UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Lucas Moraes Godoi

HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM O ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

Porto Alegre
2015

Lucas Moraes Godoi

HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM O
ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. ª Dr. ª Andréia Dalcin

Porto Alegre
2015

Lucas Moraes Godoi

HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM O
ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof. ª Dr. ª Andréia Dalcin

Banca Examinadora

Prof.ª Dr.ª Andréia Dalcin – Orientadora
Instituto de Matemática – UFRGS

Prof.ª Dr.ª Fernanda Wanderer
Faculdade de Educação – UFRGS

Prof. ª Dr.ª Luisa Rodriguez Doering
Instituto de Matemática – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Alvicelina e Ivo, por todo o cuidado e por todos os ensinamentos que me passaram.

A meus irmãos, Alice e Daniel, pela amizade e pelo apoio prestado, em particular nos momentos finais da graduação.

Ao meu grande amigo (irmão) Ândreo Ramires, pelas conversas regadas a chimarrão. *A true friend has no price*!

À Marli, pelo apoio incondicional e pela compreensão.

À Patricia Silva, pela amizade e pelo incentivo nos momentos de dúvida.

Aos meus amigos de infância, que, mesmo de longe, sempre me deram apoio em tudo.

À professora Andréia Dalcin, orientadora deste trabalho e das disciplinas de Estágio, pelo incentivo, pela paciência e pelos ensinamentos, essenciais para a minha formação.

Às professoras Fernanda Wanderer e Luisa Rodriguez Doering, por gentilmente aceitarem participar da banca examinadora.

Ao professor Luiz Emilio Allem, pelas valiosas orientações na bolsa de Iniciação Científica, e por acreditar em mim.

Aos professores Eduardo Henrique de Mattos Brietske e Luisa Rodriguez Doering pelas oportunidades de aprendizado oferecidas nos Seminários, e às colegas Franciele e Samantha, pelas valiosas contribuições.

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo estudar as potencialidades de uma proposta de ensino utilizando o Ábaco dos Números Inteiros, sob a perspectiva da História da Matemática. Para isso, estudou-se as potencialidades da História na Educação Matemática, através de argumentos que reforçam ou questionam sua contribuição nos processos de ensino e aprendizagem. Estudou-se também o papel do Ábaco na História. Procurou-se “formalizar” a matemática do Ábaco dos Números Inteiros, através de associações entre os procedimentos do Ábaco e as propriedades dos Números Inteiros. Também foi elaborada e realizada uma proposta didática com alunos do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Porto Alegre. Através da análise da proposta aplicada, constatou-se que o Ábaco dos Números Inteiros constitui-se em uma ferramenta de ensino que potencializa a aprendizagem das operações com os números inteiros, em especial no que diz respeito a favorecer uma melhor consciência do percurso que gera a resposta. Os alunos não decoram a "regra dos sinais" simplesmente, pois a regra passa a ser fruto de uma construção. Percebeu-se ainda que mesmo com a utilização do Ábaco dos Inteiros, os alunos ainda cometem erros que identificamos em três grupos: falta de atenção por parte dos estudantes; erros de representação e procedimento no Ábaco dos Inteiros; erro conceitual em relação aos Números Inteiros e operações. No entanto, os alunos que acertaram souberam justificar os porquês utilizando o Ábaco. Por fim, uma importante contribuição percebida diz respeito ao trabalho docente, pois, para o professor, o uso do Ábaco dos Inteiros possibilita uma melhor percepção dos erros dos alunos, favorecendo uma intervenção mais pontual no processo de ensino.

Palavras-chave: História na Educação Matemática; Números Inteiros; Ábaco dos Números Inteiros.

ABSTRACT

This work aims to study the potential of an educational proposal using the Integer Abacus, from the perspective of the History of Mathematics. For this, we studied the potential of History in Mathematics Education, through arguments that reinforce or question their contribution to teaching and learning processes. It has also been drawn up and carried out a didactic proposal with students from 7th year of elementary school to a public school in Porto Alegre. Through the analysis applied proposal, it was found that the Integer Abacus is in a teaching tool that enhances learning operations with Integers, in particular with regard to facilitate a better route awareness that generates the answer. Students do not decorate the "rule of signs" simply because the rule becomes the result of a construction. It is also realized that even with the use of the Integer Abacus, students still make mistakes we have identified in three groups: lack of attention from students; representation of errors and procedure in the Integer Abacus; misconception in relation to Integers and operations. However, students who scored knew justify the reasons using the Abacus. Finally, an important contribution perceived with regard to teaching, therefore, for the teacher, using the Integer Abacus enables a better understanding of the mistakes of the students, favoring a more timely intervention in the teaching process.

Keywords: History in Mathematics Education; Integers; Integer Abacus.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante as atividades práticas na disciplina de Estágio em Educação Matemática II, o tema das aulas para alunos do 7° ano foi Números Inteiros. Diante de certa dificuldade por parte dos alunos, foi sugerido, por parte da professora que orientava a disciplina, o uso do "Ábaco dos Números Inteiros" como ferramenta de ensino. Com isso, surgiu o interesse em entender melhor as origens do Ábaco, seu papel na história, bem como suas potencialidades de ensino e aprendizagem.

Assim, os objetivos principais deste trabalho são:

- Investigar as potencialidades do uso da história da matemática na sala de aula, por meio de uma proposta didática utilizando o ábaco dos números inteiros.
- Estudar a história e as possibilidades de utilização do Ábaco dos Números Inteiros.
- Elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades utilizando o Ábaco dos Números inteiros para o ensino de Números Inteiros.

No segundo capítulo é apresentado um estudo sobre história na educação matemática, objetivando um aprofundamento no tema. Serão vistos argumentos que reforçam ou questionam a contribuição da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem. Após, será feito um levantamento de trabalhos sobre História na Educação Matemática e Números Inteiros.

O terceiro capítulo traz um estudo sobre a história do Ábaco, desde suas prováveis origens em diferentes povos, até sua obsolescência, devido ao desenvolvimento da imprensa e da aritmética.

O quarto capítulo é constituído de um estudo que teve por objetivo "formalizar" a matemática por trás do Ábaco dos Números Inteiros. Para isso, inicialmente, são explicados os procedimentos do Ábaco, adaptados a partir do artigo de Dirks (1984). Disso, a partir de um breve estudo formal dos Números Inteiros, são feitas as devidas associações com as operações no Ábaco. Outro foco desta seção é estender o uso do Ábaco dos Números Inteiros para a divisão.

No quinto capítulo, é apresentada uma proposta didática utilizando o Ábaco do Números Inteiros, sua respectiva prática realizada em uma turma do 7° ano do ensino fundamental, além de uma análise sob o ponto de vista de argumentos que reforçam ou questionam a contribuição da história da matemática, e do Ábaco como ferramenta histórica de ensino.

2 HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> A história elege as coisas mais simples para confundir os sabichões, as coisas mais frágeis para abater os poderosos.
>
> *Lancelot Hogben*

Nesse capítulo, será feito um estudo sobre História na Educação Matemática, objetivando um aprofundamento no tema. Serão vistos argumentos que reforçam ou questionam a contribuição da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem. Após, será feito um levantamento de trabalhos sobre História na Educação Matemática e Números Inteiros.

Pode-se, inicialmente, destacar a distinção entre os campos História da Matemática, História da Educação Matemática e História na Educação Matemática. Os dois primeiros têm por interesse relacionar fatos de importância histórica e biografias de matemáticos e educadores matemáticos notáveis, bem como suas descobertas. No último, inclui-se estudos que tem por objeto de investigação problemas relativos às inserções efetivas da história na formação de professores de matemática ou de estudantes, em livros e em programas curriculares oficiais de ensino de Matemática (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Em qualquer área de conhecimento, em particular, na matemática, não há como deferir um método de ensino único, que seja eficaz em todos os casos. Assim, o trabalho de um professor, como é reforçado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, para a construção de sua prática (BRASIL, 1998, p.42). Entre essas possibilidades, está a abordagem através da história da matemática. Cabe destacar o que diz os PCN sobre seu papel no *caminho para "fazer Matemática" na sala de aula*:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1998, p.42).

Dessa forma, a história da matemática é indicada nos PCN como uma importante ferramenta de ensino, desde que seja encarada como "um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados" (BRASIL, 1998). Entretanto, é nesse sentido que os PCN acabam caracterizando, ao avaliar o quadro atual de ensino de matemática no Brasil, a história da matemática, ao dizer que "também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos" (ibid., p.23).

Apesar disso, conforme Miguel e Miorim (2004), diversos pesquisadores indicam tal abordagem em sala de aula, justificando que, com isso, se desperta o interesse por parte do aluno. Tal posição ganha força no Brasil no início do século XX, onde se destaca a, provavelmente, primeira manifestação nacional escrita em propostas oficiais de ensino:

> E, *por fim*, com o intuito de *aumentar o interesse do aluno*, o curso será incidentalmente entremeado de ligeiras alusões a problemas clássicos e curiosos e aos fatos da história da matemática bem como a biografia dos grandes vultos desta ciência. (Portaria Ministerial, de 30-6-1931, apud BICUDO[1], 1942, p.8, apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p.17, grifos).

Com isso, autores da época de livros didáticos incorporaram elementos de história em suas obras, seguindo o preceito de que o conhecimento histórico desperta o interesse do aluno. Embora a inserção de elementos históricos tenha acontecido de maneira oficial, no Brasil, na década de 1930, é possível localizar ocorrências em livros didáticos mais antigos, ainda que de forma menos contundente, como em notas de rodapé.

Contudo, pode se destacar que, se isso fosse verdade, o próprio ensino de história seria automotivador, fato não atestado pelos professores de História. Além disso, argumentos mais especializados podem ser encontrados na psicologia, no que concerne a motivação como objeto de estudo. (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Outro argumento utilizado por quem defende a história da matemática no ensino é de que nela se encontram métodos adequados para abordagem pedagógica de certos tópicos. Os que apoiam essa ideia entendem que se deve seguir o "fio" do desenvolvimento histórico das teorias apresentadas, objetivando, então, interessar e esclarecer os estudantes. Essa premissa baseia-se no "princípio genético", teoria espelhada na "lei biogenética" de Ernst Haeckel (1834-1919), que intui que cada indivíduo, na construção de conhecimento, passaria pelos

[1] BICUDO, J. C. O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive). São Paulo: s.n, 1942.

mesmos estágios que a humanidade teria passado. Por sua vez, Lévi-Strauss nos chama atenção a diferenciarmos o pensamento primitivo do pensamento infantil, evitando uma *ilusão arcaica*. Esse autor ressalta, fundamentalmente, que a "cultura mais primitiva é sempre uma cultura adulta, e por isso mesmo incompatível com as manifestações infantis que se podem observar na mais evoluída civilização" (LÉVI-STRAUSS, apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 77).

Outra justificativa favorável à história da matemática em sala de aula é tê-la como fonte de problemas práticos e curiosos. A ideia central é que a própria resolução de problemas é por si só uma atividade motivadora e que, somadas as forças com elementos históricos, ocorreria uma potencialização da motivação. Os PCN ressaltam que a matemática foi construída como respostas a problemas de ordem prática (BRASIL, 1998). Contudo, pode-se discutir novamente a efetividade da história como motivadora. A motivação, conforme Miguel (1997), pode não estar no fato de ser um problema, nem ser histórico, mas na relação entre o desafio e o estudante, e como esse desafio é percebido por ele.

Alguns autores defendem que deve-se tomar a história como um meio para a desmistificação da matemática, bem como para a desalienação de seu ensino. Argumenta-se que a forma "pronta" com a qual a matemática é apresentada esconde os obstáculos do processo criativo, mostrando-se excessivamente preocupada com o rigor, e dispensando a constituição dos conceitos nas diferentes praticas sociais na história e suas relações (MIGUEL; MIORIM, 2004). Assim, podem-se buscar objetivos pedagógicos que levem os alunos a

> perceber, por exemplo: (1) a matemática como criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar a generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 53).

Por outro lado, a história também pode ser instrumento de promoção do pensamento independente e crítico, embora, conforme aqueles que acreditam nesse argumento, isso só seja possível com uma reconstrução histórica tal que somente o indispensável ao afloramento do jogo dialético, puro e sutil das ideias matemáticas seja revelado (MIGUEL, 1997). Contudo, nessa história *destilada*, novamente as ideias e métodos são desconectados do contexto social em que surgiram.

Pode-se dar, também, à história o papel de reduzir a distância da matemática escolar com a matemática na forma como foi produzida. Nessa direção, a história seria um instrumento promotor de atitudes e valores. Para isso, defende-se que erros e hesitações dos grandes matemáticos devem ser expostos, tendo como resultado esperado o desenvolvimento de atitudes positivas, como coragem e persistência no enfrentamento de problemas e na busca de soluções para os mesmos (MIGUEL, 1997).

Outro argumento utilizado é de tomar a história como instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática. Esse viés foi defendido por Zúñiga (1988, apud MIGUEL; MIORIM, 2004), que diz que a história tem a função de esclarecedora do sentido das teorias e conceitos estudados, sendo esse objetivo atingido somente com a efetiva utilização da ordem histórica da construção matemática, com adaptações em relação ao estado atual do conhecimento (ibid.). Também nesse sentido, Jones (1969, apud MIGUEL, 1997) levanta e discute os “porquês”, ou seja, as razões de aceitação de certos fatos e procedimentos. Jones divide os porquês em três categorias: os porquês cronológicos, de natureza histórica, cultural, casual (exemplo: por que uma circunferência possui 360°?), os porquês lógicos, oriundos da decorrência lógica das proposições (exemplo: por que o produto de dois números negativos é um número positivo?) e os porquês pedagógicos, que se justificam mais por razões de ordem pedagógica do que pelas anteriores (exemplo: por que um professor ensina extrair o maior divisor comum entre dois números pelo método das subtrações sucessivas do que por outro método qualquer?). Para Jones, a história seria o fio que amarraria as explicações, direcionando um ensino-aprendizagem da matemática escolar baseado na compreensão e significação (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Existem também autores que questionam e levantam problemas na participação da história da matemática em sala de aula. O primeiro argumento é a ausência de literatura adequada, que viria a impedir a utilização pedagógica da história. Contudo, como ressaltam Miguel e Miorim (2004), em vez de impedimento, tal fato deveria funcionar como incentivo para pesquisadores em história e em história da matemática, já que torna-se um campo vasto a ser explorado.

Outro argumento se refere à natureza imprópria da literatura disponível. Isso é levantado pela característica das publicações matemáticas de destacar apenas os resultados, ocultando a forma como foram produzidos, o que seria essencial para dar alguma importância pedagógica. Embora Byers (1982, p.62, apud MIGUEL; MIORIM, 2004) chame atenção para esse fato, colocando que a reconstrução seria um trabalho extremamente complexo, pode-se ressaltar que essa busca por preenchimento de lacunas faz parte do trabalho de qualquer historiador, devendo, portanto, também servir de estímulo para pesquisadores da área.

Também é alegado que o emprego de história da matemática em sala de aula pode mais complicar do que facilitar. Isso porque o esforço do estudante para imergir em um contexto não familiar pode ser excessivamente grande. Grattan-Guinness (1973, apud MIGUEL; MIORIM, 2004) afirma que, "se um livro-texto sobre algum ramo da matemática fosse escrito em uma linha histórica, ele seria o livro mais difícil do mundo". Contudo, se por um lado perde-se em tempo e energia, se ganha em significado, sentido e criatividade. Em meio a essa antítese, o autor sugere a história como presença obrigatória nas abordagens de ensino em nível superior. Para os demais níveis, propõe uma "história satírica", uma imitação do desenvolvimento de determinado tema, mas sem a sua contextualização histórica. Ele reforça a necessidade dessa descontextualização levantando outro argumento, de natureza psicológica, de que as crianças têm pouco ou nenhum sentido de progresso histórico. Pode-se ressaltar que, como "crianças e adolescentes poderiam aprender significativamente a matemática via história, se a compreensão da própria história acha-se, de partida, comprometida?" (MIGUEL, 1997).

Entre argumentos que reforçam ou questionam a contribuição da história da matemática nos processos de ensino e aprendizagem, a questão teórica básica de pesquisadores e professores que fazem uso consciente e fundamentado da história em suas atividades, conforme Miguel e Miorim (2004), é sobre o tipo de vínculo que se busca fazer entre a produção sócio-histórica do conhecimento (nesse caso, matemático) – filogênese –, e a apropriação pessoal desse conhecimento no presente – psicogênese. Em outras palavras,

> …mais amplamente, diz respeito a como é concebida a relação entre a cultura (aqui entendida como o conjunto de formas simbólicas até hoje produzido) historicamente produzida – particularmente, a cultura matemática – e as formas de apropriação dessa cultura no presente, sobretudo nas práticas pedagógicas escolares e nas práticas de investigação acadêmica. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 70).

Esses vínculos podem ser classificados em dois tipos diferentes, embora não necessariamente mutuamente excludentes: de natureza epistemológica ou de natureza ética (MIGUEL; MIORIM, 2004). De natureza epistemológica por compreensão da matemática como um conjunto de resultados, e de natureza ética, por construção de valores e formação enquanto ser humano através do conhecimento matemático.

Apesar desta classificação, Miguel e Miorim (2004, p.71) destacam a ilegitimidade de uma rígida distinção entre tais vínculos, pois, por um lado, valores éticos podem, também, ser entendidos como conteúdo específico. Por outro lado, mesmo objetivando dar ênfase à aprendizagem exclusivamente matemática, valores éticos adjacentes podem ser atribuídos, como por exemplo, a valorização da precisão e do rigor nos raciocínios e na argumentação (MIGUEL; MIORIM, 2004).

2.1 AS PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O objetivo desta seção é reunir algumas pesquisas Segue abaixo uma tabela que destaca algumas teses e dissertações envolvendo História na Educação Matemática.

Tabela 1 – Trabalhos sobre História na Educação Matemática Continua

AUTOR	**TÍTULO**	**ORIENTADOR**	**NÍVEL/ INSTITUIÇÃO**	**ANO**
Antônio Carlos Brolezzi	A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática	Nilson José Machado	MESTRADO / USP	1991
Antônio Carlos Brolezzi	A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.	Nilson José Machado	DOUTORADO / USP	1997
Antônio Miguel	Três estudos sobre História e Educação Matemática	Lafayette De Moraes	DOUTORADO / UNICAMP	1993
Elaine Caire	A história da origem da curva normal	Marcos Vieira Teixeira	MESTRADO / UNESP RIO CLARO	2013
Eliane Maria de Oliveira Araman	Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática	Irinea de Lourdes Batista	DOUTORADO / U. E. Londrina **(VIA CAPES)**	2011
Jeferson André Gottardi	História da matemática como recurso pedagógico no ensino fundamental	Tania Baier	MESTRADO / URB **(VIA CAPES)**	2012

Tabela 1 – Trabalhos sobre História na Educação Matemática   Conclusão

AUTOR	TÍTULO	ORIENTADOR	NÍVEL/ INSTITUIÇÃO	ANO
Lucia Helena Bezerra Ferreira	Ateliês de história e pedagogia da matemática: contribuições para a formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais	Iran Abreu Mendes	DOUTORADO / UFRN **(VIA CAPES)**	2011
Marcos Francisco Borges	Ciência e religião: reflexões sobre os livros de história da matemática e a formação do professor	Antônio Carlos Brolezzi	DOUTORADO / USP	2010
Marcos Vinicius Ribeiro	O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas	Lourdes de La Rosa Onuchic	MESTRADO / UNESP RIO CLARO	2010
Mônica de Cássia Siqueira Martines	Algumas Observações sobre a Característica de Euler: Uma Introdução de Elementos da História da Matemática no Ensino Médio.	Sergio Roberto Nobre	MESTRADO / UNESP RIO CLARO	2009
Valdirene Rosa de Souza	Funções no ensino médio: história e modelagem	Antônio Carlos Brolezzi	MESTRADO / PUC-SP **(VIA CAPES)**	2011

Fonte: Construção do autor

Serão destacados aqui pequenos resumos de algumas teses ou dissertações que têm afinidade com o presente trabalho.

Antônio Carlos Brolezzi, em sua dissertação *A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática*, tem como proposta um estudo do uso da História da matemática enquanto fornecedora dos elementos necessários para a construção de caminhos lógicos tendo em vista a construção original daquele tópico matemático que se quer ensinar, propiciando ao aluno uma visão com significado da totalidade da matéria. Para isso, faz uma retrospectiva da transmissão de conhecimentos sobre História da Matemática, vendo uma história dessas fontes, e estudando com mais detalhes alguns livros sobre História da Matemática.

Antônio Miguel, em sua tese *Três Estudos sobre História e Educação Matemática* toma como objeto de estudo o problema da relação entre a história, e mais particularmente a história da matemática, e a Educação Matemática. Verifica as possibilidades de se recorrer à história como um recurso pedagógico adicional no primeiro estudo. O segundo estudo aponta para a necessidade de um resgate da Educação Matemática na história. Por fim, no terceiro estudo, apresenta uma discussão histórico-pedagógico-temática sobre os números irracionais.

2.2 AS PESQUISAS SOBRE NÚMEROS INTEIROS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção, objetivou-se reunir algumas pesquisas envolvendo Números Inteiros e História da matemática na educação matemática. Destaca-se o resumo de alguns destes trabalhos.

Tabela 2 – Trabalhos sobre Números Inteiros e História na Educação Matemática

AUTOR	**TÍTULO**	**ORIENTADOR**	**NÍVEL/ INSTITUIÇÃO**	**ANO**
Ana Catarina Cantoni Roque	Uma investigação sobre a participação da história da matemática em uma sala de aula do ensino fundamental	Maria Laura Magalhães Gomes	MESTRADO / UFMG	2012
Marcia Paula Fraga Coelho	A multiplicação de números inteiros relativos no “ábaco dos inteiros”: uma investigação Com alunos do 7º ano de escolaridade	Conceição Almeida	MESTRADO / UNIVERSIDADE DO MINHO - PORTUGAL	2005
Marta Figueiredo dos Anjos	A difícil aceitação dos números negativos: Um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862).	John Andrew Fossa	MESTRADO / UFRN	2008

Fonte: Construção do autor

Ana Catarina Cantoni Roque, em sua dissertação *Uma investigação sobre a participação da história da Matemática em uma sala de aula do ensino Fundamental* busca investigar as potencialidades pedagógicas da história da Matemática em uma sala de aula de matemática de estudantes do ensino fundamental tomando como referencial uma perspectiva de aprendizagem situada. A autora, para isso, desenvolve e aplica algumas atividades sobre números inteiros em duas salas de aula do 7º ano do ensino fundamental.

Marcia Paula Fraga Coelho, na sua dissertação *A multiplicação de números inteiros relativos no "ábaco dos inteiros": uma investigação com alunos do 7° ano de escolaridade,* busca verificar a efetividade do uso do Ábaco dos Inteiros para o ensino de multiplicação de números inteiros. Através de uma proposta realizada com uma turma de 7° ano e entrevistas com a professora, conclui, entre outras vantagens, que há compreensão intuitiva da Regra dos Sinais, nos vários casos da multiplicação, ao permitir que os alunos vissem e manipulassem o "Ábaco dos Inteiros" nas várias situações.

Marta Figueiredo dos Anjos, em sua dissertação *A difícil aceitação dos números negativos: Um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862)* faz um estudo da história dos Números Inteiros, inter-relacionando diferentes formas e condições de construção do conhecimento matemático, visando esboçar as razões de rejeição aos números negativos, como raízes de equações, pelo inglês Peter Barlow em uma obra de sua autoria publicada em 1811.

Para o levantamento a seguir, foram considerados apenas monografias realizadas na UFRGS.

Tabela 3 – Trabalhos sobre Números Inteiros e História na Educação Matemática na UFRGS

Continua

AUTOR	TÍTULO	ORIENTADOR	NÍVEL/ INSTITUIÇÃO	ANO
Gilberto Silva dos Santos	Mais ou menos: Reflexões sobre ensino de números inteiros	Helena Dória Lucas de Oliveira	GRADUAÇÃO / UFRGS	2013
Jean Rodrigues Teixeira De Teixeira	Sobre as regras de sinais de números inteiros negativos	Luisa Rodriguez Doering	GRADUAÇÃO / UFRGS	2013
Grasiela Martini	Estratégias de trabalho para a aprendizagem de operações com números inteiros	Marcos Vinicius De Azevedo Basso	GRADUAÇÃO / UFRGS	2010
Daniel da Rosa Mesquita	A história da matemática no ensino da matemática	Lucia Helena Marques Carrasco	GRADUAÇÃO / UFRGS	2011
Giovane Mansan	Perspectivas históricas de alguns tópicos de geometria: avaliando alternativas de ensino	Lucia Helena Marques Carrasco	GRADUAÇÃO / UFRGS	2012

Tabela 3 – Trabalhos sobre Números Inteiros e História na Educação Matemática na UFRGS

Conclusão

AUTOR	TÍTULO	ORIENTADOR	NÍVEL/ INSTITUIÇÃO	ANO
Helio Pires Soares	Teorema de Thales: uma proposta de ensino	Marilaine de Fraga Sant'ana	GRADUAÇÃO / UFRGS	2011
Jaqueline Klein Galli	Contando histórias de matemática em aulas de EJA	Lucia Helena Marques Carrasco	GRADUAÇÃO / UFRGS	2012
Phillip Whalbrink Toujá	Matemática: Do que trata? Para que serve? Qual sua História?	Lucia Helena Marques Carrasco	GRADUAÇÃO / UFRGS	2014
Dayane Cristina das Neves	Sobre a aprendizagem da multiplicação de números negativos	Elizabete Zargo Búrigo	GRADUAÇÃO / UFRGS	2012

Fonte: Construção do autor

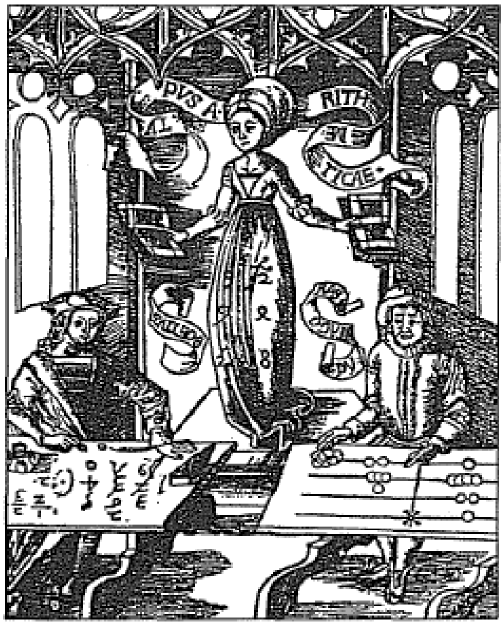
Em seu trabalho, *Sobre as regras de sinais de números inteiros negativos*, Jean Rodrigues Teixeira de Teixeira faz um estudo da história e da construção formal dos Números Inteiros. Em uma prática realizada com alunos do 7º ano do ensino fundamental, levanta que algumas das dificuldades dos alunos, em relação aos números inteiros, são as mesmas dificuldades que os matemáticos do passado tiveram, enquanto esses números ainda não haviam sido legitimados.

Daniel da Rosa Mesquita, em seu trabalho *A história da matemática no ensino da matemática* faz um estudo sobre como a história da matemática pode auxiliar alunos e professores a compreender melhor a matemática. Desdobra esse estudo através de análise de livros didáticos e de entrevistas com professores de matemática que utilizam História da Matemática como recurso.

Dayane Cristina da Neves, em seu trabalho *Sobre a aprendizagem da multiplicação de números negativos*, objetiva identificar e discutir as dificuldades envolvidas no ensino e na aprendizagem da multiplicação de números negativos, Através de entrevistas com licenciandos em matemática e de uma prática proposta a um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio.

3 O ÁBACO NA HISTÓRIA

Figura 1 – Perla Filosophica, de Gregor Reisch (1503)



Fonte: Chadid, Perez (2002)

A figura 1, Perla Filosophica, de Gregor Reisch, retrata o embate entre abaquistas e algoritmistas na Idade Média. Na imagem, gravada originalmente em madeira, estão associados os nomes Boecio (à esquerda, representando o algoritmista) e Pitágoras (à direita, representado o abaquista). No centro, está representada a alegoria da Aritmética, julgando o embate, apontando a favor do algoritmista.

Existem vários estudos acerca do "surgimento", ou "advento" da matemática. Contudo, eles convergem para uma direção: a necessidade humana da contagem. E, provavelmente, a necessidade de uma representação numérica está diretamente associada à de se fazer contagens (GRANJA; PASTORE, 2012). Assim, sistemas de numeração distintos foram surgindo em diversas regiões. Sistemas de base 12 ou de base 60, utilizados, por exemplo, pelo povo sumério, justificaram-se, provavelmente, pela quantidade de divisores, enquanto que os de base 5, 10 e 20, como o utilizado pelos astecas, pela quantidade de dedos das mãos e dos pés. Há também registros de tribos que contavam em base 7 e em base 11 (BALL, 1960).

Embora o advento da escrita date cerca de 4000 a.C., existem registros (riscos ordenados em ossos) com 20 mil anos de idade (GRANJA; PASTORE , 2012), e até com 70 mil anos (ALMEIDA, 2015). Disso, Struik (1989) conclui que o processo de contagem não começou pelos dedos. Na verdade, diz que contar com os dedos "surgiu apenas numa determinada fase do desenvolvimento social".

Contudo, em determinado momento, a contagem nos dedos, por exemplo, passou a ser uma estratégia insuficiente para contar. Dessa necessidade, algumas civilizações inventaram uma forma de contar agrupando pedras em conjuntos, que então se desenvolveu para o **ábaco**.

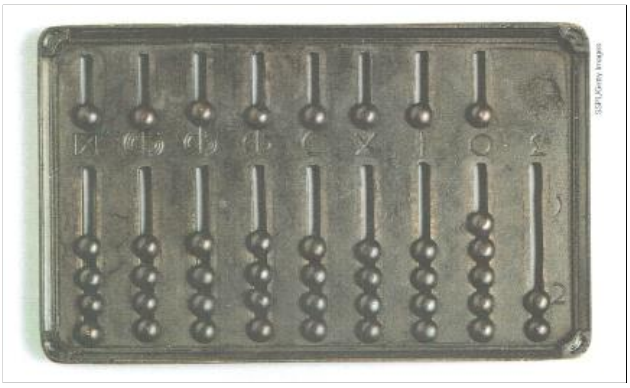
> Logo que o homem cessou de confiar inteiramente em talhas e de representar os números por entalhes e gravações, concebeu a ideia de utilizar seixos e conchinhas, que podia desarmar com facilidade e tornar a usar quantas vezes quisesse. É esta, provavelmente, a origem do ábaco (HOGBEN, 1958, p. 51).

A origem precisa do ábaco é incerta, já que diversos povos da Antiguidade o utilizaram, como: mesopotâmicos, hindus, árabes, egípcios, e romanos (GRANJA; PASTORE, 2012), além de etruscos, gregos, fenícios, russos, chineses e japoneses (BALL, 1960). Mexicanos e peruanos já o conheciam quando os espanhóis chegaram na América (HOGBEN, 1958). Acredita-se que possa ter sido inventando de maneira independente em alguns desses locais. Na China, seu uso foi precedido pelo de barras, de bambu, marfim ou ferro (BOYER, 1974).

> as barras eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como "voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu movimento". Provavelmente era mais rápido efetuar cancelamentos com barras sobre uma tábua de contar do que em cálculos escritos (Boyer, 1974, p. 145).

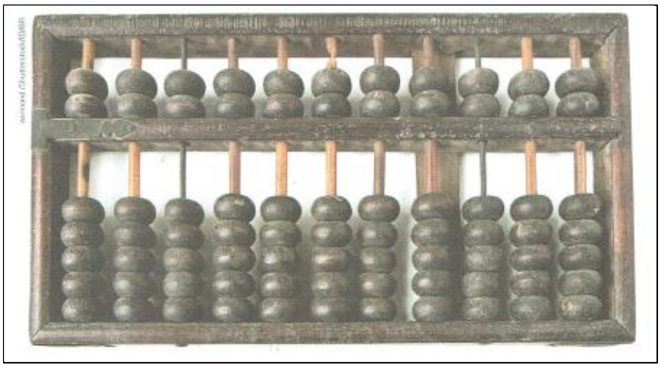
A origem da palavra ábaco é grega, onde *ábakos* significa "tabuleiro de areia" (GRANJA; PASTORE, 2012). Para Boyer (1974), a palavra *abacus* deriva da palavra semítica *abq* ou "pó". Apesar disso, a forma do ábaco como conhecemos hoje é a do *soroban*, o ábaco japonês, ou *swan-pan*, o ábaco chinês (GRANJA; PASTORE, 2012). Ainda hoje é usado em países como China e Japão (BALL, 1960).

Figura 2 – Antigo ábaco romano feito com ferro



Fonte: Granja, Pastore (2013)

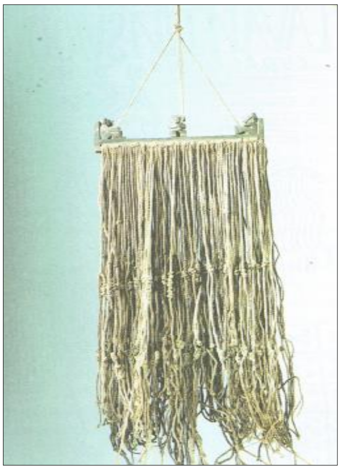
Figura 3 – Ábaco chinês



Fonte: Granja, Pastore (2013)

Sua forma mais simples é composta por uma base (que pode ser de madeira ou ferro) com alguns frisos talhados, ou a de uma tábua coberta de areia (dessa forma, originando a palavra), em que os frisos podem ser feitos com os dedos (BALL, 1960). A representação numérica pode ser indicada com pedras (contas), onde a quantidade e a posição (friso) que ela ocupa indicará o valor. Alguns povos liam os frisos da direita para a esquerda, enquanto outros faziam ao contrário (BALL, 1960). O ábaco romano possuía dois frisos ou barbantes extras, um com quatro contas e outro com doze, para facilitar adição de frações com esses denominadores. O *tschotü* (russo) foi melhorado utilizando fios em um quadro retangular, com as contas (nove ou dez) fixas em cada fio (BALL, 1960). Já o *soroban* e o *swan-pan* foram além, substituindo cinco contas por uma, de forma distinta ou em uma localização diferente. O *quipu* (palavra que significa nó), de origem inca, era bem diferente: utilizavam cordões, e atavam diferentes formas de nós para indicar quantidades (GRANJA; PASTORE, 2012).

Figura 4 – Quipu inca



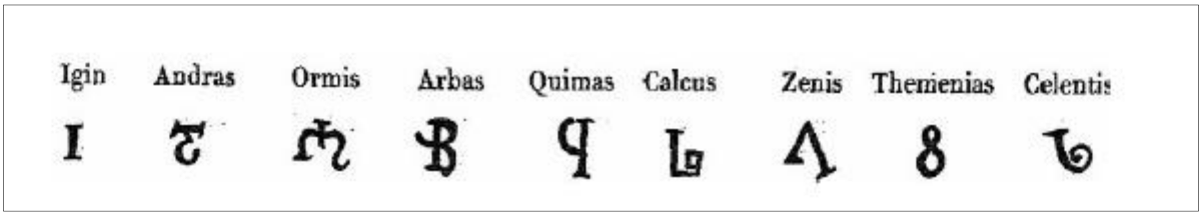
Fonte: Granja, Pastore (2013)

O ábaco, como instrumento para fazer adições e subtrações, por um lado, oferece uma forma de fazer tais operações mesmo sem conhecimento de aritmética, trazendo os resultados através de um processo mecânico (BALL, 1960). Além disso, pode-se utilizá-lo para fazer multiplicações e divisões; conforme Ball, é provável que muitos dos teoremas devidos aos gregos (e fenícios) foram descobertos e provados com o uso do ábaco. O "tabuleiro de areia" também teve um papel importante no ensino da "arte do cálculo" e da aritmética na Grécia e Roma antiga. Gregos e romanos também usavam os ábacos como tabuleiros para um jogo parecido com gamão (BALL, 1960).

Gerbert de Aurillac, que no ano 999 tornou-se Papa Silvester II, teve uma grande contribuição no uso do Ábaco: no lugar de colocar traços ou marcas, tantas quantas necessárias, em cada coluna (*arcus*) construiu fichas de chifre de boi e nelas marcou a numeração hindu arábica, que trouxera da Espanha; assim, foi responsável pela introdução na Europa cristã da numeração posicional hindu arábica (FERREIRA, 2007). Gerbert usava as expressões *digitus* para designar os nove números naturais (indicados em ordem crescente da esquerda para a direita na figura 5), e *articulus* para os múltiplos por 10 desses números. Até então, o zero não era conhecido (ibid.).

Essa contribuição foi registrada em sua obra *De abacus Computi*, onde colocou procedimentos de cálculos como multiplicação e divisão, entre outras operações, utilizando esse ábaco.

Figura 5 - Símbolos que Gerbert usou em seu ábaco



Fonte: Ferreira (2007)

Ferreira (2007) constata que, com a escrita dos algoritmos das operações, apareceu, então, a necessidade do zero, para designar colunas vazias do ábaco. Tal introdução foi feita na Europa por Fibonacci, em 1202, no seu famoso tratado *Liber Abaci***.**

> Progressivamente, o ábaco de Gerbert e de seus rivais caiu em desuso. E, pouco a pouco, as cifras foram traçadas novamente sobre areia, em lugar de usar as fichas gravadas; e, mesmo, desaparecem as colunas do ábaco. Um cálculo de método mais simples, mais prático, mais elegante e mais rápido, que foi designado pelo nome de algoritmo (em referência ao nome do matemático árabe Al´Khuwãrizmi). Com isso, contrariamente aos "abacistas", os novos sábios europeus de cálculo foram obrigados a adotar o zero para marcar as casas que apareciam sem fichas no ábaco. Com o Liber Abaci (1202), Fibonacci esclarece o uso na escrita desse sistema de numeração posicional (FERREIRA,2007).

Por muito tempo, o ábaco foi o único instrumento de calcular disponível. O uso de símbolos numerais, principalmente a partir da "invenção" do zero por parte dos hindus – embora se tenham registros de que os maias também o tenham feito, de maneira independente (HOGBEN, 1958) –, e o consequente desenvolvimento de métodos na aritmética, juntamente à popularização do papel foram, gradativamente, tornando o ábaco obsoleto. Tornou-se tão fácil lidar com números extensos, como 9.999.999.999.999.999, que Hogben (1958) destaca, quanto com 9.999. Em um ábaco de quatro colunas, por exemplo, é impossivel lidar com o primeiro.

De fato, foram necessários três séculos para que tal método de cálculo fosse aceito (CHADID, PÉREZ, 2002). Rugiu (1998) comenta, por exemplo, que em

> um famoso manual do século XV destinado a ensinar contabilidade ao jovem Giovanni Medici usa o sinal hindu arábico para indicar os algarismos compreendidos no cálculo em questão, mas volta ao romano para todo o resto (p. 61, RUGIU, 1998).

Por um lado, o uso dos algarismos arábicos foi excluido de documentos oficiais em alguns países, e até totalmente proibidos em outros. A "novidade" não foi bem aceita por aqueles que, por muito tempo, fizeram uso do ábaco (abaquistas) e, por consequência, de algarismos romanos. Os notários, responsáveis pelas redações de atos oficiais, importavam-se em conservar um estilo próprio, elevado, e isso refletia-se na escrita também. A escrita dos notários, concebida para os atos em latim, não mudava mesmo quando redigiam documentos em língua vulgar (RUGIU, 1998). O fato deles serem funcionários públicos explica as proibições dos algarismos. Mais que isso, segundo alguns, tal proibição derivava da incapacidade que os inspetores fiscais demonstravam nas fiscalizações, em conseguir compreender os livros contábeis feitos com o novo sistema (ibid.)

Por outro lado, a proibição somente difundiu seu uso de forma “secreta”. Nessa clandestinidade, operavam os algoritmistas para mercadores e cambistas. Os riscos que haviam por trabalharem à margem também a constituiam e a protegiam como um “mistério” (RUGIU, 1998). Tal embate entre abaquistas e algoritmistas perdurou até o século XVII, dado à imprensa e ao desenvolvimento da aritmética. Conforme Hogben (1958), a “*Aurora do Nada* era também a aurora do material de escrever barato”.

Apesar de o ábaco ter perdido importância como ferramenta de cálculo, seu uso ainda é comum na Rússia, China e Japão (STRUIK, 1989). Ainda há nesses países alguns pequenos estabelecimentos comerciais que o utilizam ao invés da calculadora; na verdade, um usuário experiente pode somar números no ábaco tão rapidamente quanto os lê (BALL, 1960). O velho abaquista antecipa assim, no tempo, a imagem quase mágica com a qual será visto o alquimista por cerca de aproximadamente outros dois séculos. (RUGIU, 1998).

4. O ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

Segundo Martzloff (1997, apud ANJOS, 2008), os primeiros registros envolvendo uso de números negativos ocorreram na matemática chinesa. A aceitação dos números negativos pelos chineses, para a autora, passa pela análise dos fundamentos filosóficos da sua própria cultura, a qual foi concebida sobre a visão de opostos complementares (ANJOS, 2008). O próprio processo de cálculo dos chineses, envolvendo varas de diferentes cores (onde varas vermelhas indicavam números negativos, e varas pretas, positivos) indica tal facilidade nessa aceitação (BOYER, 1974).

Provavelmente dessa composição originou-se o Ábaco dos Números Inteiros. De acordo com Coelho (2005), o Ábaco foi referenciado pela primeira vez por Bartolini[2] , que apresentava as operações de adição e subtração utilizando o Ábaco. Dirks (1984) estende as operações do Ábaco para a multiplicação.

Nesta capítulo, será realizado um estudo com o objetivo a "formalizar" a matemática por trás do Ábaco dos Números Inteiros. Para isso, inicialmente, são explicados os procedimentos do Ábaco, adaptados a partir do artigo de Dirks (1984). Disso, a partir de um breve estudo formal dos Números Inteiros, serão feitas as devidas associações com as operações no Ábaco.

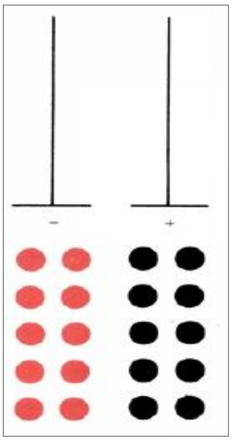
4.1 O ÁBACO

Em sua forma originalmente idealizada, o Ábaco possui duas hastes, e em cada uma deve conter entre 15 e 20 contas (pedras do Ábaco). Os conjuntos de contas devem ser de cores distintas, como azul (para os positivos) e vermelha (para os negativos), contudo, pode-se utilizar quaisquer outras. Pode-se marcar na base de cada haste o sinal de positivo e de negativo. O modelo de fichas de duas cores, utilizado por Oliveira (2011) e na prática desse trabalho, é uma versão mais simples, mas estruturalmente equivalente. Utiliza-se as fichas como as contas do Ábaco, seguindo uma forma ordenada vertical ou horizontal, diferenciando-se apenas pela ausência da base. Assemelha-se, nessa forma, aos Ábacos em tabuleiros de areia, onde apenas frisos indicavam as posições das contas. Nas figuras 6, 7 e 8, temos o modelo indicado por Dirks (1984), o Ábaco construído por Coelho (2005) em sua

[2] BARTOLINI, P. *Addition and Subtraction of Directed Numbers, Mathematic* Teaching, ed. 74, p. 34-35, mar. 1976

prática, e o modelo de fichas de duas cores, utilizado na prática deste trabalho.

Figura 6 – Gravura ilustrativa do Ábaco

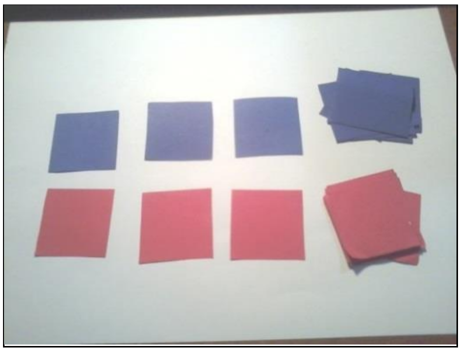


Fonte: Dirks (1984)

Figura 7 – Ábaco construído por Coelho para sua prática

Fonte: Coelho (2005)

Figura 8 – Fichas de Duas Cores

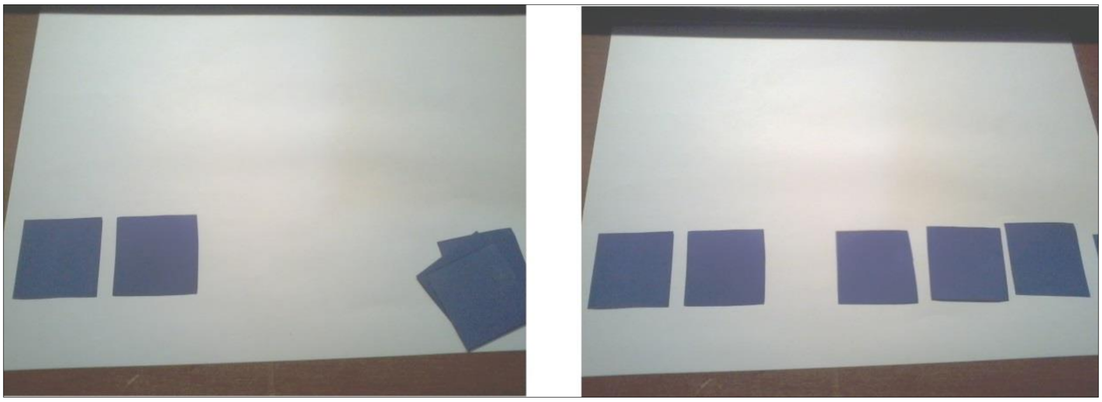


Fonte: Acervo do autor

4.1.1 Adição no Ábaco dos Números Inteiros

No Ábaco, a operação de adição indica a ação de *colocar* contas. Por exemplo, $(+2) + (+3)$ indica que, inicialmente, tem-se 2 contas azuis no Ábaco e, então, deve-se colocar 3 contas azuis, ficando então com 5 contas azuis, indicando que a resposta é +5.

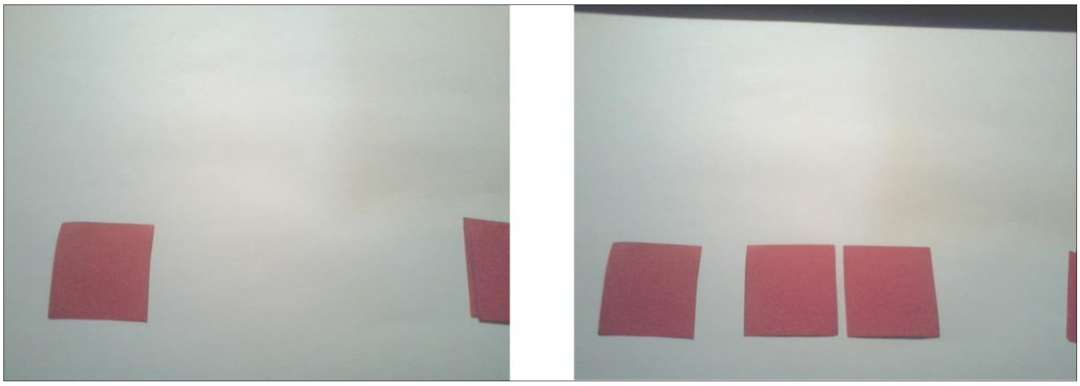
Figura 9 – Fazendo a soma $2 + 3$ no Ábaco dos Inteiros



Fonte: acervo do autor

A adição entre números negativos ocorre de maneira similar. No exemplo $(-1) + (-2)$, tem-se 1 conta vermelha no Ábaco, e então coloca-se 2 contas vermelhas, ficando com 3 contas vermelhas indicadas, ou seja, o resultado é -3.

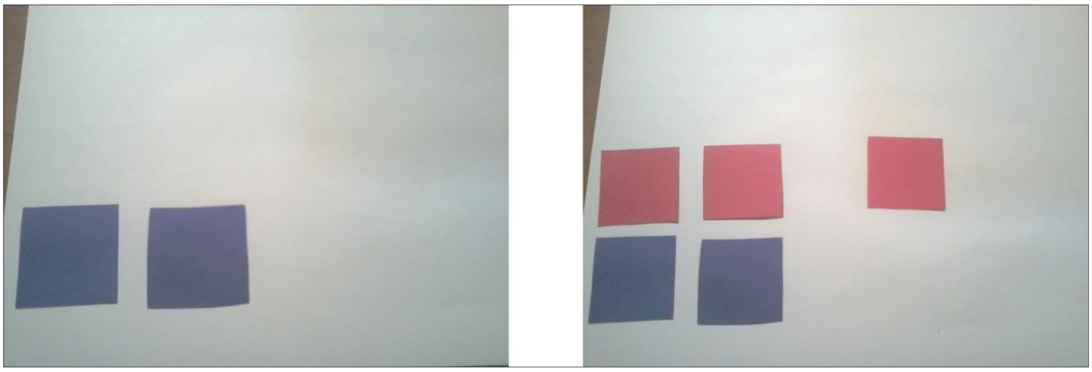
Figura 10 – Fazendo a soma $-1 + (-2)$



Fonte: acervo do autor

Para adicionar números positivos e negativos, procede-se, inicialmente como antes, colocando-se no Ábaco as contas indicadas na operação. Para obter-se o resultado, deve-se então *parear* uma conta azul com uma conta vermelha, até sobrarem apenas contas de uma cor. O resultado, então, será indicado pelas contas que sobraram. Por exemplo, pode-se fazer a soma $2 + (-3)$.

Figura 11 – Somando $2 + (-3)$



Fonte: acervo do autor

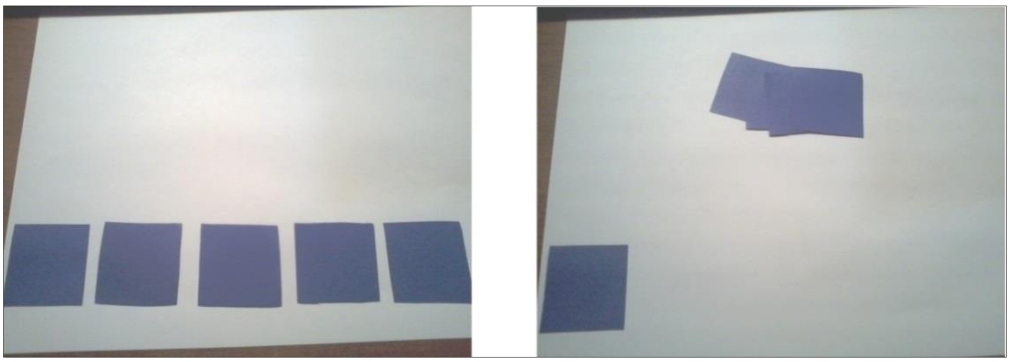
Inicia-se com 2 contas azuis, e então coloca-se 3 contas vermelhas. Como pode-se notar na figura 11, serão pareadas 2 contas de cada cor, sobrando uma conta vermelha, e, portanto, o resultado será -1.

Similarmente, pode ser observado que o resultado será positivo se houver mais contas azuis que vermelhas no Ábaco. Também pode-se notar que é indiferente colocar primeiro contas azuis ou vermelhas, indicando a comutatividade da soma.

4.1.2 Subtração no Ábaco dos Números Inteiros

A operação de subtração indica a ação de *retirar* contas do Ábaco. Por exemplo, ao calcular-se $5 - 4$, inicialmente, de 5 contas azuis, deve-se retirar 4.

Figura 12 – Fazendo a subtração $5 - 4$



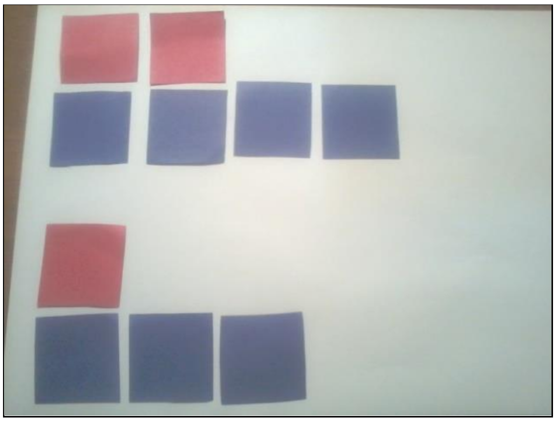
Fonte: acervo do autor

Como vê-se na figura 12, fica no Ábaco 1 conta azul, e assim o resultado é +1. Similarmente, se fosse calculado $(-4) - (-1)$, bastaria retirar 1 conta vermelha das 4 iniciais, ficando com 3, e assim, tem-se que o resultado é -3.

Os casos especiais na subtração envolvem as seguintes questões: e quando precisa-se retirar mais contas do que as que o Ábaco possui inicialmente? Como retirar contas azuis (ou vermelhas), se o Ábaco possui apenas contas vermelhas (ou azuis)?

Para resolver as operações desses casos, deve-se colocar no Ábaco contas de cada cor em quantidades iguais. Essa ação é chamada de *somar zero*. De fato, tal ação não altera o valor registrado no Ábaco, o que mostra que a representação de um Número Inteiro no Ábaco não é única. Na figura 13, são mostradas duas representações distintas do número 2.

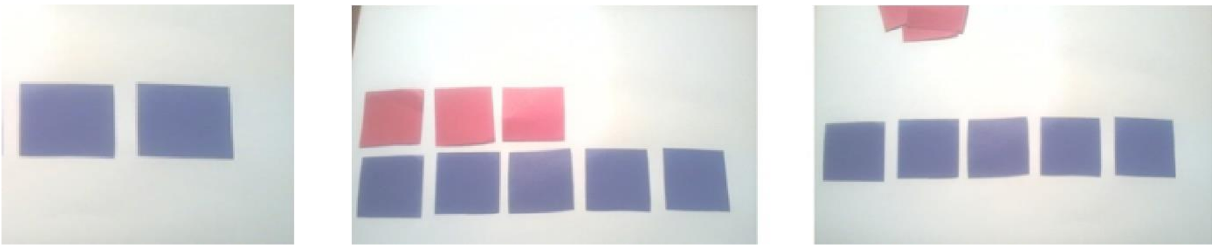
Figura 13 – Representações do número 2 no Ábaco



Fonte: acervo do autor

Assim, para resolver, por exemplo, $2 - (-3)$, deve-se representar +2 de forma a ter-se, ao menos, 3 contas vermelhas a serem retiradas. Nesse caso, ficarão 5 contas azuis indicadas no Ábaco, e, disso, a resposta será +5.

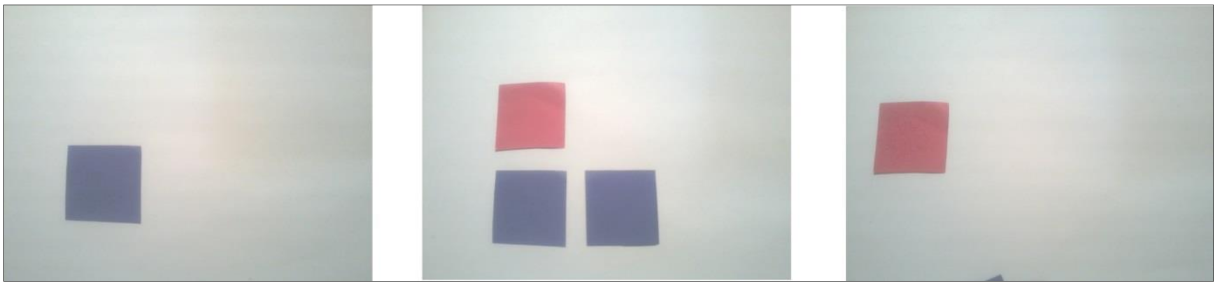
Figura 14 – Resolvendo a subtração $2 - (-3)$



Fonte: acervo do autor

Em outro exemplo, para calcular $1 - 2$, observa-se que há, inicialmente, 1 conta azul a ser indicada. Disso, acrescenta-se 1 conta de cada cor, ficando ainda representado o +1, mas agora tem-se 2 contas azuis. Procedendo a retirada, fica 1 conta vermelha, ou seja, o resultado é -1.

Figura 15 – Calculando $1 - 2$

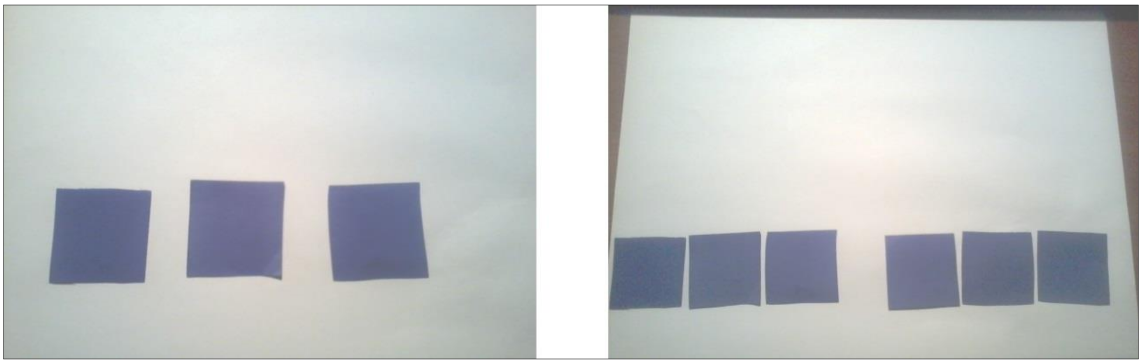


Fonte: acervo do autor

4.1.3 Multiplicação no Ábaco dos Números Inteiros

No Ábaco dos Números Inteiros, a operação de multiplicação indica a ação de colocar ou retirar contas de forma sucessiva. O primeiro fator será o *operador* que indicará que ação proceder. Se for positivo, deve-se colocar contas, se negativo, deve-se retirar. No exemplo (+2) × (+3), o operador +2 indica que deve-se colocar 2 vezes contas no Ábaco. O segundo fator indica que são 3 contas azuis. Assim, têm-se 6 contas azuis, e portanto o resultado é +6.

Figura 16 – Calculando 2×3



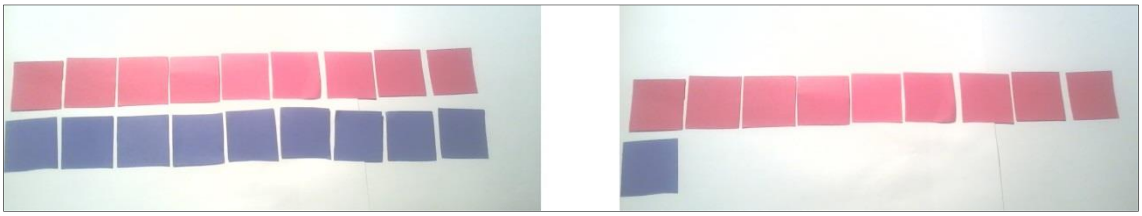
Fonte: acervo do autor

Similarmente, para calcular $3 \times (-3)$, deve-se colocar no Ábaco 3 vezes 3 contas vermelhas, tendo-se como resultado 9 contas vermelhas, ou seja, -9.

Quando o primeiro fator é negativo, deve-se recorrer à ação de *colocar zero*, para depois retirar as contas solicitadas. Por exemplo, $(-2) \times 4$, indica que deve-se retirar 2 vezes

4 contas azuis. Assim, após *colocar zero* no Ábaco, como na primeira parte da figura 17, e realizar a ação solicitada (retirar 2 vezes 4 quadrados azuis), tem-se indicadas 8 contas vermelhas, resultando o cálculo em -8.

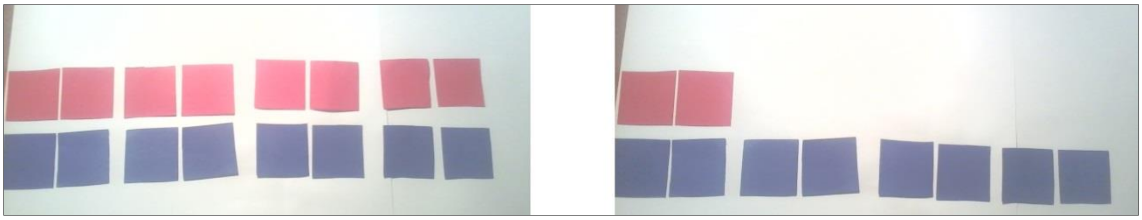
Figura 17 – Calculando $(-2) \times 4$



Fonte: acervo do autor

Da mesma maneira, para calcular $(-2) \times (-3)$, deve-se retirar 2 vezes 3 contas vermelhas. Verifica-se, então, que ficarão indicadas no Ábaco 6 contas azuis, portanto o resultado será +6.

Figura 18 – Calculando $(-2) \times (-3)$



Fonte: acervo do autor

4.2 NÚMEROS INTEIROS

Nesta seção, serão estudados alguns resultados sobre Números Inteiros, visando fundamentar as associações que serão feitas com o Ábaco. Inicialmente, por simplicidade, denota-se que o conjunto $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$ é o conjunto dos Números Inteiros.

Definição 1. *No conjunto $\mathbb{Z}$ estão definidas as operações de soma e produto:*

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Teorema 2. *O conjunto $\mathbb{Z}$, com a soma e multiplicação usual, é um Domínio de*

Integridade (anel com unidade, comutativo e sem divisores de zero).

Assim, para qualquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, valem as seguintes propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma).
2. $\exists 0$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (existência do elemento neutro).
3. $\forall x \in \mathbb{Z}$, existe um único $y \in \mathbb{Z}$, denotado por $y = -x$, tal que $x + y = y + x = 0$ (existência de inverso aditivo de cada elemento em $\mathbb{Z}$).
4. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma).
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade do produto).
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade do produto em relação à soma).
7. $\exists 1, 0 \neq 1$, tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$ (existência de unidade em $\mathbb{Z}$)
8. $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \cdot y = y \cdot x$ (comutatividade da multiplicação)
9. $x, y \in \mathbb{Z}, x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Proposição 3. (Lei do cancelamento da adição): $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

Demonstração. $a = a + 0 = a + \big(c + (-c)\big)$, que, pela associatividade, é igual a $(a + c) + (-c)$. Por hipótese, $a + c = b + c$. Assim $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c) =$ $= b + \big(c + (-c)\big) = b$.

Proposição 4. $0 \cdot x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}. 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Mas $0 \cdot x = 0 + 0 \cdot x$. Assim, $0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Assim, pela proposição 3, segue que $0 = 0 \cdot x$.

Proposição 5. $(-1) \cdot x = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{Z}$. Segue que $0 = 0 \cdot x = \big(1 + (-1)\big) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x$. Disso, $0 = x + (-1) \cdot x$, que implica que $-x = (-1) \cdot x$.

Proposição 6. $(-1) \cdot (-1) = 1$

Demonstração. Da proposição 5, tomando $x = -1$, temos que $(-1) \cdot (-1) = -(-1)$. Mas $1 + (-1) = 0$, pela definição de simétrico. Pela comutatividade, $(-1) + 1 = 0$ $(*)$. Como $-(-1)$ é o simétrico de -1, ou seja, é a única solução de $(-1) + x = 0$, segue, por $(*)$, que $x = 1$.

Proposição 7. $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$

Demonstração. $-(a \cdot b)$ é o simétrico de $a \cdot b$, ou seja, é a única solução de $a \cdot b + x = 0$. Mas $a \cdot b + (-a) \cdot b = \big(a + (-a)\big) \cdot b = 0 \cdot b = 0$. Similarmente, temos $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b) = a \cdot 0 = 0$. Da unicidade do simétrico, segue o resultado.

Definição 8. (Subtração de Números Inteiros): *Seja* $x, y \in \mathbb{Z}$*. Chamamos de diferença entre* x *e* y *o elemento em* $\mathbb{Z}$ *definido por* $x - y = x + (-y)$.

Observação: A operação de subtração não é associativa, não é comutativa e não admite elemento neutro.

Proposição 9. (Distributividade na subtração): $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, *segue que* $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ *e* $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Demonstração. Pela definição, $b - c = b + (-c)$. Disso, $a \cdot (b - c) = a \cdot \big(b + (-c)\big) = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b + \big(-(a \cdot c)\big) = a \cdot b - a \cdot c$.

Similarmente, $\big(a + (-b)\big) \cdot c = a \cdot c + (-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

Proposição 10. (Lei do cancelamento da multiplicação): $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$, $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b, \forall c \neq 0 \in \mathbb{Z}$

Demonstração. Se $a \cdot c = b \cdot c$, então $a \cdot c - b \cdot c = 0$. Disso, $(a - b) \cdot c = 0$. Como $c \neq 0$, segue que só pode-se ter $a - b = 0$. Então $a = b$.

Teorema 11. (Princípio da boa ordenação): *Todo subconjunto não vazio S de* $\mathbb{N}$ *de elementos não negativos possui um primeiro elemento, isto é,* $\exists x_0 \in S$ *tal que* $x_0 \leq x, \forall x \in S$.

Disso, tem-se que em $\mathbb{Z}$ está definida uma relação de ordem, denotada por $a > b$, ou $b < a$, que significa que $a - b \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. De outra forma, $a > b$ implica $\exists c > 0$ tal que $a = b + c$.

Com isso, pode-se dividir o conjunto $\mathbb{Z}$ em 3 partes disjuntas:

- $\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, conjunto dos *inteiros positivos*.
- $\mathbb{Z}^{-} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$, conjunto dos *inteiros negativos*.
- $\{0\}$.

4.3 MATEMÁTICA NO ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

O objetivo dessa seção é fazer associações entre as propriedades dos Números Inteiros e os procedimentos do Ábaco, de forma a justificar e verificar os processos envolvidos. Como observação, é destacado que optou-se fazer tais associações mesmo em casos similares.

Cada conta do Ábaco representa uma unidade. Com isso, define-se que uma conta azul é nossa unidade 1 (em $\mathbb{Z}$). Portanto, a conta vermelha é o inverso aditivo da conta azul. Disso, ao serem movimentadas m contas azuis, está sendo operado, algebricamente, com $m \cdot 1$; com n contas vermelhas, segue que tem-se $n \cdot (-1)$, com m, n inteiros não-negativos. Assim, para ser mantido o objetivo das associações, produtos como $m \cdot 1$ serão indicados, em vez de simplesmente m, até o final de cada caso.

4.3.1 Adição

A operação de soma indica o ato de, a partir de uma quantidade inicial de contas (primeira parcela), *colocar* contas (conforme a segunda parcela) no Ábaco. Quando coloca-se contas azuis e vermelhas, para obter o resultado é necessário *parear* uma conta de cada cor. Assim, com x, y números inteiros não-negativos, tem-se os seguintes casos na soma com o Ábaco dos Números Inteiros:

Caso 1.1: $x + y$.

No Ábaco, parte-se de *x* contas azuis, e procede-se a ação de *colocar y* contas azuis.

Algebricamente, $x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1 = (x + y) \cdot 1$, o que resulta em $x + y$ contas azuis.

Caso 1.2: $-x + (-y)$.

No Ábaco, parte-se de *x* contas vermelhas, e, então, *colocar y* contas vermelhas.

Algebricamente, $-x + (-y) = x \cdot (-1) + y \cdot (-1) = (x + y) \cdot (-1)$, o que resulta em $x + y$ contas vermelhas.

Caso 1.3: $x + (-y)$, supondo que $x \geq y$.

No Ábaco, de x contas azuis, *colocar* y contas vermelhas. Nesse caso, deve-se *parear* uma conta azul com uma conta vermelha.

Algebricamente, $x + (-y) = x \cdot 1 + y \cdot (-1) = (y + z) \cdot 1 + y \cdot (-1) = = y \cdot 1 + z \cdot 1 + y \cdot (-1) = y \cdot 1 + y \cdot (-1) + z \cdot 1 = z \cdot 1$, pois $x \geq y$ garante que $\exists z \geq 0$

tal que $x = y + z$. Portanto, pareando y contas de cada cor, sobram z contas azuis.

Caso 1.4: $x + (-y)$, supondo que $x < y$.

No Ábaco, inicialmente tem-se x contas azuis, e, após, *colocar* y contas vermelhas. Deve-se, também, *parear* uma conta azul com uma vermelha.

Algebricamente: Como $y > x, \exists z > 0$ tal que $y = x + z$. Assim, $x + (-y) =$ $= x \cdot 1 + y \cdot (-1) = x \cdot 1 + (x + z) \cdot (-1) = x \cdot 1 + x \cdot (-1) + z \cdot (-1) = z \cdot (-1)$. São pareados x contas de cada cor, e, assim, temos que sobram z contas vermelhas.

Caso 1.5: $-x + y$, supondo que $x > y$.

No Ábaco, inicialmente tem-se x contas vermelhas, e, após, *colocar* y contas azuis. Disso, deve-se *parear* uma conta azul com uma vermelha.

Algebricamente, $se\ x > y, \exists z > 0$ tal que $x = y + z$. Assim, segue que
$x \cdot (-1) + y \cdot 1 = (y + z) \cdot (-1) + y \cdot 1 = y \cdot (-1) + z \cdot (-1) + y \cdot 1 = z \cdot (-1)$. Assim, pareando y contas de cada cor, sobram z contas vermelhas.

Caso 1.6: $-x + y$, supondo que $x \leq y$.

No Ábaco, de forma similar ao caso 1.5, inicialmente tem-se x contas vermelhas, e, então, *colocar* y contas azuis. Após, *parear* uma conta azul com uma vermelha.

Algebricamente, $x \leq y$ implica que $\exists z \geq 0$ tal que $y = x + z$. Disso, $-x + y = x \cdot (-1) + y \cdot 1 = x \cdot (-1) + (x + z) \cdot 1 = x \cdot (-1) + x \cdot 1 + z \cdot 1 = z \cdot 1$. Dessa forma, pareando y contas de cada cor, sobram z contas azuis.

4.3.2 Subtração

Se a operação de somar estava indicando a ordem de colocar contas no Ábaco, a operação de subtrair indica a ação de *retirar* contas. Eventualmente, ocorrem casos em que não há quantidade suficiente de contas para serem retiradas. Nesse caso, deve-se colocar uma conta de cada cor no Ábaco. Se ainda for insuficiente, segue-se repetindo até que seja suficiente. Essa ação é chamada de *somar zero*. De fato, colocar n contas de cada cor no Ábaco significa a operação $n \cdot 1 + n \cdot (-1) = n \cdot (1 + (-1)) = n \cdot (1 - 1) = 0$. Como 0 é o elemento neutro da adição, a ação *somar zero* não altera o resultado. Observa-se também que é um algoritmo com finitos passos, visto que, caso seja solicitado que retire-se k peças, então acrescentar k peças de cada cor é suficiente. Mais que isso, em alguns casos, se a for a diferença entre a quantidade de peças que temos inicialmente e a quantidade pedida para ser retirada, então basta acrescentar a contas de cada cor.

Com x, y números inteiros não-negativos, tem-se os seguintes casos na subtração com o Ábaco dos Números Inteiros:

Caso 2.1: $x - y$, com $x \geq y$.

No Ábaco, de x contas azuis, *retirar* y contas azuis.

Algebricamente, como $x \geq y, \exists z \geq 0$ tal que $x = y + z$. De outra forma, $z = x - y$. $x - y = x \cdot 1 - y \cdot 1 = (y + z) \cdot 1 - y \cdot 1 = y \cdot 1 + z \cdot 1 - y \cdot 1 = z \cdot 1$. Assim, o resultado é $z = x - y$, ou seja, a quantidade restante de contas azuis.

Caso 2.2: $-x - (-y)$, com $x \geq y$.

No Ábaco, de x contas vermelhas, *retirar* y contas vermelhas.

Algebricamente, com $x \geq y$, tem-se que $\exists z \geq 0$ tal que $x = y + z$. Dessa forma, $x \cdot (-1) - y \cdot (-1) = (y + z) \cdot (-1) - y \cdot (-1) = y \cdot (-1) + z \cdot (-1) - y \cdot (-1) =$
$= z \cdot (-1)$. Disso, o resultado é a quantidade z de contas vermelhas.

Caso 2.3: $x - y$, com $x \leq y$.

No Ábaco, de x contas azuis, *retirar* y contas azuis. Para isso, deve-se *somar zero.*

Algebricamente, Temos $y = x + z$, com $z \geq 0$. Assim, $x - y = x \cdot 1 - y \cdot 1 =$
$= x \cdot 1 - y \cdot 1 + 0 = x \cdot 1 - y \cdot 1 + z \cdot 1 + z \cdot (-1) = (x \cdot 1 + z \cdot 1) + z \cdot (-1) - y \cdot 1 =$
$= y \cdot 1 + z \cdot (-1) - y \cdot 1 = z \cdot (-1)$. Assim, o resultado é o número excedente de contas vermelhas.

Caso 2.4: $-x - (-y)$, com $x \leq y$.

No Ábaco, de x contas vermelhas, *retirar* y contas vermelhas. Para isso, deve-se *somar zero.*

Algebricamente, tem-se $0 = z \cdot 1 + z \cdot (-1)$, e $y = x + z$, com $z \geq 0$. Assim,
$= x \cdot (-1) - y \cdot (-1) = x \cdot (-1) - y \cdot (-1) + 0 = x \cdot (-1) - y \cdot (-1) + z \cdot 1 + z \cdot (-1) =$
$= \big(x \cdot (-1) + z \cdot (-1)\big) + z \cdot 1 - y \cdot 1 = \big((x + z) \cdot (-1)\big) + z \cdot 1 - y \cdot 1 =$
$= y \cdot (-1) + z \cdot 1 - y \cdot (-1) = z \cdot 1$. Portanto, o resultado é a quantidade restante z de contas azuis.

Caso 2.5: $x-(-y)$.

No Ábaco, de x contas azuis, *retirar* y contas vermelhas. Como não há contas vermelhas inicialmente, deve-se *somar zero* para obtê-las.

Algebricamente, $x-(-y)=x\cdot 1-y\cdot(-1)=x\cdot 1-y\cdot(-1)+0=$ $=x\cdot 1-y\cdot(-1)+y\cdot 1+y\cdot(-1)=x\cdot 1+y\cdot 1=(x+y)\cdot 1$. Assim, tem-se como resultado as $x+y$ contas azuis excedentes.

Caso 2.6: $-x-y$.

No Ábaco, inicia-se com x contas vermelhas e, disso, *retirar* y contas azuis. Para isso, deve-se *somar zero*.

Algebricamente, $-x-y=x\cdot(-1)-y\cdot 1=x\cdot(-1)-y\cdot 1+0=$ $=x\cdot(-1)-y\cdot 1+y\cdot 1+y\cdot(-1)=x\cdot(-1)+\ y\cdot(-1)=(x+y)\cdot(-1)$. Nesse caso, tem-se como resultado $x+y$ contas vermelhas.

4.3.3 Multiplicação

Para a multiplicação, deve-se fazer sucessivas vezes as ações de *colocar* ou *retirar* contas. Para retirar contas, é necessário, inicialmente, o ato de *colocar zero*, onde colocam-se contas de cada cor em igual quantidade, e de maneira suficiente para então proceder a ação.

Tem-se os seguintes casos, sendo *x*, *y* números inteiros não-negativos:

Caso 3.1: $x\cdot y$.

No Ábaco, colocar x vezes y contas azuis.

Algebricamente, $x\cdot y=\underbrace{y\cdot 1+y\cdot 1+\cdots+y\cdot 1}_{x\text{ parcelas}}=x\cdot(y\cdot 1)=(x\cdot y)\cdot 1$. Com isso, tem-se como resultado $x\cdot y$ contas azuis.

Caso 3.2: $x\cdot(-y)$.

No Ábaco, colocar x vezes y contas vermelhas.

Algebricamente, $x\cdot(-y)=\underbrace{y\cdot(-1)+y\cdot(-1)+\cdots+y\cdot(-1)}_{x\text{ parcelas}}=x\cdot\big(y\cdot(-1)\big)=$ $=x\cdot y\cdot(-1)=(x\cdot y)\cdot(-1)$. Disso, o resultado é a quantidade $x\cdot y$ de contas vermelhas.

Caso 3.3: $(-x)\cdot y$.

No Ábaco, Colocar *zero*. *Retirar* x vezes y contas azuis.

Algebricamente, $0 - \underbrace{y \cdot 1 - y \cdot 1 - \cdots - y \cdot 1}_{\text{x parcelas}} = 0 - \underbrace{(y \cdot 1 + y \cdot 1 + \cdots + y \cdot 1)}_{\text{x parcelas}} =$ $0 - x \cdot y \cdot 1 = x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot (-1) - x \cdot y \cdot 1 = x \cdot y \cdot (-1) = (x \cdot y) \cdot (-1)$. Assim, tem-se como resultado $x \cdot y$ contas vermelhas.

Caso 3.4: $(-x) \cdot (-y)$.

No Ábaco, Colocar *zero*. Retirar *x* vezes *y* contas vermelhas.

Algebricamente, $0 - \underbrace{y \cdot (-1) - y \cdot (-1) - \cdots - y \cdot (-1)}_{\text{x parcelas}} =$ $0 - \underbrace{(y \cdot (-1) + y \cdot (-1) + \cdots + y \cdot (-1)}_{\text{x parcelas}}] = 0 - x \cdot y \cdot (-1) =$ $= x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot (-1) - x \cdot y \cdot (-1) = x \cdot y \cdot 1 = (x \cdot y) \cdot 1$. Portanto, há $x \cdot y$ contas azuis indicadas no Ábaco.

5 PROPOSTA DIDÁTICA COM O ÁBACO DOS NÚMEROS INTEIROS

5.1 DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

O objetivo inicial da prática foi fazer com que os alunos operassem o ábaco dos números inteiros, de forma a se familiarizarem com o instrumento. Disso, teve-se como foco a compreensão e operacionalização da multiplicação de números inteiros no ábaco. A partir disso, objetivou-se que os alunos fizessem cálculos do produto de números inteiros, sem o ábaco.

Para a realização das atividades, foi escolhido o modelo de ábaco na forma de fichas (quadrados) de duas cores (azul para representar os números positivos, e vermelho para os números negativos). Essa escolha foi feita fundamentalmente por motivos econômicos, pois, para sua confecção, é necessária apenas cartolina (ou qualquer outro papel firme e colorido).

As atividades foram planejadas para 5 períodos de 45 minutos cada, sendo 1 período para a familiarização com o ábaco, através de atividades de soma e subtração com o ábaco, 2 períodos para as atividades de multiplicação com o ábaco, 1 período para atividades de multiplicação sem o ábaco, além de 1 período de avaliação (teste). Além do teste, a avaliação das atividades ocorreu através da participação dos alunos nas discussões para o entendimento da atividade proposta.

5.1.1 Aula 1: Utilizando o Ábaco dos Números Inteiros: Adição e Subtração

Para essa aula, programou-se o ensino do manuseio do Ábaco para Adição e Subtração de Números Inteiros.

Na Adição de Números Inteiros, utilizando o Ábaco, será indicado que o sinal de “+” indica, no ábaco, a operação de **colocar** fichas.

A adição entre **dois números positivos** deve ocorrer da seguinte forma:

Exemplo: Para a soma $2 + 3$, inicialmente os alunos devem pegar 2 fichas azuis, e então, outras 3 fichas azuis. Assim, percebe-se que estão com 5 fichas azuis, então $2 + 3 = 5$.

Para adição de **dois números negativos**, utiliza-se uma explicação análoga:

Exemplo: Para a soma $-3 + (-4)$, os alunos devem pegar três fichas vermelhas, e então, outras 4 fichas, também vermelhas. Com 7 fichas vermelhas, tem-se que $-3 + (-4) = -7$.

Para a soma de **números positivos com números negativos**, segue que:

Exemplo: $4 + (-5)$. Os alunos pegam, inicialmente, 4 fichas azuis e 5 fichas vermelhas. Após isso, devem juntar 1 ficha vermelha com 1 ficha azul, e desconsiderá-las. O resultado será a sobra de 1 ficha vermelha. Assim, $4 + (-5) = -1$. Então, será perguntado aos alunos porque uma ficha vermelha e uma ficha azul se cancelam. Como uma ficha azul representa +1, e uma vermelha representa -1, $1 + (-1) = 0$.

Exemplo: $-3 + 5$. Ocorre de maneira semelhante, com resultado de sobra de 2 fichas azuis, portanto $-3 + 5 = 2$.

Para a subtração de Números Inteiros, será falado que o sinal de "$-$", no ábaco, indica a operação de **retirar** fichas.

Na subtração de números positivos (ou negativos), com o primeiro número ***maior*** que o segundo:

Exemplo: $7 - 3$. Para esse caso, inicialmente são pegadas 7 fichas azuis. Como é subtração, então devem ser tiradas 3 fichas, restando 4 fichas, assim $7 - 3 = 4$.

Exemplo: $-6 - (-2)$. Nessa situação, pede-se que, de 6 fichas vermelhas, sejam **retiradas** duas. Assim, restam 4 fichas vermelhas. Ou seja, $-6 - (-2) = -4$.

Subtração de números positivos (ou negativos), com o primeiro número ***menor*** que o segundo:

Exemplo: $3 - 5$. Inicialmente deve ser notado que temos apenas 3 fichas azuis. Como tirar, então, 5 fichas do Ábaco? Pode-se perguntar aos alunos como proceder, para estimular a participação.

Para o exemplo anterior, a situação inicial é de possuir-se 3 fichas azuis. Então, será falado que há outras formas de representar essa situação. Nisso, pergunta-se o que ocorre se for acrescentado uma ficha de cada cor. Deve-se notar que a situação não muda, ou seja, ainda tem-se representado no Ábaco o +3. Pode-se repetir o acréscimo de uma ficha de cada cor diversas vezes, sem alterar o número representado. No caso, acrescentando-se 2 fichas de cada cor, tem-se 5 fichas azuis e 2 fichas vermelhas. Mas agora há 5 fichas azuis para serem retiradas. Pergunta-se, então, "o que sobrará?". Duas fichas vermelhas! Assim, $3 - 5 = -2$.

Pode-se notar que está sendo feito o inverso do que era acontecia na adição. Antes, após serem acrescentadas as fichas solicitadas, quando haviam fichas de duas cores distintas, no final "elas saíam de cena" aos pares. Agora, para podermos tirar "de onde não tem", primeiro acrescenta-se pares de fichas, para então serem feitas as subtrações pedidas. Esse processo é chamado de *somar zeros*.

De maneira semelhante será resolvido o exemplo abaixo:

$-2-(-4)$. Completa-se no Ábaco com *zeros* até obter-se 4 fichas vermelhas. Ao retirá-las, sobram 2 fichas azuis. Assim $-2-(-4)=+2$.

E como fica subtração de inteiros com ***cores diferentes***?

Exemplo: $4-(-3)$. Com as fichas, a situação é a seguinte: possui-se quatro fichas azuis, e é solicitado que sejam retiradas três fichas vermelhas. Como resolver isso? A estratégia de somar zeros pode ser utilizada também?

De fato, como têm-se inicialmente quatro fichas azuis, ao serem acrescentadas três fichas vermelhas e três fichas azuis, o Ábaco ainda indica +4. Mas agora pode-se retirar três fichas vermelhas. Assim, restarão sete fichas azuis, e, portanto, $4-(-3)=+7$.

Exemplo: $-2-3$. Inicialmente, o Ábaco tem duas fichas vermelhas. Acrescenta-se 3 fichas azuis e três fichas vermelhas. Agora, são retiradas as três fichas azuis, conforme a operação solicita, ficando com 5 fichas vermelhas. $-2-3=-5$.

Após, os alunos devem fazer alguns exercícios, visando tirar dúvidas do manuseio do Ábaco, e verificar o que foi aprendido até o momento.

5.1.2 Aula 2: Utilizando o Ábaco dos Números Inteiros: Multiplicação

Para essa aula, programou-se o ensino do manuseio do Ábaco para Multiplicação de Números Inteiros.

A multiplicação no Ábaco dos Números Inteiros divide-se em dois casos: com o primeiro fator positivo ou com o primeiro fator negativo.

Quando o primeiro fator é positivo:

Exemplo:

$2\times 3=$

Deve ser entendido da seguinte forma:

$+2\ \times\ 3$

O sinal de "+" do primeiro fator indica que devemos **colocar** fichas. No caso do exemplo, deve-se colocar duas vezes três fichas azuis. Assim, serão colocadas 6 fichas azuis, e o resultado fica +6.

Quando o primeiro fator é negativo:

Exemplo:

$(-4)\ \times\ 2$ =

Agora, tem-se o sinal de menos na frente, indicando a ideia de **retirar fichas**.

$-4 \times 2 =$

Assim, retiram-se quatro vezes duas fichas azuis. Mas, retirar de onde?

Primeiro deve-se ter fichas para retirar. Para isso, coloca-se, no Ábaco, fichas azuis e vermelhas, em mesma quantidade. Então, de acordo com a operação, devem-se retirar oito fichas azuis, ficando, assim, oito fichas vermelhas *sobrando*. Então o resultado será -8.

Após, os alunos devem fazer alguns exercícios, visando tirar dúvidas do manuseio do Ábaco, e verificar o que foi aprendido até o momento.

5.1.3 Aula 3: Atividades com o Ábaco

Para essa aula, foram programados alguns exercícios utilizando o Ábaco. Durante a execução dessa atividade, as dúvidas que surgirem podem ser discutidas individualmente na classe do aluno, ou de maneira geral, no quadro, para a turma toda.

5.1.4 Aula 4: Avaliação

Para esta aula foi planejada uma avaliação, no formato de teste, visando verificar de que maneira o que foi estudado até o momento foi apropriado pelos estudantes.

Figura 19 - Teste

1) Resolva as operações abaixo, utilizando o ábaco dos números inteiros:

a) (+3) + (+4) =

b) (-5) + (-2) =

c) (-4) – (-1) =

d) (+2) – (-5) =

2) Faça as multiplicações no ábaco dos inteiros, e após represente o resultado:

a) (+2) x (+4) =

b) (+3) x (-3) =

c) (-5) x (+2) =

d) (-2) x (-7) =

Fonte: Acervo do Autor

5.1.5 Aula 5: Multiplicação de Números Inteiros sem o uso do Ábaco dos Números Inteiros

Para esta aula, foi programado a generalização da multiplicação de Números Inteiros. Aqui já cabe perguntar aos alunos: Quando uma **multiplicação** resulta em um número positivo, e quando resulta em um número negativo? Pode-se fazer um comparativo do que acontece quando colocamos fichas azuis ou vermelhas, em relação ao que acontece quando retiramos essas fichas.

Pergunta-se o que acontece, dentro da multiplicação usando o Ábaco, quando é multiplicado um número positivo por outro positivo. Significa que estão sendo colocadas fichas azuis. No Ábaco, haverá apenas fichas azuis, e, portanto, o resultado é um número positivo. Então multiplicar positivo com positivo resulta positivo.

Quando multiplica-se um número positivo por um número negativo, estão sendo colocadas fichas vermelhas. No Ábaco, haverá apenas fichas vermelhas, tendo como resultado um número negativo. Então multiplicar positivo com negativo resulta negativo.

Quando tem-se a multiplicação de um número negativo por um número positivo, retira-se fichas azuis, tendo indicado no ábaco as fichas vermelhas remanescentes. Assim, multiplicar negativo com positivo resulta negativo.

Finalmente, ao multiplicar um número negativo por um número negativo, retira-se fichas vermelhas, e assim, tem-se que as fichas azuis ficam indicadas. Disso, multiplicar negativo com negativo resulta positivo.

Após o comparativo, pode-se partir para uma outra generalização. Mostrar com exemplos que, quando os sinais são iguais, a multiplicação sempre resulta em número positivo, e, que quando são diferentes, resulta em um número negativo.

5.2 RELATO DA PRÁTICA

A prática foi realizada em uma turma do primeiro ano do terceiro ciclo, equivalente ao 7° ano do ensino fundamental da Escola Municipal Afonso Guerreiro Lima, localizada no bairro Lomba do Pinheiro em Porto Alegre, sob supervisão do professor de matemática titular. A escolha desta escola deu-se pelo conhecimento da mesma desde a prática realizada na disciplina de Estágio em Educação Matemática I, juntamente com o professor regente que cedeu uma turma para este trabalho. Cabe ressaltar que os alunos dessa turma já haviam trabalhado com números inteiros, tendo sido vistas as operações de soma e subtração.

Inicialmente, as atividades foram planejadas para 5 períodos de 45 minutos, contudo, nessa escola, às quintas-feiras, o período é reduzido (30 minutos), o que resultou em uma aula de um período de tempo reduzido. Apesar disso, a prática não foi prejudicada.

5.2.1 Primeiro Período

No primeiro dia, 7 de outubro de 2015, uma quarta-feira, a aula foi de dois períodos, sendo um a partir das 9 horas (terceiro período do dia), e outro a partir das 10 horas, logo após o intervalo. Inicialmente, foi feita uma apresentação pelo professor para a turma. Foi Explicado que ocorreriam algumas atividades, necessárias para o trabalho de conclusão de curso. Para introduzir o assunto, foi perguntado aos alunos se eles já estavam trabalhando com números inteiros. Eles respondem afirmativamente. Foi dito então que seria continuado o trabalho com Números Inteiros, mas agora com o Ábaco dos Números Inteiros. Perguntou-se então se eles sabiam o que é um ábaco. Alguns alunos responderam que sim, contudo dava para sentir receio na resposta. Foi Falado, então, que ábaco é um instrumento utilizado para fazer contas, que foi inventado há muito tempo, e muito utilizado por povos como romanos, gregos, chineses, etc. A forma atual do ábaco, uma moldura com as “pedrinhas” presas em arames, também é conhecida como *soroban*, e foi criada pelos japoneses. A forma antiga era um tabuleiro, uma mesa, com areia, onde faziam-se riscos, e nesses riscos organizavam as pedras para fazer os cálculos.

Falou-se para os alunos que seria utilizada uma adaptação desse ábaco, só que, em vez de pedras, utilizariam-se os quadrados de papel. Como o trabalho é com números inteiros, os quadrados são de cores distintas: quadrados azuis para números positivos, e vermelhos para números negativos. Foi pedido, então, ajuda de alguns alunos para distribuir o material para a turma, onde prontamente alguns se disponibilizaram.

Após, foi dito que seria mostrado como utilizar o ábaco para fazer contas com Números Inteiros.

Foi escrito no quadro "Adição de Números Inteiros", e, logo abaixo:

$$2 + 3 =$$

Foi indicado, então, que começa-se a operação com +2, portanto, inicia-se colocando dois quadrados azuis no nosso ábaco. Desenhou-se os quadrados no quadro usando giz azul, e foi pedido aos alunos que pegassem dois quadrados azuis. A seguir, solicitou-se para observarem que a conta é de somar, o que significa, portanto, que quer-se adicionar quadrados no ábaco. Nesse caso, 3 pedras azuis, pois soma-se +3. Então foi desenhado logo abaixo outros 3 quadrados, também em giz azul. Observou-se que haviam 5 quadrados azuis, então a resposta para a conta seria +5.

Prosseguindo, foi dito que também pode-se somar números negativos. Foi escrito no quadro:

$$(-3) + (-4) =$$

Foi solicitado, então, para observarem que inicia-se com *menos três*. Perguntou-se aos alunos como fazer a representação no ábaco. Eles responderam com três quadrados vermelhos. Desenhou-se no quadro os quadrados, e foi pedido para eles separarem a quantidade indicada. Como é uma soma, então segue-se colocando quadrados, 4 quadrados vermelhos, no caso. Desenhou-se os quadrados no quadro, e foi pedido para os alunos que indicassem quantos quadrados tínhamos. Eles responderam: *sete*. Perguntou-se: De que cor? Eles responderam: vermelho. Então foi falado que nossa resposta é *menos sete*.

Na sequência, foi dito que também pode-se colocar no ábaco quadrados vermelhos e azuis, e que isso seria a indicação de uma soma de números positivos com negativos. Foi escrito no quadro:

$$(+1) + (-4) =$$

Então foi perguntado como fazer essa soma no ábaco. Foi dito que inicialmente coloca-se 1 quadrado azul, e perguntou-se: e depois? Alguns alunos responderam: 4 quadrados vermelhos. Então, afirmou-se que, para ser obtido o resultado dessa conta, deve-se agrupar, sempre que possível, um quadrado azul com um quadrado vermelho. Após isso, os quadrados que sobrassem indicam a resposta. No exemplo, agrupou-se 1 quadrado azul com 1 vermelho. Foi perguntado, então: o que sobrou? Eles responderam: 3 quadrados vermelhos.

Comentou-se que, até então, foi trabalhada a operação de soma. Partiu-se, assim, para a subtração no ábaco. Foi dito que, no ábaco, subtrair significa *retirar* quadrados. Foi escrito um exemplo no quadro:

$$(+4) - (+1) \ =$$

Foi perguntado para eles como começariam a conta. Alguns falaram que é com 4 quadrados azuis. Foi dito então que deveria-se retirar quadrados. Nesse caso, 1 quadrado azul. Foi falado que, o que sobrou, 3 quadrados azuis, é a resposta. Seguiu-se para o exemplo a seguir:

$$(-3) - (-2) \ =$$

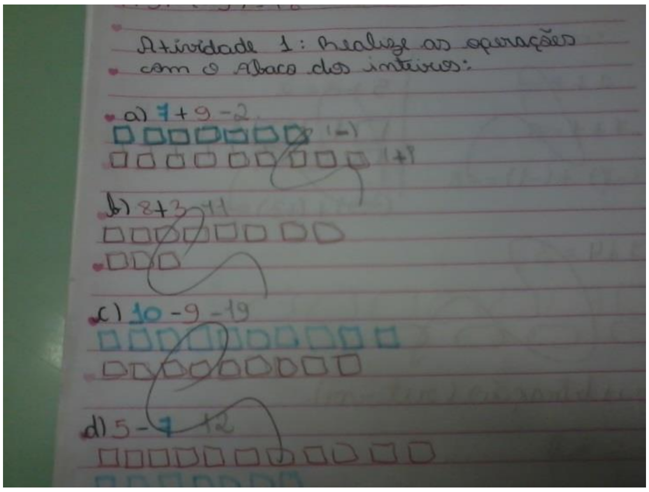
Começou-se colocando os 3 quadrados vermelhos, e foi perguntado o que deve-se fazer. Um aluno respondeu que tinha-se que retirar 2 quadrados. Foi perguntado o que sobrou, e eles responderam 1 quadrado vermelho. Então foi escrita a resposta: -1.

Nesse momento, avisou-se que o próximo exemplo exigiria atenção. Foi escrito no quadro:

$$(+2) - (-1) \ =$$

Observou-se que, inicialmente, tinha-se 2 quadrados azuis. Foi pedido que eles pegassem dois quadrados azuis do material. E, a seguir, quer-se tirar 1 quadrado vermelho. Foi perguntado, então, como seria feito para resolver, já que tem-se apenas quadrados azuis. Um aluno falou a resposta: +3 (eles já haviam visto soma e subtração de inteiros). Comentou-se, então, que deseja-se resolver utilizando o Ábaco. Seguiu-se falando que, para a resolução, seria utilizado um pequeno truque: como não havia quadrados vermelhos para serem retirados, então seriam colocados um quadrado vermelho e um azul no ábaco. Foi falado que pode-se fazer isso sempre que desejado, desde que fossem colocados quadrados em quantidades iguais para cada cor, de modo a não ser alterado o número final representado (elemento neutro). Nesse caso, observou-se que é suficiente colocar apenas um quadrado de cada cor. Foi pedido que pegassem um quadrado de cada cor. Com isso, pode-se retirar 1 quadrado vermelho, e assim, sobraram 3 quadrados azuis que, como o aluno havia observado, resulta +3. Perguntou-se se havia alguma dúvida, e ninguém respondeu. Passou-se então para a turma alguns exercícios, e esperou-se as dúvidas surgirem durante a resolução. O professor titular auxiliou passando de classe em classe conforme as (muitas) solicitações.

Figura 20 – Atividades em caderno de estudante



Fonte: Acervo do autor

Por conta do horário, foi deixada a correção geral para o próximo período, liberando os alunos para o intervalo.

5.2.2 Segundo Período

Iniciou-se o período com a correção geral da atividade, no quadro. A dúvida maior ficou na subtração, no como “acrescentar os quadrados”. Um aluno resolvia inicialmente sem o ábaco. Ele havia entendido bem as operações com os inteiros (sem o ábaco), e não achava interessante usar o ábaco, dizendo que já sabia resolver.

Prosseguiu-se para a multiplicação de Números Inteiros. Foi dito à turma que, como vinha-se fazendo, seria utilizado o Ábaco dos Números Inteiros. Mostrou-se então como seria feito, com um exemplo. Foi escrito no quadro:

$$(+2) \times (+3) =$$

Comentou-se que o sinal de “+”, à frente do número 2, indica que deve-se colocar quadrados no ábaco. No exemplo, pede-se para colocar 2 vezes 3 quadrados azuis. Foi pedido que os alunos pegassem primeiro 3 quadrados azuis, e depois outros 3, enquanto era feito o desenho representando no quadro. Contou-se os quadrados, e verificou-se que haviam 6 quadrados azuis, e portanto a resposta é +6.

Por outro lado, foi dito que o sinal de “–” significava retirar quadrados do ábaco. Escreveu-se o exemplo:

$$(-3) \times (+3) =$$

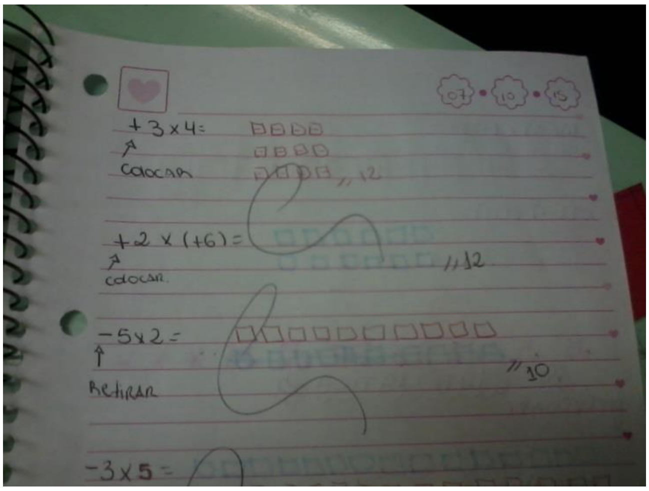
“Mas retirar de onde, se começamos com nada no ábaco?”, foi perguntado. Como ninguém respondeu, foi dito que, nesse caso, deve-se, inicialmente, colocar muitos quadrados do ábaco, em quantidades iguais de cada cor. Comentou-se que é a mesma ideia da subtração. Assim, tem-se quadrados para serem retirados. Nesse caso, deve-se retirar 3 vezes 3 quadrados azuis. Ficaram 9 quadrados vermelhos “sozinhos”, e, portanto, a resposta é -9. Seguiu-se com outro exemplo:

$$(-3) \times (-2) =$$

Perguntou-se como proceder nessa conta. Um aluno respondeu demonstrando algum receio: retirar quadrados? Foi confirmado que sim, e indicava-se no quadro os números enquanto era falado: retirar 3 vezes dois quadrados vermelhos. Foi falado que, da mesma forma, deve-se colocar muitos quadrados em quantidades iguais de cada cor, para ter-se de onde tirar. Foram retirados quadrados, dois a dois, e foi perguntado o que sobrou. Os alunos responderam: 6 quadrados azuis. A resposta é, então, +6.

Colocou-se então algumas atividades no quadro.

Figura 21 – Atividades em caderno de estudante



Fonte: Acervo do autor

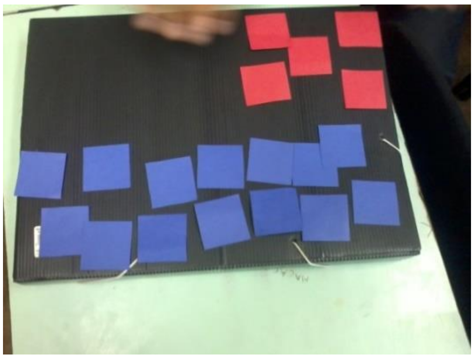
Conforme os alunos solicitavam, passou-se nas mesas para tirar dúvidas de como resolver os exercícios. No geral, a turma compreendeu o processo. Contudo, o professor titular acabou chamando a atenção de um grupo de alunos pelo excesso de conversa. Ele salientou que esses alunos também não estavam resolvendo as atividades. Após alguns minutos, foi feita a correção de cada questão no quadro. No final da correção, o sinal tocou, e então terminou-se as atividades do dia.

5.2.3 Terceiro período

Essa aula ocorreu na quinta-feira, dia 8 de outubro de 2015. Nessa escola, os períodos são reduzidos para 30 minutos às quintas. Apesar desse fato, e de o dia estar chuvoso, a presença dos alunos não foi prejudicada, tendo praticamente a mesma quantidade de alunos do dia anterior. Para essa aula, por sugestão do professor, foi feita uma atividade mais dinâmica. Foram colocadas algumas multiplicações no quadro, e pedido para os alunos resolverem. Contudo, para passarem para a questão *b*, por exemplo, deveriam mostrar a resolução da questão *a* no ábaco, e após a transcreverem no caderno.

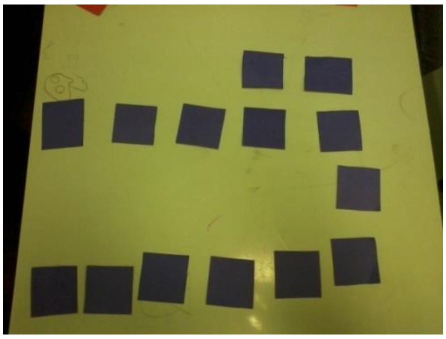
a) $(+2) \times (+7) =$
b) $(-3) \times (+5) =$
c) $(+3) \times (+4) =$
d) $(+3) \times (+5) =$
e) $(-5) \times (-2) =$
f) $(-7) \times (+2) =$

Figura 22 – Estudante resolvendo atividades utilizando o Ábaco



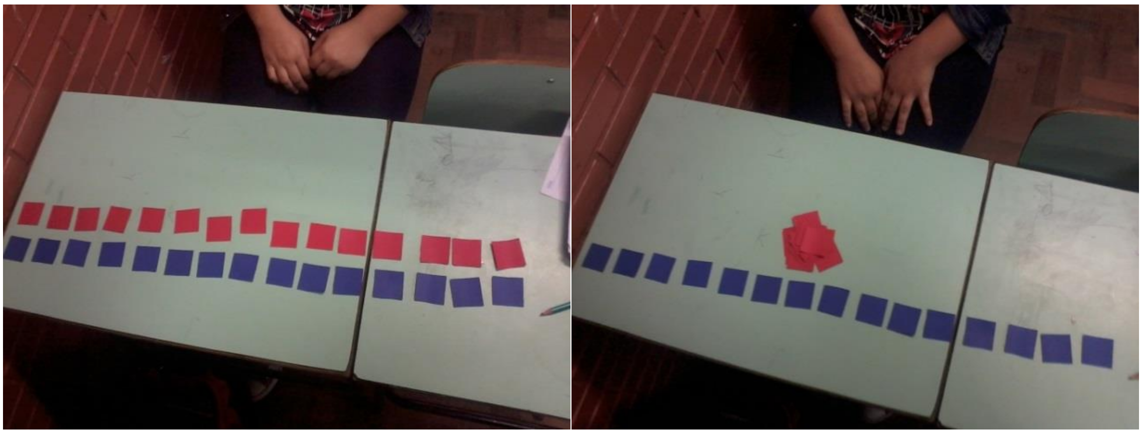
Fonte: Acervo do autor

Figura 23 - Estudante resolvendo atividades utilizando o Ábaco



Fonte: Acervo do autor

Figura 24 e 25 - Estudante resolvendo atividades utilizando o Ábaco



Fonte: Acervo do autor

A participação dos alunos foi massiva. A correria para atender a todos foi intensa, mas divertida. Um aluno, que o professor comentou depois que o mesmo era pouco participativo e conversava muito, pediu que fossem colocadas mais questões no quadro para ele resolver. Prontamente foram colocadas mais duas questões. E ele (e um bom grupo de alunos) as resolveu. Os demais alunos estavam em ritmo parecido, em geral. Isso fez com que o período, que era reduzido, desse a impressão de passar depressa, conforme comentários de alguns alunos.

5.2.4 Quarto período

Essa aula ocorreu no dia 14 de outubro de 2015, quarta-feira. A semana, até então, havia sido chuvosa, mas isso não representou redução na frequência dos alunos, como foi imaginado que pudesse ocorrer. Na verdade, na aula deste dia tinha uma aluna que não estava presente nas aulas anteriores.

Para esse período, foi programada uma avaliação individual, no formato de teste, conforme figura 19, com questões de soma, subtração e multiplicação utilizando o Ábaco dos Números Inteiros. A aluna que não estava presente anteriormente fez a avaliação junto com outra colega, visando fazer com que ela participasse. Todos entregaram a avaliação alguns minutos antes do final do período, e com isso o professor titular autorizou que os alunos fossem para o intervalo.

5.2.5 Quinto período

Após o retorno do intervalo, iniciou-se fazendo a seguinte pergunta aos alunos:

– Com o que fica-se, na multiplicação usando o ábaco, quando se colocam quadrados azuis?

Alguns alunos responderam que fica-se com quadrados azuis. Confirmou-se a resposta para os alunos, e foi perguntado o que tem-se, portanto, caso fossem colocados quadrados vermelhos. A turma respondeu: com quadrados vermelhos. Foi dito, então, que a conta do ábaco para colocar quadrados azuis é a da multiplicação de um número positivo com outro positivo, e a de colocar quadrados vermelhos é de multiplicar um número positivo com um negativo. E assim, as respostas são, respectivamente, positivas e negativas. Foi escrito no quadro, utilizando giz azul para escrever o símbolo “+”, e giz vermelho para o símbolo “-”:

$$(+) \times (+) = (+)$$

$$(+) \times (-) = (-)$$

Prosseguiu-se perguntando, então, o que aconteceria se fossem retirados quadrados azuis na multiplicação. Uma aluna respondeu que ficaríamos com quadrados vermelhos. Foi confirmada a resposta da aluna, e perguntado, por fim, o que aconteceria caso fossem retirados quadrados vermelhos. Uma boa parte da turma respondeu que fica-se com quadrados azuis. Assim, completou-se o que já estava escrito no quadro, falando-se que retirar quadrados azuis na multiplicação é fazer o produto de um número negativo com um número positivo, e retirar quadrados vermelhos é fazer o produto entre dois números negativos.

$$(-) \times (+) = (-)$$

$$(-) \times (-) = (+)$$

Então foi escrita uma conta no quadro, para exemplo:

$$(-2) \times (-4) =$$

Foi dito então que, se fosse fazer a conta no ábaco, estaria-se retirando quadrados vermelhos, então a resposta seria positiva. Como era pedido para retirar 2 vezes 4, então seriam retirados 8 quadrados vermelhos. Logo, sobrariam 8 quadrados azuis, e o resultado fica +8.

Observou-se, assim, que para resolução de uma multiplicação de inteiros, pode-se iniciar verificando qual o sinal do resultado, e então multiplicar normalmente os números envolvidos. Foi escrito no quadro alguns exercícios.

a) $(+5) \times (+4) =$
b) $(-3) \times (+6) =$
c) $(+4) \times (-6) =$
d) $(+7) \times (-3) =$

e) $(+6) \times (+2) =$

Foi solicitado que os alunos procurassem fazer as contas sem o uso do ábaco.Enquanto os alunos resolviam os exercícios, passou-se nas classes, para serem tiradas dúvidas conforme os alunos solicitavam. Em geral, observou-se que as dúvidas que surgiram foram relativas à multiplicação dos números, e não ao sinal em si, provavelmente justificado pelo fato de poderem olhar no quadro o que acontecia em cada situação. Por fim, após alguns minutos, foi feita a correção da atividade no quadro, com a turma.

5.3 ANÁLISE DA PRÁTICA

Na atividade inicial, buscou-se fazer uma contextualização do motivo pelo qual seria utilizado o Ábaco dos Números Inteiros para as atividades. Para isso, elementos de História da Matemática foram utilizados de modo a criar uma situação propícia para a discussão sobre números inteiros. Note-se, sendo ressaltado o já apontado nos PCN, em que uma das possibilidades é usar a História da Matemática como fonte de problemas. Aqui pode-se destacar, que, para a abordagem do tema, como sugere Miguel (1997), fez-se uso de "uma imitação do desenvolvimento de determinado tema, mas sem a sua contextualização histórica", já que, de fato, uma contextualização mais profunda demandaria tempo, o que poderia acabar mais complicando do que facilitando o processo.

Levanta-se por outro lado, que, conforme Miguel e Miorim (2004) ressaltam, o uso de História da Matemática não é motivador, já que, se fosse assim, o próprio ensino de História seria automotivador. A motivação, conforme Miguel (1997), pode não estar no fato de ser um problema, nem ser histórico, mas na relação entre o desafio e o estudante, e como esse desafio é percebido por ele. Assim, buscou-se formas distintas de abordar o problema, de forma a proporcionar percepções distintas, e assim "acertar o alvo", ou o maior número de alvos possíveis.

Isso ficou mais evidente no fato relatado no terceiro período, em que um aluno, conforme relato do professor regente da turma, tem dificuldades em participar das atividades e executar as tarefas, solicita que sejam colocados mais problemas para serem resolvidos no quadro. Esse aluno percebeu o exercício de forma positiva, dispondo-se a resolver e participar. Por outro lado, um aluno com facilidade em aprender não estava gostando muito de trabalhar com o ábaco, principalmente nas primeiras atividades, pois já havia aprendido o conteúdo, e preferia responder os exercícios diretamente. Nessa antítese de respostas em relação à motivação, fica reforçado que o professor deve procurar dispor de um amplo leque de opções de métodos e possibilidades de trabalhos em sala de aula.

Contudo, ampliar tais possibilidades exige disponibilidade de material para consulta e trabalho em sala de aula. Para a utilização do Ábaco, por exemplo, foi necessária a confecção dos quadrados coloridos, visto que não há nada semelhante no mercado, tampouco um Ábaco dos Números Inteiros na sua forma "original". Coelho (2005) chama atenção para esse fato também, sendo que ela mesma solicitou a fabricação das bases de madeira em uma marcenaria, as peças que representam as unidades positivas e negativas em um torneiro, e a pintura em uma mecânica de automóveis. Apesar disso, em vez de encarar a situação como uma barreira, pode-se aproveitar as oportunidades que surgem dela. Por exemplo, pode-se pedir aos alunos que fabriquem o próprio Ábaco, em alguma versão com material reciclado, ou os quadrados coloridos, como fez Oliveira (2011), que ressalta que "a utilização dos materiais concretos possibilita aos alunos estabelecerem relações das situações vivenciadas na manipulação desses materiais e abstração pela reflexão realizada com os conceitos estudados" (OLIVEIRA, 2011).

O ensino de operações de Números Inteiros, em particular a multiplicação, é normalmente a partir de "regras". A professora entrevistada por Coelho (2005), por exemplo, refere-se à regra de sinais da multiplicação como "tábua da salvação", e comenta também que, em particular quando multiplica-se dois números negativos, os alunos apenas "vão aceitando a ideia, embora, em termos concretos, não devem ter nenhuma ideia". Com o Ábaco dos Inteiros, entretanto, essas "regras" são construídas e percebidas a partir de sua manipulação. Coelho (2005) também constata que, após sua proposta didática, os estudantes, em grande parte, souberam justificar porquê "menos multiplicando menos dá mais". Disso, o Ábaco como elemento histórico pode ser visto como instrumento para promover a aprendizagem compreensiva da matemática, como ressaltou Miguel e Miorim (2004), onde pode-se discutir um "porquê lógico", e "amarrar" essas explicações (JONES, 1969, apud MIGUEL, 1997). Nessa mesma direção, desmistificam-se tais regras. A "tábua da salvação" deixa de ser apresentada como algo pronto, passando a ser algo construído. Assim, reforça-se o argumento de história como um meio para desalienação do ensino de matemática, podendo-se perceber a matemática como criação humana (MIGUEL e MIORIM, 2004).

Chamando a atenção para os vínculos que podem ter sido feitos entre a produção sócio-histórica do conhecimento, e a sua apropriação no presente, considero que, de natureza ética, observou-se o aumento da participação de alguns alunos, conforme relato do professor titular da turma. Tal fato pode ter ocorrido devido a ser uma atividade diferente da usual (usar o Ábaco), como também pela minha presença em sala, visto que sou algo "novo" na sala. Em particular, a atividade do terceiro período da atividade também pode ter sido encarada como um desafio (terminar primeiro que os colegas), o que também pode ter estimulado a participação.

Quanto à natureza epistemológica, ou seja, a apropriação do conhecimento matemático e dos procedimentos de manuseio do Ábaco, constatou-se, por um lado, durante as aulas e exercícios, que os alunos indicavam a compreensão do uso do Ábaco e seus procedimentos, dado que resolviam os problemas de forma satisfatória. Contudo, percebeu-se no teste alguns erros e equívocos mesmo em operações que já haviam sido vistas anteriormente, sem o Ábaco. Na última parte da atividade, onde solicitou-se multiplicações sem o Ábaco, ocorreram alguns erros de multiplicação, mas os alunos, em grande parte, acertavam o sinal do resultado. Isso pode-se dever ao aprendido nas aulas com o Ábaco, bem como ao fato da tabela de sinais ainda estar presente no quadro. Nesse sentido, Coelho (2005) já havia destacado em sua dissertação, que, quando os alunos foram questionados porque "menos com menos dá mais", que

> Em 26 respostas analisadas, 21 alunos responderam baseando-se em exemplos com o "Ábaco dos Inteiros". Para estes alunos, parecia claro que "menos vezes menos dá mais" porque, retirando sucessivamente uma quantidade negativa, resulta um excesso de uma quantidade positiva" (COELHO, 2005, p. 120).

Em outras palavras, a utilização do Ábaco para ensino de multiplicação de Números Inteiros é vista por Coelho como uma eficiente forma de explicar a "regra de sinais".

Destaco que concordo com Miguel e Miorim (2004) acerca de uma distinção mais rígida entre tais vínculos (éticos e epistemológicos), contudo, ainda é possível fazer tal análise separadamente, visando uma melhor compreensão.

5.3.1 Análise do processo de aprendizagem a partir dos erros evidenciados no teste

O teste foi realizado por 24 alunos, de maneira individual. Foi dividido em duas questões, cada uma dividida em quatro itens. A primeira questão solicitava a resolução de soma e subtração de inteiros. A segunda, multiplicação. Nenhum aluno acertou todas as questões, sendo que uma aluna acertou 7 dos 8 itens. Por outro lado, nenhum aluno errou todas as questões, sendo que 1 aluno acertou apenas 1 item. A média de itens acertados por aluno foi de 4,25 de 8 questões.

Tabela 4 – Acertos do Teste

ALUNO	QUESTÃO 1				QUESTÃO 2				Acertos Questão 1	Acertos Questão 2	TOTAL (8 itens)
	a	b	c	d	a	b	c	d			
A	x	x			x				2	1	3
B	x	x	x	x		x			4	1	5
C	x		x	x	x		x	x	3	3	6
D	x		x	x					3	0	3
E					x			x	0	2	2
F		x			x				1	1	2
G			x		x	x	x	x	1	4	5
H	x	x	x		x	x	x		3	3	6
I			x		x	x	x		1	3	4
J	x	x			x		x		2	2	4
K	x				x		x		1	2	3
L					x	x	x	x	0	4	4
M	x				x	x			1	2	3
N			x	x	x	x		x	2	3	5
O	x	x	x		x	x	x		3	3	6
P	x	x	x		x	x	x		3	3	6
Q	x	x			x	x	x	x	2	4	6
R	x	x	x	x					4	0	4
S			x						1	0	1
T	x		x		x		x	x	2	3	5
U	x	x	x		x	x	x	x	3	4	7
V	x	x	x		x		x	x	3	3	6
W	x				x				1	1	2
X	x	x			x	x			2	2	4
TOTAL	17	12	14	5	20	12	13	9			

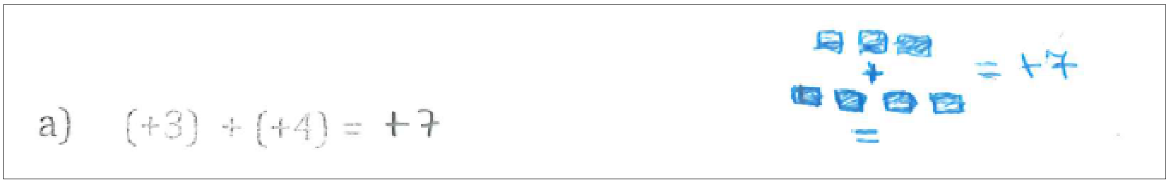
Fonte: Construção do autor

A tabela 4 indica de A a X os alunos e seus respectivos acertos (indicado por x) em cada questão proposta, tendo ao final o Total de acertos de cada aluno.

5.3.1.1 Questão 1

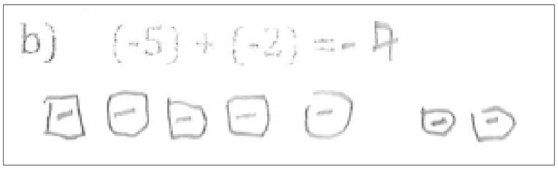
Na questão 1, os alunos foram solicitados a realizarem duas somas (itens *a* e *b*) e duas subtrações (itens *c* e *d*) utilizando o ábaco. 17 alunos acertaram o item *a*, 12 acertaram o item *b*, 14 acertaram o item *c* e 5 alunos acertam o item *d*. A média de itens acertados por aluno foi de 2,0 na questão. 2 alunos acertaram todos os itens dessa questão, e 2 alunos erraram em todas as questões. Segue, nas figuras 26, 27, 28 e 29 exemplos de respostas corretas dos alunos.

Figura 26 – Resposta correta no item *a*, questão 1



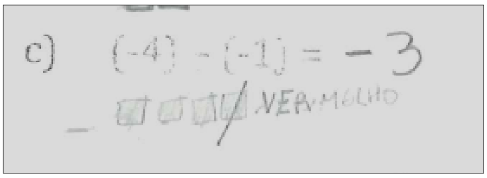
Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 27 – Resposta correta no item *a*, questão 1



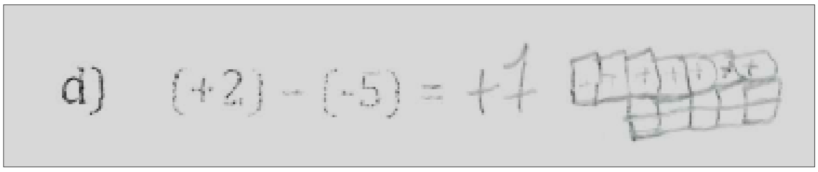
Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 28 – Resposta correta no item *a*, questão 1



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 29 – Resposta correta no item *a*, questão 1

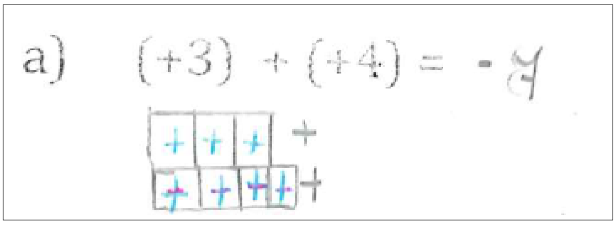


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 1*a*.

Dois tipos de erros foram encontrados no item *a*. Um refere-se, provavelmente, à falta de atenção em relação à operação, pois solicitou-se a soma entre +3 e +4. A representação utilizada pelos alunos estava correta, como na figura 30, mas na hora de transcrever o resultado, escreveu -7.

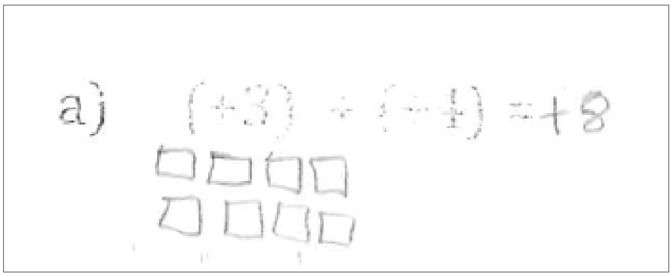
Figura 30 – Erro na resposta do item *a*, questão 1



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

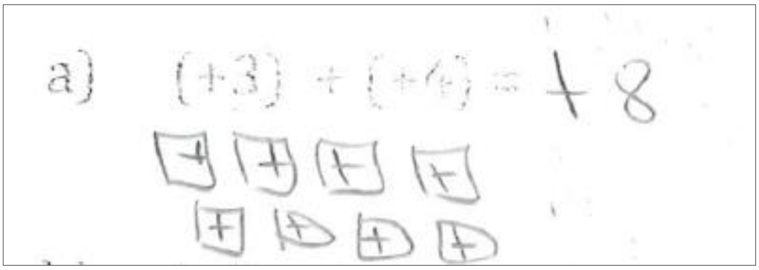
O outro tipo de erro foi em relação à contagem dos números. Essa operação resultava, para os alunos, em +8, como mostrado nas figuras 31 e 32. Este tipo de erro deve-se, provavelmente, à falta de atenção dos alunos.

Figura 31 – Erro na resposta do item *a*, questão 1



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 32 – Erro na resposta do item *a*, questão 1

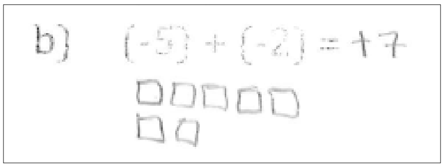


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 1*b*.

No item 1*b*, também foram encontrados erros devidos à falta de atenção, em que a soma de números negativos resultava em números positivos, como mostra a figura 33.

Figura 33 – Erro na resposta do item *b,* questão 1

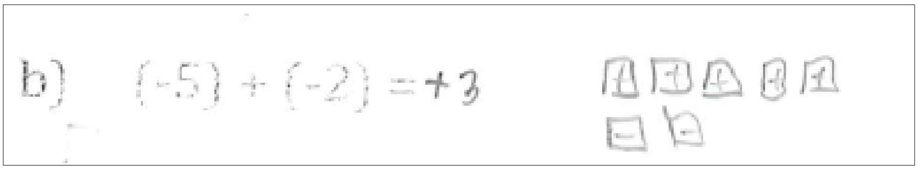


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Entretanto, tal erro pode ser de natureza conceitual, pois o estudante pode ter respondido utilizando a “regra” da multiplicação (menos com menos dá mais), e após ter feito uma representação do Ábaco de acordo com os números envolvidos.

Do caso a seguir evidencia-se que houve um erro na representação dos números no ábaco, pois em vez de colocar 5 quadrados vermelhos (indicados pelo símbolo -) o aluno inseriu 5 quadrados azuis (+) o que pode ser uma simples falta de atenção ou um indício de que o conceito de número negativo ainda não esta suficientemente claro.

Figura 34 – Erro na resposta do item *b,* questão 1

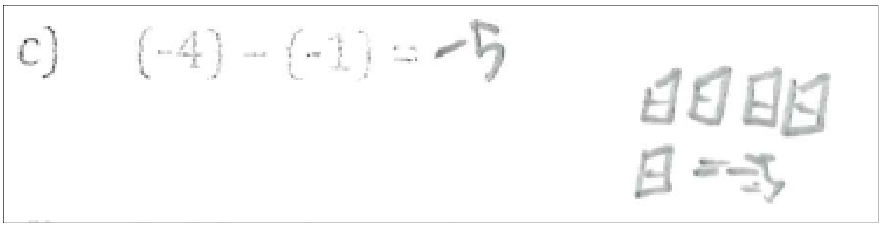


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 1*c*.

No item *c*, alguns alunos erram na operação dos números, em vez de subtrair dois inteiros, os somaram, conforme a figura 35.

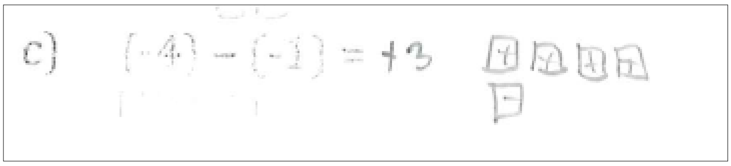
Figura 35 – Erro na resposta do item *c*, questão 1



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Outro erro comum referia-se à representação do número no ábaco. Inicialmente, deveria ser representado o -4, contudo, o número era representado por 4 quadrados positivos. A figura 36 exemplifica esse erro.

Figura 36 – Erro na resposta do item *c*, questão 1

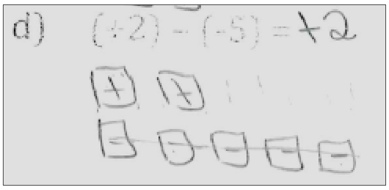


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 1*d*.

O item *d* foi o que mais apresentou dificuldade para os alunos, sendo que apenas 5 acertaram. Alguns alunos apenas representavam a operação solicitada , mas executavam de maneira incorreta. A resposta errada mais comum foi +2, como na figura 37, indicando que os alunos colocavam 2 quadrados azuis, e depois colocavam 5 vermelhos, para depois retirá-los, ou seja identificou-se uma falta de compreensão dos procedimentos no ábaco.

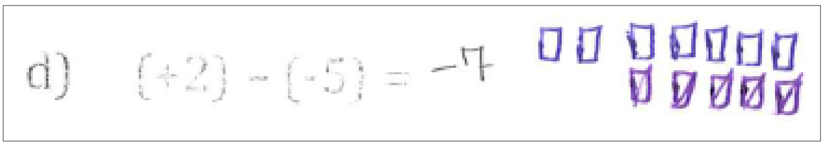
Figura 37 – Erro na resposta do item *d*, questão 1



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Outro erro de procedimento no ábaco, conforme a figura 38, foi a inserção de 2 fichas azuis e, após, colocou 5 fichas azuis e 5 vermelhas (parece que está construindo a soma zero) e depois retirou as 5 vermelhas, ou seja efetuou a operação subtração solicitada.

Figura 38 – Erro na resposta do item *d*, questão 1

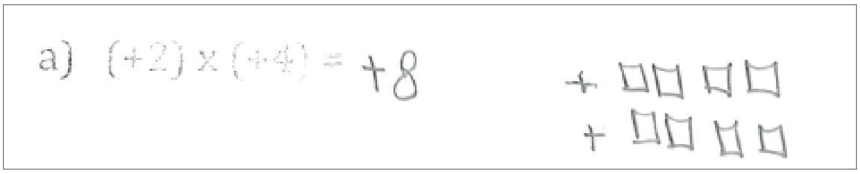


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

5.3.1.2 Questão 2

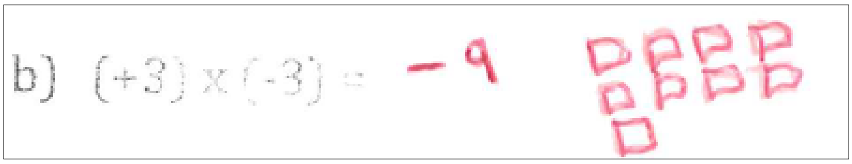
A questão 2 solicitava aos alunos que realizassem multiplicação entre números inteiros. No total, 20 alunos acertaram o item *a*, 12 acertaram o item *b*, 13 acertaram o item *c* e 9 acertaram o item *d*. A média de acertos na questão foi de 2,25, maior em relação à questão 1. Segue, nas figuras 39, 40, 41 e 42 exemplos de respostas corretas dos alunos.

Figura 39 – Resposta correta no item *a*,questão 2



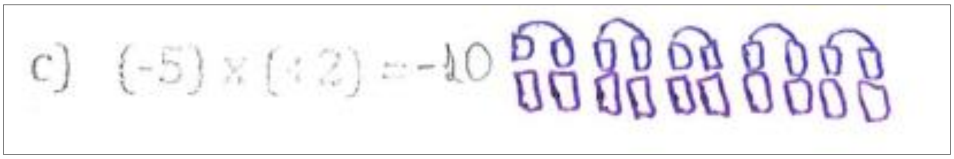
Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 40 – Resposta correta no item *b*,questão 2



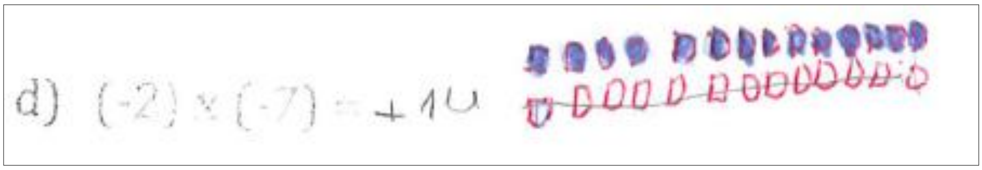
Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 41 – Resposta correta no item *c*,questão 2



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Figura 42 – Resposta correta no item *c*,questão 2



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 2*a*.

No item *a*, apenas 4 alunos erraram a questão, desses, 2 cometeram o erro como segue na imagem 46, colocando o +2, e após os 8 quadrados azuis que se referem à multiplicação, indicando erro de procedimento do uso do Ábaco.

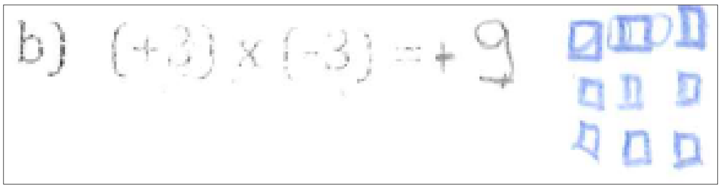
Figura 43 – Erro na resposta do item *a*, questão 2.

Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 2*b*.

No item *b*, percebeu-se que alguns alunos, em vez de colocarem quadrados vermelhos, como solicitado, acabavam colocando azuis, como na figura 44. Com isso, o resultado ficava +9. Esse erro pode ter sido causado por falta de atenção dos alunos.

Figura 44 – Erro na resposta do item *b*, questão 2.

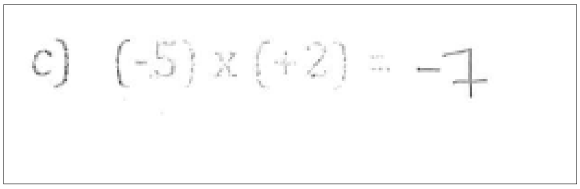


Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 2*c*.

No item *c*, a variedade dos erros foi mais ampla. No erro indicado na figura 45, o aluno fez soma, de certa forma, dos números, em vez de multiplicá-los. O erro pode ter ocorrido por falta de atenção da aluna, pois a questão 1*b* pede a soma entre -5 e +2, e foi respondida com -7 também. Provavelmente, entendeu como sendo a mesma questão.

Figura 45 – Erro na resposta do item *c*, questão 2.



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Um erro de procedimento identificado foi como segue na figura 46, onde o aluno retirou 1 vez 5 quadrados azuis, quando o solicitado era retirar 5 vezes 2 quadrados azuis.

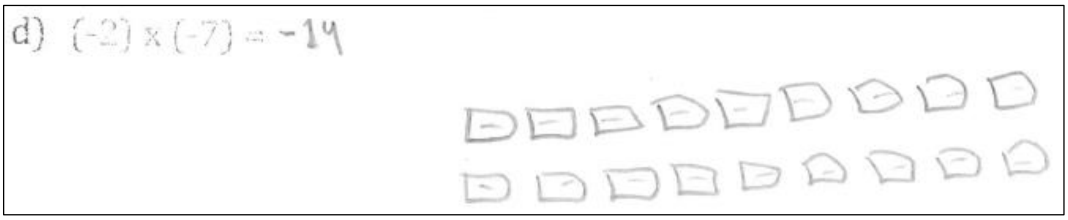
Figura 46 – Erro na resposta do item *c*, questão 2.

Fonte: Teste respondido pelos estudantes

- Item 2*d*.

Entre as questões de multiplicação, o item *d* foi onde os alunos apresentaram maior dificuldade, embora a diferença de acertos em relação aos outros itens seja pequena. O erro mais comum foi ter-se como resposta -14. No caso da figura 47, provavelmente foi por erro de procedimento do Ábaco, pois em todas os itens de multiplicação, o aluno realizou a ação de colocar fichas. Com isso, ele acertou os itens 2*a* e 2*b*, e errou 2*c* e 2*d*.

Figura 47 – Erro na resposta do item *d*, questão 2.



Fonte: Teste respondido pelos estudantes

Constatou-se, assim, no teste, como comuns os seguintes tipos de erros:

- Falta de atenção por parte dos estudantes;

- Erros de representação e procedimento no Ábaco dos Inteiros;
- Erro conceitual em relação aos Números Inteiros e operações.

5.4 CONCLUSÕES

Com base na análise do teste, pode-se fazer as seguintes conclusões:

1. Utilizando o Ábaco dos Inteiros, os alunos erram de maneira semelhante ao "convencional". Teixeira (2013) aponta erros, por exemplo, de falta de atenção nos testes realizados. Coelho (2005) levanta que erros do tipo $(-3) + (-4) = +7$ são comuns após o ensino de multiplicação utilizando "regras de sinais", onde o aluno erroneamente a utiliza na adição.

2. Os alunos que acertam têm consciência do percurso que gera a resposta. É o que também ressalta Coelho (2005), exemplificando que a maioria dos estudantes souberam justificar utilizando o Ábaco as "regras" de multiplicação. Esses alunos não as decoram simplesmente; essas propriedades "deixaram" de ser simplesmente regras e passam a ser fruto de construção.

3. Por fim, ressalta-se que uma importante contribuição percebida diz respeito ao trabalho docente, pois, para o professor, o uso do Ábaco dos Inteiros possibilita uma melhor percepção dos erros dos alunos, favorecendo uma intervenção mais pontual no processo de ensino.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Mama told me when I was young
> Come sit beside me, my only son
> And listen closely to what I say
> And if you do this it will help you some sunny day
> Take your time, don't live too fast
> Troubles will come and they will pass
>
> *Lynyrd Skynyrd – Simple Man*

Através das pesquisas realizadas neste trabalho, foi possível aprofundar o estudo sobre História na Educação Matemática, bem como sobre o Ábaco e sua importância na história. Disso, pode-se afirmar que foi possivel atingir os objetivos iniciais. Pôde-se compreender que estudar História na Educação Matemática vai muito além de introduzir fatos, curiosidades ou biografias. Entre argumentos reforçadores e questionadores de sua potencialidade, mais do que simplesmente buscar uma motivação para o estudo, conforme já constatado por Miguel e Miorim (2004), busca-se criar vínculos entre a produção sócio-histórica do conhecimento e a apropriação pessoal desse conhecimento no presente.

Durante o trabalho, também surgiu o objetivo de estender os procedimentos do Ábaco para a divisão, visto que conhecíamos somente a adição, subtração e multiplicação. Contudo, por uma questão de tempo, decidiu-se desenvolver tal projeto em outro momento. Pode-se ter também como um objetivo posterior pesquisar a potencialidade do uso do Ábaco para o ensino de divisão de Números Inteiros.

O processo de associação entre os procedimentos do Ábaco e a Álgebra também foi importante. Se, por um lado, na Idade Média criou-se um embate entre abaquistas e algoritmistas, neste trabalho evidenciou-se que, para o desenvolvimento da álgebra e da aritmética que conhecemos hoje, o ábaco foi fundamental.

Sobre as potencialidades do uso do Ábaco dos Números Inteiros para o ensino, a ferramenta mostrou-se vantajosa. Embora tenha sido observado que os alunos possam vir a continuar com determinadas dificuldades, por outro lado tais dificuldades podem tornar-se mais evidentes para o professor, de forma a favorecer uma intervenção mais pontual no processo de ensino, tendo-se tal fato como uma importante constatação desse trabalho.

7 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. C. **As Mais Antigas Evidências Conhecidas do Emprego de Talhas Numéricas Associadas a Processos de Contagem**. XI Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Grande do Norte, UFRN, 2015.

BALL, W. W. R. **A short account of the history of mathematics.** Nova Iorque: Dover Publications Inc., 1960.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo:Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHADID, I., C. PÉREZ, J. H. **La gran revolución aritmética de la edad media y el surgimento del álgebra**. Universitas Scientarium. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, 2002.

COELHO, M. P. F. **A multiplicação de números inteiros relativos no "ábaco dos inteiros": uma investigação com alunos do 7.º ano de escolaridade**. Dissertação de Mestrado. Braga: Universidade do Minho, 2005.

DIRKS, M. K. **The integer abacus**.Arithmetic Teacher, Vol.31(7), p.50-54, 1984.

FERREIRA, E. S. **O Ábaco de Silvester II.** Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 8 n. 15 p.43-55, 2008

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

GRANJA, C. E., PASTORE, J. L. **Atividades experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. 1ª Edição. São Paulo: Edições SM, 2012.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**. 2ª Edição. Porto Alegre: Editora Globo, 1958.

MIGUEL, A. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.** Zetetiké – CEMPEM. V. 5 – nº 8. Campinas: UNICAMP, jul./dez. de 1997.

MIGUEL, A., MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

OLIVEIRA, W. S. de. **Adição e subtração dos números inteiros e o uso de materiais concretos**. Monografia de Conclusão de Curso. UFPB/CCEN. Itabaiana, 2011.

RIPOLL, J. B., RIPOLL, C. C., SILVEIRA, J. F. P. de. **Números racionais, reais e**

complexos. 2. ed. revista e ampliada. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

RUGIU, A. S. **Nostalgia do Mestre Artesão**. Autores Associados, 1998.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. 1ª Edição. Portugal: Gradiva, 1989.

TEIXEIRA, J. R. T. **Sobre as regras de sinais dos números inteiros negativos**. Trabalho de Conclusão de Graduação de Licenciatura em Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010.