e_1}{h} < 2,50 ; \quad (3.3.23)$$

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{160} \left(3,50 - \frac{e_1}{h}\right), \quad \text{se } 2,50 \leq \frac{e_1}{h} < 3,50 . \quad (3.3.24)$$

### 3.4. Sistematização computacional para o dimensionamento

#### 3.4.1. Relação carregamento de ruína-armadura

Na seção anterior apresentou-se alguns processos simplificados de dimensionamento propostos em normas. Esses processos não levam em consideração uma análise global da estabilidade do pilar, através da inclusão das não-linearidades física e geométrica simultaneamente. As duas não-linearidades são incluídas de forma separada e a solução obtida pode dispersar muito da teoricamente exata, obtida através da análise descrita no capítulo 2.

Para se efetuar o dimensionamento de um pilar de concreto armado baseado nessa análise, é necessária a determinação da relação entre o carregamento de ruína do pilar e a quantidade de armadura do mesmo.

Na figura 3.3.1 apresenta-se um pilar bi-rotulado com o carregamento de projeto para o qual deseja-se proceder

ao dimensionamento. Admite-se ainda que a seção transversal é constante ao longo do eixo do pilar, inclusive a armadura. A forma da seção transversal e a disposição da armadura são conhecidas "a priori". Pode-se então determinar a relação entre o carregamento de ruína e a armadura existente em uma seção transversal do pilar.

Inicialmente admite-se a seção sem armadura alguma, isto é, que o pilar seja de concreto simples. Escolhe-se um parâmetro inteiro  $n$  maior que 1 e determina-se o perfil do carregamento representado pelo momento fletor  $m_{1d}$  e pela força normal  $f_d$ , aplicados nos apoios, tais que

$$m_{1d} = \frac{M_{1d}}{n} ; \quad (3.4.1)$$

$$f_d = \frac{F_d}{n} .$$

Conhecido o perfil do carregamento, procede-se a uma análise incremental como a descrita no capítulo anterior, de forma que numa etapa genérica de carga,  $j$ , o carregamento atuante no pilar consiste do momento  $M_j$  e da força normal  $F_j$ , aplicados nos apoios e dados por

$$M_j = j m_{1d} ; \quad (3.4.3)$$

$$F_j = j f_d . \quad (3.4.4)$$

Com o momento  $M_j$  e a força normal  $F_j$ , realiza-se a análise até a convergência dos deslocamentos. Incrementa-se o carregamento e repete-se o processo até que em uma etapa de carga,  $k_0$ , ocorra a ruína do pilar, por ruptura ou por instabilidade, com o momento  $M_{k_0}$  e a força normal  $F_{k_0}$ , dados por

$$M_{k_0} = k_0 m_{1d} ; \quad (3.4.5)$$

$$F_{k0} = k_0 f_d \quad (3.4.6)$$

Determinou-se assim o carregamento de ruína, representado por  $M_{k0}$  e  $F_{k0}$ , para o pilar sem armadura e um primeiro ponto na curva da figura 3.4.1.

Para a determinação do próximo ponto da curva, arbitra-se um valor  $A_{s1}$  para a quantidade de armadura nas seções transversais e repete-se o processo até a ocorrência da ruína na etapa de carga,  $k_1$ , com o momento  $M_{k1}$  e a força normal  $F_{k1}$ . Novos pontos são encontrados, analogamente, para se obter a curva da figura 3.4.1.

O mesmo procedimento pode ser adotado para um pilar submetido a um carregamento genérico, desde que seja mantido o perfil do carregamento de projeto. Da mesma forma, as seções transversais podem variar ao longo do eixo do pilar, inclusive a armadura, desde que seja fixada uma relação entre a quantidade de armadura nas diversas seções. Uma consideração desse tipo pode ser empregada para se determinar uma solução mais econômica para o dimensionamento. Caso não se faça essa restrição, obter-se-á uma superfície relacionando o carregamento de ruína com a armadura nas diversas seções.

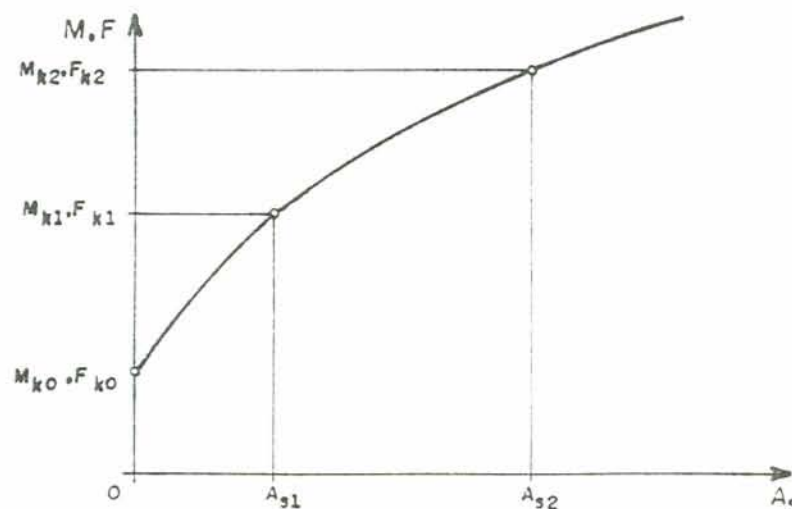


FIGURA 3.4.1 - Curva carregamento de ruína-armadura para o pilar da figura 3.3.1.



Na figura 3.4.2 apresenta-se algumas curvas obtidas para um pilar bi-rotulado com o carregamento da figura 3.3.1. A seção transversal é constante ao longo do eixo do pilar, inclusive a armadura, e tem a forma indicada na própria figura. Os parâmetros adimensionais empregados, são definidos pelas expressões (3.4.7) a (3.4.11).

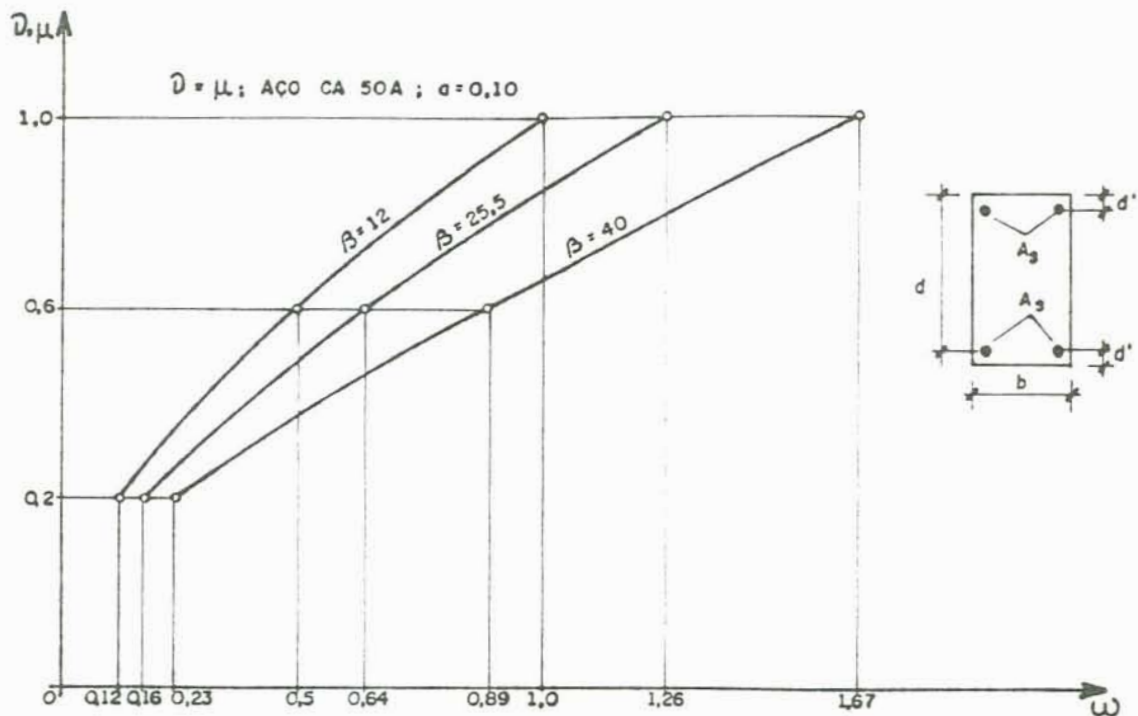


FIGURA 3.4.2 - Curvas carregamento de ruína-armadura para diferentes esbeltezes.

$$v = \frac{F_d}{0,85 b d f_{cd}} \quad (3.4.7)$$

$$\mu = \frac{M_{1d}}{0,85 b d^2 f_{cd}} \quad (3.4.8)$$

$$a = \frac{d'}{d} \quad (3.4.9)$$

$$\beta = \frac{\ell}{d} \quad (3.4.10)$$

$$\omega = \frac{A_s}{b d} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (3.4.11)$$

### 3.4.2. Dimensionamento baseado no desequilíbrio

Conhecida a curva carregamento de ruína-armadura para o pilar, o seu dimensionamento é imediato. De fato, a solução para o problema do dimensionamento consiste em um ponto da curva, uma vez que o mesmo deve ser feito impondo a condição de ruína do pilar sob o carregamento de projeto. O carregamento de projeto é portanto um carregamento de ruína para o pilar. Para o pilar bi-rotulado da figura 3.3.1, a armadura procurada  $A_s$  é a indicada na figura 3.4.3 e corresponde ao carregamento de ruína  $M_{1d}$  e  $F_d$ .

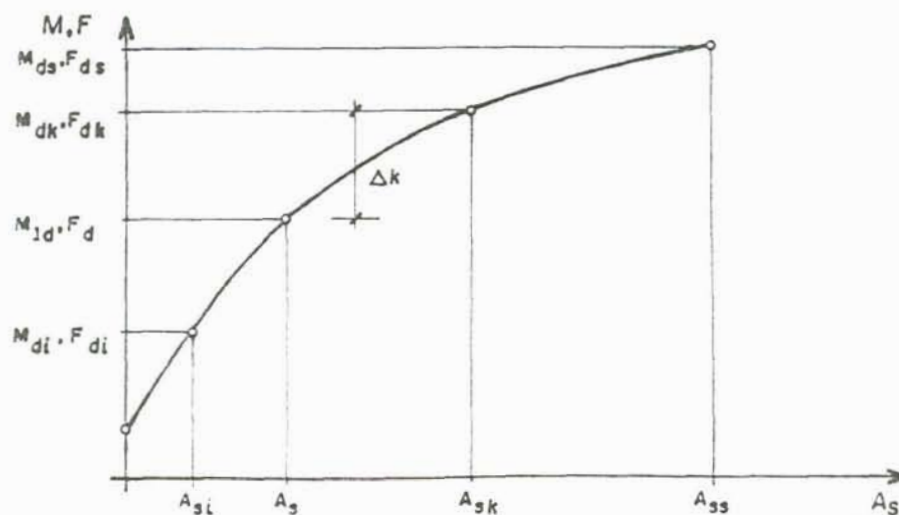


FIGURA 3.4.3 - Curva carregamento de ruína-armadura com desequilíbrio  $\Delta_k$  para a armadura  $A_{sk}$ .

Para uma quantidade de armadura genérica  $A_{sk}$ , o carregamento de ruína é representado pelo momento  $M_{dk}$  e pela força normal  $F_{dk}$ . O desequilíbrio relativo  $\delta_k$ , entre esse carregamento e o de projeto, é dado por (3.4.12) ou (3.4.13), uma vez que a curva foi obtida mantendo-se os incrementos de carga inalterados.

$$\delta_k = \frac{M_{dk} - M_{ld}}{M_{ld}} \quad (3.4.12)$$

$$\delta_k = \frac{F_{dk} - F_d}{F_d} \quad (3.4.13)$$

A solução procurada é aquela que torna nulo o desequilíbrio  $\delta_k$ .

A fim de minimizar o número de pontos a serem determinados na curva, e sistematizar a procura do ponto que constitui a solução, pode-se empregar o processo da bissecante. Para isso é necessário encontrar um intervalo  $[A_{si}, A_{ss}]$  de tal forma que a solução  $A_s$  se encontre dentro do mesmo. Para o limite inferior  $A_{si}$  do intervalo, pode-se adotar simplesmente  $A_{si} = 0$ . Também, para reduzir o número de iterações, pode-se realizar um dimensionamento à flexo-compressão com o momento  $M_{ld}$  e a força normal  $F_d$ , para encontrar  $A_{si}$ . Em qualquer das duas alternativas, a solução  $A_s$  será maior, ou eventualmente igual, que  $A_{si}$ . Para  $A_{ss}$ , há a necessidade de se adotar um valor suficientemente grande, capaz de garantir que a solução  $A_s$  seja menor que o mesmo. Nos casos mais usuais de pilares de seção transversal constante, pode-se empregar um dos processos simplificados da seção anterior para a determinação de  $A_{ss}$ . Entretanto, há a necessidade de se testar o sinal do desequilíbrio  $\delta_s$ , uma vez que não se sabe a princípio se tais processos resultarão em uma solução a favor da segurança. Em caso contrário, ou seja, se o desequilíbrio for negativo, incrementa-se a armadura até que fique definido o limite superior  $A_{ss}$ . Calcula-se finalmente os desequilíbrios  $\delta_i$  e  $\delta_s$  por (3.4.14) e

(3.4.15) e pode-se realizar as iterações do processo da bissetante, como na figura 3.4.4.

$$\delta_i = \frac{M_{di} - M_{1d}}{M_{1d}} = \frac{F_{di} - F_d}{F_d} \quad (3.4.14)$$

$$\delta_s = \frac{M_{ds} - M_{1d}}{M_{1d}} = \frac{F_{ds} - F_d}{F_d} \quad (3.4.15)$$

A convergência do processo será satisfeita quando, numa iteração genérica  $j$ , resultar  $|\delta_j| \leq$  tolerância pré-estabelecida.

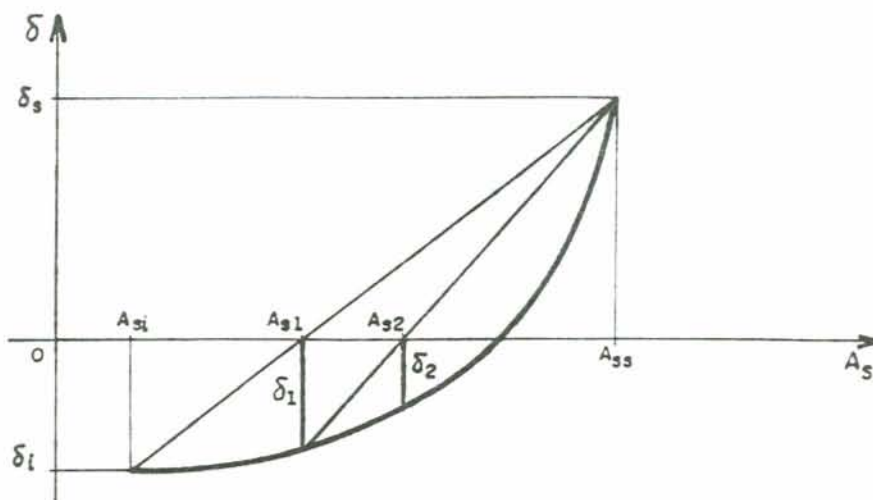


FIGURA 3.4.4 - Processo da bissetante para anular o desequilíbrio .

A solução obtida por este procedimento é relativamente precisa, pois na convergência tem-se o carregamento de projeto tendendo para o carregamento de ruína do pilar, como é desejado. Entretanto é uma solução extremamente trabalhosa do ponto de vista computacional, pois para cada aproximação da armadura deve-se determinar toda a resposta do pilar através do

procedimento incremental, para se encontrar o carregamento de ruína. O número de iterações necessárias para a convergência do processo da bissecante, é dependente do tamanho do intervalo  $[A_{si}, A_{ss}]$  que se escolhe. Quanto menor esse intervalo, mais rápida se dá a convergência. Para pilares de seção transversal constante, utilizando-se a determinação de  $A_{si}$  e  $A_{ss}$  sugerida anteriormente, consegue-se a convergência com um número de iterações relativamente pequeno. Para pilares de seção retangular, como a da figura 3.4.2 e com o carregamento da figura 3.3.1, em geral a convergência se dá na primeira iteração ou no máximo na terceira, para uma precisão da ordem de 1%. Assim necessita-se fazer apenas 3 análises para determinação do desequilíbrio, ou no máximo 5.

Mesmo assim o tempo de processamento computacional requerido é relativamente alto. A inclusão da fluência e da retração do concreto aumenta muito esse tempo e a tentativa de se confeccionar tabelas adequadas de dimensionamento, por esse processo, se vê fracassada. Entretanto é um processo rigoroso do ponto de vista conceitual e deve ser usado em casos especiais onde o risco de ruína do pilar seja alto. Também serve de base para a aferição dos processos simplificados propostos em normas e mesmo de outros, que apesar de baseados numa análise não-linear realística, são conceitualmente menos precisos. Este é o caso do processo alternativo apresentado a seguir.

### 3.4.3. Processo alternativo de dimensionamento

Para evitar o inconveniente do processo anterior, apresenta-se uma solução alternativa que, apesar de conceitualmente menos exata, tem sua precisão constatada numericamente através de vários exemplos.

Nesse procedimento não se determina o valor correto do desequilíbrio para a realização do processo da bissecante e sim, arbitra-se um valor para o mesmo. Com isso não há a necessidade de se determinar toda a resposta do pilar para encontrar o carregamento de ruína. Interessa aqui, simplesmente saber se o pilar, com uma dada armadura, resiste ou não ao carregamento.

gamento de projeto. Realiza-se então a análise do capítulo 2 com o carregamento total de projeto e não mais através do procedimento incremental. Se não ocorrer a ruína, ou seja, se o pilar com uma dada armadura, resistir ao carregamento de projeto, significa que o desequilíbrio é positivo e em caso contrário é negativo. Adota-se para o desequilíbrio um valor pré-fixado  $\delta$  qualquer, que será positivo ou negativo dependendo da situação. Assim, em cada iteração no processo da bissecante, tem-se uma disposição antissimétrica para o desequilíbrio nos extremos do intervalo, conforme figura 3.4.5. Com isso a aproximação da armadura para uma determinada iteração será o ponto médio do intervalo da iteração anterior.

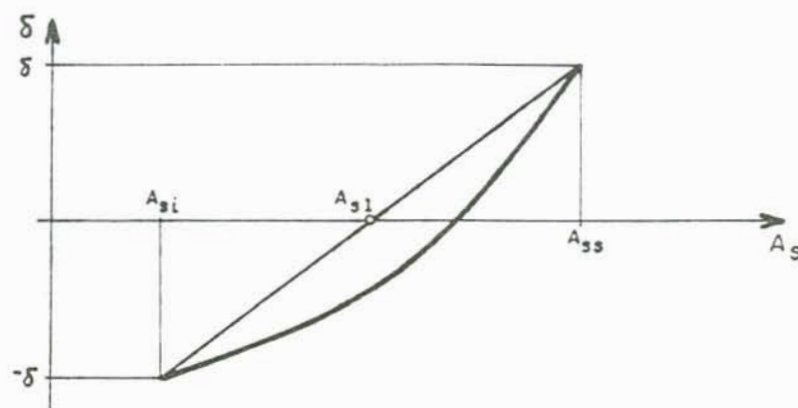


FIGURA 3.4.5 - Determinação da primeira aproximação da armadura  $A_{s1}$ .

De acordo com a figura 3.4.5, a primeira aproximação  $A_{s1}$  para a armadura é dada por

$$A_{s1} = \frac{A_{si} + A_{ss}}{2} \quad (3.4.16)$$

Repete-se a análise com o carregamento total de projeto e com a armadura  $A_{s1}$  e adota-se o valor  $-\delta$  ou  $+\delta$  para o desequilíbrio correspondente, se a ruína ocorre ou não, respec

tivamente. Obtêm-se uma seqüência de valores  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ ,  $A_{s3}$ , ...,  $A_{sn}$ , que se aproximam cada vez mais da solução, uma vez que em cada iteração o tamanho do intervalo onde se encontra a raiz é reduzido. A convergência será admitida quando, em uma iteração genérica  $n$ , a desigualdade (3.4.17) for satisfeita.

$$\frac{|A_{sn} - A_{sn-1}|}{A_{sn-1}} < \text{tolerância} . \quad (3.4.17)$$

Na convergência não se conhece o valor real do desequilíbrio, porém garante-se que o erro cometido é pequeno. De fato, pela figura 3.4.6, se  $A_{sn-2}$ ,  $A_{sn-1}$ , e  $A_{sn}$  são três valores sucessivos da seqüência obtida, a solução real necessariamente encontra-se no intervalo  $[A_{sn-2}, A_{sn-1}]$ .

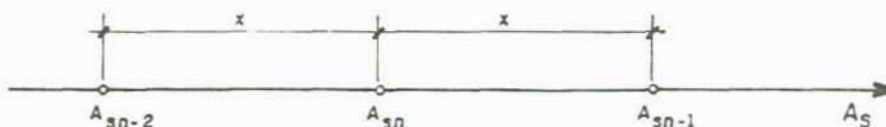


FIGURA 3.4.6 - Verificação da convergência do processo.

Na convergência, se  $\xi$  é a tolerância estipulada, tem-se que

$$\frac{|A_{sn} - A_{sn-1}|}{A_{sn-1}} < \xi , \quad (3.4.18)$$

ou, pela figura 3.4.6,

$$\frac{x}{A_{sn-1}} < \xi . \quad (3.4.19)$$

Também pode-se ver que

$$\frac{|A_{sn-1} - A_{sn-2}|}{A_{sn-2}} = \frac{2x}{A_{sn-2}} < 2\xi \frac{A_{sn-1}}{A_{sn-2}} \quad (3.4.20)$$

De (3.4.20) conclui-se que

$$\frac{|A_{sn-1} - A_{sn-2}|}{A_{sn-1}} < 2\xi \quad (3.4.21)$$

De (3.4.21) verifica-se que se  $\xi$  for um valor suficientemente pequeno, para qualquer valor de  $A_s$  dentro do intervalo  $[A_{sn-2}, A_{sn-1}]$  o erro será também pequeno. Em particular, adota-se o valor de  $A_{sn}$  como solução do problema.

O tempo de processamento requerido para se encontrar a solução é sensivelmente menor que no processo anterior. Para pilares de seção retangular como a da figura 3.4.2 e com o carregamento da figura 3.3.1, encontrou-se uma redução média do tempo de processamento da ordem de 15 vezes, deste processo para o anterior.

### 3.5. Dimensionamento para cargas de longa duração

#### 3.5.1. Coeficiente de fluência do concreto

A fim de se utilizar o coeficiente de fluência proposto pelo CEB/78 no dimensionamento, torna-se necessária a fixação de certos parâmetros relativos às condições de carga e utilização do pilar.

Assim admitiu-se que o pilar entra em carga aos 28 dias de idade, ou seja, adotou-se  $t_0 = 28$  sem a correção feita na seção 2.7.3.

Substituindo  $t_0 = 28$  em (2.7.1) conclui-se que a deformação de fluência  $\epsilon_{cc}(t, t_0)$  é diretamente proporcional à deformação mecânica imediata  $\epsilon_{ci}$ , e o coeficiente de fluência  $\phi(t, t_0)$  fica definido por



$$\phi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{ci}} \quad (3.5.1)$$

Nessas condições a deformação total no instante  $t$  é dada por

$$\varepsilon_{tot}(t, t_0) = \varepsilon_{ci} [1 + \phi(t, t_0)] \quad (3.5.2)$$

O coeficiente de plasticidade diferida,  $\phi_f$ , depende do meio ambiente e da espessura fictícia  $h_0$ . Para se evitar ter que fixar a umidade relativa do ar, adotou-se o procedimento seguinte. Segundo a NB-1/78, a deformação total no concreto deve ser tomada igual a 3 vezes a deformação mecânica inicial, quando a estrutura entrar em carga logo após o término da construção, o que é equivalente a tomar um valor final para o coeficiente de fluência igual a 2. Assim tem-se

$$\phi(t_\infty, t_0) = 2 \quad (3.5.3)$$

Substituindo  $t$  por  $t_\infty$  em (2.7.7) resulta

$$\phi(t_\infty, t_0) = \beta_a(t_0) + \phi_d \beta_d(t_\infty - t_0) + \phi_f [\beta_f(t_\infty) - \beta_f(t_0)] \quad (3.5.4)$$

De (2.7.11) conclui-se que

$$\frac{f_c(t_0)}{f_{c\infty}} = 0,67878 \quad (3.5.5)$$

valor obtido simplesmente substituindo  $t_0 = 28$  em (2.7.11).

Levando (3.5.5) em (2.7.8) obtêm-se

$$\beta_a(t_0) = 0,256976 \quad (3.5.6)$$

Aplicando o limite quando  $t$  tende a infinito na equação (2.7.13) chega-se a

$$\beta_d (t_\infty - t_0) = 1 \quad . \quad (3.5.7)$$

Analogamente, aplicando o limite quando  $t$  tende a infinito em (2.7.14), resulta

$$\beta_f (t_\infty) = 1 \quad . \quad (3.5.8)$$

Substituindo (3.5.6), (3.5.7) e (3.5.8) em (3.5.4) e lembrando que  $\phi_d = 0,4$ , tem-se

$$\phi (t_\infty, t_0) = 0,656976 + \phi_f [1 - \beta_f (t_0)] \quad . \quad (3.5.9)$$

Igualando  $\phi (t_\infty, t_0)$  a 2, chega-se a expressão para  $\phi_f$ ,

$$\phi_f = \frac{1,343024}{1 - \beta_f(t_0)} \quad . \quad (3.5.10)$$

Assim, para a análise numérica efetuada no capítulo seguinte, evitou-se ter que arbitrar a umidade relativa do ar, necessária para a determinação de  $\phi_f$ , e o coeficiente de fluência toma a forma

$$\phi(t, t_0) = 0,256976 + 0,4 \beta_d(t-t_0) + \frac{1,343024}{1 - \beta_f(t_0)} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] \quad . \quad (3.5.11)$$

Evidentemente que a expressão (3.5.11) ainda depende da espessura fictícia  $h_0$ . Entretanto, testes preliminares efetuados com o coeficiente de fluência dado por (3.5.11), mostraram que a solução para o problema, a armadura necessária ao pilar, pouco ou quase nada é influenciada pelo valor de  $h_0$  adotado. Isto se dá porque a solução ficou independente do número de intervalos de tempo adotado, interessando apenas o valor final do coeficiente de fluência.

### 3.5.2. Retração do concreto

Admitiu-se, para efeito de dimensionamento, que a cura do concreto se processa eficazmente até o sétimo dia após a concretagem. Assim o tempo  $t_0$  foi tomado igual a 7, uma vez que tanto para a retração quanto para a fluência, supõe-se que a temperatura ambiente é da ordem de  $20^{\circ}\text{C}$ , não sendo necessária a correção da idade feita em 2.7.3.

O coeficiente básico de retração  $\epsilon_{s0}$ , depende do meio ambiente e da espessura fictícia da peça. Para se evitar ter que fixar a umidade relativa do ar, adotou-se um procedimento análogo ao da fluência. Segundo a NB-1, a deformação relativa de retração pode ser tomada, nos casos que classifica como correntes, igual a  $15 \times 10^{-5}$ . Assim adotou-se

$$\epsilon_{cs}(t_{\infty}, t_0) = 15 \times 10^{-5} . \quad (3.5.12)$$

Aplicando o limite à equação (2.8.3), para  $t$  tendendo a infinito, resulta

$$\beta_s(t_{\infty}) = 1 . \quad (3.5.13)$$

Fazendo  $t$  tender a infinito em (2.8.1) e substituindo (3.5.12) e (3.5.13) resulta

$$\epsilon_{s0} = \frac{15 \times 10^{-5}}{1 - \beta_s(t_0)} . \quad (3.5.14)$$

Dessa forma, a deformação específica de retração será tomada como

$$\epsilon_{cs}(t, t_0) = \frac{15 \times 10^{-5}}{1 - \beta_s(t_0)} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] , \quad (3.5.15)$$

com  $t_0 = 7$ .

A expressão (3.5.15) ainda é dependente da espessura fictícia  $h_0$ , porém como constatado para a fluência, este valor altera muito pouco a armadura. Na análise do capítulo seguinte adotou-se  $h_0 = 0,20$  m.

### 3.5.3. História de carga

Face à dificuldade de determinação da parcela do carregamento de longa duração e levando-se em conta que, em pilares de edifícios de concreto armado, a carga acidental é pequena em relação à carga permanente, na análise numérica efetuada no capítulo 4, admitiu-se que toda a carga de serviço é de longa duração. A história de carga é a apresentada na figura 3.5.1.

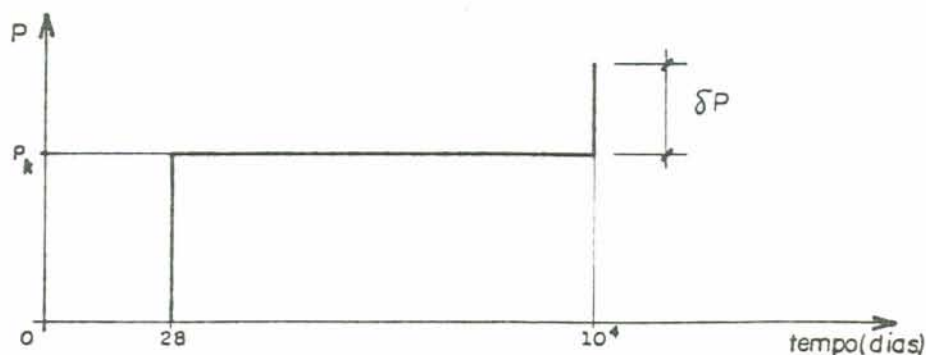


FIGURA 3.5.1 - História de carga adotada no dimensionamento.

Considera-se que aos 28 dias de idade, o pilar fica submetido a todo o carregamento de serviço,  $P_k$ , igual ao carregamento de projeto dividido pelo coeficiente 1,4. Esse carregamento é mantido até o final das deformações diferidas do concreto, assumido ocorrer no 10.000º dia. Nesse instante, aplica-se ao pilar o acréscimo de carga  $\delta P$  igual a diferença entre o carregamento de projeto e o de serviço. Para este estágio não se considera o aumento da resistência do concreto, endurecimento, e trabalha-se com o diagrama tensão-deformação proposto pela NB-1 e mostrado na figura 2.3.1 do capítulo 2.

### 3.6. Inclusão simplificada da fluência do concreto

O processo simplificado para se considerar a fluência do concreto, proposto no Manual de Flambagem do CEB/FIP<sup>(9)</sup>, consiste em se considerar todo o carregamento de projeto como sendo de curta duração, introduzindo-se uma excentricidade adicional  $e_c$  de primeira ordem, dada por

$$e_c = e_{1g} \left[ e^{\left( \frac{\phi(t_\infty, t_0)}{P_e - F_g} F_g \right) - 1} \right] ; \quad (3.6.1)$$

onde

$F_g$  = carga axial de longa duração;

$e_{1g}$  = excentricidade de primeira ordem da carga  $F_g$ ;

$\phi(t_\infty, t_0)$  = coeficiente final de fluência;

$P_e$  = carga de flambagem de Euler, sendo

$$P_e = \frac{\pi^2 E_c I_c}{l^2} ; \quad (3.6.2)$$

e  $I_c$ , o momento de inércia centroidal da seção de concreto, sem inclusão da armadura.

Com a excentricidade adicional  $e_c$  resolve-se o problema, tanto de análise quanto de dimensionamento, como se todo o carregamento fosse de curta duração.

Para levar em conta a incerteza na avaliação de  $e_c$ , é conveniente majorar a carga axial total de projeto por um fator especial de segurança da ordem de 1,2. Esse procedimento é particularmente indicado quando as cargas de longa duração representam uma porção significativa da carga total de projeto. A precisão do processo é verificada no capítulo seguinte.

### 3.7. Críticas à norma brasileira

Em se tratando de dimensionamento de pilares, duas

críticas devem ser feitas à norma NB-1/78. A primeira delas é quanto a definição de pilar curto. A norma brasileira, ao classificar como curtos todos os pilares cujo índice de esbeltez  $\lambda$  não sejam superiores a 40, desprezando com isto a consideração dos efeitos não-lineares geométricos, pode estar induzindo a erros contrários à segurança da estrutura. Os efeitos de segunda ordem não podem ser desprezados simplesmente em função de  $\lambda$ . Além desse parâmetro, deve-se levar em consideração o valor da excentricidade inicial relativa,  $e_1/h$ , da força axial no pilar. Um pilar com índice de esbeltez menor que 40, mas no qual a excentricidade relativa da força axial é pequena, deve ser classificado como esbelto, pois neste caso, os efeitos de segunda ordem são importantes. A norma DIN 1045, ao dispensar a consideração desses efeitos, leva em conta os dois parâmetros. A classificação de pilares curtos e esbeltos por esta norma é apresentada na figura 3.7.1.

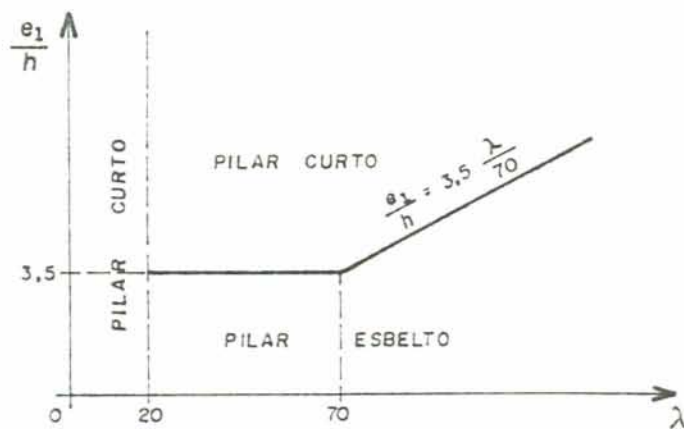


FIGURA 3.7.1 - Classificação de pilares quanto a esbeltez, segundo a DIN 1045.

Na conceituação de pilar curto também deve ser levada em consideração a forma do diagrama de momentos fletores de primeira ordem. Um pilar com momentos iguais nos apoios é muito mais sensível aos efeitos de segunda ordem, que outro com

momentos de sentidos opostos. Assim um pilar com índice de esbeltez  $\lambda$  maior que 40 pode ser classificado como curto, dependendo dos momentos de primeira ordem. A DIN 1045 também leva esse fato em consideração.

Um segundo ponto da NB-1/78 passível de crítica, é com relação à fluência do concreto. A norma simplesmente dispensa a consideração da fluência para pilares com índices de esbeltez não superiores a 80, quando se tratar de barras de seção transversal constante, inclusive a armadura, com armadura simétrica. Não é levado em consideração a excentricidade relativa da força axial nem o próprio valor das cargas de longa duração. Quanto menor a excentricidade relativa, maior será o efeito da fluência do concreto na estabilidade do pilar. Além disso, se a carga de longa duração é significativa em relação à carga total, como é o caso dos pilares, a fluência tem importância considerável. O CEB/78<sup>(9)</sup> só dispensa a consideração da fluência num dos casos seguintes:

- excentricidade relativa inicial grande:  $\frac{e_1}{h} \geq 2$  ;
- carga predominante de curta duração:  $F_g \leq 0,2 F_{g+q}$  ;
- índice de esbeltez pequeno:  $\lambda \leq 50$ .

## 4. ANÁLISE NUMÉRICA

### 4.1. Considerações gerais

Neste capítulo apresenta-se uma série de exemplos de dimensionamento, onde a solução teórica obtida com o algoritmo alternativo, apresentado na seção 3.4 do capítulo anterior, é comparada com resultados experimentais.

A adoção de uma excentricidade equivalente, quando o pilar está submetido a cargas axiais com excentricidades diferentes, sugerida pela NB-1, tem sua precisão verificada.

Os processos simplificados de dimensionamento propostos pela NB-1/78, CEB/78, ACI e DIN 1045 são comparados com o algoritmo. Também verifica-se a precisão do processo simplificado para a inclusão da fluência proposto pelo CEB.

Exemplos de pilares com engastamento elástico simétrico são apresentados, bem como o nível do erro cometido ao se estender o conceito de comprimento de flambagem a pilares de concreto armado.

Um estudo sobre o coeficiente global de segurança, e do nível de erro cometido ao se desprezar a fluência e a retração do concreto, encerram o capítulo.

### 4.2. Exemplos experimentais

#### 4.2.1. Dimensionamento para cargas de curta duração

Os exemplos apresentados nesta seção constituem uma série de 17 pilares que foram ensaiados até a ruína<sup>(17)</sup>, com valores do índice de esbeltez  $\lambda$  de 83 e 125.

Os pilares tem seção transversal constante ao longo de todo o seu comprimento, inclusive a armadura, figura 4.2.1, e foram levados à ruína em aproximadamente 45 minutos após o início do ensaio, aos 28 dias de idade. Na análise admitiu-se



um coeficiente redutor da resistência à compressão do concreto, devido ao Efeito Rüsç<sup>(31)</sup>, igual a 0,92. Os ensaios foram realizados com velocidade de deformação controlada.

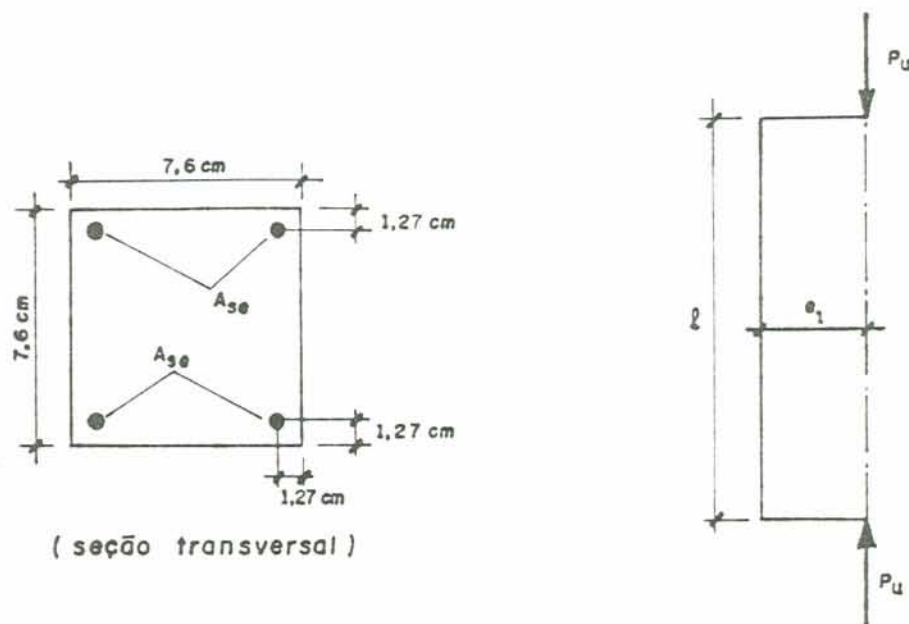


FIGURA 4.2.1 - Geometria e carregamento dos pilares.

Para a determinação da resistência à compressão do concreto foram ensaiados dois tipos de corpos de prova. Um primeiro corpo de prova é o cilindro de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, padrão da Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se  $f_c$ . Um segundo corpo de prova tem a mesma seção transversal dos pilares e altura igual a três vezes o lado da seção. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se  $f_{pr}$ . As resistências obtidas para os dois corpos de prova são diferentes uma vez que a forma e dimensões dos mesmos diferem. Para a análise numérica foi adotado o corpo de prova prismático, pois o mesmo retrata melhor a realidade, já que tem a mesma forma e dimensões da seção transversal dos pilares. Uma vez que se está comparando resultados teóricos com experimentais, a determinação da ruptura é feita com a própria resistência  $f_{pr}$  que foi obtida de forma única para cada dois pilares.

O aço utilizado tem patamar de escoamento definido,

aço classe A, e uma tensão de escoamento denominada  $f_y$ . Para seu módulo de elasticidade adotou-se o valor  $21 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$  pela falta de determinação experimental. As cargas de ruína  $P_u$  obtidas nos ensaios, são adotadas como cargas de projeto para os pilares, bem como as excentricidades iniciais  $e_1$ . Os valores obtidos para a armadura calculada,  $A_{scal}$ , com o algoritmo da seção 3.4 são comparados com a armadura existente nos pilares,  $A_{se}$ , e encontram-se na tabela 4.1.

TABELA 4.1 - Pilares sob carga de curta duração

PILAR	$f_c$ ( $\text{N/mm}^2$ )	$f_{pr}$ ( $\text{N/mm}^2$ )	$P_u$ (kN)	$e_1$ (cm)	$A_{scal}$ ( $\text{cm}^2$ )	$\frac{(A_{scal} - A_{se})}{A_{se}}$ %
$\ell = 182,9 \text{ cm} ; f_y = 359 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,71 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 83$						
P1	27,5	20,0	33,79	3,81	0,71	0,0
P2	27,5	20,0	34,02	3,81	0,72	1,4
P3	30,0	24,0	45,36	2,54	0,66	-7,0
P4	30,0	24,0	47,71	2,54	0,72	1,4
P5	31,0	22,5	68,03	1,27	0,77	8,5
P6	31,0	22,5	66,67	1,27	0,74	4,2
P7	32,0	22,5	56,47	1,91	0,78	9,9
P8	32,0	22,5	54,06	1,91	0,71	0,0
$\ell = 182,9 \text{ cm} ; f_y = 316 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,50 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 83$						
P9	32,0	23,0	61,23	1,27	0,60	20,0
P10	32,0	23,0	58,51	1,27	0,54	8,0
P11	33,0	23,0	47,49	1,91	0,55	10,0
P12	33,0	23,0	46,49	1,91	0,53	6,0
P13	33,0	23,0	37,87	2,54	0,51	2,0
P14	33,0	23,0	37,74	2,54	0,50	0,0
$\ell = 274,3 \text{ cm} ; f_y = 316 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,50 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 125$						
P15	31,0	22,0	31,75	1,27	0,56	12,0
P16	30,0	21,0	24,81	1,91	0,51	2,0
P17	29,5	21,0	20,95	2,54	0,49	-2,0

#### 4.2.2. Dimensionamento para cargas de longa duração

Dezessete pilares foram colocados em carga aos 28 dias de idade e a carga foi mantida por 6 meses, após o que os pilares foram levados à ruína<sup>(17)</sup>. A história de carga utilizada nos ensaios é mostrada na figura 4.2.2, onde  $P_g$  é a carga de longa duração e  $\delta P$  é o acréscimo dado ao carregamento para levar os pilares à ruína. O esquema de carga e a geometria dos pilares são os mesmos da figura 4.2.1.

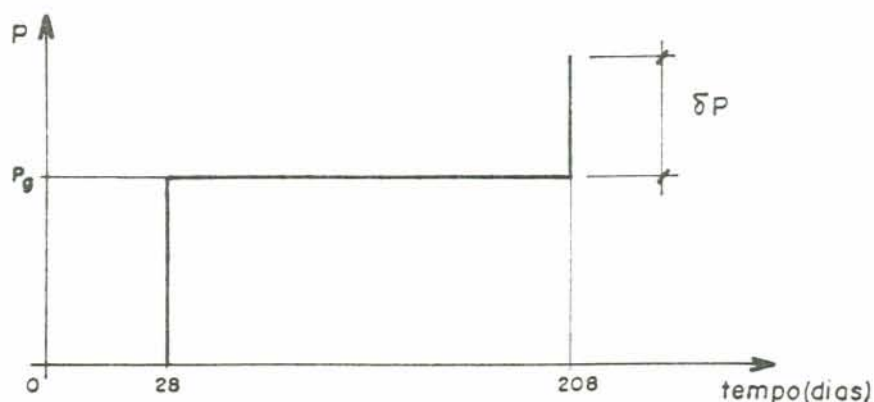


FIGURA 4.2.2 - História de carga nos ensaios.

Para a determinação da resistência à compressão do concreto foram utilizados os mesmos corpos de prova da seção anterior, obtendo-se a resistência cilíndrica  $f_c$  e a resistência prismática  $f_{pr}$  que foi utilizada na análise. Na determinação da variação do coeficiente de fluência  $\phi$  no tempo, carregou-se corpos de prova prismáticos com as mesmas dimensões dos utilizados para obter a resistência à compressão do concreto, com cargas correspondentes a 25%, 50% e 75% da resistência dos prismas correspondentes. As variações de  $\phi$  com o tempo  $t$  são mostradas na figura 4.2.3.

As cargas de longa duração  $P_g$  e o acréscimo final  $\delta P$  utilizados nos ensaios, são adotados como cargas de projeto. O aço é o mesmo da seção anterior.

Para o carregamento final de curta duração, foi considerado o endurecimento do concreto assumindo a deformação associada com uma tensão dada, igual a  $(1 + 0,625 \phi)/(1 + \phi)$  vezes a correspondente deformação para a curva tensão-deformação no instante  $t = 28^{(17)}$ . A retração do concreto não foi incluída na análise. Os valores obtidos para a armadura calculada,  $A_{sca1}$ , são comparados com a armadura existente nos pilares,  $A_{se}$ , como é mostrado na Tabela 4.2.

TABELA 4.2 - Pilares sob carga de longa duração

PILAR	$f_c$ (N/mm <sup>2</sup> )	$f_{pr}$ (N/mm <sup>2</sup> )	$P_g$ (kN)	$\delta P$ (kN)	$e_1$ (cm)	$A_{sca1}$ (cm <sup>2</sup> )	$\frac{(A_{sca1} - A_{se})}{A_{se}}$
$\ell = 182,9 \text{ cm} ; f_y = 359 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,71 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 83$							
P1	27,5	20,0	20,28	12,34	3,81	0,71	0,0
P2	27,5	20,0	13,52	19,41	3,81	0,70	-1,4
P3	30,0	24,0	27,21	16,56	2,54	0,68	-4,2
P4	30,0	24,0	18,14	23,04	2,54	0,60	-15,5
P5	31,0	22,5	40,82	19,73	1,27	0,74	4,2
P6	31,0	22,5	27,22	33,25	1,27	0,67	-5,6
P7	32,0	22,5	34,03	17,06	1,91	0,73	2,8
P8	32,0	22,5	22,68	28,13	1,91	0,68	-4,2
$\ell = 182,9 \text{ cm} ; f_y = 316 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,50 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 83$							
P9	32,0	23,0	36,74	8,39	1,27	0,53	6,0
P10	32,0	23,0	24,49	34,83	1,27	0,61	22,0
P11	33,0	23,0	28,49	13,20	1,91	0,51	2,0
P12	33,0	23,0	19,00	25,67	1,91	0,53	6,0
P13	33,0	23,0	22,68	14,42	2,54	0,54	8,0
P14	33,0	23,0	15,10	21,59	2,54	0,51	2,0
$\ell = 274,3 \text{ cm} ; f_y = 316 \text{ N/mm}^2 ; A_{se} = 0,50 \text{ cm}^2 ; \lambda \approx 125$							
P15	31,0	22,0	20,41	4,13	1,27	0,54	8,0
P16	30,0	21,0	14,29	7,71	1,91	0,48	-4,0
P17	29,5	21,0	11,88	8,21	2,54	0,49	-2,0

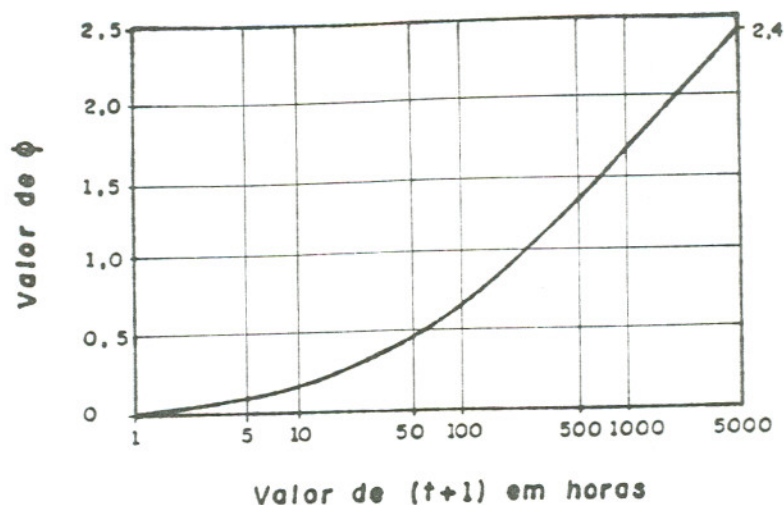


FIGURA 4.2.3 - Variação de  $\phi$  no tempo.

#### 4.2.3. Resposta de um pilar sob carga de curta duração

Um pilar com geometria e carregamento similar ao da figura 4.2.1 foi ensaiado<sup>(17)</sup> para se determinar a curva carga-deslocamento do mesmo. A seção transversal do pilar tem as dimensões da figura 4.2.1, sendo a armadura existente,  $A_{se}$ , igual a  $0,50 \text{ cm}^2$ . O comprimento do pilar é igual a  $121,9 \text{ cm}$  e a excentricidade inicial da carga igual a  $1,91 \text{ cm}$ . A resistência prismática do concreto é igual a  $24 \text{ N/mm}^2$  e a tensão de escoamento  $f_y$  do aço  $316 \text{ N/mm}^2$ , apresentando o mesmo um patamar de escoamento bem definido.

A análise teórica foi realizada com o algoritmo incremental descrito no capítulo 2. A curva carga-deslocamento obtida experimentalmente é mostrada na figura 4.2.4, bem como a curva teórica.

#### 4.2.4. Resposta de um pilar sob carga de longa duração

Um pilar com as mesmas características do anterior, foi ensaiado<sup>(17)</sup> para a determinação da curva carga-deslocamento para carregamento de longa duração. A variação do coeficiente de fluência no tempo é a mostrada na figura 4.2.3 e o endurecimento do concreto é considerado como no dimensionamento para cargas de longa duração da seção 4.2.2.

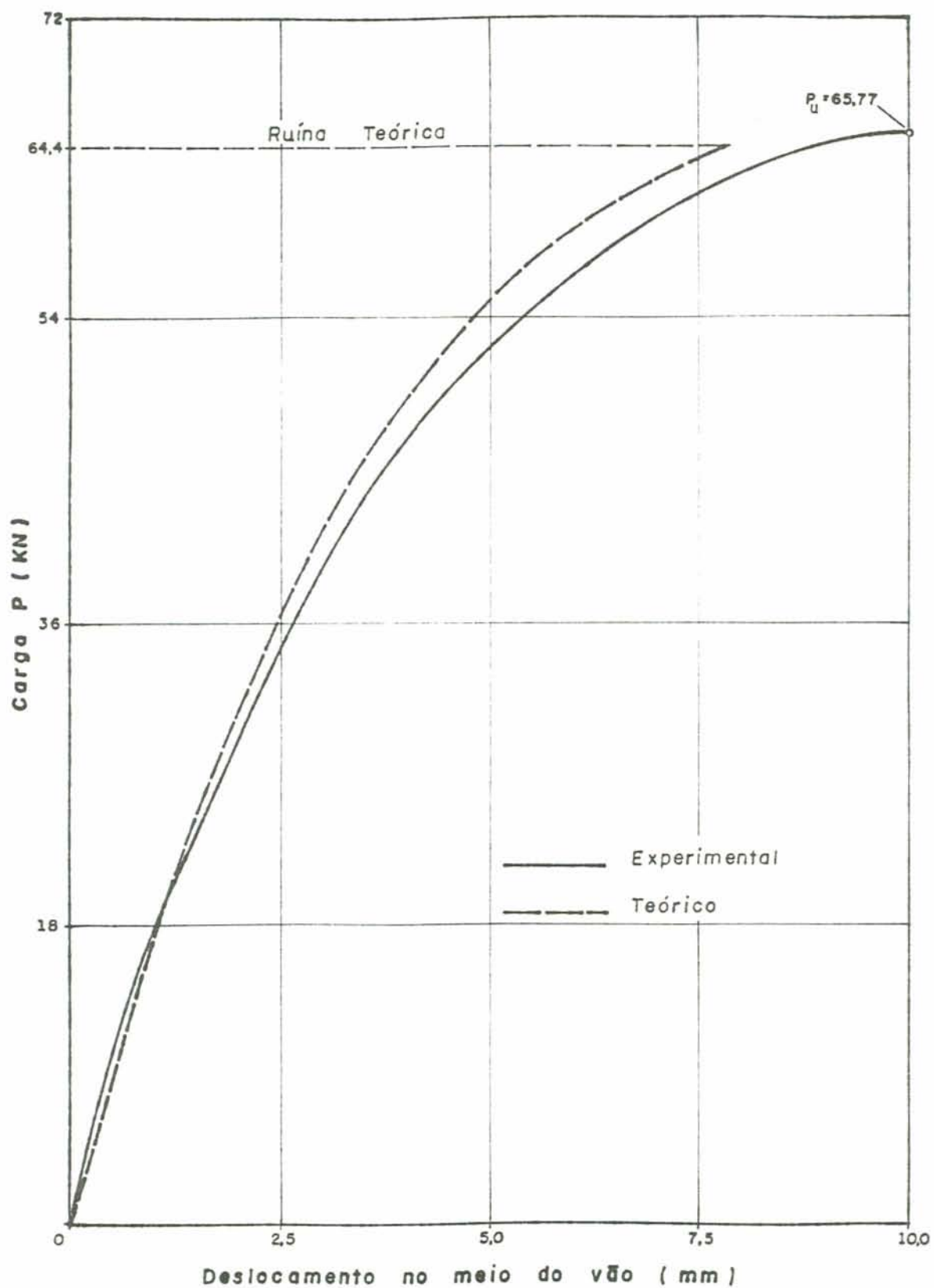


FIGURA 4.2.4 - Curva carga-deslocamento para carga de curta duração.

A história de carga adotada no ensaio é a mesma da figura 4.2.2, onde  $P_g = 39,47$  kN e  $\delta P = 28,95$  kN.

A resposta obtida experimentalmente é mostrada na figura 4.2.5, juntamente com a teórica obtida através da análise incremental do capítulo 2.

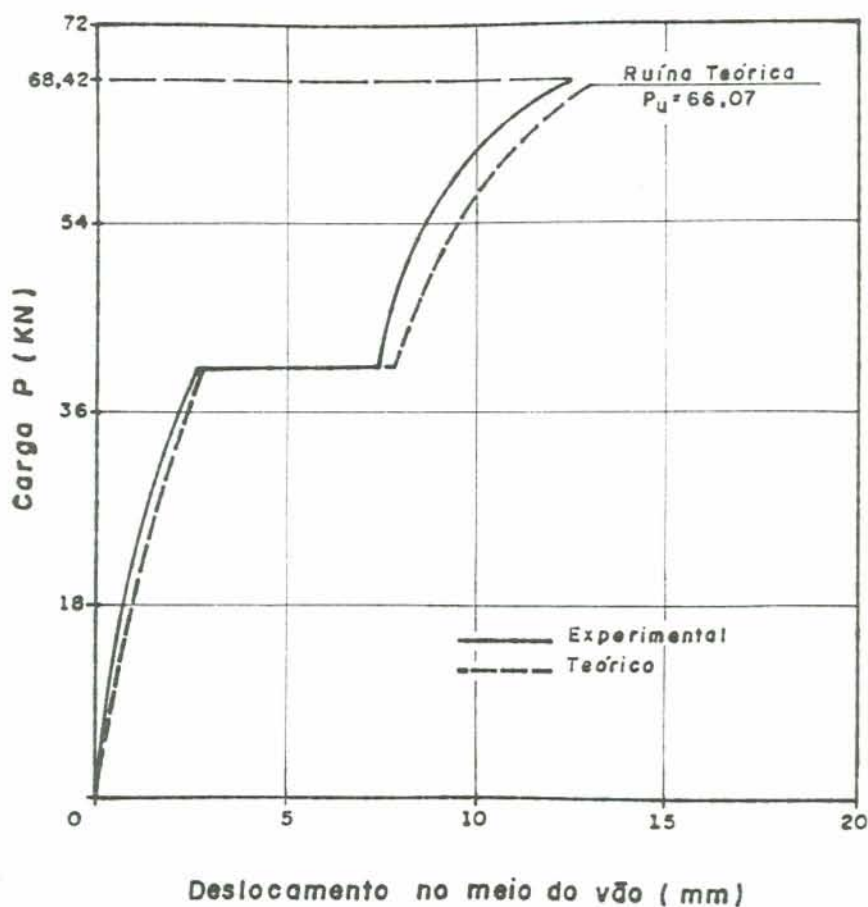


FIGURA 4.2.5 - Curva carga-deslocamento para carga de longa duração.

#### 4.3. Pilar com carregamento excêntrico assimétrico

Nesta seção verifica-se a precisão da adoção de uma excentricidade equivalente para o caso de pilar com carregamento assimétrico, proposta pela NB-1.

Na figura 4.3,1 apresenta-se o pilar na situação de projeto e a geometria da seção transversal do mesmo,

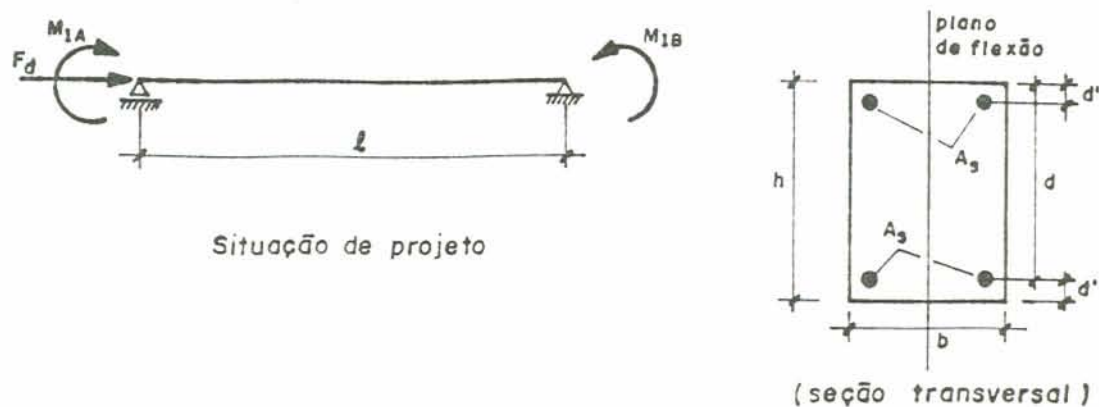


FIGURA 4.3.1 - Situação de projeto e seção transversal tipo do pilar.

De acordo com a NB-1, pode-se adotar para o dimensionamento, uma situação equivalente com momento fletor de 1ª ordem constante ao longo do eixo do pilar, dado pelo maior dos valores de (4.3.1), onde  $M_{1a}$  é sempre positivo e  $M_{1a} \geq |M_{1b}|$ .

$$M_{1d} = 0,6 M_{1a} + 0,4 M_{1b} \quad ; \quad (4.3.1)$$

$$M_{1d} = 0,4 M_{1a} \quad .$$

Além disto deve-se dimensionar a seção do apoio com  $M_{1a}$ . A armadura a se adotar será a maior obtida com os dois dimensionamentos.

Os esforços solicitantes de 1ª ordem escritos em forma adimensional são dados em (4.3.2) a (4.3.5) e a taxa mecânica de armadura  $\omega$  em (4.3.6).

$$v = \frac{F_d}{0,85 b d f_{cd}} \quad (4.3.2)$$

$$\mu_{1a} = \frac{M_{1a}}{0,85 b d^2 f_{cd}} \quad (4.3.3)$$



$$\mu_{1b} = \frac{M_{1b}}{0,85 b d^2 f_{cd}} \quad (4.3.4)$$

$$\mu = \frac{M_{1d}}{0,85 b d^2 f_{cd}} \quad (4.3.5)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b d f_{cd}} \quad (4.3.6)$$

Nas Tabelas 4.3 e 4.4 encontram-se os resultados obtidos para pilares curtos e esbeltos, com relação  $l/d$  igual a 12 e 40 respectivamente. Nas tabelas apresenta-se a taxa mecânica de armadura,  $\omega$ , obtida pelo algoritmo alternativo do capítulo 3 com a situação de projeto e os valores  $\omega_o$  e  $\omega_a$  obtidos para as situações de cálculo, com  $M_{1d}$  e  $M_{1a}$  respectivamente. Finalmente apresenta-se o valor  $\omega_f$  adotado para a taxa de armadura e o erro cometido na aproximação feita. Em todos os exemplos o carregamento é de curta duração, o aço utilizado é o CA50A e o parâmetro geométrico da seção  $d'/d$  é igual a 0,10.

TABELA 4.3 - Pilares curtos ( $l/d = 12$ )

v	SITUAÇÃO DE PROJETO			SITUAÇÃO EQUIVALENTE DE CÁLCULO					$\left(\frac{\omega_f - \omega}{\omega}\right) 100$
	$\mu_{1a}$	$\mu_{1b}$	$\omega$	$\mu$	$\omega_o$	$\mu_{1a}$	$\omega_a$	$\omega_f$	
0,20	1,20	0,70	1,06	1,00	0,88	1,20	1,06	1,06	0
	0,50	-0,25	0,39	0,20	0,12	0,50	0,39	0,39	0
	1,20	-0,30	1,06	0,60	0,49	1,20	1,06	1,06	0
	0,70	0,45	0,58	0,60	0,49	0,70	0,58	0,58	0
0,60	0,50	-0,25	0,36	0,20	0,09	0,50	0,36	0,36	0
	1,20	-0,30	1,03	0,60	0,50	1,20	1,03	1,03	0
	0,70	0,45	0,55	0,60	0,50	0,70	0,55	0,55	0
	1,20	0,70	1,03	1,00	0,88	1,20	1,03	1,03	0
1,00	1,20	-0,30	1,18	0,60	0,64	1,20	1,18	1,18	0
	2,00	-0,50	1,96	1,00	1,04	2,00	1,96	1,96	0

TABELA 4.4 - Pilares esbeltos ( $l/d = 40$ )

v	SITUAÇÃO DE PROJETO			SITUAÇÃO EQUIVALENTE DE CÁLCULO					$(\frac{\omega_f - \omega}{\omega}) 100$
	$\mu_{1a}$	$\mu_{1b}$	$\omega$	$\mu$	$\omega_o$	$\mu_{1a}$	$\omega_a$	$\omega_f$	
0,20	0,30	0,05	0,21	0,20	0,24	0,30	0,20	0,24	14
	0,70	0,45	0,60	0,60	0,63	0,70	0,58	0,63	5
	1,20	0,70	1,06	1,00	1,02	1,20	1,06	1,06	0
	0,50	-0,25	0,39	0,20	0,24	0,50	0,39	0,39	0
	1,20	-0,30	1,06	0,60	0,63	1,20	1,06	1,06	0
	2,00	-0,50	1,81	1,00	1,02	2,00	1,81	1,81	0
0,60	0,30	0,05	0,44	0,20	0,46	0,30	0,16	0,46	5
	0,70	0,45	0,88	0,60	0,90	0,70	0,55	0,90	2
	1,20	0,70	1,26	1,00	1,30	1,20	1,03	1,30	3
	0,50	-0,25	0,39	0,20	0,46	0,50	0,36	0,46	18
	1,20	-0,30	1,03	0,60	0,90	1,20	1,03	1,03	0
1,00	0,70	0,45	1,22	0,60	1,26	0,70	0,68	1,26	3
	1,20	0,70	1,64	1,00	1,67	1,20	1,17	1,67	2
	0,50	-0,25	0,65	0,20	0,76	0,50	0,48	0,76	17
	1,20	-0,30	1,18	0,60	1,26	1,20	1,18	1,26	7

Como se observa pelas tabelas os resultados obtidos com o procedimento da NB-1 são bastante próximos dos teoricamente reais, tanto para pilares curtos como esbeltos. Para pilares curtos a ruína ocorre por ruptura da seção do apoio submetido ao momento  $M_{1a}$ , por isso, há coincidência dos resultados. Além disso, a situação de cálculo mostra-se a favor da segurança.

#### 4.4. Processos simplificados de dimensionamento

Nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 apresenta-se alguns resultados obtidos pelos processos simplificados de normas descritos no capítulo 3, e pelo algoritmo alternativo de dimensionamento. A situação de projeto corresponde ao pilar bi-rotulado

da figura 4.3.1, com momentos  $M_{1d}$  de 1ª ordem iguais nos apoios. O parâmetro  $d'/d$  é igual a 0,10 e o aço é o CA50A. O carregamento é de curta duração. Encontram-se tabeladas as taxas mecânicas de armadura  $\omega$ , como definido em (4.3.6), para esforço normal reduzido  $\nu$  e momento fletor reduzido  $\mu$ , definidos em (4.3.2) e (4.3.5) respectivamente.

TABELA 4.5 - Valores de  $\omega$  -  $l/d = 12,7$  ( $\lambda = 40$ )

$\mu$	MÉTODO	$\nu$		
		0,20	0,60	1,00
0,20	ALGORITMO	0,12	0,09	0,20
	NB-1	0,12	0,11	0,23
	CEB	0,15	0,16	0,32
	DIN	0,13	0,14	0,28
	ACI	0,11	0,08	0,20
0,60	ALGORITMO	0,50	0,50	0,65
	NB-1	0,50	0,50	0,65
	CEB	0,59	0,69	0,90
	DIN	0,50	0,53	0,72
	ACI	0,50	0,52	0,71
1,00	ALGORITMO	0,88	0,89	1,05
	NB-1	0,88	0,88	1,04
	CEB	1,03	1,22	1,49
	DIN	0,86	0,91	1,11
	ACI	0,89	0,94	1,18

Observa-se pelos resultados que o processo da NB-1 é o que melhor se apresenta em relação ao algoritmo. A solução fica sempre a favor da segurança na faixa de esforços testada. O pequeno erro contra a segurança que aparece nas tabelas pode ser admitido como erro numérico. O erro máximo detectado é da ordem de 25% a favor da segurança. Observa-se também que para valores de  $\mu/\nu$  não menores que 1, ocorre praticamente a coincidência do processo simplificado com o algoritmo. Para valores

de  $\mu/v$  inferiores a 1 o processo fica sensivelmente a favor da segurança devido à superestimação da curvatura última da seção.

TABELA 4.6 - Valores de  $\omega - \ell/d = 19,1$  ( $\lambda = 60$ )

$\mu$	MÉTODO	$v$		
		0,20	0,60	1,00
0,20	ALGORITMO	0,13	0,14	0,26
	NB-1	0,14	0,17	0,32
	CEB	0,17	0,21	0,37
	DIN	0,16	0,23	0,41
	ACI	0,12	0,12	0,29
0,60	ALGORITMO	0,51	0,56	0,73
	NB-1	0,52	0,56	0,73
	CEB	0,61	0,73	0,95
	DIN	0,52	0,61	0,86
	ACI	0,53	0,62	0,95
1,00	ALGORITMO	0,90	0,95	1,15
	NB-1	0,89	0,94	1,12
	CEB	1,05	1,26	1,53
	DIN	0,86	0,99	1,25
	ACI	0,94	1,12	1,57

Dos quatro processos testados o que fornece piores resultados é o da ACI, principalmente para grandes valores do esforço normal. Isto se dá porque quando o esforço normal torna-se significativo frente a carga de Euler, o fator de amplificação de momentos fica muito grande e irreal. Para melhorar os resultados deve-se considerar as armaduras na avaliação da carga de Euler. A ACI fornece uma expressão para o cálculo da rigidez à flexão incluindo as armaduras. Assim, a rigidez dada pela equação (3.3.21) deve ser usada como pré-dimensionamento, e a partir da armadura obtida, procede-se a novos dimensionamentos incluindo as armaduras no cálculo da rigidez.

TABELA 4.7 - Valores de  $\omega$  -  $\ell/d = 25,5$  ( $\lambda = 80$ )

$\mu$	MÉTODO	$\nu$		
		0,20	0,60	1,00
0,20	ALGORITMO	0,16	0,21	0,35
	NB-1	0,17	0,26	0,44
	CEB	0,19	0,27	0,44
	DIN	0,18*	0,31*	0,53*
	ACI	0,13	0,20	0,60
0,60	ALGORITMO	0,54	0,64	0,85
	NB-1	0,54	0,64	0,84
	CEB	0,63	0,78	1,00
	DIN	0,54*	0,69*	0,99*
	ACI	0,57	0,85	1,80
1,00	ALGORITMO	0,92	1,03	1,26
	NB-1	0,92	1,02	1,23
	CEB	1,07	1,31	1,58
	DIN	0,86	1,07*	1,38*
	ACI	1,01	1,48	2,98

\* Situação fora dos limites de aplicação do método.

#### 4.5. Inclusão simplificada da fluência do concreto

Para testar a precisão do processo simplificado de inclusão da fluência do concreto descrito na seção 3.6, preparou-se a Tabela 4.8 para coeficiente final de fluência,  $\phi(t_{\infty}, t_0)$ , igual a 2 como em 3.5.1. Para o algoritmo a história de carga é a mostrada na figura 3.5.1.

A tabela foi preparada para pilares curtos e esbeltos, com relação  $\ell/d$  igual a 12 e 40. A situação de projeto é a mesma da seção anterior. O aço é o CA50A e o parâmetro  $d'/d$  igual a 0,10. Encontram-se tabeladas as taxas mecânicas de armadura  $\omega$ , definidas por (4.3.6), para os esforços de projeto de 1ª ordem  $\nu$  e  $\mu$  definidos por (4.3.2) e (4.3.5), respec

tivamente. No processo simplificado do CEB/78 não foi considerado o fator de comportamento  $\gamma_n = 1,2$ .

TABELA 4.8 - Valores de  $\omega - \phi (t_\infty, t_0) = 2$

$l/d$	$\nu$	0,20		0,60		1,00	
		ALGORITMO	CEB/78	ALGORITMO	CEB/78	ALGORITMO	CEB/78
12 ( $\lambda \approx 40$ )	0,20	0,12	0,12	0,10	0,10	0,22	0,21
	0,60	0,49	0,50	0,50	0,52	0,65	0,67
	1,00	0,88	0,88	0,88	0,91	1,05	1,10
40 ( $\lambda \approx 125$ )	0,20	0,26	0,26	0,55	0,58	0,86	1,07
	0,60	0,65	0,70	0,94	1,19	1,33	2,05
	1,00	1,02	1,13	1,34	1,80	1,74	2,95

Comparando os resultados, verifica-se que o processo simplificado proposto pelo CEB para a inclusão da fluência do concreto, fornece uma solução a favor da segurança. O erro torna-se maior à medida que os esforços iniciais de 1ª ordem crescem, principalmente o esforço normal. Isto se dá porque quando o esforço normal aproxima-se da carga de Euler, a excentricidade adicional de fluência tende ao infinito. Consequentemente os melhores resultados são obtidos para valores baixos do esforço normal. A precisão do processo pode ser melhorada incluindo-se as armaduras no cálculo da carga de Euler. Para isto procede-se iterativamente, adotando em uma iteração a armadura calculada na iteração anterior. O fator de comportamento  $\gamma_n$  sugerido pelo CEB para a majoração da força axial, pode ser desconsiderado em vista dos resultados obtidos.

#### 4.6. Importância das deformações diferidas do concreto

Para se detectar o erro cometido no dimensionamento ao se desprezar as deformações diferidas do concreto, foram preparadas tabelas semelhantes a anterior, para pilares curtos e esbeltos, com relação  $l/d$  igual a 12 e 40. A deformação es-

pecífica de retração foi fixada conforme a seção 3.5.2. Os de mais parâmetros caracterizadores do pilar são os mesmos da seção anterior.

Ao se desprezar a fluência do concreto, verificou-se um erro máximo, para a faixa de esbeltez e esforços solicitantes de primeira ordem em estudo, da ordem de 20%. Este limite tende a aumentar com o crescimento do esforço normal, de forma que a fluência do concreto não pode simplesmente ser desprezada como sugere a NB-1.

A retração do concreto acarretou um aumento máximo de 2% na armadura, o que indica que a mesma pode ser desprezada nos casos em questão. Isto inclusive é permitido pelo CEB/78.

#### 4.7. Coeficiente de segurança

O coeficiente global de segurança  $s$ , é definido como sendo a razão entre o carregamento de ruína e o carregamento de serviço do pilar. O carregamento de ruína, neste caso, é obtido com as resistências características dos materiais, ou seja, a ruptura é verificada com essas resistências características. De um modo geral este coeficiente é composto de três parcelas, uma devida à majoração das cargas de serviço e as outras duas devidas à minoração das resistências do aço e do concreto, que são as condições de segurança impostas no dimensionamento. Nestas condições o coeficiente de segurança fica dependente do grau de solicitação do pilar. Assim é que ele diminui com a esbeltez, pois quanto maior a esbeltez do pilar, maiores serão os momentos de segunda ordem e, conseqüentemente, maior o grau de fissuração da peça, reduzindo com isso, a parcela de contribuição do fator minorador da resistência do concreto.

Na figura 4.7.1 apresenta-se a variação do coeficiente global de segurança para valores do parâmetro de esbeltez  $l/d$  entre 12,7 e 40, o que corresponde a índices de esbeltez  $\lambda$  de 40 e 125, respectivamente. O aço é o CA50A e o parâmetro  $d'/d$  é igual a 0,10. A situação de projeto é a mesma da figura 4.3.1, porém com momentos iguais nos apoios. As definições do esforço normal reduzido  $v$  e do momento fletor reduzido  $\mu$ ,

são dadas pelas expressões (4.3.2) e (4.3.5). O carregamento é de curta duração. O coeficiente de segurança indicado na figura é o obtido através do dimensionamento pelo processo alternativo do capítulo 3.

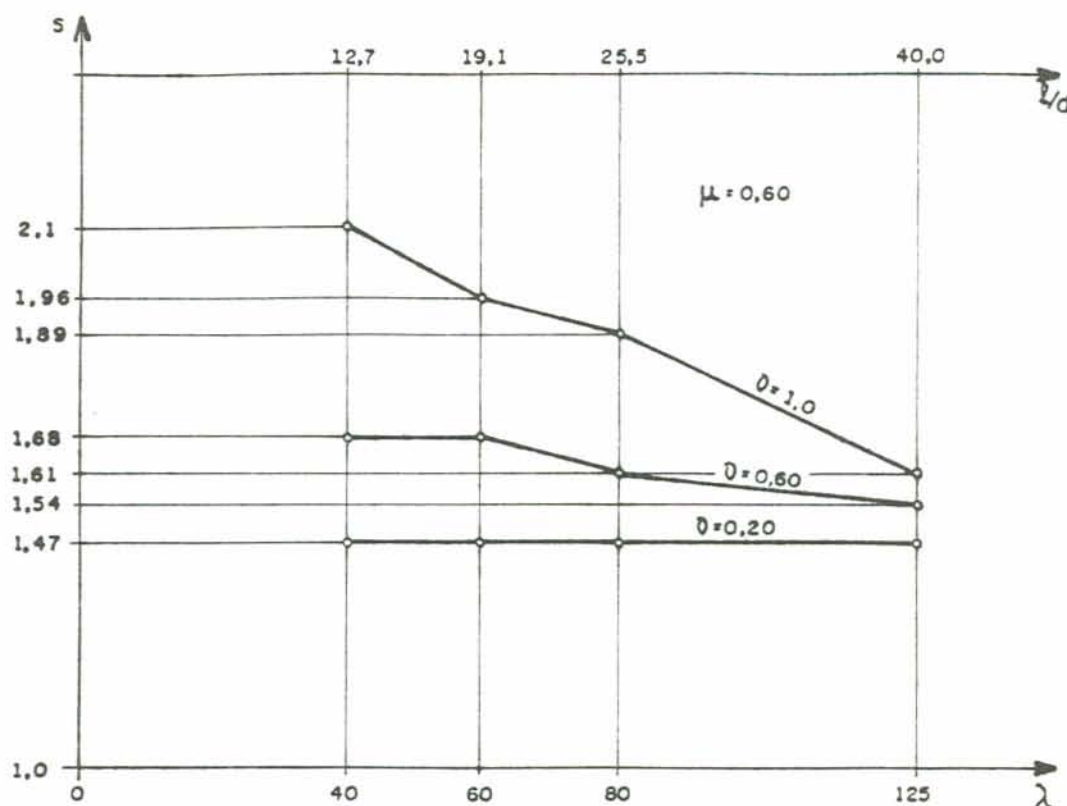


FIGURA 4.7.1 - Variação do coeficiente global de segurança  $s$ , com a esbelteza e com a força normal.

#### 4.8. Engastamento elástico

##### 4.8.1. Influência do grau de engastamento

As curvas das figuras 4.8.1 e 4.8.2 foram obtidas com o algoritmo de análise descrito na seção 2.10 para o pilar da figura 2.10.1. As curvas relacionam o momento e a força axial que atuam nas extremidades do pilar, em forma adimensional, com o deslocamento transversal máximo  $W$  do seu eixo, relativo à altura útil  $d$  da seção transversal da figura 4.3.1. O parâmetro geométrico  $d'/d$  é igual a 0,10 e o aço é o CA50A.



As respostas foram obtidas para cargas de curta duração, com dois valores de rigidez das molas e também para o caso bi-rotulado.

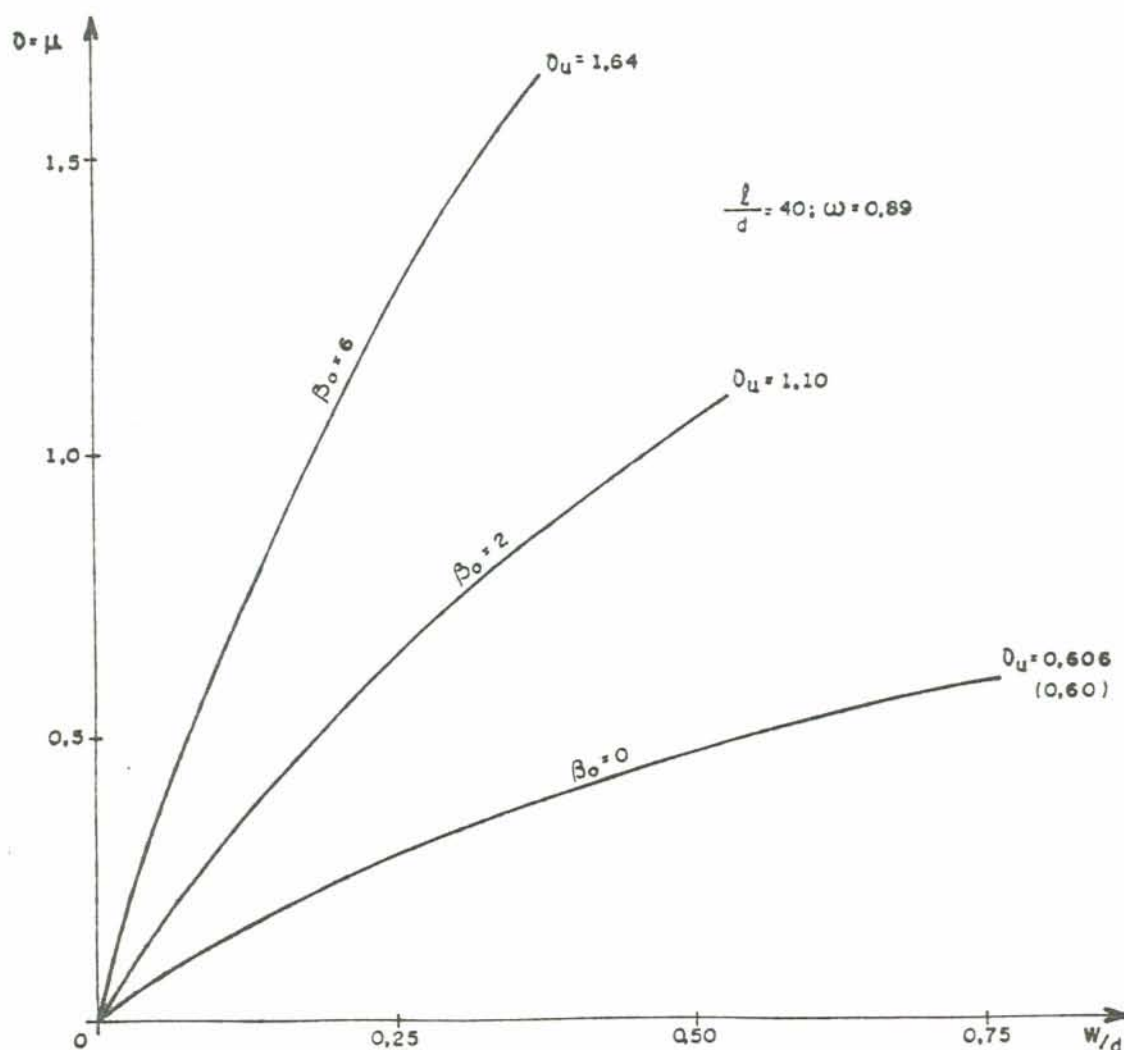


FIGURA 4.8.1 - Respostas da estrutura para diferentes graus de engastamento  $\beta_0$ .

Nas figuras são indicados os valores  $v_u$  da carga de ruína. Para o caso bi-rotulado, com  $\beta_0 = 0$ , o valor entre parêntesis é a carga de ruína obtida com o algoritmo iterativo da seção 2.6. Verifica-se uma boa concordância entre os dois algoritmos.

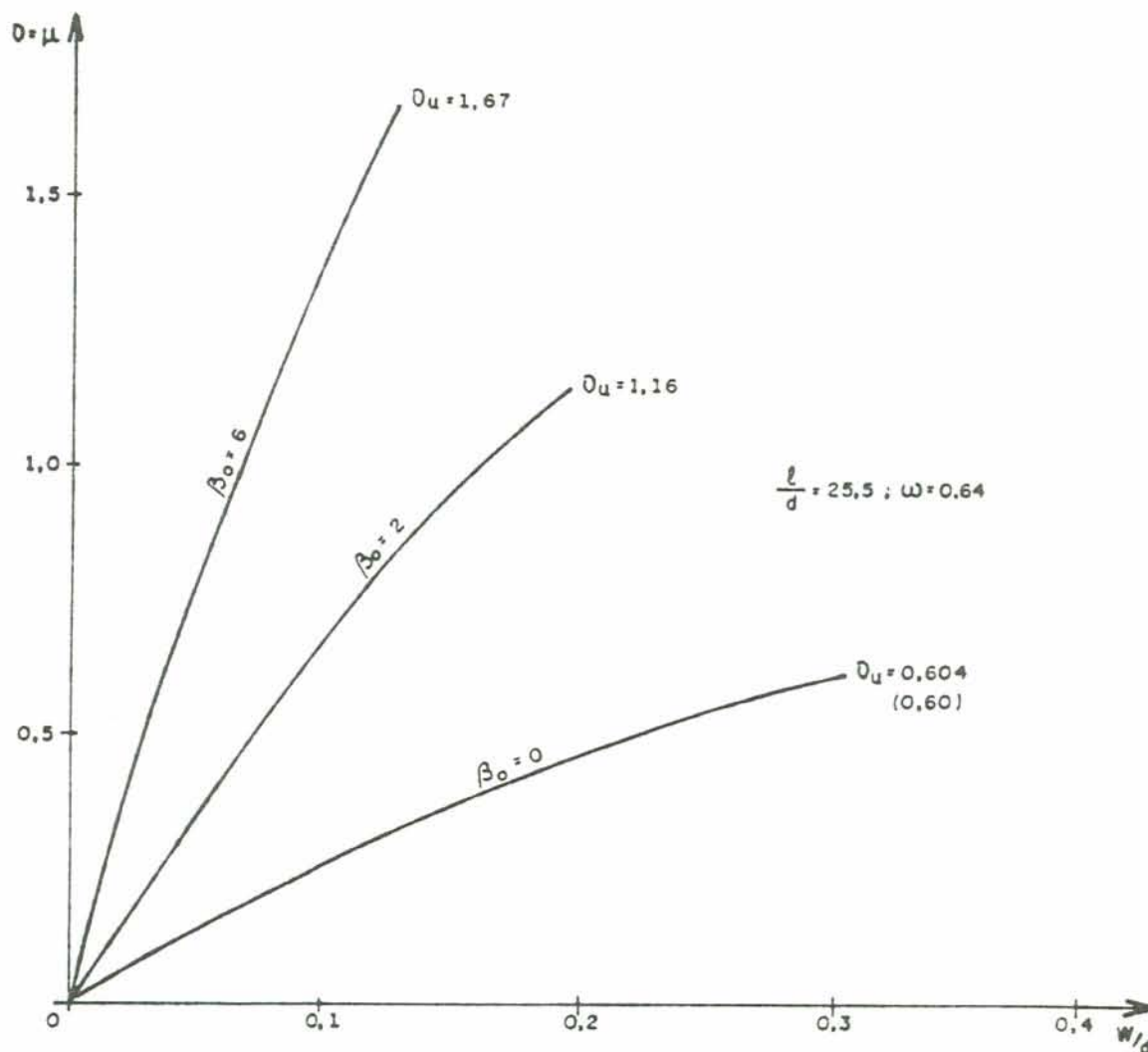


FIGURA 4.8.2 - Respostas da estrutura para diferentes graus de engastamento  $\beta_0$ .

#### 4.8.2. Análise clássica

O projeto usual do pilar da figura 2.10.1, é baseado numa análise elástica linear de primeira ordem, para se determinar os esforços solicitantes e posterior dimensionamento incluindo as duas não-linearidades presentes.

Da análise linear resulta para o momento fletor de primeira ordem  $M_{1d}$ , solicitante no pilar, a expressão (4.8.1), onde  $M_0$  e  $\beta_0$  são o momento nodal e o parâmetro de rigidez da mola, respectivamente.

$$M_{1d} = M_0 \left( \frac{2}{2 + \beta_0} \right) \quad (4.8.1)$$

Dimensiona-se o pilar para o momento  $M_{1d}$  e a força axial  $P$ , incluindo as não-linearidades física e geométrica, como no algoritmo alternativo do capítulo 3.

A influência favorável da rigidez nodal nos deslocamentos transversais do eixo do pilar, é considerada adotando-se um comprimento reduzido para o mesmo, admitido igual ao comprimento de flambagem.

Na Tabela 4.9, apresenta-se os resultados obtidos com esse procedimento, para os pilares das figuras 4.8.1 e 4.8.2. Encontram-se indicadas, as cargas de ruína  $v_u = \mu_u$  obtidas com o algoritmo da seção 2.10 e a taxa de armadura  $\omega$  existente nos pilares. Os valores  $\mu_{1d}$ ,  $l_e/d$  e  $\omega_e$  referem-se ao momento fletor de primeira ordem obtido de (4.8.1), a relação de esbeltez com o comprimento de flambagem, calculada através de (3.2.13), e a taxa de armadura obtida com o algoritmo alternativo do capítulo 3, respectivamente.

A taxa de armadura  $\omega_e$ , foi calculada com o procedimento clássico, admitindo a validade do critério de comprimento de flambagem.

TABELA 4.9 - Pilares com esgastamento elástico

$l/d$	$\beta_0$	$v_u = \mu_u$	$\omega$	$\mu_{1d}$	$l_e/d$	$\omega_e$	$\left(\frac{\omega_e^{-\omega}}{\omega}\right) 100$
40	2	1,10	0,89	0,55	31,0	0,98	10,0
	6	1,64	0,89	0,41	25,8	0,93	4,5
25,5	2	1,16	0,64	0,58	19,8	0,79	23,5
	6	1,67	0,64	0,42	16,4	0,74	15,5

Observa-se através dos resultados, que a adoção desse critério resulta numa solução a favor da segurança. Entretanto, em virtude do pequeno número de exemplos, não se pode chegar a uma conclusão sobre a possível existência de casos contrários à segurança.

Uma outra observação que se deve fazer, é que a solu

ção obtida com o algoritmo da seção 2.10, só é válida enquanto as vigas que concorrem aos nós do pórtico, permanecerem em regime aproximadamente linear.

## 5. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Em função de todo o estudo realizado, algumas conclusões importantes podem ser tiradas, relativas à análise e dimensionamento de pilares de concreto armado.

Com relação à análise, verifica-se a eficiência e precisão do algoritmo de aproximações sucessivas, o qual tem a vantagem da facilidade de programação. É um algoritmo especialmente indicado para pilares isostáticos e fornece uma solução realística do problema. Para o cálculo das curvaturas do eixo do pilar, necessárias para a avaliação dos deslocamentos, pode-se utilizar o algoritmo com rigidez tangente, que se mostra bastante eficiente do ponto de vista do tempo de processamento. A solução adotada para a inclusão das deformações diferidas é facilmente adaptada à análise de curta duração e fornece bons resultados frente aos dados experimentais. O algoritmo desenvolvido para pilares engastados elasticamente tem como principal atrativo, o fato de se poder analisar a estrutura hiperestática sem a utilização dos tradicionais métodos matriciais, os quais requerem uma considerável disponibilidade de memória, além de difícil programação.

Em se tratando de dimensionamento, verifica-se a grande dificuldade de inclusão simultânea das duas não-linearidades. Isto só pode ser realizado através de vários dimensionamentos sucessivos, acompanhados de uma análise global da estabilidade do pilar. É um processo trabalhoso e só se torna viável com a utilização de um computador. Em função disto é razoável admitir-se processos simplificados, os quais têm precisão constatada para casos particulares de geometria e carregamento.

Os quatro processos simplificados propostos em normas que foram testados, mostram-se relativamente precisos para aplicações práticas. O processo da NB-1 apresenta-se como o mais adequado para as condições usuais de pilares de edifícios residenciais e comerciais.

O critério de adoção de uma excentricidade equivalente para pilares carregados assimetricamente, é de boa precisão e fica favorável à segurança.

A adoção do conceito de comprimento de flambagem elástica para pilares de concreto armado, mostra-se à favor da segurança pela subestimação da capacidade de carga do pilar nas condições reais de projeto.

A inclusão da fluência do concreto na forma simplificada proposta pelo CEB, fornece bons resultados e favoráveis à segurança. Não há a necessidade de se adotar o fator de comportamento sugerido pelo código.

As principais críticas à norma brasileira NB-1/78, referem-se à fluência e ao conceito de pilar curto. A fluência do concreto pode ter importância significativa na estabilidade dos pilares, e não pode simplesmente ser desprezada para  $\lambda \leq 80$ . Com relação à esbeltez, não se pode desprezar os efeitos de segunda ordem somente em função do índice  $\lambda$ . Para se classificar um pilar como curto deve-se levar em consideração, além deste índice, a excentricidade relativa da força normal. Espera-se que na próxima revisão da norma, esses dois pontos sejam considerados.

Em termos de projeto, recomenda-se a utilização do processo do CEB para a inclusão da fluência do concreto, e mostra-se uma preferência pelo processo simplificado da NB-1 para a inclusão dos efeitos de segunda ordem. Sugere-se a classificação de pilares curtos da DIN 1045 e não como indica a NB-1.

Como continuação deste estudo, recomenda-se uma análise mais detalhada do critério de comprimento de flambagem para pilares engastados elasticamente, a fim de verificar se o mesmo fornece sempre uma solução a favor da segurança. Uma extensão deste trabalho para flexo-compressão oblíqua, deve ser considerada em desenvolvimentos futuros.

## APÊNDICE

### RELAÇÕES MOMENTO FLETOR-ESFORÇO NORMAL-CURVATURA PARA SEÇÕES RETANGULARES

#### A.1. Resultante das tensões de compressão no concreto

A seção de concreto armado considerada é a mostrada na figura A.1.1, onde a armadura se distribui simetricamente em torno do perímetro da seção. Os parâmetros geométricos caracterizadores da mesma encontram-se evidenciados na figura.

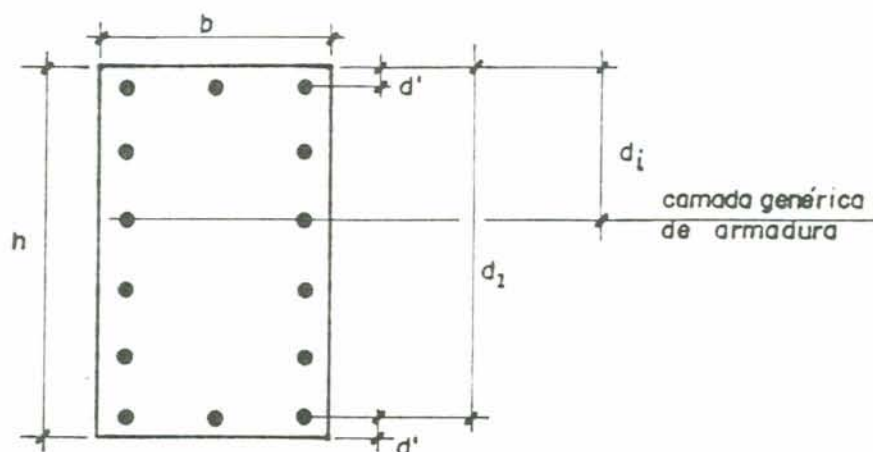


FIGURA A.1.1 - Seção transversal retangular maciça.

Pela aplicação de um momento fletor associado a um esforço normal, a distribuição de deformações na seção é a linear da figura A.1.2, onde  $\epsilon_0$  é a deformação correspondente ao início do trecho retangular do diagrama tensão-deformação do concreto.

O diagrama tensão-deformação adotado para o concreto é o da figura A.1.3, onde  $f_c$  será tomado igual a  $f_{cd}$  ou  $f_{ck}$  dependendo se se trata da verificação da ruptura ou do cálculo de deslocamentos através das relações M-N-X.

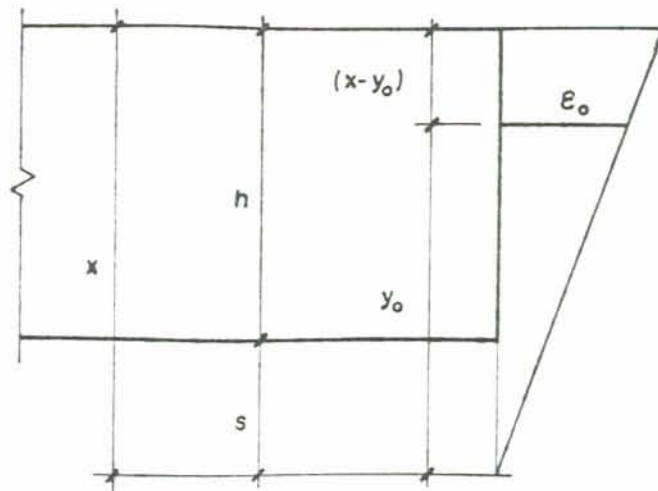


FIGURA A.1.2 - Distribuição de deformações na seção transversal.

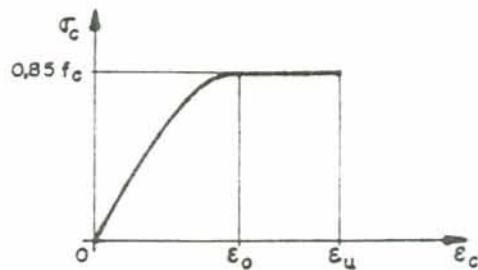


FIGURA A.1.3 - Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão.

As deformações  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_u$  são dadas por (A.1.1) e (A.1.2), onde  $\phi$  é o valor do coeficiente de fluência num instante  $t$  genérico.

$$\epsilon_0 = 2\text{‰} (1 + \phi) \quad . \quad (\text{A.1.1})$$

$$\epsilon_u = 3,5\text{‰} (1 + \phi) \quad . \quad (\text{A.1.2})$$

A equação do trecho parabólico do diagrama é dada por

$$\sigma_c = 0,85 f_c [A \epsilon_c^2 + B \epsilon_c] \quad , \quad (\text{A.1.3})$$



onde

$$A = \frac{-250000}{(1 + \phi)^2} , \quad (\text{A.1.4})$$

e

$$B = \frac{1000}{(1 + \phi)} . \quad (\text{A.1.5})$$

De acordo com a equação (2.9.2) do capítulo 2, a deformação  $\epsilon_c$  em uma fibra situada a uma distância  $y$  da linha neutra, é dada por (A.1.6) onde  $\epsilon_{cs}$  é a deformação específica de retração num instante  $t$  genérico e  $\chi$  é a curvatura da seção.

$$\epsilon_c = \chi y - \epsilon_{cs} . \quad (\text{A.1.6})$$

Igualando (A.1.6) ao valor de  $\epsilon_0$  dado por (A.1.1) resulta para  $y_0$  da figura A.1.2,

$$y_0 = \frac{2^{0/00} (1 + \phi) + \epsilon_{cs}}{\chi} . \quad (\text{A.1.7})$$

Define-se,

$$b = \chi d_1 ; \quad (\text{A.1.8})$$

$$\xi = \frac{\chi}{d_1} ; \quad (\text{A.1.9})$$

$$a = \frac{d'}{d_1} ; \quad (\text{A.1.10})$$

$$\alpha = \frac{2^{0/00} (1 + \phi) + \epsilon_{cs}}{\phi} ; \quad (\text{A.1.11})$$

$$\gamma = \xi - 1 - a . \quad (\text{A.1.12})$$

Substituindo (A.1.8) e (A.1.11) em (A.1.7) resulta (A.1.13).

$$y_0 = \alpha d_1 \quad . \quad (A.1.13)$$

A distância  $s$  na figura A.1.2 é dada por

$$s = x - h \quad . \quad (A.1.14)$$

Observando pela figura A.1.1 que,

$$h = d_1 + d' \quad (A.1.15)$$

e introduzindo (A.1.9), (A.1.10) e (A.1.12) resulta para  $s$  a expressão

$$s = \gamma d_1 \quad . \quad (A.1.16)$$

A distribuição das tensões de compressão na seção de concreto é mostrada na figura A.1.4.

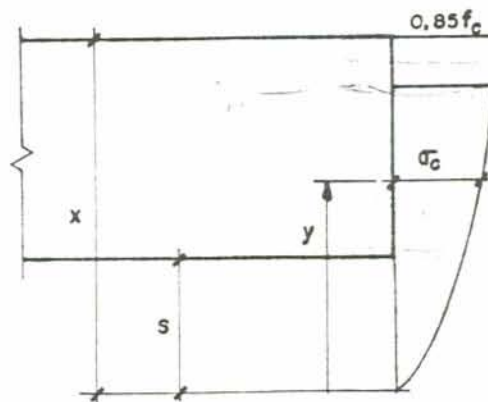


FIGURA A.1.4 - Tensões de compressão na seção de concreto

A tensão numa fibra genérica da seção será conforme a mesma se encontre no trecho parabólico ou no trecho retangular, dada por (A.1.17) ou (A.1.18) respectivamente, onde em (A.1.17) já se substituiu a expressão (A.1.6) para a deformação  $\epsilon_c$ .

$$\sigma_c = 0,85 f_c [A (XY - \epsilon_{cs})^2 + B (XY - \epsilon_{cs})] . \quad (\text{A.1.17})$$

$$\sigma_c = 0,85 f_c . \quad (\text{A.1.18})$$

A resultante de tensões no concreto é dada pela integral

$$R_{cc} = \int_s^x b \sigma_c dy , \quad (\text{A.1.19})$$

ou, o que é equivalente, por

$$R_{cc} = \int_s^{y_0} b \sigma_c dy + \int_{y_0}^x b \sigma_c dy . \quad (\text{A.1.20})$$

Resolvendo as integrais e fazendo todas as substituições necessárias, resulta

$$R_{cc} = R_{cc\chi} + R_{ccs} \quad (\text{A.1.21})$$

onde

$$R_{cc\chi} = \left[ \frac{A\phi^2}{3} (\alpha^3 - \gamma^3) + \frac{B\phi}{2} (\alpha^2 - \gamma^2) + \xi - \alpha \right] bd_1 0,85 f_c \quad (\text{A.1.22})$$

$$R_{ccs} = \{ A [\epsilon_{cs}^2 (\alpha - \gamma) - \phi \epsilon_{cs} (\alpha^2 - \gamma^2)] - B \epsilon_{cs} (\alpha - \gamma) \} bd_1 0,85 f_c . \quad (\text{A.1.23})$$

De um modo geral pode-se escrever

$$R_{cc} = k_c bd_1 0,85 f_c , \quad (\text{A.1.24})$$

onde  $k_c$  é um adimensional.

As equações (A.1.22) e (A.1.23) foram deduzidas admitindo-se que toda a seção estava comprimida, e além disto, que

a distribuição de tensões na seção apresentava um trecho parabólico e um trecho retangular. Como outros casos podem ocorrer, no programa de computador deve-se fazer as seguintes alterações:

- 1 - Se  $\gamma < 0$ , significando que só parte da seção está comprimida, deve-se fazer  $\gamma = 0$ .
- 2 - Se  $\xi < \alpha$ , significando que o trecho retangular inexistente, deve-se fazer  $\alpha = \xi$  pois o trecho parabólico estende-se até o topo da seção.

Na figura A.1.5 apresenta-se a resultante de compressão no concreto  $R_{CC}$ , posicionada a uma distância  $z$  da borda menos comprimida e a uma distância  $y_c$  da linha neutra.

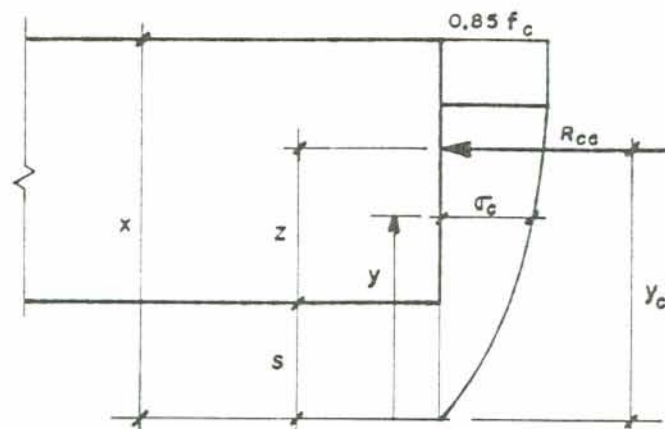


FIGURA A.1.5 - Posição da resultante de compressão no concreto.

De acordo com a figura A.1.5 pode-se escrever

$$R_{CC} \quad y_c = \int_s^x b \sigma_c y \, dy . \quad (A.1.25)$$

Resolvendo a integral com as devidas substituições e introduzindo (A.1.24) resulta

$$y_c = (y_{cX} + y_{cs}) d_1 \quad (A.1.26)$$

onde

$$y_{cX} = \frac{1}{k_c} \left[ \frac{A\phi^2}{4} (\alpha^4 - \gamma^4) + \frac{B\phi}{3} (\alpha^3 - \gamma^3) + \frac{\xi^2 - \alpha^2}{2} \right] \quad (\text{A.1.27})$$

$$y_{cS} = \frac{1}{k_c} \left\{ A \left[ \frac{\epsilon_{cs}^2}{2} (\alpha^2 - \gamma^2) - \frac{2\phi \epsilon_{cs}}{3} (\alpha^3 - \gamma^3) \right] - \frac{B \epsilon_{cs}}{2} (\alpha^2 - \gamma^2) \right\} \quad (\text{A.1.28})$$

De um modo geral pode-se escrever

$$y_c = k_0 d_1 \quad (\text{A.1.29})$$

onde  $k_0$  é um adimensional.

Observando pela figura A.1.5 que

$$z = y_c - s \quad (\text{A.1.30})$$

e substituindo (A.1.16) em (A.1.30), resulta

$$z = k_{c1} d_1 \quad (\text{A.1.31})$$

onde

$$k_{c1} = k_0 - \gamma \quad (\text{A.1.32})$$

Pelos motivos já expostos, no programa de computador, deve-se observar as seguintes situações:

- 1 - Se  $\gamma < 0$ , deve-se fazer  $\gamma = 0$  nas equações (A.1.27) e (A.1.28).
- 2 - Se  $\xi < \alpha$ , deve-se fazer  $\alpha = \xi$  nas equações (A.1.27) e (A.1.28).

## A.2. Relações momento fletor-esforço normal-curvatura

Se  $A_{si}$  é a área da seção transversal de armadura existente na camada genérica  $i$  da figura A.1.1, define-se a taxa geométrica  $\rho_i$  de armadura por

$$\rho_i = \frac{A_{si}}{bd_1} \quad . \quad (A.2.1)$$

Analogamente, sendo  $A_s$  a área total de aço na seção, define-se a taxa geométrica  $\rho$ , como

$$\rho = \frac{A_s}{bd_1} \quad . \quad (A.2.2)$$

Se todas as barras são do mesmo diâmetro, e  $n_i$  é o número de barras na camada  $i$  e  $n$  é o número total de barras, é fácil verificar que

$$\rho_i = \frac{n_i}{n} \rho \quad . \quad (A.2.3)$$

Define-se ainda, a taxa mecânica  $\omega$  de armadura, como sendo

$$\omega = \frac{\rho}{2} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad . \quad (A.2.4)$$

Para os esforços solicitantes define-se o esforço normal reduzido  $\nu$  por (A.2.5) e o momento fletor reduzido  $\mu$  por (A.2.6).

$$\nu = \frac{N_d}{bd_1 \cdot 0,85 f_{cd}} \quad . \quad (A.2.5)$$

$$\mu = \frac{M_d}{bd_1^2 \cdot 0,85 f_{cd}} \quad . \quad (A.2.6)$$

As equações de equilíbrio obtidas para uma seção transversal arbitrária, no capítulo 2, são dadas por (A.2.7) e (A.2.8).

$$N_d - R_{cc}(x, \chi) - \sum_{i=1}^{n'} A_{si} \sigma_{si}(x, \chi) = 0 \quad . \quad (A.2.7)$$

$$M_d = R_{cc}(x, \chi) z(x, \chi) + \sum_{i=1}^{n'} A_{si} (h - d_i) \sigma_{si}(x, \chi) - N_d c_2 \quad . (A.2.8)$$

Uma vez que as relações M-N- $\chi$  são utilizadas para o cálculo dos deslocamentos do pilar, a resistência adotada para o concreto deve ser a característica e como visto anteriormente, pode-se escrever

$$R_{cc} = k_c b d_1 \cdot 0,85 f_{ck} \quad ; \quad (A.2.9)$$

$$z = k_{c1} d_1 \quad . \quad (A.2.10)$$

Substituindo (A.2.1), (A.2.5) e (A.2.9) em (A.2.7) resulta

$$0,85 v f_{cd} - 0,85 k_c \cdot f_{ck} - \sum_{i=1}^{n'} \rho_i \sigma_{si} = 0 \quad . \quad (A.2.11)$$

Lembrando que  $f_{ck} = 1,4 f_{cd}$  de acordo com a NB-1 e substituindo (A.2.3) e (A.2.4) em (A.2.11), resulta finalmente

$$0,85 v - 1,19 k_c - \frac{2 \omega}{n f_{yd}} \sum_{i=1}^{n'} n_i \sigma_{si} = 0 \quad . \quad (A.2.12)$$

Define-se,

$$\beta_i = \frac{d_i}{d_1} \quad . \quad (A.2.13)$$

Procedendo de forma análoga pode-se expressar a equação (A.2.8) na forma adimensional (A.2.14), lembrando que para esta seção  $c_2 = 0,5 h$ .

$$\mu = 1,4 k_c k_{c1} + \frac{2 \omega}{0,85 n f_{yd}} \sum_{i=1}^{n'} n_i (1 + a - \beta_i) \sigma_{si} - 0,5 (1 + a) v \quad . \quad (A.2.14)$$

Nas expressões (A.2.12) e (A.2.14) os coeficientes  $k_c$  e  $k_{c1}$  dependem de  $\xi$  e  $\phi$  como já demonstrado. A tensão  $\sigma_{si}$  nas barras da camada  $i$  também dependem de  $\xi$  e  $\phi$ . De fato pela equação (2.5.5) do capítulo 2, verifica-se que a deformação na camada  $i$  é dada por (A.2.15), já feitas as substituições necessárias.

$$\epsilon_{si} = \phi (\xi - \beta_i) \quad . \quad (A.2.15)$$

Como a deformação é função de  $\phi$  e  $\xi$  a tensão correspondente também será. Obtém-se assim uma relação momento fletor-esforço normal-curvatura adimensional, na forma  $\mu-v-\phi$ .

Para a determinação de  $\beta_i$  recorre-se à figura A.2.1, onde admite-se que as barras estão igualmente espaçadas na vertical.

Pela figura é fácil concluir que

$$S_v = \frac{d_1 - d'}{n' - 1} \quad (A.2.16)$$

onde de acordo com a notação,  $n'$  é o número de camadas de armadura.

Também verifica-se que



$$d_i = d' + (n' - i) S_v \quad . \quad (A.2.17)$$

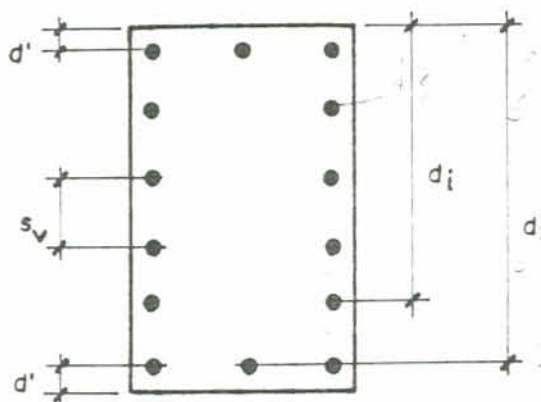


FIGURA A.2.1 - Seção com barras igualmente espaçadas.

Substituindo (A.2.16) em (A.2.17) resulta

$$d_i = d' + \frac{(n' - i)}{(n' - 1)} (d_1 - d') \quad . \quad (A.2.18)$$

Dividindo (A.2.18) por \$d\_1\$ e introduzindo (A.1.10) e (A.2.13) resulta finalmente

$$\beta_i = a + \frac{(n' - i)}{(n' - 1)} (1 - a) \quad . \quad (A.2.19)$$

### A.3. Determinação da ruptura da seção

A determinação do momento fletor de ruptura da seção é baseada nos domínios de dimensionamento da figura 2.9.2 do capítulo 2. Para isto trabalha-se com as resistências minora- das dos materiais, ou seja, com \$f\_{cd}\$ e \$f\_{yd}\$ para o concreto e pa ra o aço, respectivamente. De acordo com estes domínios, veri fica-se que conhecida a posição \$x\$ da linha neutra da seção, a curvatura \$\chi\$ da mesma pode ser escrita em função de \$x\$. A ex- pressão de \$\chi\$ varia conforme o domínio em que se situa, devendo -se distinguir três casos.

## a) Domínio 2.

É fácil ver pela figura 2.9.2 que neste domínio,  $x$  tem a variação dada por (A.3.1), onde  $\phi$  é o valor do coeficiente de fluência no instante em consideração.

$$0 \leq x \leq \left[ \frac{3,5 (1 + \phi)}{10 + 3,5 (1 + \phi)} \right] d_1 \quad . \quad (\text{A.3.1})$$

Introduzindo (A.1.9) resulta para este domínio

$$0 \leq \xi \leq \frac{3,5 (1 + \phi)}{10 + 3,5 (1 + \phi)} \quad . \quad (\text{A.3.2})$$

A curvatura  $\chi$  é dada em função de  $x$  por (A.3.3), ou em forma adimensional, por (A.3.4)

$$\chi = \frac{0,010}{d_1 - x} \quad ; \quad (\text{A.3.3})$$

$$\phi = \frac{0,010}{1 - \xi} \quad . \quad (\text{A.3.4})$$

## b) Domínios 3,4 e 4a.

Neste caso as variações de  $x$  e  $\xi$  são dadas por (A.3.5) e (A.3.6) e as curvaturas  $\chi$  e  $\phi$  por (A.3.7) e (A.3.8).

$$\left[ \frac{3,5 (1 + \phi)}{10 + 3,5 (1 + \phi)} \right] d_1 < x \leq h \quad ; \quad (\text{A.3.5})$$

$$\frac{3,5 (1 + \phi)}{10 + 3,5 (1 + \phi)} < \xi \leq 1 + a \quad ; \quad (\text{A.3.6})$$

$$\chi = \frac{0,0035 (1 + \phi)}{x} \quad ; \quad (\text{A.3.7})$$

$$\phi = \frac{0,0035 (1 + \phi)}{\xi} \quad . \quad (\text{A.3.8})$$

## c) Domínio 5.

Neste domínio as expressões em estudo são dadas por (A.3.9) a (A.3.12).

$$h < x < \infty \quad ; \quad (A.3.9)$$

$$(1 + a) < \xi < \infty \quad ; \quad (A.3.10)$$

$$\chi = \frac{0,002 (1 + \phi)}{x - \frac{3}{7} h} \quad ; \quad (A.3.11)$$

$$\phi = \frac{0,002 (1 + \phi)}{\xi - \frac{3}{7} (1 + a)} \quad . \quad (A.3.12)$$

Para a determinação do momento de ruptura utiliza-se o processo da bissecante. A equação (A.2.7) em forma adimensional, é função apenas de  $\xi$  uma vez que  $\phi$  é conhecida para cada valor de  $\xi$ . Utiliza-se o processo da bissecante para encontrar  $\xi$ , no intervalo  $[0, \infty)$ . Caso não exista a raiz de (A.2.7) significa que a seção não resiste ao esforço normal aplicado. Encontrado  $\xi$  a equação (A.2.8) em forma adimensional fornece diretamente o momento de ruptura  $\mu_u$  da seção.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALLEN, H.G. & BULSON, P.S. Background to buckling. London, McGraw-Hill, 1980.
2. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for reinforced concrete. Detroit, 1971. (ACI standard, 318-71).
3. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações: NB-5. Rio de Janeiro, 1978.
4. \_\_\_\_\_. Projeto e execução de obras de concreto armado: NB-1. Rio de Janeiro, 1978.
5. BIGNON, Pablo Gastón. Análisis no-lineal en pórticos de hormigón armado. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 16., Buenos Aires, 22-27 abr. 1974. Buenos Aires, Sociedad Argentina de Ensayo de Materiales, 1974. v.1, p.209-36.
6. CAMPOS FILHO, Américo. Análise de pilares de concreto armado submetidos a flexo-compressão oblíqua. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1982. Diss. maestr.
7. CENDES SARAGOSA, Gerson. Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado. Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1981. Diss. maestr.
8. CHEN, Wai-Fah & ATSUTA, Toshio. Theory of beam-columns. New York, McGraw-Hill, 1976. v.1

9. COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. CEB/FIP manual of buckling and instability. Paris, 1978. (Bulletin d'Information, 123).
10. \_\_\_\_\_. Code-modèle CEB/FIP pour les structures en béton. Paris, 1978. (Bulletin d'Information, 124/125).
11. \_\_\_\_\_. Compléments au code modèle CEB-FIP 1978 (1er draft). Paris, 1979. (Bulletin d'Information, 130).
12. CONSTANTINESCU, Dan R. & ILLSTON, John M. Computer experiments on slender beam-columns of reinforced concrete. Magazine of Concrete Research, London, 30(105):177-88, Dec. 1978.
13. \_\_\_\_\_. The response of reinforced concrete cross-sections to short-term and sustained loads. Magazine of Concrete Research, London, 30(104):107-18, Sept. 1978.
14. FERGUSON, Phil M. Reinforced concrete fundamentals. New York, Wiley International, 1973.
15. FUENTES, Albert. Cálculo practico de estructuras de edificios en hormigón armado. Barcelona, Ed. Técnicos Asociados, 1980.
16. FUSCO, P.B. Estruturas de concreto - solicitações normais. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1981.
17. GOYAL, Brij B. & JACKSON, Neil. Slender concrete columns under sustained load. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 97(11):2729-50, Nov. 1971.
18. GURFINKEL, German & ROBINSON, Arthur. Determination of strain distribution and curvature in a reinforced concrete section subjected to bending moment and longitudinal load. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 64(7):398-403, July 1967.

19. HOFFMANN, J.R. Pilares esbeltos de concreto armado.  
Porto Alegre, UFRGS, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, 1979. Diss. maestr.
20. JORDAAN, Ian J.; ENGLAND, George L.; KHALIFA, Magdi M.A.  
Creep of concrete: a consistent engineering approach.  
Journal of the Structural Division, New York, ASCE,  
103(3):475-91, Mar. 1977.
21. JIMENEZ MONTOYA, P.; GARCIA MESENER, A.; MORAN CABRE, F.  
Hormigón armado. 10.ed. Barcelona, Gustavo Gili,  
1979. v.1.
22. LEONHARDT, F. & MÜNNIG, E. Construções de concreto.  
Rio de Janeiro, Interciência, 1977. v.1.
23. MacGREGOR, J.G.; OELHAFEN, U.H.; HAGE, S.E. A re-  
examination of the EI value for slender columns. In:  
SYMPOSIUM ON REINFORCED CONCRETE COLUMNS, Ottawa, 1973.  
Detroit, American Concrete Institute, 1976. p.1-40.  
(ACI Special Publication, 50).
24. MANUEL, Robert F. & MacGREGOR, James G. Analysis of  
restrained reinforced concrete columns under sustained  
load. Journal of the American Concrete Institute,  
Detroit, 64(1):12-24, Jan. 1967.
25. MEDLAND, I.C. & TAYLOR, D.A. Flexural rigidity of  
concrete column sections. Journal of the Structural  
Division, New York, ASCE, 97(2):573-86, Feb. 1971.
26. NEVILLE, A.M. Properties of concrete. 2.ed. London,  
Pitman, 1975.
27. PETRUCCI, E.G. Concreto de cimento Portland. 2.ed.  
Porto Alegre, Globo, 1975.
28. PROMON ENGENHARIA. Tabelas para dimensionamento de con-  
creto armado (segundo a NB-1/76). São Paulo, McGraw-  
-Hill, 1976.

29. RAO, P. Srinivasa & SUBRAHMANYAM, B.V. Trisegmental moment-curvature relations for reinforced concrete members. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 70(5):346-51, May 1973.
30. RÜSCH, Hubert. Concreto armado e protendido. Rio de Janeiro, Ed. Campus, 1981.
31. \_\_\_\_\_. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 57:1-28, July 1960.
32. SANTOS, Beatriz de Oliveira. Aspectos do problema da estabilidade de colunas em concreto armado. Rio de Janeiro, PUC, 1977. Diss. maestr.
33. SANTOS, Lauro Modesto dos. Cálculo de concreto armado. São Paulo, Ed. LMS, 1983. 2.v.
34. SHU-MING, A. Lai.; MacGREGOR, James G.; HELLESLAND, Jostein. Geometric nonlinearities in nonsway frames. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 109(12):2770-85, Dec. 1983.
35. SILVA Jr., Jayme Ferreira da. Concreto armado: flexão com posta no estádio III. 2.ed. Belo Horizonte, Ed. Arquitetura e Engenharia, 1975.
36. SPERANDIO NETO, Ernesto. Pilares esbeltos de concreto armado com seção retangular sujeitos à flexo-compressão oblíqua. Porto Alegre, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 1982. Diss. maestr.
37. SUSSEKIND, José Carlos. Concreto armado. In: \_\_\_\_\_. Curso de concreto. 3.ed. Porto Alegre, Globo, 1983. v.1.
38. TIMOSHENKO, Stephen P. History of strength of materials. New York, McGraw-Hill, 1953.
39. TIMOSHENKO, S.P. & GERE, James M. Theory of elastic stability. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1961.

40. TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. Theory of elasticity.  
3.ed. New York, McGraw-Hill, 1970.
41. WINTER, George & NILSON, Arthur H. Proyecto de estructuras de hormigón. Barcelona, Reverté, 1977.
42. ZIENKIEWICZ, O.C. The finite element method in engineering science. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1971.



## ANEXO

### TABELAS PARA DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

As tabelas apresentadas neste anexo, seguindo o mesmo formato das Tabelas PROCON<sup>(28)</sup>, destinam-se ao dimensionamento de pilares de concreto armado com geometria e carregamento da figura AN.1. A seção transversal do pilar se mantém constante ao longo do seu eixo, inclusive a armadura.

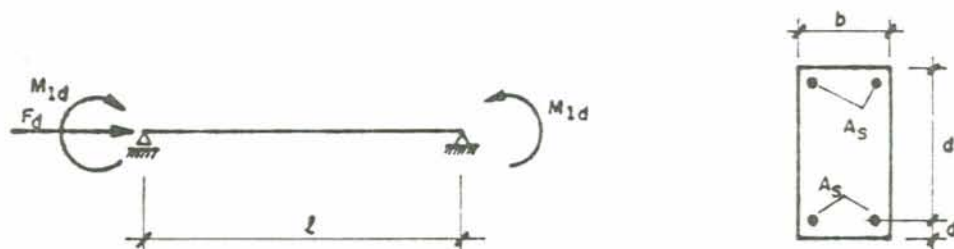


FIGURA AN.1 - Geometria e carregamento do pilar.

Para a utilização das tabelas deve-se entrar com os seguintes parâmetros adimensionais.

$$\beta = \frac{l}{d} \text{ - relação de esbeltez do pilar;}$$

$$a = \frac{d'}{d} \text{ - parâmetro geométrico da seção;}$$

$$\nu = \frac{F_d}{0,85 \, b d \, f_{cd}} \text{ - esforço normal reduzido;}$$

$$\mu = \frac{M_{1d}}{0,85 \, b d^2 \, f_{cd}} \text{ - momento fletor reduzido de primeira ordem.}$$

As tabelas fornecem o valor de  $\omega$  com o qual se calcula a seção de armadura  $A_s$  por

$$A_s = \omega b d \frac{f_{cd}}{f_{yd}} .$$

Todas as tabelas foram preparadas para cargas de curta duração,  $\phi = 0$ . Encontram-se tabelas para os aços CA50A e CA50B.

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

$\rho = 0$  CA 50 A

$\beta = 15$

$a = 0.05$

$\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,86	0,84	0,82	0,82	0,82	0,87	0,91	0,95	1,00	1,04	1,07	1,12	1,17	1,21	1,26
0,90	0,77	0,75	0,73	0,73	0,73	0,78	0,82	0,86	0,91	0,95	0,98	1,03	1,07	1,12	1,16
0,80	0,68	0,66	0,64	0,64	0,65	0,69	0,72	0,77	0,81	0,84	0,89	0,93	0,98	1,02	1,05
0,70	0,59	0,57	0,56	0,55	0,56	0,60	0,63	0,68	0,72	0,75	0,80	0,84	0,88	0,92	0,96
0,60	0,51	0,48	0,47	0,46	0,47	0,50	0,54	0,58	0,62	0,66	0,70	0,74	0,78	0,82	0,85
0,50	0,42	0,39	0,38	0,37	0,38	0,41	0,45	0,48	0,52	0,56	0,59	0,64	0,67	0,71	0,76
0,40	0,33	0,30	0,29	0,28	0,29	0,31	0,35	0,38	0,42	0,45	0,50	0,53	0,57	0,61	0,65
0,30	0,24	0,21	0,20	0,19	0,19	0,22	0,25	0,28	0,31	0,34	0,38	0,42	0,46	0,50	0,54
0,20	0,15	0,12	0,11	0,10	0,10	0,12	0,14	0,16	0,20	0,23	0,27	0,31	0,35	0,40	0,44
0,10	0,06	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32

ESCOLA DE ENGENHARIA  
 DE CIVIL  
 UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 15$   $a = 0.10$   $\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,91	0,88	0,86	0,85	0,86	0,90	0,95	1,00	1,03	1,08	1,13	1,17	1,20	1,25	1,29
0,90	0,81	0,78	0,77	0,77	0,77	0,81	0,85	0,89	0,94	0,98	1,03	1,06	1,10	1,15	1,20
0,80	0,72	0,69	0,67	0,67	0,67	0,71	0,76	0,79	0,84	0,88	0,93	0,96	1,01	1,04	1,09
0,70	0,62	0,60	0,58	0,57	0,58	0,62	0,65	0,70	0,74	0,79	0,82	0,86	0,90	0,94	0,98
0,60	0,53	0,50	0,48	0,48	0,48	0,52	0,55	0,59	0,64	0,67	0,71	0,75	0,80	0,83	0,88
0,50	0,44	0,41	0,39	0,38	0,39	0,42	0,46	0,50	0,53	0,57	0,61	0,64	0,69	0,72	0,76
0,40	0,34	0,31	0,30	0,29	0,29	0,32	0,36	0,39	0,42	0,46	0,50	0,53	0,57	0,62	0,65
0,30	0,25	0,22	0,20	0,19	0,20	0,22	0,24	0,27	0,31	0,34	0,38	0,41	0,46	0,50	0,54
0,20	0,15	0,12	0,10	0,10	0,09	0,11	0,13	0,15	0,18	0,22	0,26	0,30	0,34	0,38	0,42
0,10	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,05	0,09	0,13	0,18	0,22	0,26	0,30

\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 15$   $a = 0.15$   $\phi = 0$  \*  
 \*\*\*\*\*

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,96	0,93	0,91	0,91	0,91	0,94	0,99	1,04	1,09	1,12	1,17	1,21	1,26	1,31	1,33
0,90	0,87	0,83	0,81	0,80	0,80	0,84	0,89	0,94	0,97	1,02	1,06	1,11	1,16	1,18	1,24
0,80	0,76	0,73	0,71	0,70	0,70	0,74	0,79	0,83	0,87	0,91	0,96	1,01	1,04	1,08	1,13
0,70	0,66	0,63	0,61	0,60	0,60	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,85	0,89	0,93	0,97	1,01
0,60	0,56	0,53	0,51	0,50	0,50	0,54	0,58	0,62	0,65	0,70	0,73	0,78	0,81	0,86	0,89
0,50	0,46	0,43	0,41	0,40	0,40	0,43	0,47	0,51	0,54	0,58	0,62	0,66	0,70	0,74	0,79
0,40	0,36	0,33	0,31	0,30	0,30	0,33	0,36	0,39	0,42	0,47	0,50	0,54	0,57	0,62	0,65
0,30	0,26	0,23	0,21	0,20	0,19	0,22	0,24	0,27	0,30	0,34	0,37	0,41	0,45	0,49	0,53
0,20	0,16	0,13	0,10	0,09	0,08	0,09	0,11	0,14	0,17	0,20	0,24	0,28	0,33	0,37	0,41
0,10	0,06	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,07	0,11	0,15	0,20	0,24	0,29

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 A

$\beta = 20$

$a = 0,05$

$\phi = 0$

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,87	0,85	0,85	0,85	0,87	0,92	0,96	1,01	1,06	1,11	1,15	1,20	1,25	1,29	1,34
0,90	0,78	0,76	0,76	0,76	0,78	0,83	0,87	0,92	0,97	1,02	1,06	1,11	1,14	1,20	1,25
0,80	0,69	0,67	0,67	0,67	0,69	0,73	0,78	0,82	0,87	0,91	0,96	1,00	1,05	1,10	1,14
0,70	0,60	0,59	0,58	0,58	0,60	0,64	0,69	0,73	0,77	0,82	0,86	0,91	0,96	0,99	1,04
0,60	0,51	0,50	0,49	0,49	0,50	0,55	0,59	0,64	0,68	0,71	0,76	0,81	0,85	0,89	0,94
0,50	0,43	0,40	0,40	0,40	0,41	0,46	0,50	0,53	0,57	0,62	0,66	0,70	0,75	0,79	0,83
0,40	0,34	0,31	0,31	0,31	0,33	0,36	0,40	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59	0,63	0,67	0,72
0,30	0,25	0,23	0,22	0,22	0,23	0,26	0,29	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48	0,52	0,56	0,60
0,20	0,15	0,13	0,13	0,13	0,13	0,15	0,18	0,21	0,24	0,28	0,31	0,36	0,40	0,44	0,48
0,10	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,02	0,04	0,07	0,11	0,15	0,19	0,23	0,28	0,32	0,35

```

*****
* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL                                ARMADURA SIMÉTRICA *
*                                                         *
* SEÇÃO RETANGULAR                                       *
*                                                         *
* VALORES DE  $\omega$       AÇO CA 50 A       $\beta = 20$        $a = 0.10$        $\phi = 0$ 
*                                                         *
*  $\mu \backslash v$ 
* 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00 1,10 1,20 1,30 1,40 1,50
*-----
* 1,00 0,92 0,90 0,89 0,89 0,90 0,96 1,01 1,05 1,11 1,16 1,20 1,26 1,29 1,35 1,40
* 0,90 0,82 0,80 0,80 0,80 0,81 0,86 0,91 0,96 1,01 1,05 1,11 1,14 1,20 1,25 1,28
* 0,80 0,73 0,71 0,70 0,70 0,71 0,76 0,82 0,86 0,90 0,95 0,99 1,05 1,10 1,13 1,19
* 0,70 0,63 0,61 0,61 0,61 0,62 0,67 0,71 0,76 0,80 0,84 0,89 0,95 0,98 1,03 1,09
* 0,60 0,54 0,52 0,51 0,52 0,53 0,57 0,61 0,65 0,71 0,74 0,80 0,83 0,88 0,92 0,97
* 0,50 0,45 0,43 0,42 0,42 0,43 0,47 0,51 0,56 0,59 0,63 0,68 0,72 0,77 0,81 0,85
* 0,40 0,35 0,33 0,32 0,32 0,33 0,37 0,41 0,44 0,48 0,53 0,56 0,61 0,65 0,69 0,72
* 0,30 0,26 0,23 0,22 0,23 0,23 0,26 0,30 0,33 0,36 0,40 0,44 0,48 0,52 0,56 0,60
* 0,20 0,16 0,14 0,13 0,12 0,13 0,15 0,17 0,20 0,23 0,27 0,30 0,35 0,39 0,43 0,48
* 0,10 0,06 0,04 0,02 0,00 0,00 0,00 0,01 0,04 0,08 0,13 0,17 0,21 0,26 0,30 0,35
*****

```

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 A

$\beta = 20$

$a = 0.15$

$\phi = 0$

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,97	0,95	0,94	0,95	0,95	1,00	1,05	1,11	1,16	1,21	1,26	1,30	1,36	1,41	1,45
0,90	0,87	0,85	0,84	0,84	0,85	0,90	0,96	1,00	1,05	1,10	1,16	1,20	1,26	1,29	1,35
0,80	0,77	0,75	0,74	0,74	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,04	1,10	1,13	1,14	1,24
0,70	0,67	0,65	0,64	0,64	0,65	0,70	0,74	0,79	0,84	0,88	0,94	0,97	1,03	1,08	1,11
0,60	0,57	0,55	0,54	0,54	0,55	0,60	0,63	0,69	0,73	0,78	0,82	0,86	0,91	0,95	1,00
0,50	0,47	0,45	0,44	0,44	0,45	0,50	0,53	0,57	0,62	0,65	0,70	0,74	0,78	0,83	0,87
0,40	0,37	0,34	0,33	0,33	0,34	0,38	0,42	0,45	0,50	0,53	0,57	0,61	0,65	0,70	0,74
0,30	0,27	0,25	0,23	0,23	0,24	0,27	0,30	0,33	0,37	0,40	0,44	0,48	0,52	0,56	0,61
0,20	0,17	0,14	0,13	0,12	0,12	0,14	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,34	0,38	0,42	0,47
0,10	0,06	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,28	0,33





\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 25$   $a = 0.10$   $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash \nu$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.93	0.92	0.92	0.94	0.95	1.02	1.08	1.13	1.20	1.24	1.31	1.37	1.44	1.48	1.53
0.90	0.83	0.83	0.83	0.84	0.87	0.92	0.99	1.04	1.10	1.15	1.21	1.27	1.32	1.37	1.43
0.80	0.74	0.73	0.73	0.75	0.77	0.83	0.88	0.94	0.99	1.04	1.11	1.16	1.21	1.27	1.31
0.70	0.65	0.64	0.64	0.66	0.68	0.73	0.78	0.84	0.89	0.95	1.00	1.05	1.09	1.15	1.20
0.60	0.55	0.54	0.54	0.56	0.58	0.64	0.68	0.73	0.79	0.84	0.89	0.93	0.98	1.04	1.08
0.50	0.46	0.45	0.45	0.46	0.48	0.53	0.58	0.63	0.68	0.73	0.78	0.82	0.87	0.92	0.97
0.40	0.36	0.35	0.35	0.36	0.38	0.43	0.47	0.52	0.56	0.61	0.65	0.69	0.75	0.79	0.83
0.30	0.27	0.25	0.25	0.26	0.28	0.32	0.36	0.40	0.44	0.48	0.53	0.57	0.62	0.66	0.71
0.20	0.17	0.16	0.15	0.16	0.18	0.20	0.23	0.27	0.30	0.34	0.38	0.43	0.47	0.51	0.57
0.10	0.07	0.06	0.05	0.04	0.04	0.04	0.06	0.09	0.13	0.18	0.22	0.27	0.32	0.36	0.41

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 25$   $a = 0.15$   $\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.98	0.97	0.97	0.99	1.02	1.07	1.15	1.20	1.27	1.31	1.38	1.45	1.49	1.55	1.61
0.90	0.88	0.88	0.87	0.89	0.91	0.97	1.03	1.10	1.15	1.21	1.28	1.33	1.38	1.44	1.49
0.80	0.78	0.78	0.77	0.79	0.82	0.87	0.93	1.00	1.04	1.10	1.16	1.21	1.28	1.32	1.37
0.70	0.68	0.68	0.67	0.68	0.71	0.77	0.83	0.88	0.94	0.99	1.04	1.09	1.16	1.20	1.27
0.60	0.58	0.58	0.57	0.58	0.61	0.66	0.71	0.77	0.82	0.87	0.93	0.97	1.04	1.08	1.13
0.50	0.48	0.47	0.47	0.48	0.50	0.55	0.60	0.66	0.71	0.76	0.81	0.85	0.90	0.96	1.00
0.40	0.38	0.37	0.37	0.38	0.40	0.45	0.49	0.54	0.58	0.63	0.67	0.72	0.78	0.82	0.87
0.30	0.28	0.27	0.26	0.27	0.29	0.33	0.37	0.41	0.45	0.50	0.54	0.58	0.63	0.68	0.72
0.20	0.17	0.16	0.16	0.16	0.18	0.20	0.23	0.26	0.30	0.34	0.38	0.42	0.47	0.52	0.56
0.10	0.07	0.05	0.05	0.02	0.00	0.00	0.03	0.06	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 A

$\beta = 30$

$a = 0.05$

$\phi = 0$

$\frac{V}{H}$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.90	0.90	0.92	0.94	0.97	1.05	1.11	1.18	1.24	1.30	1.37	1.43	1.48	1.55	1.60
0.90	0.81	0.81	0.83	0.85	0.89	0.94	1.02	1.08	1.15	1.21	1.27	1.32	1.39	1.44	1.51
0.80	0.72	0.72	0.74	0.76	0.80	0.86	0.92	0.99	1.05	1.10	1.16	1.23	1.28	1.35	1.40
0.70	0.63	0.63	0.65	0.67	0.71	0.77	0.83	0.88	0.94	1.01	1.07	1.12	1.19	1.24	1.30
0.60	0.54	0.54	0.56	0.58	0.61	0.67	0.73	0.79	0.85	0.90	0.96	1.01	1.07	1.12	1.19
0.50	0.45	0.45	0.46	0.49	0.52	0.58	0.63	0.69	0.74	0.80	0.85	0.91	0.96	1.01	1.07
0.40	0.36	0.36	0.37	0.40	0.43	0.48	0.53	0.59	0.63	0.68	0.74	0.79	0.84	0.90	0.95
0.30	0.26	0.26	0.28	0.30	0.33	0.38	0.43	0.47	0.52	0.57	0.62	0.66	0.72	0.77	0.82
0.20	0.17	0.17	0.19	0.20	0.23	0.27	0.31	0.35	0.40	0.44	0.49	0.53	0.58	0.63	0.68
0.10	0.08	0.08	0.09	0.11	0.12	0.14	0.17	0.20	0.24	0.28	0.32	0.37	0.42	0.47	0.52

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

$\alpha_0$  CA 50 A

$\beta = 30$

$a = 0.10$

$\psi = 0$

$\mu$ \ $\nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,94	0,95	0,96	1,00	1,03	1,10	1,18	1,23	1,30	1,38	1,44	1,50	1,58	1,63	1,70
0,90	0,85	0,85	0,87	0,90	0,94	1,00	1,08	1,14	1,21	1,27	1,33	1,40	1,46	1,53	1,58
0,80	0,75	0,76	0,78	0,81	0,84	0,91	0,97	1,03	1,10	1,17	1,23	1,29	1,36	1,41	1,49
0,70	0,66	0,67	0,68	0,71	0,75	0,81	0,87	0,94	1,00	1,06	1,12	1,19	1,24	1,29	1,37
0,60	0,56	0,57	0,58	0,61	0,64	0,70	0,77	0,83	0,89	0,95	1,00	1,07	1,13	1,20	1,24
0,50	0,47	0,47	0,49	0,51	0,55	0,61	0,66	0,72	0,78	0,83	0,89	0,96	1,01	1,06	1,11
0,40	0,37	0,37	0,39	0,41	0,45	0,50	0,55	0,61	0,65	0,71	0,77	0,82	0,88	0,94	0,99
0,30	0,28	0,28	0,29	0,31	0,34	0,39	0,44	0,49	0,54	0,59	0,65	0,69	0,75	0,80	0,85
0,20	0,18	0,18	0,19	0,21	0,24	0,28	0,31	0,36	0,40	0,45	0,50	0,55	0,59	0,64	0,70
0,10	0,08	0,08	0,09	0,10	0,11	0,13	0,15	0,18	0,22	0,27	0,32	0,36	0,42	0,47	0,52

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA  
 SEÇÃO RETANGULAR  
 VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 30$   $a = 0.15$   $\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.99	1.01	1.01	1.05	1.09	1.16	1.25	1.31	1.39	1.45	1.52	1.50	1.66	1.74	1.79
0.90	0.89	0.90	0.92	0.94	0.99	1.06	1.13	1.20	1.27	1.35	1.42	1.48	1.56	1.61	1.69
0.80	0.79	0.80	0.82	0.84	0.88	0.96	1.03	1.10	1.17	1.23	1.30	1.37	1.43	1.49	1.56
0.70	0.69	0.70	0.72	0.74	0.78	0.85	0.92	0.99	1.05	1.11	1.19	1.25	1.31	1.38	1.43
0.60	0.60	0.60	0.62	0.64	0.68	0.75	0.82	0.87	0.93	1.00	1.07	1.13	1.18	1.26	1.30
0.50	0.49	0.50	0.51	0.54	0.58	0.64	0.70	0.76	0.82	0.89	0.95	1.00	1.06	1.12	1.18
0.40	0.39	0.39	0.41	0.43	0.47	0.53	0.59	0.64	0.70	0.76	0.81	0.87	0.93	0.98	1.04
0.30	0.29	0.29	0.30	0.33	0.36	0.41	0.46	0.52	0.57	0.62	0.67	0.72	0.78	0.84	0.89
0.20	0.18	0.18	0.19	0.21	0.24	0.29	0.33	0.37	0.41	0.46	0.52	0.56	0.62	0.67	0.72
0.10	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10	0.12	0.16	0.20	0.25	0.30	0.36	0.41	0.46	0.52

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

$\mu = 0$  CA 50 A

$\rho = 35$

$a = 0.05$

$\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,91	0,93	0,96	1,00	1,05	1,14	1,21	1,29	1,35	1,43	1,51	1,57	1,66	1,72	1,80
0,90	0,82	0,84	0,87	0,91	0,96	1,03	1,11	1,18	1,27	1,34	1,40	1,48	1,54	1,62	1,68
0,80	0,73	0,75	0,78	0,82	0,85	0,94	1,02	1,09	1,15	1,22	1,31	1,37	1,45	1,50	1,57
0,70	0,64	0,66	0,69	0,73	0,78	0,85	0,93	1,00	1,07	1,13	1,19	1,28	1,33	1,41	1,47
0,60	0,55	0,56	0,60	0,64	0,69	0,75	0,82	0,89	0,95	1,02	1,10	1,15	1,22	1,28	1,35
0,50	0,46	0,47	0,50	0,54	0,59	0,66	0,72	0,79	0,85	0,92	0,98	1,05	1,11	1,18	1,24
0,40	0,37	0,38	0,41	0,45	0,50	0,55	0,62	0,68	0,74	0,81	0,86	0,93	0,99	1,05	1,11
0,30	0,28	0,29	0,32	0,36	0,40	0,46	0,52	0,57	0,63	0,69	0,75	0,81	0,87	0,93	0,99
0,20	0,18	0,20	0,22	0,26	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,56	0,62	0,66	0,72	0,78	0,83
0,10	0,09	0,10	0,12	0,16	0,19	0,22	0,27	0,31	0,35	0,41	0,45	0,51	0,55	0,62	0,67

\*\*\*\*\*

\* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*

\* SEÇÃO RETANGULAR \*

\* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 35$   $a = 0.10$   $\phi = 0$  \*

\*\*\*\*\*

$\mu$ \ $\nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,96	0,98	1,02	1,06	1,11	1,20	1,28	1,36	1,43	1,52	1,59	1,68	1,75	1,81	1,90
0,90	0,86	0,89	0,92	0,97	1,02	1,10	1,18	1,26	1,34	1,41	1,50	1,56	1,63	1,71	1,80
0,80	0,77	0,79	0,82	0,87	0,92	0,99	1,07	1,15	1,24	1,31	1,38	1,44	1,53	1,61	1,67
0,70	0,67	0,69	0,72	0,77	0,82	0,90	0,98	1,05	1,13	1,19	1,28	1,34	1,40	1,49	1,55
0,60	0,58	0,60	0,63	0,67	0,72	0,79	0,87	0,94	1,01	1,10	1,16	1,23	1,30	1,37	1,44
0,50	0,48	0,50	0,53	0,57	0,62	0,70	0,77	0,83	0,91	0,97	1,05	1,10	1,17	1,24	1,31
0,40	0,38	0,40	0,43	0,48	0,52	0,59	0,66	0,72	0,79	0,85	0,92	0,98	1,05	1,11	1,17
0,30	0,29	0,31	0,34	0,37	0,42	0,48	0,54	0,60	0,67	0,73	0,79	0,85	0,92	0,98	1,04
0,20	0,19	0,20	0,23	0,27	0,31	0,36	0,42	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71	0,76	0,82	0,88
0,10	0,09	0,10	0,12	0,16	0,19	0,22	0,27	0,31	0,36	0,42	0,47	0,53	0,59	0,64	0,70

\*\*\*\*\*



FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 35$   $a = 0.15$   $\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,01	1,04	1,07	1,11	1,17	1,24	1,35	1,45	1,53	1,61	1,71	1,78	1,85	1,94	2,04
0,90	0,91	0,94	0,97	1,01	1,07	1,14	1,25	1,33	1,41	1,51	1,58	1,65	1,75	1,84	1,90
0,80	0,81	0,84	0,87	0,91	0,97	1,06	1,15	1,23	1,31	1,39	1,48	1,55	1,64	1,71	1,80
0,70	0,71	0,73	0,77	0,82	0,87	0,95	1,03	1,11	1,19	1,28	1,35	1,42	1,51	1,57	1,65
0,60	0,61	0,63	0,67	0,71	0,76	0,85	0,93	1,01	1,09	1,16	1,23	1,31	1,39	1,46	1,53
0,50	0,50	0,53	0,56	0,61	0,66	0,73	0,81	0,89	0,96	1,04	1,10	1,18	1,25	1,33	1,40
0,40	0,41	0,43	0,45	0,50	0,55	0,62	0,69	0,77	0,83	0,91	0,98	1,05	1,12	1,19	1,26
0,30	0,30	0,32	0,35	0,39	0,44	0,51	0,57	0,64	0,71	0,77	0,84	0,91	0,97	1,05	1,12
0,20	0,20	0,21	0,24	0,28	0,32	0,38	0,44	0,50	0,57	0,63	0,68	0,75	0,82	0,88	0,94
0,10	0,09	0,10	0,13	0,15	0,18	0,22	0,25	0,30	0,36	0,42	0,48	0,55	0,61	0,67	0,74

\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL \* ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  \* AÇO CA 50 A \*  $\beta = 40$  \*  $a = 0.05$  \*  $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash \nu$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.92	0.96	1.01	1.07	1.14	1.22	1.31	1.41	1.49	1.57	1.67	1.74	1.84	1.90	2.00
0.90	0.83	0.87	0.92	0.97	1.04	1.13	1.22	1.30	1.40	1.48	1.55	1.65	1.72	1.81	1.91
0.80	0.74	0.78	0.83	0.88	0.95	1.04	1.13	1.21	1.29	1.39	1.46	1.56	1.63	1.71	1.79
0.70	0.65	0.68	0.74	0.79	0.86	0.95	1.02	1.12	1.20	1.28	1.36	1.44	1.52	1.60	1.67
0.60	0.56	0.60	0.64	0.70	0.77	0.84	0.93	1.01	1.09	1.17	1.26	1.32	1.40	1.49	1.56
0.50	0.47	0.51	0.55	0.61	0.67	0.75	0.82	0.91	0.99	1.06	1.13	1.21	1.29	1.36	1.45
0.40	0.38	0.41	0.46	0.52	0.57	0.65	0.72	0.80	0.87	0.95	1.03	1.10	1.18	1.25	1.32
0.30	0.29	0.32	0.36	0.42	0.47	0.55	0.61	0.69	0.75	0.83	0.90	0.98	1.05	1.12	1.18
0.20	0.20	0.23	0.27	0.32	0.37	0.44	0.51	0.57	0.64	0.71	0.78	0.85	0.92	0.99	1.05
0.10	0.10	0.13	0.16	0.22	0.27	0.32	0.38	0.44	0.50	0.56	0.63	0.69	0.75	0.82	0.89

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 A

$B = 40$

$a = 0.10$

$\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,98	1,01	1,08	1,14	1,20	1,30	1,40	1,49	1,58	1,69	1,77	1,88	1,95	2,05	2,12
0,90	0,89	0,92	0,97	1,04	1,11	1,19	1,31	1,40	1,48	1,57	1,67	1,75	1,85	1,92	2,03
0,80	0,79	0,82	0,87	0,93	1,00	1,10	1,19	1,28	1,39	1,47	1,55	1,65	1,73	1,83	1,91
0,70	0,69	0,73	0,78	0,84	0,91	1,00	1,10	1,19	1,27	1,35	1,44	1,53	1,61	1,70	1,79
0,60	0,59	0,63	0,68	0,74	0,81	0,89	0,98	1,07	1,17	1,24	1,33	1,42	1,50	1,58	1,66
0,50	0,50	0,53	0,58	0,64	0,71	0,79	0,88	0,97	1,06	1,13	1,22	1,30	1,38	1,46	1,54
0,40	0,40	0,44	0,48	0,55	0,61	0,69	0,78	0,86	0,93	1,02	1,09	1,17	1,25	1,34	1,42
0,30	0,30	0,34	0,38	0,44	0,50	0,58	0,66	0,74	0,81	0,89	0,97	1,04	1,11	1,20	1,28
0,20	0,21	0,23	0,28	0,33	0,39	0,46	0,54	0,61	0,68	0,75	0,83	0,90	0,98	1,05	1,12
0,10	0,10	0,13	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,46	0,52	0,59	0,66	0,73	0,80	0,88	0,94

\*\*\*\*\*

\* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*

\* SEÇÃO RETANGULAR \*

\* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 A  $\beta = 40$   $a = 0.15$   $\phi = 0$  \*

\*\*\*\*\*

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,03	1,08	1,13	1,20	1,28	1,38	1,49	1,61	1,70	1,79	1,91	1,99	2,10	2,18	2,29
0,90	0,93	0,98	1,03	1,10	1,18	1,28	1,39	1,48	1,58	1,69	1,78	1,89	1,97	2,08	2,19
0,80	0,83	0,88	0,93	1,00	1,08	1,18	1,29	1,38	1,47	1,56	1,67	1,75	1,85	1,96	2,05
0,70	0,73	0,77	0,83	0,89	0,96	1,07	1,16	1,26	1,37	1,46	1,55	1,64	1,73	1,84	1,93
0,60	0,63	0,67	0,72	0,79	0,85	0,96	1,06	1,16	1,25	1,34	1,43	1,52	1,61	1,70	1,80
0,50	0,52	0,57	0,62	0,68	0,76	0,85	0,95	1,04	1,12	1,22	1,31	1,40	1,49	1,57	1,66
0,40	0,42	0,46	0,51	0,58	0,64	0,73	0,82	0,91	1,01	1,09	1,17	1,26	1,35	1,43	1,53
0,30	0,32	0,36	0,40	0,46	0,54	0,62	0,70	0,78	0,88	0,96	1,04	1,12	1,20	1,30	1,38
0,20	0,21	0,25	0,29	0,35	0,42	0,49	0,58	0,65	0,73	0,81	0,90	0,98	1,05	1,14	1,21
0,10	0,10	0,13	0,18	0,24	0,29	0,34	0,40	0,47	0,54	0,62	0,70	0,77	0,86	0,94	1,02

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 B

$\beta = 15$

$a = 0,05$

$\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,88	0,85	0,85	0,87	0,90	0,93	0,97	1,01	1,06	1,10	1,14	1,18	1,23	1,28	1,33
0,90	0,79	0,77	0,75	0,77	0,80	0,83	0,87	0,91	0,96	0,99	1,04	1,09	1,13	1,18	1,23
0,80	0,70	0,68	0,66	0,68	0,71	0,73	0,77	0,81	0,86	0,89	0,94	0,99	1,03	1,08	1,11
0,70	0,60	0,58	0,57	0,59	0,61	0,63	0,67	0,71	0,75	0,79	0,84	0,88	0,92	0,97	1,01
0,60	0,51	0,49	0,48	0,49	0,51	0,54	0,57	0,61	0,65	0,69	0,74	0,77	0,82	0,85	0,90
0,50	0,42	0,40	0,39	0,39	0,41	0,43	0,47	0,51	0,54	0,59	0,63	0,67	0,71	0,75	0,80
0,40	0,33	0,31	0,30	0,30	0,31	0,33	0,37	0,40	0,44	0,48	0,51	0,56	0,59	0,64	0,68
0,30	0,24	0,22	0,20	0,20	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,40	0,44	0,49	0,53	0,57
0,20	0,15	0,13	0,11	0,10	0,11	0,12	0,14	0,17	0,21	0,24	0,29	0,33	0,37	0,41	0,46
0,10	0,06	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,04	0,08	0,12	0,17	0,21	0,26	0,30	0,35

\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL \* ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  \* AÇO CA 50 B \*  $\beta = 15$  \*  $a = 0.10$  \*  $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,93	0,90	0,90	0,93	0,96	0,99	1,02	1,07	1,11	1,16	1,21	1,24	1,29	1,34	1,39
0,90	0,83	0,81	0,80	0,82	0,85	0,89	0,92	0,96	1,01	1,06	1,09	1,14	1,19	1,24	1,29
0,80	0,73	0,71	0,70	0,72	0,75	0,77	0,81	0,85	0,90	0,94	0,98	1,03	1,07	1,12	1,16
0,70	0,63	0,61	0,60	0,62	0,65	0,67	0,70	0,75	0,78	0,83	0,87	0,92	0,97	1,00	1,05
0,60	0,54	0,51	0,51	0,52	0,54	0,56	0,60	0,64	0,68	0,72	0,76	0,80	0,85	0,89	0,93
0,50	0,44	0,42	0,41	0,41	0,43	0,46	0,49	0,53	0,56	0,61	0,64	0,69	0,73	0,77	0,82
0,40	0,35	0,32	0,31	0,31	0,32	0,34	0,38	0,41	0,45	0,49	0,52	0,57	0,60	0,65	0,69
0,30	0,25	0,23	0,21	0,21	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,40	0,44	0,48	0,53	0,57
0,20	0,15	0,13	0,11	0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,19	0,23	0,27	0,32	0,36	0,40	0,45
0,10	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 B  $\beta = 15$   $a = 0.15$   $\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,98	0,96	0,97	0,99	1,02	1,06	1,10	1,13	1,18	1,23	1,28	1,33	1,36	1,41	1,46
0,90	0,87	0,86	0,86	0,88	0,91	0,95	0,97	1,02	1,07	1,12	1,17	1,20	1,25	1,30	1,34
0,80	0,77	0,75	0,76	0,77	0,80	0,83	0,86	0,90	0,95	1,00	1,03	1,09	1,13	1,18	1,23
0,70	0,67	0,65	0,64	0,66	0,68	0,71	0,74	0,79	0,84	0,87	0,92	0,96	1,01	1,06	1,09
0,60	0,56	0,54	0,53	0,55	0,57	0,59	0,63	0,67	0,71	0,76	0,79	0,84	0,88	0,93	0,98
0,50	0,46	0,44	0,43	0,44	0,46	0,48	0,51	0,55	0,59	0,63	0,67	0,71	0,76	0,79	0,84
0,40	0,36	0,34	0,32	0,32	0,34	0,35	0,39	0,42	0,46	0,50	0,53	0,58	0,63	0,66	0,71
0,30	0,26	0,23	0,22	0,21	0,22	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,40	0,44	0,48	0,53	0,57
0,20	0,16	0,13	0,11	0,10	0,09	0,10	0,12	0,15	0,18	0,22	0,26	0,31	0,35	0,39	0,44
0,10	0,06	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,07	0,12	0,17	0,22	0,27	0,31

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 B  $\beta = 20$   $a = 0,05$   $\phi = 0$

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,88	0,87	0,88	0,91	0,95	0,97	1,02	1,06	1,12	1,17	1,22	1,27	1,33	1,36	1,42
0,90	0,79	0,78	0,78	0,81	0,85	0,88	0,93	0,97	1,02	1,06	1,12	1,17	1,21	1,27	1,32
0,80	0,70	0,70	0,69	0,72	0,75	0,78	0,83	0,87	0,91	0,97	1,02	1,06	1,11	1,17	1,20
0,70	0,62	0,60	0,60	0,62	0,65	0,69	0,72	0,77	0,81	0,87	0,91	0,96	0,99	1,05	1,10
0,60	0,52	0,51	0,50	0,52	0,55	0,59	0,62	0,66	0,71	0,75	0,81	0,85	0,89	0,94	0,98
0,50	0,43	0,42	0,41	0,43	0,45	0,48	0,51	0,56	0,61	0,65	0,69	0,74	0,78	0,82	0,87
0,40	0,34	0,33	0,32	0,33	0,35	0,38	0,41	0,45	0,49	0,53	0,58	0,62	0,66	0,71	0,75
0,30	0,25	0,23	0,23	0,23	0,25	0,27	0,30	0,34	0,38	0,42	0,46	0,50	0,54	0,59	0,63
0,20	0,16	0,14	0,13	0,13	0,14	0,16	0,18	0,22	0,25	0,29	0,33	0,37	0,42	0,46	0,51
0,10	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,02	0,04	0,07	0,11	0,15	0,20	0,24	0,29	0,34	0,38



\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL \* ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 B  $\beta = 20$   $a = 0.10$   $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,93	0,92	0,93	0,97	1,01	1,04	1,08	1,14	1,18	1,24	1,28	1,34	1,40	1,43	1,49
0,90	0,83	0,84	0,83	0,86	0,90	0,93	0,98	1,02	1,08	1,13	1,18	1,23	1,27	1,33	1,38
0,80	0,73	0,73	0,74	0,76	0,80	0,83	0,87	0,92	0,97	1,01	1,07	1,11	1,16	1,22	1,27
0,70	0,65	0,64	0,63	0,66	0,69	0,72	0,76	0,81	0,85	0,91	0,95	1,00	1,06	1,09	1,14
0,60	0,55	0,54	0,54	0,55	0,58	0,62	0,65	0,69	0,75	0,79	0,84	0,89	0,93	0,98	1,02
0,50	0,45	0,44	0,43	0,45	0,47	0,50	0,55	0,58	0,63	0,67	0,72	0,76	0,80	0,86	0,90
0,40	0,35	0,34	0,34	0,35	0,37	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59	0,64	0,68	0,73	0,77
0,30	0,26	0,24	0,24	0,24	0,26	0,28	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46	0,50	0,55	0,59	0,64
0,20	0,16	0,15	0,14	0,13	0,14	0,15	0,18	0,21	0,24	0,28	0,32	0,37	0,41	0,46	0,51
0,10	0,07	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00	0,01	0,05	0,09	0,13	0,18	0,22	0,27	0,32	0,37

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 B  $\beta = 20$   $a = 0.15$   $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,98	0,97	1,01	1,04	1,08	1,12	1,15	1,21	1,27	1,31	1,37	1,41	1,47	1,53	1,59
0,90	0,88	0,88	0,89	0,92	0,96	1,01	1,04	1,10	1,14	1,20	1,24	1,30	1,36	1,39	1,45
0,80	0,78	0,77	0,79	0,81	0,85	0,88	0,93	0,97	1,03	1,09	1,13	1,18	1,22	1,28	1,34
0,70	0,68	0,67	0,67	0,70	0,73	0,76	0,81	0,86	0,91	0,95	1,01	1,05	1,11	1,16	1,20
0,60	0,58	0,56	0,57	0,58	0,62	0,65	0,69	0,74	0,78	0,84	0,88	0,93	0,97	1,03	1,07
0,50	0,47	0,46	0,46	0,47	0,50	0,53	0,57	0,62	0,66	0,71	0,75	0,80	0,84	0,89	0,94
0,40	0,37	0,36	0,35	0,36	0,38	0,41	0,45	0,48	0,53	0,57	0,62	0,66	0,70	0,74	0,80
0,30	0,27	0,25	0,24	0,25	0,26	0,28	0,32	0,35	0,39	0,43	0,47	0,51	0,56	0,61	0,65
0,20	0,17	0,15	0,14	0,13	0,13	0,15	0,17	0,19	0,23	0,27	0,31	0,36	0,40	0,45	0,50
0,10	0,06	0,04	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,11	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$       AÇO CA 50 B       $\beta = 25$        $a = 0.05$        $\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,90	0,90	0,91	0,95	1,00	1,04	1,10	1,14	1,20	1,27	1,31	1,38	1,44	1,48	1,55
0,90	0,81	0,81	0,82	0,86	0,90	0,94	1,00	1,04	1,11	1,15	1,21	1,27	1,32	1,39	1,43
0,80	0,71	0,71	0,73	0,76	0,79	0,85	0,89	0,95	1,01	1,06	1,11	1,16	1,21	1,27	1,32
0,70	0,62	0,63	0,63	0,66	0,70	0,75	0,79	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,11	1,16	1,22
0,60	0,54	0,53	0,54	0,57	0,60	0,64	0,69	0,74	0,79	0,84	0,89	0,94	1,00	1,04	1,10
0,50	0,44	0,44	0,45	0,47	0,50	0,54	0,58	0,63	0,68	0,73	0,78	0,82	0,88	0,93	0,97
0,40	0,35	0,35	0,35	0,37	0,40	0,44	0,47	0,52	0,57	0,62	0,66	0,71	0,75	0,81	0,85
0,30	0,26	0,26	0,26	0,27	0,29	0,32	0,36	0,40	0,45	0,49	0,53	0,58	0,62	0,67	0,72
0,20	0,17	0,16	0,16	0,17	0,19	0,21	0,24	0,28	0,31	0,36	0,40	0,45	0,49	0,54	0,58
0,10	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	0,07	0,09	0,12	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,39	0,44

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 B

$\beta = 25$

$a = 0.10$

$\phi = 0$

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,95	0,95	0,97	1,02	1,06	1,11	1,16	1,23	1,27	1,34	1,41	1,45	1,52	1,58	1,63
0,90	0,85	0,85	0,87	0,91	0,96	1,00	1,06	1,10	1,17	1,24	1,28	1,34	1,41	1,46	1,52
0,80	0,75	0,76	0,77	0,81	0,84	0,90	0,95	1,00	1,06	1,11	1,17	1,23	1,28	1,33	1,40
0,70	0,65	0,66	0,66	0,70	0,74	0,79	0,83	0,89	0,94	1,00	1,06	1,11	1,16	1,23	1,27
0,60	0,56	0,56	0,57	0,60	0,63	0,68	0,73	0,77	0,83	0,88	0,94	0,99	1,04	1,10	1,15
0,50	0,46	0,46	0,48	0,50	0,53	0,57	0,61	0,66	0,71	0,76	0,82	0,87	0,92	0,96	1,02
0,40	0,37	0,37	0,37	0,39	0,41	0,45	0,50	0,54	0,59	0,64	0,69	0,73	0,79	0,83	0,88
0,30	0,27	0,27	0,27	0,28	0,30	0,34	0,37	0,41	0,45	0,51	0,55	0,59	0,64	0,69	0,74
0,20	0,17	0,17	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,28	0,31	0,35	0,40	0,45	0,49	0,54	0,59
0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,04	0,06	0,10	0,14	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$  aço CA 50 B  $\beta = 25$   $a = 0.15$   $\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,00	1,01	1,04	1,09	1,14	1,20	1,24	1,31	1,36	1,43	1,50	1,57	1,62	1,67	1,74
0,90	0,89	0,90	0,94	0,98	1,02	1,07	1,13	1,19	1,24	1,31	1,38	1,43	1,48	1,55	1,60
0,80	0,79	0,80	0,82	0,87	0,91	0,95	1,01	1,06	1,13	1,19	1,25	1,30	1,37	1,42	1,47
0,70	0,68	0,69	0,72	0,75	0,80	0,84	0,90	0,95	1,01	1,06	1,12	1,17	1,24	1,29	1,35
0,60	0,59	0,59	0,60	0,63	0,67	0,72	0,77	0,83	0,88	0,94	0,99	1,05	1,10	1,15	1,22
0,50	0,48	0,48	0,50	0,52	0,56	0,60	0,64	0,70	0,75	0,81	0,86	0,91	0,97	1,02	1,06
0,40	0,38	0,38	0,39	0,41	0,44	0,47	0,52	0,57	0,61	0,66	0,72	0,77	0,81	0,87	0,92
0,30	0,28	0,28	0,28	0,29	0,32	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52	0,56	0,62	0,66	0,72	0,77
0,20	0,18	0,17	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,27	0,31	0,35	0,39	0,45	0,50	0,55	0,60
0,10	0,08	0,06	0,05	0,02	0,00	0,00	0,03	0,06	0,11	0,16	0,21	0,26	0,31	0,37	0,42

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA  
 SEÇÃO RETANGULAR  
 VALORES DE  $\omega$       AÇO CA 50 B       $\beta = 30$        $a = 0.05$        $\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.90	0.93	0.95	1.01	1.07	1.12	1.19	1.23	1.30	1.38	1.44	1.51	1.57	1.64	1.70
0.95	0.81	0.83	0.87	0.90	0.97	1.02	1.09	1.14	1.20	1.26	1.34	1.40	1.47	1.53	1.60
0.80	0.73	0.75	0.77	0.81	0.86	0.92	0.97	1.03	1.11	1.17	1.23	1.28	1.35	1.41	1.48
0.75	0.64	0.65	0.67	0.71	0.76	0.82	0.88	0.94	1.00	1.05	1.11	1.18	1.24	1.31	1.36
0.60	0.55	0.56	0.58	0.62	0.66	0.71	0.77	0.82	0.88	0.94	1.01	1.07	1.12	1.19	1.23
0.50	0.45	0.47	0.49	0.52	0.56	0.61	0.66	0.71	0.77	0.83	0.90	0.95	1.00	1.06	1.12
0.40	0.36	0.37	0.39	0.42	0.46	0.50	0.56	0.61	0.66	0.71	0.76	0.82	0.88	0.94	0.99
0.35	0.27	0.28	0.30	0.32	0.35	0.39	0.44	0.49	0.54	0.59	0.64	0.69	0.75	0.80	0.84
0.20	0.18	0.19	0.20	0.22	0.24	0.27	0.31	0.36	0.40	0.45	0.50	0.54	0.59	0.65	0.70
0.15	0.09	0.09	0.09	0.11	0.12	0.14	0.17	0.20	0.24	0.28	0.33	0.38	0.43	0.48	0.54

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 B

$\beta = 30$

$a = 0,10$

$\phi = 0$

$\mu \backslash v$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,95	0,98	1,02	1,08	1,14	1,19	1,26	1,34	1,39	1,46	1,54	1,60	1,68	1,74	1,81
0,90	0,87	0,88	0,92	0,98	1,03	1,08	1,15	1,21	1,27	1,35	1,42	1,49	1,55	1,61	1,68
0,80	0,77	0,79	0,82	0,86	0,91	0,97	1,04	1,11	1,17	1,23	1,31	1,37	1,42	1,50	1,55
0,70	0,67	0,69	0,71	0,76	0,81	0,87	0,93	0,99	1,05	1,13	1,19	1,24	1,32	1,37	1,45
0,60	0,57	0,59	0,61	0,66	0,70	0,75	0,82	0,88	0,94	1,00	1,06	1,12	1,19	1,24	1,31
0,50	0,48	0,49	0,51	0,55	0,59	0,64	0,70	0,76	0,82	0,88	0,94	1,01	1,05	1,11	1,17
0,40	0,38	0,39	0,42	0,45	0,48	0,53	0,58	0,64	0,70	0,75	0,80	0,86	0,92	0,98	1,03
0,30	0,29	0,29	0,31	0,34	0,37	0,41	0,46	0,51	0,56	0,62	0,66	0,72	0,78	0,82	0,88
0,20	0,19	0,19	0,21	0,22	0,25	0,28	0,33	0,37	0,41	0,46	0,51	0,56	0,61	0,67	0,72
0,10	0,09	0,08	0,09	0,10	0,11	0,13	0,15	0,19	0,23	0,27	0,32	0,37	0,43	0,48	0,54





FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 B

$\beta = 35$

$a = 0,05$

$\phi = 0$

$\mu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,92	0,96	1,00	1,06	1,14	1,20	1,28	1,35	1,42	1,51	1,58	1,67	1,73	1,82	1,90
0,90	0,84	0,87	0,90	0,97	1,03	1,10	1,17	1,26	1,33	1,41	1,48	1,55	1,63	1,69	1,78
0,80	0,75	0,78	0,82	0,87	0,94	1,00	1,07	1,14	1,23	1,30	1,36	1,45	1,51	1,59	1,65
0,70	0,65	0,69	0,73	0,78	0,84	0,89	0,97	1,04	1,11	1,20	1,26	1,32	1,41	1,46	1,54
0,60	0,56	0,59	0,63	0,68	0,73	0,80	0,86	0,93	1,01	1,08	1,15	1,22	1,29	1,36	1,43
0,50	0,47	0,50	0,54	0,58	0,64	0,69	0,76	0,83	0,89	0,97	1,03	1,10	1,16	1,23	1,29
0,40	0,38	0,41	0,44	0,48	0,53	0,58	0,65	0,71	0,77	0,84	0,90	0,97	1,04	1,10	1,16
0,30	0,29	0,31	0,34	0,38	0,42	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71	0,78	0,84	0,91	0,95	1,02
0,20	0,20	0,22	0,24	0,27	0,31	0,36	0,41	0,46	0,52	0,58	0,63	0,69	0,75	0,81	0,87
0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,19	0,22	0,27	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51	0,57	0,62	0,68

\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL \* ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* \* \* \* \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  \* AÇO CA 50 B \*  $\beta = 35$  \*  $a = 0.10$  \*  $\phi = 0$  \*  
 \* \* \* \* \*

$\mu \backslash v$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.97	1.01	1.07	1.14	1.22	1.29	1.36	1.46	1.53	1.60	1.70	1.77	1.86	1.92	2.01
0.90	0.88	0.91	0.96	1.03	1.10	1.17	1.26	1.33	1.41	1.50	1.57	1.66	1.72	1.82	1.91
0.80	0.78	0.82	0.87	0.93	1.00	1.07	1.14	1.23	1.30	1.37	1.46	1.53	1.62	1.68	1.77
0.70	0.69	0.72	0.77	0.83	0.89	0.96	1.03	1.10	1.19	1.27	1.33	1.42	1.49	1.57	1.64
0.60	0.59	0.63	0.66	0.72	0.78	0.84	0.93	1.00	1.07	1.14	1.22	1.30	1.37	1.44	1.51
0.50	0.50	0.53	0.56	0.62	0.67	0.74	0.80	0.88	0.95	1.01	1.09	1.16	1.23	1.30	1.37
0.40	0.40	0.43	0.47	0.50	0.56	0.62	0.69	0.75	0.82	0.88	0.96	1.03	1.10	1.16	1.22
0.30	0.30	0.33	0.36	0.40	0.44	0.50	0.56	0.62	0.69	0.75	0.82	0.89	0.94	1.00	1.09
0.20	0.20	0.23	0.25	0.28	0.32	0.37	0.43	0.48	0.54	0.60	0.66	0.72	0.79	0.85	0.91
0.10	0.10	0.11	0.13	0.16	0.19	0.23	0.27	0.31	0.36	0.42	0.47	0.53	0.59	0.65	0.70

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

FLXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega_y$       AÇO CA 50 B       $\beta = 35$        $a = 0.15$        $\phi = 0$

\*\*\*\*\*

$\mu$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	1.04	1.07	1.15	1.24	1.31	1.38	1.48	1.55	1.63	1.73	1.81	1.91	1.98	2.08	2.17
0.90	0.93	0.98	1.04	1.11	1.19	1.27	1.34	1.44	1.52	1.60	1.70	1.77	1.86	1.93	2.02
0.80	0.82	0.87	0.93	0.99	1.06	1.15	1.23	1.31	1.41	1.48	1.55	1.65	1.72	1.81	1.91
0.70	0.73	0.76	0.82	0.89	0.95	1.02	1.12	1.19	1.27	1.34	1.44	1.51	1.60	1.67	1.77
0.60	0.62	0.66	0.71	0.78	0.84	0.91	0.98	1.06	1.13	1.22	1.30	1.39	1.46	1.54	1.61
0.50	0.52	0.56	0.60	0.65	0.71	0.78	0.86	0.93	1.01	1.08	1.16	1.24	1.31	1.39	1.46
0.40	0.41	0.45	0.49	0.54	0.59	0.66	0.73	0.80	0.87	0.94	1.02	1.09	1.16	1.24	1.32
0.30	0.31	0.34	0.38	0.42	0.47	0.53	0.60	0.66	0.73	0.80	0.87	0.94	1.01	1.08	1.15
0.20	0.21	0.23	0.26	0.29	0.33	0.39	0.45	0.51	0.57	0.63	0.70	0.76	0.83	0.90	0.96
0.10	0.10	0.11	0.12	0.16	0.18	0.21	0.25	0.30	0.36	0.42	0.48	0.55	0.61	0.67	0.74

\*\*\*\*\*



\*\*\*\*\*  
 \* FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL ARMADURA SIMÉTRICA \*  
 \* SEÇÃO RETANGULAR \*  
 \* VALORES DE  $\omega$  AÇO CA 50 B  $\beta = 40$   $a = 0.10$   $\phi = 0$  \*  
 \*\*\*\*\*

$\mu \backslash v$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
1.00	0.99	1.06	1.13	1.21	1.31	1.40	1.49	1.58	1.69	1.77	1.88	1.99	2.07	2.18	2.24
0.90	0.90	0.96	1.03	1.12	1.19	1.28	1.39	1.47	1.58	1.67	1.78	1.85	1.96	2.04	2.15
0.80	0.80	0.87	0.92	1.01	1.09	1.18	1.26	1.37	1.45	1.56	1.64	1.74	1.83	1.91	2.02
0.70	0.71	0.76	0.83	0.90	0.99	1.07	1.16	1.24	1.35	1.43	1.53	1.62	1.70	1.79	1.89
0.60	0.61	0.67	0.73	0.80	0.87	0.95	1.05	1.13	1.22	1.31	1.40	1.49	1.58	1.66	1.74
0.50	0.51	0.56	0.63	0.69	0.76	0.84	0.92	1.01	1.10	1.18	1.27	1.35	1.45	1.53	1.61
0.40	0.42	0.47	0.52	0.58	0.65	0.72	0.80	0.89	0.97	1.06	1.14	1.23	1.31	1.38	1.48
0.30	0.32	0.37	0.41	0.47	0.53	0.60	0.67	0.76	0.83	0.92	1.00	1.08	1.16	1.23	1.31
0.20	0.22	0.26	0.30	0.35	0.41	0.47	0.54	0.62	0.69	0.77	0.84	0.92	1.00	1.07	1.14
0.10	0.12	0.14	0.17	0.23	0.28	0.33	0.39	0.46	0.52	0.59	0.66	0.73	0.81	0.87	0.95

\*\*\*\*\*

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

ARMADURA SIMÉTRICA

SEÇÃO RETANGULAR

VALORES DE  $\omega$

AÇO CA 50 B

$\beta = 40$

$a = 0,15$

$\phi = 0$

$\mu \backslash \nu$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,06	1,12	1,22	1,30	1,41	1,50	1,62	1,71	1,80	1,92	2,01	2,13	2,24	2,32	2,43
0,90	0,95	1,03	1,10	1,20	1,30	1,39	1,48	1,60	1,69	1,81	1,89	2,01	2,09	2,19	2,31
0,80	0,85	0,92	0,99	1,09	1,17	1,28	1,37	1,46	1,58	1,66	1,78	1,87	1,96	2,06	2,17
0,70	0,75	0,81	0,89	0,97	1,05	1,14	1,25	1,34	1,43	1,54	1,64	1,74	1,83	1,92	2,03
0,60	0,64	0,70	0,78	0,85	0,94	1,03	1,12	1,21	1,31	1,41	1,51	1,60	1,69	1,78	1,89
0,50	0,54	0,60	0,67	0,74	0,81	0,90	0,99	1,08	1,18	1,28	1,36	1,47	1,56	1,64	1,73
0,40	0,44	0,49	0,55	0,62	0,69	0,77	0,86	0,95	1,04	1,13	1,22	1,31	1,40	1,48	1,58
0,30	0,33	0,38	0,44	0,50	0,56	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,07	1,15	1,24	1,34	1,42
0,20	0,22	0,27	0,31	0,37	0,43	0,50	0,58	0,66	0,74	0,82	0,91	1,00	1,07	1,16	1,24
0,10	0,12	0,14	0,18	0,23	0,29	0,34	0,40	0,47	0,55	0,62	0,69	0,78	0,86	0,94	1,01