UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ERICH PICOLI RAMOS

**ATIVIDADES DE MATEMÁTICA DIFERENCIADAS: UM CONVITE PARA OS ALUNOS DO ENSINO REGULAR**

PORTO ALEGRE

2015

ERICH PICOLI RAMOS

# ATIVIDADES DE MATEMÁTICA DIFERENCIADAS: UM CONVITE PARA OS ALUNOS DO ENSINO REGULAR

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering

PORTO ALEGRE

2015

ERICH PICOLI RAMOS

**ATIVIDADES DE MATEMÁTICA DIFERENCIADAS: UM CONVITE PARA OS ALUNOS DO ENSINO REGULAR**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

______________________________________

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Instituto de Matemática - UFRGS

______________________________________

Prof.ª Dr.ª Miriam Telichevesky

Instituto de Matemática - UFRGS

______________________________________

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering

Instituto de Matemática – UFRGS

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a oportunidade de seguir com o trabalho e ter me dado força e saúde.

À Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering, minha orientadora, pela extrema ajuda em tão pouco tempo, me incentivando a continuar e me auxiliando a melhorar, sempre possuindo bom-humor.

À banca examinadora, Prof.ª Dr.ª Miriam Telichevesky e Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, por terem se disponibilizado de bom grado a avaliar o meu trabalho.

À minha família, principalmente meus pais e minha irmã, por terem me apoiado e incentivado muitas vezes durante toda a minha vida.

Aos meus amigos mais próximos, por tornarem o cotidiano mais agradável e não tão monótono.

À Escola Estadual de Ensino Médio Campos Verdes, por ter me recebido de braços abertos, permitindo a aplicação da minha prática em um período de tempo apertado.

À UFRGS, por me oportunizar este momento, me permitindo dar um passo adiante em meu futuro.

## RESUMO

Este trabalho investiga a possibilidade de se incentivar o pensamento matemático de alunos de uma sala de aula regular com atividades diferenciadas. Tais atividades foram realizadas com base em uma sequência didática aplicada com alunos com Altas Habilidades de um projeto de extensão da UFRGS. Para a elaboração e aplicação da prática, são utilizadas as ideias de POLYA (1995), SKOVSMOSE (2000) e também os parâmetros curriculares nacionais. A prática é considerada bem sucedida devido ao entusiasmo demonstrado pelos alunos nas atividades propostas e ao avanço obtido nas justificativas de suas afirmações.



**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino de Matemática; Ensino Regular; Sequência Didática; Altas Habilidades.

**ABSTRACT**

This work investigates the possibility to encourage students' mathematical thinking in a regular classroom with distinguished activities. These activities were developed based on a didactic sequence applied with UFRGS' extension project for gifted students, POLYA (1995), SKOVSMOSE (2000) and the Brazilian curricular parameters. The practice is considered successful, since students were enthusiastic about the proposal and showed advancement in justifying their statements.



**KEYWORDS:** Math Education; Regular Education; Didactic Sequence; Giftedness.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é baseado nas atividades do projeto de extensão da UFRGS “Atividades de Matemática Para Alunos com Altas Habilidades”, coordenado pela professora Luisa Rodríguez Doering desde 2005. O autor deste trabalho é bolsista do projeto desde 2013.

O projeto de extensão consiste na elaboração de oficinas de matemática desafiadoras e instigantes para alunos com altas habilidades em matemática da rede pública de ensino de Porto Alegre.

As atividades do projeto são diferenciadas das trabalhadas na sala de aula regular em vários aspectos: liberdade para explorar situações-problema, incentivo à generalização e à utilização de mais de uma estratégia para solucionar problemas.

O trabalho desenvolvido nas oficinas valoriza o pensamento individual de cada aluno, dando liberdade para que desenvolva suas ideias, sem se restringir a uma única estratégia, oferecendo-lhe mais independência, de forma que ele tenha seu pensamento matemático estimulado.

As atividades elaboradas para as oficinas usualmente iniciam com uma questão simples ou um caso específico que pode ser manipulado, em geral, com material concreto, e que fornece a base para um caso mais genérico. Na sequência, os alunos são convidados a utilizar o que descobriram para solucionar um problema maior, mais geral.

Também é solicitado aos alunos que justifiquem por escrito as suas respostas e ainda expliquem oralmente as estratégias utilizadas na solução dos problemas. Durante esse processo de escrita e apresentação oral, os questionamentos da equipe estimulam os alunos a pensarem em outra maneira para solucionar as situações-problema dadas e desse modo, seguidamente são descobertas várias estratégias corretas e diferentes.

Os alunos do projeto de extensão da UFRGS, em geral, participam das oficinas com muito entusiasmo, solucionando os problemas propostos com rapidez e bastante criatividade. Dessas constatações surgiram as questões motivadoras deste trabalho. Será que os alunos do ensino regular receberiam bem essas atividades? Será que conseguiriam solucioná-las? Ou seja: será que algumas atividades diferenciadas utilizadas no projeto de extensão acima mencionado podem servir de base para a construção de uma sequência didática para a sala de aula regular? A outra pergunta decorrente é: essas atividades estimulam o pensamento matemático dos alunos?

Para responder tais questões, o trabalho é estruturado da forma a seguir.

A seção 2 deste trabalho justifica o interesse em se pensar em novas didáticas para o ensino de Matemática na escola regular e ainda expõe a metodologia utilizada para elaborar e dar continuidade ao trabalho realizado.

Na subseção 2.2, é apresentado o problema motivador da sequência didática, sua trajetória e reestruturação para uma sala de aula regular; bem como sua resolução.

Na subseção 2.3, a sequência didática aplicada com os alunos é comentada questão a questão, tendo seus objetivos parciais evidenciados, assim como suas diferenças em relação às atividades aplicadas com os alunos do projeto de extensão.

Na seção 3, é realizado um relato sobre a aplicação da prática elaborada em uma sala de aula regular, onde as respostas dos alunos são analisadas e comentadas.

A seção 4 apresenta as alterações feitas na sequência didática com base na análise realizada e na experiência obtida com os alunos.

Na seção 5, seguem as considerações finais do trabalho após a aplicação e análise da sequência.

No Apêndice A, é apresentada a sequência didática revisada com as alterações comentadas na seção 6 deste trabalho.

No Apêndice B, é apresentada a sequência didática revisada com comentários e sugestões de encaminhamentos para o professor.

## 2 JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA

Geralmente, na sala de aula regular, se percebe alunos desestimulados com o modo como a Matemática é abordada. As aulas costumam ser expositivas. Os alunos, em sua maioria, não participam e apenas observam o professor, tomando papel passivo na aula. Eles não são instigados a interagir com o professor e a questionar os conteúdos ministrados; limitando-se a resolver exercícios sugeridos, aplicando fórmulas ou utilizando algoritmos conhecidos, sem entender seu sentido.

Desse modo, a valorização da resposta em oposição à compreensão do método em sala de aula reflete o sistema avaliativo atual de educação do Brasil (Prova Brasil, ENEM, vestibulares em geral).

Por outro lado, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o processo de obtenção da resposta é tão importante quanto a mesma. O domínio do saber fazer e o saber aprender:

> "[...] passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento." (BRASIL, 2000, p. 41).

Além disso, também é um objetivo geral dos PCN que o aluno esteja apto a:

> "Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;" (BRASIL, 1998, p.48)

Sendo assim, o modo como a Matemática costuma ser abordada na sala de aula regular não contempla todos os aspectos dos PCN, uma vez que apenas a aplicação de fórmulas e algoritmos costuma ser valorizada nas escolas.

De acordo com Skovsmose (2000), a educação matemática tradicional se encontra no paradigma do exercício, onde:

> "[...] o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correta." (SKOVSMOSE, 2000, p. 67)

Para sair do paradigma do exercício, é necessário transformar a atividade rotineira e metódica da sala de aula regular em um cenário para investigação. Um cenário para investigação, para Skovsmose (2000), é aquele que convida os alunos a perguntarem e procurarem explicações. Nele, o aluno é o responsável pelo processo. Uma vez que os alunos se envolvem com o cenário, ele passa a ser um ambiente de aprendizagem.

Assim, inovar nas aulas de matemática com atividades diferenciadas pode mostrar aos alunos outra visão da Matemática, saindo do paradigma do exercício e entrando em um cenário de investigação. Um cenário que os convide a explorar um problema e criar uma estratégia para lidar com o mesmo, não aplicando cegamente uma fórmula ou se restringindo a apenas uma estratégia.

## 2.1 METODOLOGIA

Para atingirmos o objetivo deste trabalho, elaboramos uma sequência didática para uma sala de aula regular, com base em algumas atividades exploradas no projeto de extensão.

Nas oficinas oferecidas pelo projeto, três professores e dois bolsistas atendem os alunos individualmente, sempre que necessário, pois uma característica dos alunos com Altas Habilidades é a preferência pelo trabalho individual. Tal ambiente não pode ser reproduzido no espaço escolar padrão, pois geralmente a escola não dispõe dos meios suficientes para torná-lo possível – há apenas um professor e mais alunos.

Assim, as práticas precisam ser adaptadas para corresponder ao novo ambiente em que serão aplicadas. Uma das modificações planejadas é a reestruturação da proposta para o trabalho em grupo. Pensamos que assim proporcionaremos ao grupo a oportunidade de desenvolver autonomia para compreender a tarefa e solucioná-la apenas com o direcionamento do professor, uma vez que o professor ali terá o papel de guia, não sendo a “fonte de conhecimento” da sala de aula regular.

De acordo com Polya (1995, p 1): “O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso.” Sendo assim, a autonomia do aluno na resolução de problemas deve ser estimulada, mas não de maneira extrema: o aluno deve ter apoio para progredir em suas ideias conforme houver necessidade. Este é outro fator que nos incentiva a optar pelo trabalho em grupo: ele pode fornecer a motivação e a estrutura necessárias para que o aluno trabalhe em suas ideias, sem necessidade da verificação do professor em cada etapa.

O trabalho em grupo estimula a troca de ideias e a colaboração entre os alunos, possibilitando que os mesmos tenham mais estabilidade em suas afirmações e justificativas, assim desenvolvendo mais a segurança dos alunos na explicação de suas estratégias, o que é apoiado pelos PCN, pois em Brasil (2000) consta que trabalhar em grupo produz flexibilidades no pensamento do aluno, auxilia-o a desenvolver a autoconfiança necessária para se engajar numa atividade, na aceitação do outro, na divisão de trabalho, na responsabilidade e na comunicação com os colegas. Ao fazer parte de uma equipe o aluno exercita a autodisciplina e o desenvolvimento da autonomia e do automonitoramento.

Além disso, é um objetivo geral dos PCN que os alunos tenham confiança nas soluções que encontrarem. Em Brasil (1998, p. 48): "Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções." E também que trabalhem bem em equipe:

> "Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles." (BRASIL, 1998, p.48)

Iniciaremos o trabalho solicitando que a turma se divida em grupos de 3 alunos. A seguir, apresentaremos as atividades, fornecendo apenas recomendações iniciais sobre a necessidade de explicar o processo de solução da situação-problema, justificando suas respostas. Mais direcionamentos serão dados, preferencialmente na forma de questionamentos, apenas quando necessário, para incentivar a autonomia do aluno. Tal comportamento é motivado por Polya (1995, p.1):

> "Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. [...] O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante."

Assim, procuraremos não interferir muito no pensamento dos alunos, assumindo um papel mais passivo, deixando-os raciocinar em seu próprio ritmo e os encaminhando apenas quando necessário.

O tipo de atividade que desenvolveremos inicia com um processo de experimentação do aluno com a resolução, de maneira intuitiva, de casos particulares, podendo ser realizada sem a criação de uma estratégia. Em um segundo momento, os alunos entram em um estágio mais abstrato, com problemas mais gerais, onde são incentivados a elaborar um plano para solucionar o problema, passando a pensar nas situações com base no que já investigaram.

Através da aplicação deste trabalho, poderemos responder um dos objetivos do projeto, que consiste em saber se a aplicação das atividades diferenciadas, com base nas oficinas do projeto de extensão já mencionado para uma sala de aula regular, pode ser aplicada com sucesso.

Toda a produção dos alunos decorrente da aplicação das atividades será recolhida e analisada. Observaremos, na escrita dos alunos, suas estratégias para investigar as situações-problema oferecidas e também procuraremos entender o modo como validam suas soluções.

Bogdan e Biklen (1994) discorrem sobre algumas características da pesquisa qualitativa. Dentre elas, citam que, na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, considerando o investigador como instrumento principal. A pesquisa é descritiva, ou seja, seus investigadores se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados, e o significado é de importância vital em sua abordagem.

Sendo assim, acreditamos que a pesquisa qualitativa é a mais adequada para esta proposta, pois o foco é o processo inteiro no qual o aluno desenvolve seu pensamento matemático, procurando explicar o que está fazendo, e não apenas procurando respostas com o auxílio de um algoritmo ou fórmula.

Com essa análise, esperamos evidenciar a importância deste tipo de atividade para um aprendizado mais significativo para os alunos. Finalizaremos o trabalho apresentando a proposta aplicada revisada com base nas atividades da oficina e sua análise.

## 2.2 A ORIGEM DO PROBLEMA

O problema que originou a sequência didática aplicada no projeto de extensão da UFRGS foi apresentado na Olimpíada da Estônia de 2004/2005, traduzido abaixo:

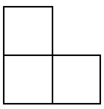


Figura 1: Triminó

*Estonian Math Competition-2004/2005 - Um tabuleiro* $5 \times 5$ *é coberto com 8 peças em "L", como a peça da Figura 1, deixando um quadrado do tabuleiro livre. Determine todos os quadrados no tabuleiro que podem ficar livres.*

Chamaremos as peças em "L" de triminós. Para tornar a resolução desse problema possível para os alunos com Altas Habilidades do projeto de extensão da UFRGS, nos reunimos e trabalhamos em questões que auxiliassem os alunos a desenvolver uma estratégia de resolução, porém, ao trabalhar com essas questões auxiliares, nos deparamos com diversas ideias e percebemos vários resultados tão interessantes quanto a própria questão original.

Desenvolvemos então várias atividades diferentes, utilizando os triminós. Neste trabalho, focamos em um resultado que possui uma recursão não trivial, enunciado a seguir.

***Teorema*:** *Para todo $n > 3$, o quadrado $n \times n$ pode ser totalmente preenchido por triminós se, e só se, $n$ é divisível por* 3.

Com base nesse teorema, elaboramos uma proposta didática com o objetivo de responder a seguinte pergunta: Em geral, para que tipo de $n$, um tabuleiro $n \times n$ pode ser preenchido pelos triminós e quais as estratégias necessárias para preenchê-los?

Oferecemos um esboço de demonstração do teorema que norteia o desenvolvimento da estratégia de resolução do problema, que é o objetivo da sequência didática deste trabalho.

Iniciamos apresentando dois resultados preliminares.

***Proposição 1*:** *Para todo $n \geq 2$, o retângulo $n \times 6$ pode ser totalmente preenchido por triminós.*

Para mostrar tal resultado, utilizamos a 2ª forma da indução em $n$.

A figura abaixo mostra como preencher o tabuleiro $2 \times 6$, provando a base de indução para $n = 2$.

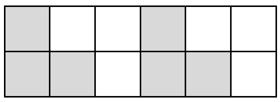


Figura 2: Base de Indução da Proposição 1

Suponhamos que, para $2 \leq k \leq n$, os retângulos $k \times 6$ podem ser totalmente preenchidos por triminós. Vamos mostrar que o retângulo $(n + 1) \times 6$ também pode ser totalmente preenchido por triminós.

Analisaremos os 2 possíveis casos: $n$ par e $n$ ímpar.

Caso $n = 2, n + 1 = 3$ e assim, podemos preencher o tabuleiro como na figura abaixo:

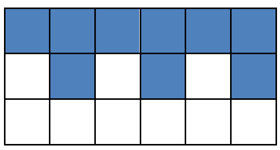


Figura 3: Tabuleiro $\mathbf{3 \times 6}$

Se $n > 2$ é par, então $(n + 1)$ é ímpar e $n + 1 \geq 5$. Logo, $2 \leq (n + 1) - 3 \leq n$. Assim, pela hipótese de indução, o retângulo $[(n + 1) - 3] \times 6$ pode ser totalmente preenchido por triminós. Então, colocando um retângulo $3 \times 6$ (como acima) abaixo do $[(n + 1) - 3] \times 6$ conseguimos preencher totalmente um retângulo $(n + 1) \times 6$.

Se $n > 2$ é ímpar, então $(n + 1)$ é par e $2 \leq (n + 1)/2 \leq n$. Assim, pela hipótese de indução, o retângulo $[(n + 1)/2] \times 6$ pode ser totalmente preenchido por triminós. Tomando 2 desses retângulos e os colocando um abaixo do outro, conseguimos preencher totalmente um retângulo $(n + 1) \times 6$.

Então, pelo Princípio de Indução Matemática, temos que, para todo $n \geq 2$, o retângulo $n \times 6$ pode ser totalmente preenchido por triminós. □

Esse resultado é a base de indução da proposição a seguir.

***Proposição* 2:** *Para todo $n \geq 2$ e para todo $k \geq 1$, o retângulo $n \times 6k$ pode ser totalmente preenchido por triminós.*

Essa proposição pode ser mostrada por indução em $k$, o que não faremos aqui, mas é fácil ver que, agrupando os retângulos $n \times 6$, que já sabemos como preencher completamente pela proposição auxiliar 1, conseguimos montar um retângulo $n \times 6k$. Como o retângulo $n \times 6k$ é composto por retângulos $n \times 6$, podemos preenchê-lo completamente com triminós.

A partir dessa proposição, podemos demonstrar o teorema que desejamos.

Para demonstrarmos a implicação "Para todo $n > 3$, se o quadrado $n \times n$ pode ser totalmente preenchido por triminós então o $n$ é divisível por 3", utilizaremos a contrapositiva dessa afirmação. Ou seja, se o $n$ não é divisível por 3, então o quadrado $n \times n$ não pode ser totalmente preenchido por triminós, para todo $n > 3$.

Suponhamos que $n$ não seja divisível por 3. Logo, existe $q > 0$ e $r \in \{1,2\}$ tais que $n = 3q + r$. Assim, temos que $n^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2$.

Obtendo dois casos:

Se $r = 1$, temos $n^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$.

Se $r = 2$, temos $n^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$.

Nos dois casos, $n^2$ não é divisível por 3, o que impossibilita o preenchimento total de um tabuleiro $n \times n$ por triminós, pois cada triminó possui 3 casas em sua composição.

Para demonstrar a implicação “Para todo $n > 3$, se $n$ é divisível por 3, então o quadrado $n \times n$ pode ser totalmente preenchido por triminós.” utilizaremos a 2ª forma do Princípio de Indução.

Como todo $n$ múltiplo de 3 é da forma $3t$ para algum $t$, vamos mostrar, por indução em $t$, que para todo $t \geq 2$, o quadrado $3t \times 3t$ pode ser totalmente preenchido por triminós.

Base de indução: $t = 2$, temos o quadrado $6 \times 6$, que já sabemos como preencher pela proposição 1.

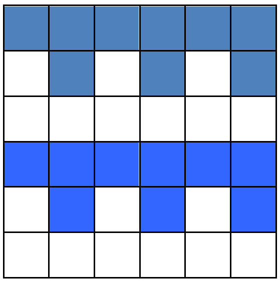


Figura 4: Tabuleiro $\mathbf{6 \times 6}$

Suponhamos que, para $2 \leq k \leq t$, os quadrados $3k \times 3k$ podem ser totalmente preenchidos por triminós. Vamos mostrar que os quadrados $3(t+1) \times 3(t+1)$ também podem ser totalmente preenchidos por triminós.

Se $t = 2$, temos $t + 1 = 3$, obtendo o quadrado $9 \times 9$, que pode ser preenchido da seguinte maneira:

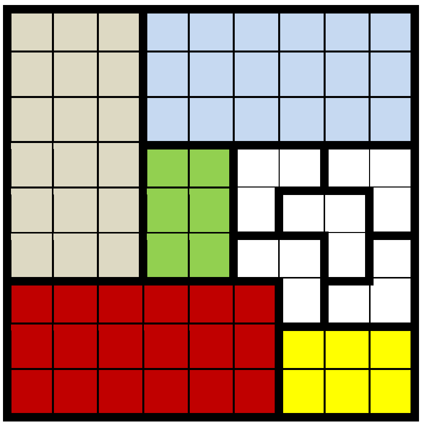


Figura 5: Tabuleiro $\mathbf{9 \times 9}$

Temos dois casos:

Se $t > 2$ é par, existe $q$ inteiro, com $2 \leq q < t$, tal que $t = 2q$, logo $t + 1 = 2q + 1$ e $3(t+1) = 6q + 3 = 6(q-1) + 9$.

Desse modo,

$$[3(t+1)]^2 = 36(q-1)^2 + 2[6(q-1)]9 + 9^2 = \{3[2(q-1)]\}^2 + 2[6 \cdot 9(q-1)] + 9^2.$$

Como $t = 2q$ e $q \geq 2$, temos que $2 \leq 2(q-1) = 2q-2 = t-2 < t$. Logo, pela hipótese de indução, o quadrado $\{3[2(q-1)]\} \times \{3[2(q-1)]\}$ pode ser totalmente preenchido por triminós. Pela Proposição 2, sabemos que os retângulos $6 \times 9(q-1)$ são totalmente preenchidos por triminós. Assim, podemos preencher o quadrado $[3(t+1)] \times [3(t+1)]$ como na Figura 6 a seguir.

$6 \times (q-1)$ $\quad$ $9$

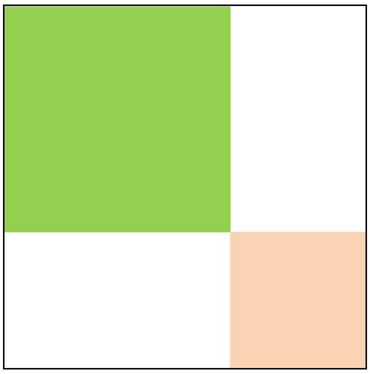


Figura 6: Quadrado $[\mathbf{3}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})] \times [\mathbf{3}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})]$

Se $t > 2$ é ímpar, existe q inteiro, com $2 \leq q < t$, tal que $t = 2q+1$. Logo, $t+1 = 2q+2 = 2(q+1)$ e $[3(t+1)]^2 = \{3[2(q+1)]\}^2 = 4[3(q+1)]^2$.

Como $2 \leq q < t$, temos que $2 < q+1 \leq t$. Assim, pela hipótese de indução, o quadrado $3(q+1) \times 3(q+1)$ pode ser totalmente preenchido por triminós. Se agruparmos 4 desses quadrados obtemos o quadrado $3(t+1) \times 3(t+1)$ totalmente preenchido por triminós, como na Figura 7 a seguir.

$q+1$

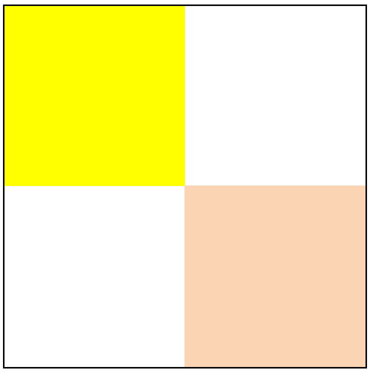


Figura 7: Quadrado $\mathbf{3}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1}) \times \mathbf{3}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})$

Assim, os quadrados $3t \times 3t$ podem ser totalmente preenchidos por triminós para todo $t \geq 2$. $\square$

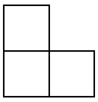
## 2.3 SEQUÊNCIA COMENTADA

Nesta seção apresentamos a sequência didática desenvolvida a partir das atividades utilizadas com os alunos com altas habilidades do projeto de extensão da UFRGS, com comentários em cada questão evidenciando seus objetivos parciais e as diferenças em relação às atividades aplicadas com os alunos do projeto.

A seguir, apresentamos a nossa proposta de sequência.

EXPLORANDO TRIMINÓS

Triminó

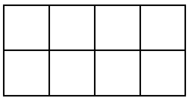


1) Preencha, se possível, os tabuleiros abaixo usando triminós, sem sobrepô-los, girando as peças sempre que necessário.

Tabuleiros do tipo 2xn

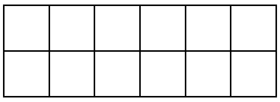
2x3

2x4

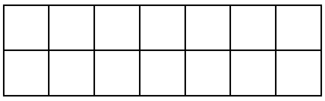


2x5

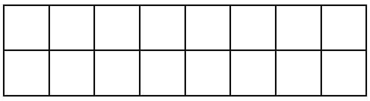
2x6



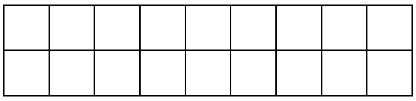
2x7



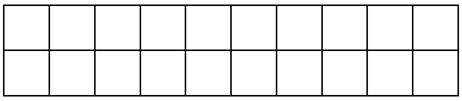
2x8



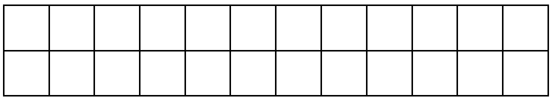
2x9



2x10



2x12



a) Será possível preencher um tabuleiro 2x20 com triminós? E um 2x21?

b) Quais dos tabuleiros 2xn acima (com duas linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram?

c) Quando o tabuleiro 2xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

d) Quando o tabuleiro 2xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

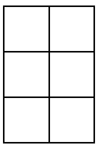
Nesta atividade, o problema é apresentado aos alunos de maneira direta: precisam apenas preencher os tabuleiros com os triminós. O objetivo desta atividade é levar os alunos a perceberem que os únicos tabuleiros $2 \times n$ que podem ser preenchidos totalmente são os que possuem o $n$ múltiplo de 3. Esta atividade é a base para as questões posteriores e também inicia o processo de escrita com justificativa, o que geralmente não é requisitado ao aluno. Desse modo, os alunos não preencherão os tabuleiros aleatoriamente, sendo convidados a pensar sobre os mesmos, com perguntas que os auxiliarão a criar uma estratégia para os próximos problemas.

Pensamos que os alunos não encontrarão muitas dificuldades em tal parte, visto que os tabuleiros iniciais são fáceis. Ainda assim, podem errar e tentar novamente, caso necessário. As atividades começam com tabuleiros pequenos e fáceis, mas logo os tabuleiros se tornam maiores e se torna mais difícil para que continuem fazendo por tentativa e erro. No final do tabuleiro $2 \times 12$, quando os alunos já devem ter se familiarizado com o problema, os alunos são questionados de maneira a levar o aluno à elaboração de um plano que responda tais questões. Colocamos os tabuleiros $2 \times 20$ e $2 \times 21$ de modo que o aluno não queira resolver por tentativa e erro, e assim, para responder as questões, precisarão pensar a respeito do problema e formar uma estratégia.

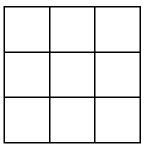
Então repetimos a sequência, pensando nas mudanças causadas ao adicionarmos uma nova linha ao tabuleiro.

2) Tabuleiros do tipo 3xn

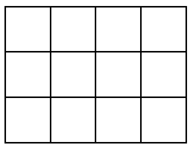
3x2



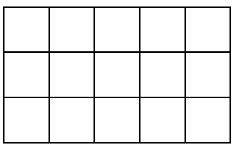
3x3



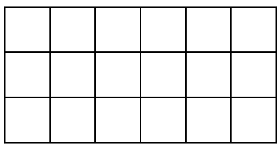
3x4



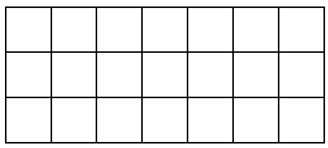
3x5



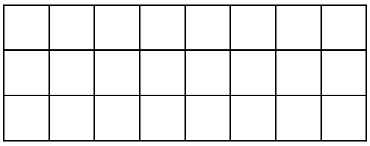
3x6



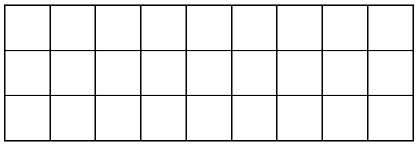
3x7



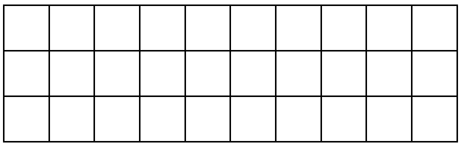
3x8



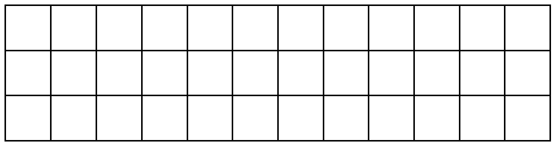
3X9



3x10



3x12



a) Será possível preencher um tabuleiro 3x21 com triminós? E um 3x244?

b) Quais dos tabuleiros 3xn acima (com três linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

c) Quando o tabuleiro 3xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

d) Quando o tabuleiro 3xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

Após a familiarização com o problema, já tendo se pensado em uma estratégia, ao preencher os tabuleiros $3 \times n$, os alunos se deparam com alguns tabuleiros que não podem ser preenchidos no caso $2 \times n$.

Para esta atividade, o objetivo é identificar que os tabuleiros $3 \times n$ que podem ser preenchidos totalmente são que possuem o $n$ par.

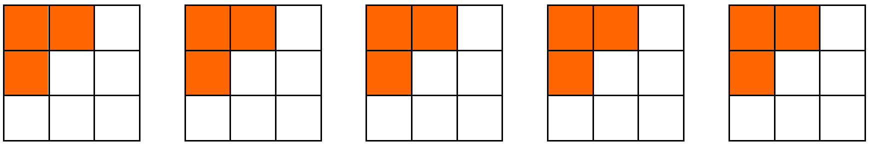
Depois de responder as questões, os alunos são convidados a explorar o tabuleiro $3 \times 3$ preenchendo o canto esquerdo do tabuleiro com os triminós nas 3 maneiras possíveis, os introduzindo ao processo de exaustão.

Escolhemos o $3 \times 3$ pois é o primeiro do grupo $3 \times n$ onde restam 3 quadrados sem que seja possível preenchê-lo.

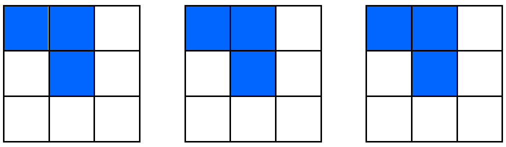
Esta atividade foi feita com o intuito de mostrar ao aluno que não basta que apenas digam que um tabuleiro não pode ser preenchido sem algum argumento, apresentando então um método para a justificativa: exaustão.

3) Será que realmente não conseguimos preencher um quadrado do tipo 3x3 com triminós? Vamos tentar todas as maneiras!

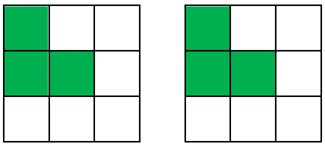
(I)



(II)



(III)



4) Existe alguma outra maneira de preencher o canto esquerdo?

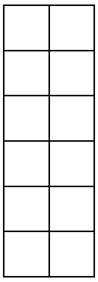
- Agora já sabemos que o tabuleiro 3x3 não pode ser preenchido por triminós.

Na versão aplicada com os alunos do projeto de extensão da UFRGS, aprofundamos ainda mais a questão, analisando o preenchimento do tabuleiro $3 \times 3$ quando retiramos casas do mesmo.

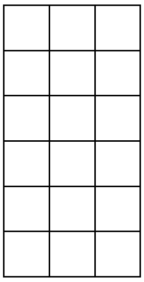
A seguir, os alunos exploram os tabuleiros $6 \times n$ e são convidados a concluir sobre seu preenchimento, argumentando sobre suas conclusões. Mais ainda, esta questão será a base para a construção dos tabuleiros quadrados que podem ser completamente preenchidos por triminós.

5) Tabuleiros do tipo 6xn

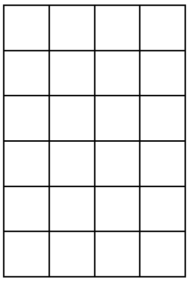
6x2



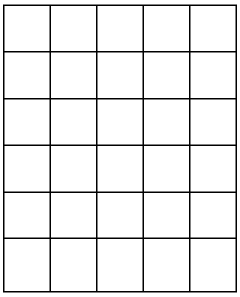
6x3



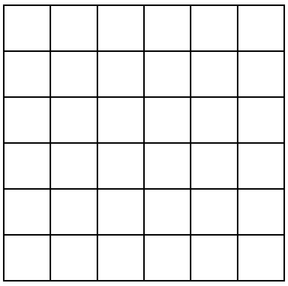
6x4



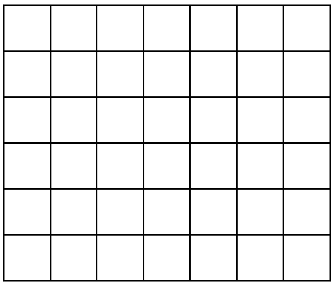
6x5



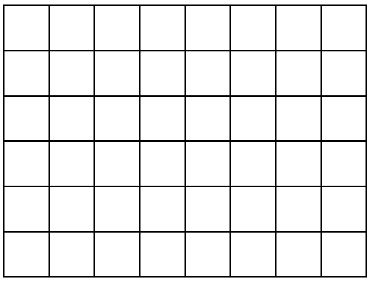
6x6



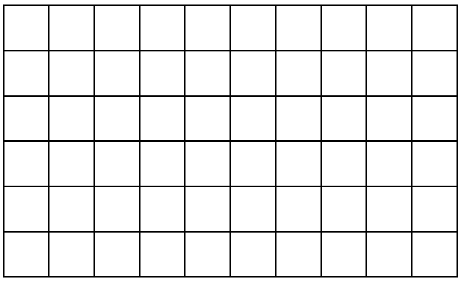
6x7



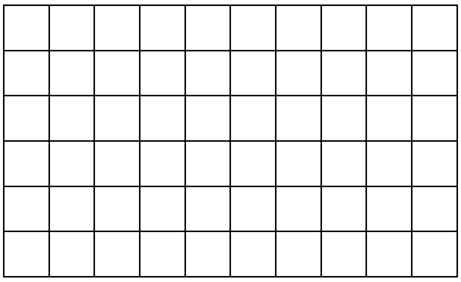
6x8



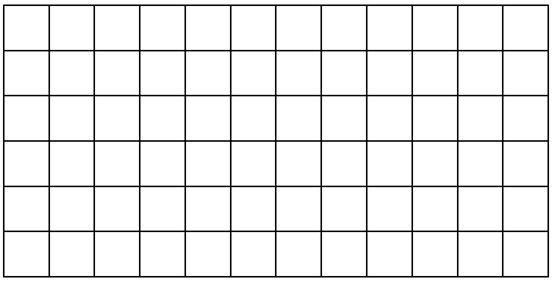
6x9



6x10



6x12



a) Será possível preencher um tabuleiro 6x15 com triminós? E um 6x137?

b) Quais dos tabuleiros 6xn acima (com seis linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

c) Descreva como você faria para preencher completamente um tabuleiro qualquer com um lado igual a 6, ou seja, descreva uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro 6xn.

Após essa questão, esperamos que os alunos percebam que os tabuleiros com um dos lados igual a 6 podem ser preenchidos completamente por triminós. As próximas questões são elaboradas com o intuito de generalizar essa conclusão dos alunos, pretendendo que percebam que tabuleiros com lados múltiplos de 6 também podem ser preenchidos completamente por triminós.

Na versão do projeto de extensão, os tabuleiros com um dos lados igual a 6 eram analisados utilizando-se blocos de triminós $3 \times 2$ e $2 \times 3$ para seu preenchimento.

d) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 12x4.

e) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 18x5.

f) E se um dos lados for um múltiplo de 6 quadrados, quais retângulos podem ser totalmente preenchidos?

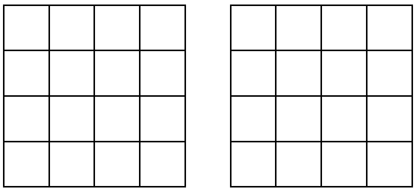
6) Já sabemos que os quadrados que têm lados múltiplos de 6 podem ser preenchidos totalmente por triminós. Será que são só esses?

Vamos analisar alguns casos:

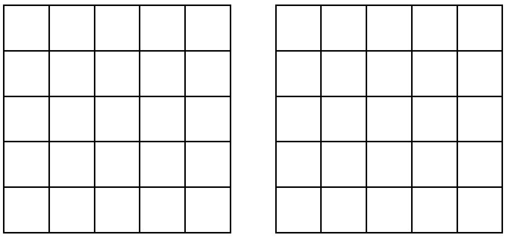
Convidamos os alunos a preencher tabuleiros quadrados maiores, utilizando (ou criando) suas estratégias. Aqui, esperamos que os alunos consigam decompor os tabuleiros maiores em tabuleiros menores, que já foram preenchidos anteriormente. Caso não consigam se apropriar dessa ideia (que já foi incentivada anteriormente), o professor deve direcioná-los, sem interferir muito no seu pensamento. Depois de preencherem os tabuleiros, são incentivados novamente a tirar conclusões sobre os tabuleiros, as justificando. Esperamos que os alunos generalizem que tabuleiros com lados múltiplos de 6, e ambas as dimensões maiores que 1, sempre podem ser preenchidos.

A atividade abaixo solicita que os alunos preencham tabuleiros quadrados, como $4 \times 4$ e $5 \times 5$, e procura incentivar os alunos a usarem sua estratégia, ou então a fazer uma, caso ainda não a tenham. Além de preencher os tabuleiros, são incentivados a preenchê-los utilizando os tabuleiros anteriores. Ao fazer isso, os alunos estarão decompondo o problema maior em problemas menores, que já sabem resolver. Então, mais alguns tabuleiros são dados ao aluno, para que consolidem sua estratégia.

- O tabuleiro 4x4 pode ser preenchido com triminós?



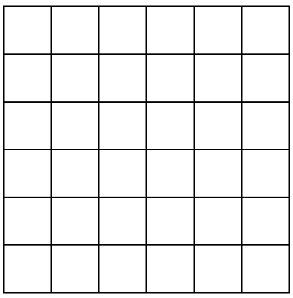
- O tabuleiro 5x5 pode ser preenchido com triminós?



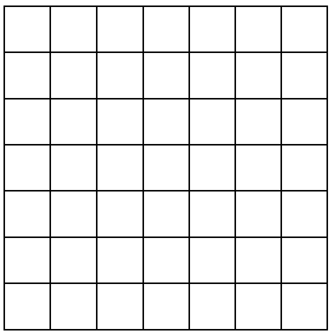
Na versão aplicada no projeto de extensão da UFRGS, o preenchimento dos tabuleiros $4 \times 4$ e $5 \times 5$ era aprofundado, retirando-se casas dos mesmos e verificando-se a possibilidade do preenchimento total ou não.

7) É possível preencher totalmente os tabuleiros abaixo usando os triminós?

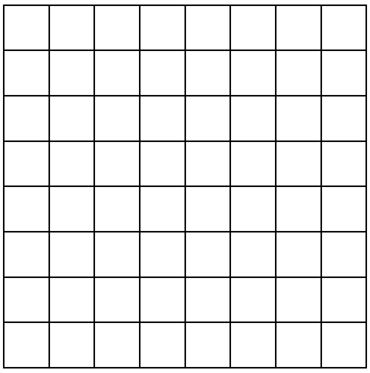
6x6



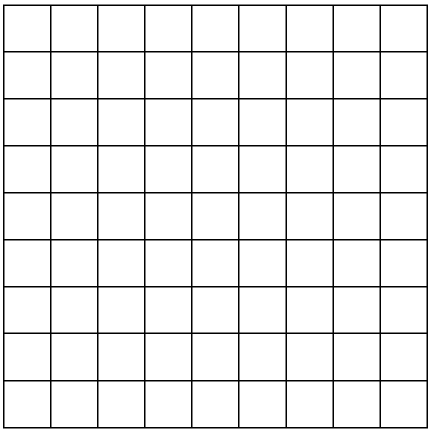
7x7



8x8



9x9



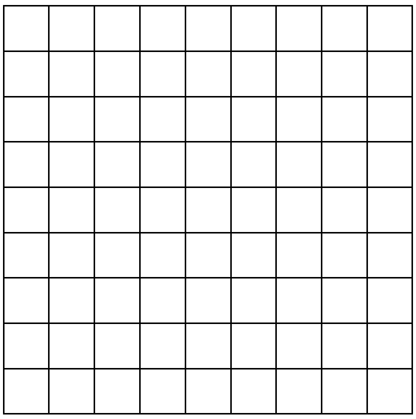
a) Quais dos tabuleiros acima que foram preenchidos pelos triminós?

b) Quais não foram? Quantas casas ficaram descobertas?

Esta atividade pretende que os alunos já comecem a perceber o padrão nos tabuleiros que podem ser preenchidos nos que não podem, contando-se o número de casas descobertas pelos triminós.

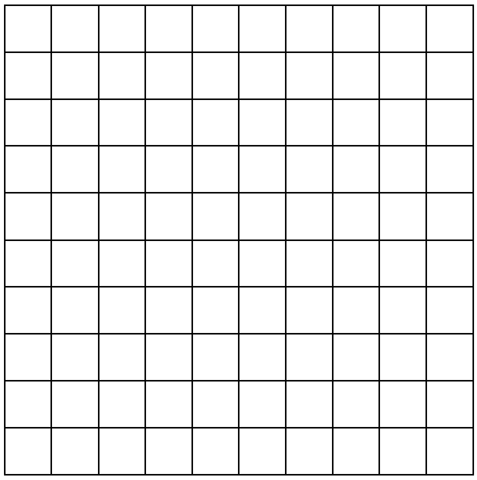
Ao começar a preencher os tabuleiros, imaginamos que os alunos os preencherão sem problemas, já sabendo que se um dos lados do tabuleiro for múltiplo de 6, ele poderá ser preenchido completamente. Então, ao preencher o tabuleiro $9 \times 9$, poderão encontrar alguma dificuldade para preenchê-lo totalmente ou talvez apenas o descartem, por não ter lados múltiplos de 6. Por isso, escolhemos focar no preenchimento do $9 \times 9$, pois seu preenchimento não é óbvio. Assim, verão que ele pode ser preenchido totalmente, mas não possui lados múltiplos de 6. Essa ideia se repete nos tabuleiros $15 \times 15$ e $21 \times 21$.

c) Há outra maneira de preencher o 9x9?

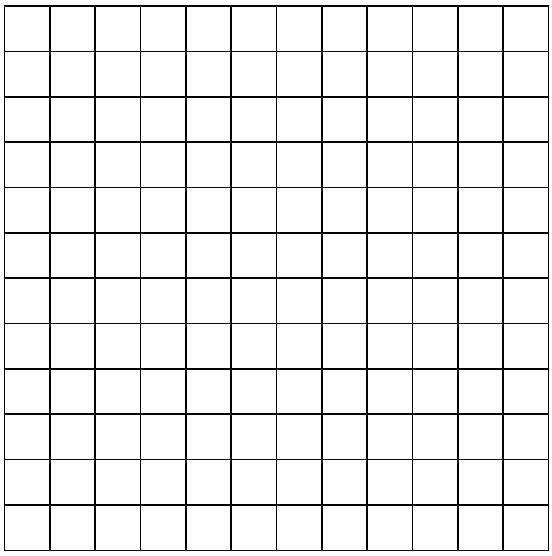


8) Preencha, caso possível, os tabuleiros a seguir.

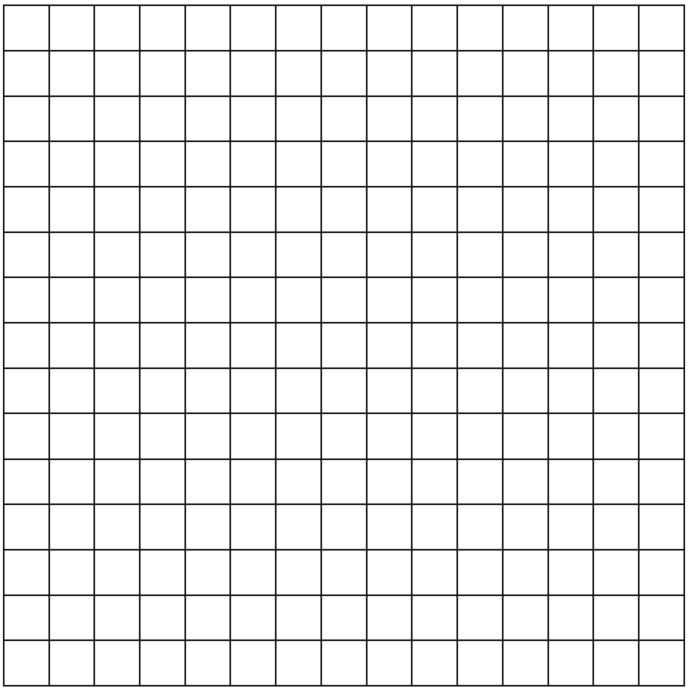
10x10



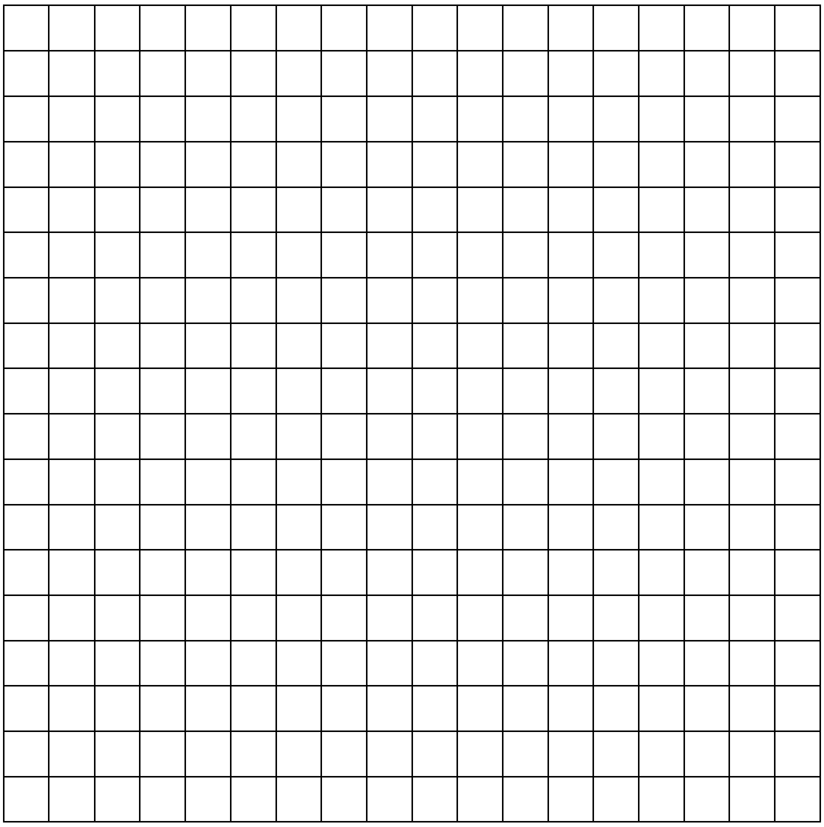
12x12



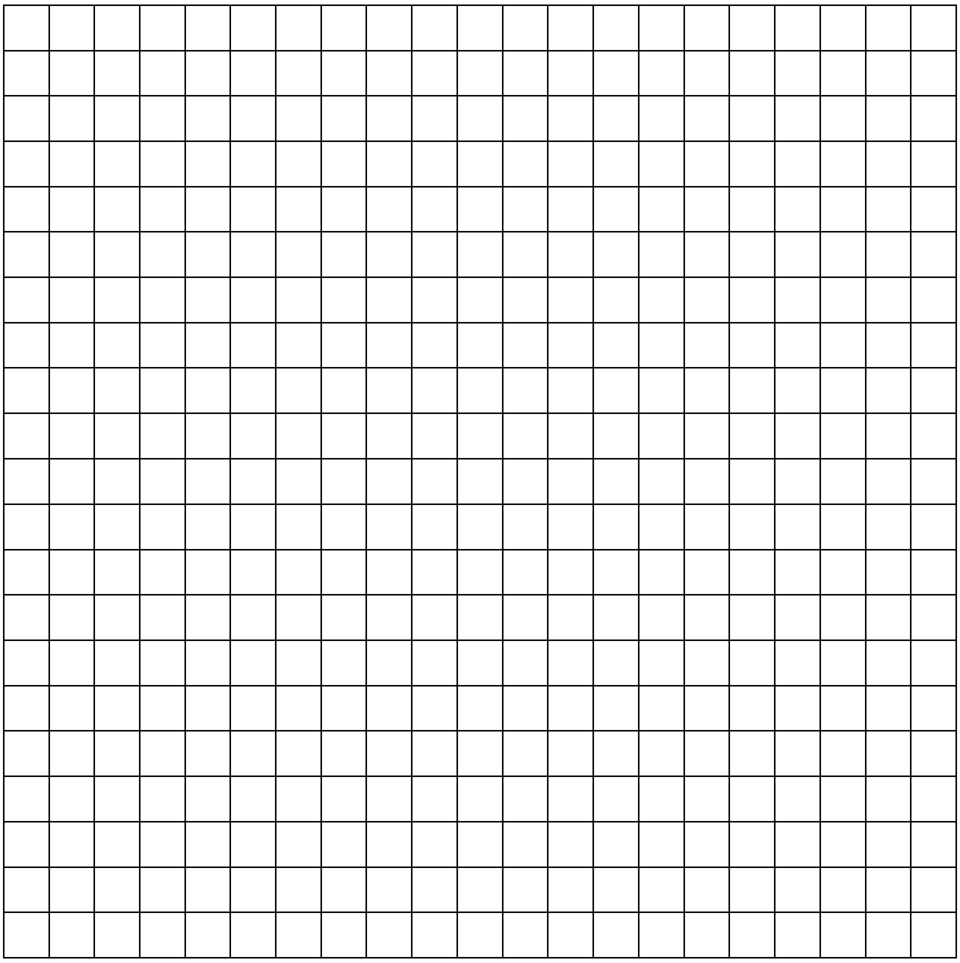
15x15



18x18



21x21



a) O tabuleiro 24x24 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

b) O tabuleiro 25x25 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

c) O tabuleiro 27x27 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

d) Em geral, para que tipo de n, um tabuleiro nxn pode ser totalmente preenchido pelos triminós? Quais não?

Para finalizar, perguntamos ao aluno sobre alguns tabuleiros maiores, pretendendo que verifiquem e expliquem sua estratégia. Então, a pergunta é feita para um tabuleiro geral nxn, desejando saber quais os requisitos dos lados dos tabuleiros quadrados para que possam ser completamente preenchidos por triminós. Utilizando suas estratégias, esperamos que os alunos percebam que todos os tabuleiros quadrados com lado múltiplo de 3 e maior do que 3, podem ser preenchidos totalmente com triminós.

O objetivo final da atividade é mostrar que tabuleiros quadrados $n \times n$ podem ser preenchidos quando $n > 3$ e $n$ é múltiplo de 3, e que existem dois tipos distintos de tabuleiros quadrados múltiplos de 3. Os que são múltiplos de 6 e os que não são, e cada tipo possui uma estratégia própria para sua resolução, vistas na seção Metodologia e Justificativa deste trabalho.

Desta maneira, a atividade segue as quatro etapas sugeridas por Polya (1995, pp. 3-4), onde:

> [...] Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão interrelacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

A compreensão do problema foi incentivada nas primeiras questões, onde o aluno deveria explorar os tabuleiros iniciais, preenchendo-os conforme desejado. Então os tabuleiros ficavam maiores, realçando a necessidade de uma estratégia para o problema, e questões foram elaboradas para auxiliar o aluno a desenvolver seu plano e a executá-lo. Para tirar suas conclusões, o aluno teve que realizar um retrospecto de como resolveu o problema, para poder tirar conclusões e ainda justificá-las.

Para incentivar ainda mais a quarta etapa de Polya, o retrospecto, o professor pode requisitar a apresentação do trabalho dos alunos para os colegas, pois muitas vezes demonstram mais empenho no trabalho em grupo.

## 3 RELATÓRIO E ANÁLISE

Aplicamos nossa sequência didática na Escola Estadual de Ensino Médio Campos Verdes em uma turma mista, com 30 alunos de 7º a 9º ano do Ensino Fundamental. Desenvolvemos a nossa prática em 3 aulas, ministradas em 3 dias consecutivos; duas com 3 períodos de 45 minutos cada e a última com 2 períodos de 45 minutos cada.

## 3.1 PRIMEIRO DIA

Havia apenas 18 alunos presentes, o que nos levou a propor trabalhos em duplas e não trios, como planejado.

A atividade 1 apresenta os triminós e requisita o preenchimento total, caso possível, dos tabuleiros $2 \times 3$ até o $2 \times 12$, girando os triminós quando necessário, sem a sobreposição dos mesmos. Após entregá-la aos alunos, grande parte disse não entender o enunciado da questão, dizendo não saber o que deveriam fazer. Esclarecemos o enunciado preenchendo os tabuleiros $2 \times 3$ e $2 \times 4$ como exemplos, o que também foi implementado na sequência revisada, pois exemplos auxiliam na compreensão. Após o esclarecimento, todos os alunos conseguiram preencher os tabuleiros sem mais dificuldades.

Na sequência, nos itens de (a) a (d), foi requisitado que os alunos respondessem se poderiam preencher completamente um tabuleiro $2 \times 20$ e um $2 \times 21$ e depois que inferissem a respeito dos tabuleiros $2 \times n$ genéricos com base nos tabuleiros já preenchidos. Apesar de todos acertarem o $2 \times 20$ e o $2 \times 21$, tiveram dificuldades em responder os itens (c) e (d), pois não compreendiam o significado de $n$ em $2 \times n$. Então, esclarecemos perguntando "Quando dá pra preencher e quando não dá?".

Mesmo depois de compreender e resolver a questão, ainda aparece o problema da escrita, que ilustramos com a resposta do aluno A abaixo.

**Quando o tabuleiro 2xn pode ser totalmente preenchido por triminós?**

Quando for um nº contado de 3 em 3

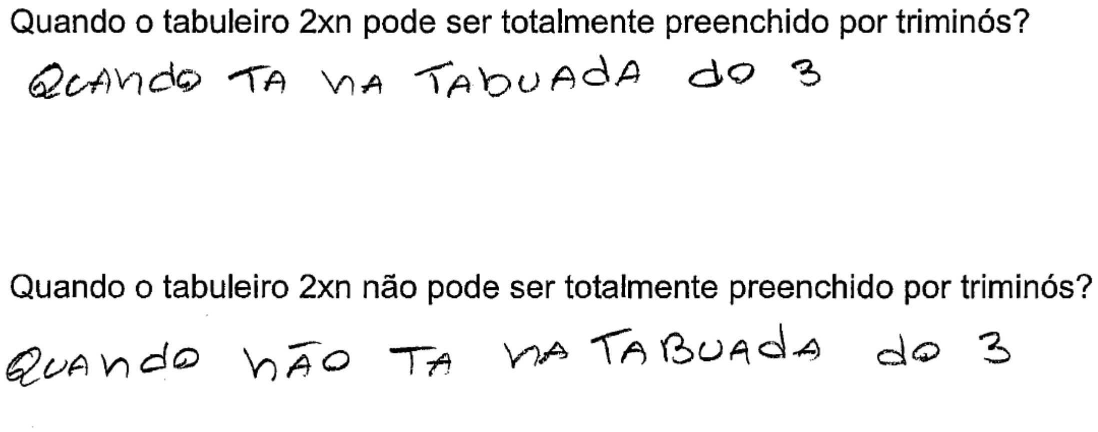
**Quando o tabuleiro 2xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?**

Quando o nº for contado de 1 em 1

Figura 8: Respostas do aluno A sobre o tabuleiro $\mathbf{2} \times \boldsymbol{n}$

Notamos que o aluno A percebeu que, para preencher completamente o tabuleiro $2 \times n$, o $n$ deveria "pular" de 3 em 3, o que não responde totalmente a questão, uma vez que deveria partir de 0. Mais ainda, no outro caso, não conseguiu se expressar de maneira clara.

Já o aluno B compreendeu a necessidade do $n$ ser múltiplo de 3, escrevendo que o $n$ deveria estar na tabuada do 3, escrevendo de maneira clara e objetiva. Contudo, solicitou ao professor a verificação de sua escrita, pois não sabia se o que tinha escrito era o suficiente ou se precisaria de uma resposta mais completa.


Quando o tabuleiro 2xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

QUANDO TA NA TABUADA DO 3

Quando o tabuleiro 2xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

QUANDO NÃO TA NA TABUADA DO 3

Figura 9: Respostas do aluno B sobre o tabuleiro $\mathbf{2 \times n}$

Na atividade 2, que consiste no preenchimento de tabuleiros $3 \times 2$ até o $3 \times 12$ com triminós, alguns alunos apresentaram dificuldades em seu preenchimento, uma vez que, para realizar essa tarefa, os triminós deveriam ser girados.No exemplo dado no quadro ($2 \times 3$ e $2 \times 4$), não houve a necessidade de rotação de triminós. Assim, a ausência de exemplos iniciais dificulta a compreensão da questão.

Para responder os itens de (a) a (d), que requisitam que os alunos concluam a respeito dos tabuleiros $3 \times n$, os alunos não conseguiram utilizar a mesma estratégia da atividade 1. Nesta atividade, a maioria conseguiu entender o significado das questões, mas ainda havia a dificuldade de responder a questão por escrito.

As atividades 3 e 4 consistem na demonstração por exaustão da impossibilidade do preenchimento total do tabuleiro $3 \times 3$. Para responder a atividade 3, era necessária a tentativa de preenchimento do tabuleiro $3 \times 3$ de todas as maneiras distintas possíveis. A atividade 4 é o que incentiva a conclusão da demonstração, perguntando se existe alguma outra maneira de preencher o tabuleiro $3 \times 3$. Novamente, grande parte dos alunos encontrou alguma dificuldade em responder a questão por não entender seu propósito. Para eles, era óbvio que o $3 \times 3$ não poderia ser preenchido totalmente por triminós. Explicamos que aquela era uma forma de eliminar o risco de não se ter preenchido totalmente o $3 \times 3$ por causa de algum erro, mostrando que realmente era impossível. Mesmo assim, os alunos não pareceram muito convencidos, uma vez que não estão acostumados a esse tipo de atividade.

Ao preencher a atividade 5, que tem como objetivo o preenchimento de tabuleiros $6 \times 2$ até o $6 \times 12$, diversos alunos tentaram sempre preencher da mesma maneira (como preencheram o $6 \times 2$), não conseguindo preencher os $6 \times n$ com $n$ ímpar, pois sobrava sempre uma coluna, e exemplificamos abaixo:

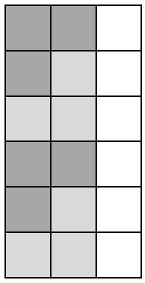
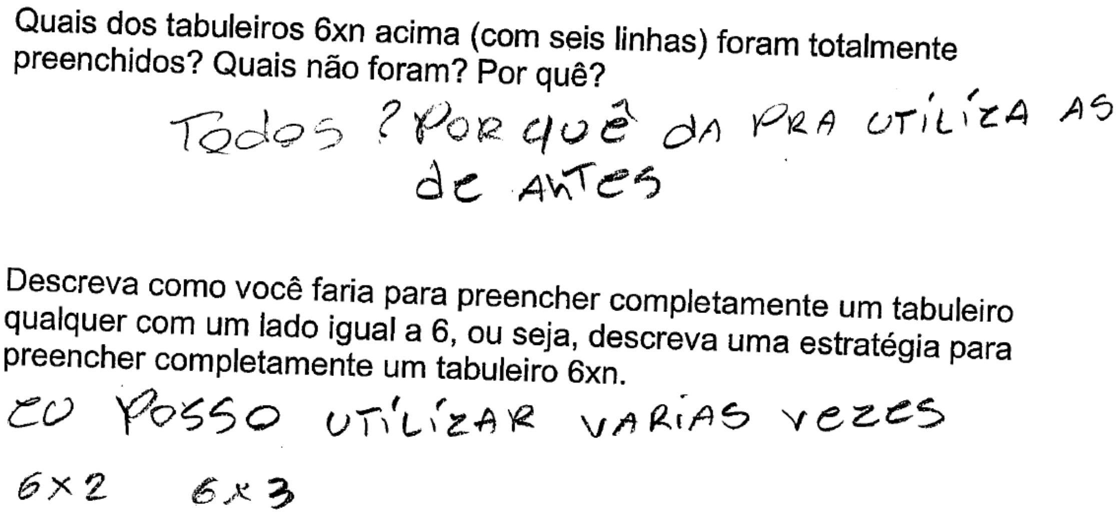


Figura 10: Exemplo do tabuleiro $\boldsymbol{6} \times \boldsymbol{n}$ com $\boldsymbol{n}$ ímpar com uma coluna em branco

Nesses casos, apenas comentamos que era possível preenchê-los totalmente, e rapidamente conseguiram.

Nos itens (a) e (b), solicitamos uma conclusão com justificativa da possibilidade de preenchimento do tabuleiro $6 \times n$. Durante sua resolução, os alunos novamente encontraram dificuldades na escrita. Não conseguiam justificar o porquê de todos os tabuleiros $6 \times n$, com $n > 2$, serem totalmente preenchidos. Sugerimos a utilização de tabuleiros anteriores para o preenchimento dos novos, o que surtiu efeito.

O item (c) solicita uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro $6 \times n$. Inicialmente, a maioria dos alunos não conseguiu descrever completamente o modo como preenchia os tabuleiros, uma vez que os preenchiam intuitivamente. Com algum esforço, os alunos conseguiram preparar uma estratégia, mesmo que sem muito detalhe, como vemos no exemplo do aluno B abaixo.


Quais dos tabuleiros 6xn acima (com seis linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

TODOS ? PORQUÊ DA PRA UTILIZA AS DE ANTES

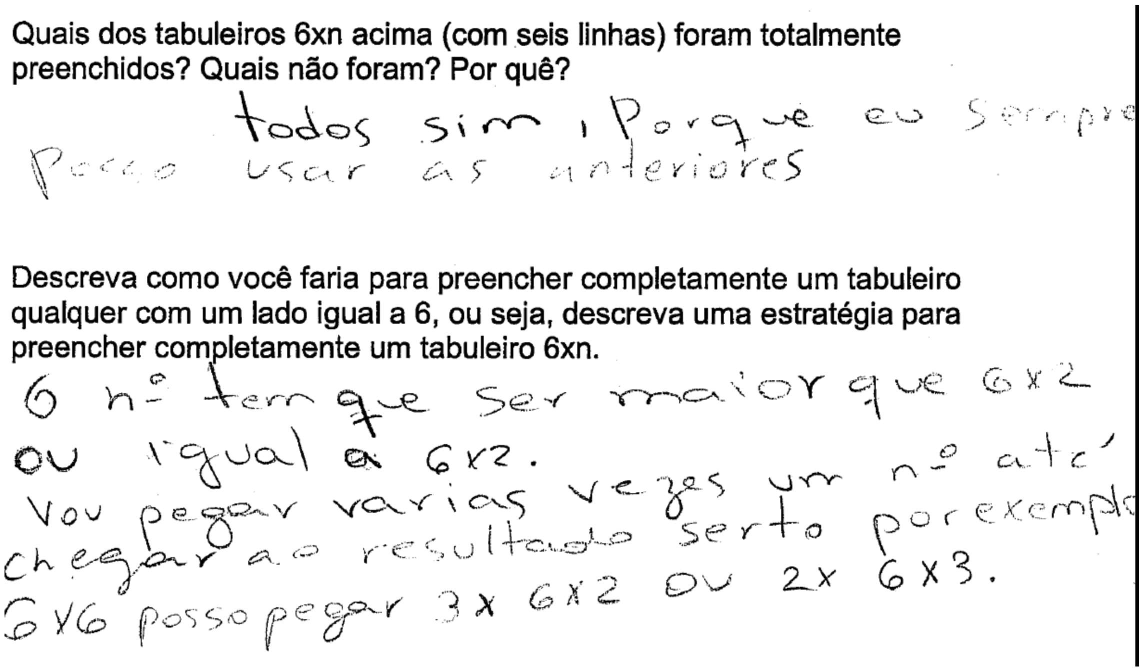
Descreva como você faria para preencher completamente um tabuleiro qualquer com um lado igual a 6, ou seja, descreva uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro 6xn.

EU POSSO UTILIZAR VARIAS VEZES

6X2 6X3

Figura 11: Respostas do aluno B sobre o tabuleiro $\mathbf{6} \times \boldsymbol{n}$

Nesse ponto, alguns alunos já se familiarizaram com a atividade, e isso se refletiu em sua estratégia, como podemos verificar na descrição do aluno A a seguir.


Quais dos tabuleiros 6xn acima (com seis linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

todos sim, Porque eu sempre posso usar as anteriores

Descreva como você faria para preencher completamente um tabuleiro qualquer com um lado igual a 6, ou seja, descreva uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro 6xn.

6 nº tem que ser maior que 6x2 ou igual a 6x2. Vou pegar varias vezes um nº até chegar ao resultado serto por exemplo 6x6 posso pegar 3x 6x2 ou 2x 6x3.

Figura 12: Respostas do aluno A sobre o tabuleiro $\mathbf{6} \times \boldsymbol{n}$

Neste primeiro encontro, os alunos se interessaram pelas atividades e participaram intensamente da aula, aceitando os desafios propostos e superando as dificuldades encontradas. A aula transcorreu de maneira organizada e fluída, e também os alunos ficaram tristes quando o tempo acabou, pois queriam continuar a atividade.

## 3.2 SEGUNDO DIA

No segundo encontro, 14 alunos estavam presentes, sendo que 4 não estiveram presentes no primeiro encontro. Para os que não estavam presentes no primeiro encontro, entregamos o material com as primeiras atividades e explicamos individualmente as questões iniciais, sempre que necessário. Para os que já estavam presentes no primeiro encontro, entregamos as novas questões e também as que já haviam sido trabalhadas, para que pudessem consultá-las.

Ainda na atividade 5, os itens (d) e (e) solicitam a descrição, apenas com palavras, do preenchimento dos tabuleiros $12 \times 4$, $4 \times 12$, $18 \times 5$ e $5 \times 18$. Os alunos não conseguiam responder os itens sem desenhar o tabuleiro. Em nossa intervenção, fomos bem explícitos, recorrendo a desenhos em alguns casos.

O item (f) incentiva a generalização, perguntando quais tabuleiros podem ser preenchidos no caso em que um de seus lados é um número múltiplo de 6. Mesmo depois de entender que poderiam justapor os tabuleiros, não conseguiram descrever completamente o procedimento.

Apresentamos abaixo as respostas do aluno A:

**Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 12x4. E um 4x12?**

usaria 2X u 6X4 e usaria 2X u 4X6.

**Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 18x5. E um 5x18?**

usaria 3X um tabuleiro de 6X5 3X um tabuleiro d 5X6

**E se um dos lados for um múltiplo de 6, quais retângulos podem ser totalmente preenchidos?**

todos os múltiplos de 6 eu boto um em baixo do outro.

Figura 13: Respostas do aluno A sobre os tabuleiros com um lado múltiplo de 6

Notamos que o aluno A criou uma estratégia correta para solucionar a questão e, apesar de não explicitar como faria essa montagem nos itens (d) e (e), o fez no item (f), justificando o motivo de todos os tabuleiros múltiplos de 6 serem totalmente preenchidos, sem ser solicitado.

Abaixo, apresentamos as respostas do aluno B:

**Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 12x4. E um 4x12?**

PEGARIA 2X O TABULEIRO

PEGARIA O TABULEIRO 2X12

**Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 18x5. E um 5x18?**

PEGARIA 3X O 6X5

deiTARIA O 18X5

**E se um dos lados for um múltiplo de 6, quais retângulos podem ser totalmente preenchidos?** Se Todos forem MULTIPLICADOS de 6

Figura 14: Respostas do aluno B sobre os tabuleiros com um lado múltiplo de 6

O aluno B demonstrou compreender o item, escrevendo sua resolução de maneira bastante simples, mas não explicitando como usar os tabuleiros descritos em sua resposta.

A atividade 6 convida o aluno a preencher os tabuleiros quadrados de $4 \times 4$ a $9 \times 9$ com triminós. Nos itens (a) e (b), o aluno deve apenas explicitar quais tabuleiros foram totalmente preenchidos e quais não foram. No caso em que o tabuleiro não pudesse ser preenchido, deveriam apresentar o número de espaços em branco. Apesar dos alunos entenderem tais itens, não o fizeram.

Os alunos preencheram os triminós de maneira mecânica. Alguns ficaram desconfiados quando apenas completaram o tabuleiro $6 \times 6$. Apenas 3 alunos se distraíram, deixando "buracos" nos tabuleiros, pensando tê-los preenchido totalmente. A maior dificuldade encontrada foi ao preencher o $9 \times 9$: apenas tentaram uma vez e consideraram que não poderia ser totalmente preenchido. Depois de informá-los que o $9 \times 9$ poderia ser preenchido completamente, os alunos imediatamente o retomaram. Para os que ainda apresentaram dificuldades, apresentamos a sugestão abaixo:

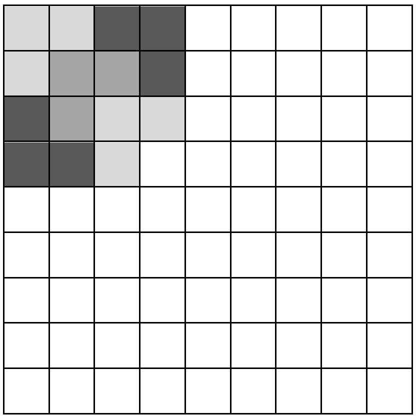


Figura 15: Sugestão para o preenchimento do tabuleiro $\mathbf{9 \times 9}$

No item (c), o aluno deveria apresentar outra maneira para preencher completamente o tabuleiro $9 \times 9$ com triminós. Essa atividade não teve uma boa aceitação, pois os alunos não entenderam seu propósito; já que raramente refazem uma atividade já corrigida.

Nesta aula os alunos também se empenharam em resolver as atividades propostas. Os alunos que se desanimaram quando não conseguiram preencher o $9 \times 9$ facilmente, superaram rapidamente suas dificuldades com nossas intervenções. Novamente ficaram tristes quando o tempo para a atividade havia acabado, mas estavam felizes por conseguirem terminar de montar o tabuleiro $9 \times 9$.

## 3.3 TERCEIRO DIA

Havia 14 alunos presentes, mas 4 não haviam ido nos encontros anteriores, o que nos levou a aplicar as atividades iniciais para esses alunos, e a continuar o trabalho com quem havia comparecido aos encontros anteriores.

Na atividade 7, o aluno deve preencher os tabuleiros quadrados de $10 \times 10$ a $21 \times 21$ com triminós. Nos itens (a) a (c), é requisitado que os alunos verifiquem se os tabuleiros $24 \times 24$, $25 \times 25$ e $27 \times 27$, podem ser preenchidos totalmente por triminós e justifiquem suas respostas.

Os alunos identificaram intuitivamente que os tabuleiros com lado múltiplo de 6 podem ser preenchidos, porém afirmaram que todos os outros não poderiam. A maioria dos alunos respondeu que o $15 \times 15$ não poderia ser preenchido. Quando intervimos, primeiro sugerimos a utilização dos tabuleiros anteriores. Mesmo assim, encontraram dificuldades, o que nos levou a explicitar a inserção do tabuleiro $9 \times 9$ dentro do tabuleiro $15 \times 15$. Ao preencher o tabuleiro $21 \times 21$, novamente os alunos disseram que não era possível preenchê-lo completamente, pois só inseriam o tabuleiro $18 \times 18$, o que não era útil. Então sugerimos que inserissem o tabuleiro $15 \times 15$ no tabuleiro $21 \times 21$ e tentassem preencher os espaços restantes. Seguindo essa sugestão, os alunos preencheram o tabuleiro sem mais dificuldades.

Três alunos perguntaram se havia uma maneira mais rápida, “melhor”, para preencher os tabuleiros. Sugerimos que poderiam simplesmente marcar o espaço utilizado por tabuleiros menores, simplificando assim o preenchimento do tabuleiro maior, ideia que foi imediatamente implementada por esses alunos e amplamente difundida na sala.

Por fim, o item (d) pergunta quais tipos de tabuleiros $n \times n$ quadrados podem ser preenchidos e quais não podem, pedindo também que sejam apresentadas duas estratégias distintas para o preenchimento de tais tabuleiros. Nesse item, tivemos que intervir, perguntando aos alunos quais tabuleiros quadrados já haviam sido preenchidos completamente e qual o padrão entre eles. Então, os alunos concluíram sozinhos que o $n$ deveria ser múltiplo de 3. Com o propósito de auxiliar os alunos a perceberem a diferença do preenchimento dos tabuleiros apenas múltiplos de 3 para os múltiplos de 3 e de 6, solicitamos que comparassem a estratégia de preenchimento dos tabuleiros $12 \times 12$ e $15 \times 15$, perguntando qual tabuleiro anterior foi utilizado em cada caso, o que foi suficiente para a elaboração das estratégias solicitadas.

Apresentamos abaixo a resposta do aluno B:

O tabuleiro 24x24 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? SIM ? POR QUE ESTA NA TABUADA DO 3
O tabuleiro 25x25 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? NÃO ? POR QUE NÃO ESTA NA TABUADA DO 3
O tabuleiro 27x27 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? SIM ? TABUADA DO 3
Em geral, para que tipo de n, um tabuleiro nxn pode ser totalmente preenchido pelos triminós? Quais não? Como podemos preenchê-lo? Apresente estratégias. PODE SER PREENCHIDO QUANDO ESTA NA TABUADA DO 3.
OS QUE ESTÃO NA TABUADA DO 6, REPITO OS MULTÍPLOS 6×2. OS QUE NÃO ESTÃO NA TABUADA DO 6, BOTEI O ANTERIOR DO MESMO TIPO, ENTÃO SOBRO 6XN E ISSO JA DISSE COMO PRENCHE

Figura 16: Respostas do aluno B sobre os tabuleiros $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ e suas estratégias de preenchimento

O aluno B demonstrou compreender as questões, explicitando a condição para o tabuleiro $n \times n$ ser totalmente preenchido. Além disso, apresentou as duas estratégias necessárias para preenchê-lo de maneira clara e sucinta, se referindo a exercícios resolvidos anteriormente; o que demonstra que a ideia de recursão foi percebida.

Vemos também a resposta do aluno C:

O tabuleiro 24x24 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? SIM PORQUE SÃO MULTIPLO DE 3

O tabuleiro 25x25 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? NÃO PORQUE NÃO SÃO MULTIPLO DE 3

O tabuleiro 27x27 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê? SIM PORQUE É MULTIPLO DE 3

Em geral, para que tipo de n, um tabuleiro nxn pode ser totalmente preenchido pelos triminós? Quais não? Como podemos preenchê-lo? Apresente estratégias. PODE SER PREENCHIDO SE FOR MULTIPLO DE 3, OS QUE NÃO É MULTIPLO DE 3, 6, 12, 18 SÃO DE 3 E 6, OS DE 9, 15, 21 SÃO DE 3 MAS NÃO SÃO DE 6,

3 E 6: MULTIPLO DE 6X2,

DE 3 E NÃO 6: PEGO O ANTERIOR DO MESMO TIPO E SEMPRE SOBRA O 5 POR ALGUMA COISA DOS LADOS

Figura 17: Respostas do aluno C sobre os tabuleiros $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ e suas estratégias de preenchimento

O aluno C também demonstrou entender que, para preencher totalmente um tabuleiro $n \times n$, o $n$ deve ser múltiplo de 3, apresentando as estratégias necessárias para preenchê-lo totalmente e se apropriando dos exercícios já feitos, apenas os citando conforme necessário.

Para concluir nossa prática, entregamos aos alunos um questionário avaliativo anônimo com 6 questões sobre a sequência proposta aos alunos. As questões 1 e 2 perguntam ao aluno se a atividade é divertida e interessante, pedindo uma nota de 1 a 5. Todos os alunos consideraram a atividade divertida e interessante, dando notas 4 ou 5 no questionário.

As questões 3 e 4 perguntam qual a relação das atividades feitas com a Matemática e se os alunos consideraram a aula diferente. Em caso positivo, a questão convida o aluno a explicitar as diferenças da aula comum. Os alunos disseram que a relação entre a Matemática e as atividades era o uso da tabuada e de contas para resolver os problemas, o que mostra que esses alunos encaram a Matemática como apenas cálculos e algoritmos.

A questão 5 indaga ao aluno se o mesmo gostaria de ter mais aulas desse tipo. Nessa questão, a resposta foi um sim unânime. A questão 6 fornece um espaço para comentários extras ou sugestões. Os alunos sugeriram que atividades como essa ocorressem com mais frequência na escola e reforçaram, através de elogios, sua satisfação com essa atividade, reiterando que se divertiram muito.

Neste encontro pudemos notar o orgulho dos alunos ao conseguirem superar a dificuldade de preencher os tabuleiros quadrados maiores utilizando tabuleiros já preenchidos anteriormente. Gostaram da sensação de usar algo já feito por eles para resolver novos problemas, e novamente se mostraram felizes quando finalizaram a atividade, dando as estratégias de preenchimento do tabuleiro quadrado $n \times n$.

# 4 MELHORIAS PARA A SEQUÊNCIA

Nesta seção, apresentamos as revisões, com suas justificativas, das atividades aplicadas na escola, levando em conta a experiência obtida com a aplicação da atividade.

Nas questões 1 e 2, transformamos os tabuleiros $2 \times 3$, $2 \times 4$ e $3 \times 2$ em exemplos, uma vez que se mostraram necessários para facilitar a compreensão dos exercícios 1 e 2.

Alteramos a ordem dos itens (a) e (b) nas questões 1, 2 e 5. Em nossas intervenções, tentávamos incentivar a busca de algum padrão nos tabuleiros, e para isso os alunos observavam os tabuleiros já preenchidos. Assim, é natural que os alunos tenham que listar os tabuleiros que conseguiram preencher totalmente e os que não conseguiram, para então começar a pensar em tabuleiros maiores.

No exercício 5, decidimos remover o item (b), que consistia em perguntar aos alunos quantas casas restariam nos tabuleiros quadrados. A ideia original era que os alunos percebessem alguma relação entre as casas restantes e o preenchimento do tabuleiro para conseguirem perceber que quando o $n$ não é múltiplo de 3, sempre sobram 1 ou 2 casas, de maneira que não conseguem nem mesmo encaixar um triminó, caso reorganizem as peças. Porém, consideramos mais eficaz que apenas focar nos tabuleiros que os alunos conseguiram preencher completamente e perguntar qual o padrão entre eles.

Na questão 6, removemos o item (c), que solicitava outra maneira de preencher o tabuleiro $9 \times 9$, uma vez que o mesmo acabou confundindo os alunos, já que não estão acostumados a resolver um problema de mais de uma maneira. Apesar de removermos esse item, deixamos a cargo do professor a sua utilização, pois, com alunos mais curiosos, o item pode ser apresentado como um desafio.

As atividades revisadas se encontram no apêndice A.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho oportunizou a elaboração de uma sequência didática que visa incentivar o pensamento matemático do aluno da sala de aula regular baseada em uma prática utilizada originalmente com um grupo de alunos com Altas Habilidades. Utilizando a investigação qualitativa, foi possível avaliar o desempenho lógico e matemático dos alunos, verificando a eficácia da metodologia aplicada.

No início, os alunos mostraram não ter o hábito da leitura por conta própria. Mesmo sem lerem o enunciado da questão, perguntaram sobre o mesmo, requisitando explicações. Acreditamos que isso ocorreu pois, em geral, o professor em sala de aula costuma interpretar e expor os enunciados sem a necessidade de leitura por parte do aluno. À medida que avançaram na atividade, os questionamentos passaram a ser apenas sobre a parte matemática.

A escrita dos alunos também se desenvolveu. Inicialmente, as respostas dos alunos não eram completas, pois não estavam acostumados a questões que solicitassem justificativas. Geralmente, no ensino de Matemática da escola básica, o aluno deve resolver exercícios, apenas aplicando algum algoritmo ou fórmula conhecida. Conforme avançaram na atividade, foram aprimorando sua escrita, passando a fornecer respostas mais completas, persistindo apenas erros ortográficos e gramaticais.

Em função destas dificuldades, intervimos mais vezes do que o planejado e tivemos que exemplificar no quadro certas atividades, o que foi um fator importante para a sequência revisada. Os alunos se mostraram muito receptivos, o que contribuiu para um bom trabalho de ambas as partes.

Todos os alunos se esforçaram na resolução das atividades. Isto contribuiu para que, mesmo com a frequência não constante dos alunos - apenas dez deles compareceram aos três encontros - não houvesse dificuldades para acompanhar o trabalho desenvolvido.

Quatro alunos chegaram ao final da sequência proposta. Os que compareceram e não chegaram ao final conseguiram avançar muito. Todos os alunos estavam comprometidos com a sequência proposta, e se orgulharam muito de seu desempenho final.

Em cada encontro, os alunos presentes se interessaram pelas atividades, trabalhando nas mesmas com boa vontade. Consideraram a atividade diferente e divertida, e alguns a descreveram como desafiadora. Isso se manteve válido também para os alunos que compareceram a apenas um encontro.

A atividade foi um sucesso, uma vez que todos os alunos se empenharam e pareceram gostar da mesma, respondendo as questões e justificando a estratégia utilizada sempre que possível. Muitos alunos acharam interessante a nova experiência de terem liberdade para obter suas resoluções e da necessidade de justificarem suas respostas e explicarem suas estratégias. Mais ainda, todos eles apreciaram a ideia de poder utilizar uma atividade já realizada em outra mais genérica, sem precisarem partir do ponto inicial.

A escola inteira tomou conhecimento das atividades diferenciadas. Os alunos de outras turmas passavam pela porta da sala e mostravam curiosidade em saber o que estávamos fazendo, em decorrência da singularidade da sequência aplicada. Alguns professores se dirigiram à equipe, solicitando informações, bem como uma cópia da sequência para aproveitamento próprio.

Consideramos que as atividades utilizadas no projeto de extensão mencionado podem servir de base para a construção de uma sequência didática para uma sala de aula regular que incentive o pensamento matemático. O progresso dos alunos foi perceptível na compreensão dos problemas propostos e também na escrita de suas respostas.

Acreditamos que atividades semelhantes à sequência que elaboramos neste trabalho podem contribuir muito para o desenvolvimento do aluno, não só em seu pensar matemático e raciocínio lógico, mas também em sua capacidade argumentativa, incentivando o interesse pela Matemática. Práticas similares diminuem a passividade do aluno com relação às aulas do cotidiano, pois ele recebe um papel mais autônomo, havendo interferência do professor apenas quando necessário. Isto proporciona um melhor ambiente de ensino, pois amplia a interação dos alunos com as atividades propostas.

# REFERÊNCIAS

BOGDAN, Roberto C; BIKLEN, Sári Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação**. Td. ALVAREZ, M. J; SANTOS, S. B. dos; BAPTISTA, T. M. Portugal, Porto Codex: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais 5ª a 8ª Séries: Matemática:** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2000.

GEORGE, POLYA. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

The Gifted and Talented Development Centre. Estonian Math Competitions 2004/2005. Disponível em: <http://www.math.olympiaadid.ut.ee/eng/archive/prob0405.pdf> Acesso em 17 de dezembro de 2015.

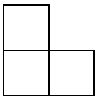
SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** *Bolema* – Boletim de Investigação Matemática, Rio Claro, n. 14, p. 66 – 91, 2000.

# APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA REVISADA

Nome:________________________________ Data:________

## EXPLORANDO TRIMINÓS

Triminó

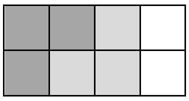


1) Preencha, se possível, os tabuleiros abaixo usando triminós, sem sobrepô-los, girando as peças sempre que necessário, como nos exemplos 2x3 e 2x4 abaixo:

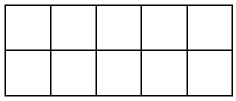
Tabuleiros do tipo 2xn

2x3

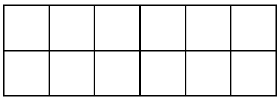
2x4



2x5

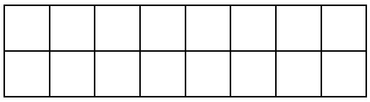


2x6

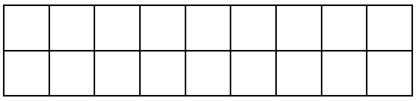


2x7

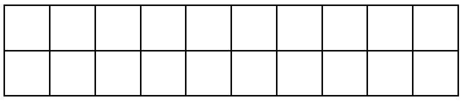
2x8



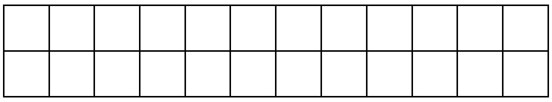
2x9



2x10



2x12



a) Quais dos tabuleiros 2xn acima (com duas linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram?

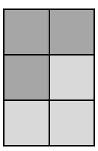
b) Será possível preencher um tabuleiro 2x20 com triminós? E um 2x21?

c) Quando o tabuleiro 2xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

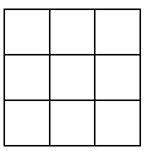
d) Quando o tabuleiro 2xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

2) Tabuleiros do tipo 3xn

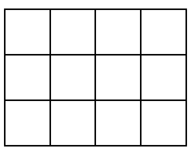
3x2



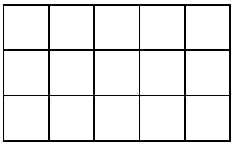
3x3



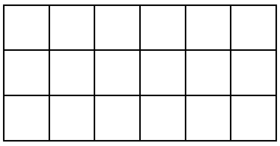
3x4



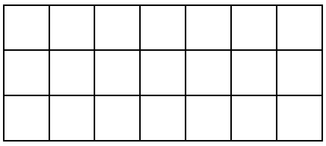
3x5



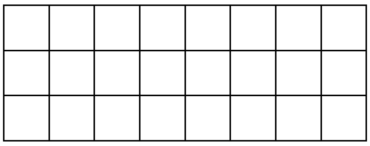
3x6



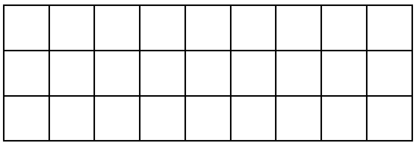
3x7



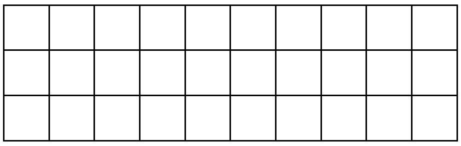
3x8



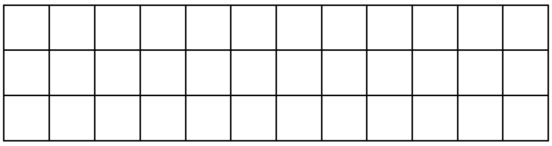
3X9



3x10



3x12



a) Quais dos tabuleiros 3xn acima (com três linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

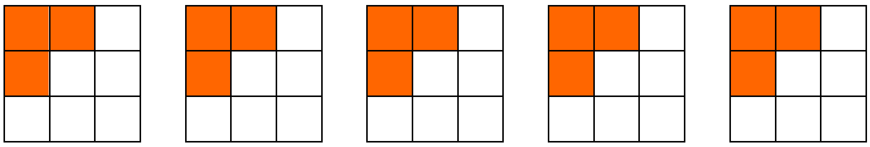
b) Será possível preencher um tabuleiro 3x21 com triminós? E um 3x244?

c) Quando o tabuleiro 3xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

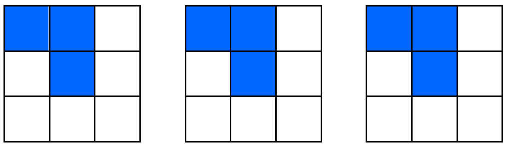
d) Quando o tabuleiro 3xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

3) Será que realmente não conseguimos preencher um quadrado do tipo 3x3 com triminós? Vamos tentar todas as maneiras!

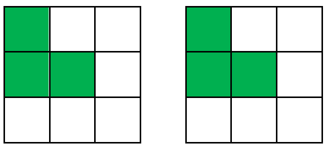
(I)



(II)



(III)

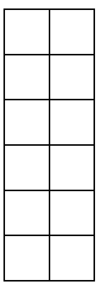


4) Existe alguma outra maneira de preencher o canto esquerdo?

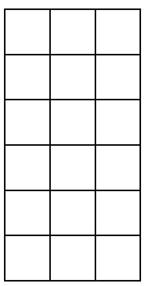
- Agora já sabemos que o tabuleiro 3x3 não pode ser preenchido por triminós.

5) Tabuleiros do tipo 6xn

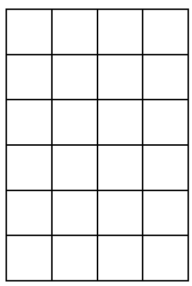
6x2



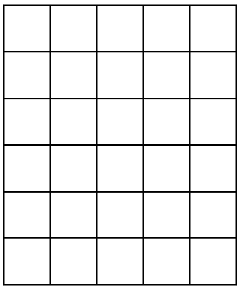
6x3



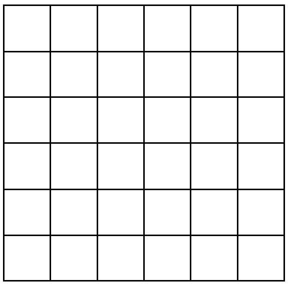
6x4



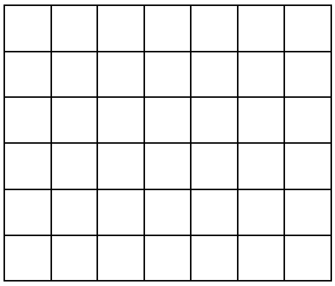
6x5



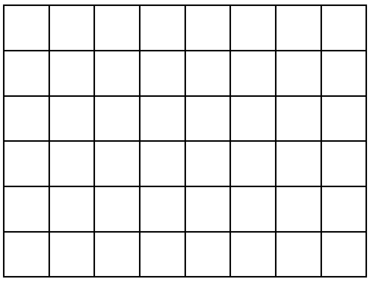
6x6



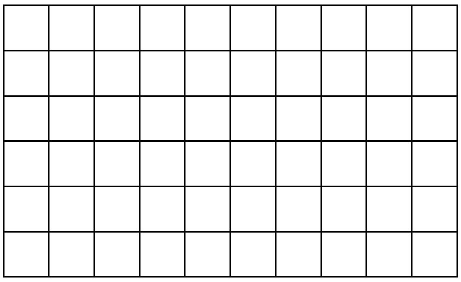
6x7



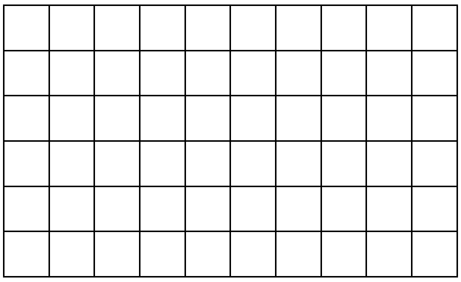
6x8



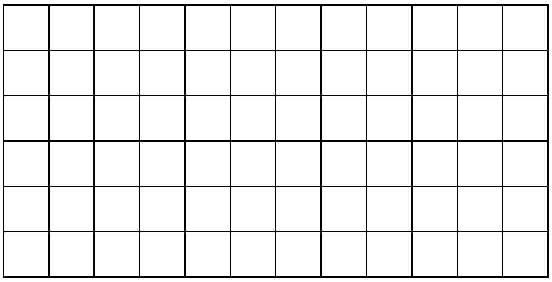
6x9



6x10



6x12



a) Quais dos tabuleiros 6xn acima (com seis linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

b) Será possível preencher um tabuleiro 6x15 com triminós? E um 6x137?

c) Descreva como você faria para preencher completamente um tabuleiro qualquer com um lado igual a 6, ou seja, descreva uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro 6xn.

d) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 12x4.

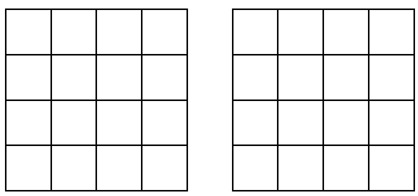
e) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 18x5.

f) E se um dos lados for um múltiplo de 6 quadrados, quais retângulos podem ser totalmente preenchidos?

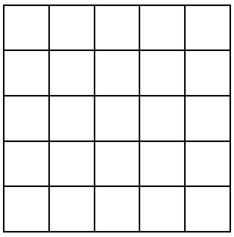
6) Já sabemos que os quadrados que têm lados múltiplos de 6 podem ser preenchidos totalmente por triminós. Será que são só esses?

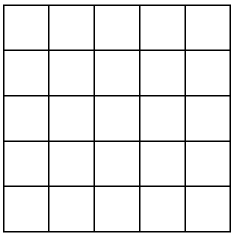
Vamos analisar alguns casos:

- O tabuleiro 4x4 pode ser preenchido com triminós?



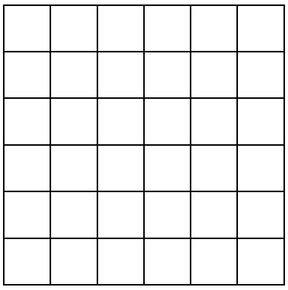
- O tabuleiro 5x5 pode ser preenchido com triminós?



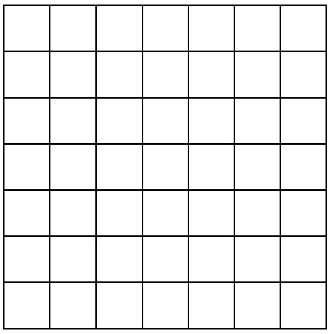


7) É possível preencher totalmente os tabuleiros abaixo usando os triminós?

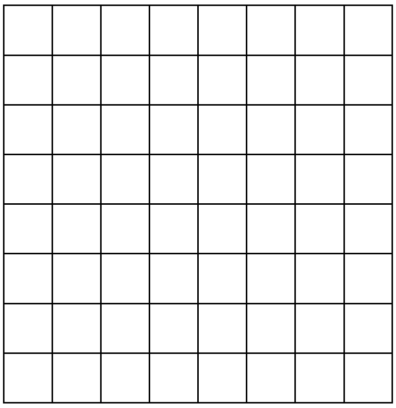
6x6



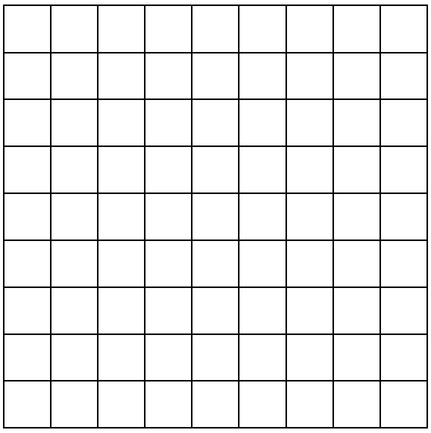
7x7



8x8



9x9



a) Quais dos tabuleiros acima que foram preenchidos pelos triminós?

8) Preencha, caso possível, os tabuleiros a seguir.

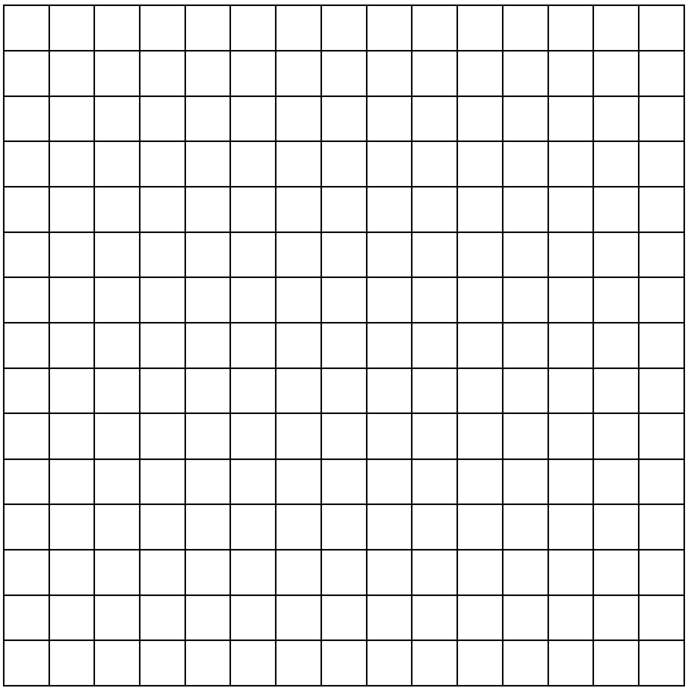
10x10

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

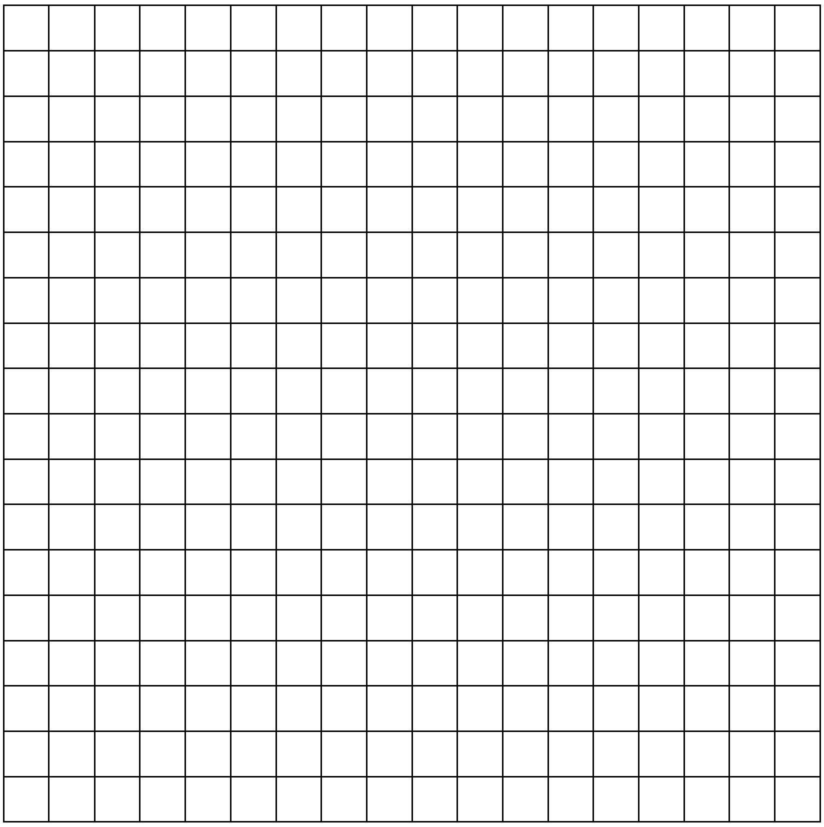
12x12

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

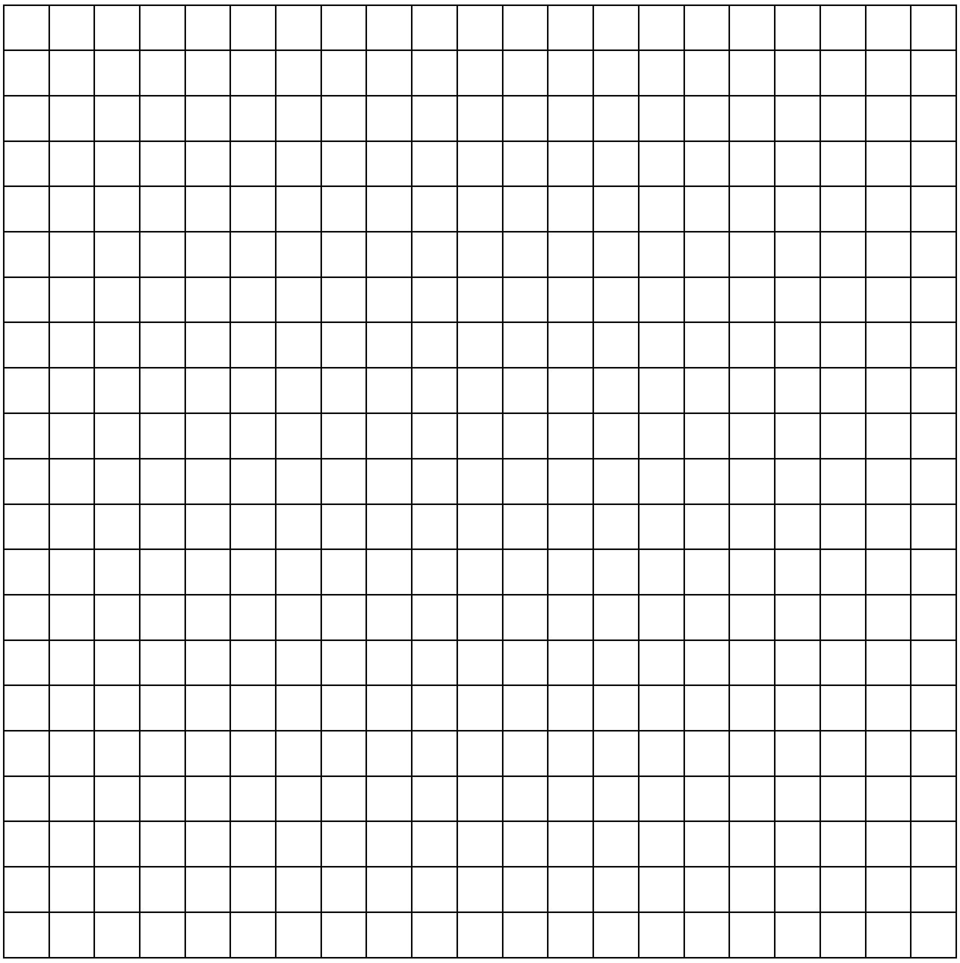
15x15



18x18



21x21



a) Quais tabuleiros quadrados foram preenchidos completamente por triminós?

b) O tabuleiro 24x24 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

c) O tabuleiro 25x25 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

d) O tabuleiro 27x27 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

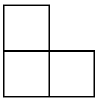
e) Em geral, para que tipo de n, um tabuleiro nxn pode ser totalmente preenchido pelos triminós? Quais não?

## APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA REVISADA: VERSÃO DO PROFESSOR

Neste apêndice, apresentamos a sequência didática com comentários em cada questão e sugestões de encaminhamentos para o professor.

### EXPLORANDO TRIMINÓS

Triminó

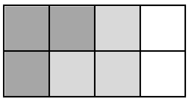


1) Preencha, se possível, os tabuleiros abaixo usando triminós, sem sobrepô-los, girando as peças sempre que necessário, como nos exemplos 2x3 e 2x4 abaixo:

Tabuleiros do tipo 2xn

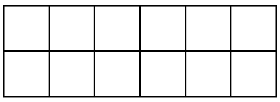
2x3

2x4



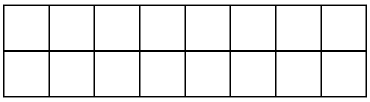
2x5

2x6

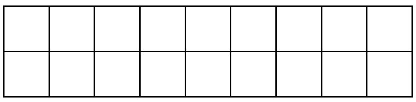


2x7

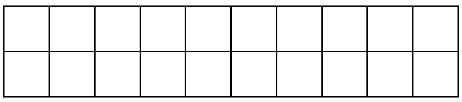
2x8



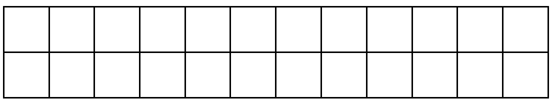
2x9



2x10



2x12



a) Quais dos tabuleiros 2xn acima (com duas linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram?

b) Será possível preencher um tabuleiro 2x20 com triminós? E um 2x21?

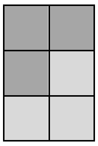
c) Quando o tabuleiro 2xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

d) Quando o tabuleiro 2xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

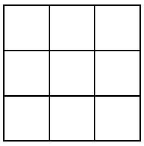
O professor pode sugerir aos alunos que observem os lados dos tabuleiros que podem ser completamente preenchidos, sugerindo a procura de um padrão. Se necessário, também pode perguntar "de quanto em quanto" os lados dos tabuleiros possíveis mudam.

2) Tabuleiros do tipo 3xn

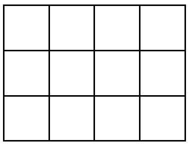
3x2



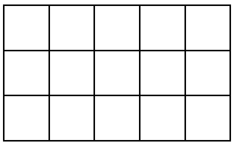
3x3



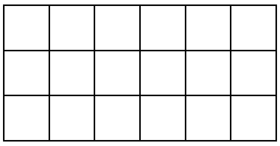
3x4



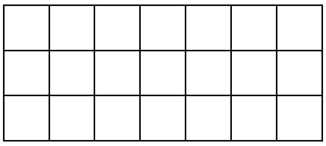
3x5



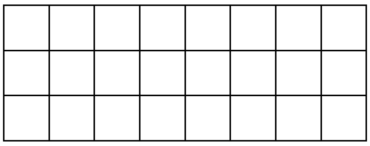
3x6



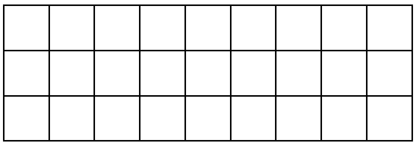
3x7



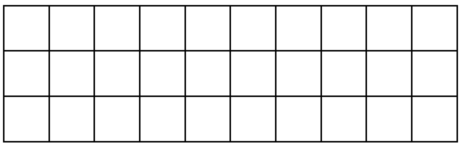
3x8



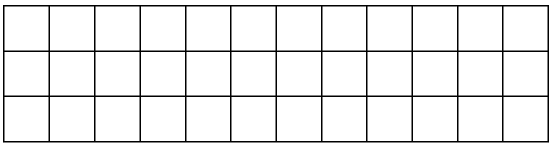
3X9



3x10



3x12



a) Quais dos tabuleiros 3xn acima (com três linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

b) Será possível preencher um tabuleiro 3x21 com triminós? E um 3x244?

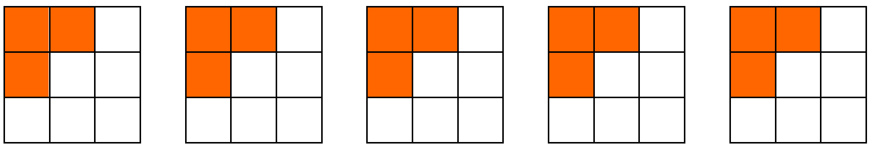
c) Quando o tabuleiro 3xn pode ser totalmente preenchido por triminós?

d) Quando o tabuleiro 3xn não pode ser totalmente preenchido por triminós?

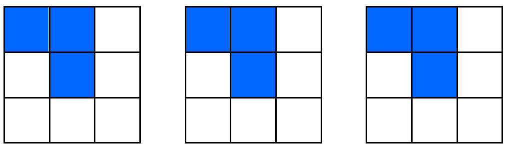
Nesta questão, o professor pode perguntar ao aluno como a questão 1 foi resolvida, sugerindo ao aluno que adote a mesma estratégia: observar os tabuleiros completamente preenchidos e procurar um padrão.

3) Será que realmente não conseguimos preencher um quadrado do tipo 3x3 com triminós? Vamos tentar todas as maneiras!

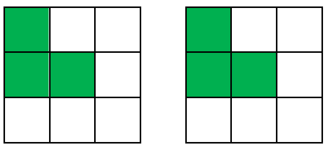
(I)



(II)



(III)



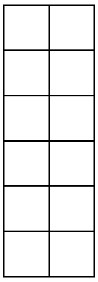
4) Existe alguma outra maneira de preencher o canto esquerdo?

- Agora já sabemos que o tabuleiro 3x3 não pode ser preenchido por triminós.

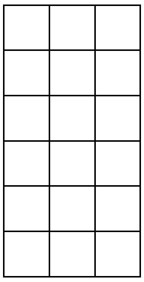
Nesta questão, o professor pode dar uma breve explicação sobre o processo de exaustão e de sua importância para convencer a si e aos outros da impossibilidade do preenchimento do tabuleiro $3 \times 3$.

5) Tabuleiros do tipo 6xn

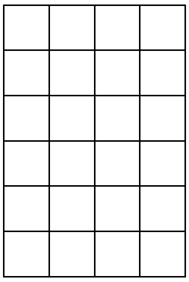
6x2



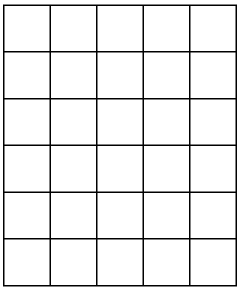
6x3



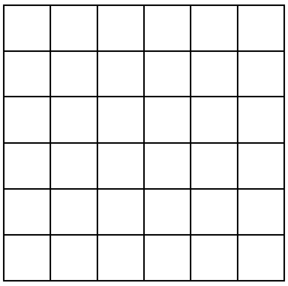
6x4



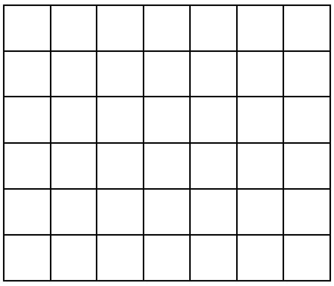
6x5



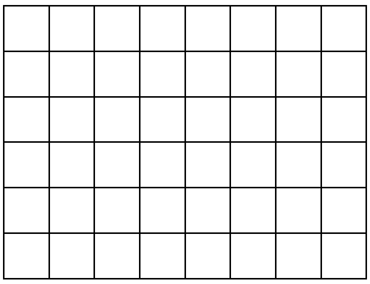
6x6



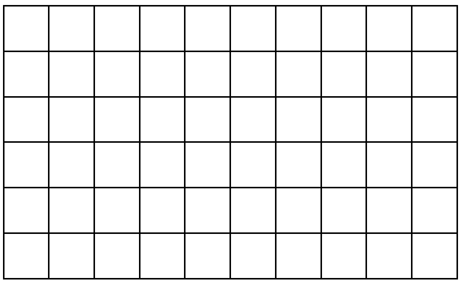
6x7



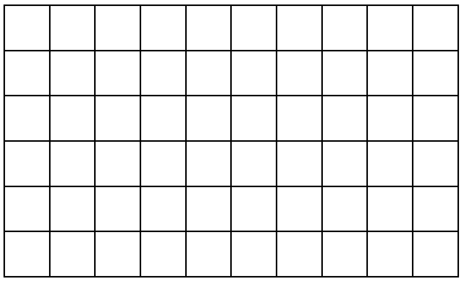
6x8



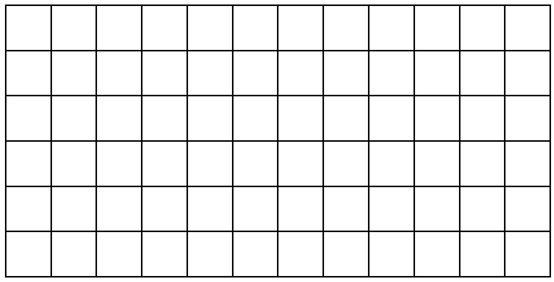
6x9



6x10



6x12



a) Quais dos tabuleiros 6xn acima (com seis linhas) foram totalmente preenchidos? Quais não foram? Por quê?

b) Será possível preencher um tabuleiro 6x15 com triminós? E um 6x137?

c) Descreva como você faria para preencher completamente um tabuleiro qualquer com um lado igual a 6, ou seja, descreva uma estratégia para preencher completamente um tabuleiro 6xn.

Para auxiliar os alunos na construção de uma estratégia de preenchimento, o professor pode solicitar aos alunos que descrevam por escrito como preencheram os tabuleiros $6 \times 4$ e $6 \times 5$. Caso necessário, sugerimos que o professor solicite ao aluno o preenchimento dos tabuleiros $6 \times 4$ e $6 \times 5$ utilizando os tabuleiros $6 \times 2$ e $6 \times 3$. Caso necessário, o professor pode perguntar ao aluno quantos tabuleiros $6 \times 2$ e quantos tabuleiros $6 \times 3$ podem ser colocados nos tabuleiros $6 \times 4$ e $6 \times 5$. Após a resposta, sugere-se perguntar para tabuleiros maiores.

d) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 12x4.

e) Explique, utilizando apenas palavras, como você montaria um tabuleiro 18x5.

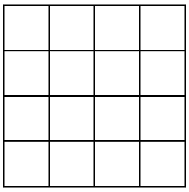
f) E se um dos lados for um múltiplo de 6 quadrados, quais retângulos podem ser totalmente preenchidos?

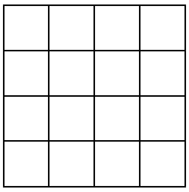
O professor pode perguntar aos alunos qual o tabuleiro resultante ao se colocar um tabuleiro $6 \times 2$ abaixo de outro tabuleiro $6 \times 2$.

6) Já sabemos que os quadrados que têm lados múltiplos de 6 podem ser preenchidos totalmente por triminós. Será que são só esses?

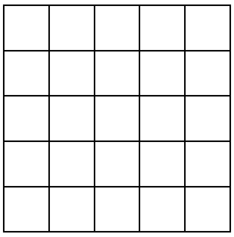
Vamos analisar alguns casos:

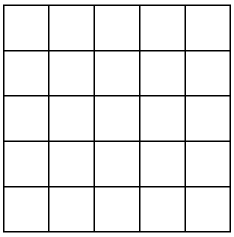
- O tabuleiro 4x4 pode ser preenchido com triminós?





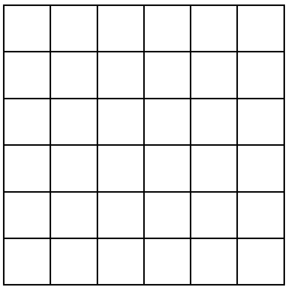
- O tabuleiro 5x5 pode ser preenchido com triminós?



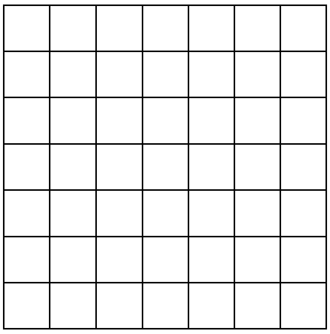


7) É possível preencher totalmente os tabuleiros abaixo usando os triminós?

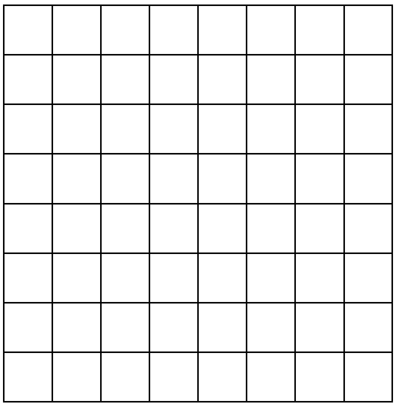
6x6



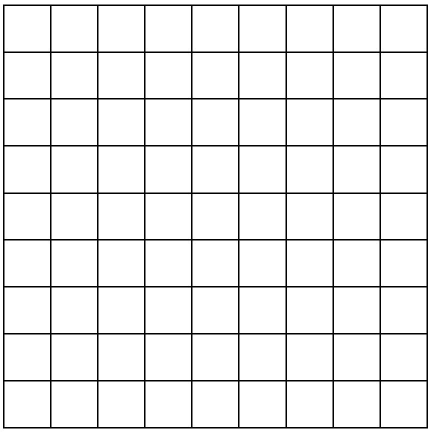
7x7



8x8

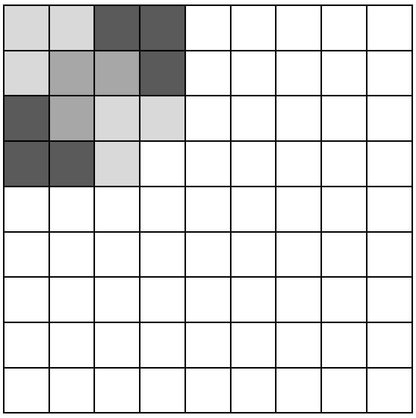


9x9



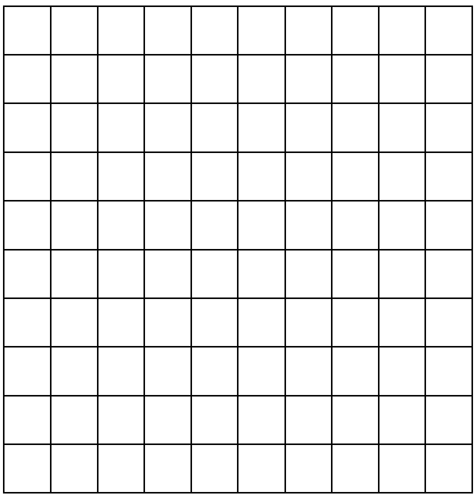
a) Quais dos tabuleiros acima que foram preenchidos pelos triminós?

Caso necessário, para auxiliar os alunos no preenchimento do tabuleiro $9 \times 9$, sugere-se que o professor dê a seguinte configuração inicial.



8) Preencha, caso possível, os tabuleiros a seguir.

10x10



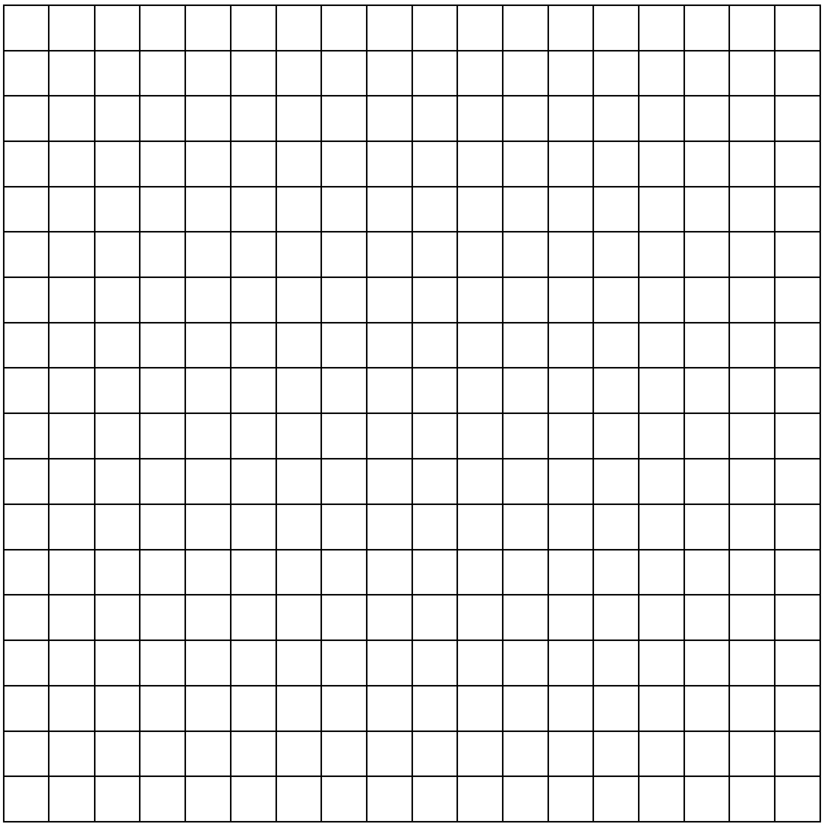
12x12

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

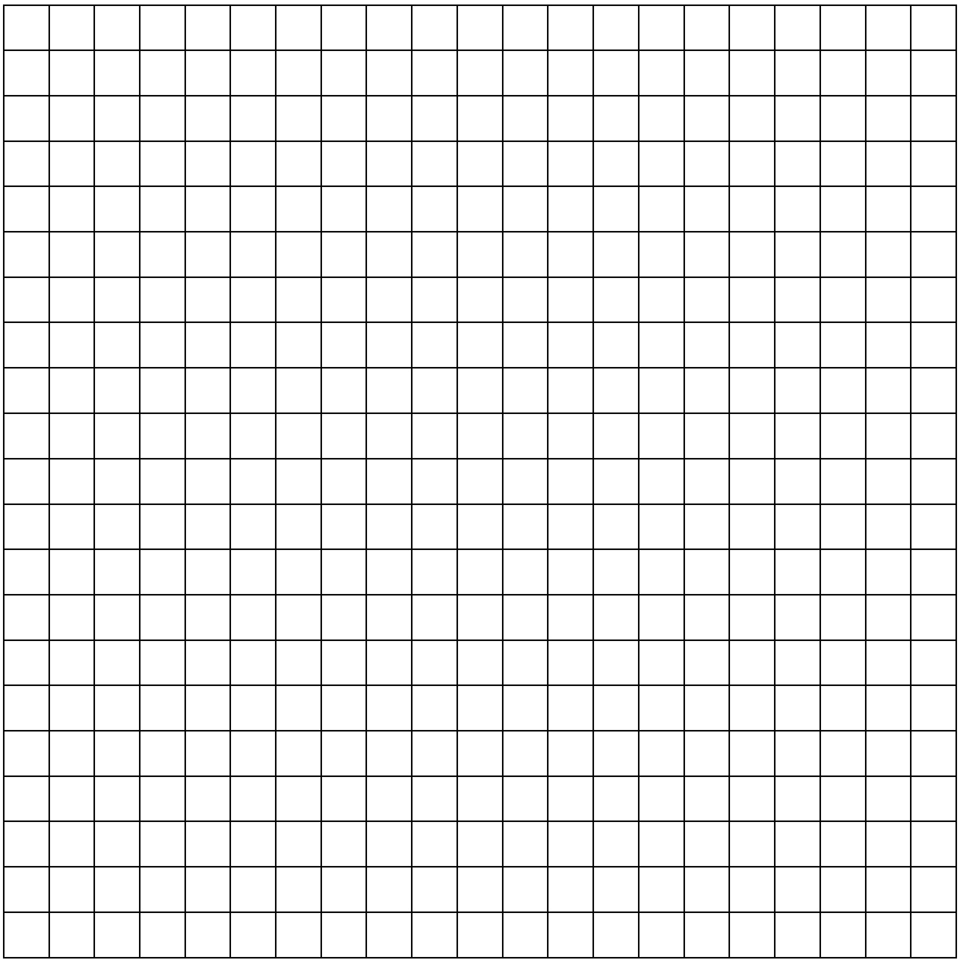
15x15

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

18x18

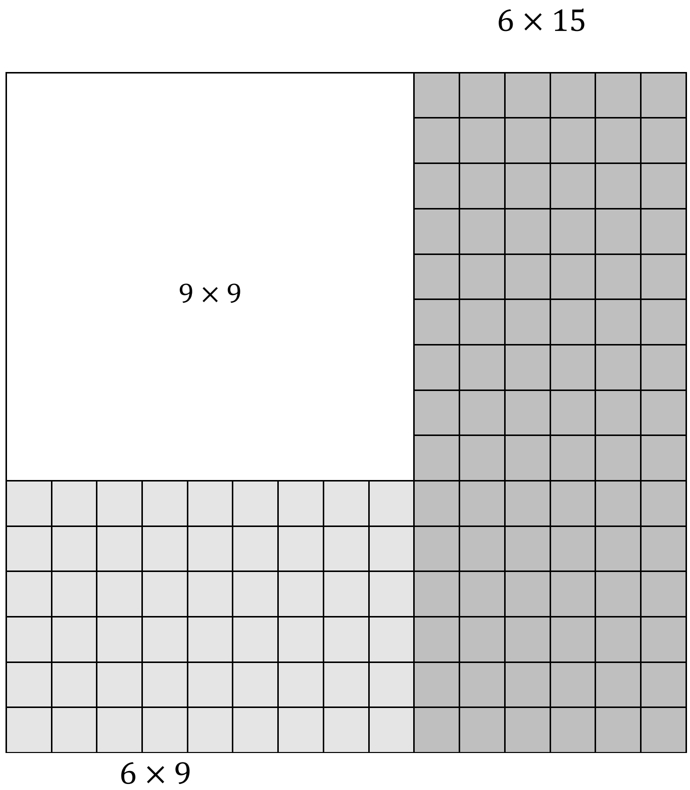


21x21



a) Quais tabuleiros quadrados foram preenchidos completamente por triminós?

O professor pode sugerir aos alunos que apresentarem dificuldade ou que estiverem procurando por uma forma mais rápida para preencher completamente os tabuleiros, que utilizem tabuleiros menores para auxiliar no preenchimento dos tabuleiros maiores. Caso seja necessário um exemplo, para preencher o $15 \times 15$, é possível utilizar um tabuleiro $9 \times 9$ dentro do mesmo, pois os alunos já terão preenchido o $9 \times 9$, e assim só precisarão preencher o restante do tabuleiro, que possuirá uma das dimensões igual a $6$, como visto a seguir.




b) O tabuleiro 24x24 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

c) O tabuleiro 25x25 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

d) O tabuleiro 27x27 poderia ser completamente preenchido por triminós? Por quê?

e) Em geral, para que tipo de n, um tabuleiro nxn pode ser totalmente preenchido pelos triminós? Quais não?

O professor pode sugerir aos alunos que observem os tabuleiros que foram preenchidos completamente, solicitando que procurem um padrão. Caso necessário, o professor ainda pode perguntar “de quanto em quanto” mudam os lados dos tabuleiros quadrados que podem ser preenchidos completamente.

Para as justificativas, o professor pode sugerir que o aluno observe as diferenças do modo como preencheu o tabuleiro $12 \times 12$ e o modo como preencheu o tabuleiro $15 \times 15$. Se necessário, o professor pode comentar que os tabuleiros que podem ser preenchidos completamente por triminós podem ou não ser múltiplos de 6, o que leva à necessidade da geração de duas estratégias diferentes de resolução.