ESTUDO DO BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA ASSOCIADO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Sheila Fabricia Schuck Backes – sj.schuck@ibest.com.br –Pólo de Picada Café
Débora da Silva Soares – debora.soares@ufrgs.br – UFRGS

Resumo: O presente trabalho está baseado em uma sequência didática aplicada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio, com duração de 4 horas-aula, na qual foi feito o estudo do baricentro de um triângulo qualquer. O estudo do baricentro tradicionalmente se limita ao cálculo de suas coordenadas e aplicação em problemas que envolvem as medianas de um triângulo. A proposta deste trabalho é apresentar algumas sugestões para trabalhar esse assunto de forma mais dinâmica utilizando o software GeoGebra. Partindo de um problema estimulador, foram construídos alguns triângulos no software onde os alunos puderam observar o comportamento das medianas e do baricentro em diferentes situações. Estas mesmas construções foram importantes no desenvolvimento de diversos conceitos matemáticos. O uso do software ainda estimulou nos estudantes diferentes formas de raciocínio e diferentes modos de solucionar problemas, além de instigar a criatividade e ampliar sua autonomia de reflexão.

Palavras-chave: triângulos, baricentro, tecnologias digitais.

1 Introdução

Atualmente todo tipo de tecnologia está presente na nossa vida cotidiana, inclusive no dia-a-dia dos nossos alunos. Seja uma novidade tecnológica que nos auxilie nas tarefas de casa, seja alguma grande inovação tecnológica para a medicina, sejam as facilidades de comunicação que as redes sociais nos proporcionam ou simplesmente poder assistir a um filme ou noticiário na televisão, todas as nossas tarefas diárias, de alguma forma, estão ligadas às mais diversas ferramentas tecnológicas e mídias digitais. Inserir, portanto, o uso de mídias nas aulas está se tornando uma necessidade, tanto para despertar o interesse dos alunos quanto para contribuir com a aprendizagem dos mais diversos conteúdos.

Pensando nisso, o objetivo dessa pesquisa é propor algumas atividades, seguindo um roteiro a ser desenvolvido em um software de geometria dinâmica, para estudar geometria analítica de forma dinâmica e potencialmente significativa, onde os alunos possam aplicar seus conhecimentos, pensar, analisar e refletir sobre o conteúdo estudado e contribuir com suas observações e conclusões.

Dentre os diversos conteúdos de geometria analítica a serem estudados no Ensino Médio, o objetivo dessa pesquisa é propor o estudo do comportamento das medianas e do baricentro em diferentes triângulos com o uso do software GeoGebra, o qual permite ao aluno fazer diversos movimentos e observar as peculiaridades e características para cada triângulo em específico. Além disso, essa pesquisa também pretende analisar as contribuições do software GeoGebra para a aprendizagem do aluno, de que forma isso acontece e o quanto ele pode contribuir na resolução de problemas envolvendo Geometria Analítica.

2 Desenvolvimento

2.1 – A Geometria analítica no Ensino Médio

No Ensino Médio, os conteúdos de Matemática podem ser estudados segundo três eixos temáticos: *Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; e Análise de dados*.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 123), “a Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços. ” Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas: Geometria Plana, Geometria Espacial, Métrica e Geometria Analítica. Cada tema é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo.

Apesar da proposta de ensino presente nesse trabalho de conclusão envolver um estudo em que os alunos irão definir baricentro e trabalhar com outros conceitos como a mediatriz, há um viés analítico, uma vez que a intenção também é trabalhar com conhecimentos de geometria analítica, tais como as coordenadas do ponto, distância entre dois pontos, ponto médio, entre outros. Nesse sentido, buscou-se compreender algumas questões relacionadas ao ensino de Geometria Analítica, as quais são apresentadas na sequência.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002) as habilidades para a unidade temática Geometria Analítica a serem desenvolvidas são:

> • Representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
> • Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
> • Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
> • Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
> • Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles (BRASIL, 2002, p. 125).

Além disso, ainda segundo os PCN+, a unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. Sendo assim,

> o aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. [...] Então, mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a geometria analítica propõe (BRASIL, 2002, p. 124).

Com o objetivo de verificar se os livros didáticos seguem as orientações dos PCNs, foram analisados os livros: *Matemática* de Luiz Roberto Dante, volume único, 1ª edição para o Ensino Médio, publicado em 2009; *Conexões com a Matemática* organizada pela editora moderna , sendo Fábio Martins de Leonardo o editor responsável , volume 3, 2ª edição para o Ensino Médio, publicado em 2013; *Matemática fundamental: uma nova abordagem* de José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr e José Roberto Bonjorno, volume único, 2ª edição para o Ensino Médio, publicado em 2011; *Novo olhar matemática* de Joamir Roberto de Souza, volume único, 2ª edição, publicado em 2013.

Comparando a proposta que os PCNs trazem com a proposta de ensino de geometria analítica dos livros didáticos do Ensino Médio, percebeu-se que os livros abordam o estudo do baricentro de forma muito tradicional e bastante limitada. A maioria dos problemas ou exercícios podem ser resolvidos apenas através da aplicação de fórmulas e pouco exploram as relações existentes entre os elementos, o uso de estratégias e diferentes formas de pensar, ou a exploração de diferentes instrumentos ou recursos didáticos na resolução dos problemas.

Segundo as Orientações Curriculares do Ensino Médio - OCEM (BRASIL, 2006) o trabalho com a Geometria Analítica permite a articulação entre a geometria e a álgebra e, para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento das figuras geométricas via equações, e o entendimento das equações via figuras geométricas. Portanto, aulas expositivas onde o professor simplesmente apresenta fórmulas e equações e os alunos se limitam a reproduzi-las não são atrativas para os alunos. É importante que o professor trabalhe os conteúdos de maneira que o aluno possa fazer generalizações e entender o significado de tudo que for estudado, de tal forma que ele possa ser mais autônomo e participar ativamente da construção do conhecimento.

Dentre os diversos conteúdos de geometria analítica previstos para o 3º ano, optou-se por estudar o baricentro de um triângulo por ser um conceito de grande importância tanto na matemática quanto na física, já que o baricentro é o centro de gravidade do triângulo. Além disso, o estudo do baricentro envolve diversos outros conhecimentos de geometria analítica (representação de pontos e triângulos no plano cartesiano, ponto médio, encontro de duas ou mais retas, distância entre dois pontos). Esse conceito, porém, é abordado pelos livros didáticos apenas por meio da aplicação de fórmulas, sem fazer a relação álgebra/geometria proposta pelos PCNs.

2.2 - O uso das tecnologias digitais no ensino de Geometria Analítica

Para estudar o baricentro de forma mais dinâmica, significativa e contextualizada, pensou-se em uma sequência didática que pudesse envolver e despertar o interesse dos alunos de tal forma que eles fossem os responsáveis pela definição dos conceitos de mediana e baricentro e que, além disso, o aluno pudesse manipular um ou mais triângulos a fim de observar o comportamento das medianas e do baricentro em diferentes situações. Assim, conforme sugerem os PCN+,

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p.111).

Sendo assim, incorporar as tecnologias digitais em sala de aula é uma opção interessante e que se faz necessária, pois elas influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender e de produzir, além de disponibilizar ferramentas que permitem a exteriorização, a diversificação e a ampliação de pensamentos. De acordo com Gravina (2012, p. 13) a tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que ampliam as possibilidades para “experimento de pensamento”, quando comparados aos resultados obtidos através de texto e desenho estático, uma vez que temos na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis, que o papel não possibilita. Além disso, essas ferramentas incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concreto-abstratos. “São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais” (GRAVINA, 2012, p.14).

Segundo pesquisas realizadas em Educação Matemática, o uso de tecnologias digitais em sala de aula vem mostrando interessantes reflexos no processo de aprendizagem matemática e no desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. O uso das mídias digitais, portanto, é muito importante, pois ajuda a mudar a dinâmica da sala de aula com o objetivo de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas simultaneamente com a aprendizagem matemática.

Muitos alunos apresentam dificuldades para compreender determinados conceitos e propriedades característicos da geometria e nem sempre conseguem visualizá-los nas figuras. Muitos também cometem equívocos do tipo: a altura de um triângulo é sempre um segmento que está no interior do triângulo ou ainda, um paralelogramo é um quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos. Tais equívocos acontecem porque os alunos se baseiam em determinadas situações específicas, esquecendo-se dos casos mais gerais. O uso de softwares de geometria dinâmica pode ser de grande ajuda na superação de tais dificuldades, pois permitem que o aluno faça construções aplicando os conhecimentos já adquiridos e também podem movimentar suas construções e verificar as propriedades em questão.

O uso de um software de geometria dinâmica, nesse caso, é muito interessante, pois pode estimular no estudante o desenvolvimento de diferentes formas de raciocínio e modos diferentes de solucionar problemas uma vez que os softwares de geometria dinâmica (GD) caracterizam-se por possibilitar a construção e manipulação de objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que diferencia o software de geometria dinâmica dos demais é a possibilidade de “arrastar” a figura construída utilizando o mouse. Desta forma, “com programas de GD o aluno pode testar, ‘fazendo’ ele próprio algumas descobertas” (ISOTANI, 2006, p. 122).

Segundo Santos (2012, p. 29),

> um software de Geometria Dinâmica proporciona a visualização do que está sendo trabalhado e enfatiza um aspecto fundamental na proposta da disciplina de Matemática, que é a experimentação, promovendo assim, uma melhor percepção por parte do aluno, ajudando-o a descobrir formas mais simples e outras formas de encontrar a solução de problemas.

O GeoGebra, em especial, combina álgebra, geometria, tabelas, gráficos, estatística e cálculos numa única aplicação. É um software livre que pode ser instalado sem licença tanto em computadores pessoais quanto nos computadores da escola e ele ainda apresenta uma versão on-line caso não se queira fazer a instalação. Além disso, seu menu é acessível e variado e suas ferramentas são de fácil manipulação. Sendo assim, pode ser uma rica ferramenta didática e que pode ser usada em diferentes níveis e modalidades de ensino em diversas aplicações. Seu principal objetivo é dinamizar o estudo da geometria e da álgebra, facilitando a compreensão e aprendizagem de diversos conceitos matemáticos e sua aplicação em várias situações.

> O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto (SANTOS, 2012, p. 30).

Por todas as possibilidades que o GeoGebra proporciona e por ser um software livre, ele se torna uma ferramenta de ensino e aprendizagem tanto de geometria, quanto de álgebra e cálculo, permitindo a alunos e professores a possibilidade de explorar, investigar, levantar conjecturas e testar hipóteses na construção do conhecimento matemático. D'Ambrósio (1989, p.5) afirma que o ensino de Matemática através da Informática Educativa

> tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a Matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante no processo de construção de seus conceitos.

Nesse sentido, a utilização de softwares no ensino e aprendizagem de Matemática pode estimular no estudante diferentes formas de raciocínio e diferentes modos de solucionar problemas, além de instigar a criatividade e ampliar a autonomia de reflexão, aproximando-o de situações de aplicabilidade e construção de conceitos matemáticos.

2.3 – A resolução de problemas enquanto abordagem pedagógica

A resolução de problemas faz parte da vida de praticamente todos os seres humanos. Diariamente, em nossa vida social, particular ou profissional nos deparamos com algum problema a ser resolvido. Assim sendo, o ensino da Matemática através da resolução de problemas é de extrema importância e se torna cada vez mais necessária na escola básica.

De acordo com Onuchic (2007) uma situação constitui-se num problema para uma pessoa quando esta não lhe é familiar; quando a novidade é sua característica fundamental e quando ela requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira. Em termos de sua execução, quando esta necessita deliberação, identificação de hipóteses e comprovação de factibilidade, tendo o indivíduo que pôr em prova suas habilidades de raciocínio autônomo.

Segundo Santos (2012), a metodologia por resolução de problemas na abordagem do ensino da Matemática tem por objetivos levar os alunos a pesquisar e compreender conteúdos matemáticos, formular situações problema e identificar problemas no dia a dia, além de desenvolver e aplicar estratégias de resolução de problemas fictícios e também reais. Dessa forma, é interessante que o professor apresente aos alunos diversos problemas envolvendo as mais variadas situações e englobando diferentes conteúdos para que os mesmos sejam desafiados e possam desenvolver seu próprio conhecimento.

A metodologia por resolução de problemas consiste em ser ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. “Sob esse enfoque, problemas são propostos de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal” (Onuchic, 2007, p.3).

A metodologia por resolução de problemas, porém, não deve ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática. Como é trazido por Onuchic (2007, p.5),

> “ela consiste em apresentar aos alunos, já no início do tratamento de um dado conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar

> sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados e, também, para que possam trazer à tona as concepções prévias que eventualmente eles tenham sobre os campos conceituais envolvidos na resolução".

Portanto, este processo

> "requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unificam. O problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da matemática, assim como seus usos e aplicações" (Onuchic apud Onuchic, 1999, p. 199-218).

A partir, então, do envolvimento significativo e da síntese dos resultados alcançados pelos alunos ao resolverem uma ou mais situações-problemas, é que o professor pode sistematizar os novos conhecimentos matemáticos que foram trabalhados, discutidos e pesquisados durante o processo de resolução do problema, para depois retomá-los em outros problemas e exercícios. Essa metodologia, portanto, deve propiciar um esforço de raciocínio e não se realiza com o mero exercício de recordação e memória, nem com a utilização mecânica de esquemas algorítmicos, nem com a aplicação de receitas pré-concebidas; ao contrário, deve propiciar a realização de certo esforço intelectual (GONZÁLEZ apud ONUCHIC, 2007).

Considerando que cada um tem uma maneira própria de pensar e, consequentemente, sua própria maneira de resolver um problema, variando de acordo com o tipo, o grau de dificuldade e o nível de conhecimento matemático de quem está resolvendo o problema, o matemático George Polya tentou organizar o processo de resolução de problemas em quatro etapas a seguir descritas:

1 – Entenda o problema: primeiramente é necessário entender o problema. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições?

2– Construa uma estratégia de resolução: faça conexões entre os dados e a incógnita. Elabore um plano ou uma estratégia de resolução, levando em conta todas as condições do problema. Compare com outros problemas parecidos. Veja se há algum teorema ou fórmula que possa auxiliá-lo na resolução.

3– Execute a estratégia: ao executar a estratégia, verifique cada passo a fim de certificar-se que cada um deles está correto e que, de fato, chegou-se ao resultado esperado.

4– Revise: analise a solução obtida. Verifique o resultado e o argumento.

O professor deve ser o mediador no processo de resolução de problemas, auxiliando os alunos em suas dúvidas, na organização de seus pensamentos e na verificação dos resultados. Através da resolução de problemas o aluno tem a oportunidade de desenvolver sua criatividade e demonstrar sua forma de pensar, sem se tornar dependente de um modelo ou de fórmulas prontas.

> O processo de ensino e aprendizagem por meio da resolução de problemas atualmente é um dos caminhos metodológicos mais considerados e incentivados pelos pesquisadores da área, os quais defendem que esse modelo ajudaria a desenvolver a estrutura cognitiva do aluno, exercitar sua criatividade e torná-lo capaz de aprender significativamente, podendo assim aplicar o conhecimento adquirido em diferentes contextos da própria Matemática e em outras áreas do conhecimento, além das situações da vida cotidiana (SANTOS, 2012, p. 21).

Apesar de ser tão valorizada e importante para a aprendizagem dos alunos, a resolução de problemas em sala de aula pode se tornar difícil, pois muitas vezes eles sabem resolver algoritmos, mas não conseguem aplicá-los em problemas ou situações contextualizadas. Considerando que um mesmo problema não tem uma única forma de ser resolvido e que nem sempre é necessário que se aplique alguma fórmula ou equação para solucioná-lo, essa metodologia de ensino valoriza a autonomia do aluno, além de ampliar seus conhecimentos e desenvolver sua capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. O ensino de matemática através da resolução de problemas faz com que o aluno pense produtivamente, desafiando-o e estimulando-o a querer resolver problemas de toda espécie, podendo tornar a aula interessante e de fácil conexão com a realidade em que o aluno está inserido.

2.4 – Aspectos gerais da proposta de ensino do baricentro

A sequência didática que foi desenvolvida para este trabalho de conclusão foi aplicada com uma turma de 29 alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Médio João Wagner em Morro Reuter, RS. A turma é composta por alunos em idade escolar regular que estudam no turno da manhã, porém muitos deles trabalham no turno da tarde.

A escola está localizada no centro da cidade, mas alunos de todo o município vêm até esta escola para cursar o Ensino Médio, já que é a única escola do munícipio que oferece o curso. A escola conta com um laboratório de informática com apenas 10 máquinas. Para realizar tarefas que demandam dessa tecnologia, os professores solicitam aos alunos que tragam seus próprios notebooks para a aula. Porém, como nem todos têm notebook, é necessário realizar as atividades em duplas ou trios.

A proposta é partir de um problema estimulador que envolve a mediana de um triângulo e depois, a partir de um roteiro de trabalho a ser desenvolvido no GeoGebra, chegar à definição e ao cálculo do baricentro e aplicar tais conhecimentos na resolução de problemas.

Como a turma em que foi aplicada a sequência didática não conhecia o software GeoGebra, nem mesmo havia trabalhado com qualquer outro software de geometria dinâmica em séries anteriores, foi necessário apresentar o software e suas ferramentas antes de desenvolver as atividades. Para que os alunos pudessem se familiarizar com o GeoGebra, desde o início do corrente ano letivo foram desenvolvidas algumas atividades bem simples no software, mas que foram essenciais para que os alunos conhecessem as ferramentas disponíveis no menu, tais como marcar pontos no plano cartesiano, traçar uma reta, traçar retas paralelas e perpendiculares, construir figuras geométricas usando diferentes ferramentas, entre outros; todos dentro dos conteúdos programáticos deste ano/série.

Para desenvolver a proposta de ensino, a turma foi divida em grupos: alguns com 2 componentes e outros grupos com 3 componentes, de acordo com a quantidade de computadores, notebooks e tablets disponíveis. Cada grupo trabalhou em uma máquina e recebeu um roteiro de atividades a serem desenvolvidas no GeoGebra juntamente com um questionário que deveria ser respondido de acordo com as observações e cálculos realizados ao longo do roteiro. Ao organizar esse roteiro e o questionário, teve-se a preocupação de formular perguntas abertas, sem induzir as respostas dos alunos. Dessa forma, cada grupo pode ter interpretado uma mesma pergunta de formas diferentes e com isso as respostas indicarão a maneira de pensar e as estratégias que o grupo criou para responder as perguntas.

Como ponto de partida da sequência didática, foi proposto um problema de geometria envolvendo uma das medianas de um triângulo qualquer, retirado do livro didático *Matemática fundamental – uma nova abordagem* dos autores Giovanni, Giovanni Jr. e Bonjorno (2011).

Seguindo um roteiro de estudos acompanhado de um questionário, os alunos fizeram algumas construções no GeoGebra. Baseados nestas construções conceituaram mediana e baricentro e fizeram algumas análises. Observaram a posição da mediana relativa à base de cada triângulo e também calcularam a razão entre a medida do baricentro até o vértice e a medida do baricentro até o ponto médio. A partir dos cálculos realizados, observaram que existe uma regularidade entre essas razões. Além disso, foram propostos alguns problemas envolvendo as medianas e o baricentro do triângulo que poderiam ser resolvidos com ou sem o GeoGebra.

Ao concluírem todo o roteiro, os alunos responderam um pequeno questionário de opinião sobre o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática.

3 Relato da aplicação da proposta de ensino

Ao desenvolver a sequência didática a seguir descrita, pensou-se em construir conhecimento matemático de acordo com a concepção de Onuchic (1999), segundo a qual se entende por problema, “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”, isto é, qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial.

Portanto, compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidas depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir.

Para tanto, buscou-se uma situação-problema que pudesse ser usada como ponto de partida para conceituar mediana, mas que também pudesse ser retomada ou reformulada ao longo da sequência com o objetivo de conceituar baricentro. O problema norteador foi retirado do livro didático *Matemática fundamental – uma nova abordagem* e reformulado em seguida para atingir os objetivos acima descritos.

> (UFPel – RS) Na arquitetura, a Matemática é usada a todo momento. A geometria é especialmente necessária no desenho de projetos. Essa parte da matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir as medidas desses espaços.
> Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A(8, 4), B(4 ,6) e C(2,4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C, é colocado um suporte para luminárias.
> Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento:

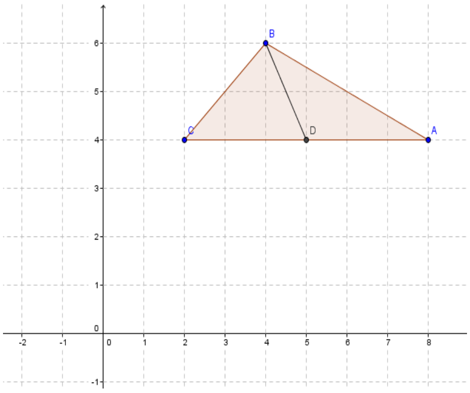
a) $\sqrt{37}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{13}$
e) $\sqrt{17}$
f) I.R.

(GIOVANNI, 2011, p. 570)

Para resolver esse problema a professora sugeriu que os alunos começassem construindo o modelo matemático que representa o problema usando o software GeoGebra. Para tanto, os aluno precisaram compreender os dados do problema, tomar decisões para resolvê-lo e estabelecer relações, conforme sugere Onuchic (2007).

Os alunos fizeram a construção do triângulo no GeoGebra, usando a ferramenta ponto médio do software para determinar onde se localiza o suporte. Essa construção, que caracteriza um triângulo escaleno, foi desenvolvida pelos grupos que tiveram a liberdade de construir o triângulo da maneira que achassem mais conveniente. Em seguida, determinaram a distância do suporte até o ponto B utilizando a fórmula da distância entre dois pontos, solucionando o problema acima descrito. Na figura 1 podemos ver a construção que um dos grupos fez para representar o problema do jardim.

Figura 1: Representação do problema do jardim



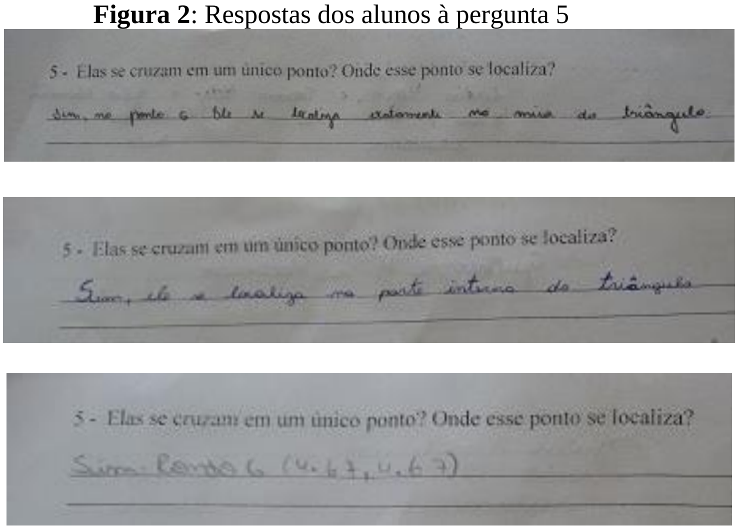
Fonte: Arquivo ggb. dos alunos

A partir dessa construção, a professora explicou à turma que a distância de um vértice até o ponto médio do lado oposto é a mediana do triângulo. Em seguida, tiveram que responder quantas medianas tem um triângulo. Esperava-se que todos conseguissem visualizar que um triângulo possui três medianas. De acordo com o material que foi produzido pelos alunos e recolhido para análise, todos os grupos conseguiram traçar as medianas no GeoGebra e todos responderam corretamente que um triângulo possui três medianas.

Em seguida, foi perguntado o que acontece com essas três medianas: elas são paralelas, são perpendiculares ou são concorrentes? Elas se cruzam em um único ponto? Onde esse ponto se localiza?

Todos os grupos responderam corretamente que as medianas são retas concorrentes e, por isso sempre irão se cruzar em um único ponto. Ao perguntar onde esse ponto se localiza, obtiveram-se diversas respostas, uma vez que a pergunta é aberta e não induz à resposta que o professor espera, mas, sim à percepção do aluno. Como resposta, alguns escreveram as coordenadas desse ponto de intersecção, outros escreveram que o ponto se localiza no meio do triângulo e alguns grupos responderam que o ponto se localiza na parte interna do triângulo, conforme figura 2. Nessa etapa, todos os grupos marcaram o ponto de intersecção das medianas, gerando o ponto G, ao qual muitos grupos fazem referência nas questões seguintes.

Figura 2: Respostas dos alunos à pergunta 5

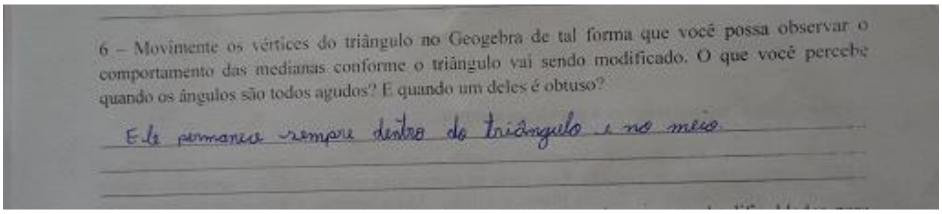


Fonte: Material produzido pelos alunos

Para visualizar melhor o que acontece com as medianas em diferentes triângulos os alunos movimentaram os vértices do triângulo escaleno no Geogebra e foram observando o comportamento das medianas conforme o triângulo ia sendo modificado. O objetivo desse movimento de vértices era poder observar que mesmo modificando os lados e os ângulos do triângulo, as medianas continuam se cruzando e que esse cruzamento sempre se dá em um único ponto localizado no centro do triângulo.

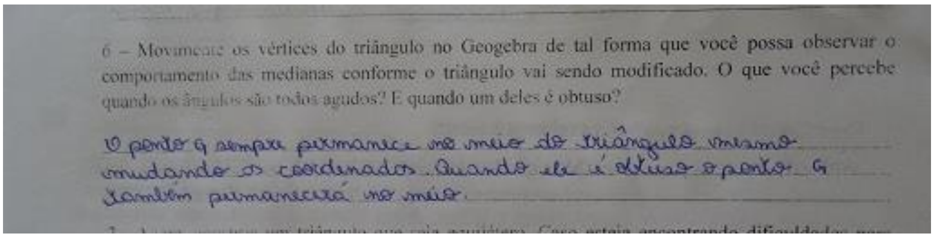
Ao responderem essa pergunta, porém, os alunos se limitaram a observar o ponto G e não as medianas. Sendo assim, as respostas fazem, em sua maioria, referência apenas ao ponto G e às suas coordenadas. Algumas das respostas podem se visualizadas na figura 3:

Figura 3: Respostas dos alunos à pergunta 6



6 – Movimente os vértices do triângulo no Geogebra de tal forma que você possa observar o comportamento das medianas conforme o triângulo vai sendo modificado. O que você percebe quando os ângulos são todos agudos? E quando um deles é obtuso?

Ele permanece sempre dentro do triângulo e no meio.



6 – Movimente os vértices do triângulo no Geogebra de tal forma que você possa observar o comportamento das medianas conforme o triângulo vai sendo modificado. O que você percebe quando os ângulos são todos agudos? E quando um deles é obtuso?

O ponto G sempre permanece no meio do triângulo mesmo mudando as coordenadas. Quando ele é obtuso o ponto G também permanecerá no meio.

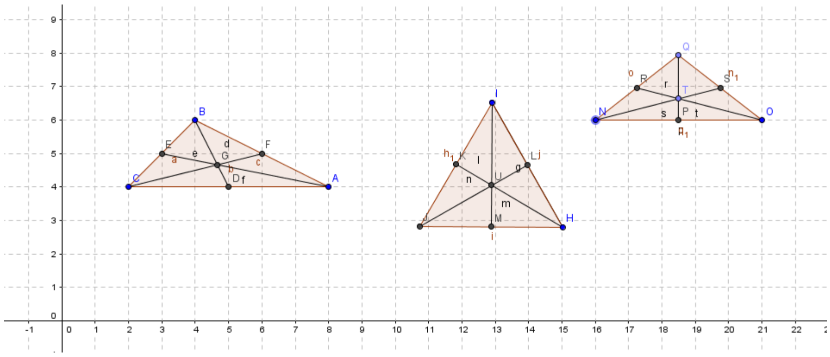
Fonte: Material produzido pelos alunos

Seguindo o roteiro, os alunos construíram um triângulo equilátero e um triângulo isósceles para comparar o comportamento das medianas em relação ao triângulo escaleno construído anteriormente. Essas construções foram realizadas a partir de um passo a passo disponibilizado no roteiro.

Figura 4: Alunas construindo os triângulos

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5: Construção dos três triângulos



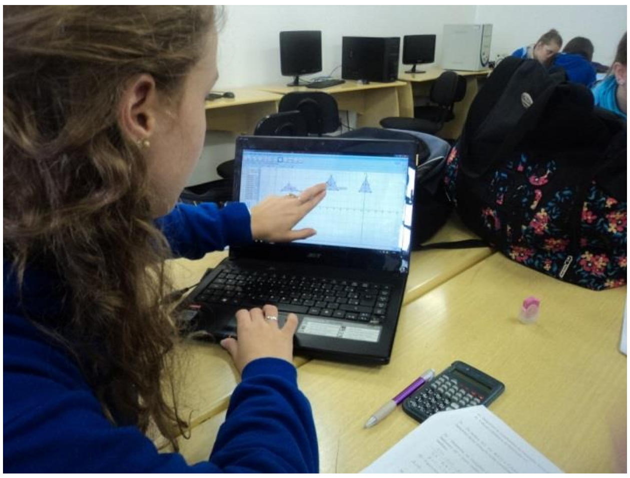
Fonte: Arquivo ggb. dos alunos

Observando as três construções e fazendo a movimentação dos vértices, os alunos analisaram o comportamento da mediana relativa à base em cada triângulo. Foram feitos alguns questionamentos relacionados a essa análise, tais como:

- O que acontece com a mediana relativa à base do triângulo equilátero?
- O que acontece com a mediana relativa à base do triângulo isósceles?
- O mesmo acontece com a mediana relativa à base do triângulo escaleno? Por quê?

Através de suas construções, os alunos observaram a posição da mediana nos três triângulos para fazer as comparações, como mostra a figura 6.

Figura 6: Alunos analisando a posição da mediana relativa à base

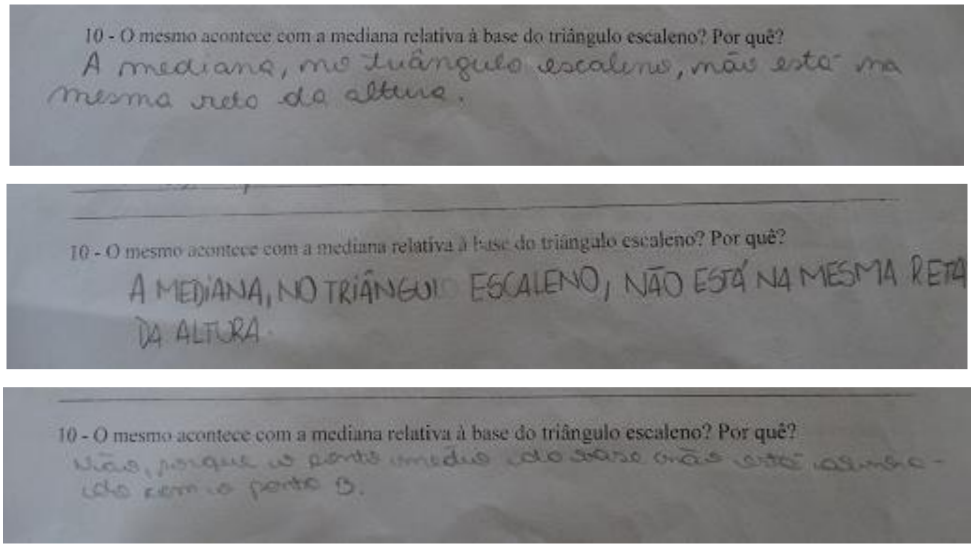


Fonte: Elaborado pelo autor

Esperava-se que os alunos percebessem que a mediana relativa à base do triângulo isósceles e equilátero equivale à altura desses triângulos, enquanto que no triângulo escaleno o mesmo não acontece. Nesse momento, assim como previsto, foi necessário retomar o conceito de altura do triângulo com a turma e auxiliar alguns grupos com mais dificuldades. Muitos desses grupos conseguiram dizer que a mediana estava localizada exatamente no meio do triângulo equilátero e isósceles, dividindo-os em duas partes iguais, porém não conseguiam visualizar que esse mesmo segmento representava a altura do triângulo. Com algumas explicações e intervenções da professora, por fim todos conseguiram entender que a mediana coincide com a altura dos triângulos equilátero e isósceles.

A maioria dos grupos conseguiu visualizar que a mediana relativa à base do triângulo escaleno não corresponde à altura e ainda justificaram corretamente, como pode ser verificado na figura 7. Porém, três grupos responderam incorretamente que a mediana e a altura sempre são coincidentes, conforme figura 8.

Figura 7: Resposta corretas referente à localização da mediana relativa à base

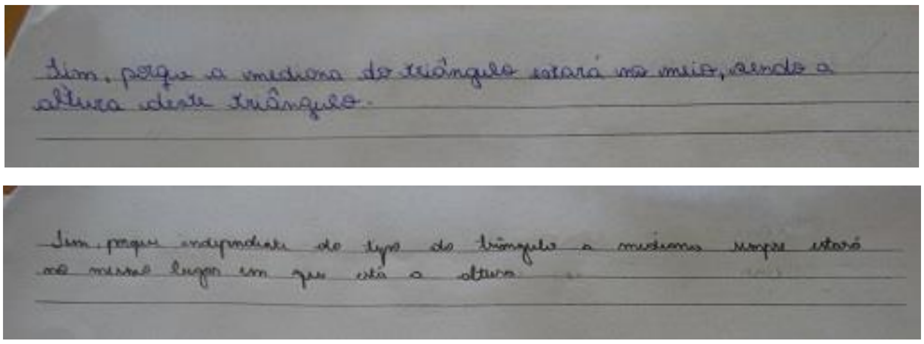

10 - O mesmo acontece com a mediana relativa à base do triângulo escaleno? Por quê?
A mediana, no triângulo escaleno, não esta na mesma reta da altura.

10 - O mesmo acontece com a mediana relativa à base do triângulo escaleno? Por quê?
A MEDIANA, NO TRIÂNGULO ESCALENO, NÃO ESTÁ NA MESMA RETA DA ALTURA.

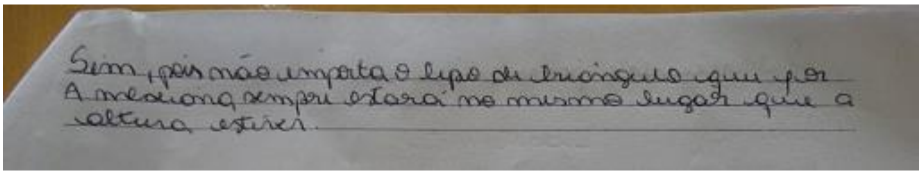
10 - O mesmo acontece com a mediana relativa à base do triângulo escaleno? Por quê?
Não, porque o ponto médio da base não está alinhado com o ponto B.

Fonte: Material produzido pelos alunos

Figura 8: Respostas incorretas referentes à localização da mediana relativa á base


Sim, porque a mediana do triângulo estará no meio, sendo a altura deste triângulo.

Sim, porque independente do tipo do triângulo a mediana sempre estará no mesmo lugar em que está a altura.



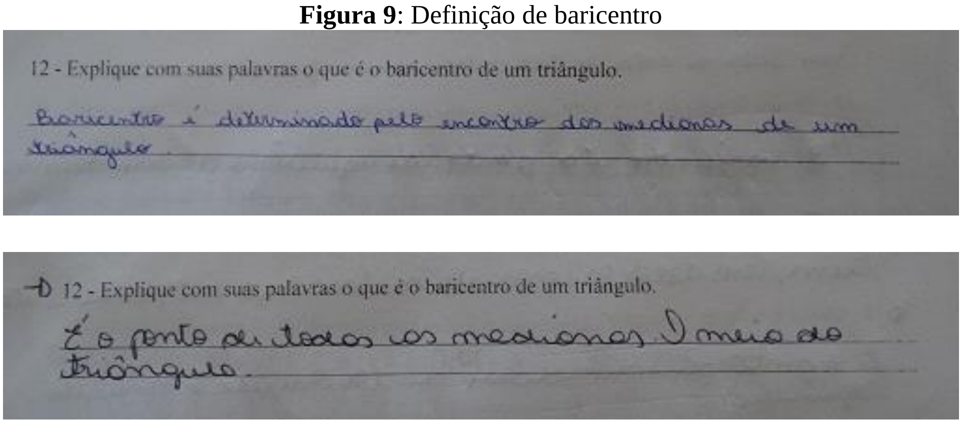
Fonte: Material produzido pelos alunos

Após essa discussão sobre a altura dos triângulos foi retomado o problema do jardim com o objetivo de conceituar baricentro de forma contextualizada e significativa conforme sugerido por Onuchic (2007) e Santos (2012), levando os alunos a construir novos conceitos e conhecimentos a partir da resolução de um problema, ou seja, o problema como ponto de partida e não como ponto de chegada.

Problema: Depois de terminar o projeto do jardim, o dono da residência resolveu que queria colocar um chafariz no centro dele, exatamente no ponto de encontro das três medianas. Usando o GeoGebra, determine as coordenadas do ponto onde o chafariz deverá ser colocado.

Como os alunos já haviam marcado o ponto G na construção do GeoGebra ficou fácil responder quais as coordenadas do ponto onde o chafariz será colocado. Partindo desse problema, os alunos tiveram que explicar com suas palavras o que é o baricentro, aplicando aqui novamente a ideia de Onuchic na qual a resolução de um problema é ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. Na figura 9 é possível ver algumas das respostas.

Figura 9: Definição de baricentro



Fonte: Material produzido pelos alunos

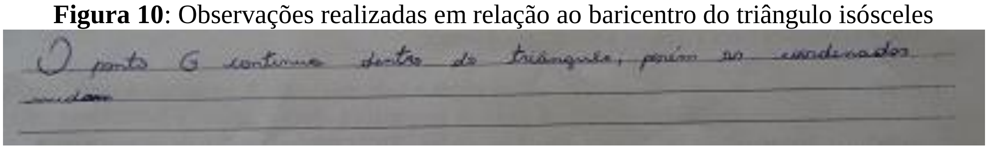
Em seguida a turma foi incentivada a movimentar os vértices do triângulo para observar o que acontece com o baricentro. Para isso foi lançada a seguinte tarefa: O que aconteceria com a posição do chafariz se esse jardim tivesse a forma de outro triângulo?

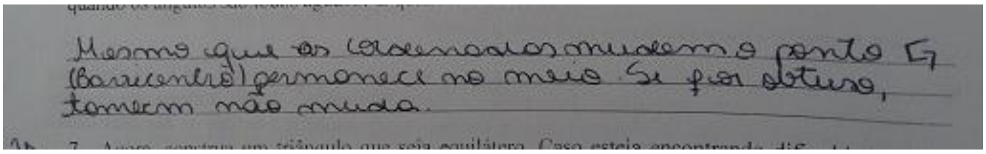
Movimente os pontos A, B e C de tal forma que você consiga representar diferentes tipos de triângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo. Observe o que acontece com o baricentro em cada um deles.

Os grupos foram unânimes em responder que mesmo modificando o triângulo, o baricentro continua localizado no centro. Alguns grupos ainda complementaram suas respostas afirmando que o baricentro continua localizado no ponto de encontro das medianas e que somente suas coordenadas é que vão mudando.

Os alunos também movimentaram os vértices do triângulo equilátero e observaram o comportamento do baricentro. No triângulo isósceles, os alunos movimentaram primeiro os vértices da base para observar o comportamento do baricentro. Em seguida, movimentaram o vértice que determina a altura formando um triângulo acutângulo e depois um triângulo obtusângulo. Ao final das observações, escreveram o que perceberam em relação ao baricentro em cada um dos casos. Na figura 10 podem ser visualizadas algumas das observações feitas pelos alunos.

Figura 10: Observações realizadas em relação ao baricentro do triângulo isósceles


O ponto G continua dentro do triângulo, porém as coordenadas mudam


Mesmo que as coordenadas mudem o ponto G (Baricentro) permanece no meio. Se for obtuso, tamém não muda.

Fonte: Material produzido pelos alunos

Foi questionado ainda se o baricentro sempre fica localizado em um ponto interno do triângulo e qual a sua função. Nesse momento, nenhum dos grupos soube dizer qual a função do baricentro, apenas sabiam que ele estava sempre na parte interna, localizado bem no centro do triângulo. Como os alunos não conseguiram chegar a uma conclusão foi solicitado que eles pesquisassem na internet a função do baricentro. Por meio dessa pesquisa, conseguiram responder que ele é o ponto de equilíbrio do triângulo, também chamado de centro de gravidade. Isso ficou mais claro mais tarde quando construímos alguns triângulos com cartolina, marcamos o baricentro e usamos um barbante para equilibrá-lo.

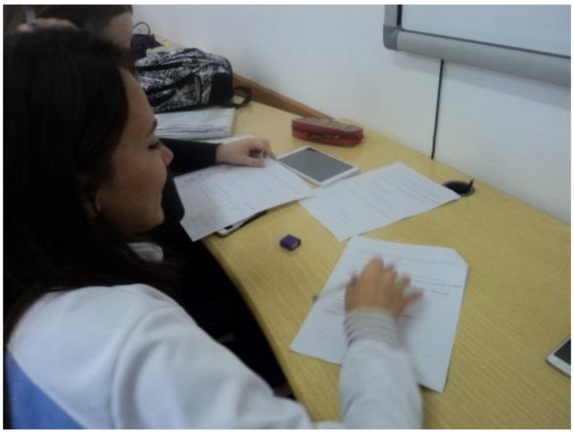
Após todos esses questionamentos, foi feita a demonstração da fórmula para calcular as coordenadas do baricentro, que é G$\left(\frac{x_{1+}x_{2+}x_3}{3}, \frac{y_{1+}y_{2+}y_3}{3}\right)$..

A partir dessa fórmula, foram propostos alguns problemas para determinar as coordenadas do baricentro e colocar em prática os novos conhecimentos. Neste momento, os alunos aplicaram as quatro etapas de resolução de problemas organizadas por Polya.

Esse foi um momento bem interessante, pois a turma permaneceu no laboratório de informática, mas poucos grupos usaram o GeoGebra para solucionar os problemas (figura 12). A grande maioria resolveu de forma tradicional (figura 11), usando as fórmulas e fazendo os cálculos. Isso só mostra o quanto a forma tradicional de ensino está presente na vida desses alunos. Mesmo depois de seguirem todo um roteiro desenvolvido totalmente no software, na hora de resolver os problemas a maioria da turma optou pelo cálculo. Sendo assim, seria interessante estimular esses grupos a resolver estes problemas também com o software e fazer comparações com as soluções encontradas ao aplicar fórmulas e equações.

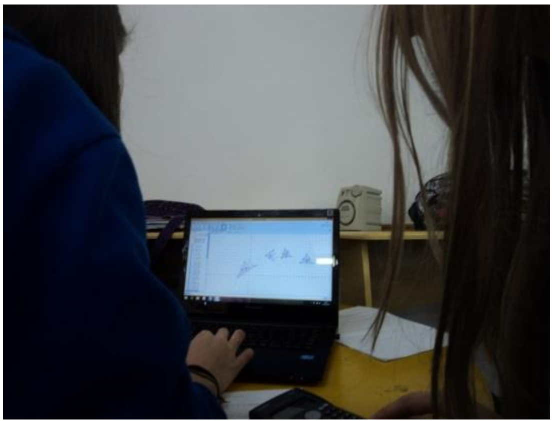
Como a metodologia por resolução de problemas preza pela autonomia do aluno e o desenvolvimento de sua criatividade, dando a ele a liberdade de solucionar uma determinada situação de diferentes maneiras, temos aqui um bom exemplo de que esse objetivo foi alcançado, uma vez que os grupos desenvolveram estratégias diferentes para resolver os problemas e todos conseguiram chegar à solução.

Figura 11: Alunos resolvendo os problemas através de cálculos



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 12: Alunos resolvendo os problemas usando o GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Seguem os problemas que foram propostos:

1- Dado o triângulo de vértices A(0, -1), B(-5, -5) e C(-3, 1), determine:

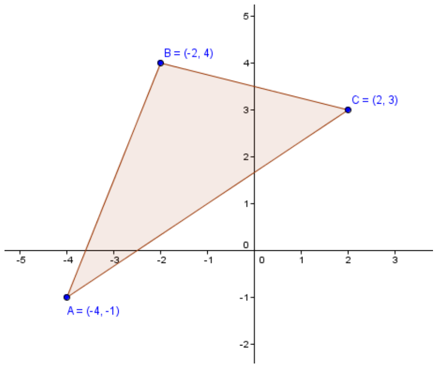
a) O comprimento das medianas

b) As coordenadas do baricentro

Ao resolverem esse problema, os alunos precisaram coletar os dados e pensar numa estratégia para solucionar o problema. Para isso, optaram por determinar primeiramente as coordenadas dos pontos médios dos três lados do triângulo e, em seguida, aplicaram a fórmula da distância entre dois pontos para determinar o comprimento das medianas. Após essa etapa, usando as coordenadas dos vértices, aplicaram a fórmula do baricentro para determinar suas coordenadas.

Já os grupos que resolveram o problema usando o GeoGebra não precisaram efetuar cálculos. Estes apenas marcaram os pontos médios, traçar as medianas e usaram a ferramenta 'distância' para determinar o comprimento das medianas. Para determinar as coordenadas do baricentro, apenas marcaram o ponto G na figura.

2- Observe o ΔABC em um plano cartesiano



a) Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo

b) Calcule a distância do baricentro até o ponto C

Novamente, os grupos tiveram que coletar os dados do problema e pensar de que forma poderiam solucioná-lo. Os grupos que optaram em usar o software reproduziram o triângulo acima e usaram o mesmo raciocínio aplicado no problema anterior. Já os grupos que optaram pelo papel e caneta aplicaram primeiramente a fórmula para determinar as coordenadas do baricentro e, em seguida, calcularam a distância do baricentro at´o ponto C por meio da fórmula da distância entre dois pontos.

3- Os pontos A(2, m), B(4,1) e C(6,m) são vértices de um triângulo. Calcule m para que o baricentro desse triângulo tenha coordenadas G(4, 3).

Neste problema os alunos tiveram que pensar em outras estratégias para solucionar o problema. Alguns grupos resolveram por tentativa e erro e a grande maioria resolveu o problema por meio de uma equação.

Mais uma vez, podemos perceber que a metodologia por resolução d problemas estimula o estudante a pensar e criar diferentes estratégias de resolução, além de desenvolver sua criatividade e autonomia ao poder optar pela forma como vai solucionar uma determinada situação.

Após a resolução dos problemas acima descritos, ainda foram propostos outros três problemas envolvendo o baricentro e as medianas. Segundo os PCNs, o aluno do ensino médio deve “identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades” (BRASIL, 2002, p. 116) . Seguindo essa orientação, os alunos deveriam descobrir outra regularidade importante no estudo do baricentro. Para descobrir essa regularidade tiveram que seguir três orientações:

1- Usando a ferramenta distância ou comprimento, determine no GeoGebra a distância do baricentro até o vértice e a distância do baricentro até o ponto médio e verificar qual a razão entre essas duas medidas.

2 - Faça o mesmo cálculo da razão para os outros triângulos que foram construídos.

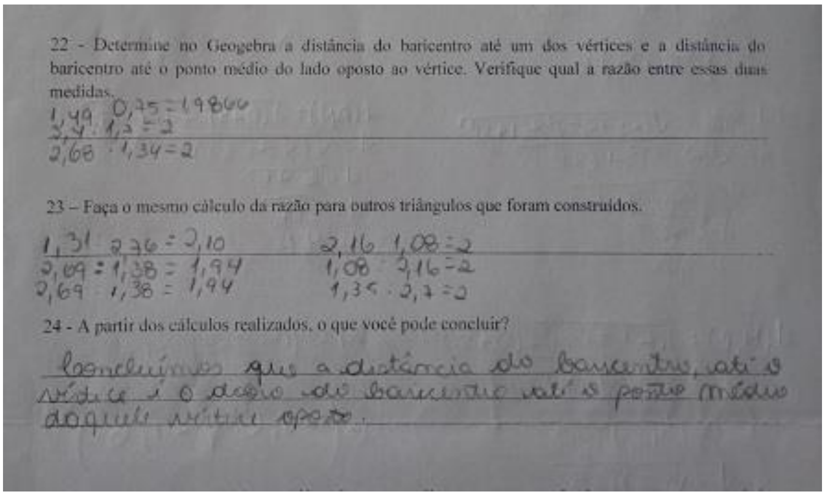
3 - A partir dos cálculos realizados, o que você pode concluir?

A maioria dos grupos realizou os cálculos corretamente, chegando à razão 1:2. Alguns grupos compararam suas respostas e verificaram que alguns haviam encontrado como solução 0,5 e outros 2. Nesse momento sentiram-se confusos, pois não compreendiam porque os resultados estavam tão diferentes. Então, foi esclarecido que a ordem dos valores da divisão altera o resultado, mas que era necessário que percebessem que uma medida é o dobro da outra, ou então, que uma medida é a metade da outra, por isso a diferença nas respostas.

Após esse esclarecimento, os alunos deveriam escrever suas conclusões. Todos compreenderam que a razão entre a medida do baricentro até o ponto médio e a medida do baricentro até o vértice é 1:2, porém, nem todos os grupos souberam descrever suas conclusões corretamente.

Alguns grupos foram bastante coerentes, pois as conclusões foram bem elaboradas e condizentes com os cálculos realizados. Nas figuras 13 e 14 é possível ver algumas dessas conclusões.

Figura 13: Conclusões dos alunos


22 - Determine no Geogebra a distância do baricentro até um dos vértices e a distância do baricentro até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Verifique qual a razão entre essas duas medidas.

1,49 0,75 = 1,9866
2,4 1,2 = 2
2,68 1,34 = 2

23 – Faça o mesmo cálculo da razão para outros triângulos que foram construídos.

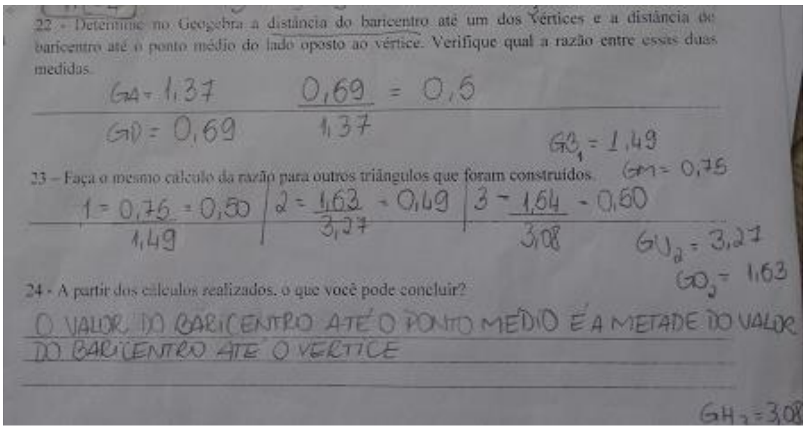
1,31 2,76 = 2,10 2,16 1,08 = 2
2,69 : 1,38 = 1,94 1,08 2,16 = 2
2,69 1,38 = 1,94 1,35 2,7 = 2

24 - A partir dos cálculos realizados, o que você pode concluir?

Concluímos que a distância do baricentro até o vértice é o dobro do baricentro até o ponto médio daquele vértice oposto.

Fonte: Material produzido pelos alunos

Figura 14: Conclusões dos alunos


22 - Determine no Geogebra a distância do baricentro até um dos vértices e a distância do baricentro até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Verifique qual a razão entre essas duas medidas.

GA = 1,37 0,69 / 1,37 = 0,5
GD = 0,69

GB1 = 1,49
GM = 0,75

23 – Faça o mesmo cálculo da razão para outros triângulos que foram construídos.

1 = 0,75 / 1,49 = 0,50 | 2 = 1,63 / 3,27 = 0,49 | 3 = 1,64 / 3,08 = 0,50

GU2 = 3,27
GO2 = 1,63

24 - A partir dos cálculos realizados, o que você pode concluir?

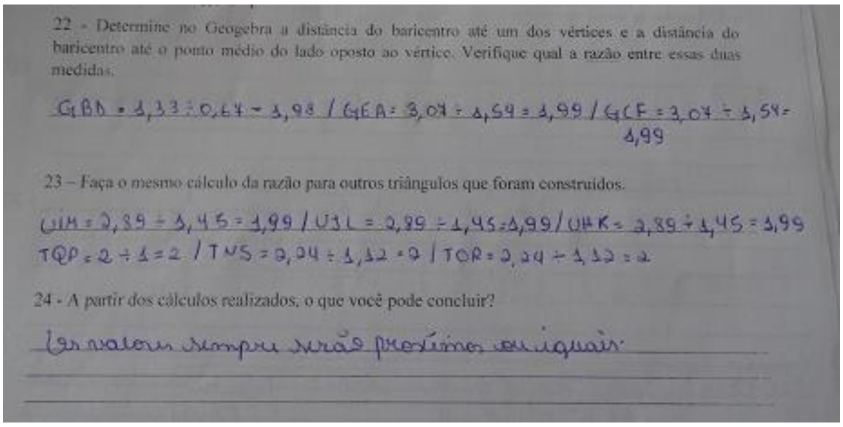
O VALOR DO BARICENTRO ATÉ O PONTO MÉDIO É A METADE DO VALOR DO BARICENTRO ATÉ O VÉRTICE

GH3 = 3,08

Fonte: Material produzido pelos alunos

Outros grupos realizaram os cálculos corretamente, mas não conseguiram se expressar tão bem, como pode ser observado nas figuras 15 e 16.

Figura 15: Conclusões dos alunos



22 - Determine no Geogebra a distância do baricentro até um dos vértices e a distância do baricentro até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Verifique qual a razão entre essas duas medidas.

GBD = 1,33 ÷ 0,67 = 1,98 / GEA = 3,07 ÷ 1,54 = 1,99 / GCF = 3,07 ÷ 1,54 = 1,99

23 – Faça o mesmo cálculo da razão para outros triângulos que foram construídos.

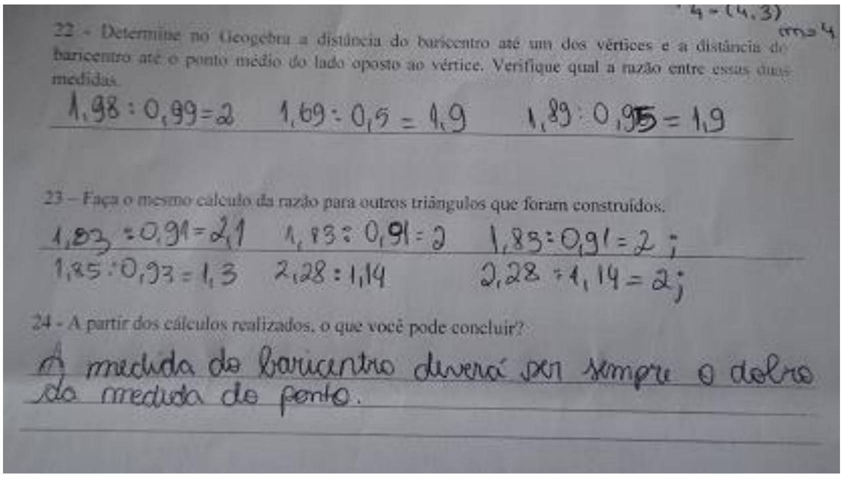
UIH = 2,89 ÷ 1,45 = 1,99 / UJL = 2,89 ÷ 1,45 = 1,99 / UHK = 2,89 ÷ 1,45 = 1,99
TQP = 2 ÷ 1 = 2 / TNS = 2,24 ÷ 1,12 = 2 / TOR = 2,24 ÷ 1,12 = 2

24 - A partir dos cálculos realizados, o que você pode concluir?

Os valores sempre serão próximos ou iguais

Fonte: Material produzido pelos alunos

Figura 16: Conclusões dos alunos



4 = (4,3)
m = 4

22 - Determine no Geogebra a distância do baricentro até um dos vértices e a distância do baricentro até o ponto médio do lado oposto ao vértice. Verifique qual a razão entre essas duas medidas.

1,98 : 0,99 = 2 1,69 ÷ 0,5 = 1,9 1,89 : 0,95 = 1,9

23 – Faça o mesmo cálculo da razão para outros triângulos que foram construídos.

1,83 ÷ 0,91 = 2,1 1,83 ÷ 0,91 = 2 1,83 ÷ 0,91 = 2;
1,85 ÷ 0,93 = 1,3 2,28 : 1,14 2,28 ÷ 1,14 = 2;

24 - A partir dos cálculos realizados, o que você pode concluir?

A medida do baricentro deverá ser sempre o dobro da medida do ponto.

Fonte: Material produzido pelos alunos

Repensando a prática de ensino, os alunos poderiam ter sido convidados a justificar geometricamente essa propriedade após levantar essa conjectura das razões entre as distâncias usando o GeoGebra. Teria sido uma forma de confirmarem suas conclusões e verificar que essa propriedade é verdadeira para todo e qualquer triângulo. Essa justificativa geométrica poderia ser realizada através de uma demonstração simples usando as relações existentes entre os pontos envolvidos (vértice, baricentro e ponto médio).

Por fim, como tarefa de casa os alunos construíram um triângulo com cartolina, marcaram o seu baricentro e trouxeram na aula seguinte junto com um pedaço de barbante para que pudéssemos verificar que o baricentro é o ponto de equilíbrio do triângulo, como pode ser visto na figura 17.

Figura 17: Baricentro

Fonte: Elaborado pelo autor

4 Reflexões sobre a prática

A proposta de ensino sobre o estudo do baricentro de um triângulo teve um impacto positivo na turma onde a sequência foi aplicada. De forma geral, os alunos estiveram bastante envolvidos com as atividades mostrando empenho na resolução das mesmas e dispostos a fazer as descobertas matemáticas que foram propostas ao longo do roteiro. Também demonstraram interesse em aprender tanto o conteúdo matemático em si quanto a trabalhar com o software, buscando seguir os passos corretamente e preocupando-se em fazer as observações e comentários usando a linguagem matemática adequada para cada situação.

Analisando todo o processo, acredita-se que os objetivos foram alcançados, uma vez que os alunos compreenderam os conceitos de mediana e baricentro e puderam aplicar seus conhecimentos na resolução de problemas. Além disso, a experiência também proporcionou uma aprendizagem diferente da tradicional, onde os alunos fizeram parte do processo de construção dos conceitos e puderam eles mesmos construir os triângulos, fazer suas observações e tirar conclusões próprias a respeito daquilo que foram observando. Ao introduzir o conteúdo de medianas e baricentro através da resolução de um problema associada ao uso de tecnologias digitais, os alunos tiveram uma interação maior com o conteúdo e com os colegas, pois foram trocando ideias entre si, sem que ninguém estivesse certo ou errado. Eles mesmos foram analisando suas hipóteses e repensando o que era coerente e o que deveria ser reavaliado.

Como já mencionado no corpo da pesquisa, alguns alunos demonstraram dificuldades em algumas atividades. Determinados grupos precisaram de mais auxílio que outros, sendo que alguns precisaram de mais ajuda para fazer as construções no GeoGebra, outros precisaram de orientações para conseguir visualizar os elementos em questão nas construções realizadas. Também tiveram grupos que não conseguiram visualizar e fazer a correspondência entre a altura do triângulo e a mediana relativa à base. E ainda tiveram alguns grupos que apresentaram dificuldades para se expressar ao responder algumas perguntas, pois tinham a preocupação de usar a linguagem matemática correta para descrever aquilo que estavam visualizando.

Uma das coisas que mais chamou a atenção foi a forma como os alunos resolveram os problemas que foram sugeridos ao final da sequência. Apesar de estarem usando o GeoGebra para desenvolver todas as demais tarefas, quando tiveram que resolver os problemas retirados do livro didático, a maioria dos grupos optou por resolvê-los do modo tradicional, usando papel e caneta e aplicando fórmulas. Apenas dois grupos usaram o software para resolver tais problemas. Sendo assim, acredito que seria necessário estimular os alunos a usar o software também em situações como essa para que percebam que não precisamos recorrer ao lápis e caderno sempre e que um mesmo problema pode ser resolvido de diversas formas.

Além disso, também seria interessante repensar a forma como esses problemas foram propostos, pois talvez não tenha ficado claro para a turma que eles poderiam ser resolvidos também utilizando o GeoGebra. Por serem problemas que podem ser resolvidos facilmente por meio da aplicação de fórmulas, isso também pode ter influenciado na escolha dos grupos em utilizar o lápis e papel. Sendo assim, poder-se-ia reformular os problemas de tal forma que a resolução se desse por meio do software ou ainda que fosse sugerido que esse recurso fosse utilizado para solucionar os problemas.

Apesar das dificuldades que alguns demonstraram, a experiência foi gratificante, pois foi possível envolver toda turma no desenvolvimento das atividades e todos se mostraram motivados em participar e resolver as tarefas.

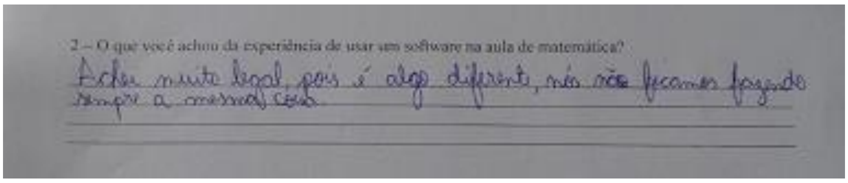
O uso do software no desenvolvimento dessa pesquisa se mostrou importante no processo de ensino e aprendizagem, pois possibilitou que os alunos criassem seus triângulos e pudessem interagir com eles, mudando a posição dos triângulos, de suas medianas e consequentemente, de seu baricentro. Ao utilizarem o software para resolver as atividades propostas através da construção dos triângulos, os alunos aplicaram os conhecimentos de geometria que já tinham, construíram novos conhecimentos, confirmaram hipóteses e propriedades e despertaram para uma nova maneira de aprender matemática, até então desconhecida para eles.

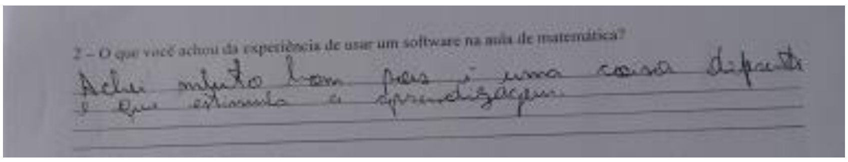
A possibilidade de estar manipulando suas construções despertou na turma interesse em saber mais; eles se mostraram dispostos a descobrir as relações que existiam nas diferentes construções, a aperfeiçoar seu conhecimento em relação aos triângulos e principalmente, a experimentar sem medo de errar. Isso tudo mostra o quanto o GeoGebra foi importante e contribuiu no processo de aprendizagem, confirmando que a tecnologia digital promove uma melhor percepção das características e propriedades geométricas por parte do aluno, valorizando o desenvolvimento de habilidades cognitivas e estimulando diferentes formas de raciocínio e a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática

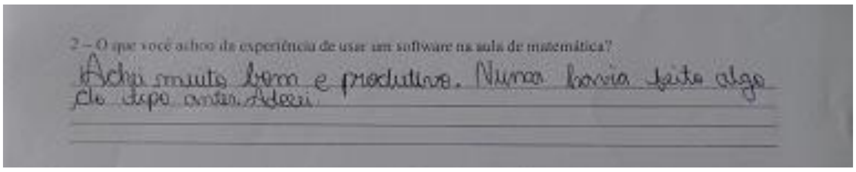
Ao responderem um questionário de opinião pessoal, os alunos tiveram a oportunidade e liberdade de se expressar em relação à proposta de ensino e ao uso de um software na aula de matemática. Os alunos manifestaram sua satisfação em trabalhar matemática de uma maneira diferente da tradicional podendo explorar uma ferramenta até então desconhecida para eles e que, na opinião deles, foi importante para a compreensão do conteúdo.

Ao perguntar sua opinião sobre a experiência de usar um software na aula de matemática muitos comentaram que foi uma forma diferente e divertida de abordar o conteúdo, estimulando a aprendizagem. Na figura 18 estão algumas das opiniões dos alunos em relação a essa experiência.

Figura 18: Opinião dos alunos quanto à experiência de usar um software


2 – O que você achou da experiência de usar um software na aula de matemática?
Achei muito legal, pois é algo diferente, nós não ficamos fazendo sempre a mesma coisa.


2 – O que você achou da experiência de usar um software na aula de matemática?
Achei muito bom pois é uma coisa diferente e que estimula a aprendizagem.



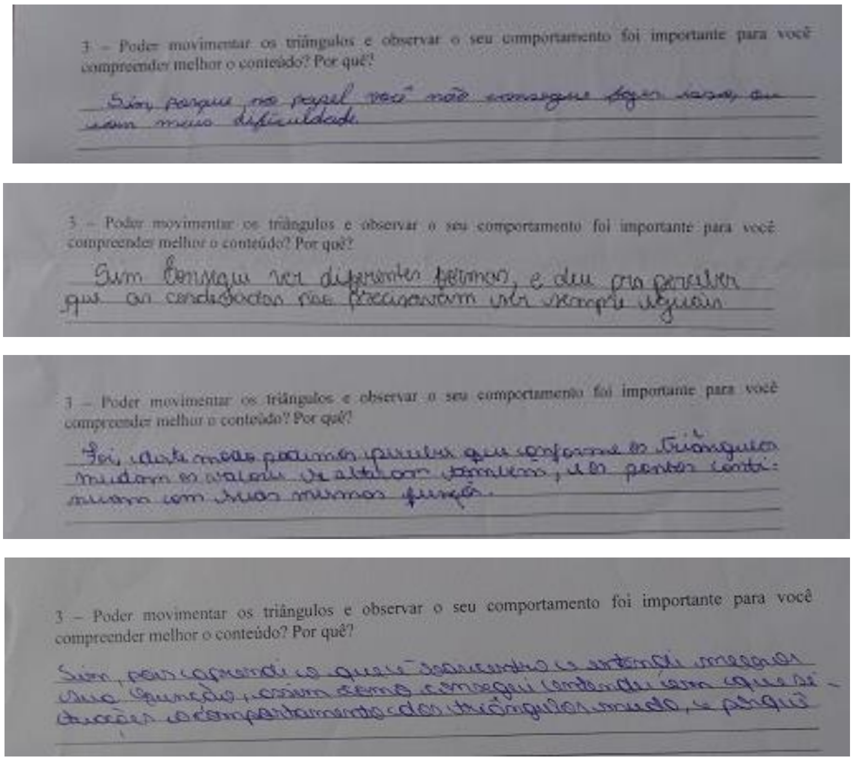
2 – O que você achou da experiência de usar um software na aula de matemática?

Achei muito bom e produtivo. Nunca havia feito algo do tipo antes.

Fonte: Material produzido pelos alunos

Também foi questionado se a possibilidade de movimentar os triângulos foi importante para a compreensão do conteúdo e por quê. Os alunos fizeram comentários sobre as limitações do papel e sobre as observações que fizeram ao movimentar os triângulos, como mostra a figura 19.

Figura19: Respostas dos alunos à questão 3



3 – Poder movimentar os triângulos e observar o seu comportamento foi importante para você compreender melhor o conteúdo? Por quê?

Sim, porque no papel você não consegue fazer isso, ou com mais dificuldade

3 – Poder movimentar os triângulos e observar o seu comportamento foi importante para você compreender melhor o conteúdo? Por quê?

3 – Poder movimentar os triângulos e observar o seu comportamento foi importante para você compreender melhor o conteúdo? Por quê?

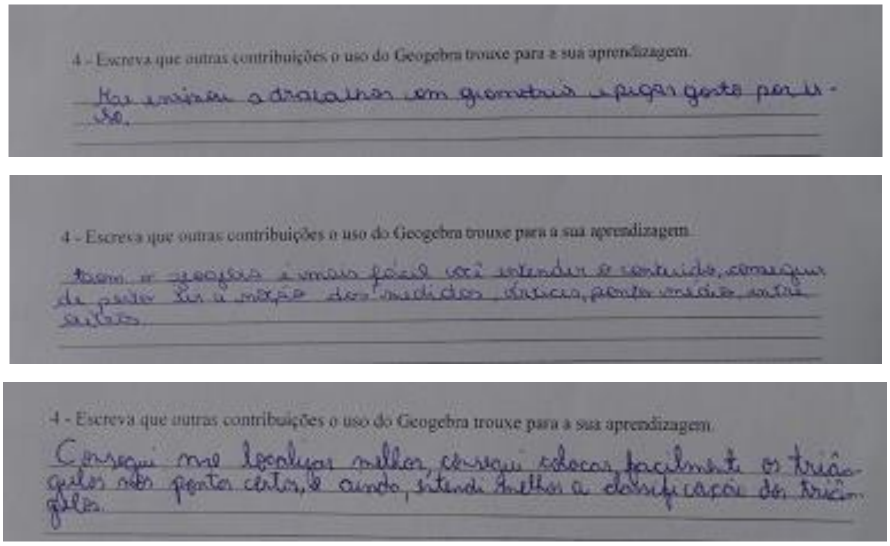
3 – Poder movimentar os triângulos e observar o seu comportamento foi importante para você compreender melhor o conteúdo? Por quê?

Fonte: Material produzido pelos alunos

Pelas respostas dadas pelos alunos, pode-se perceber que o uso do software contribuiu na compreensão do conteúdo, e permitiu que eles fossem parte integrante do processo de construção do conhecimento e autores de sua aprendizagem, fazendo observações, desenvolvendo conceitos e chegando às suas próprias conclusões. No papel provavelmente muito do que foi observado pelos alunos não seria possível, pois o software permitiu que eles percebessem as regularidades e propriedades que se mantém no triângulo quando algum vértice é movimentado, além de perceberem que as funções de cada elemento da construção se conservam, mesmo quando algum ponto é movimentado e que isso se deve às propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção.

Por último ainda fizeram comentários gerais sobre as contribuições do software para a sua aprendizagem, confirmando novamente que sua utilização foi muito significativa para a turma e que contribuiu, não somente na compreensão do conteúdo em questão, mas também em outros conteúdos anteriores que não estavam bem esclarecidos para alguns. Na figura 20 é possível ver alguns desses comentários.

Figura 20: Comentários dos alunos



Fonte: Material produzido pelos alunos

Analisando a posição dos alunos pode-se perceber o quanto é forte a questão do ensinar a aprender de formas diferentes. Existe uma necessidade de tornar as aulas de matemática mais significativas envolvendo o aluno na construção do conhecimento, tornando-o parte integrante e ativa desse processo e não um mero expectador. Cabe a nós professores proporcionar momentos de aprendizagem que despertem o interesse e a curiosidade do aluno para que ele se sinta disposto a aprender e provocado a ir em busca do conhecimento.

5 Considerações Finais

O processo de ensino e aprendizagem das medianas e do baricentro no ensino médio muitas vezes é considerado monótono e desinteressante por muitos alunos e também por alguns professores, por se limitar à aplicação de fórmulas prontas em atividades que nem sempre fazem sentido para os estudantes. Poder tornar esse assunto atrativo e palpável é um desafio para os educadores e a metodologia de resolução de problemas pode ser uma forma de aprimorar o estudo desse campo da matemática, pois possibilita que o aluno desenvolva o seu conhecimento a partir da busca pelas soluções dos problemas. Dessa maneira o aluno desenvolve sua capacidade cognitiva, podendo aplicar os conhecimentos adquiridos em situações que fazem mais sentido para eles e que possam ser associadas ao seu dia-a-dia. O ensino por meio da resolução de problemas possibilita que o aluno tenha um aprendizado dinâmico tornando esse processo mais prazeroso, estimulando o aluno a pensar, criar estratégias e construir novos conceitos.

O uso de um software de geometria dinâmica também pode ser uma forma de melhorar o ensino e a aprendizagem desse campo da matemática, pois os alunos se envolvem mais com as atividades e podem manipular os objetos fazendo movimentos e observações que o papel (figura estática) não permite.

O uso do software GeoGebra no estudo do baricentro teve importante contribuição na resolução dos problemas que foram propostos ao longo da sequência didática, uma vez que os alunos tiveram a possibilidade de criar um modelo matemático que representasse as condições estipuladas pelo problema, mas, acima de tudo, pela possibilidade de manipular as construções para comparar diferentes situações.

Poder usar o software como ferramenta auxiliar na resolução de problemas possibilitou aos alunos serem mais autônomos e autoconfiantes, dando a eles a oportunidade de conhecer outras formas de pensar e perceber que um mesmo problema pode ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos e que, mais importante que memorizar fórmulas ou equações, é compreender e descobrir diferentes formas para encontrar a solução de problemas, como é proposto pelos PCN+ (2002) e por Santos (2012).

Apesar de alguns alunos ainda sentirem a necessidade de usar o papel para resolver alguns problemas, o uso do software se torna uma ferramenta fundamental para poder mostrar que há outras maneiras de resolver um problema e que a matemática não se limita a fazer cálculos. Para aprimorar ainda mais o estudo do baricentro, seria interessante fazer um link com a Física, uma vez que o baricentro é um importante tópico de estudo dessa área do conhecimento.

Por todas suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem do baricentro, e por explorar vários conhecimentos matemáticos, por meio dessa pesquisa foi possível perceber que o GeoGebra é uma ferramenta que pode contribuir muito no ensino da Matemática e, quando é trabalhado junto com a resolução de problemas de forma planejada, pode contribuir ainda mais no processo de ensino e aprendizagem.

6 Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** – PCN+; Brasília, MEC/SEB, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**; Volume 2: Matemática e Suas Tecnologias. Brasília, MEC/SEB, 2006.

D'AMBRÓSIO, B. S. Como ensinar Matemática hoje? **Temas & Debates**, Ano II, n. 2, Brasília: SBEM, p. 15-19, 1989.

DANTE, L. R. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

GRAVINA, M. A. et al. **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação do professor de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2011.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. Como usar a Geometria Dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. In: Congresso da SBC, 26, Campo Grande, 2006. **Anais...** Campo Grande: Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. p.120-128

ONUCHIC, L. R.; ZUFFI, E. M. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores.** Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática , 11, sept. 2007, p. 79-97. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_009.pdf

SANTOS, L. P. **Geometria Analítica com o Geogebra: adaptando o livro didático para ensinar através da Resolução de Problemas.** 2012. 49 f. Trabalho de conclusão (Licenciatura em Matemática a distância) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Pitimbu, 2012.

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, RG nº ___________________, responsável pelo aluno ____, da turma 331, declaro por meio deste termo que concordo que o(a) aluno(a) participe da pesquisa sobre o estudo do baricentro de um triângulo no terceiro ano do Ensino Médio, desenvolvida pela pesquisadora SHEILA FABRICIA SCHUCK BACKES. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada pela Profª. Drª. DÉBORA DA SILVA SOARES, que é docente do Instituto de Matemática da UFRGS, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

1 – Analisar o ensino e a aprendizagem das medianas e do baricentro de um triângulo através da integração de mídias digitais.

2 – Elaborar uma sequência didática envolvendo definições, observações, resolução de problemas e atividades a serem desenvolvidas com o software Geogebra.

3 – Estimular o uso de novas tecnologias e objetos de aprendizagem para ensino e aprendizagem de geometria analítica no terceiro ano do Ensino Médio.

4 – Validar a realização, compreensão e apropriação das atividades propostas na sequência didática.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc., bem como da participação em aulas, em que ele(a) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc., sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado, poderei contatar a pesquisadora responsável.

Morro Reuter, ______ de _________________ de ______

Assinatura do responsável:

Assinatura da pesquisadora:

Assinatura da Orientadora da pesquisa: