

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Júlia Domingues Lemos

**ORIGAMI: UMA PRÁTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS
GEOMÉTRICOS**

Porto Alegre

2015

Júlia Domingues Lemos

**ORIGAMI: UMA PRÁTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS
GEOMÉTRICOS**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2015

Júlia Domingues Lemos

**ORIGAMI: UMA PRÁTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS
GEOMÉTRICOS**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso –

Orientador

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.^a Dr.^a Débora da Silva Soares

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Cristina e Marco, e à minha irmã Larissa, pelo amor incondicional e por nunca estarem realmente longe.

Ao professor Marcus Vinicius de Azevedo Basso, meu orientador, por aceitar o convite tão prontamente, por não medir esforços na duração deste trabalho e por me ensinar o que significa ser professor.

Aos professores Eduardo Henrique de Mattos Brietzke e Débora da Silva Soares por aceitarem compor a banca, por suas contribuições para este trabalho e por serem exemplos de profissionais.

Aos colegas de curso, com os quais cresci, amadureci e aprendi muito.

Aos colegas do programa Ciência sem Fronteiras, com os quais passei momentos memoráveis.

A todos os meus professores, da UFRGS e da Universidade de Tohoku, por todos os anos de rigoroso aprendizado.

A todos os meus amigos próximos, que nunca me permitiram desistir.

RESUMO

Este trabalho consiste em uma proposta de atividade prática para ensino de conceitos de geometria utilizando origami como recurso e que não possua somente suporte teórico técnico, mas também educacional. Uma prática inicial sem o uso de referencial teórico educacional foi realizada para, em seguida, ser analisada sob a luz da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Dada a análise dos dados coletados nesta prática inicial, foram propostas mudanças na estrutura da atividade, a fim de comportar os aspectos sugeridos pelo referencial teórico. As mudanças propostas foram, no geral, referentes à postura do professor enquanto ministrante de uma atividade sobre origami em sala de aula.

Palavras-chave: Origami. Geometria. Vergnaud.

ABSTRACT

This work consists of a proposal of a practical activity aiming to teach geometry concepts by using origami as a resource, which counts not only with technical theoretical support, but also with educational theoretical support. A preliminary activity, without educational support, was planned and realized to be, then, analyzed under the light of the conceptual fields theory, by Gérard Vergnaud. Given the analysis of the data collected by the first practical activity, modifications were suggested in order to fit the new activity into the concepts given by the theoretical educational support. The suggested modifications were, generally, about the teacher's stance while conducting an origami activity in classroom.

Keywords: Origami. Geometry. Vergnaud.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Padrão de dobras para um besouro.	11
Figura 2 - Besouro executado.	11
Figura 3 - Diagrama de tsuru.	20
Figura 4 - Módulo sonobe.	22
Figura 5 - Orientações do módulo sonobe.	23
Figura 6 - Orientações do módulo sonobe.	24
Figura 7 - Participante da oficina com seu cubo pronto.	25
Figura 8 - Participantes que produziram módulos com orientações contrárias e mudaram de estratégia.	26
Figura 9 - descrição da atividade.	27
Figura 10 - Participante dobrando a reta sobre o ponto diversas vezes.	27
Figura 11 - últimos 11 passos do kabutomushi.	34

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. ORIGAMI	10
2.1. ORIGAMI NO ENSINO DE MATEMÁTICA	12
3. REVISÃO DE LITERATURA	15
4. PRÁTICA REALIZADA	20
4.1. RELATO	22
5. REFERENCIAL TEÓRICO	30
5.1. ANÁLISE DOS DADOS	32
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

1. INTRODUÇÃO

Origami, em japonês, é a junção das palavras “dobrar” e “papel”. Sugestivamente, consiste na arte de confeccionar animais e objetos a partir de dobras em um quadrado de papel. Durante muitos séculos, origami foi considerado apenas um passatempo para mulheres e crianças, sendo transmitido oralmente das mães para seus filhos. Durante o século XX, Akira Yoshizawa desenvolveu uma linguagem composta de setas, linhas e símbolos, o que possibilitou o registro escrito de diversos modelos, levando aos sistemas de diagramação como existem hoje e permitiu que a arte evoluísse.

Conforme origami evoluía, suas relações com a matemática foram gradualmente sendo expostas para estudiosos tanto de origami quanto de matemática, o que aproximou as duas áreas. Atualmente, matemática é uma ferramenta extremamente importante no design de modelos de origami, assim como origami é uma ferramenta com diversas aplicações na matemática.

Origami, estando tão próximo da matemática, pode ser visto e utilizado como um recurso na aprendizagem de conceitos de matemática, principalmente na área de geometria. Diversos trabalhos com propostas de atividades práticas utilizando origami foram publicados nas últimas duas décadas. De maneira geral, são todos muito bem embasados do ponto de vista matemático, o que garante a viabilidade de origami enquanto recurso para aprendizagem de matemática em sala de aula. No entanto, nem todos contam com referencial teórico educacional para embasar suas propostas de práticas, o que inspirou o objetivo deste trabalho.

Tendo em vista a necessidade da área, este trabalho tem como objetivo propor uma atividade prática que conte não somente com referências sobre origami e matemática, mas também com referencial teórico educacional. A estratégia adotada foi, então, realizar uma prática que não foi planejada com o suporte de um referencial teórico educacional, encontrar uma teoria que ajudasse a compreender o que ocorreu na atividade e, a partir desta análise, modificar na prática inicial o que se julgasse necessário para então obter uma proposta com sólido embasamento teórico. Ideias e conceitos de Vergnaud presentes na teoria dos campos conceituais foram escolhidos para servir de base teórica para esta análise.

O capítulo dois tem um breve panorama de como origami e matemática se relacionam, além de levantar alguns tópicos sobre uso de origami em sala de aula.

O capítulo três faz uma breve análise de três trabalhos publicados sobre origami e educação matemática: um artigo, um trabalho de conclusão de curso e uma dissertação de

mestrado. Nenhum dos três apresenta forte referencial teórico educacional, mas todos apresentam atividades práticas importantes para a consolidação de origami como recurso em sala de aula.

O capítulo quatro relata, de maneira simples, como a prática inicial foi pensada, como suas atividades foram escolhidas e como ocorreu.

O capítulo cinco, inicialmente, traz as ideias de Vergnaud como referencial teórico educacional, apresentando os conceitos que serão utilizados posteriormente no mesmo capítulo para analisar e tentar compreender os acontecimentos da prática inicial. Essa análise também procura por elementos desta prática que possam ser melhorados ou modificados a fim de propor, ao final deste trabalho, uma prática com uma base teórica melhor do que a primeira.

O capítulo seis apresenta as conclusões acerca da análise feita no capítulo cinco, além de fazer outras ressalvas sobre a nova proposta.

2. ORIGAMI

Origami é uma arte que surgiu no Japão no século XVII cujo propósito é tomar um papel quadrado e transformá-lo em uma escultura por meio apenas de dobras, sem cortes e sem colagem. Esta arte foi popularizada para outros países durante o século XX. Nesta mesma época, um origamista¹ chamado Akira Yoshizawa criou uma linguagem, plenamente eficaz para os diagramas de origami, composta de setas e símbolos e que foi fundamental para a reinvenção e conseqüente disseminação do origami ao redor do mundo. Esta linguagem foi o princípio da evolução do origami de mera reprodução de objetos e animais em modelos simples para algo muito mais complexo e foi adotada por origamistas do mundo todo.

Conforme o origami evoluía, tornava-se cada vez mais difícil confeccionar modelos com precisão e detalhes que se gostaria, e a matemática foi a ferramenta que possibilitou que o origami evoluísse no quesito complexidade dos modelos. Os origamistas perceberam que, por exemplo, para criar um modelo de um inseto, era necessária, para cada pata ou antena, uma região circular do papel (ou de um setor circular se estiver situada na borda do papel) (Fig. 1) para que se pudesse dobrá-la em uma forma conhecida como *flap*, que consiste em uma pequena aba estreita, ligada ao modelo por apenas um lado, que se pode manipular sem interferir no resto do modelo (LANG, 2003). Como cada inseto possui diversas patas e antenas, confeccionar o modelo passou a consistir em determinar onde, em um quadrado de papel, estaria localizada cada pata, cada antena, cada *flap* necessário para o modelo. Se cada *flap* ocupa uma região circular, o problema transforma-se em como encaixar diversos círculos tangentes um ao outro em um quadrado, que é um problema que pode ser interpretado de forma puramente matemática e então solucionado de forma adequada dependendo do modelo que se tem em mente.

O origamista Robert J. Lang, no início dos anos 1990, criou um *software* que facilitou a confecção de modelos com base em um diagrama básico como o padrão de dobras, que consiste apenas nas marcas deixadas pelas dobras assim que o modelo é desdobrado. Este *software*, ao ser informado da localização e do comprimento de cada *flap*, gera um padrão de dobra a ser executado. A matemática fez com que o origami tomasse um nível de complexidade nunca antes imaginado pelos origamistas.

¹O termo “*origamista*” não consta no Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa. Na duração deste trabalho, este termo significa “*a pessoa que confecciona ou que executa um modelo de origami*”. Tradução livre do termo “*origamisakka*” (折り紙作家) em japonês.

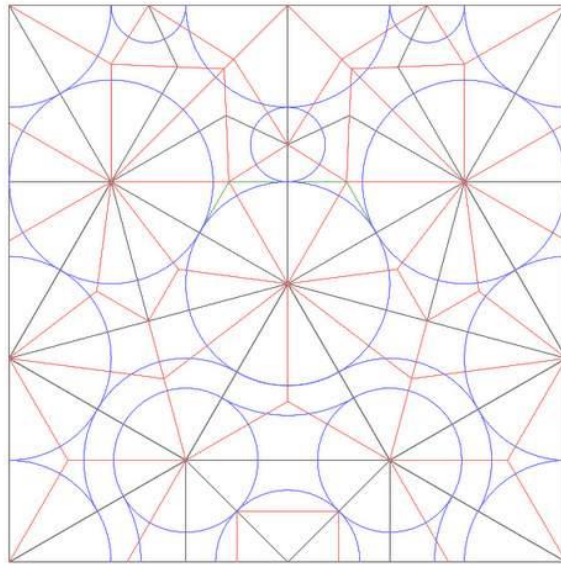


Figura 1 - Padrão de dobras para um besouro.

Fonte: http://web.mit.edu/chosetec/www/origami/atlas/atlas_CP.jpg.



Figura 2 - Besouro executado.

Fonte: <http://web.mit.edu/chosetec/www/origami/atlas/atlas.jpg>.

Com o origami tão desenvolvido, a relação colaborativa matemática-origami tornou-se uma via de duas mãos. Em 1989, Humiaki Huzita, com a colaboração posterior de Koshiro Hatori, apresentou o que hoje é conhecido como os Axiomas de Huzita-Hatori. Este é um conjunto de sete axiomas publicados no livro “*Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*” sob o título “*Axiomatic Development of Origami Geometry*” em 1989 (o último axioma, contudo, foi

adicionado apenas em 2011). Com estes axiomas são possíveis diversas construções geométricas, dentre elas construções que não são possíveis com régua e compasso, como a trissecção de um ângulo arbitrário e a duplicação do volume de um cubo de aresta a .

A trissecção de um ângulo agudo está representada, em português, por Cavacami e Furuya (2009) em um conjunto de construções geométricas intitulado “Explorando Geometria com Origami”. A construção em questão é creditada a Hisashi Abe, conforme publicada em 1980 no Japão.

A duplicação do volume de um cubo depende da construtibilidade do número $q=2^{1/3}$. Utilizando apenas régua e compasso, q não é um número construtível, mas é possível construí-lo via origami e Axiomas de Huzita-Hatori.

A matemática foi uma ferramenta tão útil e poderosa no desenvolvimento do origami não apenas como arte, mas também como ciência, que obteve seu retorno quando o origami evoluiu ao ponto de servir como ferramenta e recurso para a matemática. Além dos problemas que não admitiam soluções via régua e compasso mas que admitem soluções via origami, muitos outros problemas passam a admitir soluções alternativas, o que amplia a gama de possibilidades para os estudiosos de ambas as áreas.

2.1. ORIGAMI NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A maioria dos problemas previamente citados requer um nível de compreensão matemática que em geral não se atinge na escola básica, tornando difícil utilizá-los como proposta didática. Entretanto, existem inúmeros temas dentro da intersecção origami-matemática que podem ser trabalhados na escola básica.

A construção poliedros via origami modular é uma possibilidade a ser explorada. Origami modular é um tipo de origami no qual são construídos diversos módulos idênticos e estes são encaixados até formarem o modelo desejado. Os módulos são executados sem cortes a partir de quadrados. Inúmeros poliedros podem ser executados via origami modular com diferentes tipos de módulos.

Quando pensamos sobre a aprendizagem de sólidos geométricos ou poliedros em geral, é fácil recordar a dificuldade de visualização dos objetos que muitos alunos apresentam. Trazer à aula diversos tipos de material concreto, ou seja, objetos representativos que se possam tocar e manipular, pode contribuir para que o aluno de fato concretize suas ideias a

respeito do sólido em questão. Dar ao aluno a oportunidade de construir o sólido coloca a geometria espacial sob uma perspectiva completamente nova aos olhos do aluno.

O trabalho de construção de um objeto de estudo é extremamente benéfico para o aluno. A construção de poliedros de origami modular pode ser problemática quando os alunos nunca tiveram qualquer tipo de contato preliminar com a atividade de dobrar papel. Neste caso, modelos simples podem servir como motivação para a confecção de modelos mais estruturados, com os quais é possível compreender visualmente elementos como vértices, faces e arestas de um poliedro, bem como visualizar sua forma tridimensional. Os modelos introdutórios podem ser modelos populares, como animais ou objetos.

Outra opção é trabalhar construções geométricas em sala de aula. Ao contrário do trabalho com poliedros, construções geométricas simples não demandam dos participantes qualquer conhecimento prévio ou experiência sobre origami, além de constituírem atividades mais rápidas e com resultados visuais mais imediatos. Atividades deste tipo englobam dividir um ângulo em duas ou três partes, construir polígonos regulares a partir de um quadrado, construir retas tangentes que aproximem uma curva, entre outros.

É muito comum a opinião de que origami é uma atividade solitária, mas isto não é necessariamente verdade. É possível trabalhar com origami modular em grupos, por exemplo, nos quais cada aluno confecciona um módulo e o grupo trabalha coletivamente para encaixá-los. O tamanho do grupo envolvido pode variar de acordo com o modelo escolhido, visto que um cubo pode ser confeccionado com seis módulos, mas um icosaedro requer trinta. Assim como não há limite de faces para um poliedro, não há limite de módulos para origami modular. Esta atividade não requer muitas intervenções do professor ou ministrante, uma vez que o grupo de alunos pode debater e encontrar as melhores formas de dobrar e encaixar os módulos.

É válido ressaltar que, mesmo que origami possa gerar um bom trabalho em grupo, dobrar ainda é algo muito pessoal. De fato, é algo tão pessoal que sujeitos diferentes dobrando o mesmo modelo, seguindo o mesmo diagrama, produzirão modelos tecnicamente iguais mas com essências extremamente diferentes, muitas vezes dissonantes.

Além da possibilidade de aprendizagem de conceitos matemáticos, origami ainda é um exercício de paciência, coerência e comprometimento. São necessários trinta módulos para completar um icosaedro, qualquer quantidade inferior a trinta não servirá. Todos os módulos devem ser iguais, na mesma orientação, oriundos de quadrados de mesmo tamanho e dobrados com o mesmo nível de precisão. Se o sujeito abandona o trabalho, terceiros podem, com certeza, terminar os módulos restantes e encaixá-los – mas este não é mais um trabalho que lhe pertence. Não é mais possível para o sujeito afirmar que aquele modelo, agora pronto,

foi uma criação sua, do início ao fim. Tais constatações foram obtidas empiricamente em oficinas e práticas realizadas em momentos anteriores e, portanto, não relatadas neste trabalho.

Origami enquanto recurso para aprendizagem de conceitos de matemática ainda não é uma ideia amplamente difundida. As tecnologias e as mídias digitais, bem como a rede mundial de computadores, desempenham um papel muito significativo na propagação de modelos de origami e de propostas para sala de aula, mas ainda assim, origami não conta com tantos entusiastas quanto seria desejável.

Muitos professores da escola básica não utilizam origami como recurso porque nunca dobraram antes em suas vidas, ou, se dobraram, a conexão origami-matemática não ficou clara. Estes, portanto, assim como os que nunca dobraram, simplesmente não estão cientes de que origami pode ser usado como um recurso em sala de aula. A divulgação dos trabalhos existentes, assim como a publicação de novos trabalhos, são instrumentos de extrema importância para o crescimento da área.

3. REVISÃO DE LITERATURA

A produção de trabalhos sobre origami e matemática consiste, basicamente, de trabalhos de dois tipos: trabalhos sobre origami e matemática e trabalhos sobre ensino de matemática utilizando origami. O primeiro tipo engloba trabalhos ricos em rigor matemático, onde o objetivo é geralmente explorar relações matemáticas que podem ser encontradas nos processos de dobra ou utilizar origami como ferramenta para resolver problemas matemáticos. O segundo procura utilizar origami como ferramenta para o ensino de conceitos matemáticos, como um facilitador para a visualização e para a compreensão. Ainda, há trabalhos que utilizam origami para explorar outras possibilidades de interpretação para situações já vividas ou problemas já discutidos.

Durante o último século o trabalho de origamistas e matemáticos foi fortemente sobreposto em função da formalização matemática que ocorreu no processo de design de modelos de origami. No trabalho de Silva (2009), intitulado “Origamática: o origami no ensino-aprendizagem de matemática”, vemos um bom retrato de como origami desenvolveu seu tratamento matemático ao longo do tempo, bem como um bom levantamento histórico do campo da geometria. Tais aspectos são relevantes para justificar e contextualizar o trabalho com origami.

Silva (2009) tinha como objetivo inicial introduzir origami como um recurso viável para aprendizado de geometria, mas, ao longo do trabalho, o objetivo tornou-se produzir material para atividades práticas, e então disponibilizá-lo online. Tal material foi criado no formato de diagramações e vídeos tutoriais, que foram utilizados em atividades práticas realizadas com alunos do curso de licenciatura em matemática e professores, em uma primeira prática, e com alunos de oitavo ano do ensino fundamental posteriormente. Os vídeos foram disponibilizados em um portal na internet, com sugestões de como cada modelo poderia ser levado à sala de aula e quais conteúdos poderiam ser trabalhados.

Na primeira prática três modelos básicos foram produzidos com o auxílio dos vídeos tutoriais, os quais foram projetados aos participantes da oficina, para ao final questionar os participantes se estes conseguiam perceber possíveis usos do origami em sala de aula. Um questionário impresso foi submetido aos participantes para que respondessem tais questões por escrito. A segunda prática consistiu de apenas um modelo, que os alunos produziram assistindo aos vídeos tutoriais através da plataforma pbworks, acompanhado de depoimentos dos alunos e da professora de matemática da turma em questão e de fotos dos modelos

produzidos. Analisando as duas práticas, a conclusão obtida foi o atestado de viabilidade do uso de origami como recurso na sala de aula, deixando a cargo de futuros professores avaliar se a proposta condiz com os objetivos do professor em sala de aula.

O trabalho de Lucas (2013), intitulado “Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami”, consiste basicamente de uma sequência de três oficinas. Com o objetivo de produzir material para professores voltado ao ensino de geometria por meio do origami, Lucas (2013) propõe a primeira oficina voltada para a construção de polígonos regulares, a segunda voltada para poliedros de Platão e a terceira para a construção de prismas.

A primeira oficina traz diagramas sobre a construção da maioria dos polígonos regulares, de um a oito lados, a partir de quadrados ou retângulos. Vários diagramas estão acompanhados de justificativas para a construção, o que auxilia na aceitação dos passos por parte do aluno. A segunda oficina utiliza origami modular para a construção dos poliedros de Platão, utilizando o mesmo módulo triangular em todos os poliedros com faces triangulares. Os módulos e os encaixes foram trazidos em diagramas e em fotografias, que auxiliam na compreensão do encaixe. Alguns módulos são os mesmos produzidos na primeira oficina. A terceira oficina é sobre a construção de prismas regulares, que foram construídos sem as bases, apenas com as faces laterais. Foram utilizados dois tipos de módulo, um composto de quatro retângulos e outro de três. Assim, contando com os retângulos omitidos no encaixe, é possível obter uma variedade de prismas regulares variando o número de cada um dos tipos de módulo. O encaixe e a produção de cada módulo foram apresentados por meio de diagramas e fotos.

A proposta de cada uma das oficinas contém também uma sugestão de atividade ao final, além de dicas sobre como proceder com alunos iniciantes na prática do origami, ou sobre a escolha do papel adequado. O trabalho também conta com um panorama sobre a história do origami e alguns aspectos sobre a matemática envolvida. As oficinas propostas, entretanto, não foram aplicadas, portanto não há resultados disponíveis neste trabalho e a conclusão da autora é que acredita-se que as atividades com origami são extremamente proveitosas para os alunos, pois estes ampliam seus conhecimentos de geometria e promovem a descoberta de conceitos novos por parte dos alunos.

Ambos os trabalhos relatam experiências e atividades práticas que sustentam o uso de origami em sala de aula como recurso na aprendizagem de matemática. Os relatos das práticas realizadas por Silva (2009) e a sequência de oficinas proposta por Lucas (2013) conferem credibilidade ao origami neste quesito.

Outro relato é o artigo escrito por Morosini e Wrobel (2014), intitulado “Poliedros Estrelados e Origami: Uma Experiência na Formação de Professores”. Este difere dos anteriores por relatar uma experiência direcionada exclusivamente para alunos do curso de licenciatura.

A discussão sobre poliedros regulares convexos ou não convexos surgiu durante uma disciplina cursada pelas autoras, o que levou ao aprofundamento dos estudos de tais poliedros, bem como das definições de “regular” e “convexo”. Foi percebido então que estes eram conteúdos que não eram discutidos pelas disciplinas do curso, detectando assim uma lacuna na formação dos licenciandos.

Antes de apresentar a prática realizada, Morosini e Wrobel (2014) trazem um conciso e completo panorama dos diversos usos do origami em sala de aula, desde os primeiros usos na pré-escola no Japão e em países da Europa, por Friderich Frobel, até publicações recentes, fazendo referência a Cavacami e Furuya (2009) que trazem construções geométricas bastante sólidas, já mencionadas no capítulo 2. Tal panorama foi importante para o trabalho em função de o público alvo da prática ser constituído integralmente de alunos de licenciatura.

A oficina realizada tinha como objetivo introduzir a temática poliedros convexos ou não convexos, regulares ou não regulares, bem como poliedros estrelados e suas possíveis regularidades. Foi realizada com vinte e um alunos do curso de licenciatura que estavam cursando o último semestre em duas tardes.

A primeira englobou uma revisão de conceitos geométricos e uma reflexão acerca das definições que estavam sendo utilizadas sobre regularidade e convexidade. Diversos poliedros feitos de origami foram levados para manipulação por parte dos alunos, para que estes os classificassem com relação a convexidade e regularidade, e este foi o gancho aproveitado para introduzir origami modular na oficina. O primeiro dia foi encerrado com a produção de cinco dos trinta módulos necessários para a confecção de um dodecaedro estrelado, sendo que os outros vinte e cinco módulos deveriam ser produzidos em horário extraclasse e apresentados para encaixe no dia seguinte. Diversas das questões levantadas no início sobre convexidade e regularidade de poliedros não ficaram bem esclarecidas ao final do primeiro dia.

O segundo dia iniciou com o encaixe dos módulos do dodecaedro estrelado. Como os participantes eram majoritariamente iniciantes, as autoras propuseram o uso de cola e tesoura para facilitar a confecção do poliedro. Esta é uma prática que pode vir a sofrer críticas de origamistas mais conservadores. Origami, originalmente, não admite cortes ou cola, apenas dobras em um papel quadrado. Em origami modular é bastante intuitivo pensar que a cola será uma excelente ferramenta nos encaixes, mas na verdade existe uma espécie de consenso não

registrado entre a comunidade de origamistas de que os módulos devem, por si só, sustentar o poliedro através de um encaixe firme e sólido. Apesar deste preciosismo, utilizar cola, tesoura e outros materiais foi uma escolha muito compreensível e extremamente adequada à situação, dada a falta de familiaridade do público com as técnicas e a complexidade do modelo envolvido.

Em um segundo momento do mesmo dia foi trabalhado o conceito de poliedro estrelado. Durante este trabalho os alunos poderiam verificar definições e propriedades em seus próprios poliedros estrelados recentemente produzidos. Adotando definições levemente modificadas de convexidade e regularidade, foi possível concluir que o dodecaedro estrelado era, de fato, um poliedro regular não convexo, e assim como ele havia ainda os poliedros de Kepler-Poinsot, todos estrelados regulares. Esta nova classe de poliedros foi então apresentada aos participantes que, por sua vez, demonstraram grande deleite em poder estabelecer suas conclusões sobre convexidade e regularidade de poliedros.

Foi concluído que as mudanças no discurso dos participantes ocorreram em função da possibilidade de manipulação e verificação imediata das definições e propriedades. Além disso, origami agregou novos conceitos, modificou conceitos já existentes e diminuiu consideravelmente a tendência que os alunos apresentavam em pensar sempre em poliedros simples, ampliando a gama de possibilidades.

Uma dificuldade encontrada de modo geral por autores que escrevem sobre o uso de origami em sala de aula é a escassez de referencial teórico específico. Há uma produção relativamente grande sobre matemática e origami, muitas escritas de maneira bastante formal por autores como R. Lang, H. Hujita, K. Hatori, K. Haga, T. Fuse (estes referenciais fortíssimos tanto no trabalho de Silva (2009) quanto no de Lucas (2013)), mas é pouca a produção voltada para o ensino de matemática lançando mão de um referencial teórico mais educacional do que técnico/matemático.

Claramente, os referenciais teóricos utilizados por Silva (2009), por Lucas (2013) e por Morosini e Wrobel (2014) foram perfeitamente suficientes para concluir o cumprimento de seus objetivos propostos, mas não podemos deixar de notar a oportunidade que havia de realizar uma ligação mais profunda com a produção dos teóricos educacionais.

Houve considerável curiosidade sobre como são os trabalhos publicados no exterior sobre origami e educação matemática. De fato, considerável número de trabalhos foi encontrado, oriundos de diversas nações, alguns deles contemplando referenciais teóricos educacionais de maneira bastante sólida. No entanto, qualquer comentário a ser feito sem o conhecimento adequado das realidades locais e de como ocorre a formação de professores no

país seria demasiado leviano. É válido ressaltar, apenas, que a produção de trabalhos no exterior não somente ocorre, mas ocorre com qualidade e em números crescentes.

A inserção de referencial teórico específico da área de educação tende a apenas enriquecer os trabalhos sobre uso de origami em sala de aula. Entretanto, a preocupação com os aspectos técnicos do trabalho não deixa de ser válida, e conhecimentos sobre matemática ou sobre origami são tão necessários para a construção de um referencial teórico sólido e consistente quanto o conhecimento das teorias educacionais aplicáveis.

Além disso, os trabalhos aqui relatados, assim como muitos outros, nos mostram que origami é uma atividade viável para sala de aula, tanto como atividade regular quanto como atividade extracurricular, benéfica para públicos em diferentes níveis de escolaridade. Sabendo que origami pode funcionar como recurso para o ensino-aprendizagem de matemática, é possível pensar o que pode ser mudado, acrescentado ou retirado de uma atividade prática semelhante às descritas por Lucas (2013) e Silva (2009) se esta for analisada na presença de um referencial teórico educacional.

4. PRÁTICA REALIZADA

Este trabalho consiste, basicamente, em desenvolver uma proposta de prática que seja sustentada por um referencial educacional. Para isto, foi proposta uma prática inicial que não contava com um referencial teórico educacional bem definido, na qual dados foram coletados para análise. Para tal análise era necessário buscar alguma teoria que ajudasse a compreender os acontecimentos ocorridos durante a oficina, relatados no presente capítulo, e a melhorar a prática inicial.

Esta primeira prática foi pensada para alunos do curso de licenciatura como um dos minicursos realizados na Semana Acadêmica promovida pelos alunos do Instituto de Matemática e Estatística. Como o tempo disposto era de três horas, foram planejadas três atividades: um cubo e um tetraedro de origami modular e a construção de um conjunto de retas tangentes a uma parábola. Doze folhas retangulares de papel colorido em gramatura 75g/m², uma folha de papel vegetal e um *tsuru* diagramado foram entregues a todos os participantes no início da oficina. Este diagrama (Fig. 3) não foi dobrado na oficina, apenas entregue aos participantes caso algum deles tenha interesse em dobrar modelos tradicionais.

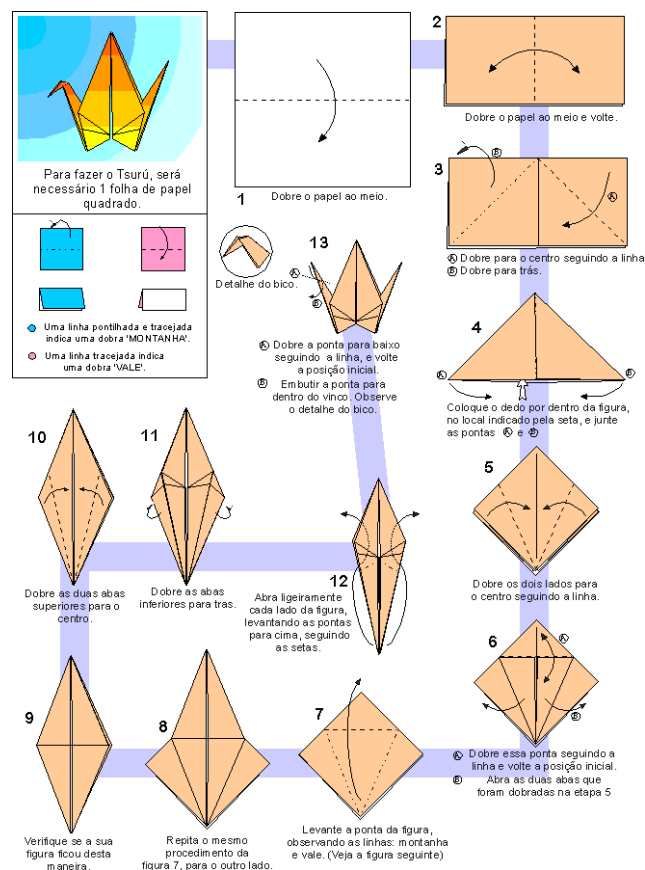


Figura 3 - Diagrama de tsuru

Fonte: http://1.bp.blogspot.com/_gcgP05-_1OE/S-fwTBpH_CI/AAAAAAAAAALs/LUs_47OQmNA/s1600/diagrama+do+tsuru.gif

O cubo e o tetraedro, cada um necessitando seis módulos, podem ser confeccionados tranquilamente em menos de duas horas. O objetivo destas atividades era mostrar que, quando se constrói um poliedro, a visualização de elementos como número de faces, vértices e arestas torna-se muito mais clara. Além disso, existe uma discussão que pode ser feita sobre como o número de faces de um poliedro se relaciona com o número de módulos necessários.

No cubo, cada módulo cobre exatamente uma face, então foram necessários seis módulos pois o cubo possui seis faces. O tetraedro, no entanto, que possui apenas quatro faces, também necessita de seis módulos. Isto acontece pois cada face do tetraedro requer três módulos, então inicialmente é possível pensar que será necessário confeccionar doze módulos, o que não ocorre em função de cada módulo possuir duas hastes, ou seja, cada módulo participa simultaneamente de duas faces distintas, o que acarreta a necessidade de somente seis módulos. É possível estender esta discussão a outros poliedros, como aos modelos expostos para os participantes, que inclui poliedros estrelados e regulares.

A atividade de construção das retas tangentes a uma parábola consiste em riscar, em uma folha de papel vegetal, um ponto que será o foco e uma reta que será a diretriz de uma parábola. A parábola em si não será esboçada, mas é possível encontrar infinitas retas tangentes à parábola que aproximam a curva e que apresentam resultado visual bastante ilustrativo. O procedimento é dobrar o ponto sobre a reta, desdobrar e repetir inúmeras vezes obtendo marcações diferentes a cada dobra.

A intenção foi mostrar que existem curvas que podem ser visualizadas através de construções utilizando origami, o que não é algo óbvio, uma vez que dobras produzem retas e o resultado esperado no esboço de uma curva é algo, de fato, curvo. Além disso, é possível induzir uma discussão sobre como justificamos matematicamente que as retas obtidas neste processo são de fato tangentes a uma parábola. Para isto é necessário que se lembre ou que se aprenda a definição de parábola dados seu foco e sua reta diretriz, o que pode ser incluído na discussão.

Ao final da oficina os alunos responderam um questionário de maneira anônima, expondo suas opiniões sobre o uso de origami em sala de aula e comentando sobre suas experiências prévias no tema.

4.1. RELATO

A oficina foi realizada na Semana Acadêmica promovida pelos alunos do Instituto de Matemática e Estatística, aberta ao público, no dia 26 de maio de 2015.

Cada participante recebeu doze folhas de papel retangular, uma folha de papel vegetal e uma folha com um tsuru diagramado passo a passo (os diagramas são discutidos no capítulo 2). As doze folhas retangulares foram transformadas em quadrados para a confecção dos dois modelos modulares, ocupando seis folhas cada um.

Os momentos iniciais consistiram de uma breve introdução sobre origami, origami modular, tipos de módulo, os modelos a serem produzidos e alguns modelos mais tradicionais para exposição. Esta introdução foi pensada para aqueles que não tiveram contato prévio com nenhum tipo de origami e, portanto, não estavam familiarizados nem com a terminologia, nem com os conceitos envolvidos.

Um aspecto importante é o módulo *sonobe* (Fig. 4), vastamente utilizado na confecção de origami modular. Extremamente versátil, e ainda assim de simples confecção, garante a localização ideal de bolsos (locais para encaixe das extremidades) na construção de diversos poliedros.



Figura 4 - Módulo sonobe

Fonte: produção da autora.

O primeiro modelo a ser confeccionado na oficina foi o cubo. Para este, seis unidades do módulo *sonobe* foram utilizadas. As instruções de confecção, tanto dos módulos quanto do encaixe, foi dada através do vídeo disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=AIxR6qNaVEQ> (LEMOS, 2012). Cada participante da oficina tinha a sua disposição um computador com acesso à internet, no qual era possível assistir ao vídeo tutorial. Havia a opção de projetar o vídeo para que todos pudessem acompanhar e executar cada passo simultaneamente, mas optou-se por permitir que cada participante fizesse suas escolhas de estratégia na confecção dos modelos.

De fato, com a liberdade para trabalhar em seu próprio tempo e de acordo com suas próprias habilidades e características, cada participante adotou a abordagem que julgou melhor. Em determinado momento, foi dada a instrução de que todos os módulos deveriam ser produzidos seguindo a mesma orientação (Fig. 5). De fato, se dois módulos são produzidos com orientações diferentes, estes não se encaixam (Fig. 6).

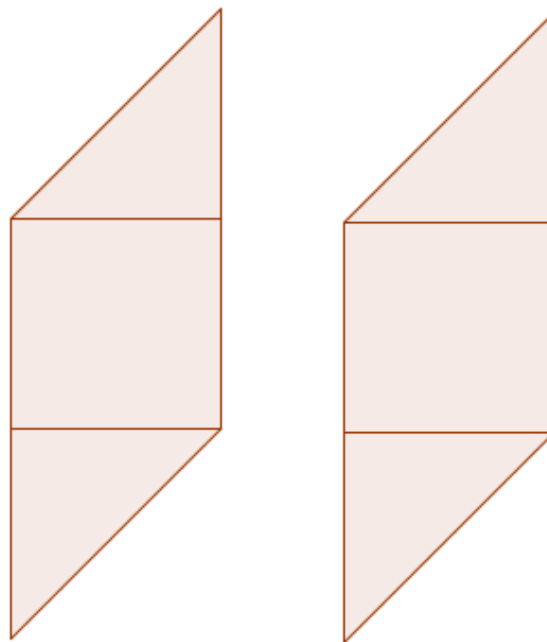


Figura 5 - Orientações do módulo sonobe.

Fonte: Produção da autora.

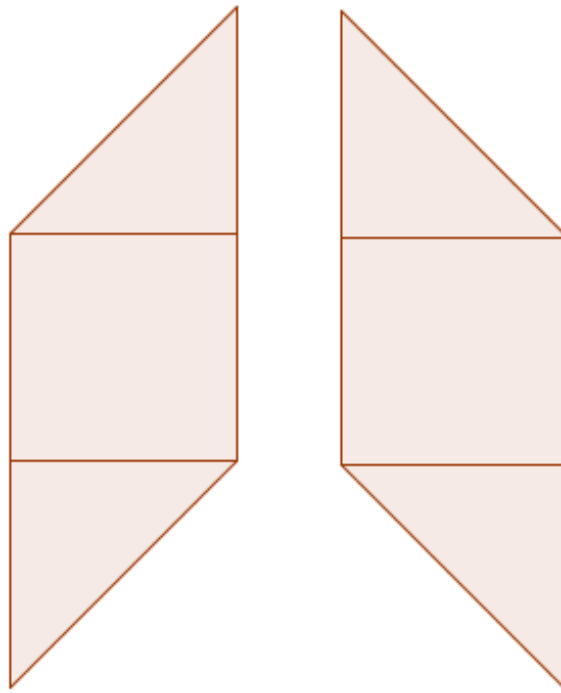


Figura 6 - Orientações do módulo sonobe.

Fonte: Produção da autora.

A grande maioria dos módulos possui um passo específico em sua confecção que determina a orientação. No caso do módulo sonobe utilizado, em seu quarto passo o módulo tem a forma de um retângulo na proporção 2:1 na posição horizontal, e a instrução neste momento é escolher um dos cantos a ser dobrado para cima, enquanto o oposto será dobrado para baixo. Se o executante tiver o cuidado de, no passo em questão, dobrar sempre o mesmo canto para cima, a orientação dos módulos permanecerá sempre a mesma. Caso o executante dobre o canto esquerdo para cima em um módulo, e no módulo seguinte dobre o canto esquerdo para baixo, os módulos ficarão com orientações contrárias.

Esta é uma estratégia bastante comum quando se quer obter sempre a mesma orientação nos módulos, mas que requer que o executante identifique qual é o passo crucial para a determinação da orientação. Esta não foi, entretanto, uma estratégia adotada em massa. Ao invés disso, muitos participantes optaram por uma produção seriada dos módulos. Ao invés de completar um módulo para então iniciar o seguinte, muitos executavam o primeiro passo em cada um dos seis quadrados, para em seguida executar o segundo, e assim até completar todos os passos em todos os módulos. Essa é uma abordagem que permite eficiência no aspecto orientação dos módulos e isenta o executante da necessidade de

identificar os passos decisivos, o que nem sempre é uma tarefa simples. Deste modo, todos os módulos são executados exatamente da mesma maneira.

Houve, neste momento, a sensação de que a abordagem de produção seriada foi adotada por alunos que não possuíam experiência ou conhecimentos prévios sobre origami, pois é sempre uma estratégia segura. Do mesmo modo, a estratégia de dobrar módulo por módulo foi escolhida pelos que dispunham da habilidade de identificar os passos que influenciariam diretamente na orientação final, pois somente neste caso esta representa uma estratégia segura.

Houve também o caso de alunos que não possuíam experiência mas que mesmo assim adotaram a estratégia de produzir módulo por módulo, incorreram no erro de produzir módulos com a orientação errada, e então trocaram de estratégia, adotando a produção seriada.

Todos os participantes obtiveram bons resultados na construção de seus cubos, tanto confeccionando os módulos quanto os encaixando.



Figura 7 - Participante da oficina com seu cubo pronto.

Fonte: Produção da autora.



Figura 8 - Participantes que produziram módulos com orientações contrárias e mudaram de estratégia.

Fonte: Produção da autora.

A segunda atividade promovida na oficina foi a construção de um conjunto de retas tangentes a uma parábola. A atividade consistem em, primeiramente, riscar em uma folha de papel vegetal (tamanho aproximadamente A5) uma reta a e um ponto A fora da reta. A seguir, a instrução foi dobrar o papel de modo que o ponto caísse exatamente sobre a reta. A translucidez do papel vegetal contribuiu muito para a escolha do tipo de papel para esta atividade, pois é necessário que seja possível, no momento da dobra, visualizar tanto o ponto quanto a reta. Além disso, cada dobra no papel vegetal produz uma reta bastante perceptível. A dobra feita ao colocarmos a reta a sobre o ponto A produz uma reta b (Fig. 9).

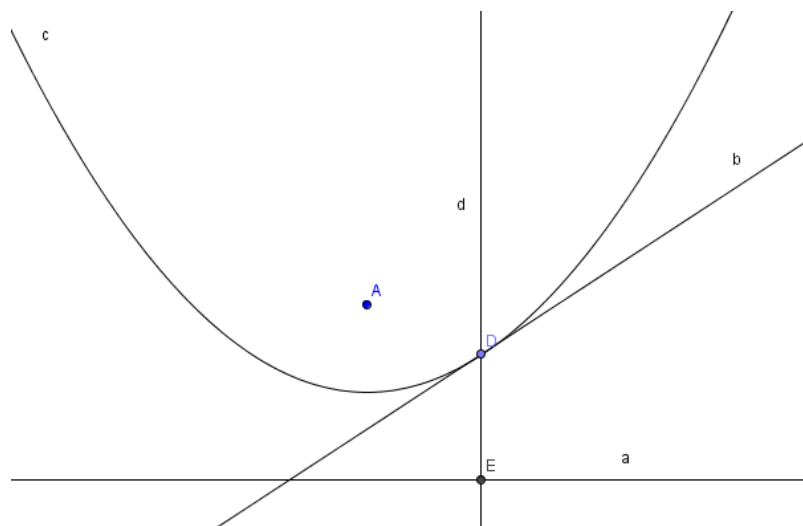


Figura 9 - descrição da atividade.

Fonte: Produção da autora.

Ao repetirmos este procedimento inúmeras vezes, conseguimos um conjunto de retas tangentes à parábola em questão. A instrução, entretanto, foi apenas de dobrar o ponto sobre a reta e repetir este procedimento diversas vezes, com o intuito de que os alunos percebessem o que ocorria.

Houve uma percepção geral de que as retas aproximavam alguma curva, pois cada dobra fica nitidamente marcada no papel, produzindo assim certo efeito visual. Após alguns momentos de discussão entre os participantes, foi concluído que a curva deveria ser uma parábola e que o ponto e a reta dados inicialmente eram seu foco e sua diretriz, respectivamente. Mesmo após forte incentivo, nenhum participante apresentou argumentos como os descritos acima para justificar tal afirmação, mas ocorreu certa aceitação por parte dos alunos.

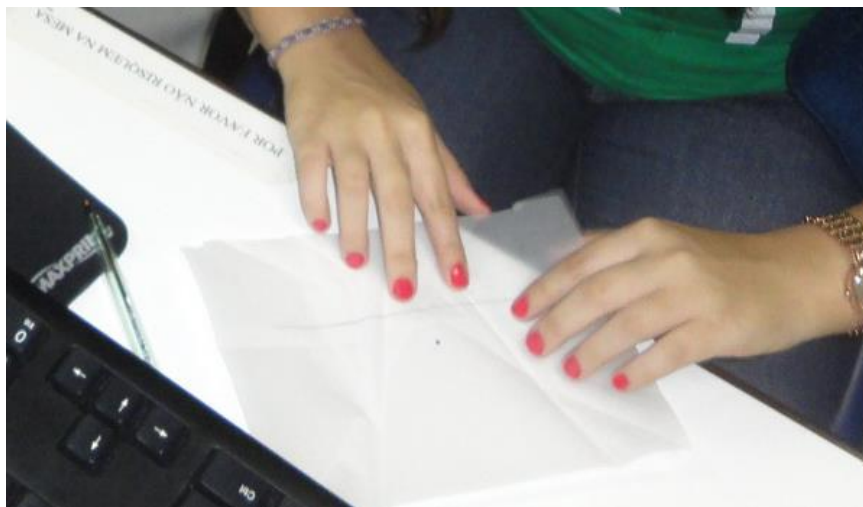


Figura 10 - Participante dobrando a reta sobre o ponto diversas vezes.

Fonte: Produção da autora.

A terceira atividade programada para a oficina foi o tetraedro. As seis folhas retangulares restantes foram transformadas em quadrados para a produção dos seis módulos, com instruções presentes em <https://www.youtube.com/watch?v=cdkpEC4nVWU> (LEMOS, 2012) até 6:50. Este módulo, quando três unidades são encaixadas, produz um triângulo equilátero e pode, portanto, ser utilizado para diversos modelos, como o octaedro, o icosaedro e o tetraedro, já que todos possuem faces triangulares regulares.

Como não dispúnhamos de vídeo tutorial para o encaixe, as instruções foram dadas individualmente conforme cada participante terminava seus módulos. Este modelo, no entanto, apresenta grau de dificuldade mais elevado. Cada módulo necessita de considerável precisão na execução, pois o encaixe não possui uma margem para erros tão grande quanto possuía o encaixe do cubo, por exemplo.

Em função disso, muitos participantes relataram dificuldades em realizar este modelo. Além disso, existe o fato de que esta oficina iniciou às 14 horas e encerrou próximo das 17 horas, ou seja, foi uma oficina longa e possivelmente cansativa. Estes aspectos colaboraram para que alguns (poucos) alunos deixassem a oficina com seu tetraedro incompleto ou simplesmente não começado. Os participantes que completaram seu tetraedro, entretanto, o fizeram com sucesso.

Foi possível notar, assim como ocorreu no cubo, que os alunos adotaram majoritariamente duas estratégias, a de produção módulo por módulo e a de produção seriada, alguns migrando de uma para a outra em meio ao processo. Isto reforça as suspeitas sobre alunos com diferentes níveis de experiência adotarem estratégias diferentes.

Todos os alunos presentes, antes de deixarem o local da oficina, responderam anonimamente ao questionário a seguir.

Questionário

Oficina de Origami – Semana acadêmica 2015/1

Idade _____ Curso _____

1. Avalie, de maneira geral, a prática de origami que você acabou de realizar.
2. a) Você já tinha familiaridade com origami?
b) Alguma vez teve contato com origami em sala de aula?
3. Você acha que origami é uma prática viável para aprendizagem de conceitos de matemática em sala de aula?
4. Se você considera que origami é uma prática viável, justifique.
- 4.1. Neste caso, o que você proporia para seus alunos?
5. Se você respondeu a questão 3 negativamente, justifique.
6. Você vê origami como um potencial recurso a ser utilizado na sala de aula para exploração de conceitos matemáticos? Se sim, em quais?

As respostas foram analisadas e tabuladas conforme os quadros abaixo.

Total de Participantes		21
Curso	Matemática	14
	Estatística	6
	Outro	1
Idade	17	4
	18	5
	19	2
	20	5
	21	2
	22	1
	23	0
	24	0
	25	0
	26	1

Quadro 1 - Total de participantes por curso e idade

Questões		
1	Positiva	20
	Neutra	1
	Negativa	0
2 a)	Sim	15
	Não	6
2 b)	Sim	9
	Não	12
3	Sim	18
	Não	0
	Talvez	3

6	Sim	21
	Não	0
	Talvez	0

Quadro 2 – Respostas das questões objetivas

Este questionário fornece algumas informações. A grande maioria dos alunos avaliou a prática positivamente, mesmo que, destes, a maioria nunca tenha tido contato com origami em situações de sala de aula. Absolutamente todos os participantes veem origami como um potencial recurso, apesar de alguns poucos apresentarem receios sobre a viabilidade de atividades envolvendo origami em sala de aula.

Todas as respostas presentes no item 4.1 eram sugestões de atividades similares às realizadas na oficina, possivelmente com leves modificações, com o objetivo de explorar conceitos da geometria plana e espacial.

5. REFERENCIAL TEÓRICO

Para que ocorra uma análise mais profunda dos acontecimentos relatados no capítulo 4, necessitamos de uma base teórica que forneça conceitos e ideias relevantes e que auxiliem na compreensão dos fatos. Durante a decisão sobre qual seria o referencial adotado, foi possível perceber que muitos trabalhos são publicados na área de origami e matemática, ou seja, são trabalhos que relacionam muito bem aspectos matemáticos envolvidos em origami ou que utilizam origami como ferramenta para resolução de problemas matemáticos. No entanto, pouco é produzido relacionando as teorias educacionais ao ensino de matemática com uso de origami.

Deste modo, a intenção é fazer uso de tal referencial teórico educacional para tentar compreender os acontecimentos relatados no capítulo quatro e disto extrair aspectos que possam ser úteis ao processo de aprimoramento da prática.

A teoria escolhida para análise da prática inicial foi a teoria dos campos conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud. Esta é uma teoria que busca, essencialmente, estudar o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem de competências complexas. Coloca os processos de conceitualização no centro do desenvolvimento cognitivo, ou seja, dedica grande parte de sua atenção a análises conceituais das situações vividas pelo sujeito e a aspectos conceituais dos esquemas desenvolvidos para tais situações. Tem como principal finalidade

“propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos”. (VERGNAUD, 1993)

Um dos pontos importantes sobre a teoria dos campos conceituais é o fato de que esta não procura levar em consideração, quando se estuda aprendizagem de matemática, apenas as situações e seus contextos, ou apenas o simbolismo envolvido nos aspectos matemáticos, mas sim considerar o sentido atribuído ao conjunto de situações e simbolismos. O esquema torna-se um conceito importante quando percebemos que a ação do sujeito presente e atuante na situação, bem como os modos de organização de suas atitudes e comportamentos, é um dos aspectos importantes a ser olhado e compreendido, segundo a teoria dos campos conceituais.

Se interpretarmos o conceito de esquema como este conjunto de ações tomadas por um sujeito atuante em uma situação, ainda é necessário considerar que tais ações são parcialmente tomadas com base em situações previamente vividas, nas quais outros esquemas foram utilizados para aprender outros conceitos, que passam então a fazer parte do acervo.

Para Vergnaud, o campo conceitual é um conjunto de situações, conceitos, problemas, estruturas, relações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e com processos de aquisição que se entrelaçam e que eventualmente se sobrepõem. Pode ser visto também como um conjunto de situações cujo domínio depende do domínio de diversos outros conceitos de naturezas distintas.

O campo das estruturas multiplicativas, por exemplo, é composto de todas as situações que podem ser interpretadas como problemas de proporções, nos quais é necessário utilizar multiplicação, divisão ou alguma combinação destas. Este campo engloba diversos conceitos matemáticos, como, por exemplo, o conceito de função linear, o conceito de razão, número racional, bem como diversos outros, essenciais para o estudo de proporcionalidade. Ainda, estes conceitos estarão presentes em situações diversas, com sujeitos distintos que dispõem de esquemas diferentes pois tiveram vivências diferentes. O domínio de um campo conceitual não ocorre ao longo de meses, mas sim de diversos anos.

A teoria dos campos conceituais ainda traz o conceito de situação, que, segundo Vergnaud, é empregado de maneira similar ao que é feito na psicologia, ou seja, considerar os processos cognitivos e considerar também que as respostas do sujeito são função das situações vivenciadas. Com isto, são apresentadas duas ideias: uma de que existe grande variedade de situações em dado campo conceitual; e outra de que os conhecimentos dos alunos são elaborados por meio de situações já enfrentadas e já dominadas. (VERGNAUD, 1993)

Quando um sujeito é deparado com uma situação, nele são evocados esquemas, conjuntos de ações a serem tomadas pelo sujeito frente a tal situação, e estes esquemas são o que confere sentido à situação, que, por sua vez, é o que dá sentido aos conceitos.

Como a teoria dos campos conceituais toma o conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio gradual deste conhecimento como referência, esta apresenta grande potencial para auxiliar na compreensão do que ocorre em sala de aula nas disciplinas de matemática e ciências. (MOREIRA, 2002)

5.1. ANÁLISE DOS DADOS

Este item consiste em discutir os acontecimentos relatados no capítulo quatro sob a luz das ideias apresentadas no capítulo cinco. Claramente, a teoria dos campos conceituais não consiste somente do que foi apresentado neste trabalho, visto que este é um recorte das ideias que ajudarão a compreender e aprimorar a prática inicial. Do mesmo modo, este não é o único olhar que pode ser lançado sobre os acontecimentos. A teoria dos campos conceituais provê uma visão dos fatos, o que é perfeitamente suficiente para os propósitos deste trabalho.

O primeiro aspecto a ser notado é o uso de diferentes estratégias na confecção dos módulos. Durante o relato da prática, foi observado que alunos com diferentes históricos adotavam estratégias diferentes. Este fato pode ser melhor estudado ao utilizarmos conceitos como o de esquema. Trazido por Vergnaud como “a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dadas”, o conceito de esquema é um dos conceitos básicos e chave para a teoria dos campos conceituais. (VERGNAUD, 1993)

Após o estudo destes conceitos, se repensarmos os acontecimentos ocorridos durante a atividade prática, podemos perceber que o que ocorreu foi, de fato, alunos lançando mão de esquemas diferentes. Claramente, dois sujeitos distintos sempre poderão lançar mão de esquemas distintos, mas, como relatado, era visível uma separação em dois grandes grupos, cada um adotando um tipo de estratégia diferente.

Estes dois grupos encaixam muito bem como representantes das duas classes de situações trazidas por Vergnaud (1993, p. 2). Na primeira delas, o sujeito dispõe das competências necessárias para tratar a situação, enquanto na segunda são necessários o tempo de reflexão e diversas tentativas de resolução. Podemos traçar um paralelo entre a segunda classe de situações e o grupo que adotou a estratégia de produção seriada dos módulos,

enquanto a primeira classe de situações pode ser proximamente relacionada com o grupo de alunos que optou por produzir um módulo após o outro.

O fato de que os dois grupos estavam vivenciando situações completamente diferentes implicou o uso de esquemas diferentes e a adoção de estratégias essencialmente diferentes. O fato de as situações vivenciadas serem tão diferentes para cada um dos grupos decorre de experiências passadas de cada indivíduo.

Experiências com origami são muito particulares. Origami requer o concílio de habilidades motoras e cognitivas, para compreender o que está sendo pedido e para executar a instrução. O processo de dobra, mesmo com anos de familiaridade, nunca deixa de gerar situações nas quais é necessário refletir e executar tentativas (muitas delas falhas) até que se alcance um possível sucesso. Cada diagrama possui inúmeros passos e cada passo é uma situação com a qual o sujeito é deparado, um possível problema a ser enfrentado. O *tsuru*, por exemplo, cujo diagrama foi distribuído na prática, possui 13 passos. Modelos mais complexos, como por exemplo o *kabutomushi*, um besouro criado e diagramado por Satoshi Kamiya em *SuperComplex Origami* (KAMIYA, 2010), possui 238 passos (dentre estes, muitos possuem instruções similares a “repita os passos 40~60 do lado oposto”, ou seja, são 20 passos a serem executados, contabilizando apenas 1).

O momento em que se atinge uma situação deste tipo não é previsível. Quando o sujeito dobra há vários anos, os esquemas previamente adquiridos são colocados em prática constantemente na passagem de um passo ao próximo, mas não é possível saber quando os esquemas disponíveis não mais serão suficientes para que se consiga avançar ao próximo passo. Além disso, quando se atinge este momento, não é raro que se perca todo o trabalho feito até então, pois o papel fica tão fragilizado em função das diversas dobras feitas de maneira incorreta que muitas vezes acaba rasgando, transformando um modelo incompleto em papel inútil.

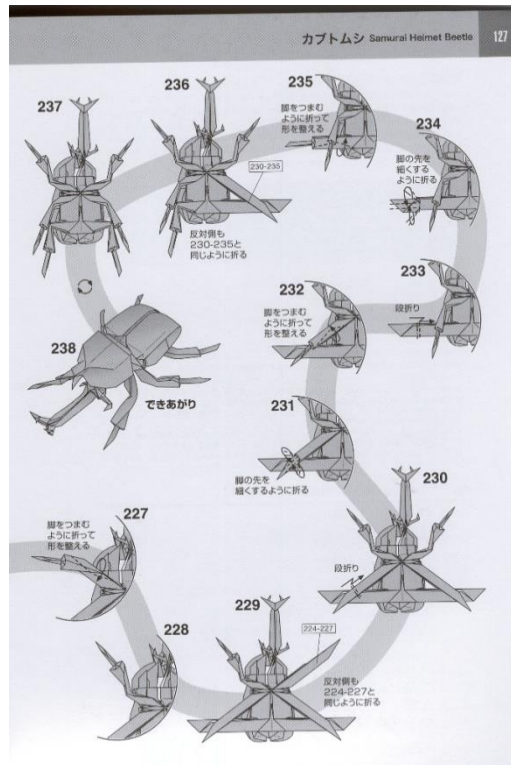


Figura 11 - últimos 11 passos do *kabutomushi*

Fonte: KAMIYA, 2010, p. 127.

Outro aspecto importante sobre os acontecimentos ocorridos na atividade prática foi a atitude dos alunos em relação à atividade de construção das retas tangentes a uma parábola. Durante esta atividade, muitos alunos não perceberam o que estavam construindo, apesar de a percepção de que as retas eram tangentes a alguma curva ser geral.

Claramente, alunos que não conhecem a definição de parábola não compreenderão que as retas serão tangentes a uma. Ao invés disso, com base no que foi observado na prática, muitos alunos que não conheciam a definição de parábola que utiliza o foco e a diretriz apenas intuíram que a curva em questão poderia ser algo perto de uma, ou talvez a própria.

Como a estes alunos faltava certo repertório, era esperado que estes, na busca por um esquema adequado, intuissem alguns fatos que não procedem. Este processo, no entanto estendeu-se também a alunos que já possuíam conhecimentos extensos sobre parábolas, sua definição e suas propriedades. Claramente, alunos com menos conhecimentos sobre parábolas levaram mais tempo para levantar a possibilidade de as retas serem tangentes a uma, mas os alunos com mais conhecimentos, além de não mostrarem certeza sobre qual curva estávamos aproximando, não se mostraram capazes de produzir uma argumentação sólida para comprovar ou refutar seus palpites sobre a curva.

No entanto, não é possível dizer que o aluno que possuía os conhecimentos não foi capaz de inferir nada logicamente porque não foi capaz de encontrar um esquema adequado dentre seu repertório e que isto se deve ao fato de que os conceitos-em-ação, ou seja, os conhecimentos envolvidos no esquema, não foram devidamente apreendidos pelo aluno. Primeiramente, porque não é possível afirmar categoricamente qualquer coisa sobre os processos cognitivos pré-existentes com os dados disponíveis neste trabalho.

Além disso, também é possível que alunos, durante o momento de reflexão, de tentativas e de busca por algum esquema que auxilie na resolução do problema, efetuem tal busca em diretórios errados. Um sujeito em determinada situação efetua uma busca por situações similares, que mostrem afinidade com a situação atual. Caso o sujeito esteja em um contexto inédito, frente a problemas nunca antes pensados, a busca não somente levará mais tempo como também retornará menos resultados, pois o pensante simplesmente não possui dados suficientes.

Muitos alunos presentes na prática, apesar de possuírem conhecimentos sobre matemática, não possuíam conhecimentos sobre origami ou, por exemplo, sobre os axiomas da dobra (HUZITA, H., HATORI, K. 2001), o que pode ter ocasionado a falta de uma argumentação em relação à parábola, pois estes axiomas garantem que as retas serão tangentes a uma parábola e a justificativa pode ser escrita em poucas linhas. Caso o aluno não tenha este conhecimento específico, a justificativa pode ser escrita via geometria Euclidiana. Neste caso, as relações, apesar de não tão diretas, não são de difícil dedução, requerendo apenas certo cuidado no momento da escrita.

Esta é, de certo modo, uma possibilidade mais forte do que o sujeito ter falsamente compreendido conceitos-em-ação presentes em esquemas já utilizados e validados pelos mesmos em situações anteriores.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta original deste trabalho era propor uma prática que contasse não apenas com referencial teórico referente a origami ou a matemática, mas também com referencial teórico educacional. A estratégia adotada foi, então, realizar uma prática que não foi planejada com o suporte de um referencial teórico educacional, encontrar uma teoria que ajudasse a compreender o que ocorreu na oficina e, a partir desta análise, modificar na prática inicial o que se julgasse necessário para então obter uma proposta com maior embasamento teórico educacional.

Os resultados e o retorno obtidos na prática inicial foram, no entanto, extremamente positivos. De fato, o suficiente para tornar possível concluir que a construção e os modelos propostos, em si, não somente podem como devem permanecer os mesmos. Os modelos selecionados são boas escolhas para participantes sem experiência, visto que o grau de dificuldade aumenta do cubo para o tetraedro. Este é um bom aspecto, pois está constantemente desafiando o participante com algo apenas levemente mais difícil do que o esperado.

Algo que foi constatado empiricamente, e provavelmente seria proposto independentemente do referencial teórico escolhido, é o fato de que muitos participantes estavam fisicamente cansados ao terminar o cubo. Não foi constatado exaustão ou esgotamento da parte dos alunos, a ponto de não ser possível executar qualquer outra atividade, mesmo porque a construção das retas tangentes à parábola foi realizada com êxito, mas era visível que estavam cansados o suficiente para que não fosse agradável a construção de outro poliedro com outros seis módulos.

Dado este fato, a única mudança de planejamento consiste em dividir a prática em duas oficinas menores. A primeira oficina inicia com as duas primeiras atividades, o cubo e a construção das retas tangentes à parábola. A segunda oficina deve ocorrer em outro dia, pois os participantes precisam de tempo para refletir sobre a carga de conhecimento adquirido e para iniciar o processo de internalização dos esquemas utilizados durante a primeira oficina. A única atividade a ser realizada é o tetraedro, que de fato exige mais dos participantes. Ambas contam com duração aproximada de noventa minutos. Esta divisão traz duas oficinas bem balanceadas em termos de atividades, duração e provável nível de fadiga dos participantes.

Dada a proposta original deste trabalho, é possível dizer que eram esperadas mudanças brutais no planejamento das atividades, como modificar a abordagem aos poliedros ou o meio de instruções, por exemplo. Foi uma surpresa que tais mudanças não foram necessárias.

Ao invés disso, foi possível perceber que as maiores mudanças podem acontecer no que diz respeito à postura do professor não somente frente às atividades propostas, mas também frente aos alunos.

Quando o sujeito dobra há vários anos e possui, portanto, vasta experiência, é extremamente difícil prever onde estarão as dificuldades ou em quais pontos um participante iniciante tem mais chances de incorrer em erro. O sujeito que pratica origami há anos já tem bem definidos os seus esquemas para situações de complexidade baixa-média. Porque origami é basicamente sobre execução, exercícios de empatia para com iniciantes não são frequentes, portanto o sujeito que já dobra dificilmente reflete sobre estratégias alternativas para situações que, para ele, já estão resolvidas.

Tomemos como exemplo, na prática inicial, o momento em que foi dada a instrução de que todos os módulos deveriam estar na mesma orientação e então diversos participantes adotaram a produção seriada. Antes das leituras, era esperado deste momento que os alunos estivessem produzindo módulo por módulo, e, quando deparados com tal instrução, apenas tomassem certo cuidado, conferindo ao final de cada módulo se estavam todos na orientação correta. Após as leituras, tal instrução provavelmente não seria dada porque foi compreendido que é mais interessante para o aluno, que ainda não possui uma estratégia fixa, experimentar esquemas diferentes e obter alguns erros até o sucesso do que receber uma estratégia pronta de terceiros.

Se o comentário sobre a orientação do módulo se fizer necessário, o professor ainda pode questionar o grupo de alunos sobre a necessidade de ter todos os módulos na mesma orientação ou sobre a possibilidade de encaixar módulos com orientações contrárias. Induzir o aluno a produzir um módulo em cada orientação apenas para testar o encaixe e constatar que ele não é possível ainda é uma opção mais interessante para o aluno.

Após as leituras, este é um fato extremamente claro e que beira o óbvio. Antes das leituras, no entanto, não é trivial considerar tais possibilidades para algo que já está tão bem resolvido. Mesmo os vídeos tutoriais, a princípio, não levam em consideração uma abordagem como a de produção seriada, pois o vídeo consiste em um tutorial de como dobrar um módulo, seguido de um aviso indicando o número total de módulos necessários e então um tutorial de como os módulos são encaixados. Não foi necessário, no entanto, modificar o meio de instruções ou reformular o vídeo, pois é possível parar o vídeo por tempo indeterminado para

executar os passos em quantos módulos for necessário. Os vídeos, afinal, comportam a estratégia de produção seriada, mas definitivamente não foram pensados com esta abordagem em mente.

A teoria dos campos conceituais ajudou a compreender que a postura do professor, nesse contexto, deve ser aberta a estratégias que venham dos alunos (antes mesmo de expor suas próprias), mas ao mesmo tempo deve provocar dúvidas nos alunos, para que estes consigam ou consolidar seus esquemas ou reconhecer seus erros e buscar novas opções. Apesar de esta soar como uma conclusão simples, em nenhum momento pré-teoria houve a suspeita de que isto não estivesse ocorrendo. A percepção de que esta mudança na postura do professor era necessária, além de concordar com a Teoria dos Campos Conceituais, ficou clara apenas após as leituras.

O referencial teórico educacional foi de suma importância neste trabalho. Sem as ideias de Vergnaud, não seria possível concluir que havia uma mudança significativa de postura a ser feita. Ainda assim, diversos alunos relataram, na prática inicial, que viam origami como um recurso viável para sala de aula e que era possível aprender conceitos de geometria com tais atividades. Logo, podemos concluir que esta prática pode ser muito mais bem aproveitada nesse sentido se o professor estiver disposto a efetuar esta mudança no seu modo de conduzir as discussões e as atividades.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABE, Hisashi, **Sugoizo Origami**, Nippon Hyoronsha Co. Ltd., Tokio, 2003.

ALPERIN, Roger C. **A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers**. New York Journal Of Mathematics, New York, p. 119-133. 10 jul. 2000. Disponível em: <<http://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2015.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko. **Explorando Geometria com Origami**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em <<http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>> Acesso em: 11 out. 2015.

MORITSUGU, Shuichi. **Solving Cubic Equations by ORIGAMI**. Tsukuba, 2006. Disponível em <<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1514-25.pdf>>. Acesso em: 20 out. 2015.

KAMIYA, Satoshi. **World of super-complex origami**. Origami House. Tokio, 2010.

LEMOES, Júlia Domingues. **Poliedros Platônicos de Origami**. 2012. Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=cdkpEC4nVWU&list=PLpK7Q6eH_DEQjEBmZxY6yDotgUqea7hee> Acesso em: 15 out. 2015.

LANG, Robert J. **Glossary**. 2003. Disponível em: <<http://www.langorigami.com/glossary/glossary.php>>. Acesso em: 20 out. 2015.

LANG, Robert J. **Origami design secrets: mathematical methods for an ancient art**. Natick, MA: A. K. Peters, 2003.

LUCAS, Eliane dos Santos Corsini **Uma abordagem didática para a construção dos poliedros regulares e prismas utilizando origami**. Lavras, 2013. Disponível em <<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/215>>. Acesso em 02 abr. 2015.

MOREIRA, Marco Antônio **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Investigações em Ensino de Ciências, v.7, n.1, 2002.

MOROSINI, Thais Helena Nakassima; WROBEL, Julia Schaetzle. **Poliedros Estrelados E Origami: Uma Experiência Na Formação De Professores**. Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco, ISSN 2316-7297 - Volume 03, Número 01, 31 – 41, 2014. Disponível em <<http://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/viewFile/140/242>> Acesso em 26 out. 2015.

SILVA, Guilherme Nogueira **Origamática: o origami no ensino-aprendizagem de matemática**. Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/18223/000728092.pdf>. Acesso em 01 abr. 2015.

Vergnaud, Gérard (1993). **Teoria dos campos conceituais**. In Nasser, L. Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26.